ATAS DO XXXIII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Barcelos
5 e 6 de julho 2023

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ATAS DO XXXIII

SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROCEEDINGS OF THE XXXIII

RESEARCH SEMINAR IN MATHEMATICS EDUCATION

Painel Editorial
Editors

Alexandra Gomes
Ana Barbosa
Eduardo Cunha
Fátima Fernandes
Helena Martinho
Hélia Pinto
Joaquim Pinto
Nádia Ferreira

Barcelos 2023
PORTUGAL

Periodicidade Anual URL: https://www.apm.pt/siem_atas

APM
Associação de Professores
de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título:	Atas do XXXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática
Editor:	APM Associação de Professores de Matemática
ISBN:	978-972-8768-78-2
ISSN:	2795-5192
[Suporte: Eletrónico];	[Formato: PDF / PDF/A]
Coordenação:	Hélia Pinto
Revisão Técnica:	Nádia Ferreira
Design gráfico e paginação:	Mário Baía
Data de publicação:	2023

Comissão Científica
Scientific Committee

Marisa Quaresma, *UIDEF, IE, Universidade de Lisboa, Portugal*
Nádia Ferreira, *CIE, ISPA - Instituto Universitário*
Nélia Amado, *UIDEF, IE, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve, Portugal*
Paula Teixeira, *Agrupamento de Escolas João de Barros, Portugal*
Paulo Afonso, *CIPEC, Instituto Politécnico de Castelo Branco, Portugal*
Pedro Tadeu, *CI&DEI - Escola Superior de Educação, Comunicação e Desporto - Instituto Politécnico da Guarda, Portugal*
Raquel Santos, *CIEQV, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal*
Rosa Ferreira, CMUP, Universidade do Porto, Portugal
Teresa Neto, *CIDTFF, Universidade de Aveiro, Portugal*

Comissão Organizadora
Organizing Committee

Alexandra Gomes, *CIEC, IE, Universidade do Minho, Portugal*
Ana Barbosa, *CIEC-UM, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal*
Eduardo Cunha, *Colaborador do LabDCT, laboratório do CIDTFF da Universidade de Aveiro, na UTAD*
Fátima Fernandes, *CIEC-UM, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal*
Helena Martinho, *CIEd-UM, Universidade do Minho, Portugal*
Hélia Pinto, *CI&DEI, Instituto Politécnico de Leiria, Portugal*
Joaquim Pinto, *Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro, Portugal*
Nádia Ferreira, *CIE, ISPA - Instituto Universitário*

ÍNDICE

Cartazes
Posters

Introdução

Alexandra Gomes
Ana Barbosa
Eduardo Cunha
Fátima Fernandes
Helena Martinho
Hélia Pinto
Joaquim Pinto
Nádia Ferreira

O XXXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), promovido pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática (APM), decorreu nos dias 5 e 6 de julho de 2023, pela primeira vez em Barcelos, nas instalações do Instituto Politécnico do Cávado e Ave e em alguns espaços do centro histórico de Barcelos, cedidos pela Câmara Municipal de Barcelos.

Este seminário antecedeu e intersetou o Encontro Nacional de Professores de Matemática, ProfMat 2023 com o objetivo de proporcionar a partilha de experiências e conhecimentos entre a comunidade de investigadores em Educação Matemática e a comunidade dos professores que ensinam Matemática.

O SIEM iniciou com uma conferência plenária proferida por João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, e intitulada Promover o raciocínio matemático dos alunos. Nesta conferência foram dados a conhecer resultados de investigação do projeto REASON que apontam pistas importantes sobre como promover a capacidade de raciocínio matemático na prática letiva e na formação inicial e contínua de professores.

O programa do encontro contou com um painel plenário intitulado, A matemática fora da sala de aula – um percurso de 15 anos de sucesso com alunos e professores, conduzido por Ana Barbosa e Isabel Vale, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. No painel partilharam resultados de investigação de dois projetos de investigação centrados nos trilhos matemáticos — MatCid- A Matemática e a Cidade e MaSCE3- Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe.

Entre as sessões que foram partilhadas com o ProfMat, encontra-se a mesa redonda e três conferências com discussão. A mesa redonda, moderada por José Miguel Sousa, versou sobre: STE(A)M em Educação Matemática e contou com a participação de Cristina Oliveira da Costa (Instituto Politécnico de Tomar), Helena Rocha (Universidade Nova de Lisboa), Sara Cruz (Instituto Politécnico do Cávado e Ave) e Teresa F. Blanco (Universidade de Santiago de Compostela). As três conferências com discussão foram as seguintes: Como apoiar os alunos a desenvolver o raciocínio matemático? por João Pedro da Ponte; Avaliação Pedagógica e Prática Letiva do Professor de Matemática: Que mudanças? por António Borralho da Universidade de Évora e, por fim, As práticas do Pensamento Computacional no Ensino da Matemática por Carlos Albuquerque da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ocorreram também, à semelhança do que aconteceu em encontros anteriores, simpósios de apresentação e discussão de comunicações e posters propostos pelos participantes. Refira-se que todas as propostas foram submetidas a um processo de revisão científica por pares do qual resultou um total de catorze comunicações e sete posters que foram apresentados nos simpósios.

O programa do SIEM incluiu ainda, o espaço GTI, painel moderado por Lurdes Serrazina da Escola Superior de Educação de Lisboa, sobre o tema O papel desempenhado pela investigação no desenvolvimento e implementação das aprendizagens essenciais do ensino básico e do ensino secundário. O painel contou com a presença de Elvira Santos da Equipa das AE do Ensino Básico e António Domingos da equipa das AE do Ensino Secundário.

Os textos presentes nestas atas estão organizados em torno de duas secções. Numa primeira secção apresentam-se os relativos às plenárias e numa segunda secção, os relativos às comunicações e posters apresentados no seminário. Esperamos que este livro de atas possa contribuir para divulgar os progressos e as novas temáticas na investigação em Educação Matemática, quer enriquecendo os estudos em curso, quer abrindo novas linhas de atuação.

Alexandra Gomes
Ana Barbosa
Eduardo Cunha
Fátima Fernandes
Helena Martinho
Hélia Pinto
Joaquim Pinto
Nádia Ferreira

Conferências Plenárias
Plenary Talks

Promover o raciocínio matemático dos alunos: resultados de investigação

Promoting students' mathematical reasoning: research findings

João Pedro da Ponte[1]

[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *Esta conferência apresenta alguns dos resultados do projeto REASON, sobre o trabalho e a formação do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos. Começo por discutir, brevemente, a noção de raciocínio matemático, nas suas diferentes facetas, apresentando de seguida um exemplo de situação de sala de aula. Termino apresentando um resumo dos principais resultados e produtos do projeto.*

Abstract. *This lecture presents some of the findings of the project REASON on teacher practices and teacher education to promote students' mathematical reasoning. I begin by briefly discussing the notion of mathematical reasoning in its different guises, and then present an example of a classroom situation. I end by summarizing the main results and products of the project.*

Palavras-chave: Raciocínio matemático; Tarefas; Formação do professor.

Keywords: Mathematical reasoning; Tasks; Teacher education.

Raciocínio matemático

À primeira vista, parece que todos sabem o que é raciocinar. Na verdade, esta palavra tem vários significados, não coincidentes. Por exemplo, um dicionário indica:

> Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. *ratiocinári*) (Dicionário Porto Editora)

Não sigo nenhum destes significados. Assim, assumo que raciocinar é "fazer inferências de forma justificada, ou seja, obter nova informação a partir de informação dada", que me parece mais ajustada ao trabalho que fazemos no ensino-aprendizagem da Matemática.

Distinguem-se, habitualmente três tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo. O raciocínio dedutivo é característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental. Constitui "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (Oliveira, 2002, p. 178). É desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária. Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (Oliveira, 2008, p. 7). Assume a forma de demonstração: "raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (Ponte et al., 2008, p. 89). Este tipo de raciocínio tem principalmente o papel de validação de conhecimento.

Os raciocínios indutivo e abdutivo têm, também, um papel importante. Como diz George Pólya (1954), a indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. Pelo seu lado, a abdução é um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência. Como indica Charles Peirce num texto de 1914, "a abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjetura… é o processo de escolher uma hipótese" (em Silva, 2009). Estes dois tipos de raciocínio têm um papel fundamental na construção de novo conhecimento. Não garantem obter resultados necessariamente verdeiros, mas sem eles não é possível progredir.

As representações matemáticas são um suporte para raciocinar e para comunicar o raciocínio. As representações assumem um papel decisivo na aprendizagem: "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75). É impossível aceder diretamente ao raciocínio matemático dos alunos — para o conhecer é necessário que estes o comuniquem, através de diferentes representações. Na sala de aula é necessário trabalhar com diferentes representações: "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (ME, 2007, p. 9).

Um modelo muito completo sobre o raciocínio matemático for proposto por Jeannotte e Kieran (2017). Estas autoras distinguem, em termos de estrutura, os raciocínios *dedutivo*, *indutivo*, e *abdutivo*. No que respeita a processos, consideram os que estão relacionados com a procura de semelhanças e diferenças, distinguindo entre *generalizar*, *conjeturar*, *identificar padrões*, *comparar* e *classificar*. Consideram também os processos relacionados com *validar*, *justificar*, *provar* e *provar formalmente*. Finalmente, consideram um processo auxiliar, *exemplificar*.

No nosso grupo de investigação, já desde há alguns anos (Mata-Pereira & Ponte, 2012), vimos usando um outro modelo que considera igualmente os três tipos de raciocínio, focando-se essencialmente em três processos centrais, *conjeturar*, *generalizar* e *justificar*. Este modelo procura relacionar o raciocínio com a formulação de questões *para investigação* e a *resolução de problemas*, e também relacionar *raciocinar* com *significar* e *representar* (Figura 1).

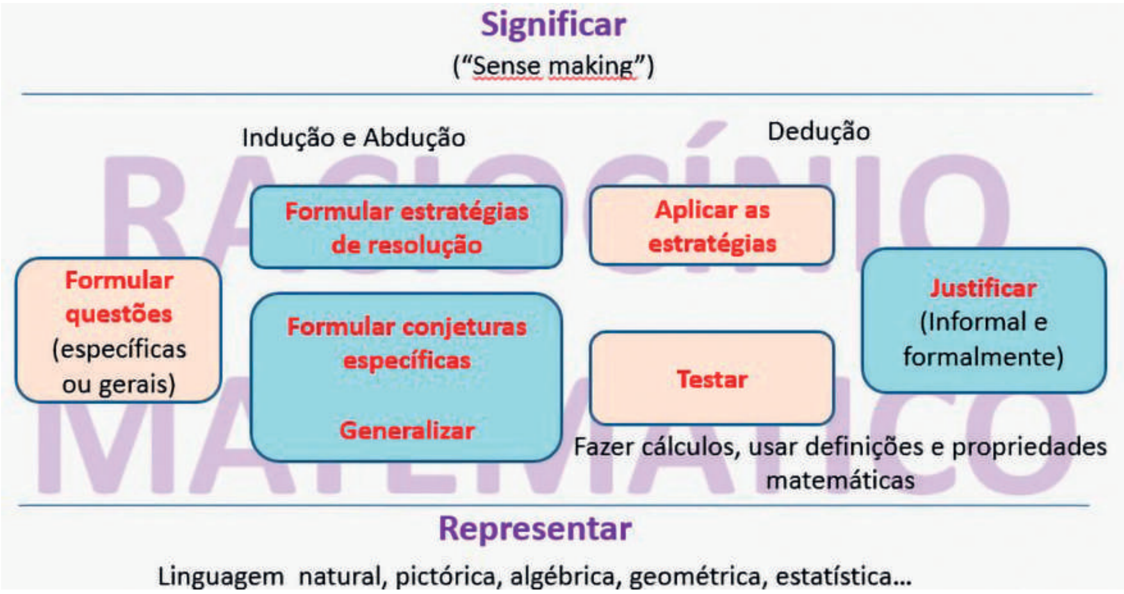


Figura 1. Modelo do raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2012)

Um exemplo: Tarefa - Introdução às inequações

Um bom exemplo de uma tarefa suscetível de promover o raciocínio dos alunos é a que foi proposta a uma turma do 9.º ano a propósito das inequações:

Considera a desigualdade 2 < 3.

1. Verifica se se mantém a desigualdade quando:
   - Adicionas a ambos os membros da desigualdade um número positivo.
   - Adicionas a ambos os membros da desigualdade um número negativo.
   - Multiplicas ambos os membros da desigualdade por um número positivo.
   - Multiplicas ambos os membros da desigualdade por um número negativo.
2. As conclusões a que chegaste na questão 1 são válidas para qualquer desigualdade? Justifica a tua resposta.

Usando raciocínio indutivo, os alunos conseguiram chegar à generalização dos princípios de equivalência das inequações. Com raciocínio dedutivo, muitos justificaram o princípio relativo à multiplicação de ambos os membros da desigualdade por um número negativo. Os outros casos eram mais difíceis de justificar. Uma possível justificação para o primeiro caso (usando os números 2 e 3, "Temos 2 < 3, será que 2+a < 3+a?") é a seguinte:

1. 2+a < 2+a+1 (por definição de sucessor de um número natural)
2. 2+a+1 = 2+1+a (propriedade comutativa)

3. 2+1=3 (definição de 3 como sendo o sucessor de 2)
4. 2+a < 3+a

A generalização para quaisquer outros valores, para além de 2 e 3, é muito simples de fazer.

Experiências de formação

No âmbito do projeto foram realizadas diversas experiências de formação. Assim, por exemplo, no que respeita à capacidade de futuros professores dos 1.º e 2.º ciclos de raciocínio em geometria, Brunheira (2019, 2020; Brunheira & Ponte, 2018a, 2018b) concluiu que os processos de *classificar*, *definir* e *justificar generalizações* constituem desafios cognitivos elevados para os futuros professores, que mobilizam e promovem o raciocínio geométrico, com especial destaque para o raciocínio espacial. Verificou, também que, na sua aprendizagem, há vários fatores que exercem forte influência: a compreensão do processo matemático, as características das figuras envolvidas, a sua conceptualização prévia, e a forma como são progressivamente estruturadas pelos futuros professores. Na experiência de formação, destaca-se a importância de realizar tarefas que favoreçam uma estruturação geométrica completa e flexível das figuras, nomeadamente através da exploração de diferentes resoluções; promover a discussão de ideias e a negociação de significados, bem como a reflexão sobre a aprendizagem; e utilizar recursos físicos e digitais que medeiem a construção e operação com imagens e modelos mentais de objetos e relações.

No que respeita à capacidade de futuros professores dos 1.º e 2.º ciclos de raciocínio/álgebra, Cabral (2021; Cabral et al., 2019, 2021) verificou que o conhecimento matemático das formandas, bem como a sua capacidade de perceber o pensamento algébrico dos alunos evoluíram positivamente ao longo da experiência de formação. A autora mostra que a experiência de formação contribuiu para o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada sobre as capacidades e conhecimentos matemáticos relacionados com a *early algebra*. Ao longo da experiência de formação, existiram melhorias no modo como as formandas descrevem e interpretam o pensamento dos alunos, ainda que com algumas dificuldades associadas à interpretação. Concluiu, também, que a capacidade de perceber o pensamento dos alunos e o conhecimento matemático das formandas estão relacionados entre si, influenciando-se mutuamente. Verificou, ainda que existem vantagens em integrar aspetos associados ao pensamento dos alunos numa unidade curricular de conteúdo matemático, dado que o conhecimento matemático das formandas é beneficiado pela análise do trabalho dos alunos dos anos iniciais, através de diferentes recursos.

Outros estudos debruçaram-se, ainda, sobre os modelos sobre o raciocínio. Um deles (Brocardo et al., 2022), formulou um quadro com seis tipos de ações do professor associadas ao momento de trabalho na sala de aula (*convidar*, *apoiar*, *guiar*, *desafiar*, *informar* e *sugerir*), indicando as suas potencialidades no desenvolvimento de processos de raciocínio matemático dos alunos, bem como a sua inter-relação. As ações orientadoras de *apoiar* e *guiar* combinam-se com as ações de *informar* e *sugerir*, bem como com ações de *desafiar*, nas quais o professor leva os alunos a ampliar seu pensamento, a considerar novas possibilidades e a justificar as suas afirmações.

Nas experiências de formação de professores e futuros professores do 1.º e 2.º ciclos (Mendes et al., 2022) ressaltam os seguintes resultados:

- Após a experiência de formação, verifica-se uma maior clareza dos futuros professores na explicitação do que entendem serem os processos de raciocínio.
- Os futuros professores deparam-se com mais desafios associados ao raciocínio matemático nas fases de monitorização da exploração das tarefas e da sua discussão final.
- A formação inicial deve valorizar atividades que apoiem os futuros professores na compreensão dos processos de raciocínio matemático e que os envolvam na planificação de tarefas e análise da sua exploração na prática.

Pelo seu lado, as experiências de formação de professores e futuros professores do 3.º ciclo e secundário (Mata-Pereira & Ponte, 2017, 2018a, 2018b; Oliveira & Henriques, 2021) mostram que:

- As futuras professoras são capazes de fundamentar a opção por uma tarefa matemática com potencial para promover o raciocínio matemático de alunos, de acordo com princípios abordados na formação, atendendo também a diferentes níveis de conhecimento e capacidades dos alunos.
- É através do "levar à prática" a tarefa que as futuras professoras conseguem atribuir maior sentido a tais princípios e aprofundar o conhecimento sobre o potencial da tarefa tendo em conta a especificidade dos seus alunos.
- A forma como a formação para professores em serviço foi concebida e realizada (estabelecendo forte ligação entre teoria e prática) contribuiu para que os professores aprofundassem a sua compreensão dos processos de *generalizar* e *justificar*, além de sua capacidade de fomentar e identificar tais processos no trabalho com seus alunos.

Produtos do projeto

Para além dos artigos produzidos no projeto, alguns dos quais referidos acima, o projeto produziu diversas brochuras de apoio a professores e a formadores de professores, dedicadas ao trabalho de promoção do raciocínio matemático junto dos alunos e à correspondente formação de professores (disponíveis em http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/). Elaborou também um livro (disponível no mesmo website) onde se apresentam princípios da elaboração de tarefas e para a formação de professores, em resultado das experiências de formação realizadas. Estes materiais são de acesso livre o constituem um importante recurso para todos os professores e formadores que procuram reforçar o seu trabalho no tema do raciocínio matemático, uma capacidade matemática que merece destaque nas presentes orientações curriculares em Portugal e em muitos outros países.

Referências

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., & Ponte, J.P. (2022). Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. *Educación Matemática, 34*(2), 101-133.

Brunheira, L. (2019). O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos. Tese de doutoramento.

Brunheira, L., & Ponte, J.P. (2018). Definir figuras geométricas: Uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras. *Quadrante, 27*(2), 133-159.

Brunheira, L., & Ponte, J.P. (2018). Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Zetetiké*, *26*(3), 464-485.

Brunheira, L., & Ponte, J.P. (2019). From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 65-80.

Brunheira, L., & Ponte, J.P. (2019). Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos. *BOLEMA, 33*(66), 88-108.

Brunheira, L. (2020). Raciocínio espacial e pensamento algébrico: o estabelecimento de conexões na formação inicial de professores. *Da Investigação às Práticas*, *10*(2), 69-89.

Cabral, J. (2021). O conhecimento matemático de futuras educadoras e professoras e a sua capacidade de perceber o pensamento algébrico das crianças. Tese de doutoramento.

Cabral, J., Oliveira, H., & Mendes, F. (2019). O pensamento funcional e a capacidade de perceber o pensamento funcional de futuras educadoras e professoras dos anos iniciais. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(3), 50-74.

Cabral, J., Oliveira, H., & Mendes, F. (2021). Preservice teachers' mathematical knowledge about repeating patterns and their ability to notice preschoolers algebraic thinking. *Acta Scientiae*, *23*(6), 30-59.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1–16.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, *21*(2), 81-110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21*(2), 81-110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169–186.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2018). Teacher's actions to promote students' justifications. *Acta Scientiae*, 20(3), 487-505.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. *BOLEMA, 32*(62), 781-801.

Mendes, F., Delgado, C., & Brocardo, J. (2022). Desafios dos futuros professores na planificação e exploração de tarefas que promovem o raciocínio matemático *Acta Scientiae*, 24(4), 147-182.

Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 25-40). Lisboa: SEM-SPCE.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Oliveira, H., & Henriques, A. (2021) Preservice mathematics teachers' knowledge about the potential of tasks to promote students' mathematical reasoning. *International Journal of Research in Education and Science, 7*(4), 1300-1319.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2022). *Raciocínio matemático e formação de professores*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Disponível em http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/.

Ponte, J.P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2023). Challenging students to develop mathematical reasoning. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all.* Springer.

Rodrigues, M., Brunheira, L., & Serrazina, L. (2021). A framework for prospective primary teachers' knowledge of mathematical reasoning processes. *International Journal of Educational Research, 107*, 101750.

Santos, L., Mata-Pereira, J., Ponte, J.P., & Oliveira, H. (2022). Teachers' understanding of generalizing and justifying in a professional development course. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1).

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática, 101*, 37-41.

Vieira, W., *Rodrigues*, M., & Serrazina, L. (2020). O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. *Quadrante, 29*(1), 8-35.

A matemática fora da sala de aula – um percurso de 15 anos de sucesso com alunos e professores

Mathematics outside the classroom – a successful 15-year journey with students and teachers

Ana Barbosa[1,2,3], *Isabel Vale*[1,2]

[1]Instituto Politécnico de Viana do Castelo, anabarbosa@ese.ipvc.pt, isabel.vale@ese.ipvc.pt

[2]CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho

[3]inED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico do Porto

Resumo. *Neste texto apresenta-se uma síntese de um percurso de 15 anos de trabalho, de intervenção e investigação, centrado no ensino e aprendizagem da matemática fora da sala de aula, particularmente nos trilhos matemáticos. Optou-se por organizar as ideias numa perspetiva evolutiva, enquadrando o ponto de partida deste percurso e o modo como os resultados foram influenciando o trabalho subsequente até se chegar aos trilhos matemáticos em ambiente digital. Ao longo do texto são discutidos resultados emergentes da participação em projetos, nacionais e internacionais, bem como de estudos empíricos realizados ao longo deste período de tempo, sublinhando alguns aspetos que consideramos de maior relevância para os (futuros) professores.*

Abstract. *This text presents a summary of 15 years of work, involving intervention and research, focused on the teaching and learning of mathematics outside the classroom, particularly math trails. We have chosen to organize the ideas in an evolutionary perspective, framing the starting point of this journey and the way in which the results have influenced subsequent work until we reach the idea of math trails in a digital environment. Throughout the text, we discuss emerging results from the participation in national and international projects, as well as empirical studies carried out over this period of time, emphasizing some aspects that we consider to be of greater relevance to (future) teachers.*

Palavras-chave: matemática fora da sala de aula, trilho matemático, resolução e formulação de problemas, formação de professores.

Keywords: mathematics outside the classroom, math trail, problem solving and posing, teacher training.

Matemática fora da sala de aula

As mais recentes recomendações para o ensino e a aprendizagem da Matemática sublinham a importância de aspetos mais transversais, para além do conhecimento matemático, reconhecidos como determinantes no sucesso dos alunos nesta disciplina. Salienta-se a necessidade de: envolver todos os alunos em experiências significativas, de natureza individual ou colaborativa; desenvolver as capacidades de pensar matematicamente e dar sentido às ideias matemáticas; promover o estabelecimento de conexões entre ideias, entre ideias e procedimentos matemáticos, entre áreas curriculares e entre conteúdos matemáticos escolares e situações da realidade dos alunos; promover uma atitude positiva dos alunos face à matemática (DGE, 2021; NCTM, 2014). É por isso importante encontrar estratégias que, em vez de afastarem os alunos desta disciplina, evidenciem a sua beleza e utilidade, estratégias que os ajudem a perceber que se trata de uma área do conhecimento acessível a todos e com inúmeras aplicações.

A juntar aos princípios anteriormente elencados, acrescenta-se o facto de a aprendizagem ser um processo que ocorre diariamente, de forma mais ou menos organizada e em diferentes contextos, não estando confinada à sala de aula nem ao tempo que os alunos lá permanecem (Kenderov et al., 2009). Portanto, neste âmbito, é preciso também considerar o papel fundamental das tarefas realizadas fora das quatro paredes da sala de aula e a aprendizagem que daí decorre, sejam essas tarefas orientadas pelo professor, por terceiros ou até da iniciativa dos alunos. A expressão aprendizagem fora da sala de aula remete-nos no fundo para contextos cujas características se afastam das dos espaços mais formais da escola, podendo ser espaços ao ar livre, dentro ou fora do contexto escolar, ou ambientes fechados fora do edifício escolar. No entanto também se pode aqui considerar a simples saída do ambiente da sala de aula, permanecendo no edifício da escola. O recurso a contextos não formais de aprendizagem, como o meio envolvente, poderá proporcionar aos alunos experiências ricas e significativas, que ajudam a estabelecer a ponte com o que se aprende formalmente na sala de aula, permitindo naturalmente o estabelecimento de conexões matemáticas externas (e.g. Barbosa & Vale, 2022; Vale et al., 2015). Há que destacar que o ensino e a aprendizagem da matemática ocorrem fundamentalmente na sala de aula, no entanto é importante diversificar os contextos educativos e as experiências proporcionadas aos alunos para que possam apreciar na sua plenitude a essência da matemática.

Neste âmbito destacam-se os trilhos matemáticos, que se definem como uma sequência de tarefas ao longo de uma percurso pré-planeado (com início e fim), compostos por um conjunto de paragens nas quais os alunos resolvem tarefas matemáticas no ambiente que os rodeia (Vale et al., 2019, adaptado de Cross, 1997). Este tipo de experiência fomenta a resolução de tarefas desafiantes e autênticas, contextualizadas no meio envolvente, a aplicação dos conhecimentos adquiridos em contexto formal e o desenvolvimento de capacidades transversais como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação e o estabelecimento de conexões de natureza diversificada (Barbosa & Vale, 2022; Richardson, 2004). Simultaneamente, tem subjacente os princípios da aprendizagem ativa, uma vez que facilita, em simultâneo, o envolvimento cognitivo, social e físico dos alunos, destacando-se, assim, a par do conhecimento, a relevância do domínio afetivo e do movimento na atenção e na motivação com que os alunos encaram e se envolvem na atividade matemática.

Trilhos matemáticos – retrospetiva do percurso

Neste texto, apresenta-se uma síntese do trabalho por nós desenvolvido, ao longo de 15 anos, no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática fora da sala de aula e particularmente no âmbito dos trilhos matemáticos.

Projeto MATCID

O Projeto *MATCID – A Matemática e a Cidade*[1] foi o ponto de partida para começar a compreender o potencial das conexões matemáticas externas, exploradas a partir da resolução e formulação de tarefas emergentes do contexto próximo. Este projeto surgiu na sequência de um conjunto de fatores: a constatação da falta de cultura científica e da falta de interesse pela Matemática, aspetos que influenciam negativamente o desempenho dos alunos; a crença que a matemática deve ser acessível a todos; a consciência que a matemática está em tudo o que nos rodeia, facilitando a sua contextualização com base no meio envolvente. Com base nestes pressupostos, pretendia-se motivar professores em formação, alunos e a população em geral para a beleza e utilidade da matemática no dia a dia, descobrindo-a e revelando-a, explorando os diversos aspetos da cidade em que vivem.

A principal vertente deste projeto, e talvez a mais inovadora, foi a formulação de problemas, explorada com os estudantes da formação inicial de professores. Na altura sabíamos que os objetos teriam um papel preponderante e que deles poderiam emergir os conceitos matemáticos a explorar e posteriormente as tarefas. Assim, para garantir alguma diversidade a este nível, foi feita uma pesquisa por categorias de objetos que tivessem potencial para exploração matemática (e.g. jardins, edifícios, janelas, ferro forjado, azulejos, sinalética, documentos, artesanato). Foi notória a dificuldade dos futuros professores na formulação de problemas usando a estratégia *aceitando os dados* (Brown & Walter, 2005), por falta de experiências prévias regulares desta natureza. Houve necessidade de realizar este trabalho por etapas, começando por uma recolha fotográfica de elementos da cidade, passando posteriormente a uma listagem dos conceitos matemáticos que poderiam ser implicados e só depois as tarefas eram formuladas. Na figura 1 são apresentados dois exemplos.

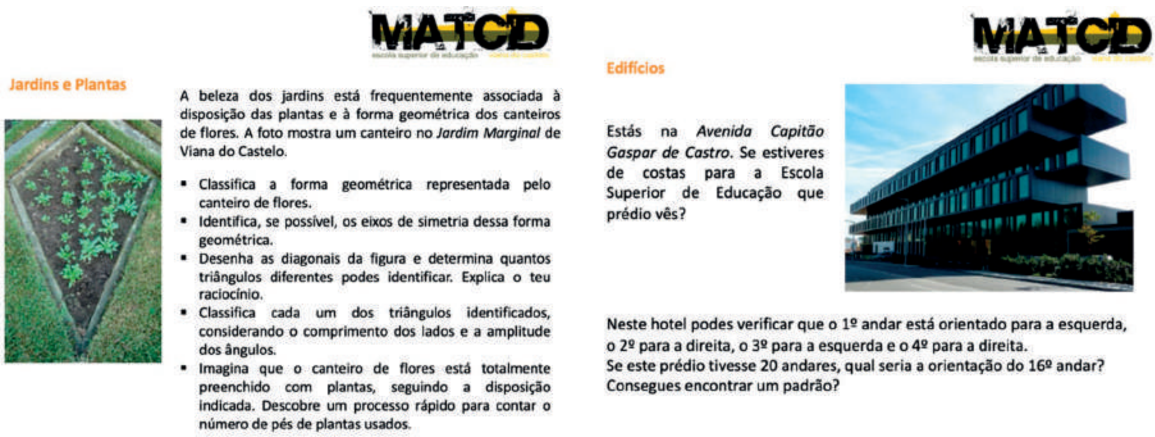


Figura 1. Exemplos de tarefas formuladas no âmbito do Projeto MATCID

[1]Projeto financiado pelo Programa Ciência Viva, 2006 - 2008.

A análise do trabalho desenvolvido, tendo por base a observação em sala de aula e os documentos produzidos pelos estudantes, permitiu-nos perceber: que determinados temas matemáticos eram mais frequentes, como a Geometria e a Álgebra (nomeadamente os padrões); dificuldades na clareza da formulação das tarefas; a predominância de situações da semi-realidade; o desenvolvimento de um olhar mais atento, por parte dos estudantes, para a matemática que os rodeia e a consciência do potencial deste contexto para o ensino e a aprendizagem (Vale et al., 2009).

Após a conclusão do Projeto MATCID, a temática da matemática fora da sala de aula foi retomada nos cursos de formação inicial de professores da ESE-IPVC, dando lugar à realização de alguns estudos de natureza qualitativa, desta vez com a tónica nos trilhos matemáticos (e.g. Barbosa & Vale, 2016; Barbosa et al., 2015; Vale & Barbosa, 2021; Vale et al., 2015; Vale et al., 2019). Nesta fase houve uma transição do foco na formulação de tarefas isoladas para a formulação de uma sequência de tarefas a resolver num local particular, associadas a elementos do contexto, distribuídos espacialmente ao longo de um percurso. Foi possível refinar algumas fragilidades detetadas na implementação do projeto MATCID, incluindo nos programas de algumas unidades curriculares módulos de formação sobre resolução e formulação de problemas, criatividade, comunicação, raciocínio e conexões, sendo também dinamizadas discussões coletivas incidentes nas tarefas formuladas, permitindo a sua reformulação.

A integração de um consórcio europeu no âmbito do Projeto *MaSCE3 – Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe*[2], trouxe a oportunidade de contactar com uma abordagem diferente aos trilhos matemáticos, acrescentando a possibilidade do recurso a tecnologia digital, em particular a aplicação MathCityMap (MCM), disponível para utilização em dispositivos móveis.

Figura 2. Ambiente de trabalho no MCM e exemplo de uma tarefa

[2] Projeto financiado pelo Programa Erasmus+, 2019 - 2022.

No início do projeto, havia já indicadores do potencial deste recurso como tendo um impacto positivo no apoio a professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem da matemática fora da sala de aula (e.g. Cahyono & Ludwig, 2019; Ludwig & Jablonski, 2019), e nesse sentido pretendia-se evidenciar o potencial dos trilhos matemáticos digitais, facilitando a sua utilização eficaz por parte dos professores ao desenhar trilhos temáticos com estreita ligação ao currículo. Recorrendo à investigação baseada em design, foram elaborados os princípios para o design de tarefas no âmbito de trilhos temáticos com recurso a um ambiente digital, o MCM (Barbosa et al., 2022). A implementação dos ciclos iterativos e reflexivos, começou por ser informada pela literatura existente acerca do design de tarefas, dos princípios do ensino e aprendizagem fora da sala de aula, e os conhecimentos de conteúdos associados ao tópico de cada trilho temático, resultando em novos conhecimentos (princípios de conceção) emergentes da reflexão sobre os resultados das experiências realizadas com (futuros) professores e alunos (ciclos). Este trabalho pretendeu contribuir para apoiar os professores na promoção da aprendizagem da matemática, fora da sala de aula com recurso a uma ferramenta digital específica, tendo orientações precisas e fundamentadas para formularem as suas próprias tarefas.

No decurso deste projeto foram também conduzidos alguns estudos qualitativos com a pretensão de compreender, por parte dos utilizadores, nomeadamente futuros professores e alunos do ensino básico, as potencialidades e constrangimentos da realização de trilhos matemáticos com o MCM (e.g. Barbosa & Vale, 2023; Barbosa & Vale, 2022). E está este momento em curso um estudo com futuros professores focado na formulação de tarefas com recurso ao MCM.

Trabalhos académicos

Este percurso que tem envolvido intervenção e investigação, tem despertado o interesse de professores e futuros professores, não só na utilização dos trilhos matemáticos nas suas práticas, mas também no estudo de problemáticas associadas a este contexto. Na tabela 1 apresenta-se uma síntese de dissertações de mestrado e uma tese de doutoramento, respetivamente realizadas por estudantes e por uma docente da ESE-IPVC.

Tabela 1. Síntese de trabalhos académicos realizados

Autor	Título	Tipologia
Castro (2018)	Trilho matemático: uma experiência fora da sala de aula com uma turma do 5.º ano de escolaridade	Dissertação de Mestrado (IPVC)
Cacais (2018)	Matemática fora da sala de aula: Desafios numa turma do 3.º e 4.º anos de escolaridade	
Oliveira (2018)	A Aprendizagem para além da sala de aula: um trilho matemático no 5.º ano de escolaridade	
Madalena (2018)	Tarefas de matemática do 5.º ano de escolaridade realizadas com uma turma fora do contexto de sala de aula	
Fernandes (2019a)	Aprender matemática fora da sala de aula: uma experiência com uma turma do 3.º ano de escolaridade	

Autor	Título	Tipologia
Soares (2020)	Uma abordagem às isometrias através de um trilho matemático: um estudo no 6.º ano de escolaridade	Dissertação de Mestrado (IPVC)
Teixeira (2020)	Trilho matemático virtual pela cidade de Viana do Castelo: um estudo sobre a aprendizagem das isometrias no 6.º ano	
Lopes (2021)	Trilho matemático digital com o MathCityMap: um estudo no 6.º ano de escolaridade no domínio da Geometria	
Francisco (2022)	As Isometrias fora da sala de aula: a utilização da aplicação MathCityMap numa turma de 6.º ano de escolaridade	
Gonçalves (2023)	Utilização do MathCityMap num trilho matemático sobre números racionais: um estudo no 6.º ano de escolaridade	
Meira (2023)	O MathCityMap e a sala de aula digital: um recurso para a aprendizagem não formal dos números racionais no 2.º CEB	
Fernandes (2019b)	A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem – um estudo com o 3º ano de escolaridade	Tese de Doutoramento (Universidade do Minho)

Estes trabalhos, de natureza qualitativa (maioritariamente estudos de caso), focaram aspetos do ensino e aprendizagem da matemática fora da sala de aula, recorrendo a tarefas isoladas ou a trilhos matemáticos, com e sem recurso a tecnologia. Participaram nestes estudos alunos do 1.º e do 2.º ciclos do ensino básico, tendo sido trabalhados conteúdos matemáticos diversificados ou, em alternativa, trilhos temáticos. Globalmente investigaram o desempenho dos alunos, o seu envolvimento e o contributo das experiências realizadas para uma prática de ensino eficaz. Alguns dos resultados apontam para: a natural mobilização de conhecimentos aprendidos na sala de aula, trazendo também novas aprendizagens de fora para dentro; a compreensão da utilidade e a aplicabilidade da matemática em situações diversificadas; a oportunidade de resolver e formular tarefas em contexto real, incluindo a recolha da informação necessária para conseguir chegar à solução; o estabelecimento de conexões entre conteúdos e/ou domínios da matemática e entre estes e a realidade ou outras áreas disciplinares; índices elevados de satisfação com a possibilidade de interagir com o meio e com os colegas para resolver as tarefas, a liberdade de movimento, influenciando o interesse e a motivação dos alunos. Destaca-se ainda que os (futuros) professores que realizaram estes trabalhos tiveram oportunidade de vivenciar, na sua formação inicial, a experiência dos trilhos matemáticos, evidenciando reações muito similares às identificadas nos alunos, facto que puderam comprovar nos estudos realizados, valorizando a utilidade desta abordagem para o ensino e aprendizagem da matemática.

Considerações finais

Com base neste percurso temos constatado que a matemática fora da sala de aula proporciona oportunidades de ensino e de aprendizagem ricas e significativas, promovendo, simultaneamente, atitudes positivas e envolvimento adicional dos alunos para aprender matemática. Em particular, o recurso aos trilhos matemáticos tem evidenciado grande potencial na evidência das conexões externas entre a matemática e a realidade, constituindo-se como um contexto privilegiado para o desenvolvimento das capacidades de resolver e formular problemas.

Pretende-se dar continuidade a este percurso e, através da participação no Projeto *MATRIX - Math Trails with an Inclusive Perspective on Students Experiences*[3], adaptar o sistema MathCityMap para o grupo-alvo dos alunos do ensino básico e secundário, permitindo que sejam eles os criadores das tarefas e dos trilhos. Podem gerar-se assim novas oportunidades para os professores enfatizarem nas suas práticas a formulação de problemas, a par da resolução de problemas, incentivando simultaneamente o desenvolvimento da criatividade, valorizando assim os trilhos para além da perspetiva do utilizador.

Referências

Barbosa, A., & Vale, I. (2023). Mobile Math Trails: an experience in teacher training with MathCityMap. *Acta Scientiae, 25*(6), 157-182. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7597

Barbosa, A., & Vale, I. (2022). *As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas. Educação & Matemática, 166*, 19-24. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2830

Barbosa, A., & Vale, I. (2016). Math trails: meaningful mathematics outside the classroom with pre-service teachers. *Journal of the European Teacher Education Network (JETEN), 11*, 63-72. https://etenjournal.com/2020/02/07/math-trails-meaningful-mathematics-outside-the-classroom-with-pre-service-teachers/

Barbosa, A., Vale, I., & Ferreira, R. (2015). Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade dos futuros professores. *Educação & Matemática, 135*, 57-64. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2328

Brown, S., & Walter, M. (2005). *The art of problem posing.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cahyono, A. N., & Ludwig, M. (2019). Teaching and Learning Mathematics around the City Supported by the Use of Digital Technology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(1), 18. https://doi.org/10.29333/ejmste/99514

DGE (2021). *Aprendizagens Essenciais Matemática – Ensino Básico*. DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom-Sources and Organizational Issues. In E. Barbeau, & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom - New ICMI Study Series 12* (pp. 53-96). Springer.

Ludwig, M., & Jablonski, S. (2019). Doing Math Modelling Outdoors – A Special Math Class Activity designed with MathCityMap. In *5th International Conference on Higher Education Advances (HEAd'19)* (pp. 901-909). Editorial Universitat Politecnica de Valencia.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions Ensuring Mathematical Success for All.* NCTM.

Richardson, K. (2004). Designing math trails for the elementary school. *Teaching Children Mathematics, 11*, 8-14. https://doi.org/10.5951/TCM.11.1.0008

[3] Projeto financiado pelo Programa Erasmus+, 2023 - 2026.

Vale, I., & Barbosa, A. (2021). Fotografia: um recurso para elaborar tarefas matemáticas fora da sala de aula. *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática (RevIn), 2* (2021), 1-12. https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/revin/article/view/545

Vale, I., Barbosa, A., & Cabrita, I. (2019). Mathematics outside the classroom: examples with pre-service teachers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 2*(3), 137-142. https://sites.unipa.it/grim/quaderno_2019_numspec_3.htm

Vale, I., Barbosa, A., Cunha, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2009). Patterns in the city: a mathematics project. *Quaderni di Ricerca in Didatica (Mathematics), 2*(19), 302-306. ISSN 1592-4424. https://sites.unipa.it/grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante, 24*(2), 39-60. https://doi.org/10.48489/quadrante.22923

SIEM XXXIII BARCELOS

5|6 julho 2023

SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Simpósios de Comunicações
Communication Symposiums

O desenvolvimento do conhecimento didático de futuros professores através do estudo de aula

The development of preservice teachers' didactic knowledge through lesson study

Nicole Duarte[1], *João Pedro da Ponte*[2], *Hélia Pinto*[3]

[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e CI&DEI, nicoleduarte@edu.ulisboa.pt

[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

[3]Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria e CI&DEI, helia.pinto@ipleiria.pt

Resumo. *A partir da análise de dois estudos de aula realizados na formação inicial de professores numa instituição de ensino superior em Portugal, procuramos compreender como este processo formativo, em particular as fases de definição dos objetivos de aprendizagem, planeamento da aula e discussão pós-aula contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento didático de quatro futuras professoras de Matemática no 2.º ciclo, nomeadamente sobre o currículo e a Matemática para o ensino. Seguimos uma abordagem qualitativa e interpretativa e os dados foram recolhidos através de observação participante, gravação das sessões e recolha documental. Os resultados mostram que a fase de definição dos objetivos de aprendizagem, com base na análise dos documentos curriculares, promoveu o desenvolvimento do conhecimento sobre o currículo, em particular nos tópicos matemáticos selecionados para as aulas de investigação. As sessões de planeamento dessas aulas promoveram discussões sobre as tarefas matemáticas, em particular sobre diferentes estratégias de resolução e representações, desenvolvendo o conhecimento das futuras professoras sobre a Matemática para o ensino. E a discussão pós-aula permitiu que analisassem estratégias e representações apresentadas pelos alunos, o que também promoveu o desenvolvimento do conhecimento da Matemática para o ensino. A colaboração foi transversal a todas as sessões dos estudos de aula, proporcionando um ambiente favorável à partilha de ideias e reflexões.*

Abstract. *From the analysis of two lesson studies carried out during initial teacher training in a higher education institution in Portugal, we seek to understand how this formative process, in particular the phases of definition of learning objectives, lesson planning and post-lesson discussion contributed to the development of four preservice mathematics teachers' didactics knowledge, especially about the curriculum and about mathematics for teaching. We followed a qualitative and interpretive approach and data were collected through participant observation, recording of the sessions, and document collection. The results show that the phase of defi-*

nition of learning objectives, based on the analysis of the curriculum documents, promoted the development of knowledge about the curriculum, particularly in the mathematical topics selected for the lessons. The planning sessions of these lessons promoted discussions about the mathematical tasks, in particular about different resolution strategies and representations, developing the preservice teachers' knowledge about mathematics for teaching. And the post-lesson discussion allowed them to analyze strategies and representations presented by the students, which also promoted the development of mathematics knowledge for teaching. The collaboration was transversal to all sessions of the lesson studies and yielding a favorable environment to share ideas and reflections.

Palavras-chave: Conhecimento didático; Tarefa; Planeamento; Estudo de aula; Formação inicial de professores.

Keywords: Didactics knowledge; Tasks; Planning; Lesson study; Initial teacher education.

Introdução

A formação inicial de professores enfrenta desafios, alguns dos quais estão relacionados com o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores. Como referem Ponte e Chapman (2008), estes desafios devem-se essencialmente ao afastamento entre a teoria explorada durante o curso e a prática vivenciada em sala de aula. É necessário encontrar formas de ultrapassar este problema.

Uma das possibilidades que tem vindo a ser explorada é o estudo de aula, um processo formativo no qual os participantes, professores ou futuros professores, realizam atividades que promovem o desenvolvimento do seu conhecimento e que prima pelo ambiente reflexivo e pelo trabalho colaborativo (Coenders & Verhoef, 2019). Várias investigações têm identificado o estudo de aula como um processo formativo que incentiva o desenvolvimento do conhecimento em várias vertentes, tanto no que respeita ao domínio do conteúdo matemático, como no que se refere aos aspetos relacionados com a prática letiva (Vieira et al., 2022). No estudo de aula, os futuros professores preparam detalhadamente uma aula, selecionando e adaptando tarefas matemáticas, que resolvem contemplando a possível diversidade de estratégias, antecipam o trabalho dos alunos, preparam o questionamento e outras intervenções do professor durante a condução da aula e planificam diferentes fases da aula que depois conduzem, observam e refletem com foco nas aprendizagens dos alunos.

De forma a tirar partido do estudo de aula como processo formativo no âmbito da formação inicial de professores é importante perceber quais os seus aspetos que se demonstram mais favoráveis ao desenvolvimento do conhecimento dos participantes. Desta forma, o nosso objetivo é compreender como o estudo de aula, em particular as fases de definição dos objetivos de aprendizagem, planeamento da aula e discussão pós-aula, pode contribuir para o desenvolvimento do conhecimento didático sobre o currículo e sobre a Matemática para o ensino de futuras professoras de Matemática do 2.º ciclo.

Estudo de aula na formação inicial de professores

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores que tem vindo a ser amplamente difundido um pouco por todo o mundo. O seu principal foco é a prática letiva de um grupo de professores e visa melhorar as aprendizagens dos alunos. Através deste processo formativo, os professores que nele participam têm oportunidade de planificar e conduzir aulas e refletir sobre situações particulares de sala de aula, possibilitando o desenvolvimento do seu conhecimento em várias áreas.

Apesar de o estudo de aula ter sido originalmente pensado para a formação de professores em serviço, tem sido adaptado e utilizado na formação inicial (e.g., Clivaz & Miyakawa, 2020; Ponte, 2017). Este processo de desenvolvimento profissional pode ser organizado em cinco etapas que Fujji (2018) apresenta do seguinte modo: 1) *definição dos objetivos de aprendizagem:* considera-se o tópico matemático a trabalhar e os objetivos para a aprendizagem dos alunos; 2) *planeamento da aula de investigação:* tendo por base a análise dos documentos curriculares e de materiais didáticos, planifica-se detalhadamente uma aula, considerando a seleção e adaptação de tarefas matemáticas, a definição da estratégia de ensino a utilizar, as possíveis estratégias que os alunos poderão utilizar para resolver as tarefas, e as suas eventuais dificuldades; 3) *lecionação da aula de investigação:* enquanto um dos professores conduz a aula, os restantes observam o trabalho dos alunos; 4) *discussão após a aula de investigação:* os participantes partilham as suas observações; e 5) *reflexão pós-aula:* o grupo reflete sobre o trabalho realizado, tendo como foco as aprendizagens dos alunos, o conteúdo matemático e o design da aula.

Uma vez selecionado o tópico matemático, os futuros professores planificam detalhadamente a aula de investigação. Esta planificação pressupõe uma seleção atenta das tarefas a propor aos alunos na aula. Para tal, os futuros professores devem analisar as tarefas considerando o conteúdo matemático, os documentos curriculares e as suas características. Ao fazer esta análise, os futuros professores podem decidir ser importante adaptar determinados aspetos das tarefas, tais como os números apresentados no enunciado ou o contexto subjacente (Fujii, 2018). Depois de selecionadas e, eventualmente, adaptadas as tarefas a propor aos alunos na aula de investigação, os futuros professores antecipam o trabalho destes, discutindo as possíveis estratégias de resolução. Segundo Fujii (2018), este é um aspeto que exige tempo, uma vez que é necessário consultar os documentos curriculares para considerar o conhecimento prévio que os alunos poderão mobilizar na resolução das tarefas. Ainda nas sessões de planificação da aula, os futuros professores preparam a condução da aula de investigação, prevendo possíveis questões e outras intervenções a fazer com o intuito de apoiar os alunos nas suas dificuldades e guiá-los em momentos como a discussão coletiva.

Depois de preparada a aula de investigação, os futuros professores podem observá-la e, idealmente, conduzi-la. A condução e observação de uma aula por eles planificada constitui uma excelente oportunidade para desenvolverem o seu conhecimento, uma vez que concretizam na prática aquilo que tão detalhadamente planificaram (Ponte, 2017).

Por fim, seguem-se as sessões de discussão e reflexão pós-aula, em que os futuros professores refletem e analisam as aprendizagens dos alunos. Para tal, reveem a sua prática e pensam em formas de a melhorar, analisando episódios ocorridos na aula de investigação e procurando soluções para os problemas que identificaram.

A preparação e condução de aulas é desafiante para os futuros professores, dado que pressupõe a mobilização de conhecimento sobre a prática letiva e sobre os alunos e os seus processos de aprendizagem. A própria condução da aula é outro desafio para os futuros professores, na medida em que têm de compreender como as suas intervenções podem influenciar as aprendizagens dos alunos. Estes desafios estão, frequentemente, relacionados com o estado de desenvolvimento do conhecimento didático dos futuros professores (Ponte & Chapman, 2008; Stein et al., 2008) e a experiência que é necessária para ser capaz de aplicar este conhecimento na prática.

O conhecimento didático diz respeito ao conhecimento sobre conduzir a prática letiva. Este conhecimento começou a ter grande proeminência a partir dos trabalhos de Shulman (1986) sobre o que chamou de "*pedagogical content knowledge*". Este conceito viria a ser aprofundado por diversos autores como Ball et al. (2008) e Carrillo et al. (2018). Neste estudo consideramos duas dimensões comuns à maioria destes modelos, assumindo a sua natureza interligada (Ponte, 2012): (i) *o conhecimento sobre alunos e os seus processos de aprendizagem*, que implica a consideração dos hábitos, valores culturais, dificuldades e modos de aprender dos alunos, para compreender como promover a sua aprendizagem; e (ii) *o conhecimento sobre prática letiva*, que inclui o planeamento do ensino através da preparação e elaboração de tarefas, a planificação de aulas, a organização do trabalho dos alunos durante a aula, assim como a criação de ambientes de aprendizagem. E consideramos ainda as restantes dimensões do conhecimento didático segundo Ponte (2012): iii) o *conhecimento da Matemática para o ensino*, que pressupõe a compreensão de conceitos e procedimentos, diferentes representações e a forma como se relacionam; e iv) o *conhecimento do currículo*, que envolve a apropriação dos objetivos do ensino da Matemática, dos tópicos e conteúdos a ensinar, tal como a forma como estes se organizam e a análise de materiais didáticos.

O estudo de aula é uma forma privilegiada de promover o desenvolvimento do conhecimento didático dos futuros professores, uma vez que, para além de todo o trabalho de preparação de aulas, podem ver na prática a aula que detalhadamente planificaram e perceber a eficácia das estratégias que delinearam. Refletir sobre a sua experiência em sala de aula permite-lhes compreender como os alunos aprendem e pensar em formas de melhorar a sua prática futura (Gomes et al., 2022).

No decorrer de todas as sessões do estudo de aula é fundamental que se crie um ambiente e relações de colaboração entre os participantes, dado que é em grupo que estes partilham ideias, identificam problemas, analisam, discutem, selecionam e adaptam tarefas e outros materiais, planificam e refletem. Particularmente num estudo de aula na formação inicial de professores, a colaboração assume grande relevância, pois os futuros professores têm oportunidade de trabalhar colaborativamente entre si, mas também com professores mais experientes como o supervisor e o cooperante.

Metodologia

Esta investigação seguiu uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 2007) e teve como fonte de dados as sessões de dois estudos de aula e o trabalho autónomo realizado por quatro futuras professoras. Os dados foram recolhidos pela primeira autora, que assumiu o papel de investigadora, enquanto observadora participante.

Os estudos de aula e os participantes

Esta investigação foca-se em dois estudos de aula, ambos realizados numa instituição de ensino superior, em Portugal. O primeiro estudo de aula (EA1) foi realizado no ano letivo de 2021/2022 e o segundo estudo de aula (EA2) no ano letivo de 2022/2023. O trabalho desenvolvido na preparação das aulas de investigação teve por base a abordagem exploratória (Ponte & Quaresma, 2016). Cada estudo de aula foi parte integrante da unidade curricular de prática pedagógica e teve um total de 12 sessões, realizadas semanalmente e com a duração aproximada de duas horas. Os estudos de aula foram preparados e conduzidos pela primeira autora em conjunto com a supervisora da instituição de ensino superior.

O EA1 envolveu duas futuras professoras, Adriana e Margarida, a professora supervisora e a professora cooperante da escola onde realizavam a sua prática pedagógica. Após analisar a calendarização e a planificação a médio prazo disponibilizadas pelo agrupamento, a professora cooperante definiu que as aulas de investigação iriam incidir na exploração dos números racionais não negativos, especificamente nas suas diferentes representações, na comparação de frações e destas com a unidade, no significado de fração como partilha equitativa e na equivalência de frações, no 5.º ano. Cada futura professora conduziu uma aula de investigação, na mesma turma, sendo preparadas tarefas diferentes, embora sobre o mesmo tópico matemático.

O EA2 envolveu outras duas futuras professoras, Sara e Camila, a professora supervisora e a professora cooperante, que se mantiveram do EA1 para o EA2. Após analisar novamente a calendarização e a planificação a médio prazo disponibilizadas pelo agrupamento, a professora cooperante definiu que as aulas de investigação iriam incidir na resolução de tarefas exploratórias e de problemas com adição e subtração de frações em casos em que um denominador é múltiplo do outro, no 5.º ano. Cada futura professora conduziu uma aula de investigação, na mesma turma, sendo preparadas tarefas diferentes, embora sobre o mesmo tópico matemático.

As futuras professoras encontravam-se no último ano do Mestrado em Ensino no 1.º ciclo e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do ensino básico. Antes de participarem no estudo de aula, observaram aulas conduzidas pela professora cooperante e conduziram aulas no 1.º ciclo.

Recolha e análise de dados

Os dados foram recolhidos através da gravação das sessões dos estudos de aula e da recolha dos documentos produzidos, em particular, a resolução das tarefas e as planificações das aulas. Os dados foram codificados consoante o número da sessão (S*n*) dos estudos de aula, ambos organizados segundo as etapas definidas por Fujii (2018): definição dos objetivos de aprendizagem, planeamento da aula, aula de investigação, discussão pós-aula e reflexão.

Para analisar o desenvolvimento do conhecimento didático das futuras professoras foi considerado o modelo de Ponte (2012), que se organiza em quatro dimensões: 1) o *conhecimento da Matemática para o ensino*; 2) o *conhecimento sobre os alunos e os seus processos de aprendizagem*; 3) o *conhecimento do currículo*; e 4) o *conhecimento sobre prática letiva*. Foi realizada uma análise indutiva dos dados, para identificar episódios significativos dos estudos de aula que evidenciassem o desenvolvimento do conhecimento das futuras professoras nos domínios do *conhecimento do currículo e da Matemática para o ensino.*

Resultados

Definição de objetivos de aprendizagem

Depois de selecionado o tópico matemático a explorar nas aulas de investigação, Adriana e Margarida (EA1) analisaram as orientações curriculares em vigor, com as quais já estavam familiarizadas – *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* e *Aprendizagens Essenciais de Matemática do 5.º ano* (DGE, 2018). Foi dada ênfase às *Aprendizagens Essenciais*, tendo o grupo analisado todas as indicações sobre os objetivos essenciais de aprendizagem, conhecimentos, capacidades, atitudes e práticas essenciais de aprendizagem referentes ao conteúdo de aprendizagem "números racionais não negativos":

> Margarida: Está aqui [nas Aprendizagens Essenciais do 5.º ano] "Representar números racionais não negativos na forma de fração, decimal e percentagem, e estabelecer relações entre as diferentes representações, incluindo o numeral misto".
>
> Adriana: Numeral misto?!
>
> Margarida: Pois, também não me lembro de 'dar' isto.
>
> Cooperante: Por isso é que é importante estudarem os assuntos antes de os ensinarem. (S1)

As futuras professoras revelaram dificuldades relativamente à representação do número racional sob a forma de numeral misto, pelo que a intervenção da professora supervisora foi fundamental para clarificar este aspeto:

> Supervisora: É outra forma de representar o número racional. É composto por uma parte inteira e outra parte fracionária.
>
> Margarida: Então é sempre maior do que 1?!
>
> Supervisora: E a fração que o compõe é sempre uma fração própria, ou seja…? O numerador é menor do que o denominador. Certo?! (S1)

Uma vez que foram homologadas as novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática* (DGE, 2021) a entrar em vigor a partir do ano letivo de 2022/23, no que respeita, entre outros, ao 5.º ano, houve necessidade de Sara e Camila (EA2) reverem este documento para definir claramente o objetivo de aprendizagem das aulas de investigação:

> Sara: Não sei é se será a introdução à adição e subtração ou será já só prática de procedimentos. Acho que por estas datas já temos o assunto iniciado…
>
> Supervisora: Ora, então queremos situações para alunos que já sabem adicionar e subtrair. O objetivo é iniciar a adição e subtração ou a resolução de problemas de adição e subtração?
>
> Cooperante: Já será a resolução de problemas sobre adição e subtração, sem dúvida.
>
> Sara: E esses problemas podem facilmente incluir as frações decimais, percentagens, numerais mistos… Que é o que eles dão antes. E assim fazemos também um género de revisão.
>
> Camila: Os numerais mistos saíram do programa. (S1)

Ao analisar esse documento curricular, Sara e Camila puderam identificar diferenças como o facto de os alunos já não explorarem a representação do número racional sob a forma de numeral misto. Para além disso, esta análise permitiu-lhes compreender como este documento está organizado, em particular no tema relativo aos números, identificando também relações entre tópicos e subtópicos, compreendendo a conexão que pode ser estabelecida através da resolução de problemas entre a adição e subtração de frações e as diferentes representações do número racional.

Planeamento das aulas de investigação

Nas sessões de planeamento das aulas de investigação, as futuras professoras selecionaram tarefas matemáticas a propor aos alunos. Apesar de revelarem dificuldades em selecionar tarefas com um grau de abertura que permitisse aos alunos recorrer a diversas estratégias de resolução, Adriana e Margarida (EA1) selecionaram aquelas que pensaram promover "o maior número possível de estratégias diferentes para depois usar na discussão" (Margarida, S3), e adaptaram-nas de acordo com o objetivo da aula. Para compreenderem as potencialidades dessas tarefas no trabalho dos alunos, a supervisora sugeriu que as futuras professoras as resolvessem:

> Adriana: Aqui tem frações em que [os alunos] podem usar várias representações. Nas seis décimas [0,6], eles podem dizer também que são sessenta por cento [60%].
>
> Supervisora: Ou seis décimos $\frac{6}{10}$. (S5)

A intervenção da supervisora fez relembrar as futuras professoras das diferentes representações possíveis dos números racionais, levando-as a discutir quais seriam mais importantes explorar naquela aula.

Sara e Camila (EA2) também se dedicaram a uma exploração matemática detalhada das tarefas que selecionaram para propor aos alunos resolverem nas aulas de investigação. Tendo em conta o objetivo delineado para a aula, as futuras professoras tiveram em atenção contemplar as possíveis representações do número racional que os alunos poderiam utilizar, nomeadamente as representações fracionária, decimal e percentagem:

> Camila: Eles vão ter que transformar o quilo. E fazerem a conexão com 100%.
>
> Sara: E vão ter que transformar 1kg na fração unitária, que é $\frac{4}{4}$.
>
> Supervisora: Então: $\frac{1}{4}$ é igual a vinte e cinco centésimas [0,25], ou seja, vinte e cinco centésimos [$\frac{25}{100}$] ou vinte e cinco porcento [25%] do chocolate e $\frac{1}{2}$ é igual a cinquenta centésimas [0,50], ou seja, cinquenta centésimos [$\frac{50}{100}$] ou cinquenta porcento [50%] do chocolate. E ele comeu $\frac{3}{4}$ que são setenta e cinco centésimas [0,75], ou setenta e cinco centésimos [$\frac{75}{100}$] ou setenta e cinco porcento [75%] do chocolate. (S4)

O grupo também resolveu todas as tarefas matemáticas recorrendo a várias estratégias que os alunos poderiam utilizar:

> Camila: Acho que resolvem esta tarefa logo pela representação icónica.
>
> Supervisora: Sim, mas mesmo através da representação icónica, temos mais do que uma estratégia, certo?
>
> Camila: Então, podem dividir cada uma das pizas em quatro partes e dar $\frac{1}{4}$ a cada um…
>
> Supervisora: Sim, e fazem $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ que são $\frac{3}{4}$. E?
>
> Sara: E podem dividir as duas primeiras pizas em duas partes iguais e a terceira piza em quatro partes e dar a cada menino $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. (S5)

A exploração matemática das tarefas também promoveu momentos de discussão sobre eventuais dificuldades que os alunos poderiam apresentar.

Discussão pós-aula

Nas sessões de discussão pós-aula, cada participante partilhou com as restantes os dados que recolheu durante a aula de investigação, nomeadamente aqueles que emanaram da observação do trabalho dos alunos.

Adriana e Margarida (EA1) voltaram a discutir com as professoras as várias estratégias de resolução das tarefas e as representações do número racional utilizadas pelos alunos, tais como a percentagem e a fração:

> Margarida: Eles… Sabiam muito bem que $\frac{1}{2}$ era 50%, $\frac{1}{4}$ era 25% e $\frac{3}{4}$ era 75%.

A professora cooperante partilhou que o grupo de alunos que observou deu a resposta:

> Cooperante: 1 chocolate e $\frac{1}{4}$, apesar de que… Tudo bem que não representaram em numeral misto, mas pareceu-me que estavam quase lá.
>
> Adriana: Já tinham visto que era $1\frac{1}{4}$, um inteiro mais $\frac{1}{4}$ de outro, perceberam logo que

> comiam mais do que um chocolate. Até porque passaram para fração e viram que a unidade era $\frac{5}{5}$ e se comeram $\frac{6}{5}$ perceberam que era mais do que a unidade. (S10)

As futuras professoras refletiram também sobre o facto de os alunos apresentarem frações equivalentes:

> Margarida: Um grupo falava em $\frac{5}{10}$ e o outro em $\frac{1}{2}$. Eu queria que eles chegassem às frações equivalentes, mas como tínhamos falado, é suposto perceberem, mas…
>
> Adriana: Mas sem terem de dizer o nome ou definição.
>
> Margarida: Exato! E não sabia muito bem como…
>
> Adriana: Mas eles próprios disseram que era a mesma coisa, com base no desenho.
>
> Margarida: Sim, o desenho no quadro permitiu que compreendessem. Eu apenas dei o nome [frações equivalentes]. (S9)

Sara e Camila (EA2) também discutiram as respostas dos alunos, bem como as diferentes representações do número racional que surgiram:

> Camila: Um grupo respondeu logo que setenta e cinco centésimas [0,75] mais cinquenta centésimas [0,50] mais cinquenta centésimas [0,50] era 'um vírgula setenta e cinco' [1,75]. Mas [eu] queria a resposta em fração. Por isso, perguntei "Então e 'zero vírgula setenta e cinco' [0,75] representa o quê?"
>
> Sara: Pois. Aí eles disseram a fração $\frac{3}{4}$. (S10)

Esta discussão conduziu Sara e Camila a reverem o objetivo delineado para as aulas de investigação, recorrendo às *Aprendizagens Essenciais de Matemática do 5.º ano* (DGE, 2021). Uma vez que o objetivo definido para as aulas de investigação foi a resolução de tarefas exploratórias e de problemas com adição e subtração de frações em casos em que um denominador é múltiplo do outro, importava

> Sara: … dar prioridade à representação em forma de fração, apesar de explorarmos várias [representações]. Aqui [nas *Aprendizagens Essenciais*] diz "Adicionar e subtrair números racionais não negativos nas diversas representações", mas nestas aulas tivemos que dar prioridade à fração. (S10)

Ao discutirem as resoluções das tarefas apresentadas pelos alunos nas aulas de investigação, Sara e Camila também analisaram algumas das dificuldades que estes manifestaram:

> Sara: Eu nunca pensei que surgisse a resposta $\frac{3}{12}$!
>
> Camila: Pois, eles dividiram cada piza em quatro. Mas depois diziam que cada um comia três fatias num total de doze.
>
> Sara: Somaram as fatias todas… Não têm noção da unidade. (S8)

Perante esta análise e no sentido de apoiar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades, o grupo sugeriu disponibilizar-lhes materiais manipuláveis na resolução de tarefas matemáticas em aulas seguintes.

Considerações finais

A análise de documentos curriculares como as *Aprendizagens Essenciais* (DGE, 2018; 2021), em particular no tema relativo aos números, permitiu que as futuras professoras compreendessem quais os tópicos e subtópicos relacionados com este tema e como estes estão organizados (Ponte, 2012). Permitiu também que, em colaboração com as professoras, percebessem que é fundamental o estudo prévio dos conteúdos a trabalhar com alunos e que as tarefas exploratórias e problemas a propor aos alunos devem ter potencial para fazer surgir conexões, nomeadamente entre a adição e subtração de frações e as diferentes representações do número racional. Deste modo, as futuras professoras desenvolveram o seu *conhecimento do currículo*, apropriando-se dos objetivos do ensino do tópico matemático, dos subtópicos a ensinar e da sua organização.

Antecipar o trabalho dos alunos, em especial as estratégias de resolução das tarefas e as dificuldades que estes poderiam ter, levou as futuras professoras a resolver as tarefas propostas através de todas as estratégias que consideravam ser possíveis e usando diferentes representações, desenvolvendo o seu *conhecimento da Matemática para o ensino*, em especial sobre diferentes representações e a forma como se relacionam entre si, tal como sugerem Fujii (2018) e Stein et al. (2008).

Nas sessões de discussão pós-aula, as futuras professoras voltaram a explorar as tarefas, analisando as diferentes estratégias de resolução e representações a que os alunos recorreram (Stein et al., 2008). Fizeram ainda conexões entre esses aspetos e conceitos relacionados como o de fração equivalente, desenvolvendo o seu *conhecimento da Matemática para o ensino*. Esta análise também proporcionou oportunidades para rever os documentos curriculares, no sentido de refletir sobre o objetivo delineado para as aulas, o que é relacionado com o *conhecimento sobre o currículo.*

A professora supervisora e a professora cooperante tiveram, nestes momentos, um papel fundamental no sucesso destes estudos de aula, dado que as suas intervenções levaram as futuras professoras a resolver as tarefas através de várias estratégias e a considerar diferentes representações (Fujii, 2018), proporcionando o desenvolvimento do seu conhecimento em diferentes domínios.

O estudo de aula, em especial as sessões de definição dos objetivos de aprendizagem, de planeamento das aulas de investigação e de discussão pós-aula, revelou ser uma forma privilegiada de promover o conhecimento das futuras professoras, como referem Gomes et al. (2022), particularmente no que respeita ao *conhecimento do currículo* e ao *conhecimento da Matemática para o ensino*. Para que isso acontecesse, foi fundamental, no decorrer das sessões, a promoção de um ambiente de colaboração entre as participantes, que resultou em partilha de ideias e reflexões sobre diferentes aspetos como os documentos curriculares e as tarefas matemáticas.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT–Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto UIDB/05507/2020.

Referências

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bogdan, R.C., & Biklen, S.K. (2007). *Quality research for education: An introduction to theory and methods* (5th ed.). Pearson.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., et al. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Clivaz, S., & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 53–70. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09980-1

Coenders, F., & Verhoef, N. (2019). Lesson Study: professional development (PD) for beginning and experienced teachers. *Professional Development in Education, 45*(2), 217–230. https://doi.org/10.1080/19415257.2018.1430050

Direção Geral de Educação. (2018). *Aprendizagens essenciais | Articulação com o perfil dos alunos – Matemática 5.º ano*. DGE

Direção Geral de Educação. (2021). *Aprendizagens essenciais | Articulação com o perfil dos alunos – Matemática 5.º ano*. DGE

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winslow, S. Clivaz, J.P. Ponte, A. NiShuilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer.

Gomes, P., Martins, M., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2022). Task design and enactment: Developing in-service and prospective teachers' didactical knowledge in lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(7). https://doi.org/10.29333/ejmste/12172.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.

Ponte, J.P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. International *Journal for Lesson and Learning Studies, 6*(2), 169–181. https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016-0021.

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 223–261). Routledge.

Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675.

Vieira, R., Ponte, J.P., & Mata-Pereira, J. (2022). Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula. *Bolema, 36*(73), 822–843. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Práticas utilizadas por uma formadora de professores para fomentar discussões coletivas e ensinar Álgebra na Licenciatura em Pedagogia

Practices used by a teacher educator to encourage collective discussions and teach Algebra in a Teacher Education Course for Primary Mathematics Teachers

Eduardo Goedert Doná[1], *Alessandro Jacques Ribeiro*[2]

[1]*Universidade Federal do ABC, Brasil, eduardogdona@gmail.com*

[2]*Universidade Federal do ABC, Brasil, alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br*

Resumo. *O presente trabalho tem como objetivo identificar e compreender as práticas utilizadas por uma formadora de professores ao ensinar Álgebra na Licenciatura em Pedagogia, no que refere à condução de discussões coletivas. Para operacionalizar tal objetivo foi realizado um estudo de caso envolvendo uma formadora de professores, cujos dados são constituídos por registros em áudio e vídeo e por documentos. Dentre os resultados identificamos um conjunto de práticas utilizadas pela formadora e que culminaram em oportunidades de aprendizagem profissional aos futuros professores para o ensino de Álgebra nos primeiros anos de escolarização. Destacam-se as práticas de estabelecer uma comunidade de aprendizagem, buscar evidências nas resoluções dos futuros professores para confrontá-las, fazê-los avançar em seus conhecimentos profissionais referentes à Álgebra.*

Abstract. *This work aims to identify and understand the practices used by a teacher educator when teaching Algebra in the Teacher Education Course for Primary Mathematics Teachers, with regard to conducting collective discussions. To put this objective into practice, a case study was carried out involving a teacher trainer, whose data consists of audio and video recordings and documents. Among the results, we identified a set of practices used by the trainer that culminated in professional learning opportunities for future teachers to teach Algebra in the first years of schooling. The practices of establishing a learning community stand out, seeking evidence in the resolutions of future teachers to confront them, making them advance in their professional knowledge related to Algebra.*

Palavras-chave: Professores Primários; Pensamento Algébrico; Formador de Professores; Discussões Coletivas.

Keywords: Primary Teachers; Algebraic Thinking; Teacher Educator; Collective Discussions.

Introdução

A formação matemática do professor dos primeiros anos de escolarização tem sido debatida pela comunidade acadêmica (Fiorentini, 2018; Ponte & Chapman, 2015). No Brasil, a Álgebra ganhou atenção especial ao se tornar unidade temática da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017). Desde a sua aprovação, em 2017, alguns estudos (p.e. Barboza, et al., 2020; Trivilin & Ribeiro, 2015) têm buscado compreender como esse conteúdo pode ser ensinado aos professores dos anos iniciais.

Nesse contexto, destaca-se que, durante a formação inicial dos professores dos anos iniciais no Brasil, predominantemente realizada em cursos de Licenciatura em Pedagogia[1] (LP), há valorização da temática "Números e Operações", em detrimento de outros eixos da matemática, como é o caso da Álgebra (Castro & Fiorentini, 2021). Assim sendo, defendemos que compreender como a Álgebra é ensinada na (LP) e oferecer meios de se ensinar Álgebra nesse espaço seja uma demanda emergente da comunidade acadêmica local (Doná & Ribeiro, 2022).

Nesse sentido, alguns pesquisadores defendem o uso de aspectos do cotidiano do professor como instrumentos potencializadores para a sua formação (Borko et al., 2014), ancorando-se no uso de tarefas formativas com discussões coletivas como um meio de aproximar a sala de aula da educação básica da sala de aulas da formação de professores (Ribeiro & Ponte, 2020).

Diante disso, nosso objetivo nessa comunicação científica é identificar e compreender as práticas utilizadas por uma formadora de professores ao ensinar Álgebra na Licenciatura em Pedagogia, no que refere à condução de discussões coletivas. Para tal, baseamo-nos na seguinte questão de pesquisa: que práticas uma formadora de professoras realiza ao conduzir discussões coletivas com futuros professores, com vista a prepará-los para ensinar Álgebra nos primeiros anos de escolarização?

Referencial teórico

Para nos subsidiar teoricamente, dividimos a seção de referencial teórico em duas: uma destinada às práticas que o formador deve mobilizar para fomentar discussões coletivas durante suas aulas e outra destinada ao pensamento algébrico e as suas vertentes. Acreditamos que, ao relacionar as duas seções do referencial teórico poderemos identificar e compreender as práticas apontadas pela literatura que foram mobilizadas pela formadora para ensinar Álgebra na (LP).

[1] No Brasil, o curso de Licenciatura em Pedagogia, dentre outras funções, tem como propósito formar o professor que irá atuar nos primeiros anos de escolaridade e na educação infantil.

Práticas que fomentam discussões coletivas

A aprendizagem profissional de professores deve ser vista como uma atividade de preparo para o desempenho de sua função e, por isso, deve envolver diretamente os diferentes aspectos da prática da sala de aula (Desimone, 2009). Nesse sentido, as tarefas formativas, que apresentam registros de prática autênticos (Ball et al., 2014), tornam-se ferramentas que possibilitam a aproximação entre as salas de aula da formação inicial de professores e a da educação básica.

Ribeiro e Ponte (2020) relacionam as tarefas formativas, designadas por eles como Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), com o papel e as ações do formador e nesse mesmo sentido, outros autores apresentam práticas que podem ser realizadas por formadores ao utilizarem tarefas formativas, como as TAP, para fomentar discussões coletivas e oportunizar a aprendizagem profissional do professor que ensina matemática (Borko et al., 2014; Elliot et al., 2009; Ferreira et al., 2023).

Elliot et al. (2009) estruturaram dois modelos para apoiar formadores no gerenciamento de discussões coletivas. Segundo os autores, a primeira estrutura destaca aspectos como (i) compartilhar; (ii) justificar; (iii) questionar; e (iv) responder a confusões e erros. Em complemento, a segunda estrutura envolve (a) antecipar possíveis resoluções de tarefas formativas; (b) monitorar as resoluções dos professores durante o trabalho autônomo (momento em que eles exploram a tarefa); (c) selecionar resoluções para compartilhar nas discussões com o grupo; (d) sequenciar as resoluções de modo que a discussão tenha uma lógica; e (e) fazer conexões matemáticas entre as diferentes apresentações para desenvolver ideias que os professores não desenvolveram. Por seu lado, Borko et al. (2014) apresentam três práticas que podem ser usadas por formadores para orquestrar discussões coletivas: (i) despertar o pensamento para a resolução da tarefa; (ii) buscar evidências nas afirmações dos professores; e (iii) ajudar os professores a conectar suas ideias matemáticas e didáticas. Já Ferreira et al. (2023) trazem um conjunto com cinco práticas de formadores no sentido de gerenciarem discussões coletivas, a partir de uma abordagem de ensino exploratório: (i) estabelecer uma comunidade de aprendizagem; (ii) interpretar as interações com os professores e entre os professores; (iii) estabelecer conexões; (iv) desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos; e (v) sistematizar aprendizagens. Vale destacar a complementaridade dos diferentes modelos no que refere à forma como indicam e delimitam as ações e as práticas de formadores para conduzir discussões coletivas, aspecto que será considerado e relevante para a construção das categorias de análise em nosso estudo. Isso será retomado na seção de metodologia.

Pensamento Algébrico e os primeiros anos de escolaridade

A Álgebra, compreendida como Pensamento Algébrico, veio a ser compreendida como uma unidade temática da matemática no Brasil em 2017, com a aprovação da BNCC. Na BNCC, a Álgebra é entendida como a "compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (Brasil, 2017, p. 270). Por seu lado, Kaput (2008) considera que, nos primeiros anos, que a criança desenvolva o pensamento algébrico como um meio de transformar a Álgebra em uma atividade humana (Kaput, 2008).

Os conteúdos destacados para embasar o desenvolvimento do pensamento algébrico são: regularidade, generalização de padrões e propriedades de igualdade (Brasil, 2017, p. 270). Já para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico é dividido em dois grandes blocos, a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Na aritmética generalizada se destaca o trabalho com as propriedades das operações, enquanto no pensamento funcional o foco está no trabalho com a generalização de padrões. Vale destacar ainda, que existem outras ramificações acerca do pensamento algébrico, mas utilizamos a caracterização de Blanton e Kaput (2005) para situar o presente estudo na vertente da aritmética generalizada, uma vez que as tarefas formativas com os futuros professores abordaram a ideia fundamental de equivalência e as propriedades do sinal de igual (Brasil, 2017).

O trabalho com os diferentes significados do sinal de igual, especificando a propriedade de equivalência, contribui para o rompimento do senso comum matemático de que esse sinal adota um significado exclusivamente operacional (Trivilin & Ribeiro, 2015). A utilização dessa propriedade também nos permite "investigar as diferentes decomposições dos números, usando expressões numéricas para as representar e observar a estrutura dessas expressões" (Ponte et al., 2009, p. 20), além de contribuir com a visualização das múltiplas formas de representar um mesmo número, utilizando-se de igualdades numéricas (Barboza et al., 2020).

Metodologia

O presente estudo é do tipo qualitativo-interpretativo (Creswell, 2014), viabilizado por um estudo de caso (Stake, 1995; Yin, 1984), no qual o "caso" em tela são as práticas de uma formadora de professores atuante no curso de LP. Dito de outra forma, o estudo centra-se no planejamento, desenvolvimento e reflexão das aulas da formadora, tendo sido ela convidada a participar de uma experiência formativa, que será detalhada a seguir.

A experiência formativa

Denominamos experiência formativa o trabalho envolvendo a formadora de professores (de codinome Violeta), a qual atua na disciplina de Ensino de Matemática I, em um curso de LP de uma universidade pública brasileira. A experiência formativa envolveu dois facilitadores (autores desse trabalho) como responsáveis diretos pela formação. Durante a experiência, Violeta vivenciou três ciclos de aulas (denominados *Ciclo PDR,* Ribeiro et al., 2020). As etapas de planejamento e reflexão das aulas ocorreram de forma colaborativa[2], em parceria com um dos facilitadores (Eduardo, primeiro autor desse trabalho), enquanto a etapa de desenvolvimento das aulas foi concretizada apenas por Violeta, e em modo

[2] O trabalho colaborativo entre Violeta e o facilitador foi viabilizado pelas ferramentas virtuais (Google Meet e Zoom).

presencial. No entanto, especialmente para que os facilitadores elaborassem os encontros de reflexão, as aulas de Violeta foram gravadas em vídeo e disponibilizadas para eles, na íntegra.

Os materiais curriculares que compuseram a experiência formativa foram três TAP sobre a unidade temática de Álgebra, especificamente sobre a ideia de equivalência do sinal de igual. Cada uma das três TAP tinha como proposta ser desenvolvida em aulas, sendo a formadora coparticipante do planejamento e da elaboração das mesmas.

Procedimentos e instrumentos de recolha de dados

Os dados utilizados nesse estudo são oriundos das gravações em áudio e vídeo, durante as aulas de Violeta, bem como os documentos lá produzidos, tais como as TAP elaboradas durante a experiência formativa e os protocolos dos futuros professores advindos das aulas dela. Ainda que o estudo tenha contemplado uma sequência de três aulas, nessa comunicação científica nos restringimos a analisar a terceira aula, pois foi nela que verificamos terem sido mobilizadas um maior número e tipos de práticas para fomentar discussões entre os futuros professores.

Método de análise dos dados e construção das categorias

Os dados foram tratados utilizando-se a técnica de Análise de Conteúdo (Bardin, 2011). Separamos a gravação em áudio e vídeo referentes à terceira aula, transcrevemos, e, paralelamente, realizamos a leitura flutuante das anotações do pesquisador. Já na fase de pré-análise notamos a necessidade de sintetizar alguns pontos dos dados, e fizemos isso por meio da exploração do material, que culminou em uma reescrita resumida da aula. Por fim, no tratamento dos resultados, inferência e interpretação dos dados confrontamos a reescrita da aula com as categorias levantadas por nós, que serão exploradas a seguir, de modo a identificar quais foram as práticas utilizadas pela formadora para fomentar discussões coletivas e oportunizar a aprendizagem profissional do futuro professor para ensinar Álgebra.

Para a elaboração das categorias de análise, recorremos a uma abordagem dedutiva tomando-se os conceitos e autores de nosso enquadramento teórico, de modo que, além de identificar as práticas, pudéssemos compreender como elas foram utilizadas pela formadora para fomentar discussões coletivas que oportunizasse aprendizagens profissionais aos futuros professores acerca da Álgebra e seu ensino nos primeiros anos.

Nesse sentido, olhamos para as etapas da aula separando-as em quatro (Introdução, Desenvolvimento, Discussão e Finalização) e observamos que dentro de cada uma dessas etapas os formadores mobilizam diferentes práticas para fomentar discussões coletivas. Por exemplo, na Introdução os formadores devem estabelecer uma comunidade de aprendizagem (Ferreira et al., 2023) e despertar o pensamento dos estudantes (Borko et al., 2014), portanto, atrelamos as duas práticas e relacionamos com a utilização da TAP e com o ensino do Pensamento Algébrico. A Tabela 1 apresenta as categorias compostas pelas práticas organizadas, considerando as diferentes etapas da aula realizada pela formadora e a junção das práticas relacionadas com o uso da TAP para o ensino da Álgebra.

Tabela 1. Categorias de análise dos dados

Etapas da aula	Práticas
	Descrição
Introdução	Estabelecer uma comunidade de aprendizagem despertando o pensamento do futuro professor para se envolver em uma TAP com desafio algébrico.
Desenvolvimento	Monitorar as resoluções dos FP, selecionar e sequenciar aquelas que possuem potencial de proporcionar discussões acerca da ideia de equivalência e oportunizar o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Discussão	Compartilhar, justificar, questionar e responder confusões e erros dos FP durante as discussões, procurar evidências nas afirmações realizadas pelos FP, estabelecer conexões entre diferentes resoluções acerca do conteúdo algébrico e desafiar os FP a avançarem com o seu conhecimento.
Finalização	Sistematizar as aprendizagens sobre a ideia de equivalência e sobre como ensinar essa propriedade do sinal de igual na educação básica.

Resultados

Para situar o leitor, antes de iniciarmos a apresentação e análise da terceira aula, vale destacar que ela ocorreu após dois encontros de reflexão, envolvendo Violeta e Eduardo, referentes às aulas anteriores e um encontro de planejamento dedicado à essa aula.

Durante o planejamento da terceira aula, Violeta elaborou a TAP de acordo com os materiais fornecidos pelos facilitadores, o qual continha uma tarefa matemática, um conjunto de resoluções de estudantes da educação básica (registros de prática) e um roteiro de elaboração da TAP. Após o planejamento e a discussão entre Violeta com o facilitador, a TAP ficou estruturada com três partes, e a versão final está apresentada no Apêndice I.

A aula começou com a formadora realizando a leitura da TAP para os futuros professores, e reforçando como ela deveria ser desenvolvida, ou seja, explicou a dinâmica da turma para a resolução da TAP: "a primeira parte da tarefa a gente vai fazer individualmente, tá? [...] a gente "tá" aprendendo a parte matemática, "tá"?" Violeta destaca o objetivo dessa primeira parte da TAP e a importância de ela ser realizada individualmente, estabelecendo assim uma comunidade de aprendizagem de modo a possibilitar que os futuros professores se envolvam com a temática da aula, o pensamento algébrico.

Depois de apresentar a tarefa matemática, Violeta continua destacando outras potencialidades da TAP:

> Violeta: [...] A gente aprende a matemática, mas também a gente vê como dar aula disso, né? Não é só como dar aula, a parte metodológica, não é só a matemática, a gente faz as duas partes integradas...

Neste trecho, notamos que a formadora se preocupou em aprofundar os elementos que compõem uma TAP, fortalecendo o entendimento aos futuros professores sobre diferentes dimensões do conhecimento profissional, e buscando despertar neles o pensamento para se envolverem com a resolução da TAP.

Depois deles resolverem a primeira parte da TAP, Violeta pede que eles se reúnam em pequenos grupos, entrega-lhes uma cartolina e alguns canetões, e solicita que escolham uma estratégica de resolução da tarefa matemática (que compõe a TAP) para representar na cartolina. Violeta orienta ainda que, na sequência, os trios deveriam ser mantidos para a resolução das outras duas partes da TAP.

Enquanto os futuros professores escolhiam a resolução a ser representada na cartolina (Figura 1), Violeta circulava entre os grupos com a finalidade de monitorar, selecionar e sequenciar aquelas respostas que possuiam maior potencial para as discussões.

Figura 1. Trabalho autônomo.

Nas discussões coletivas, a formadora convidou alguns grupos para explicar suas resoluções, com destaque aos grupos 3 e 4 (Figura 2), que incitaram a discussão com toda a turma.

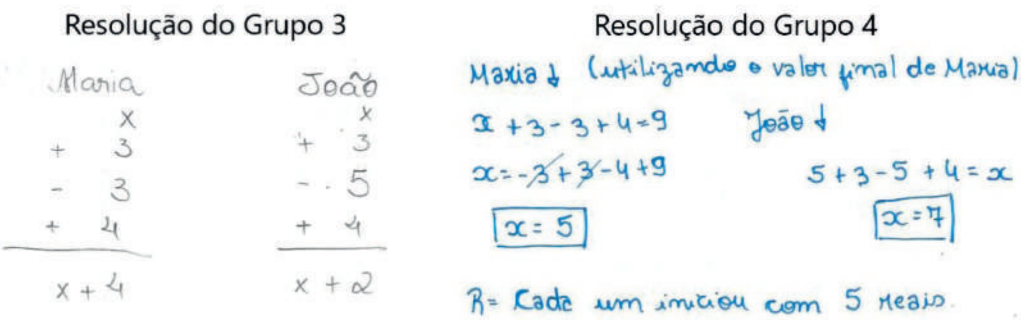


Figura 2. Resoluções análogas às resoluções dos Grupos 3 e 4.

Utilizando-se da apresentação dos grupos e do registro nas cartolinas, Violeta questionou:

> Violeta: Grupo 3 e 4, a essência [da resolução] é a mesma?
>
> Futuros professores (FP): é...
>
> Violeta: Mas o registro é o mesmo?
>
> FP: não!
>
> Violeta: [...] embora sejam registros tidos como diferentes, a essência dele mudou?
>
> FP: não...
>
> Violeta: [...] a gente pode falar que estamos nos deparando com duas resoluções diferentes?
>
> FP Plínio: na primeira [questão da tarefa matemática] que estava pedindo duas resoluções, eu fiz desse jeito, "em pé" e "deitado".
>
> Violeta: quando a gente fala resolução diferente, é um outro pensamento diferente, não é só uma forma de escrever.

Para a realização desses questionamentos, que potencializaram a discussão, Violeta buscou evidências nas resoluções dos dois grupos e, em seguida, convidou-os a compartilhar suas impressões, estabelecendo conexões entre as suas resoluções e oportunizando que os futuros professores avançassem em seus conhecimentos.

Ainda utilizando as resoluções apresentadas, Violeta chama a atenção para a resolução da equação:

> Violeta: como é esse negócio de muda de lado [da igualdade] muda de sinal? [...] O que que é que a gente está fazendo? Lembra quando eu falei que a gente tem o princípio da equivalência? O que é o princípio da equivalência, eu tenho aqui uma parte antes e uma parte depois [do sinal de igual] [...] Se eu tenho 5 aqui [antes do sinal de igual], eu tenho que ter 5 aqui [depois do sinal de igual], se eu coloco 1 aqui [antes do sinal de igual], para manter o equilíbrio eu devo colocar 1 aqui [depois do sinal de igual]

Violeta chama a atenção para a equivalência do sinal de igual, sistematizando que a utilização do procedimento indicado por eles é válida, mas que é preciso conhecer a propriedade que justifica sua existência.

Dando continuidade à aula, a formadora inicia a segunda parte da TAP com o seguinte esclarecimento:

> Violeta: Vocês vão dar aula para crianças. [...] Vocês têm que pensar como professores [...] Então, olhando essas resoluções [Parte 2, Anexo I], não basta dizer fez certo ou fez errado, você precisa argumentar, você também agiria assim? Os 2, tá certo? tá errado? Agora, se você detectou alguma coisa que o aluno deixou de fazer, ou de repente ele fez e você também tem que elogiar, não é?

Percebe-se que Violeta procura estabelecer um novo combinado com o grupo, no sentido de fazer com que eles extrapolem as respostas curtas, argumentem e justifiquem suas respostas ("você precisa argumentar"). Essa prática se relaciona ao estabelecimento de uma comunidade de aprendizagem despertando o pensamento dos futuros professores sobre o ensino da Álgebra nos primeiros anos.

As evidências de que a formadora realizou as práticas de desenvolvimento, tais como monitorar, selecionar e sequenciar resoluções potencializadoras podem ser notadas no momento das apresentações das respostas dos futuros professores, pois ela os chama, nominalmente, de maneira intencional:

> Violeta: [...] professora Heloisa (...) Você consideraria isso [Parte 2, Apêndice I] certo? O que você acha? O que você me chamou no canto e disse?
>
> FP Heloisa: como ele não deixa registrado o cálculo, não dá para a gente saber o que passou na cabeça dele para chegar nesse resultado que ele coloca na questão.

Heloisa refere-se ao registro ii (Apêndice I) e parece não considerar o desenho como um meio de representação da história. Nesse sentido, Violeta continua:

> Violeta: A professora Rebeca falou o seguinte, apesar de não ter tido o cálculo tem o desenho. Professora Heloísa, você acha que o desenho aqui é suficiente para você entender o cálculo?

A formadora buscou evidências nas resoluções que eles apresentavam, de modo a incitar as discussões acerca da importância dos registros (respostas dos alunos da escola básica) e os convida a compartilhar suas ideias para que houvesse um confronto entre as diferentes opiniões sobre o ensino da Álgebra. Ao notar que suas intervenções causaram inquietações no grupo e fomentaram outras participações paralelas, Violeta continua:

> Violeta: o desenho, aqui ele é utilizado para que? Então agora eu vou analisar a questão, quando você tem aí uma situação problema, que você pede para o aluno fazer a ilustração do problema, é um jeito para ele tentar organizar a ideia? Também é um recurso...

Nesse momento, Violeta tenta iniciar uma sistematização sobre as diferentes formas de registros ("Também é um recurso"). Nesse sentido, a formadora continua:

> Violeta: a gente tem o grupo 9 [de FP] que desenhou também [foi até a lousa apontar para o cartaz do grupo 9]. Se a gente comparar o desenho delas [FP] com o desenho dos nossos dois meninos [estudantes da educação básica], qual traz maiores informações sobre as operações que foram realizadas aqui?

A formadora busca novamente evidências nas resoluções dos futuros professores para confrontar suas respostas com as resoluções dos estudantes da educação básica. Essa estratégia possibilita que eles compreendam que, a diferença nas formas de interpretar as respostas dos alunos pode ser oriunda de um repertório de conhecimentos profissional já constituído nos futuros professores, mas que ainda está em construção no caso dos estudantes da educação básica.

Utilizando-se da ideia levantada acerca do registro que continha as respostas dos alunos, Violeta finaliza a aula reforçando o papel que eles, futuros professores, podem – e devem assumir – no ensino da Álgebra, e como esse ensino pode contribuir com a linguagem e, consequentemente, com registros mais ricos.

Discussão e Conclusões

Durante a aula de Violeta, notamos a existência de todas as etapas de uma aula (Elliot et al., 2009). Entre essas etapas, foi possível identificar práticas que fomentaram as discussões coletivas, tais como o estabelecimento de uma comunidade de aprendizagem (Ferreira et al., 2023), o despertar do pensamento dos futuros professores (Borko et al., 2014), o monitoramento, seleção e sequenciamento de resoluções (Elliot et al., 2009), o compartilhamento, a justificação e o questionamento para responder a erros dos FP (Elliot et al., 2009), a busca por evidências nas afirmações dos FP (Borko et al., 2014), o estabelecimento de conexões entre diferentes resoluções, a utilização de questões para desafiar os FP a avançarem com os seus conhecimentos e a sistematização das aprendizagens matemáticas e didáticas (Ferreira et al., 2023).

Também pudemos notar que as práticas utilizadas por Violeta estiveram estritamente ligadas ao ensino da Álgebra, principalmente quando a formadora chama a atenção para a diferença entre o registro e o pensamento, para a utilização da linguagem natural e quando ela denomina o procedimento utilizado na educação básica para resolver equação como a equivalência do sinal de igual (Trivilin & Ribeiro, 2015; Barboza et al., 2020). Nesse sentido, a formadora está trabalhando com a compreensão e representação de situações matemáticas utilizando outros símbolos, como o desenho (Brasil, 2017), o que pode ser visto como um meio de aproximar a Álgebra a uma atividade humana (Kaput, 2008).

Ao desvendar o procedimento de resolução da equação com a utilização da ideia de equivalência Violeta está voltando seu trabalho à aritmética generalizada (Blanton & Kaput, 2005). Além disso, a formadora também está trabalhando com os diferentes significados do sinal de igual, contribuindo para desmistificar o uso desse símbolo como exclusivamente operacional (Ponte et al., 2009; Trivilin & Ribeiro, 2015; Barboza et al., 2020).

Entendemos que os resultados desse estudo contribuem com a formação matemática do professor que atuará nos primeiros anos de escolarização (Fiorentini, 2018; Ponte & Chapman, 2015) e com a aproximação desse futuro professor com a Álgebra (Brasil, 2017; Castro & Fiorentini, 2021). Além disso, evidenciamos que as discussões coletivas na formação de professores, aliadas a utilização de tarefas formativas com aspectos da prática do professor são ferramentas potencializados para a sua aprendizagem profissional (Borko et al., 2014; Ribeiro & Ponte, 2020).

Destacamos como possibilidades futuras a serem realizadas a partir desse estudo, a verificação da utilização das práticas para fomentar discussões coletivas visando oportunizar a aprendizagem profissional para o ensino de outras áreas da matemática, em outros espaços de formação, como na Licenciatura em Matemática e na formação continuada. Além disso, também apontamos para a possibilidade de verificar se as oportunidades de aprendizagem profissional oferecidas pela formadora se concretizaram em aprendizagens aos futuros professores dos anos iniciais.

Referências

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies, 62*(3), 317-335. https://doi.org/10.1080/00071005.2014.959466.

Barboza, L. C. de S., Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2021). Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. *Zetetike, 29*. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8656716.

Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo* (1ªed.). Edições 70.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005) Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), pp. 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944.

Borko, H., Jacobs, J., Seago, N., & Mangram, C. (2014). Facilitating video-based professional development: Planning and orchestrating productive discussions. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds.). *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*, 259–281. Springer Publishing.

Brasil. Ministério da Educação. (2017). *Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* DF.

Castro, F. C, & Fiorentini, D. (2021). Formação Docente em Matemática para os Primeiros Anos da Escolarização: Estudo Comparativo Brasil-Portugal. *RIESup, 7*. https://doi.org/10.20396/riesup.v7i0.8658542.

Creswell, J. W. (2014). *Investigação qualitativa e projetos de pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens* (3.ª ed.). Editora Penso.

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38*(3), pp. 181–199, 2009. https://doi.org/10.3102%2F0013189X08331140.

Doná, E. G., & Ribeiro, A. J. (2022). Conhecimento Matemático para Ensinar Álgebra: uma análise curricular na Licenciatura em Pedagogia. *Zetetiké, 30*. https://doi.org/10.20396/zet.v30i00.8668443.

Elliott, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., & Kelley-Petersen, M. (2009). Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. *Journal of teacher education, 60*(4), pp. 364-379. https://doi.org/10.1177/0022487109341150.

Ferreira, M. C. N., Ponte J. P. & Ribeiro, A. J. (no prelo). Práticas e Ações do Formador de Professores que Ensinam Matemática na Orquestração de Discussões Coletivas. *Bolema, 37(*76).

Fiorentini, D. (2018). Mapeamento e Estado da Pesquisa sobre o Professor que Ensina Matemática como Campo de Estudo. In.: *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (7:18, Foz do Iguaçu, PR). Anais do 7º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 04 a 08 de Novembro de 2018, Foz do Iguaçu (PR). SBEM.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2015). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). Routledge/Taylor & Francis.

Ponte, J. P., M. L., Branco, N., & Matos, A. (2009). *A Álgebra no ensino básico.* Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. da. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké, 28*. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., & Trevisan, A. L. (2020). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. *Quadrante, 29*(1), 52–73. https://doi.org/10.48489/quadrante.23010.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.

Trivilin, L. R., & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03.

Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods*. SAGE publications.

Apêndice I

TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL: *"EXPLORANDO A EQUIVALÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA"*

A presente Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) é composta por 3 partes. A primeira parte corresponde a Tarefa Matemática e a segunda parte apresenta algumas resoluções de estudantes da educação básica e a terceira remete a intervenção de uma aula.

A primeira parte deverá ser respondida individualmente e as demais partes em pequenos grupos.

1ª PARTE DA TAP

"REPRESENTANDO A HISTÓRIA[3]"

No verso da folha, resolva de duas maneiras diferentes a tarefa matemática apresentada a seguir:

Maria e João têm um cofre de porquinho cada um.

No Domingo, ambos tinham a mesma quantidade em seu cofre de porquinho.

Na segunda-feira, sua avó veio visitá-los e deu R$ 3,00 para cada um deles.

Na terça-feira, eles foram juntos à loja de doces. Maria gastou R$ 3,00 com um pacote de bolacha. João gastou R$ 5,00 em uma barra de chocolate.

Na quarta-feira, João lavou o quintal e ganhou R$ 4,00. Maria também ganhou R$ 4,00 por ter lavado a louça.

Eles correram para colocar o dinheiro em seus respectivos cofres de porquinhos.

Na quinta-feira, Maria abre seu cofre de porquinho e descobre que tem R$ 9,00.

a) Quanto dinheiro cada um tinha em seu cofrinho no começo da história?
b) Com quanto dinheiro cada um dos personagens (Maria e João) ficou no final?
c) Qual a diferença entre a quantia de João e Maria no final?

[3] Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in mathematics education (3rd ed., pp. 191–218). New York: Taylor & Francis

2ª PARTE DA TAP

"ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ESTUDANTES"

Em pequenos grupos, observem o enredo abaixo e façam o que é requisitado:

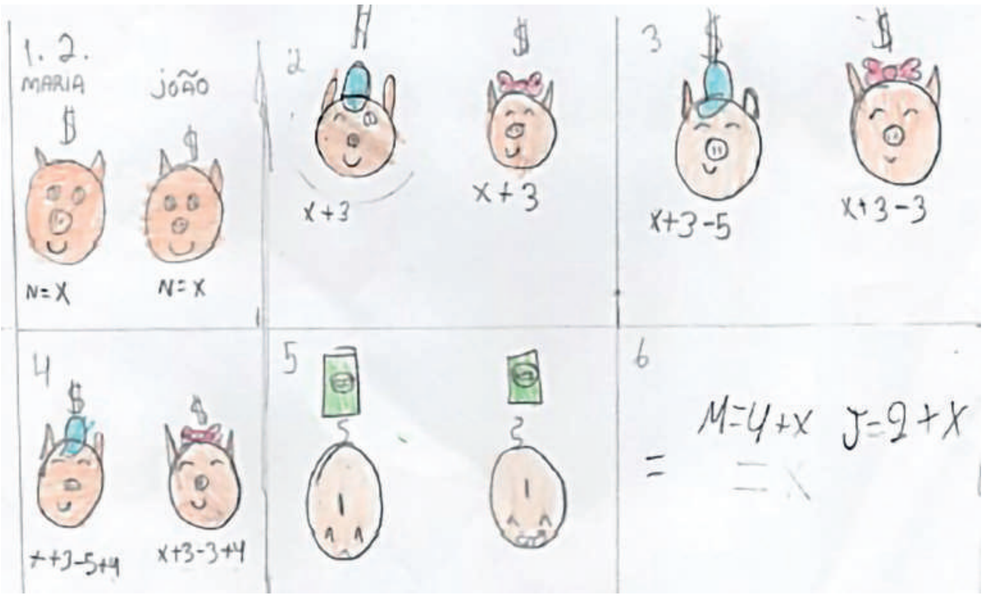
A Professora Helena gosta de trabalhar com tarefas matemáticas exploratórias com sua turma, uma delas foi a "Representando a História".

Ao aplicar esta tarefa a Profª Helena percebeu que os estudantes resolveram de diversas formas, dentre elas algumas chamaram a atenção da professora, que as levou para discutir com seus colegas na reunião pedagógica.

Considerando que vocês são colegas da Prof.ª Helena, vamos ajudá-la a entender melhor a produção de seus estudantes?

Para tanto, primeiro façam uma observação atenta das respostas dos estudantes e depois respondam as perguntas que às sucedem.

i) Karen e Gabriel



Na quinta-feira, Maria abre seu cofre de porquinho e descobre que tem R$ 9,00.

a) Quanto dinheiro cada um tinha em seu cofrinho no começo da história?

R: Ela tinha R$ 5,00

$$\begin{array}{r} 9 \\ -4 \\ \hline 5 \end{array}$$

b) Com quanto dinheiro cada um dos personagens (Maria e João) ficou no final?

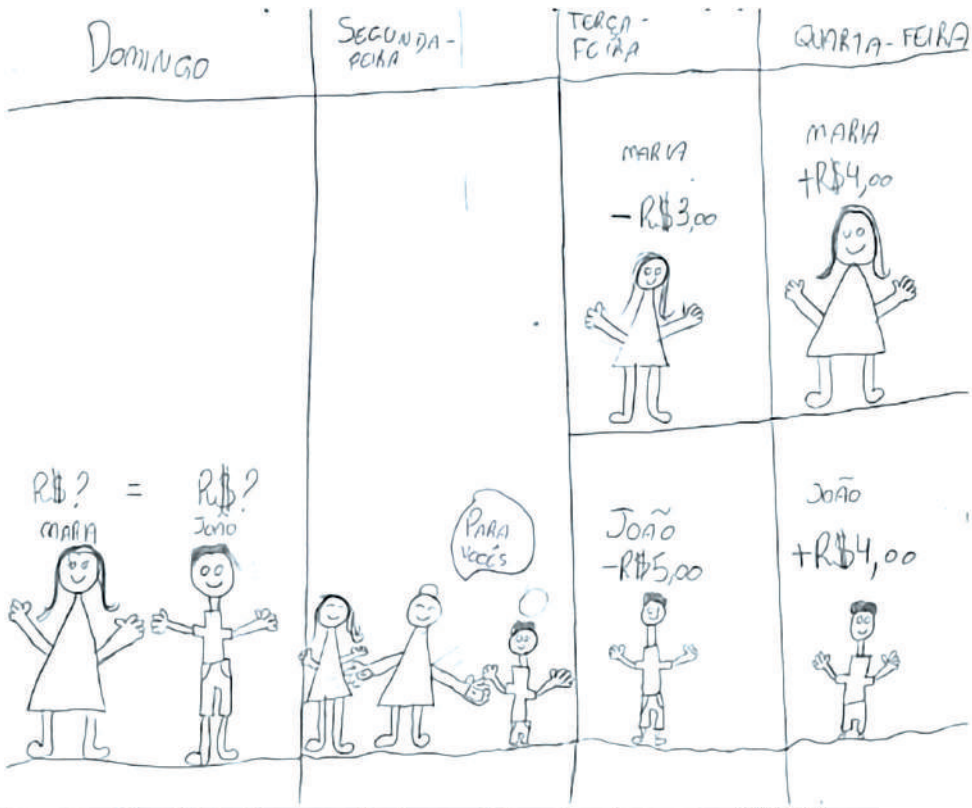
R: Eles tinham R$ 5,00

c) Qual a diferença entre a quantia de João e Maria no final?

R: A diferença é de R$ 2.

$$\begin{array}{r} 5 \\ +2 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$$

ii) Luiza e Gabriel



Na quinta-feira, Maria abre seu cofre de porquinho e descobre que tem R$ 9,00.

a) Quanto dinheiro cada um tinha em seu cofrinho no começo da história?

João e Maria tinham R$5,00 no começo.

b) Com quanto dinheiro cada um dos personagens (Maria e João) ficou no final?

João - R$7,00

Maria - R$9,00

c) Qual a diferença entre a quantia de João e Maria no final?

A diferença é de R$2,00

Agora que vocês já analisaram atentamente as resoluções dos alunos apresentadas acima, responda as perguntas abaixo:

1) Todas as resoluções foram consideradas corretas pela Profª. Helena. O que você acha a respeito? Também agiria assim? Explique.
2) Após realizar a correção, quais orientações vocês dariam aos estudantes?
3) Qual(is) idéias fundamentais da matemática vocês percebem nas resoluções dos estudantes? Justifique.

3ª PARTE DA TAP

"A IDEIA DE EQUIVALÊNCIA"

Após a conversa com a Profª. Helena, iniciou-se uma discussão entre o grupo de professores sobre a utilização da tarefa matemática "Representando a História" para abordar com as crianças do 5º ano a ideia de equivalência.

Considerando essa situação, discuta com seu grupo e responda às seguintes questões:

4) Sabendo que o objetivo da tarefa matemática é explorar a ideia de equivalência, para que as crianças possam observar e identificar essa ideia é importante que o professor realize intervenções pontuais a partir de boas perguntas. Como vocês conduziriam esse momento?

5) Considerando a faixa etária das crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental, como vocês abordariam a noção de equivalência utilizando a tarefa matemática "Representando a História"?

O estudo de aula na formação inicial de professores dos primeiros anos em Portugal

Lesson study in initial teacher education of prospective primary teachers in Portugal

Linda Cardoso[1], João Pedro da Ponte[2], Marisa Quaresma[3]

[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, lindacardoso28@gmail.com

[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

[3]Institudo de Educação da Universidade de Lisboa, mq@edu.ulisboa.pt

Resumo. *Esta comunicação tem como objetivo identificar as potencialidades e os constrangimentos do uso do estudo de aula na formação inicial de professores dos primeiros anos. Foram realizados dois estudos de aula numa instituição do ensino superior, em Portugal, no mestrado em Ensino em 1.º Ciclo e Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico. O Estudo de Aula A envolveu duas futuras professoras do 2.º ano do mestrado e o Estudo de Aula B envolveu os futuros professores de uma turma do 1.º ano. Os resultados sugerem que este processo formativo apresenta potencialidades para o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores, possibilitando uma maior ligação entre teoria e prática. No entanto, alguns constrangimentos podem surgir, nomeadamente em relação à ligação com a turma em que é lecionada a aula de investigação ou com o momento do documento curricular em que se pode integrar o estudo de aula.*

Abstract. *This research aims to identify the potential and constraints of using lesson study in the initial teacher education of primary teachers. Two lesson studies were carried out in a teacher college, in Portugal, in the master's degree of teaching in 1st cycle and 2nd cycle mathematics and science of basic education. The lesson study A involved two prospective teachers in the 2nd year of the master's program, and the lesson study B involved the prospective teachers of a 1st-year class. The results suggest that this formative process has potential for the development of prospective teachers' knowledge, enabling a greater connection between theory and practice. However, some constraints may arise, namely regarding the connection with the class in which the lesson is taught or the moment of the program in which the lesson study can be integrated.*

Palavras-chave: Estudo de Aula; Formação Inicial; Primeiros Anos; Potencialidades; Constrangimentos

Keywords: Lesson Study; Initial Teacher Education; Primary; Potentialities; Constraints

Introdução

Para exercer de forma adequada as suas funções e proporcionar aos seus alunos um ensino de qualidade, o professor deve dominar o tópico que ensina, saber como ensinar e como agir como professor (Ponte, 2002; Strutchens *et al.*, 2016). Para isso, é necessário que os professores tenham uma formação inicial adequada que os capacite com as ferramentas essenciais para exercer a profissão. No entanto, alguns desafios que são colocados à formação inicial têm sido difíceis de ultrapassar, nomeadamente, o distanciamento existente entre teoria e prática (Ponte & Chapman, 2008; Leavy & Hourigan, 2016).

Na procura por processos formativos com potencialidade para ultrapassar essas críticas à formação inicial e que possibilitem o desenvolvimento de conhecimento dos participantes, surge o estudo de aula. Stigler e Hiebert (1999) referem que o estudo de aula é uma pequena investigação desenvolvida por professores ou futuros professores, que contribuem como investigadores para a mudança. Ainda que as mudanças proporcionadas por um estudo de aula possam ser pequenas, a longo prazo podem ser significativas, permitindo um modelo de melhoria contínua, com foco na aprendizagem do aluno e através de um ensino num contexto real e colaborativo (Stigler & Hiebert, 1999).

Apesar de existirem investigações que identificam as principais potencialidades e constrangimentos do estudo de aula noutros países (por exemplo, Schipper *et al.*, 2020), ainda foi pouco explorado em Portugal, principalmente ao nível da formação inicial. Atendendo a que o processo deve ser adaptado ao contexto, torna-se relevante compreender, na formação inicial de professores em Portugal, quais são as principais potencialidades e constrangimentos deste processo, para que seja integrado na formação dos futuros professores. Assim, a investigação, na qual esta comunicação se fundamenta, tem como objetivo identificar as potencialidades e os constrangimentos do uso do estudo de aula na formação inicial de professores dos primeiros anos. Para alcançar este objetivo, procuramos dar resposta às seguintes questões de investigação: (i) Quais as principais potencialidades ao integrar o estudo de aula na formação inicial de professores dos primeiros anos? (ii) E quais os principais constrangimentos?

Estudo de Aula

O estudo de aula é um processo formativo, originalmente usado com professores em serviço, no Japão, e atualmente espalhado pelo mundo. Neste processo, constituído por um ciclo com quatro fases (Figura 1), um grupo de professores realiza encontros regulares durante um período, e trabalha sobre o *design* e o planeamento pormenorizado de uma aula, que é depois lecionada, e sobre a qual posteriormente refletem e propõem melhorias.

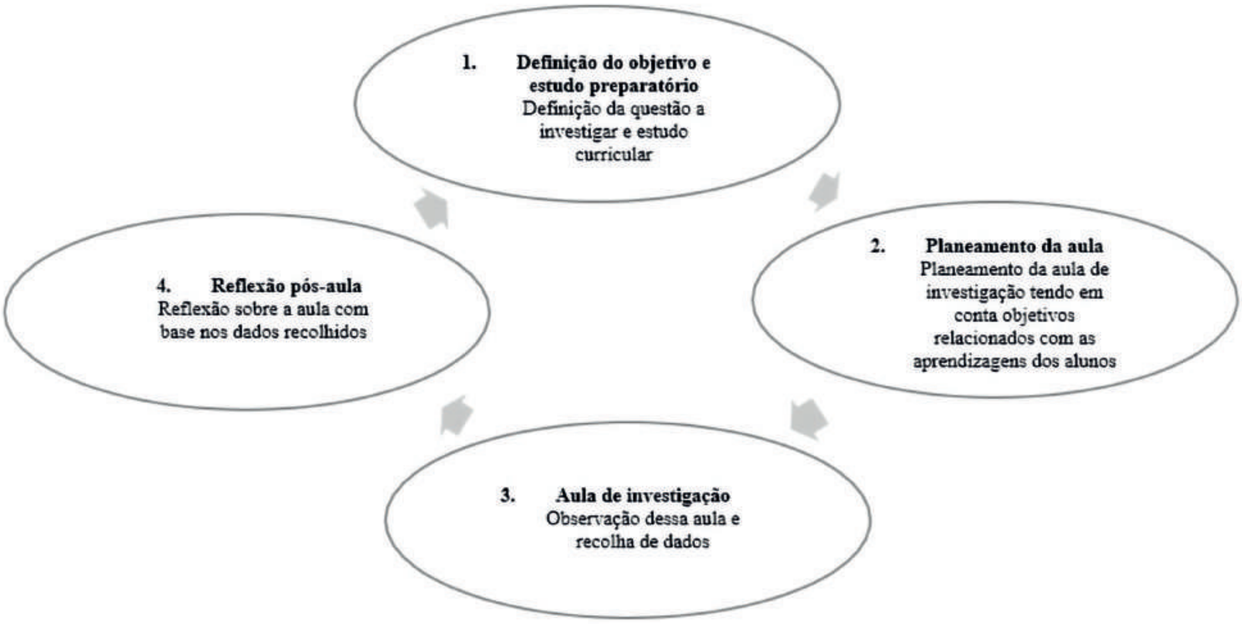


Figura 1: Ciclo do Estudo de Aula baseado em Murata (2011)

Na primeira fase, o grupo identifica um problema na aprendizagem dos alunos e planeia todo o trabalho a desenvolver. De seguida, na fase de planeamento da aula, o grupo efetua uma análise das orientações curriculares, materiais didáticos, livros e artigos relativos à aprendizagem dos alunos em relação ao tópico selecionado e elabora pormenorizadamente o plano de uma aula, através da resolução, análise e adaptação de tarefas, definição de estratégias de ensino, antecipação de possíveis dificuldades dos alunos e preparação da discussão coletiva. Na fase seguinte, um dos participantes leciona a aula (aula de investigação) e os restantes membros observam, tomando notas sobre as aprendizagens dos alunos. Por fim, na reflexão pós-aula, todos discutem e refletem sobre o que foi observado, o que pode originar uma reformulação do plano de aula.

O estudo de aula possui características que o tornam potenciador de desenvolvimento de conhecimento dos participantes que vivenciam o processo. Este processo formativo, centrado nas aprendizagens dos alunos, com um cunho colaborativo e reflexivo, possibilita igualmente uma forte ligação entre teoria e prática (Cajkler *et al.*, 2013).

Estudo de Aula na Formação Inicial

Nos últimos anos, atendendo às potencialidades que o estudo de aula revela no desenvolvimento de diversos conhecimentos do professor, têm sido realizadas investigações neste campo em vários países (Larssen *et al.*, 2018; Ponte, 2017). Também em Portugal, o estudo de aula na formação inicial tem ganhado maior destaque, sendo o foco de diversas investigações. Para além da possibilidade dos futuros professores desenvolverem conhecimento, pode ajudar a melhorar pontos fracos que têm sido apontados à formação inicial ao longo dos anos, como o distanciamento entre teoria e prática. Ao vivenciarem este processo formativo, os futuros professores têm a oportunidade de serem investigadores, de discutirem sobre diversos aspetos relacionados com a aula, por exemplo, de Matemática e de os colocarem em prática através da aula de investigação, ligando teoria e prática (Bieda, Cavanna & Ji, 2015). Para além dos aspetos relacionados ao conhecimento didático que são amplamente discutidos durante as sessões do estudo de aula, os futuros professores podem igualmente desenvolver conhecimento sobre conceitos e processos matemáticos (Hourigan & Leavy, 2019).

O estudo de aula, quando integrado na formação inicial, acontece usualmente nos últimos anos de formação, quando os futuros professores já desenvolveram algum conhecimento e podem lecionar a aula de investigação. Apesar das investigações realizadas apresentarem, em grande parte, casos de sucesso, nos quais o processo formativo foi bem-sucedido, esta integração é muitas vezes complexa. Para além de procurar uma harmonia com as outras atividades que são desenvolvidas no programa (Hourigan & Leavy, 2019), é necessário fazer algumas adaptações ao estudo de aula com professores em serviço (Murata, 2011).

Alguns estudos de aula na formação inicial são muito próximos dos realizados com professores em serviço, como é o caso do estudo de aula realizado por Cajkler *et al.* (2013). Os futuros professores vivenciam todo o ciclo, percorrendo as quatro fases indicadas na secção anterior, durante um período relativamente longo e a aula de investigação foi lecionada num contexto real. No entanto, existem adaptações como o *Microteaching Lesson Study* de Fernández (2005). Neste caso, um dos grupos de futuros professores leciona a aula de investigação aos pares em vez de a uma turma de alunos em contexto real. Outra adaptação, designada por *Mentor-Guided Lesson Study*, de Bieda, Cavanna e Ji (2015), os participantes observam uma primeira aula de investigação e lecionam uma segunda, sendo que o professor orientador possui um papel determinante ao longo do processo.

Para além destas adaptações, podemos considerar ainda o número de sessões e a duração do estudo de aula no contexto. Outro aspeto a ter em consideração é o papel do professor do ensino superior e do professor cooperante ou titular da turma, que deve ser clarificado junto dos futuros professores de modo a garantir que estes se envolvam no estudo de aula (Schipper *et al.*, 2020). Ainda que o estudo de aula possibilite atingir objetivos relacionados com o desenvolvimento de conhecimento dos futuros professores, é necessário ter em atenção que não consegue atingir todos os objetivos a serem trabalhados na formação inicial (Ponte, 2017).

Metodologia

A investigação segue uma abordagem qualitativa e paradigma interpretativo (Erickson, 1986), adotando o *design* de observação participante (Jorgensen, 1989). Foram realizados dois estudos de aula, em dois anos letivos distintos, em Portugal, com futuros professores que frequentavam o Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico.

A investigadora (primeira autora) adotou o papel de observadora participante, intervindo apenas quando necessário, procurando não influenciar o decorrer do processo. No entanto, realizou reuniões com a professora do ensino superior, estruturando e preparando o(s) objetivo(s) de cada sessão do estudo de aula na formação inicial. A professora do ensino superior conduziu todas as sessões nos estudos de aula.

Os dados foram recolhidos através de observação, com gravação vídeo ou áudio das sessões online e presenciais, respetivamente, e registo num diário de bordo, da realização de entrevistas semiestruturadas aos futuros professores, no fim do processo, e da recolha documental das reflexões finais escritas realizadas em pequeno grupo no âmbito da unidade curricular em que se integrou o estudo de aula e dos materiais PowerPoint usados nas apresentações finais.

Atendendo à revisão de literatura efetuada, os estudos de aula foram analisados, identificando os aspetos positivos (potencialidades) e negativos (constrangimentos) observados ou indicados pelos participantes ao longo do processo e também nas reflexões escritas e nas apresentações finais em que refletiam sobre o processo que vivenciaram.

Após os dois estudos de aula, fez-se uma análise sobre as potencialidades e os constrangimentos que surgiram, confrontando com o que era indicado noutras investigações neste campo.

Estudo de Aula A

O estudo de aula A foi realizado no ano letivo de 2020/21, no 2.º semestre do 2.º ano do mestrado. O processo formativo foi integrado na unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada e as sessões decorreram durante o período em que as futuras professoras estavam em estágio. Participaram no estudo de aula duas futuras professoras (Bárbara e Jéssica – nomes fictícios), a professora do ensino superior da unidade curricular, o professor cooperante e a investigadora. As futuras professoras vivenciaram todas as fases do estudo de aula. As sessões (Tabela 1) foram essencialmente online, devido à pandemia Covid19, sendo que foi apenas possível realizar presencialmente a aula de investigação e a sessão de reflexão pós-aula que ocorreu imediatamente a seguir. A aula de investigação foi lecionada pelas futuras professoras numa turma do 2.º ano de escolaridade e incidiu no tema Números e Operações, mais especificamente no cálculo mental.

Tabela 1: Estrutura das sessões do estudo de aula A

Sessão	Objetivo(s) da sessão
1 (Online)	O que é o estudo de aula; escolher o tópico; definir os objetivos
2 (Online)	Planeamento da aula (selecionar, resolver e adaptar as tarefas)
3 (Online)	Planeamento da aula (Antecipar possíveis estratégias de resolução e dificuldades; planeamento da observação)
4 (Online)	Rever o plano de aula
5 (Presencial)	Aula de investigação
6 (Presencial)	Reflexão sobre as ações das futuras professoras e a aula
7 (Online)	Reflexão sobre as tarefas, as resoluções e as aprendizagens dos alunos

No final do estudo de aula, as futuras professoras evidenciaram alguns aspetos que consideraram positivos neste processo:

> *Trabalhar em conjunto com o professor cooperante e a professora orientadora … conseguir coligar cada vez mais a faculdade com o estágio, tipo a interligar… intrínseco… ficou muito melhor a ligação, e não pareceu uma coisa assim caída do céu … E acho que a [professora do ensino superior] fez a ponte, entre fazermos um bocadinho o que a [instituição do ensino superior] nos ensinou, em termos de planificar e tudo mais, e o professor [cooperante] ajudou-nos imenso… correu muito bem a interligação. (Bárbara, Entrevista Final)*

Neste excerto Bárbara evidencia a importância do professor cooperante e da professora do ensino superior ao longo do processo, que contribuíram para a discussão e incentivaram a uma ligação entre o que é feito no ensino superior, em relação à análise de documentos e planeamento da aula, e o que é feito no contexto real, revelando também uma maior aproximação entre teoria e prática.

Apesar dos benefícios que referiram ao longo da entrevista, também apontaram alguns constrangimentos e aspetos a ter em consideração em futuros estudos de aula na formação inicial de professores:

> *Eu acredito que se fosse presencial, iria haver uma ligação ainda maior, sou sincera … não sei se teria um desfecho diferente, mas a ligação acredito que teria sido maior, sem dúvida alguma (Bárbara, Entrevista Final)*

> *Temos tantas coisas a passar-se e tanta coisa que temos para entregar … é difícil conciliar tudo e fazer em condições tudo o que queremos fazer … se calhar também [fazer o EA] não no estágio final … porque no final eu acho que já estamos todos assim um bocadinho mais cansados e sobrecarregados com tudo o que temos para fazer (Jéssica, Entrevista Final)*

No estudo de Aula A foram destacadas como potencialidades uma maior aproximação entre a teoria e a prática e o trabalho colaborativo entre participantes com diferentes experiências e papéis. Como constrangimentos as futuras professoras destacaram como primeiro aspeto o facto de grande parte das sessões serem online, o que influenciou o envolvimento e as discussões, e como segundo aspeto o facto de ter sido realizado no último semestre do curso de formação inicial, em que têm muitos trabalhos para entregar e atividades para realizar.

Estudo de Aula B

O estudo de aula B foi realizado no letivo de 2022/23, no 1.º semestre do 1.º ano do mestrado. Houve, portanto, uma alteração relativamente ao estudo de aula A e, além disso, desta vez, o processo formativo foi integrado na unidade curricular de Didática da Matemática no 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico e envolveu toda a turma. Assim, o estudo de aula teve como participantes 25 futuros professores, divididos em pequenos grupos, a professora do ensino superior da unidade curricular, que era a mesma do estudo de aula anterior, a professora titular da turma em que foi lecionada a aula de investigação e a investigadora. Foram realizadas cinco sessões (Tabela 2), todas presenciais. Os futuros professores não vivenciaram todas as fases do estudo de aula, atendendo a que a professora do ensino superior e a professora titular da turma em que foi realizada a aula de investigação é que definiram o tópico e a tarefa. Assim, os futuros professores só participaram no processo a partir da fase de planeamento da aula. A professora titular da turma, para além do contributo da seleção do tópico e da tarefa, lecionou a aula de investigação, que foi observada por um elemento de cada grupo de futuros professores, pela professora do ensino superior e pela investigadora. A aula de investigação ocorreu numa turma do 3.º ano de escolaridade e incidiu no tema Geometria e Medida, mais especificamente no tópico Sólidos e no subtópico Pirâmides.

Tabela 2: Estrutura das sessões do estudo de aula B

Sessão	Objetivo(s) da sessão
1	Seminário de apresentação do estudo de aula Professora do ensino superior e professora titular selecionam o tópico
2	Resolução da tarefa das pirâmides Desenvolvimento da planificação: tópicos, objetivos, abordagem metodológica
3	Antecipação de resoluções e dificuldades; Questões do docente, Sequenciar resoluções, Preparação da observação
4	Aula de investigação
5	Apresentação e discussão dos trabalhos de reflexão

No final do processo formativo, os futuros professores indicaram, na sua perspetiva, aspetos positivos e negativos do estudo de aula na formação inicial. Cátia e Margarida (nomes fictícios), foram duas futuras professoras que indicaram tanto potencialidades como constrangimentos. Referiram que um constrangimento foi "*não tinha percebido exatamente, quando comecei, o que era o estudo de aula, para que é que servia*" (Cátia, Entrevista final). Este constrangimento inicial, prolongou-se durante o processo, influenciando o envolvimento dos futuros professores. Referiram também o distanciamento que existiu com a turma em que foi lecionada a aula de investigação:

> *Nós não fazíamos ideia de como é que era a turma, de quantas pessoas havia, nós chegámos lá e [a professora] contou-nos que havia aquele aluno que não falava português … mas se soubéssemos, na previsão das dificuldades ou no planeamento podíamos ter[tido] em conta alguns aspetos. (Cátia, Entrevista final)*
>
> *Era importante haver alguma ligação mais próxima … senti algum distanciamento*
>
> *… de forma prática é muito difícil … a professora vir à nossa turma falar sobre isso [mas] era muito bom … [teria sido mais interessante] se fossemos nós a lecionar a aula, mas não sei como, somos muitos. (Margarida, Entrevista final)*

As futuras professoras mencionam que teria sido importante uma maior aproximação com a turma em que foi lecionada a aula de investigação e com a professora titular. Margarida refere ainda que considerava interessante terem sido eles a lecionar essa aula. Apesar dos constrangimentos, os futuros professores apontam potencialidades e realçam aspetos que desenvolveram:

> *O que aprendi mais foi a pensar sobre os pormenores … que tem de ser apropriado para a turma … o tempo de discussão coletiva é muito importante … o estudo de aula pode ter bastantes mais valias, não só para os alunos, mas também para o professor … refletir sobre esses momentos vai influenciar outros momentos a seguir … a aula também achei interessante, vivenciar e estar lá presente, mas eu sinto que aprendi mais foi a refletir, porque pude tornar aquilo que vivenciei mais significativo. (Margarida, Entrevista final)*
>
> *É uma forma de refletir sobre coisas que às vezes parecem tão simples, mas que nós não temos contacto, então nós não estamos sequer aí para essas coisas … conhecer estratégias … e ser bom na nossa vida futura, como professores. (Cátia, Entrevista final)*

Margarida e Cátia referem a importância da reflexão e que, ao planearem pormenorizadamente uma aula, analisaram aspetos para os quais não olhavam anteriormente. Margarida realça também a importância de cada uma das fases do processo, ao afirmar que olhou para os pormenores, na fase de planeamento, que considerou interessante observar a aula de investigação e que, depois, tornou tudo o que aprendeu mais significativo ao refletir, na fase de reflexão pós-aula.

Nas reflexões finais escritas, os futuros professores mencionaram mais aspetos que consideraram positivos no estudo de aula:

> *Existe colaboração promovida pela partilha, cooperação e apoio (Reflexão escrita, Grupo 1)*

> *Foi bastante vantajosa e enriquecedora, na medida em que nos conduziu a um maior conhecimento do papel do professor e a novas perspetivas e metodologias de trabalho (Reflexão escrita, Grupo 2)*

Os futuros professores avaliaram como positiva a sua experiência de participar um estudo de aula, referindo conhecimentos que desenvolveram e mencionando que vivenciar um estudo de aula na formação inicial podia influenciar o seu futuro enquanto professores.

Discussão

Os dois estudos de aula tiveram adaptações atendendo o contexto e o momento em que foi desenvolvido. Ainda que no estudo de aula B os futuros professores não tenham vivenciado a seleção da tarefa, envolveram-se no planeamento pormenorizado de uma aula que foi colocada em prática e observada por alguns e posteriormente refletida, contendo as principais características deste processo formativo. Assim, os dois estudos de aula na formação inicial apresentados foram constituídos por quatro fases (Murata, 2011). No entanto, no estudo de aula A, as futuras professoras vivenciaram todas as fases, enquanto no estudo de aula B não vivenciaram a primeira fase, sendo esta definida pela professora do ensino superior e pela professora titular da turma. Os futuros professores passaram de participar e vivenciar todas as fases do processo, para participar em apenas três, o que foi uma perda, porque vivenciar todas as fases torna o processo mais completo. A ausência desta fase pode ter influenciado o seu entendimento sobre o processo, visto que apontaram como um constrangimento o não entenderem o que era o estudo de aula até terminarem o ciclo. Destaca-se ainda que no estudo de aula A as futuras professoras lecionaram a aula de investigação, enquanto no estudo de aula B foi a professora titular, o que influencia a experiência dos futuros professores no estudo de aula.

Uma diferença significativa nestes estudos de aula na formação inicial foi o número de futuros professores a participar em cada um deles. Salienta-se como um constrangimento no estudo de aula A, a participação de apenas duas futuras professoras, existindo um número significativo de futuros professores que não tiveram oportunidade de vivenciar o processo. No estudo de aula B participou toda a turma de futuros professores, no entanto, foram necessárias alterações, como a participação mais reduzida da professora do ensino superior em cada um dos grupos, a menor ligação com a professora titular e nem todos os futuros professores observaram a aula de investigação.

Ainda que tenha sido visível o cunho colaborativo (Murata, 2011) em ambos os casos, no estudo de aula A os participantes tinham diferentes papéis, conhecimentos e experiências, o que influenciou as discussões. Já no estudo de aula B, os futuros professores trabalharam em pequenos grupos, enquanto a professora do ensino superior ia circulando, e a ligação com a professora titular da turma da aula de investigação foi menor. Atendendo à importância que estes intervenientes têm no decorrer do estudo de aula (Schipper *et al.*, 2020), teria sido importante uma maior aproximação neste estudo de aula, tal como também é referido pelos futuros professores nas suas reflexões e entrevistas finais.

Em ambos os estudos de aula foi visível uma grande aproximação entre teoria e prática, tal como é referido em investigações anteriores (Bieda, Cavanna & Ji, 2015; Cajkler *et al*, 2013). Os futuros professores reconheceram essa potencialidade no processo formativo. A promoção da reflexão foi também evidenciada pelos futuros professores como um aspeto positivo, principalmente, no estudo de aula B.

No estudo de aula A, as futuras professoras apontaram como um constrangimento as sessões terem sido essencialmente online. No estudo de aula B procurou-se que esse aspeto fosse modificado, atendendo a que já não existiam restrições devido à Covid19. O facto deste aspeto já não ter sido mencionado pelos futuros professores do estudo de aula B revelou que as sessões presenciais pareceram possibilitar um maior envolvimento dos participantes e um aprofundamento das discussões. Outra mudança do estudo de aula A para o estudo de aula B foi a alteração do semestre em que foi realizado e que possibilitou, neste último, uma maior harmonia com os outros trabalhos que foram desenvolvidos em simultâneo na formação inicial (Hourigan & Leavy, 2019).

Conclusão

Esta comunicação tem como objetivo identificar as potencialidades e os constrangimentos do uso de dois estudos de aula na formação inicial de professores dos primeiros anos. Ao serem realizados dois estudos de aula na mesma instituição do ensino superior, mantendo a professora do ensino superior, permitiu realizar alterações de um para outro, procurando identificar potencialidades e constrangimentos do uso deste processo formativo quando integrado na formação inicial.

Do estudo de aula A para o B, a relação com a turma e o professor cooperante ou titular da turma, consoante o caso, foi bastante diferenciada. Embora exista dificuldade em integrar o professor cooperante ou titular da turma no estudo de aula, nota-se que este possui um papel importante no estudo de aula, dando um grande contributo para as discussões e, consequentemente, para a experiência vivenciada pelos futuros professores. Ficou igualmente visível nestes estudos de aula que, apesar de ser possível realizar estudos de aula online, a realização de sessões presenciais continua a potenciar um maior envolvimento dos participantes.

Estes estudos de aula na formação inicial mostram que este processo, com as necessárias adaptações, traz grandes potencialidades para os futuros professores. O trabalho colaborativo que é desenvolvido no estudo de aula é reconhecido pelos participantes como um aspeto muito positivo e que influencia o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores. Para além disso, cada uma das fases do estudo de aula contribui para que os futuros professores desenvolvam e aprofundem os seus conhecimentos e capacidades e possibilita uma maior aproximação entre teoria e prática. Atendendo a que cada fase é importante para o envolvimento dos participantes (futuros professores), a sua participação desde a primeira fase, em que se seleciona o tópico, é importante e influencia a sua experiência no processo.

Os dados sugerem que um constrangimento sentido pelos futuros professores foi a compreensão do processo formativo. Ainda que tenha sido apresentado o processo formativo, que se tenham disponibilizado artigos e realizado um seminário (num dos casos), os futuros professores continuam a revelar dificuldade em entender o que estavam a fazer. Apenas quando terminam o processo é que os futuros professores referem que o entendem completamente, sentindo que se fossem iniciar outro estudo de aula na formação inicial teriam uma melhor perceção de cada uma das fases e se envolveriam de forma mais aprofundada.

Neste estudo foi possível realizar estudos de aula com adaptações distintas na formação inicial de professores dos primeiros anos e identificar potencialidades e constrangimentos dessas adaptações, possibilitando um maior conhecimento sobre a integração deste processo formativo na formação inicial. Ainda que cada estudo de aula tenha as suas potencialidades e constrangimentos, os futuros professores reconhecem que desenvolveram conhecimento com a sua participação no estudo de aula.

Atendendo às potencialidades que este processo formativo revela para a formação dos futuros professores, esta instituição do ensino superior vai continuar a realizar estudos de aula. No futuro seria interessante investigar o desenvolvimento de mais do que um ciclo de estudo de aula com os mesmos futuros professores, para analisar se existe uma diferença no seu envolvimento no processo e se é, ou não, uma vantagem a considerar.

Referências

Bieda, K.N., Cavanna, J., & Ji, X. (2015). Mentor-guided lesson study as a tool to support learning in field experiences. *Mathematics Teacher Educator, 4*(1), 20-31.

Cajkler, W., Wood, P., Norton, J., & Pedder, D. (2013). Lesson study: Towards a collaborative approach to learning in initial teacher education? *Cambridge Journal of Education, 3*(4), 537-554.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). MacMillan.

Fernández, M. L. (2005). Learning throught microteaching lesson study in teacher preparation. *Action in Teacher Education, 26*(4), 36-47.

Hourigan, M., & Leavy, A. (2019). Learning from teaching: pre-service primary teachers' perceived learning from engaging in formal lesson study. *Irish Educational Studies, 38,* 283-308. DOI: 10.1080/03323315.2019.1613252.

Jorgensen, D.L. (1989), *Participant observation: A methodology for human studies*. Sage. https://doi.org/10.4135/9781412985376.

Larssen, D., Cajkler, W., Mosvold, R., Bjuland, R., Helgevold, N., Fauskanger, J., Wood, P., Baldry, F., Jakobsen, A., Bugge, H., Næsheim-Bjørkvik, G., & Norton, J. (2018). A literature review of lesson study in initial teacher education: Perspectives about learning and observation. *International Journal for Lesson & Learning Studies, 7*(1), 8-22. https://doi.org/10.1108/IJLLS-06-2017-0030

Leavy, A., & Hourigan, M. (2016). Using lesson study to support knowledge development in initial teacher education: Insights from early number classrooms. *Teaching and Teacher Education, 57*, 161-175. DOI: 10.1016/j.tate.2016.04.002.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1–12). Springer.

Ponte, J.P. (2002). A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática em Revista, 11,* 3-8.

Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 6*(2), 169-181. https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016- 0021

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Routledge.

Schipper, T.M., Goei, S.L., Van Joolingen, W.R., Willemse, T.M., Van Geffen, E.C. (2020). Lesson study in Dutch initial teacher education explored: its potential and pitfalls. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 9*(4), 351-365. Doi: 10.1108/IJLLS-04-2020-0018

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York, NY: Free Press.

Strutchens, M.E., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J.P., Cyrino, M.C. de C.T., & Zbiek, R. M. (2016). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world.* Springer.

O facilitador num estudo de aula: que ações e que desafios?

The facilitator in a lesson study: what are the actions and challenges?

Filipa Faria[1], *Paula Gomes*[2], *Micaela Martins*[3]

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

[1]filipa.faria@edu.ulisboa.pt, [2]paula.gomes@campus.ul.pt, [3]msterceiro@edu.ulisboa.pt

Resumo. *Ao contrário dos processos de formação em que os professores são recetores de informação, o estudo de aula é um modelo colaborativo que liga a teoria à prática, uma vez que inclui planeamento detalhado de uma aula e baseia-se em reflexões focadas na aprendizagem dos alunos, apoiadas pela condução e observação dessa aula. No entanto, é necessário investigar o papel de quem conduz um estudo de aula, o facilitador, principalmente em contextos onde ainda é um processo formativo recente. Assim, procuramos identificar as ações de duas facilitadoras e os desafios que enfrentaram, durante a fase de planeamento dos estudos de aula que conduziram. A investigação é qualitativa e interpretativa, realizada em Portugal, com professores em serviço do ensino básico e secundário. A recolha de dados incluiu diário de bordo, gravações áudio das sessões e recolha documental. Os resultados mostram que, além de prepararem e conduzirem as sessões, as facilitadoras sentiram necessidade de as ajustar, após ou mesmo durante as sessões. Evidenciam também a importância de ações como selecionar recursos, antecipar as suas intervenções e definir aspetos a realçar durante as sessões, considerando as experiências dos professores, mas, sobretudo, estar recetivo às ideias deles e ajustar o planeamento quando necessário. Um dos maiores desafios enfrentados pelas facilitadoras foi equilibrar as suas intervenções, entre serem diretivas ou líderes invisíveis.*

Abstract. *Unlike teacher training processes in which teachers are receivers of information, lesson study is a collaborative model that links theory to practice, as it includes detailed planning of a lesson and is based on reflections focused on student learning, supported by leading and observing that lesson. However, it is necessary to clarify the role of the one who lead a lesson study, the facilitator, especially in contexts where it is still a recent formative process. Thus, we seek to identify the actions of two facilitators and the challenges they faced during the planning phase of the lesson studies they led. The research is qualitative and interpretive, carried out in Portugal, with in-service middle school and secondary school teachers. Data collection included fieldnotes, audio recordings of the sessions, and document collection. The results show that, in addition to preparing and leading the sessions, the* *facilitators felt the need to adjust them after or even during the sessions. They also highlight the importance of actions such as selecting resources, anticipating their interventions, and defining aspects to highlight during the sessions, considering the teachers' experiences, but above all, being receptive to teachers' ideas and adjusting the planning whenever necessary. One of the greatest challenges faced by the facilitators was balancing their interventions between being directive or invisible leaders.*

Palavras-chave: Estudo de aula; papel do facilitador; formação de professores; ensino da matemática.

Keywords: Lesson study; facilitator's role; teacher training; mathematics education.

Introdução

O estudo de aula (EA) é um processo formativo que envolve colaboração entre professores, num ambiente reflexivo, procurando melhorar a aprendizagem dos alunos. Tratando-se de um processo intrínseco à cultura das escolas japonesas (Fujii, 2018), os professores têm larga experiência como participantes ou a conduzir o EA. Quando conduzido noutros países, onde não é parte do dia a dia das escolas, emerge a necessidade de alguém assumir ativamente o papel de *facilitador*, promovendo colaboração e reflexão dos professores, assim como a promoção do desenvolvimento do conhecimento (Lewis, 2016; Scheller et al., 2019).Lewis (2016) refere que, fora do Japão, os facilitadores usualmente têm pouca ou nenhuma experiência em EA e aponta para a importância de investigar esse papel. Hourigan e Leavy (2021) destacam ainda a complexidade associada a esse papel uma vez que é necessário gerir o apoio que se aos professores por forma a não os sobrecarregar ou desencorajar. Tendo em vista desenvolver conhecimento nesta área, procuramos responder à questão: quais são as ações do facilitador na fase de planeamento da aula e que desafios enfrenta?

Facilitar o estudo de aula

No Japão, o EA é um processo de desenvolvimento profissional integrado na cultura profissional dos professores. É usualmente apoiado por um *knowleadgeable other* ou por professores experientes, com conhecimento especializado no conteúdo, no processo de ensino-aprendizagem e em EA (Hourigan & Leavy, 2021; Scheller et al., 2019). Colaborativamente, os professores preparam e conduzem uma ou mais aulas e refletem sobre a sua prática, focados na aprendizagem dos alunos. Ao contrário de alguns processos de formação "onde os professores são recetores passivos de conhecimento" (Hourigan & Leavy, 2021, p. 1), no EA eles são desafiados a refletir sobre a sua prática em contextos reais.

O papel do facilitador tem captado a atenção da investigação. Por um lado, na adaptação do EA a outros países, como Portugal, é preciso considerar que poucos são os professores que já participaram em EA e os facilitadores poderão ser também pouco experientes. Por outro, porque o seu papel é complexo e desafiante.

O facilitador é, à partida, o elemento do grupo com maior conhecimento acerca da estrutura do EA, por isso, cabe-lhe preparar as sessões, conciliando-as com as agendas e necessidades dos professores. Será também ele a conduzir essas sessões, contribuindo ou incentivando os professores a participarem, procurando manter o foco nos aspetos em discussão e incentivá-los a refletir sobre as suas ideias e as dos seus colegas. Cabe ao facilitador ajustar o plano entre sessões, ou até durante as sessões, com base na identidade profissional, no trabalho e nas necessidades dos participantes (Lewis, 2016).

Neste sentido, Lewis (2016) e Mynott e Michael (2022) consideram que o facilitador deverá orientar os professores, sendo essencial permitir-lhes expressarem as suas ideias e incertezas e construírem conhecimento de forma colaborativa. Hourigan e Leavy (2021) salientam ainda que o facilitador deverá ter conhecimento para esclarecer dúvidas sobre o conteúdo e sobre o ensino-aprendizagem desse conteúdo, conhecer diversas dinâmicas de trabalho dos alunos e diversos aspetos da prática letiva.

Conduzir a etapa de planeamento da aula

A etapa de planeamento da aula é a que ocupa um maior número de sessões num EA (Fujii, 2018). De acordo com o autor, esta etapa pode ocupar cerca de 70% das sessões e a seleção de uma tarefa adequada ao trabalho dos alunos e ao objetivo da aula são aspetos críticos. Os professores exploram tarefas e apropriam-se, com detalhe, da tarefa selecionada para a aula e antecipam possíveis estratégias e dificuldades dos alunos, bem como formas de os apoiar. É também necessário que os professores planifiquem, com bastante pormenor, a aula, onde se incluem momentos de discussão acerca da introdução da tarefa, da atividade matemática dos alunos, da discussão coletiva e da síntese. Esta planificação é um documento escrito que, atendendo à estrutura de aula definida pelos professores, contempla decisões acerca da gestão da atividade dos alunos, do tempo, e dos recursos, através de ações do professor.

Uma vez que o planeamento da aula é a fase mais longa do EA, é também aquela para a qual o facilitador terá de preparar e conduzir um maior número de sessões e, eventualmente, ajustá-las. O facilitador deve "seguir as ideias dos professores … porque muito do estudo da aula está interligado com a experiência, e porque são os interesses e as necessidades dos professores que orientam o processo" (Lewis, 2016, p. 530). Assim, por um lado, os facilitadores não conseguem preparar totalmente as sessões ". [porque] são os professores que definem a agenda, com base nas suas próprias avaliações das necessidades dos seus alunos e considerando os desafios que sentem" (Lewis, 2016, p. 530). Por outro lado, é necessário que antecipem as contribuições dos professores e que definam os aspetos a destacar em cada sessão. Este trabalho permite que os facilitadores estejam preparados para melhor ajustar a sessão às ideias que vão surgindo.

Por se tratar de uma etapa onde se contemplam a análise cuidada de tarefas e a planificação detalhada da aula, cabe ao facilitador selecionar recursos para serem analisados, considerando os desafios identificados pelos professores, para fomentar a partilha e discussão de ideias (Lewis, 2016).

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 2007) e centra-se nas ações de duas facilitadoras, em dois EA, durante a etapa de planeamento da aula de investigação. Ambas tinham experiência de ensino e estavam a desenvolver investigação na área do EA, no âmbito do Doutoramento que frequentavam. As facilitadoras leram artigos científicos sobre o EA e participaram em encontros científicos sobre EA antes de os conduzirem. Um dos estudos de aula (EA1) foi preparado e conduzido pela facilitadora A (primeira autora) e nele participaram, de forma voluntária, quatro professoras do 2.º ciclo, com mais de 20 anos de experiência de ensino. Embora as professoras estivessem habituadas a trabalhar juntas e a partilhar o espaço de sala de aula com as colegas, esta foi a primeira vez que participaram num processo de desenvolvimento profissional de natureza colaborativa. Em conjunto, decidiram trabalhar a *proporcionalidade direta* no 6.º ano de escolaridade, dando particular atenção ao momento de discussão coletiva. Este estudo de aula foi composto por doze sessões, sendo que para a fase de planeamento da aula foram necessárias cinco sessões.

A facilitadora B (segunda autora) preparou e conduziu um estudo de aula (EA2) com seis professores do ensino secundário, todos com mais de quinze anos de experiência, que se disponibilizaram para participar. Estes professores e a facilitadora já tinham trabalhado juntos noutros processos formativos e também estavam habituados a partilhar o espaço de sala de aula com os colegas. Os professores decidiram planear uma aula para alunos do 11.º ano, no tópico *progressões aritméticas*, dando particular atenção à comunicação e ao raciocínio matemático dos alunos. O planeamento da aula envolveu oito sessões de um total de treze sessões.

A recolha de dados incluiu diário de bordo, gravação áudio das sessões, e recolha dos documentos analisados e produzidos, tais como tarefas e planos de aula, pelos professores. As sessões encontram-se identificadas com Sx, por exemplo, S4 para a quarta sessão. Para caracterizar o papel do facilitador, analisámos as ações das facilitadoras considerando as ideias de Shaughnessy et al. (2021) sobre práticas de condução de discussão, e as ideias de Lewis (2016) sobre o papel do facilitador na preparação e ajuste das sessões. Através de um processo de codificação dedutivo e indutivo, identificámos um conjunto de ações (Tabela 1) que utilizámos para caracterizar o papel das facilitadoras. Para garantir a qualidade da análise dos dados, as autoras codificaram os dados separadamente e reuniram-se regularmente para discutir e chegar a um consenso.

Tabela 1. Ações do facilitador num EA

Preparar	[P1] *Selecionar recursos* para ler/analisar/discutir, tais como artigos, tarefas ou vídeos com excertos de aulas. [P2] *Antecipar as contribuições dos professores*, como as suas ideias sobre tarefas, discussões coletivas ou processos de raciocínio dos alunos. [P3] *Definir aspetos para destacar*, como a estrutura da aula, as representações ou processos de raciocínio dos alunos, preparando perguntas ou outro tipo de contribuições.
Conduzir	[C1] *Fazer contribuições*, como redirecionar, repetir ou destacar os aspetos partilhados, para manter o foco da discussão. [C2] *Pedir contribuições aos professores*, pedindo-lhes que partilhem as suas ideias e envolvendo vários professores na discussão, para retomar o que foi dito. [C3] *Orientar os professores para as ideias uns dos outros*, pedindo-lhes para comentarem essas ideias, ou encorajando-os a responder às contribuições dos outros. [C4] *Procurar perceber o que os professores estão a pensar*, pedindo para esclarecer ou elaborar as suas ideias, e colocando perguntas para que as expliquem.
Ajustar	[A] *Ajustar o planeamento* da sessão, considerando a análise das sessões anteriores e/ou as contribuições dos professores.

Resultados

Os resultados estão organizados em três temáticas, considerando os eixos principais desta etapa do EA.

Recursos selecionados pelo facilitador

No EA1, antes de se iniciar a planificação dos momentos da aula, a facilitadora decidiu selecionar dois excertos de vídeos para ilustrar diferentes estratégias de condução de discussões coletivas [P1]. Para esta seleção, ela considerou vídeos em que o papel mais preponderante fosse o do professor ou fosse o dos alunos, antecipando que os professores identificassem e refletissem sobre essa diferença [P2]. Além disso, definiu que iria destacar alguns aspetos [P3], preparando perguntas para lhes colocar:

> Como é iniciada a discussão? Como são convidados os alunos a participar? O professor dá enfase na resposta ou na estratégia de resolução? Como termina a discussão coletiva?

Neste sentido, como a facilitadora tinha estruturado a sessão para se centrar na discussão coletiva, não antecipou que as professoras sentissem necessidade de resolver as tarefas apresentadas nos vídeos:

> Catarina: Devíamos ter resolvido a tarefa.
>
> Patrícia: E as tais ferramentas que ele [o professor do vídeo] fala, ou seja, o que é que ele já deu…

> Facilitadora A: Em relação à tarefa, eu já volto a mostrar. Vamos só terminar este excerto [do vídeo]. [C1] (S5)

Ainda que a facilitadora tenha mostrado as tarefas mais do que uma vez [A], e procurado destacar os aspetos que tinha definido [C1], não antecipou que as professoras sentissem necessidade de resolver a tarefa previamente. Durante a sessão, procurou reorientar o foco das professoras para os aspetos da condução da discussão, colocando ao grupo as questões previamente preparadas.

No EA2, a facilitadora selecionou tarefas [P1] que podiam ser resolvidas usando várias estratégias e incentivou os professores a resolvê-las colocando-se no papel dos alunos. Depois, pediu-lhes que partilhassem as estratégias que usaram [C2]. Um dos professores disse:

> Isto ajuda-nos a pensar, ajuda-nos a discutir, ajuda-nos a ver outras formas… fiquei espantado com a estratégia dos números triangulares porque não conseguia ver isso. … Às vezes os alunos também nos mostram, mas … eu guio muito os alunos para as respostas. Não tenho estas oportunidades de ser surpreendido porque não dou muitas oportunidades neste tipo de tarefas. Mas acho que tenho de dar. (Jonas, S2)

Esta reflexão levou a facilitadora a ajustar o plano para a sessão seguinte [A], propondo aos professores um trabalho semelhante ao da sessão 2, mas encorajando-os a identificar possíveis dificuldades dos alunos. Propôs-lhes também a leitura de artigos sobre os processos de raciocínio dos alunos e sobre tarefas que os promovessem [P1]. Assim, na S4, a facilitadora pediu aos professores que partilhassem ideias [C2] sobre as suas leituras ou comentassem as contribuições de outros [C3], destacando um desafio apontado pelos professores [C1]:

> Manuel: Acho que a dificuldade é encontrar tarefas para levar para a sala de aula... e a falta de prática que temos [em conduzir aulas organizadas como estavam a planear].
>
> Facilitadora B: Temos então as tarefas que o Alberto também já tinha referido … Essa dificuldade em encontrar tarefas que se ajustem a este trabalho. [C1] (S4)

Apesar de os professores apontarem a seleção da tarefa como um desafio, o ajustamento do plano da sessão, por parte da facilitadora B, potenciou discussões entre eles sobre a elaboração e condução da realização de tarefas.

Estes exemplos ilustram o papel do facilitador na preparação das sessões, selecionando recursos e ajustando o plano das sessões para ir ao encontro dos aspetos salientados pelos professores. Evidenciam também desafios associados a esta preparação. Reforçam, por um lado, a importância de *antecipar as contribuições dos professores* [P2], ainda que as contribuições dos professores não possam ser completamente antecipadas, como o trabalho no EA1 reforça. Por outro lado, reforçam a importância de p*rocurar perceber o que os professores estão a pensar* [C4] e de *ajustar o planeamento* [A], e de o facilitador compreender as ideias e inquietações dos professores e ajustar as sessões seguintes, nomeadamente através de novas leituras [EA2].

Tarefas para a aula de investigação

No EA1, a facilitadora propôs tarefas para explorar a proporcionalidade direta [P1], tópico selecionado pelas professoras. Na sessão 6, elas selecionaram uma tarefa e adaptaram-na, estabelecendo uma relação preço/tempo no contexto de aluguer de bicicletas. Ao preparar a sessão 7, a facilitadora identificou possíveis alterações à tarefa e ajustou a preparação da sessão [P3, A] para que as professoras a analisassem novamente:

> Facilitadora A: Estive a olhar novamente para a tarefa … 'Qual das empresas os alunos deverão escolher para o seu passeio? Explica o teu raciocínio.' … será que esta questão pode ser desdobrada ou adaptada? [C4] Se a questão for 'qual das empresas os alunos devem escolher…' a pergunta pode não apoiar os alunos a explorarem as relações numéricas de cada tabela, mas sim apenas a comparar que para X tempo poderá ser mais rentável alugar uma empresa ou outra [C1]. …
>
> Patrícia: Pois, os alunos podem pensar "ando 20 minutos, depois mais 20 minutos".
>
> Facilitadora A: Será que a questão como está formulada apoia a que os alunos explorem a relação entre tempo e preço …? [C1]
>
> Rita: Se calhar é a segunda pergunta da tarefa, a tal que perguntamos da previsão, se eles conseguem prever [o preço a pagar pelo tempo gasto a andar de bicicleta]. (S7)

A facilitadora preparou perguntas para promover a discussão sobre a adequação da tarefa ao trabalho dos alunos [P3], como perguntar se as questões poderiam ser adaptadas [C4] e sentiu necessidade de destacar como a redação da tarefa poderia influenciar o trabalho dos alunos [C1].

No EA2, entre as S3 e S4, um dos professores partilhou várias tarefas que, a seu ver, os alunos poderiam resolver depois de terem "entendido e dominado os conceitos de progressão aritmética e geométrica" (Alberto, S4). A facilitadora ajustou a preparação da sessão para que os outros professores analisassem e discutissem como adaptar essas tarefas [A], considerando os artigos que tinha selecionado [P1] e as orientações curriculares:

> Facilitadora B: Podíamos, talvez, olhar para o documento dos princípios para a elaboração de tarefas a partir da tarefa proposta pelo Alberto. [C3] …. Dava a palavra ao Alberto …. [C2]
>
> Alberto: … [pode-se] modificar o enunciado em alguma coisa que não esteja clara para o aluno …
>
> Sofia: Para ir ao encontro do que acabámos de ver, nomeadamente a generalização… em vez de darmos [a tarefa] no final [do tópico] podíamos tentar fazer a generalização … quantos euros guardou na oitava semana. … podíamos colocar outra pergunta onde pedíssemos para os alunos tentarem chegarem à expressão que permite à Rosa calcular o dinheiro que guardou na n-ésima semana, por exemplo.… Agora, não sei até que ponto eles conseguiriam chegar ao termo geral antes de a matéria ser dada.

> Facilitadora B: ... A Sofia fez aqui um desafio: a partir do que os alunos já sabem, fazer uma generalização [C1] .... Será que a tarefa pode ser proposta antes de os alunos conhecerem a expressão do termo geral de uma progressão aritmética? [C3]
>
> Manuel: Se deres [a tarefa] no início [do tópico], tens de dar algumas dicas...
>
> Facilitadora B: Achas que é preciso, Manuel? [C2, C4]
>
> Manuel: Eu acho que sim. ... Eles vão vendo ali alguma regularidade. Só que depois, eles têm de relacionar com o primeiro [termo]. (S4)

Assim, as tarefas propostas por um dos professores influenciaram a preparação da S4. As intervenções dos professores influenciaram a condução da sessão, fazendo contribuições [C1], pedindo aos professores que partilhassem as suas ideias [C2], colocando questões [C4] e procurando que eles comentassem as ideias uns dos outros [C3], mantendo a discussão focada no trabalho e na aprendizagem dos alunos. Após alguma discussão, reformularam a tarefa e usaram-na para introduzir o tópico.

Em ambos os EA, analisar e adaptar as tarefas para ir ao encontro dos objetivos da aula apoiou a reflexão dos professores sobre o potencial das tarefas em que os alunos podem seguir várias estratégias, para comparação na discussão coletiva. As facilitadoras ajustaram, então, as sessões de acordo com as propostas dos professores, utilizando-as como ponto de partida para as sessões seguintes.

Estes exemplos ilustram um dos desafios sentidos pelas facilitadoras – ser diretiva ou uma líder invisível? Em ambos os EA, as facilitadoras tiveram intervenções mais diretivas, como *fazer contribuições* [C1], influenciado clara as decisões dos professores acerca da tarefa, ainda que no EA2 haja intervenções em que a facilitadora *pede contributos aos professores* [C2].

Planeamento da aula de investigação

Num dos vídeos a que as professoras assistiram no EA1, o professor pediu aos alunos para anotar as suas estratégias de resolução em cartazes. Entre a S6 e a S7, a facilitadora pediu às professoras para elaborarem o plano de aula, a partir de um modelo previamente sugerido por ela [P1]. Seguindo esse modelo, as professoras foram orientadas a planificar em detalhe os diferentes momentos da aula, nomeadamente uma possível organização do quadro [P3]. Como elas apenas escreveram "colocar os cartazes no quadro", sem anteciparem as produções dos alunos ou a sequência dos cartazes e das possíveis estratégias, a facilitadora decidiu retomar essas decisões:

> Facilitadora A: Vi que colocaram a opção dos cartazes na organização do quadro. [C4]
>
> Patrícia: Os cartazes vão demorar uma eternidade.
>
> Facilitadora A: Mas … porquê os cartazes? [C2]

> Patrícia: Era só para ser visível, para não demorar tanto tempo a passar as tabelas no quadro. … Se eles … utilizarem estratégias diferentes, … convém debatê-las. …
>
> Facilitadora A: Os cartazes são para que aquilo que os alunos fizerem fique exposto?
>
> Patrícia: Era mais fácil para apresentar, mas é mais difícil para fazerem em 50 minutos [de aula]. (S7)

Esta decisão inicial das professoras acerca da utilização dos cartazes levou a facilitadora a refletir sobre o facto de o vídeo enquanto recurso, poder assumir uma prescrição para os professores participantes, destacando este aspeto [C1]. Questionar as professoras acerca da utilização de cartazes foi uma ação intencional e que levou as professoras a reconsiderarem a sua decisão [C4]. As professoras optaram pelo preenchimento das tabelas no quadro, antecipando diferentes regularidades numéricas para analisar na discussão coletiva.

Numa das sessões do EA2, um professor partilhou a sua preocupação com as intervenções que poderia fazer para apoiar os alunos:

> O que me preocupa é o que eu vou ter de dizer para eles [os alunos] lá chegarem [fazerem a generalização]. (Manuel, S4).

Considerando que era uma preocupação de vários professores, ainda na S4 a facilitadora sugeriu-lhes voltar a ler o texto sobre a promoção do raciocínio dos alunos [A], dando especial atenção às ações do professor [C1]. Assim, a facilitadora ajustou o plano para a S5 [A] para ir ao encontro das preocupações dos professores e discutir as suas possíveis intervenções antes de planear o momento de discussão coletiva [P3]:

> Facilitadora B: Os alunos podem apresentar uma resposta errada... o que podem aprender? [C4]
>
> Alberto: É importante apresentar exemplos errados … o aluno pode repensar o que escreveu…
>
> Facilitadora B: Podemos ter o quadro dividido em várias partes e os alunos vão registando as suas respostas sem apagar as dos colegas. ... No fim, podemos comparar as várias estratégias [C1] … e se surgir uma representação gráfica? [C2]
>
> Alberto: .... Podíamos fazer uma analogia entre a equação da reta e o termo geral da sucessão…
>
> Jonas: Aí ias orientá-los a todos a trabalhar dessa forma... não haveria muita diversidade [de estratégias] (S5)

Ajustando o plano e conduzindo a sessão fazendo ou *pedindo contribuições aos professores* [C1, C2] e *pedindo-lhes para esclarecerem as suas ideias* [C4], a facilitadora levou os professores a repensar aspetos da sua prática, como não uniformizar as estratégias dos alunos ou explorar respostas incorretas.

Ambas as facilitadoras deram particular atenção ao planeamento da discussão coletiva, pois a sua condução é apontada pela investigação como desafiante para os professores.

Nesse planeamento, estimularam a reflexão dos professores sobre o uso do quadro e sobre as suas possíveis intervenções e ações para promover a aprendizagem dos alunos.

No EA1, um dos desafios foi a antecipação do impacto dos recursos selecionados: como explorá-los enquanto possíveis caminhos para uma estrutura de aula, por exemplo, para que não sejam entendidos como algo prescritivo? Já no EA2, as ações da facilitadora ilustram, uma vez mais, a importância de ouvir os professores, ajustando as sessões às suas necessidades, o que é desafiante, principalmente durante sessão.

Conclusão

Na preparação das sessões, as facilitadoras selecionaram recursos considerando as vontades e necessidades dos professores. Nas sessões, promoveram a análise colaborativa de artigos e vídeos, pedindo contribuições ou incentivando a refletir e a reagir às ideias dos colegas. Apoiadas pela antecipação que fizeram e pela definição prévia de aspetos a destacar em cada sessão, as facilitadoras procuraram também fomentar discussões sobre a análise e elaboração de tarefas, e sobre a condução de discussões coletivas. Atendendo ao desafio que os professores identificaram em selecionar tarefas em que os alunos pudessem recorrer a diferentes estratégias, as facilitadoras conduziram as sessões promovendo discussões sobre o potencial de diferentes tarefas e possíveis adaptações para promover a aprendizagem dos alunos. Sobre a condução da discussão coletiva, e uma vez que os professores desempenham um papel importante a apoiar e desafiar os alunos), as facilitadoras procuraram promover o debate sobre aspetos das discussões e incentivaram-nos a planificá-las em pormenor.

Considerando que, no EA, os "professores conduzem a agenda e co-desenham as oportunidades de aprendizagem em tempo real" (Lewis, 2016, p. 538), as facilitadoras sentiram necessidade de ajustar o plano das sessões, durante as próprias sessões ou entre sessões. Este foi um desafio considerável para ambas as facilitadoras que, ao longo das sessões, e de acordo com as preocupações identificadas pelos professores, foram realizando diversos ajustes, quer nos recursos selecionados, quer na condução da sessão. No caso do EA1, aquando da visualização dos vídeos, a facilitadora procurou manter o foco no papel dos professores e dos alunos na discussão que viram em vídeo. Já no EA2, a facilitadora ajustou o plano da sessão para que a tarefa fosse elaborada a partir da proposta de um dos participantes. Estes exemplos ilustram a importância de o facilitador estar recetivo às ideias dos participantes e ajustar as sessões às suas necessidades e intervenções.

Um segundo desafio foi encontrar equilíbrio entre ser diretivo, (Clivaz & Clerc-Georgy, 2020), dando contributos e fornecendo conhecimentos especializados aos professores, e ser um líder invisível, orientando os professores para as ideias dos colegas. Um terceiro desafio prendeu-se com o impacto dos recursos selecionados. Por vezes, tal como no EA1, os professores podem interpretar as ideias partilhadas como prescritivas. Noutras situações, como no EA2, pode haver necessidade de complementar os recursos inicialmente selecionados, com a leituras de outros artigos, por exemplo, para enriquecer o esperado diálogo colaborativo entre os professores.

Como vimos, o papel do facilitador é complexo (Hourigan & Leavy, 2021; Scheller et al., 2019). Apesar de todos os desafios, as suas ações devem garantir uma preparação cuidadosa de cada sessão e que a condução da sessão promova a colaboração e reflexão dos professores, com foco na aprendizagem dos alunos, e como constructo do desenvolvimento do conhecimento.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia e pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, através de bolsas atribuídas a Filipa Faria (UIDP/04107/2020), Paula Gomes (SFRH/BD/145118/2019) e Micaela Martins (SFRH/BD/143869/2019). Agradecemos aos nossos orientadores, Professores João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma e Margarida Rodrigues, pelos contributos no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Quality research for education: An introduction to theory and methods* (5th ed.). Pearson.

Clivaz, S., & Clerc-Georgy, A. (2021). Facilitators' roles in lesson study: From leading the group to doing with the group. In A. Murata & C. Kim-Eng Lee (Eds.), *Stepping up lesson study: An educator's guide to deeper learning* (pp. 86–93) . Routledge.

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winslow, S. Clivaz, J.P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1.

Hourigan, M., & Leavy, A.M. (2021). The complexities of assuming the 'teacher of teachers' role during lesson study. *Professional Development in Education*, 1–14. https://doi.org/10.1080/19415257.2021.1895287

Lewis, J.M. (2016). Learning to lead, leading to learn: How facilitators learn to lead lesson study. *ZDM, 48*(4), 527–540. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0753-9

Mynott, J.P., & Michel, D. (2022). The invisible leader: Facilitation in lesson study. *Educational Process: International Journal, 11*(3), 48 –61. https://dx.doi.org/10.22521/edupij.2022.113.3

Scheller, M., Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2019). O formador na condução de sessões de um estudo de aula. *Educere Et Educare, 14*(32), https://doi.org/10.17648/educare.v14i32.21792

Shaughnessy, M., Garcia, N.M., O'Neill, M.K., Selling, S.K., Willis, A.T., Wilkes, C.E., Salazar, S.B., & Ball, D.L. (2021). Formatively assessing prospective teachers' skills in leading mathematics discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(3), 451–472. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10070-z

Construção do conhecimento matemático na aplicação de métodos numéricos: uma interpretação à luz dos modelos AiC e RBC

Mathematical knowledge construction in the application of numerical methods: an interpretation by the AiC and RBC models

Corália Pimenta[1], *Cristina Caridade*[2], *Manuel Joaquim Saraiva*[3]

[1]Instituto Politécnico de Coimbra, Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, Coimbra, Portugal, coralia.pimenta@isec.pt

[2]Instituto Politécnico de Coimbra, Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, Coimbra, Portugal, CICGE, DGAOT, FCUP, Vila Nova de Gaia, Portugal, caridade@isec.pt

[3]Professor aposentado, Universidade da Beira Interior – Portugal, manuels@ubi.pt

Resumo. *Neste artigo apresentam-se resultados de uma investigação cujo propósito foi o de compreender como se processa a construção de um novo conhecimento matemático, no ensino superior, quando se desenvolve uma tarefa que promove a aplicação de métodos numéricos através do GeoGebra. A tarefa exploratória (que permitirá ao aluno explorar, conjeturar, deduzir, intuir e refletir) foi proposta para trabalho de pares, em contexto de sala de aula, e proporcionou a aplicação das regras dos Trapézios e de Simpson. Foi tida em conta a mediação estabelecida entre os alunos e entre estes e as docentes. No final da resolução da tarefa, os alunos preencheram um inquérito. Seguiu-se uma abordagem metodológica qualitativa, inserida no paradigma interpretativo. A análise dos resultados foi feita à luz dos modelos teórico AiC (Abstraction in Context) e teórico e metodológico RBC (Regognition, Building-with, Construction) (Hershkowitz et al., 2001). Procurou-se compreender de que forma se relacionaram as ações epistémicas (ações mentais que se desenvolvem durante o processo de abstração e que explicam o aparecimento de uma nova construção matemática mais elaborada e complexa) e qual a sua contribuição para a resolução da tarefa. Concluiu-se que algumas das ações decorridas, em especial as de modelação das funções, valorizaram a relação estabelecida entre as ações Recognizing e Building-with e a condução do processo de construção do novo conhecimento matemático.*

Abstract. *This article presents the results of an investigation that aimed to understand how higher school students build new mathematical knowledge, through the resolution of an exploratory task where they use GeoGebra to work with numerical methods. The exploratory task (which will allow the student to explore, conjecture, deduce, intuit and reflect) was proposed for work in pairs, in a classroom context, and provided the application of the Trapezoidal and Simpson* *rules. The mediation established between the students and between them and the teachers was taken into account. At the end of solving the task, the students filled out a survey. A qualitative methodological approach was followed, inserted in the interpretative paradigm. The analysis of the results was carried out in the light of the theoretical and methodological AiC (Abstraction in Context) and theoretical and methodological models RBC (Regognition, Building-with, Construction) (Hershkowitz et al., 2001). We tried to understand how the epistemic actions were related (mental actions that develop during the abstraction process and that explain the appearance of a new, more elaborate and complex mathematical construction) and what their contribution was to solving the task. It was concluded that some of the actions that took place, in particular those of function modeling, valued the relationship established between the epistemic actions Recognizing and Building-with in conducting the construction process of new mathematical knowledge.*

Palavras chave: *Tarefa exploratória; Regra de Simpson; Regra dos Trapézios; Abstração em contexto (AiC); Ação epistémica (modelo RBC).*

Keywords: *Exploratory task; Simpson's rule; Trapezoid Rule; Abstraction in context (AiC); Epistemic action (RBC model).*

Introdução

O ensino da Matemática deve, entre outros aspetos, facilitar a comunicação matemática, o pensamento reflexivo, a aplicação de técnicas viáveis à resolução de problemas, a análise crítica dos resultados, enfim, a interdisciplinaridade. Neste artigo, apresentamos alguns resultados de um estudo realizado com alunos do 1.º ano, que frequentaram a Unidade Curricular de Análise Matemática, da Licenciatura em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra. Foi aplicada uma tarefa exploratória que envolveu a utilização das regras dos Trapézios e de Simpson para o cálculo do perímetro e da área de uma superfície curvilínea, bem como do volume de uma superfície tridimensional. Pretendia-se que os alunos desenvolvessem capacidades (competências) de manipulação algébrica, raciocínio independente e analítico e capacidade de aplicação de conceitos matemáticos na resolução de problemas práticos, com recurso ao programa computacional *GeoGebra*, e construíssem novo conhecimento matemático.

Procuraram-se identificar as dificuldades manifestadas pelos alunos e registaram-se algumas lacunas respeitantes à aquisição de pré-requisitos considerados essenciais. Também se procurou repensar a forma de abordagem e de avaliação dos conteúdos programáticos da unidade curricular referida, com vista a favorecer a aprendizagem, para além de dar visibilidade à aplicabilidade dos assuntos abordados.

Valorizou-se o processo de abstração dos alunos – entendido como a sua atividade de reorganização vertical de construções concebidas e de novos significados matemáticos atribuídos por eles, conduzindo-os a uma nova construção matemática (Dreyfus et al., 2015;

Hershkowitz et al., 2001). Procurou-se compreender de que forma evoluiu o processo de abstração, analisando a relação estabelecida entre as ações epistémicas do modelo RBC (Dreyfus & Kidron, 2006; Dreyfus et al., 2015), que é fundamentado na perspetiva de abstração em contexto, *AiC* (Dreyfus et al., 2001). Para estes autores, e segundo Pimenta (2016), as ações epistémicas são o reflexo do raciocínio dos alunos, quando eles procuram desenvolver mecanismos que permitam que a representação de ideias e a manipulação externa sejam mais simples.

Com a utilização do modelo RBC, fundamentado na perspetiva da abstração em contexto (*AiC*), e tendo como base o recurso às três ações epistémicas supracitadas (R, B, C), pretendeu-se analisar de que forma os alunos selecionaram e integraram conhecimentos adquiridos nas aulas que antecederam a aplicação da tarefa, como representaram e reorganizaram os dados enunciados, os resultados intermédios, os raciocínios desenvolvidos e como construíram o conhecimento matemático pretendido. Paralelamente, procurou-se identificar contributos oferecidos pelo programa computacional selecionado, *GeoGebra*, pela tarefa exploratória e pela mediação estabelecida entre os alunos e entre eles e as professoras.

No presente artigo, analisa-se e discute-se a forma como se manifestaram as diferentes ações epistémicas durante a resolução da tarefa matemática proposta e como é que elas se relacionaram entre si. Procura-se também perceber que importância assumem durante o processo de construção do novo conhecimento matemático. Para tal, procurar-se-á dar resposta às seguintes questões: Como se relacionaram as ações epistémicas R, B e C durante a resolução da tarefa exploratória? De que forma essas ações favoreceram a construção do novo conhecimento matemático?

Revisão de literatura

Regra dos Trapézios e Regra de Simpson

O Cálculo Diferencial e Integral é um conteúdo bastante valorizado nos cursos de engenharia devido à sua aplicabilidade, mas, por vezes, é reproduzido sem compreensão. Há registos de insucesso e desistência na sua aprendizagem, pelo que há interesse em melhorar as práticas de ensino (Rezende, 2003), utilizando ferramentas como, por exemplo, o *GeoGebra*.

A Regra dos Trapézios é a primeira das fórmulas fechadas de Newton-Côtes e corresponde ao caso em que o polinómio da equação é do primeiro grau. Consiste em aproximar o valor da função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ por uma função de 1.ª ordem, unindo dois pontos. Geometricamente, é equivalente a aproximar uma curva $f(x)$ por uma linha reta, de modo que a aproximação ao integral da função possa ser representada pela área de um trapézio. Neste caso, a área de integração pode ser estabelecida pela equação (1).

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1)$$

Uma forma de melhorar a precisão da regra do Trapézio consiste em dividir o intervalo de integração *(a,b)* em vários segmentos e aplicar o método a cada um deles. Surge então a fórmula do Trapézio composta, em que se obtém a aproximação ao integral através da equação (2).

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad \text{com } h = \frac{b-a}{2} \tag{2}$$

Outra forma de obter uma estimação exata para o integral consiste em utilizar polinómios de grau superior para unir os dois pontos. Por exemplo, se há outro ponto a limitar *f(a)* e *f(b)*, os três pontos podem ser unidos com uma parábola. Se há dois pontos igualmente espaçados de *f(a)* e *f(b)*, então os quatro pontos podem ser unidos por um polinómio do 3.º grau, através da regra de Simpson (3).

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \quad \text{com } h = \frac{b-a}{2}. \tag{3}$$

A regra de Simpson composta permite obter, ao dividir o intervalo de integração em vários segmentos do mesmo tamanho (*n* pares de subintervalos com a mesma amplitude), uma aproximação melhor:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-2}) + f(x_n)]\,,\, h = \frac{a+b}{n} \;\; (n\,par).$$

O modelo RBC e a abstração na construção do novo conhecimento matemático

AiC (Dreyfus *et al.*, 2021) é um modelo teórico utilizado para investigar processos de aprendizagem essencialmente cognitivos e em que não se descura o contexto em que ocorrem. A sua principal ferramenta metodológica é o modelo RBC.

Subjacente a este modelo está o processo de abstração no sentido de Davydov (1990), em que a construção de um novo conhecimento se inicia com uma relação geral e abstrata, inclui a identificação de semelhanças e diferenças e o entendimento de relações até se alcançar o concreto, uma forma mais consistente e estruturada desse processo. Na situação particular deste estudo, tal poderá acontecer ao modelar funções que respeitem as condições enunciadas e, a partir das relações estabelecidas e resultados observáveis, refletir e introduzir conhecimentos e ações que permitam dar resposta aos desafios da tarefa (ascensão ao concreto).

As ações epistémicas, ações externas desenvolvidas pelos alunos, permitem compreender de que forma se verificou a construção do novo conhecimento. *Recognizing* (R) ocorre quando o aluno reconhece que uma construção específica do conhecimento anterior pode ser mobilizada para alcançar novo conhecimento matemático. *Building-with* (B) retrata a necessidade de o aluno atingir determinado objetivo, selecionando estratégias, justificando e apresentando soluções para o problema. *Constructing* (C) é a ação epistémica central da abstração matemática. Consiste na combinação e reorganização de construções, pelo processo de matematização vertical, para produzir uma nova construção. Refere-se à primeira vez em que a nova construção é expressa pelo aluno através da verbalização ou ação.

O desenho da atividade é central no modelo *AiC*, sendo necessário compreender e definir qual o conhecimento necessário à concretização da tarefa e o contexto em que essa é implementada.

GeoGebra

Alguns investigadores consideram que para promover aprendizagens significativas, as metodologias, para além de diferenciadas, deverão estar mais próximas do contexto profissional do curso (Reis, 2009). Outros autores consideram que é importante que o professor leve o aluno a ter um papel ativo na aquisição da sua aprendizagem, estimulando-o a questionar, relacionar e investigar (Ponte et al., 2006). Por sua vez, Abascal e López (2017) estabelecem uma relação positiva entre a aprendizagem e a utilização de ferramentas tecnológicas, adequadas ao contexto e alunos, com benefícios nos domínios da autonomia e da aquisição de habilidades académicas (Badia et al., 2016).

Uma atividade exploratória, de investigação, promovida na sala de aula, em trabalho de grupo/pares, pode facilitar o envolvimento dos alunos, a partilha, e a construção de novos conhecimentos, no sentido em que o aluno faz descobertas, conjetura, constrói e generaliza, envolvendo-se no processo de aprendizagem (Gravina & Santarosa, 1998).

Outros estudos também revelam que a promoção de ambientes de trabalho em geometria dinâmica (dynamic geometry environments) (DGE) favorece a aprendizagem de conceitos e o desenvolvimento do raciocínio (Sinclair & Yerushalmy, 2016) e podem enriquecer a habilidade para identificar detalhes, conjeturar, refletir e interpretar soluções.

Gestão curricular

A democratização do ensino superior trouxe para a sala de aula um conjunto de alunos tão diverso que, em muitas situações, o professor não consegue dar resposta às inúmeras dificuldades que se lhe apresentam e o insucesso às disciplinas de Matemática acontece, sobretudo no primeiro ano (Nunes & Sebastião, 2004). Uma melhor gestão curricular pode fazer a diferença e contribuir para o desenvolvimento de competências que os alunos já deveriam ter, não só no domínio dos conteúdos programáticos, mas também de autonomia e persistência. Trata-se, contudo, de um processo exigente, na medida em que o professor tem que planear a unidade didática e planificar cada aula tendo em consideração a diversidade dos seus alunos. Tem ainda que fazer uma boa gestão de ensino-aprendizagem, que acontece na própria aula e que implica a proposta de tarefas, a aplicação de estratégias, a utilização de instrumentos diversos, o favorecimento da mediação entre professor e alunos, e entre alunos, a promoção da discussão e muitos outros aspetos que influenciam naturalmente o processo de aprendizagem. Ao adotar para a sala de aula uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratório, torna-se possível dar ênfase a atividades de exploração ou mesmo a pequenas investigações que incluam a resolução de problemas ou exercícios. A mediação estabelecida pelos alunos, por exemplo ao envolverem-se em trabalhos de grupo, bem como pelo professor, ao incentivar o envolvimento e esclarecer dúvidas que permitam a continuidade em tarefa, contribuem para que a aprendizagem ocorra por descoberta e que a construção do conhecimento resulte do trabalho do aluno e não somente da memorização de um conjunto de procedimentos. Realça-se que as tarefas de modelação, próximas de um contexto real, por terem uma natureza desafiante e serem constituídas por problemas ou investigações, também promovem o envolvimento dos alunos e favorecem a construção de novos conhecimentos matemáticos, para além de poderem evidenciar situações de aplicabilidade (Ponte, 2005).

Em suma, uma melhor gestão curricular e uma seleção adequada de tarefas, que permitam aos alunos envolverem-se em atividades matematicamente ricas e produtivas, podem fazer a diferença no processo de aprendizagem.

Opções e procedimentos metodológicos

Contexto: população e instrumentos

Nesta investigação adotou-se o paradigma interpretativo e o método qualitativo, com a seleção do estudo de caso, como estratégia de investigação. Esta escolha prende-se com o facto de se querer compreender como se processa a construção de um novo conhecimento matemático mediante a implementação de uma tarefa exploratória, onde terá lugar a mediação entre pares e com o professor, bem como a utilização do *GeoGebra*.

Esta desenvolveu-se nas turmas práticas da unidade curricular de Análise Matemática, do 1.º ano, da Licenciatura em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores do ISEC. Apesar da tarefa ter sido aplicada a todos os alunos, selecionaram-se apenas três díades para efetuar um estudo em profundidade, tendo em consideração os procedimentos e as estratégias de resolução, a justificação dos resultados, a criatividade evidenciada, o grau de correção e a própria estruturação do trabalho. As professoras/investigadoras, as duas primeiras autoras deste texto, planificaram e conduziram todos os acontecimentos decorrentes da investigação. Preparam em conjunto a tarefa, tendo em consideração os conhecimentos que os alunos já possuíam e as aprendizagens que pretendiam que eles desenvolvessem. Numa primeira fase lançaram o desafio através da plataforma Moodle, informando os alunos de que seria aplicada, em contexto sala de aula, uma tarefa para ser desenvolvida em grupo de trabalho. Posteriormente, já na sala de aula, apresentaram e disponibilizaram-na em suporte digital, partilhando também o *link* de acesso ao *GeoGebra*. Após apresentados os objetivos da tarefa e os procedimentos a adotar, os alunos fizeram *download* da mesma e, a partir daí, iniciaram a sua resolução. As docentes mediaram o processo de construção, incentivando o envolvimento e a partilha, esclarecendo também as dúvidas, ou apresentando sugestões, por forma a manterem os alunos empenhados.

Neste artigo apenas faremos referência à atividade de uma das díades, a qual designamos por GR, mas só pela limitação de escrita que nos é imposta, mas também pelo facto desses alunos terem utilizado diferentes estratégias de resolução, que poderão tornar mais evidente o desenvolvimento e a relação estabelecida pelas diferentes ações epistémicas.

Durante a resolução das tarefas promoveu-se, na sala de aula, um ambiente favorável à partilha e à comunicação de conhecimentos e raciocínios. A mediação presente no processo de construção do novo conhecimento, potenciada pela utilização do programa computacional de geometria dinâmica *GeoGebra*, entre os alunos e entre eles e as professoras, durante a realização de uma tarefa exploratória, foi tida em consideração durante o processo de análise dos dados.

Os dados recolhidos através de técnicas de recolha documental, inquirição e observação direta (Bryman, 2011) incluíram o registo do desempenho e questões levantadas pelos alunos na sala de aula (RSA), a resolução enviada, incluindo os ficheiros do *GeoGebra* com as respetivas resoluções (RA), e a resposta ao questionário (Q). Os dados foram alvo de análise de conteúdo, orientada por categorias de análise decorrentes dos objetivos de investigação, de aspetos emergentes da revisão de literatura e das produções dos alunos. As categorias de análise definidas assumiram a identificação das três ações epistémicas supracitadas. De realçar que os dados quantificáveis também foram alvo de análise estatística por recurso ao Excel.

A análise de dados teve em conta o desenvolvimento das ações epistémicas R, B e C, e teve em atenção os conhecimentos que os alunos já possuíam e a forma como os aplicaram para alcançarem, ou não, o novo elemento do conhecimento pretendido. Considerou-se que a interpretação que os alunos desenvolveram em relação ao enunciado da tarefa ou aos resultados que os próprios foram obtendo, e que os levou a mobilizar aprendizagens anteriores, incluindo as obtidas com a resolução da própria tarefa, seria uma manifestação da ação epistémica R. Por sua vez, os conhecimentos que os alunos mobilizaram para dar resposta à tarefa e que permitiram o desenvolvimento de raciocínios e a apresentação de alguns resultados e justificações, deram visibilidade à ação epistémica B. Por último, a ação epistémica C esteve presente quando os alunos deram resposta às questões que lhes foram colocadas, ou quando eles explicitaram outro novo conhecimento matemático resultante da sua atividade matemática em torno da resolução da tarefa proposta.

De realçar que a construção, em particular o desenvolvimento da ação epistémica R, está dependente dos conhecimentos que os alunos já possuem ou que resultaram da experiência que adquiriram com a resolução da tarefa. Seria então de esperar que tivessem presente conteúdos lecionados durante o ensino obrigatório (conceitos e procedimentos relacionados com área, perímetro, volume, operacionalização, funções, …), durante a frequência da unidade curricular (regras dos Trapézios e de Simpson) e das potencialidades do *GeoGebra* (os alunos aprenderam a modelar funções através da realização de um trabalho prático que antecedeu a aplicação da presente tarefa).

Na apresentação dos resultados, tal como na secção 3.3 *análise à priori*, utilizaremos R, B e C sempre que pretendermos realçar a presença das respetivas ações epistémicas.

Desenho da Atividade

A tarefa exploratória dividiu-se em duas partes. Na primeira, aquela que será alvo de reflexão neste artigo, o objetivo era o cálculo da área e do perímetro de uma superfície curva - "Ilha do tesouro", representada na Figura 1.

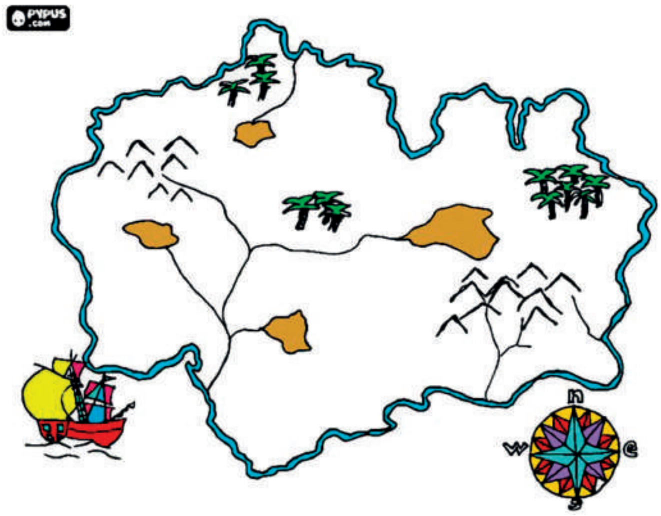


Figura 1. Ilha do tesouro (fonte https://www.colorirgratis.com/colorir-de-mapa-da-ilha-do-tesouro_115421.html)

> Colocaram-se os seguintes desafios aos alunos (Figuras 2 e 3):
> Para encontrar o tesouro de forma mais fácil, os piratas resolvem atribuir uma região com a mesma área a cada um. Assim, é necessário determinar a área total da ilha e dividi-la pelo número de piratas da tua equipa. Queres tentar?
> Para iniciares a atividade, deves abrir o GeoGebra no teu computador, telemóvel ou tablet. Depois carregar a imagem da ilha do tesouro e ajustá-la aos eixos coordenados, rodando-a, se necessário. Podes também tornar a imagem mais transparente, alterando as suas configurações.
> Com espaçamento de 1 unidade, marca 13 pontos para definir a parte de cima da ilha e outros 13 para definir a parte de baixo.
> A ilha do tesouro deve estar centrada no eixo Ox e ter um comprimento, em *x*, de 12 unidades.
>
> Usando uma escala de 1:100. Estima a área da ilha do tesouro (Fig.1) pela regra dos Trapézios e pela regra de Simpson.

Figura 2. Regra dos Trapézios e de Simpson para estimar a área da ilha (1.ª questão da Tarefa)

> A parte Norte da ilha do tesouro é frequentemente atacada pelos piratas das outras equipas, por isso é necessário construíres uma vedação de arame ao longo de toda a sua fronteira.
>
> Se a vedação for definida pelas curvas que determinaste anteriormente, qual a quantidade de arame necessária?
>
> Utiliza a regra dos Trapézios para dares resposta ao desafio.

Figura 3. Regra dos Trapézios para estimar o perímetro (2.ª questão da Tarefa)

Em súmula, os desafios colocados na primeira parte da tarefa prendem-se com a apresentação de um valor estimado para a área total da ilha, por aplicação das regras dos Trapézio e de Simpson, e do perímetro da parte Norte da ilha, através da aplicação da regra dos Trapézios. Para que os alunos se consciencializassem da aplicabilidade dos métodos numéricos e das potencialidades de algumas ferramentas de geometria dinâmica, propôs-se a utilização do *GeoGebra*, de acesso gratuito e com possibilidade de ser utilizado *online*.

Sugeriu-se que os alunos centrassem a imagem da ilha partilhada por forma a terem uma imagem sensivelmente simétrica relativamente a *Ox*, que distinguisse a parte Norte da parte Sul da ilha, para também favorecer a reflexão sobre os valores estimados e a definição de (sub)intervalos para aplicar as regras dos Trapézios e de Simpson. A utilização de 12 unidades de comprimento, aliada à definição de pontos igualmente distanciados, para além de facilitar a definição de (sub)intervalos, também poderá conferir melhor adaptação ao contexto real.

Relativamente ao cálculo do perímetro, de acordo com o desafio colocado, seria expectável que os alunos partissem das curvas definidas no primeiro desafio para aplicarem a regra dos Trapézios. Para tal, seria necessário que mobilizassem conhecimentos adquiridos nas aulas práticas, em particular o resultado $\sqrt{1+f'(x)}$, o qual exige o "cálculo" da derivada da função definida.

Realça-se que, de acordo com a solicitação feita, é imprescindível a modelação matemática no sentido descrito por Bassanezi (2002), quando refere que "[…] a Modelação Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando as suas soluções na linguagem do mundo real." Com efeito, para além da Modelação permitir que os alunos identifiquem situações de aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos na disciplina, também permite que experimentem, visualizem, interpretem e façam até previsões, neste estudo promovidas através da utilização do *GeoGebra*.

Por último, realça-se que também a mediação esteve presente em contexto da sala de aula, durante a realização da tarefa, quando os alunos foram inquiridos sobre os processos e opções tomadas e estimulados, pelas docentes, a refletir sobre os resultados obtidos.

Após a conclusão da tarefa, os alunos organizaram um documento com as respostas e a justificação dos raciocínios desenvolvidos, remetendo-o, tal como os respetivos ficheiros do *GeoGebra*, na plataforma Moodle. Responderam também a um questionário de aferição de dificuldades evidenciadas durante a resolução da tarefa, para além de outros aspetos (vantagens e desvantagens) relacionados com a implementação da tarefa exploratória, do trabalho de pares (díada), da utilização do *GeoGebra* e da mediação estabelecida com as docentes.

Análise à priori: previsão das trajetórias de resolução

Para resolveram a tarefa, seria de esperar que os alunos mobilizassem alguns conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, tais como:

1. Utilizar as capacidades do *GeoGebra* para inserir e enquadrar a imagem da ilha na "folha 2D" do *GeoGebra* (R);
2. Assinalar 13 pontos igualmente distanciados, no contorno da ilha, tanto no 1.º como no 4.º quadrante (R);
3. Selecionar as fórmulas correspondentes à regra dos Trapézios composta e de Simpson composta, lecionadas em aulas anteriores (R):

   Regra dos Trapézios composta:

   $$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

   Regra de Simpson composta:

   $$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

4. Mobilizar a fórmula que permite o cálculo da respetiva curva $\sqrt{1+f'(x)}$ (R).

Por sua vez, para alcançar os novos elementos de conhecimento, área e perímetro das curvas respeitantes à ilha (C), seria de esperar que os alunos apresentassem algumas soluções intermédias para os desafios colocados, como por exemplo:

1. Identificar, de acordo com os dados enunciados, o intervalo [0,12] e dividi-lo em intervalos de menor amplitude e, para cada um deles, determinar $h = \frac{b-a}{n}$, com n o número de divisões do intervalo [a, b] em intervalos de igual amplitude e, no caso da aplicação da Regra de Simpson, com n um número par (R).
2. Reconhecer que a soma das áreas contidas nos diferentes intervalos definidos corresponde à área total da ilha:

   $$\int_a^b f(x)\,dx \cong A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

O elemento do conhecimento que está no centro da resolução desta tarefa prende-se com a utilização da regra dos Trapézios e da regra de Simpson, a partir de funções bem modeladas, para obter um valor aproximado para a área, perímetro e volume requeridos.

Resultados – Leitura segundo o modelo RBC

Desempenho dos alunos no cálculo da área

Os alunos apresentaram a seguinte resposta (Figuras 4 e 5):

Primeiramente, colocámos o mapa da ilha e diminuímos a opacidade da imagem, a fim de visualizar melhor a malha do GeoGebra, bem como as suas coordenadas. Então, marcámos os 13 pontos igualmente espaçados, conforme a imagem a seguir (figura 5).

Figura 4. Justificação de procedimentos para dar início ao 1.º desafio colocado (RA)

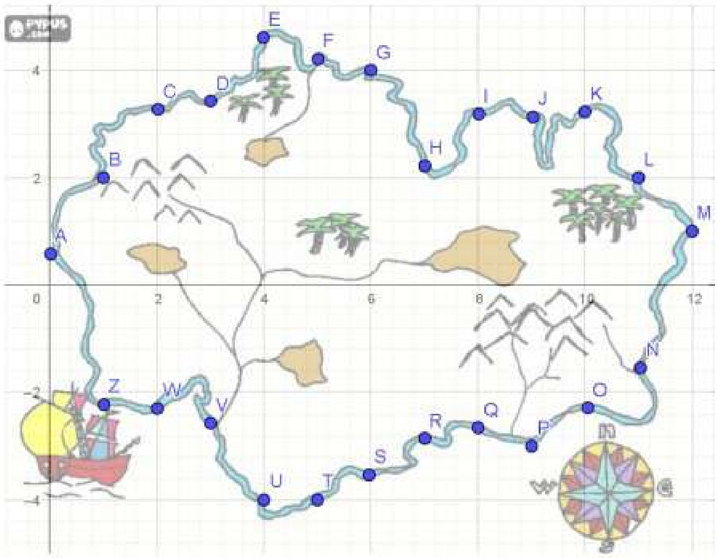


Figura 5. Manipulação da imagem e marcação de pontos (resposta à 1.ª questão) (RA)

No RSA pode ler-se (Figura 6):

> Os alunos GR iniciaram a tarefa, evidenciando terem interpretado as orientações transmitidas (RSA). Começaram por mobilizar os seus conhecimentos acerca das potencialidades do GeoGebra (R), dando também início ao que lhes permitiria encontrar um ou mais intervalos para calcular a área da superfície definida: marcar 13 pontos igualmente distanciados (R). A interpretação e a mobilização de conhecimentos já adquiridos foram sendo estabelecidos através da dinâmica e partilha entre os alunos. As ações das docentes (as primeiras autoras deste texto) foram requeridas apenas para esclarecimentos pontuais, prendendo-se esses com a forma como poderiam justificar os procedimentos tomados e que ferramentas poderiam usar (papel, calculadora ou exclusivamente as potencialidades da calculadora). Os alunos utilizaram em simultâneo os seus portáteis para desenvolver a tarefa, um para trabalharem com o GeoGebra, o outro para darem resposta e justificarem o raciocínio estabelecido.

Figura 6. Interpretação do enunciado da tarefa (RSA)

A ação epistémica *Recognizing*, presente na interpretação e execução das indicações transmitidas no enunciado da tarefa, evidenciou-se também na destreza com que os alunos usaram as funcionalidades do *GeoGebra* para posicionar a imagem e marcar os pontos assinalados na figura 5.

Nesta primeira fase de resolução, os alunos demarcaram a parte Norte (1.º quadrante) da parte Sul (4.º quadrante) da ilha, assinalando 13 e 11 pontos, respetivamente. Esses pontos respeitaram uma unidade de distanciamento (em relação ao eixo das abcissas), favorecendo, num passo seguinte, a modelação de funções que permitiriam aos alunos aplicar as regras dos Trapézios e de Simpson. O desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing* coincidiu com a fase inicial do processo de abstração e permitiu que os alunos progredissem na resolução da tarefa. Numa situação de incumprimento desta fase, a construção do novo conhecimento poderia ficar comprometida, não havendo também lugar ao desenvolvimento da ação epistémica *Buiding-with*.

Ainda sobre a resolução da tarefa, GR apresentam (Figura 7):

Utilizando a Regra dos Trapézios, calculámos a área do Norte da Ilha, sendo h = (12-0)/12.

$$e = \frac{1}{2} (y(A) + 2\,y(B) + 2\,y(C) + 2\,y(D) + 2\,y(E) + 2\,y(F) + 2\,y(G) + 2\,y(H) + 2\,y(I) + 2\,y(J) + 2\,y(K) + 2\,y(L) + y(M))$$

$$= 36.06$$

mesmo foi feito para a parte Sul da Ilha do Tesouro:

$$b = \frac{1}{2} (y(Z) + 2\,(y(W) + y(V) + y(U) + y(T) + y(S) + y(R) + y(Q) + y(P) + y(O)) + y(N))$$

$$= -29.07$$

Assim, a área total da Ilha do Tesouro é calculada somando-se as duas áreas: |36.06| + |-29.07| = 65.13u.a

Figura 7. Área da ilha por aplicação da regra dos Trapézios – RA (resposta à 1.ª questão)

Os alunos aplicam diretamente as regras dos Trapézios e de Simpson, primeiro na parte Norte, seguida da parte Sul. Neste caso particular, os alunos não definiram funções, contrariando as expetativas das professoras.

Na resolução apresentada (Figura 6), a ação *Recognizing* manifestou-se na decisão de definir o intervalo [*a*, *b*],, para os alunos [0,12]; limitada por *n* (sub)intervalos, neste caso ; na mobilização da forma de cálculo de $h = \frac{b-a}{n}$, na utilização das potencialidades do *GeoGebra* para efetuar a leitura das ordenadas dos pontos assinalados e na seleção da fórmula correta, ou seja, $\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$. Já o desenvolvimento da acão epistémica *Bulding-with* foi observada quando os alunos determinaram o valor de h ,$h = \frac{12-0}{12}$, definiram algebricamente a função no *GeoGebra*, de acordo com as ordenadas dos pontos assinalados e obtiveram e justificaram os resultados obtidos (área da zona Norte e área da zona Sul).

No RSA ficou registado (Figura 8):

Os alunos refletiram sobre os resultados obtidos e, através da dinâmica estabelecida com a professora, deram resposta a algumas questões colocadas. Justificaram, por que razão o valor obtido para a área da zona Sul apresentava um valor negativo, e apresentaram uma solução imediata para o cálculo da área total, visível na figura 7. Procuraram, por enquadramento, utilizando a grelha do GeoGebra, compreender se os valores absolutos encontrados para cada área se aproximavam do referente ao número de quadrículas que compunham o espaço ocupado pela ilha (representado no layout do GeoGebra).

Figura 8. Mediação entre os alunos e com a professora – RSA (resposta à 1.ª questão)

Este processo de interpretação e análise dos resultados apresentados corresponde ao desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*, que também requer conhecimentos e competências já interiorizadas, tais como o espírito crítico, e que são relevantes para que a construção do conhecimento se verifique.

O novo elemento do conhecimento alcançado pelos alunos prende-se com o cálculo da área solicitada, bem como da aplicação da mesma à escala real (C). Nesta situação, a construção acontece quando, depois de adicionarem os valores das áreas das diferentes zonas, convertem o valor aproximado à escala real, tal como apresentado na Figura 9.

Utilizando a escala para converter a área, temos 65.13 * 10000 = 651300m².

Figura 9. Área (regra dos Trapézios) à escala real - RA (resposta à 1.ª questão)

Nos registos RSA pode ler-se (Figura 10):

Na aplicação da regra de Simpson, os alunos reconheceram a utilidade dos pontos já assinalados e aplicaram o mesmo raciocínio, selecionando a fórmula da regra de Simpson composta: $\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-2}) + f(x_n)]$, com $h = \frac{a+b}{n}$ (n par). (RSA)

Figura 10. Mediação entre alunos e com a professora - RSA (resposta à 1.ª questão)

A semelhança dos procedimentos adotados para aplicarem a regra dos Trapézios, os alunos substituíram o valor de *h* na fórmula e, requerendo às ordenadas dos pontos assinalados, definiram, no *GeoGebra,* a expressão algébrica que lhes permitiria chegar às áreas parcelares. De realçar que reconheceram e mobilizaram resultados obtidos na questão anterior, tais como o valor de *h* e as ordenadas dos pontos, verificando-se maior destreza e rapidez na apresentação de uma solução. A ação epistémica *Recognizing* não só contribuiu para o desenvolvimento e obtenção de novos resultados (B), que aproximaram os alunos da construção pretendida, como também evidenciou maior determinação e eficácia por parte dos alunos.

Deu-se então continuidade ao processo de abstração, que incluiu a análise comparativa das áreas obtidas por aplicação das duas regras (mediação estabelecida entre os alunos e com a professora) e a apresentação da área total, justificada na Figura 11.

$$a = \frac{1}{3}\left(y(A) + 4\,y(B) + 2\,y(C) + 4\,y(D) + 2\,y(E) + 4\,y(F) + 2\,y(G) + 4\,y(H) + 2\,y(I) + 4\,y(J) + 2\,y(K) + 4\,y(L) + y(M)\right)$$

$$= 35.36$$

$$p_1 : z = \frac{1}{3}\left(y(Z) + 4\,y(W) + 2\,y(V) + 4\,y(U) + 2\,y(T) + 4\,y(S) + 2\,y(R) + 4\,y(Q) + 2\,y(P) + 4\,y(O) + y(N)\right)$$

$$= z = -29.23$$

Pela Regra de Simpson, a área total da ilha será = |35.36| + |-29.23| = 64.59u.a. Convertendo para m², temos: 64.59 * 10000 = 645900m².

Figura 11. Área (regra de Simpson) - RA (resposta à 1.ª questão)

No RSA registou-se (Figura 12):

Nos momentos de reflexão estabelecidos pelos alunos na sala de aula (RSA), estes consideraram que os valores obtidos por aplicação das diferentes regras eram, no contexto real, aproximados. Esta conclusão estaria associada a experiências de aprendizagem anteriores e que contribuíram para que os alunos validassem os seus resultados e progredissem na resolução da resolução da tarefa. Entenderam que a sua resolução estaria correta, mas não registaram (verbalmente ou por escrito) qual das regras teria estabelecido a melhor aproximação. (RSA)

Figura 12. Mediação entre alunos vs reflexão das professoras - RA (resposta à 1.ª questão)

Entende-se que a ação epistémica *Buiding-with* desenvolveu-se com maior naturalidade e rapidez, dado a experiência mobilizada através da construção anterior, ou seja, à presença da ação *Recognizing*. *Constructing* esteve presente quando os alunos apresentaram o valor pedido à escala real e foi alcançada com rapidez e confiança, resultando da solidez com que se desenvolveram as ações R e B.

Desempenho dos alunos (GR) no cálculo do Perímetro

No desafio seguinte, respeitante ao cálculo do perímetro, os alunos apresentam a seguinte resposta (Figuras 13 e 14):

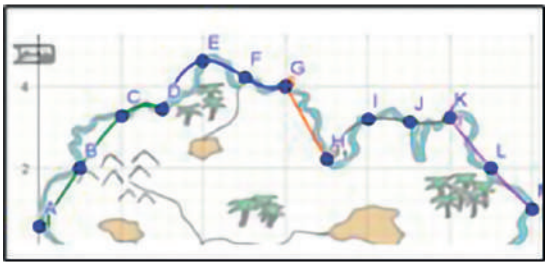


Figura 13. Modelação para o cálculo do perímetro - RA (resposta à 2.ª questão)

> Para estimar a quantidade de arame necessária, definimos curvas entre os pontos A e M e calculámos o perímetro das curvas usando novamente a regra de Simpson. O processo foi feito da seguinte maneira: definimos as curvas entre os pontos usando a função FitPoly.
>
> $f(x) = \text{FitPoly}(\{A, B, C, D\})$
>
> $= -0.15\,x^3 + 0.34\,x^2 + 1.24\,x + 0.56$ (...)
>
> Mas limitámos as curvas apenas ao intervalo desejado, usando a função Function *n*.
>
> $q(x) = \text{If}(x(A) \leq x \leq x(D), f(x))$
>
> $= -0.15\,x^3 + 0.34\,x^2 + 1.24\,x + 0.56, \quad (0.02 \leq x \leq 3.01)$ (...)

Figura 14. Cálculo do perímetro (regra dos Trapézios) - RA (resposta à 2.ª questão)

Os alunos interpretaram o enunciado (Figura 15):

> Compreenderam (R), depois de alguns momentos de discussão no grupo de trabalho (RSA), que seria necessário definir uma ou mais funções, por forma a aplicarem a fórmula $\sqrt{1 + f'(x)}$. Embora tivessem consciência que essa estaria associada à derivada da função, recorreram aos apontamentos das aulas para a mobilizar (R). Nos momentos seguintes, os alunos foram definindo intervalos que lhes permitia modelar a(s) função(ões) que melhor se ajustava(am) ao contorno da ilha (B), analisando em conjunto, por experimentação e visualização as diferentes curvas traçadas (figura 13).

Figura 15. Mediação entre os alunos - RSA (resposta à 2.ª questão)

Neste processo de construção, a utilização do *GeoGebra* foi relevante para o desenvolvimento das ações epistémicas *Recognizing* e *Building-with*, no sentido em que os alunos experimentaram, interpretaram "resultados" (R) e tomaram decisões que favoreceram a obtenção de novos resultados (C). Com efeito, a construção assumiu uma vertente exploratória que favoreceu o processo de construção.

De acordo com os procedimentos tomados e presentes na figura 14, os alunos definiram 4 (sub)intervalos (B), evidenciados pelas "curvas" representadas com diferentes cores, o que exigiu a interpretação (R) do que visualizavam. O desenvolvimento da tarefa teve seguimento com a exploração das potencialidades do *GeoGebra*, no sentido da definição da função (B), tal como se pode verificar através da explicação apresentada pelos alunos (figura 14).

Registou-se, RSA, o seguinte (Figura 16):

> A definição da função que permitia chegar ao perímetro exigiu alguma pesquisa e experimentação das funcionalidades do GeoGebra, no sentido em que os alunos não conseguiram de imediato definir a derivada da(s) função(ões) modeladas. Esse processo de experimentação passou pela mediação estabelecida entre a professora e alunos, e posteriormente entre eles, exigiu a interpretação dos resultados obtidos (R) e contribuiu para a aplicação correta da fórmula do perímetro e da regra de Simpson (B). (RSA)

Figura 16. Mediação e exploração do Geogebra - RSA (resposta à 2.ª questão)

O perímetro total foi obtido através da aplicação da regra de Simpson nos diferentes intervalos, tal como os alunos procuram justificar na explicação apresentada na Figura 17.

> As curvas ficaram com o formato aproximado do litoral da Ilha. Então, criámos uma função para o perímetro, obtivemos vários valores para o perímetro que, adicionados aos vários valores obtidos (b), permitiram concluir que o perímetro seria 20.68 * 100 = 2068 metros (C).

Figura 17. Justificação para o cálculo do perímetro - RA (resposta à 2.ª questão)

Ainda que o resultado obtido tenha sido motivo de reflexão por parte dos alunos, a construção ficou comprometida pelo facto de não terem convertido o resultado à escala real, para responderem corretamente ao desafio colocado.

Por último, ainda que não seja possível pormenorizar alguns resultados obtidos com a aplicação do questionário, pela limitação que é imposta a este artigo, realçamos que foram consideradas as respostas dos alunos para se refletir sobre a pertinência e sucesso da metodologia implementada. A título de exemplo, as questões que se seguem (Figura 18) evidenciaram que os alunos manifestam interesse pelo tipo de tarefa proposta, bem como pela dinâmica de trabalho que se estabeleceu em sala de aula, no sentido em que contribui para que superarem dificuldades e dessem resposta aos desafios colocados.

Figura 18. Resposta às questões 9 e 12 do questionário

Conclusões

De acordo com a análise dos resultados, constatou-se que a ação epistémica *Recognizing* tanto esteve presente na fase inicial do processo de abstração, correspondente à leitura e interpretação dos enunciados, em que os alunos mobilizaram conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores (interpretação de conceitos, mobilização e manipulação das fórmulas correspondentes às regras solicitadas, aplicação das potencialidades do *GeoGebra*, cálculo e comparação de resultados, procedimentos algébricos, utilização de simbologia própria, entre outros), como também durante o processo de construção, quando interpretaram ações (modelação das funções) e refletiram sobre os resultados obtidos. Por sua vez, o desenrolar da ação epistémica *Buiding-with*, expresso em alguns dos resultados obtidos pelos alunos, ora surgiu como consequência do desenvolvimento de *Recognizing*, ora favoreceu a sua expressão. Com efeito, à semelhança de estudos anteriores (Pimenta & Saraiva, 2019), as ações epistémicas *Recognizing* e *Building-with* mantiveram-se interligadas durante o processo de abstração e, no seu conjunto, favoreceram a construção de alguns dos novos conhecimentos matemáticos pretendidos, ou seja, a manifestação da ação epistémica *Constructing*. Isto evidencia, para a construção de novo conhecimento matemático, a importância dos conhecimentos matemáticos prévios, bem como o movimento de vai-e-vem entre esses conhecimentos e a seleção/escolha/descoberta de estratégias e caminhos para se alcançar a resolução das situações matemáticas colocadas.

De realçar que a ação epistémica *Constructing* manifestou-se quando o trabalho desenvolvido com os objetos (modelação das funções, aplicação das regras dos Trapézios e de Simpson) ascendeu ao concreto, no sentido de Davydov (1990), e permitiu que os alunos alcançassem o objetivo da tarefa. Nem sempre se manifestou com o rigor esperado, mas deu, na sua globalidade, cumprimento ao objetivo pretendido com a tarefa proposta, evidenciando a aprendizagem concebida pelos alunos.

Acrescenta-se que a natureza exploratória da tarefa, a dinâmica estabelecida pelos alunos e com as professoras na sala de aula, bem como a possibilidade de explorar e modelar uma situação no contexto real através das potencialidades do *GeoGebra*, proporcionaram um ambiente de trabalho motivador e favorável ao desenvolvimento do processo de abstração, que se iniciou com a interpretação e exploração de conceitos, ideias e procedimentos (abstrato) até se chegar aos valores de área e perímetro pretendidas (concreto). Tarefas exploratórias, como a descrita neste artigo, devem ser incentivadas no ensino superior, já que possibilitam aos alunos desenvolverem capacidades (competências) e conhecimentos através da abstração, num meio de interação e debates entre pares.

Referências bibliográficas

Abascal, M., Ornelas, L., & Jesus, E. (2017). *El uso de m-learning para motivar a aprender al alumno: caso de estudio en la UAM.* Cuajimalpa.

Badia, A., Chumpitaz L., Vargas, J. & Suárez, G. (2016). La percepción de la utilidad de la tecnología conforma su uso para enseñar y aprender. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, volume 18, 95-105. http://doi:10.1111/j.1365-2729.2011.00453.x.

Bassanezi, C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Contexto.

Bryman, A. (2011). Research methods in the study of leadership. *The Sage handbook of leadership*, 15-28.

Coelho, A., & Cabrita, I. (2018). *Creativity Enhanced by Technological Mediation in Exploratory Mathematical Contexts*. Springer.

Davydov, V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Soviet studies in mathematics education (v. 2). National Council of Teachers of Mathematics.

Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 679-693.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). *The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory*. Springer.

Dreyfus, T., & Kidron, I. (2006). Interacting parallel constructions: A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en didactique des mathématiques*, 26, 295–336.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T., (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195 –222.

Gravina, M. & Santarosa, L. (1998). *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.* Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV. Brasil.

Machado, R., & César, M. (2012). *Trabalho colaborativo e representações sociais: contributos para a promoção do sucesso escolar em matemática. Interacções*, *8*(20). https://doi.org/10.25755/int.495.

Nunes, S., & Sebastião, J. (2004). Insucesso no ensino superior. *Educação e Matemática*, 78, 37-39.

Pimenta, C., & Saraiva, M. (2019). As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante, 28*(1), 27–53. https://doi.org/10.48489/quadrante.

Pimenta, C. (2016). *A construção do conhecimento no desenvolvimento do pensamento algébrico* [Doctoral dissertation, Universidade da Beira Interior]. Universidade da Beira Interior.

Ponte, J., Brocardo, J., Oliveira, H. (2008). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, 11-34.

Reis, F. (2009). Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, 81-97.

Rezende, W. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Escrituras.

Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). *Digital technology in mathematics teaching and learning: A decade focused on theorising and teaching.* Brill.

Ensino de sequência numérica: Conhecimento didático evidenciado por futuros professores de Matemática na elaboração de aula híbrida, em abordagem de sala de aula invertida

Teaching number sequence: Didactic knowledge evidenced by preservice mathematics teachers in the development of a hybrid lesson, in the flipped classroom approach

Vilmar Gomes da Fonseca[1], *Mariana Souza Pereira*[2], *Ester dos Santos Silva Carvalho*[3]

[1]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, *vilmar.fonseca@ifrj.edu.br*

[2]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, *marypereira246@gmail.com*

[3]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, *srasilvah@gmail.com*

Resumo. *Neste texto apresentamos parte dos resultados de um estudo que visa identificar os desafios enfrentados por duas licenciandas em Matemática no planejamento de uma prática letiva para o ensino de sequência numérica, constituída de uma aula híbrida na abordagem de Sala de Aula Invertida, e o modo como agem para superá-los. A recolha de dados compreendeu os momentos de planejamento da aula híbrida pelas futuras professoras e envolveu a elaboração de atividades instrucional (assíncrona), exploratória (síncrona) e avaliativa. Os resultados apontam a elaboração de videoaulas, quiz e tarefas exploratórias como grandes desafios para as licenciandas no planejamento da aula híbrida. No entanto, revela-se que a integração e articulação de diferentes aspetos dos seus conhecimentos didáticos contribuiram para que elas superassem os desafios. Ao final, retiramos algumas implicações educacionais destes resultados.*

Abstract. *This paper presents the results of a study that aims to identify the challenges faced by two undergraduate students in Mathematics in planning a teaching practice for number sequence, consisting of a hybrid lesson in the flipped classroom approach, and the way they act to overcome them. The data collection comprised the planning of the hybrid lesson by the preservice mathematics teachers and involved the elaboration of instructional (asynchronous), exploratory (synchronous) and evaluative activities. The results point to the elaboration of video lessons, quiz and exploratory tasks as major challenges for the undergraduate* *students in planning the hybrid lesson. However, the integration and articulation of different aspects of their didactic knowledge helped them to overcome the challenges. In the end, we draw some educational implications from these results.*

Palavras-chave: *Futuro professor de Matemática; Conhecimento didático; Aula h*íbrida; Sala de *aula invertida; Sequência numérica*.

Keywords: *Preservice mathematics teachers; Didactic knowledge; Hybrid lesson; Flipped classroom; Number sequence.*

Introdução

A formação inicial de professores de Matemática tem recebido atenção especial em extensa investigação na Educação Matemática dada às evidências de problemas, especialmente sobre a inserção do futuro professor de Matemática no exercício da prática docente (Albuquerque et al., 2006; Silva et al., 2022). Sob este aspecto, é possível identificar na literatura estudos como os de Ponte e Chapman (2008), Fonseca (2019), Silva, Gaspar e Fonseca (2022) que têm procurado compreender o modo como os processos formativos podem estimular o futuro professor a vivenciar experiências reflexivas de contexto escolar, que possibilita o desenvolvimento do seu conhecimento profissional sobre o ensino da Matemática, o qual deve ser feito articulando-se diferentes domínios desse conhecimento para dar suporte à prática letiva (Ponte & Chapman, 2008).

Com o retorno ao ensino presencial, após um período de isolamento social devido à pandemia do Covid-19, tem-se percebido um cenário de muitos desafios no ensino e aprendizagem da matemática (Silva et al., 2022). Isto constitui-se em um cenário profícuo para o uso da abordagem inovadora de ensino híbrido por sala de aula invertida para ensinar matemática, com vistas a possibilitar um ambiente dinâmico e envolvente dos alunos no processo de sua aprendizagem (Lo et al., 2017; Valente, 2014).

Sob esta perspetiva, nota-se a necessidade de investigar a inserção dos futuros professores de Matemática no desenvolvimento de prática letiva que considere tal abordagem de ensino (Valente, 2014), dando especial atenção ao desenvolvimento do conhecimento didático desses licenciandos e ao modo como articulam os diversos aspetos deste saber, ao projetar atividades com o uso de recursos didáticos manipuláveis e/ou tecnologias digitais para ensinar Matemática (Ponte & Chapman, 2008).

Sendo assim, apresentamos nessa comunicação parte dos resultados de um estudo desenvolvido com duas futuras professoras de Matemática, no Brasil, que visa compreender os desafios enfrentados por elas no planejamento de uma prática letiva, constituída de uma aula híbrida na modalidade de sala de aula invertida, para o ensino de sequência numérica, e o modo como agem para superá-los.

Prática letiva como aspeto formativo do professor de Matemática

Os cursos de formação inicial de professores de Matemática são os grandes responsáveis pelo preparação do professor de Matemática para a docência (Albuquerque et al., 2006). Essa preparação deve compreender a articulação e a integração dos diferentes tipos de conhecimentos necessários à docência; nomeadamente, conhecimento dos conteúdos matemáticos e sua natureza, conhecimento dos métodos e técnicas para ensinar os conteúdos matemáticos com ou sem a integração de tecnologias, entre outros (e.g. Fonseca, 2019; Ponte & Chapman, 2008). Essa articulação deve ser orientada para a realização de prática letiva (Ponte, 2012).

À vista disso, alguns autores designam como conhecimento didático o conhecimento peculiar do professor de Matemática associado à sua prática profissional (Ponte, 2012; Santana et al., 2020). É o conhecimento da Matemática a ser ensinada, incluindo a maneira de abordá-la, de forma que seja compreensível aos alunos (Ponte, 2012). Ponte e Chapman (2008) apontam que o desenvolvimento do conhecimento didático do professor deve envolver experiências didáticas da Matemática que contemplem a integração entre o conteúdo e a pedagogia, devendo o desenvolvimento desse conhecimento ser considerado desde a formação inicial do professor.

É necessário que essas experiências didáticas que os licenciandos de Matemática devem ser submetidos no âmbito de sua formação inicial contemplem momentos de pensar e repensar os materiais instrucionais, além de sistematizá-los, para o ensino da Matemática, em qualquer nível (Ponte, 2012). Isto favorece o conhecimento do futuro professor sobre como o conteúdo matemático deve ser ensinado.

No entanto, com a volta ao ensino presencial nas escolas, após um período de ensino remoto emergencial, tem-se percebido muitas dificuldades dos alunos na aprendizagem da Matemática, como: defasagem matemática, déficit de atenção nas aulas, apatia na resolução das tarefas, etc (Silva et al., 2022). Tal situação aponta para a necessidade de considerar o ensino da Matemática como uma atividade fundamentada e coerente, incentivando o trabalho colaborativo entre os alunos e um ambiente de reflexões sobre as noções matemáticas, visando potencializar a aprendizagem dos alunos (Albuquerque et al., 2006).

Neste sentido, é amplamente reconhecido o valor da Sala de Aula Invertida (*Flipped Classroom*), integrando o uso de recursos didáticos e tecnologias digitais, como abordagem de ensino da Matemática capaz de viabilizar um ambiente rico e inovador que contribui para potencializar a aprendizagem dos alunos (Lo et al., 2017).

Sala de Aula Invertida como abordagem de ensino de Matemática

A Sala de Aula Invertida constitui uma abordagem de ensino híbrido que inverte a lógica do ensino tradicional, em que o estudo do conteúdo é feito pelo aluno previamente à sala de aula e em local que lhe seja favorável, e, na sala de aula, as aprendizagens são sistematizadas através da resolução de tarefas, reflexões e discussões para esclarecimento de dúvidas (Bergmann & Sams, 2012; Valente, 2014).

A importância da adoção da sala de aula invertida nas aulas de matemática tem ganho atenção crescente em investigações em Educação Matemática em todo mundo. Por exemplo, Lo et al. (2017) analisaram 33 publicações científicas que investigaram o uso da sala de aula invertida em aulas de matemática, na educação básica e ensino superior, nos Estados Unidos, Europa e Ásia, de 2011 a 2020. Os autores constataram que essa abordagem de ensino contribui para: (i) aumentar a interação e participação dos alunos na aula, (ii) potencializar a compreensão dos alunos sobre a matemática e (iii) para a satisfação dos alunos sobre os materiais instrucionais e método de ensino utilizados.

Schreiber et al. (2018) constataram resultados semelhantes aos de Lo et al. (2017) analisando outros 16 estudos de 2014 a 2017. Esses autores indicam que a prática de sala de aula invertida precisa ser incentivada e aperfeiçoada cada vez mais, e apontam para a necessidade de novas pesquisas a fim de compreender as potencialidades da inversão da sala de aula, assim como a transformação das práticas educacionais no ambiente escolar.

As tarefas e os recursos usados, bem como os tipos de atividades que o aluno realiza fora ou na sala de aula, variam de acordo com a proposta a ser implantada, criando diferentes possibilidades para essa abordagem de ensino (Valente, 2014). Apesar de não existir um modelo único de sala de aula invertida, consideramos como favorável aos objetivos deste estudo a proposta constituída de um processo cíclico de atividades *Instrucional (assíncrono)*, *Exploratória (assíncrono)* e *Avaliativa* (Figura 1).

Figura 1: *Um modelo de sala de aula invertida* (Fonte: Adaptado de https://ctl.utexas.edu/instructional-strategies/flipped-classroom)

Esse modelo de sala de aula invertida é resultado de estudos, sobre como promover uma inversão adequada da aula de matemática, realizados por membros do projeto de pesquisa "*Techschool – Tecnologias na escola e Formação de professores*", do IFRJ (que integra os autores deste texto), nos últimos três anos. Esses estudos envolveram discussões/reflexões sobre diferentes propostas de inversão de aula, adotadas por professores e pesquisadores da Educação Matemática (e.g. Bergmann & Sams, 2012; Lo et al., 2017; Schreiber et al., 2018), e a realização/aperfeiçoamento de aulas híbridas por sala de aula invertida como objeto de pesquisa.

Nesse modelo, a atividade *instrucional* consiste numa ação sistemática de ensino que tem como principal característica a explicação e exemplificação do conteúdo a ser estudado. Essa atividade é realizada pelos alunos em momento anterior a sala de aula, a partir de materiais instrucionais sistematizados pelo professor, podendo incluir a exploração de multimídias (podcast, vídeos, etc), resposta de quiz com recurso à visualização de vídeos, etc (Lo et al., 2017).

Por sua vez, a atividade *exploratória* constitui uma ação de ensino de sala de aula com ênfase na realização de tarefas pelos alunos, de forma autônoma e, preferencialmente, em pares ou grupos, cabendo ao professor apoiá-los na realização das tarefas de modo que alcancem as aprendizagens propostas. Este tipo de atividade inclui a realização de tarefas exploratórias, investigação, modelação matemática, entre outros, podendo seguir a prática de ensino exploratório (Fonseca, 2019).

Por fim, a atividade *avaliativa* contempla uma ação de ensino que permite aos alunos aplicarem os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, para resolver novas situações e problemas. Tem como foco verificar se os alunos alcançaram os objetivos de aprendizagem propostos. Este tipo de atividade inclui a realização de testes, itens avaliativos, seminários, entre outros instrumentos avaliativos (Lo et al., 2017).

O que difere esse modelo de outros apresentados na literatura é o caracter cíclico do processo de inversão da aula (Figura 2). Neste processo, inicialmente são definidos os objetivos de aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, os quais devem integrar cada uma das atividades, nomeadamente instrucional, exploratória e avaliativa. Assim, os materiais instrucionais das atividades (tarefas, quiz, videoaulas, testes, etc) são desenvolvidos com foco a conduzir os alunos a alcançarem os objetivos de aprendizagem.

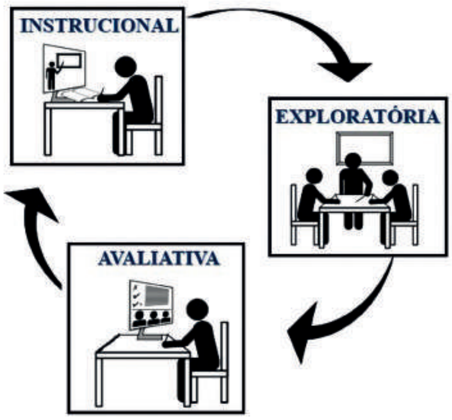


Figura 2: Processo cíclico de desenvolvimento da sala de aula invertida

Metodologia

Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011), foi realizado no 2.º semestre de 2022, no âmbito da realização de uma aula híbrida, na abordagem de sala de aula invertida, que visava promover a aprendizagem de alunos do 8.º ano de uma escola pública no Brasil, sobre sequências numéricas. Essa aula foi implementada por duas licenciandas de Matemática do IFRJ, Maria e Fátima (nomes fictícios), com supervisão do coordenador do projeto Techschool.

Ressaltamos, que apesar das licenciandas se encontrarem em períodos finais de formação – Maria (último) e Fátima (penúltimo) – vivenciaram, neste estudo, a primeira experiência planejada e reflexiva de desenvolvimento de aula híbrida. No entanto, a participação dessas licenciandas no projeto Techschool permitiu-lhes realizar estudos reflexivos sobre as características do ensino híbrido por sala de aula invertida e os recursos didáticos que poderiam ser usados na sua implementação, possibilitando-lhes informações substanciais sobre o ensino da Matemática nesse contexto de ensino.

Neste texto, focamo-nos no planejamento da aula híbrida, especificamente na elaboração dos materiais instrucionais. A Tabela 1 apresenta uma descrição das ações das futuras professoras no processo de planejamento dessa aula, que decorreu de dez encontros, de 2h de duração cada um, sob orientação do investigador.

Tabela 1. Processo de planejamento da aula híbrida

Momentos	Ações realizadas pelas licenciandas	Datas
Planejamento	Discussão sobre os objetivos de aprendizagem de sequência numérica que orientam a construção dos materiais instrucionais	12/09/2022
	Discussão sobre os recursos didáticos com uso de tecnologias	23/09/2022
	Discussão sobre os recursos didáticos com uso de tecnologias Obs: As videoaulas que integram a atividade instrucional foram gravadas pelas licenciandas posteriormente a esse momento	25/10/2022
	Revisão das videoaulas e elaboração do quiz que integram a atividade instrucional.	3/11/2022
	Elaboração das tarefas exploratórias	6/11/2022
	Elaboração das tarefas exploratórias	15/11/2022
	Revisão e aperfeiçoamento dos materiais (videoaulas e quiz) construídos para a atividade instrucional	18/11/2022
	Revisão e ajustes das tarefas exploratórias para a atividade exploratória	21/11/2022
	Elaboração de itens avaliativos para a atividade avaliativa	25/11/2022
Reflexão	Reflexão sobre os desafios enfrentados na elaboração dos materiais instrucionais para a aula híbrida	13/02/2023

A recolha de dados compreendeu os momentos de planejamento e reflexão da aula híbrida, gravados em áudio/vídeo, das notas de campo do investigador na observação desses momentos, dos materiais instrucionais produzidos pelas licenciandas e de seus relatos (escrito e verbal) sobre desafios que enfrentaram na preparação desses materiais, construídos após a aula.

A análise dos dados, descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009), foi realizada através da triangulação dos mesmos e centrou-se em ações realizadas pelas futuras professoras na elaboração dos materiais instrucionais da aula híbrida (Tabela 1), dando especial atenção aos aspectos do conhecimento do professor, mobilizados por elas, para ensinar sequência numérica (Tabela 2). Para apoiar essa análise incluímos excertos dos materiais e comentários produzidos pelas licenciandas.

Tabela 2. Categoria de análise dos dados

Categorias	Descrição
Materiais instrucionais	Aspectos dos materiais instrucionais elaborados pelas futuras professoras que evidenciam seus conhecimentos sobre o ensino de sequência numérica
Ações	Aspectos do conhecimento do professor mobilizados pelas futuras professoras para superar dificuldades, na elaboração dos materiais instrucionais para a aula híbrida

A prática letiva desenvolvida

A prática letiva que suporta este estudo foi desenvolvida no âmbito do projeto *Techschool*, que visa proporcionar aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática do IFRJ a sua inserção no cotidiano das escolas de educação básica e estudar as práticas de intervenção escolar, planejadas e conduzidas por esses futuros professores, para o ensino de matemática. Esta prática letiva tem por base uma aula híbrida por sala de aula invertida, constituída de um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa. Ela foi concretizada em novembro/2022, seguindo três etapas:

1.ª Etapa: realização da atividade instrucional – Nesta etapa, os alunos responderam a um quiz contendo cinco questões conceituais, de múltipla escolha, sobre sequência numérica. Para responder as questões, era preciso recorrer, simultaneamente, à visualização de vídeos explicativos sobre a noção de regularidade de uma sequência, generalização algébrica do seu termo geral e procedimentos de resolução de problemas que a envolvem. Essa atividade foi disponibilizada aos alunos, por meio de um grupo no WhatsApp que incluía os seus contactos telefónicos, para ser feita antes da aula.

2.ª Etapa: realização da atividade exploratória – Nesta etapa, de 2h 30 min de duração, os alunos resolveram uma sequência didática de quatro tarefas exploratórias para sistematizar as aprendizagens trabalhadas na atividade instrucional. Na tarefa 1, os alunos devem completar sequências de polígonos regulares cuja regularidade é assentada no número de lados do polígono e responder às questões que os conduzam à identificação e generalização da regularidade. A tarefa 2 exibe uma sequência de blocos empilhados e visa conduzir os alunos à descoberta da regularidade da sequência com base na relação funcional entre o termo e sua ordem. A tarefa 3 apresenta uma sequência de palitos dispostos em forma triangular e visa conduzir à generalização algébrica da regularidade da sequência e a determinação de termos desconhecidos ou sua ordem. A última tarefa propõe conduzir os alunos à aplicação do conceito de sequência para resolver uma situação problema envolvendo o compartilhamento de vídeos do Tik Tok.

3.ª Etapa: realização da atividade avaliativa – Nesta etapa, os alunos resolveram quatro itens avaliativos, de múltipla escolha, que visavam consolidar as aprendizagens trabalhadas nas atividades anteriores, nomeadamente identificar e generalizar a regularidade de uma sequência numérica, traduzir a expressão algébrica do seu termo geral e resolver problemas que envolvem a aplicação do conceito de sequência numérica.

Apresentação dos resultados

A análise dos dados mostra que a elaboração de materiais instrucionais para o ensino de sequência numérica, considerando a abordagem de sala de aula invertida, configurou-se em desafios enfrentados pelas licenciandas na realização da aula híbrida.

De facto, as licenciandas sentiram dificuldades na gravação dos vídeos explicativos usados para o ensino de sequência numérica e que foram incluídos no quiz da atividade instrucional. Isto é confirmado pelos comentários de Fátima e Maria sobre os desafios que tiveram na elaboração desses materiais:

> Fátima: Achei difícil, no início, gravar os vídeos. Levava muito tempo para gravar e tinha que tentar ser a mais sucinta possível para o vídeo não ficar longo.
>
> Maria: Tive dificuldade em encontrar uma forma direta e dinâmica de gravar e, também, com o tempo dos vídeos.
>
> Investigador: Como conseguiram superar esse desafio? [questiona a cada licencianda]
>
> Fátima: Uma estratégia que eu comecei a adotar foi fazer tipo um roteiro do que seria falado e fazer a exposição de forma mais objetiva.
>
> Maria: Então, foi necessário regravar algumas vezes e ser mais direta na minha fala.

Os comentários mostram que reduzir o tempo de duração do vídeo foi um grande desafio para as licenciandas. Fátima superou esse desafio quando decidiu estabelecer um roteiro de exposição e exemplificação do conteúdo, e com base nele proceder a gravação. Já Maria, refez as gravações sendo mais objetiva e direta na exposição dos conteúdos. Desta forma, essas futuras professoras evidenciam conhecimentos sobre a organização do conteúdo de sequência (roteiro de ensino) e o conhecimento de materiais (gravação de videoaula), os quais constituem aspectos do conhecimento sobre o currículo e que são fundamentais à prática docente, como aponta Ponte (2012).

Também se verifica que a elaboração de questões para o quiz constituiu um desafio e que foi superado pelas licenciandas após conseguirem sistematizar os objetivos de aprendizagem sobre sequências numéricas, em articulação com a elaboração dos vídeos, tal como se verifica nos seus comentários:

> Fátima: O que eu achei desafiador na elaboração do quiz foi, com certeza, a elaboração das questões. Por serem questões conceituais a gente teve que pensar um pouco sobre quais seriam as bases teóricas para que o aluno aprendesse o conteúdo [sequência], ou seja, o que o aluno precisa aprender para chegar em aula sabendo aquele determinado tópico.
>
> Maria: O mais desafiador na elaboração do quiz foi definir [consolidar] os objetivos de aprendizagem. Quando se tem bem definidos os objetivos, você consegue pensar no que vai fazer para elaborar as questões [do quiz] e os vídeos.

Investigador: Como superaram esse desafio? [questiona a cada licencianda]

Fátima: eu comecei a definir os objetivos da aula, ou seja, pensar sobre "o que eu preciso que o aluno aprenda?" e preparar questões teóricas que estivessem de acordo com a exposição nos vídeos. Essa pergunta é que fez sentido para que eu conseguisse construir o quiz e os vídeos.

Maria: As discussões e orientações com o senhor [investigador] foram essenciais para que pudéssemos estabelecer os objetivos de aprendizagem. Daí, conseguimos elaborar o quiz e decidir o que fazer nos vídeos.

Verifica-se que as licenciandas tiveram muitas dificuldades na elaboração das questões do quiz de modo a verificar se as ideias apresentadas nos vídeos foram assimiladas pelos alunos. No entanto, após discutirem e refletirem com o investigador sobre a proposta do quiz, elas conseguiram "definir" (consolidar) os objetivos de aprendizagem, os quais foram essenciais para orientá-las a elaborar questões adequadas para o quiz, "que estivessem de acordo com a exposição nos vídeos" (Fátima), permitindo aos alunos assimilar ideias que seriam consolidadas em sala de aula (Figura 3).

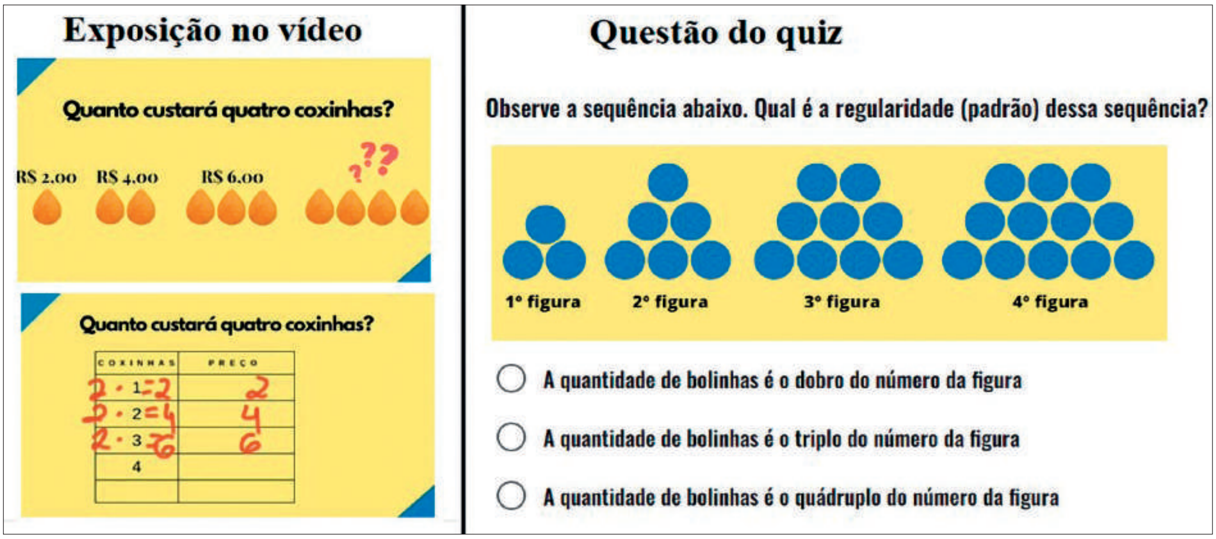


Figura 3. Exemplo de exposição na videoaula e questão do quiz correspondente

Os resultados ainda mostram que a elaboração da sequência de tarefas exploratórias aplicadas aos alunos em sala de aula é apontada pelas licenciandas como muito desafiante. De facto, Maria aponta que decidir o percurso de aprendizagem a ser considerado na elaboração das tarefas demandou muito tempo. Sob isto, ela cita a realização de encontros semanais com muitas leituras, pesquisas, discussões e reflexões para produzir sequências numéricas adequadas que integrassem as tarefas, cuja resolução era orientada por um processo de "montagem" de peças:

> A tarefa exploratória foi difícil fazer. Nós tivemos dificuldade inicial de sair daquele modelo tradicional de sequência de números e considerar algo diferente, contextualizado. Tentamos várias ideias. Eu lembro que a Fátima sugeriu uma situação envolvendo Romeu e Julieta. Depois pensamos em trabalhar uma sequência de coxinhas. Por último, optamos pela dinâmica de montar peças. Nós pegamos bloquinhos e

> palitos coloridos para fazer os alunos montarem sequências. O que nos ajudou a conseguir elaborar a tarefa exploratória foi a constância, toda semana estávamos reunidas (...). Foram muitas pesquisas e conversas realizadas [...]. Pesquisar na internet e ler sobre como tornar mais dinâmica a aprendizagem sobre sequências.

Fátima concorda com Maria e acrescenta a importância da elaboração de perguntas adequadas para integrar as tarefas exploratórias, a fim de que os alunos possam se envolver no processo de investigação e alcançar as descobertas desejadas:

> Sim! Foi muito bom! Uma tarefa exploratória é diferente de uma matéria no quadro em que você apresenta tudo pronto e mastigado para o aluno. Quando você se propõe a construir um conhecimento por meio de uma investigação, o aluno experimenta. Então ele cria as próprias expectativas e método de aprender. Mediante a tua pergunta ele consegue fazer e chegar à conclusão [...]. Eu aprendi que saber fazer perguntas é muito importante porque uma pergunta pode mudar a forma como o aluno aprende sobre um conteúdo.

Relativamente à elaboração de itens que integram a atividade avaliativa, as licenciandas apontam que não apresentaram grandes dificuldades, uma vez que já possuíam conhecimentos dos requisitos que compõe a construção do item, conforme se observa nos comentários:

> Maria: Sem dificuldades. Acho que realmente foi a experiência que eu possuía na elaboração de itens. Porque não era a primeira vez que eu estava fazendo isso. Então, quando você faz mais vezes acaba que tem mais facilidade. Outra coisa, quando se tem os objetivos de aprendizagem bem estabelecidos se consegue pensar no que se vai fazer para o item [...].
>
> Fátima: Desta vez eu não tive dificuldades [...]. Na outra aplicação [experiência passada], a construção do item tinha sido um caos! Eu não conseguia pensar em distratores e tive de colocar a minha irmã para resolver as questões para eu conseguir observar em que momentos ela iria errar – caso ela errasse – para eu conseguir criar os distratores.

Estas licenciadas já tinham vivenciado experiências desafiadoras de elaboração de itens avaliativos em outro momento de sua formação e, portanto, as aprendizagens que alcançaram à época permitiram-lhes elaborar itens para o ensino de sequência numérica, contendo adequados texto-base e enunciado, e distratores plausíveis como alternativas, tal como exemplificado na Figura 4.

As justificativas apresentadas para os distratores do item mostram que as licenciandas possuem conhecimento de como os alunos pensam quando cometem erros sobre a generalização algébrica do termo geral de uma sequência numérica, evidenciando aspectos do conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem, tal como apontam Albuquerque et al. (2006) e Ponte (2012).

Item avaliativo

2) Uma pessoa montou uma sequência de figuras, de modo que os 3 passos iniciais são:

A cada passo, ela sempre acrescenta a mesma quantidade de bolinhas à figura seguinte. Então, qual seria a lei de formação desta sequência?

a) 2n + 2
b) 3n + 1
c) n + 3
d) 4n - 1
e) 4 (n + 3)

Justificativas dos distratores

a) $2n + 2 \rightarrow$ Concebe que a generalização algébrica implica numa relação entre termo e sua ordem. Generalizou o termo geral da sequência por $2n + 2$ apenas analisando o primeiro termo.

b) $3n + 1 \rightarrow$ Resposta correta

c) $n + 3 \rightarrow$ Percebeu que a sequência era formada por uma bolinha central e a cada termo acrescentava 3 bolinhas.

d) $4n - 1 \rightarrow$ Concebe que a generalização algébrica implica numa relação entre termo e sua ordem. Verificou a expressão $4n - 1$ funcionava para o 2º termo e concluiu que essa expressão era a lei de formação da sequência.

e) $4(n + 3) \rightarrow$ Observou que $(n + 3)$ funcionava para o 1º termo, no entanto confundiu o termo "generalizar" com o "próximo termo" sendo assim, multiplicou por 4.

Figura 4. Exemplo de item avaliativo e justificativas dos distratores.

Conclusão

Neste estudo, apresentamos os desafios vivenciados por duas licenciandas na elaboração de materiais instrucionais para uma aula híbrida, na modalidade de sala de aula invertida, que visa promover a aprendizagem de sequências numéricas e discutimos as ações realizadas por estas futuras professoras para superar tais desafios.

Os resultados apontam que as licenciandas vivenciaram experiência didática inédita, inovadora, fundamentada e coerente para o ensino da Matemática, conforme afirmam Albuquerque et al. (2006) e Ponte e Chapmam (2008). De facto, as futuras professoras elaboraram materiais instrucionais adequados para o ensino de sequência considerando orientações curriculares para o ensino de matemática, de modo a aplicá-los aos alunos, atendendo aos desafiadores contextos de ensino híbrido (Valente, 2014) e à abordagem de sala de aula invertida (Lo et al., 2017).

As licenciandas foram capazes de articular, adequadamente, diferentes tipos de conhecimento do professor para o ensino de Matemática, nomeadamente conhecimento do conteúdo (sequência numérica), conhecimento tecnológico, conhecimento do aluno e seus processos de aprendizagem e conhecimento da prática letiva, para superar inúmeros desafios, como encontrar novas formas de ensinar e promover a aprendizagem mais efetiva dos alunos. Isso evidencia, assim, um adequado conhecimento didático do professor para o ensino de Matemática, tal como aponta Ponte (2012).

Ainda que a implementação de prática letiva para o ensino de Matemática seja uma tarefa que envolve muitos desafios, como indicam Santana et al. (2020) e Silva et al. (2022), os elementos que emergiram deste estudo nos dão uma boa indicação de que a implementação de prática letiva constituída para o ensino da Matemática, na modalidade de sala de aula invertida, caracterizada por um processo cíclico de atividades *instrucional*, *exploratória* e *avaliativa* e que integra recursos didáticos manipuláveis e tecnologias digitais, pode ser usada como contexto formativo com potencial para desenvolver o conhecimento do futuro professor para ensinar Matemática.

Este texto pretende, assim, contribuir para aprofundamento de discussão e reflexão sobre a realização de experiências didáticas, para o ensino de matemática como parte da formação inicial do futuro professor de Matemática, que viabilizem a integração entre o conteúdo e a pedagogia, e o ensino da Matemática como uma atividade fundamentada e coerente, de modo a torná-la flexível e adequada aos alunos.

Referências bibliográficas

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. APM e SPCE.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom*: *Reach every student in every class every day*. ISTE.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Almedina.

Fonseca, V. (2019). Aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e continuidade: Uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra na formação inicial de professores de matemática, no Brasil. Tese de Doutoramento em Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. http://hdl.handle.net/10451/42789

Lo, C. K., Hew, K. F., & Chen, G. (2017). Toward a set of design principles for mathematics flipped classrooms: A synthesis of research in mathematics education. *Educational Research Review*, *22*, 50-73. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.08.002

Ponte, J. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Coord.), *Teoria, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education,* (vol. 2, pp. 225-263). Routldge.

Santana, E., Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2020). Conhecimento Didático do Professor de Matemática à Luz de um Processo Formativo. *Bolema*, *34*(66), 89-109. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a05

Silva, A., Gaspar, J., & Fonseca, V. (2022). Simetria Axial na pandemia da covid-19: Uma proposta didática com recurso do uso de dobraduras e o GeoGebra. In: J. Gaspar, A. Silva, M. Bastos & V. Fonseca (Org), *Ciclo de formação em ensino de matemática: Contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática,* (vol. 1, pp. 11-26). Pantanal. https://doi.org/10.46420/9786581460372

Schreiber, K. P., Pereira, E. C., Machado, C. C., & Porciúncula, M. (2018). Sala de aula invertida no ensino de Matemática: Mapeamento de pesquisas científicas na área de Ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(2), 222-235.

Valente, J. A. (2014). Blended learning e as mudanças no ensino superior: A proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, *4,* 79-97. https://doi.org/10.1590/0104-4060.38645

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). SAGE.

Adaptações no estudo de aula: Oportunidade para potenciar a reflexãosobre a prática com professores de matemática no contexto angolano

Adaptations in lesson study: Opportunity to enhance reflection on practice with mathematics teachers in the Angolan context

Madalena Hungulo[1]

[1] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, m.garreth@campus.ul.pt

Resumo. *O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores, originário do Japão e que atualmente é praticado em vários países. O seu uso noutros países requer adaptações em função do contexto dos professores e das condições existentes. O objetivo desta comunicação é conhecer as aprendizagens dos professores, as reflexões que fizeram sobre a sua prática e as suas perspetivas sobre o estudo de aula e o ensino exploratório. Participaram três professores de matemática do 7.º ano de escolaridade. A metodologia empregue é qualitativa, no paradigma interpretativo. A recolha dos dados foi feita por observação participante, entrevistas e gravação das sessões. Os resultados apontam que os professores fizeram reflexões importantes em relação à sua prática docente e consideraram o ensino exploratório como uma metodologia desafiante tanto para os professores como para os alunos, mas benéfica para a aprendizagem dos alunos. Também consideraram o estudo de aula um processo eficaz de desenvolvimento profissional de professores.*

Abstract. *Lesson study is a professional development process for teachers, which originated in Japan and is practiced in several countries. Its use in other countries requires adaptations depending on the teachers' context andexisting conditions. The aim of this communication is to get to know the teachers' learning, the reflections they made on their practice and their perspectives on lesson study and exploratory teaching. Three grade 7 mathematics teachers participated. The methodology used is qualitative in the interpretative paradigm. Data collection was done through participant observation, interviews and recording of all sessions. The results indicate that teachers made important reflections in relation to their teaching practiceand considered exploratory teaching as a challenging methodology for bothteachers and students, but beneficial for students' learning. They also considered lesson study an effective teacher professional development process.*

Palavras-chave: *estudo de aula; adaptações; ensino exploratório; professores de matemática.*

Keywords: *Lesson study; adaptations; exploratory teaching; math teachers.*

Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores com origem no Japão, que ajuda os professores a explorar práticas de ensino eficazes (Murata et al., 2012). Atualmente, é praticado em muitos países (Perry & Lewis, 2009) e usado tanto com professores em serviço, como na formação inicial de professores. Têm sido feitas várias adaptações de acordo com a realidade dos participantes. A profissão docente é exigente e, como descrito por Marcelo (2009), os professores do século XXI têm um desafio acrescido pelo fato da sociedade atual ser muito dinâmica. Esta realidade exige do professor atualização constante e criatividade para responder adequadamente ao direito de aprender dos alunos. O impacto que os processos formativos têm no desenvolvimento do conhecimento dos professores é de grande importância, porque contribuem para a melhoria da qualidade do serviço prestado pelo professor e, consequentemente, da aprendizagem dos alunos. Por esta razão, neste estudo, procuro conhecer as perspetivas dos professores participantes em relação ao estudo de aula e como avaliam o impacto deste processo formativo pois, como indicam Hourigan e Leavy (2019), este não atingirá o seu objetivo se os participantes o considerarem ineficaz.

O papel e a ação do professor, desde a escolha criteriosa da tarefa até à sua apresentação e realização na sala de aula, é crucial (Canavarro & Santos, 2012). Tendo em vista contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, num contexto de desenvolvimento profissional de professores, assume especial importância a abordagem do ensino exploratório da Matemática, uma abordagem com fortes potencialidades para a aprendizagem dos alunos, mas que exige muito do professor. Neste estudo, a abordagem exploratória foi adotada como a estratégia de ensino da aula de investigação. De acordo com Guskey (2002), "a experiência de implementação bem- sucedida muda as atitudes e crenças dos professores. Eles [os professores] acreditam que funciona porque viram funcionar, e essa experiência molda suas atitudes e crenças" (p. 4). Durante o estudo de aula, os professores dedicam-se a preparar tarefas desafiantes para os seus alunos, além de prepararem colaborativamente a aula de investigação, e constatam a sua execução nos seus contextos laborais. De modo a compreender os efeitos desta experiência no desenvolvimento do conhecimento didático dos professores, neste estudo, interessa-me também conhecer as perspetivas dos professores sobre a abordagem exploratória.

Assim, o objetivo desta comunicação é conhecer as aprendizagens dos professores, as reflexões que fizeram sobre a sua prática e as suas perspetivas sobre o estudo de aula e o ensino exploratório.

Quadro conceptual

Este estudo é sustentado pelo quadro conceptual referente ao conhecimento didático. Este conhecimento faz referência, designadamente, à importância das tarefas no ensino da matemática e às várias estratégias de ensino que favorecem a aprendizagem da Matemática, concretamente a abordagem exploratória. Também nos apoiamos nos pressupostos teóricos sobre o estudo de aula como um processo de desenvolvimento profissional de professores.

O conhecimento didático é o conhecimento que orienta, de modo mais direto, a atividade letiva do professor. Com esta ou com outras designações, como *pedagogical content knowledge* (PCK), tem sido discutido e aprofundado por vários investigadores. Neste estudo, foram consideradas as abordagens e categorias do conhecimento didático segundo Shulman (1987), Ball et al. (2008), Ponte (2012) e Carrillo et al. (2013).

Um aspeto importante do trabalho do professor de Matemática é a necessidade de selecionar, adaptar e conduzir tarefas na sala de aula. A aprendizagem dos alunos está ligada a dois fatores essenciais: a realização de tarefas e a reflexão que sobre elas se efetuam (Ponte, 2005). É criando, adaptando e selecionando boas tarefas que o professor providencia atividades que favorecem a aprendizagem dos alunos e consolida tais aprendizagens promovendo momentos de discussão e reflexão.

Umas das abordagens que valoriza os vários tipos de tarefas é a abordagem exploratória. É um ensino que valoriza muito a exploração de tarefas de caracter desafiante na sala de aula e é gerido de forma a valorizar o conhecimento que o aluno já possui e procura explorar sua capacidade de raciocínio na construção do novo conhecimento. A abordagem exploratória comporta três fases: (i) lançamento da tarefa; (ii) trabalho autónomo dos alunos e (iii) discussão coletiva e síntese. Na fase de lançamento ou introdução da tarefa, o professor deixa claro o que é pedido, mas não indica uma estratégia de solução. Em seguida, os alunos passam para o trabalho autónomo, resolvendo a tarefa aos pares ou em grupo mais alargado, explorando e aplicando os seus conhecimentos para encontrar uma solução. Nesta fase, podem surgir várias estratégias que serão discutidas na fase seguinte. Por fim, o professor promove uma discussão sobre as estratégias mais interessantes que surgiram e toda turma se envolve nesta discussão. A aula termina com a síntese que o professor faz sobre as principais aprendizagens. Esta não é uma forma habitual de trabalho na sala de aula e comporta alguma novidade tanto para os professores como para os alunos. Investigações sobre esta abordagem apontam vantagens para a aprendizagem dos alunos (Oliveira et al., 2013; Ponte, 2005a; Ponte et al., 2012; Quaresma & Ponte, 2017; Viseu & Menezes, 2014). O ensino exploratório diferencia-se do ensino direto ou expositivo pelos papéis desenvolvidos pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são apresentadas e a forma como são administradas e pela forma como o professor guia a comunicação na aula (Oliveira et al., 2013). Por fim, temos os estudos de aula. É "um processo de desenvolvimento profissional de professores que se centra na sua prática letiva, assumindo uma natureza eminentemente reflexiva e colaborativa" (Ponte et al., 2016, p. 2). Os investigadores são unânimes em relação aos seus resultados positivos como processo formativo e seus benefícios na aprendizagem dos alunos (Larssen et al., 2018; Lorca et al., 2009; Perry & Lewis, 2009; Ponte, 2017). Diversos estudos indicam que é necessário compreender melhor a sua eficácia e os modos de organização em diferentes contextos (Fujii, 2014; Stigler & Hiebert, 1999; Takahashi & McDougal, 2016). Importa referir que o desenvolvimento profissional de professores tem sido amplamente estudado. Por exemplo, Marcelo (2009) define-o como "um processo individual ou coletivo que se deve concretizar no local de trabalho do docente: a escola; e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais, através de experiências de índole diferente, tanto formais como informais" (p. 1). As atividades de desenvolvimento profissional ajudam os professores a adquirir mais conhecimentos por meio da reflexão sobre a sua experiência. De acordo com Day (1999), é geralmente aceite que "a reflexão na, sobre e acerca da prática, é essencial para construir, manter e desenvolver ainda mais as capacidades dos professores para pensar e agir profissionalmente ao longo de suas carreiras" (p. 3).

Assim, importa refletir sobre as vias que possam promover nos professores reflexões sobre a sua prática letiva e contribuir para o desenvolvimento do seu conhecimento didático, fundamental para a sua prática profissional diária.

Opções metodológicas

A metodologia de investigação é de natureza qualitativa no paradigma interpretativo e na modalidade de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994).

A recolha de dados foi feita por meio da observação participante atuando como facilitadora nas sessões do estudo de aula e entrevistas semiestruturadas (inicial, intermédia e final). Para obter registos detalhados dos acontecimentos, fiz gravações áudio das entrevistas e de todas as sessões do estudo de aula e gravação de vídeo da aula de investigação. A entrevista inicial teve como objetivo identificar quais os conhecimentos que os professores tinham em relação aos tópicos do conhecimento didático que foram abordados. A entrevista intermédia visou compreender como os professores estavam a encarar o estudo de aula, visto que houve uma interrupção inesperada do ano letivo e tivemos de interromper temporariamente o estudo de aula. A entrevista final teve como objetivo colher informações dos professores sobre as suas opiniões e perceções sobre o estudo de aula. Todas as entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas com auxílio do Nvivo.

Este estudo decorreu em Angola, em momentos diferentes de dois anos letivos, isto é, começou no último trimestre do ano letivo de 2020/2021 (fevereiro/2021) e terminou no 1.º trimestre do ano letivo de 2021/2022 (dezembro/2021), devido à necessidade de contornar as limitações impostas pela situação de saúde pública na altura (COVID). Participaram professores do 1.º ciclo do ensino secundário angolano (7.ª, 8.ª e 9.ª classes), correspondente ao 3.º ciclo do ensino básico, em Portugal. O estudo de aula teve quatro participantes, três professores (Tiago, André e Bruno) e a investigadora que teve o papel de facilitadora das sessões de trabalho. Eram professores de diversas escolas e tinham contextos de trabalho distintos. Bruno lecionava no meio urbano e André e Tiago lecionavam no meio rural. O tempo de experiência de trabalho dos professores variava entre 8 a 12 anos. Os professores nunca tinham participado de um processo de desenvolvimento profissional, como o estudo de aula. Numa fase inicial, participaram ainda dois outros professores, mas não lhes foi possível continuar no estudo de aula até ao fim.

Estudo de aula

Este estudo de aula foi desenvolvido segundo o modelo de quatro fases (Fujii, 2014) que engloba: (i) definição dos objetivos, estudo do currículo e outros materiais, (ii) planeamento da aula de investigação, (iii) realização e observação da aula de investigação e (iv) reflexão sobre a aula. Tendo em conta as adaptações necessárias aos estudos de aula, fora do contexto originário, neste estudo foram necessárias várias adaptações, algumas relacionadas com o contexto angolano e outras decorrentes de limitações impostas pela situação de saúde pública, na altura. O estudo teve 17 sessões. Todas as sessões foram realizadas online uma vez que, na altura, a investigadora não se encontrava em Angola. No entanto, a aula de investigação foi presencial, lecionada por Bruno e observada pelos restantes professores, presencialmente, e por mim, via Zoom. Teve um número elevado de sessões porque os professores tinham dificuldades em aceder à Internet. Destaque-se que algumas sessões não atingiam os seus objetivos e era necessário continuar noutro momento. Também houve uma interrupção inesperada do ano letivo na fase em que o grupo estava a planear a aula de investigação. Tivemos de aguardar pelo retorno das aulas para continuar. Outra situação que nos impedia de avançar para a fase seguinte tinha a ver com a programação das aulas. Naquela altura, era feita quinzenalmente e sem a participação dos professores. Cabia, apenas, à coordenação de Matemática a nível da província. Os professores eram informados pelos seus coordenadores de escola sobre que temas deviam lecionar num período pré-estabelecido. Estas situações obrigaram-nos a prolongar a fase de estudo até que houvesse condições para escolher o tema para a aula e passar para a fase seguinte. Para o grupo não se dispersar, nestes períodos de espera, os professores levaram tarefas desafiantes para os seus alunos e partilharam as suas experiências durante as sessões. Assim, cada professor teve a possibilidade de apresentar tarefas que não eram habituais aos seus alunos e procuraram pôr em prática a abordagem exploratória nas suas turmas.

Resultados

Os resultados deste estudo são referentes às perspetivas dos professores sobre a abordagem exploratória e o estudo de aula. São reflexões e ideias que eles expressaram ao longo do processo.

Perspetivas dos professores sobre a abordagem exploratória

Quanto à abordagem exploratória, de um modo geral, os professores consideraram-na interessante, com potencialidades para a aprendizagem dos alunos, mas muito desafiadora para eles e para os alunos. Assim, em relação às potencialidades desta abordagem, Tiago disse:

> Eu gosto muito de tudo que temos estado aqui a abordar porquanto, esta maneira de trabalhar ou melhor, esta inovação no processo de ensino e aprendizagem… acaba sendo uma boa estratégia para qualquer professor inovador (sessão 4)

André também referiu o que achava sobre as potencialidades do ensino exploratório:

> Esta abordagem pode, sim, proporcionar momentos mais ricos para aprendizagem dos alunos, visto que lhes permite discutir e comunicar livremente as suas ideias de soluções, sem limitações, principalmente para aqueles mais tímidos e fechados (entrevista intermédia).

Esta visão dos professores indica que consideraram que o ensino exploratório dá abertura para o professor criar condições mais favoráveis para a aprendizagem dos seus alunos em Matemática, dá a possibilidade de os alunos apresentarem as respostas às tarefas que lhes são propostas e podem partilhar as suas ideias com os colegas e com o professor. Estes são aspetos importantes do processo de ensino e de aprendizagem que contribuem para a passagem de um ensino transmissivo para um processo de produção de conhecimento a partir do trabalho conjunto de alunos e professor, na sala de aula.

Independentemente de reconhecerem estes aspetos, de um modo geral, os professores também salientaram algumas fases, em particular, que viabilizavam determinadas ações.

Por exemplo, Tiago valorizou a fase do trabalho autónomo onde se concretiza a resolução do problema proposto e disse:

> A construção da resposta [resolução] da tarefa é para mim um momento "diferente" porquanto dá ao aluno a oportunidade de explorar o melhor que tem para chegar ao ponto desejado, isto sem dúvidas merece destaque (entrevista intermédia).

Isto indica que os professores valorizaram a possibilidade de dar um papel ativo aos alunos na resolução das tarefas, uma potencialidade da abordagem exploratória. Não obstante esta posição favorável à abordagem exploratória, os professores também tinham consciência de dificuldades, como mostraram durante a entrevista intermédia ao indicar o que consideravam como mais desafiador. Por exemplo, Bruno disse:

> Os aspectos desafiadores para mim é a maneira como está estruturado o ensino exploratório, ou seja, a sua análise e interpretação [das tarefas pelos alunos] (entrevista intermédia).

O professor parece referir-se às dificuldades dos alunos na interpretação dos enunciados. Por sua vez, André também comentou:

> Esta abordagem mostra-se bastante desafiadora para mim, por ser nova e exigente (entrevista intermédia).

Parece, assim, salientar a reorganização do modo de trabalho do professor que esta abordagem implica. E, por fim, Tiago disse:

> Para mim, sem dúvida é a preparação do próprio plano de aula, deixando a tarefa e o próprio conteúdo ao nível dos alunos (entrevista intermédia).

O professor sublinha as implicações desta abordagem na seleção das tarefas e na preparação da aula. Conhecer estas perspetivas dos professores foi muito útil para direcionar a fase que se seguiu à entrevista intermédia. Bruno, por ter estado ausente em algumas sessões em que tratamos do ensino exploratório, nesta fase mostrou ter muitas dúvidas, essencialmente como se podia aplicar este ensino na sala de aula. E, de facto, era uma abordagem nova para todos os professores, tal como confirmou André. Para Tiago, adequar a tarefa ao nível do aluno era um grande desafio. Em muitas ocasiões, mostrou receio de que os alunos não conseguissem resolver uma tarefa sem que lhes fosse indicado, explicitamente, o caminho.

Na entrevista final, Tiago valorizou muito o conhecimento que adquiriu sobre o ensino exploratório e disse:

> Fiz muitas aprendizagens, porque eu consegui entender uma maneira de ensinar Matemática de um jeito que, infelizmente, não me foi ensinado. Muitos de nós temos muitos problemas com a interpretação e resolução de problemas porque passamos por vários níveis de formação e eu nunca vi essaperspetiva de resolução de problemas, era só estudar Matemática de forma reprodutiva... Eu aprendi muito com este processo todo. A minha preocupaçãoagora é continuar a refletir muito e continuar a investigar um pouco mais sobreisso, de forma que eu me sinta confortável e seguro sempre que eu estiver emsala de aulas e aplicar este método exploratório (entrevista final).

Tiago fez uma reflexão de toda a sua experiência de formação e identifica a abordagem exploratória como uma inovação no processo de ensino e aprendizagem a que ele próprio nunca teve acesso, nem como aluno do ensino básico, nem mesmo na sua formação como professor. André também valorizou muito a aprendizagem que fez em relação ao ensino exploratório e comentou:

> Aprendi muito, principalmente questões ligadas ao ensino exploratório. Porque, para mim, foi uma novidade esta metodologia de ensino. Pude aprender muito e eu achei um ensino muito mais prático e interativo, porque exige muito mais do aluno do que do professor, me pareceu assim. Torna o ensino muito mais interativo e o aluno torna-se o centro. Este ensino vem neste sentido (entrevista final).

André também interpretou o ensino exploratório como uma inovação no processo de ensino e aprendizagem onde é dado um papel mais ativo aos alunos.

Assim, os professores consideraram a abordagem exploratória interessante e apontam potencialidades para a aprendizagem dos alunos e melhor interação entre os alunos e entre os professores e os alunos. Mas também consideram esta abordagem desafiadora tanto para professores como para alunos.

Perspetivas dos professores sobre o estudo de aula

Os professores participantes, não obstante os desafios que a participação no estudo de aula impôs à sua rotina, vivenciaram um processo formativo novo e uma forma diferente de conduzir tarefas em sala de aula e consideraram ter vivido uma experiência muito gratificante. Em seus depoimentos, relataram terem feito aprendizagens sobre este processo formativo. Bruno disse:

> Esta interação que temos tido é que nos fez pensar e levar os alunos a trabalharem em certos problemas... Nós entendemos que precisamos aprofundar mais e criar no próprio aluno esta habilidade (reflexão pós-aula)

A interação com os outros professores fez-lhe pensar na aplicação de problemas e reconheceu a necessidade de obter mais conhecimento sobre a resolução de problemas. Também reconheceu que o professor tem a responsabilidade de ajudar o aluno a adquirir esta habilidade:

> Primeiro, é que foi uma grande novidade para mim falar de estudo de aula, nunca tinha ouvido falar de um estudo de aula. Depois, também destaco o ensino exploratório, quando é que estamos diante de um ensino exploratório e de um ensino tradicional, diferenciar os dois. Foi uma série de aprendizagens que para mim vai valer para sempre (Bruno, entrevista final)

Para estes professores, o estudo de aula foi uma novidade e trouxe muitas aprendizagens. Todos eles destacam que o ensino exploratório foi o que mais os surpreendeu, sendo uma forma de ensinar diferente do que lhes era habitual.

Os professores também valorizaram a colaboração que experienciaram no estudo de aula.A este respeito, Bruno disse:

> Foi muito interessante, principalmente quando a professora [investigadora e facilitadora] nos deixava algumas questões para podermos investigar, muitas vezes eram desafiantes para nós, mas na qualidade de professores, precisávamos aprofundar para ver se encontrávamos a solução, mas no momento da discussão onde cada um dava o seu parecer, isto era favorável, essa partilha fez com que pudéssemos encontrar soluções conjuntas. A partilha de ideias permitiu abrir a mente para alguns aspetos (entrevista final).

Assim, a partilha de ideias permitiu um despertar dos professores para encontrar soluções para os desafios que lhes eram propostos. O facto de trabalharem em conjunto foi valorizado. Tiago também fez uma apreciação positiva do processo em si e manifestou que seria interessante se mais professores pudessem ter este tipo de experiência:

> A minha apreciação é positiva, que o processo não pare por aqui e recomendamos esta maneira de trabalhar para as pessoas que não tiveram a chance de trabalhar a temática conforme nós a vimos (entrevista final).

Os professores também reconheceram que existem aspetos do seu desempenho profissional que podem ter mudado com a sua participação no estudo de aula:

> De agora em diante vou mesmo começar a aplicar este método e estas tarefas para ver se os meus alunos têm uma mente mais aberta (Bruno, entrevista final).

Por sua vez, André referiu:

> Já lá se vai algum tempo que a gente terminou a licenciatura e falamos mais de números, então este processo vem para acrescer aspetos didáticos importantes (entrevista final).

Assim, é de registar este reconhecimento de realização de aprendizagens durante o estudo de aula e a vontade de melhorar a abordagem que levam para as suas aulas. Com base nos seus depoimentos, verificamos que o estudo de aula contribuiu positivamente para o desenvolvimento profissional dos professores participantes.

Conclusão

Com base nos resultados apresentados, concluímos que o estudo de aula decorreu sob condições muito adversas em relação ao esperado. Foi necessário adaptar o modo como se desenvolveram as sessões de presencial para online. Outra adaptação importante consistiu em os professores levarem tarefas desafiantes para os seus alunos e partilharem os seus resultados nas sessões. Esta atividade permitiu aos professores conhecerem como os seus alunos lidam com tarefas desafiantes e terem consciência das suas necessidades de aprendizagem.

A abordagem exploratória mostrou ser nova para os professores, que a encararam como interessante. Reconhecem a abordagem exploratória como uma abordagem que pode promover melhores resultados na aprendizagem dos alunos. Também notaram que esta abordagem valoriza o conhecimento prévio dos alunos. Estas vantagens da abordagem exploratória estão de acordo com o que dizem Ponte et al. (2012), Quaresma e Ponte (2017) e Viseu e Menezes (2014). Assinalaram desafios que esta abordagem representa tanto para os professores como para os alunos, mas apontaram vantagens para a aprendizagem dos alunos.

Quanto ao estudo de aula, os professores consideraram como um processo formativo eficaz e benéfico para a aquisição de conhecimentos didáticos importantes o que está de acordo com Hourigan e Leavy (2019), que afirmam que o processo formativo só pode ser considerado eficaz se assim o considerarem os participantes. Os professores valorizaram as reflexões e a colaboração entre colegas que o processo formativo permite, este é um aspeto valorizado em estudos de aula (Richit et al., 2021). O estudo de aula foi uma oportunidade para refletirem sobre a sua prática (Day, 1999). Expressaram a necessidade de melhorar a sua abordagem em sala de aula e aprofundar os conhecimentos adquiridos de forma a estarem confiantes. Tendo em atenção o que indica Guskey (2002), podemos considerar esta experiência como bem-sucedida porque de alguma forma contribuiu para a alguma mudança nas atitudes e crenças dos professores.

Este estudo constitui uma primeira experiência de estudo de aula no contexto angolano e careceu de muitas adaptações, principalmente por causa do contexto de saúde pública que se vivia naquela altura. Pode servir de referência para próximos estudos. É recomendável que mais estudos sejam feitos e de forma presencial, para que se aprofunde os efeitos deste processo no desenvolvimento profissional dos professores de Matemática neste país. Também se recomenda ao Ministério da Educação e outras instituições afins, que promovam mais acesso aos processos de desenvolvimento profissional de professores deMatemática.

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em educação. *Porto Editora*.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas Matemáticas. In *Investigaçõesem Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99–104).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determiningspecialised knowledge for mathematics teaching. *Proceedings of the VIII Congressof the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, *December 2014*, 2985–2294. http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf

Day, C. (1999). Professional development and reflective practice: Purposes, processesand partnerships. *Pedagogy, Culture and Society*, *7*(2), 221–233. https://doi.org/10.1080/14681366.1999.11090864

Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(1), 65–83.

Guskey, T. R. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers andTeaching: Theory and Practice*, *8*(3), 381–391. https://doi.org/10.1080/135406002100000512

Hourigan, M., & Leavy, A. M. (2019). Learning from teaching: pre-service primaryteachers' perceived learning from engaging in formal Lesson Study. *Irish*

Educational Studies, *0*(0), 1–26. https://doi.org/10.1080/03323315.2019.1613252

Isoda, M., Arcavi, A., & Lorca, A., (2007). El estudio de clases japonés enperspectiva. In *Colección Digital Eudoxus*. http://www.optimaeducacion.cl/intranet/temp/039552996.pdf

Larssen, D. L. S., Cajkler, W., Mosvold, R., Bjuland, R., Helgevold, N., Fauskanger, J.,Wood, P., Baldry, F., Jakobsen, A., Bugge, H. E., Næsheim-Bjørkvik, G., &

Norton, J. (2018). A literature review of lesson study in initial teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *7*(1), 8–22.https://doi.org/10.1108/IJLLS-06-2017-0030

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. *Sífiso*, *8*,7–22. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.13i2.0001

Murata, A., Bofferding, L., Pothen, B. E., Taylor, M. W., & Wischnia, S. (2012). Making connections among student learning, content, and teaching: Teacher talkpaths in elementary mathematics lesson study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 616. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0616

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclopara a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *XXII*(2).

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in theU.S.? *Journal of Educational Chenge*, *10*(4), 365–391.

Ponte, J. P. (2005a). A formação do professor de Matemática: Passado, presente efuturo. *Encontro Internacional Em Homenagem a Paulo Abrantes*, 267–284.http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3169/1/05-Ponte %28Conf P- Abrantes%29.pdf

Ponte, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. *O Professor e o Desenvolvimento Curricular O Professor e o Desenvolvimento Curricular*, 11–34.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.). In Graó (Ed.), *Teoría, crítica ypráctica de la educación matemática* (Issue 2012, pp. 83–98).

Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *6*(2), 169–181. https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016-0021

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. In *Avances de Investigación en Educación Matemática*.http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/460596.PDF

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). Estudos de aulacomo processo de desenvolvimento profissional de professores de Matemática.*Bolema*, *30*(56), 868–891.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2017). Dinâmicas de aprendizagem de professores deMatemática no diagnóstico dos conhecimentos dos alunos num estudo de aula.*Quadrante*, *XXVI*(2), 43–68.

Richit, A., Tomasi, A. P., & Melo, M. V. (2021). *Colaboração Profissional Docente emum Estudo de Aula no Contexto Brasileiro*. *14*(4), 415–425.
https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n4p415-425

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching foundations of the new reform.

Harvard Educational Review, *57*(1), 1–22. https://doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v4i2.293

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's

teachers for improving education in the classroom. *Journal of Curriculum Studies*,*32*(6), 867–874. https://doi.org/10.1080/00220270050167215

Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing theimpact of lesson study. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(4), 513–526.
https://doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x

Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de umafutura professora de matemática do 3.º ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *17*(3), 347–375. https://doi.org/10.12802/relime.13.1734

Incentivar mudanças nas práticas letivas através do estudo de aula

Encourage changes in teaching practices through lesson study

Alexandra Souza[1], *Margarida Rodrigues*[2], *João Pedro da Ponte*[3]

[1]UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, paralexandra@gmail.com
[2]CIED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *A partir da análise de um estudo de aula com professores de uma escola de Lisboa, procurámos identificar aspetos relevantes deste processo formativo que podem promover o desenvolvimento profissional dos professores e conduzir a mudanças na prática letiva. A investigação inserese no paradigma interpretativo e segue uma abordagem qualitativa. Os participantes são sete professores do 1.º ciclo e a primeira autora, que dinamizou o estudo de aula. Os dados foram recolhidos por observação participante, com a elaboração de um diário de bordo, recolha documental e gravação áudio das sessões de trabalho e vídeo da aula observada. Os resultados mostram que os participantes desenvolveram trabalho colaborativo sobre o currículo, tarefas, planificação e condução de aulas numa abordagem exploratória e a reflexão sobre todo o processo, com foco nas aprendizagens dos alunos. Mostram ainda que as práticas de ensino exploratório e a utilização de tecnologias podem favorecer a aprendizagem matemática dos alunos. Esta investigação também mostra que o estudo de aula contribuiu para aprendizagens dos professores envolvidos e que pode encorajar mudanças nas suas práticas letivas e nas crenças relacionadas com a aprendizagem dos alunos.*

Abstract. *Based on the analysis of a lesson study with teachers from a school in Lisbon, we sought to identify relevant aspects of this formative process, which can promote teachers' professional development and lead to changes in teaching practice. The investigation follows the interpretative paradigm and a qualitative approach. Participants are seven teachers of grades 1-4 and the first author, who facilitated the lesson study. Data was collected through participant observation, with the preparation of a logbook, document collection and audio recording of the sessions and video of the research lesson. The results show that the participants developed collaborative work on curriculum, tasks, lesson planning and conducting exploratory lessons and reflection on the whole process focusing on students' learning. The results also show that valuing exploratory teaching practices and the use of technologies can be an effective strategy to promote students' mathematical learning.*

This investigation also shows that the lesson study contributed to the learning of the teachers involved and that it can encourage changes in their teaching practice and in their beliefs about student learning.

Palavras-chave: *Estudo de aula; Desenvolvimento profissional; Prática de ensino*

Keywords: Lesson study; Professional development; Teaching practice

Introdução

Está em curso uma reforma curricular na área da Matemática (Canavarro et al., 2021), tornando-se necessário que os professores compreendam as mudanças preconizadas e se apropriem delas, para que possam adequar as suas práticas, se sintam motivados e dispostos a fazê-las, e possam ser apoiados na sua implementação. Face a este desafio que se coloca aos professores, o estudo de aula, enquanto processo de desenvolvimento profissional de professores, de natureza colaborativa e reflexiva, assente na prática letiva e com foco nas aprendizagens dos alunos (Fujii, 2016), pode contribuir para promover uma reflexão em torno desta prática e dos ambientes de aprendizagem. Pode, também, criar condições para a realização de mudanças refletidas no trabalho em sala de aula, designadamente a concretização de uma prática de ensino exploratório (Canavarro, 2011) e a utilização de tecnologias, para promover a aprendizagem matemática dos alunos. Neste sentido, a partir de um estudo de aula em que se levaram à prática tarefas matemáticas numa abordagem exploratória, procuramos identificar aspetos relevantes deste processo formativo que podem promover o desenvolvimento profissional dos professores e conduzir a mudanças na prática letiva. Aqui, em particular, focamo-nos num ciclo de estudo de aula em que se decidiu propor uma tarefa em Scratch no âmbito da Geometria, a alunos do 3.º ano.

O estudo de aula como promotor de ambientes de aprendizagem que valorizam a tecnologia

Com origem no Japão, o estudo de aula tem vindo a ganhar popularidade entre os professores de vários países, incluindo Portugal, como processo de desenvolvimento profissional, que visa melhorar o ensino e a aprendizagem dos alunos. É desenvolvido em contexto escolar e tem uma forte componente de natureza reflexiva e colaborativa.

O estudo de aula parte de uma questão relevante relacionada com as aprendizagens dos alunos, que os professores identificam para aprofundar. A partir desta análise, o trabalho desenvolve-se com o estudo curricular do tópico matemático ou capacidade a desenvolver, conduzindo à escolha da tarefa a propor. Depois, uma aula de investigação é preparada colaborativamente com o objetivo de desenvolver experiências de aprendizagem significativas que respondam às necessidades dos alunos. A aula é lecionada por um dos professores e observada pelos restantes e todos refletem em conjunto sobre a sua eficácia para a questão identificada. Estas etapas interrelacionadas – planificação, lecionação/observação e reflexão sobre a aula de investigação – constituem um ciclo, podendo haver um único ou vários ciclos (Lewis et al., 2009). Cada ciclo oferece oportunidades para os envolvidos aprofundarem questões relevantes em relação aos conteúdos de ensino, às orientações curriculares, aos processos de aprendizagem dos alunos e à dinâmica da sala de aula (Ponte et al., 2016), podendo contribuir para inovações na prática letiva, melhorando os resultados de aprendizagem dos alunos. Conforme relatado por Ni Shuilleabhain e Seery (2018), parece relevante participar em vários ciclos de estudo de aula sucessivos, pois, não só reforça a confiança dos participantes para introduzirem mudanças na sua prática letiva, como permite que observem os resultados dessas mudanças.

Lewis e Tsuchida (1997), Lewis et al., (2009) e Ponte et al., (2016) mostram que a participação em estudos de aula propicia a partilha de ideias e troca de experiências sobre as aprendizagens dos alunos, fomentando discussões e reflexões que ajudam os professores a compreender melhor os processos de ensino e aprendizagem dos alunos e a tomar decisões informadas, com vista à melhoria da eficácia do ensino. Esta participação coloca os professores no centro da atividade profissional e as partilhas e reflexões, sobre aspetos do conhecimento didático, impactam as suas crenças e conceções sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos e podem conduzir a mudanças refletidas nas práticas letivas.

Contudo, esta tomada de decisões, que pode levar a inovações nas práticas de ensino, é muito exigente e requer decisões fundamentadas no conhecimento profissional dos professores, beneficiando da motivação dos envolvidos, de experiências bem-sucedidas, alterações curriculares e, sobretudo, de mudanças nos resultados de aprendizagem dos alunos. Ora, estando em curso uma reforma curricular (Canavarro et al., 2021), que perspetiva o aluno como agente ativo na construção do seu conhecimento, dentro de uma "comunidade de aprendizagem" (p. 6), torna-se necessário que os professores compreendam e se apropriem destas alterações, para adequar as suas práticas, e se sintam apoiados a pô-las em prática.

Um ensino em que os alunos têm um papel central e em que são chamados a realizar de forma participativa "uma parte importante de descoberta e construção do conhecimento" (Ponte, 2005, p. 13) enquadra-se nas práticas de ensino exploratório (Canavarro, 2011) em que a aprendizagem dos alunos decorre do trabalho que realizam a partir de tarefas ricas e desafiantes. As tarefas com estas características são aquelas que apresentam um grau de desafio ao alcance dos alunos, mas que os estimulam a ir mais além, ou seja, em que os alunos têm de mobilizar os seus conhecimentos para apresentarem soluções válidas, fazendo uso de diferentes estratégias e representações matemáticas. Podemos dizer que é uma prática exigente e complexa na qual é determinante a escolha de tarefas apropriadas, mas também o que se faz com elas (Ponte, 2005), sobretudo a exploração das suas potencialidades num ambiente promotor da comunicação, que desenvolva as capacidades dos alunos de questionar, explicar e argumentar.

Considerando que a escolha de tarefas é determinante para potenciar experiências matematicamente ricas do ponto de vista da aprendizagem dos alunos, e que algumas beneficiam do uso de tecnologia e de ambientes de programação visual, é importante ponderar a sua integração quando esta representa um contributo para a aprendizagem ou para ambientes estimulantes. Neste sentido, o Scratch, enquanto linguagem de programação visual muito apelativa para os alunos, pode ser uma ferramenta poderosa para favorecer a aprendizagem matemática dos alunos, de forma lúdica e criativa. Ao criar projetos em Scratch que explorem conceitos matemáticos, os alunos podem desenvolver a sua competência digital e algumas capacidades matemáticas transversais, enquanto aprendem matemática de forma lúdica e interativa. Esta ferramenta tem ainda a vantagem de permitir que os alunos compartilhem os seus projetos, incentivando-os a colaborar e trocar ideias. A exploração de projetos de outros alunos também pode ser inspiradora para aperfeiçoarem os seus próprios projetos ou para criarem projetos novos, desenvolvendo várias competências transversais.

Assim, e tendo em conta que é através das tarefas que a experiência matemática dos alunos se desenrola, quando queremos fazer uso de ambientes de programação visual para promover a aprendizagem dos alunos, torna-se imprescindível selecionar, criar de raiz ou adaptar tarefas, que sejam ricas e desafiantes, e permitam, simultaneamente, trabalhar conhecimentos matemáticos e desenvolver as capacidades matemáticas transversais.

Metodologia de investigação

Esta investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), tem por base a realização de um estudo de aula numa escola do 1.º ciclo de Lisboa, no ano letivo de 2022-2023, em que participam voluntariamente sete professores. Destes, quatro lecionam turmas do 3.º ano, uma leciona uma turma do 1.º ano e as outras duas fazem apoio a estas turmas e participam pela primeira vez num estudo de aula. As sessões foram preparadas e conduzidas pela primeira autora deste artigo. A investigação foi autorizada pela direção do Agrupamento e os participantes consentiram a gravação de todas as sessões. Os professores que integraram este estudo de aula, e a quem atribuímos pseudónimos, são considerados experientes, com 18 ou mais anos de serviço docente.

Os dados apresentados neste artigo referem-se ao ciclo em que esta aula de investigação foi lecionada e foram recolhidos por observação participante com elaboração de um diário de bordo, gravação áudio das sessões de trabalho colaborativo dos professores e vídeo da aula de investigação, com a transcrição das partes relevantes e recolha documental. Atendendo ao objetivo desta comunicação, a análise de dados incidiu sobre aspetos relevantes do estudo de aula como processo de formação, em que se procurou identificar elementos relacionados com a prática de ensino exploratório ou a valorização da tecnologia em sala de aula.

O estudo de aula

Considerando que a maioria dos participantes já tinham participado num estudo de aula com a investigadora, e que, por esta razão, já existia trabalho realizado e uma confiança estabelecida, o estudo de aula fluiu com naturalidade. Ao todo realizaram-se sete aulas de investigação, cada uma conduzida por um professor diferente. O ciclo que descrevemos nesta comunicação refere-se a uma aula de investigação com uma turma do 3.º ano, a primeira em que se assumiu que se ia propor uma tarefa com a utilização do Scratch. A professora que conduziu a aula sentia-se confortável a usar tecnologia em sala de aula. Embora estes alunos já estivessem habituados a usar o Scratch, faziam-no para animação de histórias, em aulas dinamizadas por outra professora do agrupamento.

Planeamento da aula de investigação

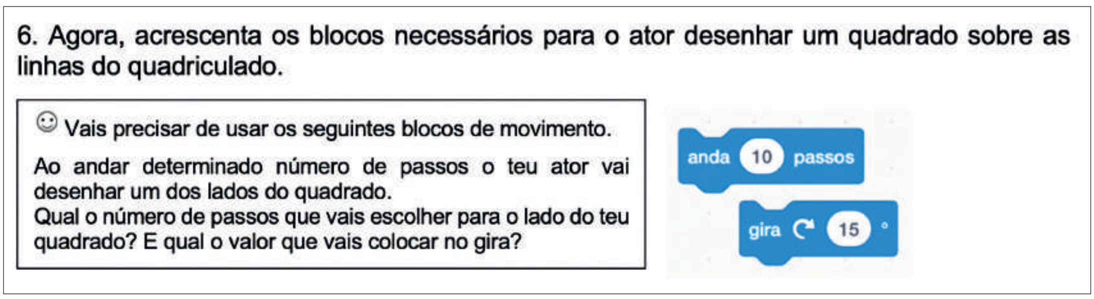
Até ao momento, estes professores não tinham experiência de propor, por iniciativa própria, tarefas matemáticas que fizessem o uso do Scratch e embora existisse vontade para experimentar, persistiam algumas reservas, motivadas pelos desafios no uso do computador em sala de aula, nomeadamente o tempo gasto a organizar toda a turma para começar a trabalhar.

Assim, na fase inicial da planificação da aula de investigação os professores procuraram aprofundar o seu conhecimento sobre o pensamento computacional e o uso do Scratch para promover a aprendizagem dos alunos. Também analisaram as orientações curriculares, em busca de sugestões de utilização do Scratch e pesquisaram tarefas que as pudessem concretizar. Estas tarefas ajudaram o grupo a compreender como podiam tirar partido de um ambiente de programação visual por blocos para promover a aprendizagem matemática e desenvolver e mobilizar o pensamento computacional, reforçando a ligação entre a prática e os documentos reguladores.

A escolha do grupo acabou por recair numa tarefa no âmbito da Geometria em que era proposto aos alunos construírem um quadrado de acordo com as indicações fornecidas. Segundo disseram, os alunos podiam explorar a noção de ângulo reto de forma interativa e visual, o que podia ser uma mais-valia para a sua compreensão das propriedades do quadrado. Selecionada a tarefa (Anexo 1), o grupo analisou-a considerando os alunos a quem ia ser proposta e introduziu-lhe as necessárias adaptações.

A tarefa foi subdividida em várias partes, de acordo com o grau de participação dos alunos (mais estruturado ou mais autónomo) e o tempo de execução expectável, constituindo uma sequência no seu todo. Ainda que estes alunos já tivessem alguma experiência de trabalhar em Scratch, assumiu-se que era necessário estruturar a fase inicial, assegurando condições idênticas para que os alunos conseguissem construir com sucesso o projeto.

A segunda parte da tarefa, aquela em que os alunos seriam desafiados a mobilizar os seus conhecimentos para conseguirem construir um quadrado em Scratch (Figura 1), já trazia alguma imprevisibilidade quanto ao tempo necessário para alcançarem este objetivo.


6. Agora, acrescenta os blocos necessários para o ator desenhar um quadrado sobre as linhas do quadriculado.

☺ Vais precisar de usar os seguintes blocos de movimento.

Ao andar determinado número de passos o teu ator vai desenhar um dos lados do quadrado.
Qual o número de passos que vais escolher para o lado do teu quadrado? E qual o valor que vais colocar no gira?

Figura 1. Segunda parte da proposta inicial para a tarefa da Aula de Investigação.

Por fim, os alunos eram convidados a testarem o seu projeto e a procurarem soluções diferentes, nomeadamente otimizando as instruções para a construção do quadrado através do recurso a um bloco de repetição que permitia fazer essa redução (Figura 2).

7. Clica na bandeira verde e verifica se o teu ator desenha um quadrado.

7.1 Se desenhou um quadrado, revê o teu projeto e procura se existe outra solução possível.

7.2 Se não desenhou um quadrado, procura onde podes melhorar o teu projeto e faz as correções necessárias.

Compara o teu quadrado com o dos teus colegas.

Compara os códigos que inseriram e descobre o que há em comum e o que há diferente nos vários quadrados que foram desenhados.

8. Discutam se é possível outra solução que possa envolver a utilização de um número menor de blocos.

Figura 2. Terceira parte da proposta inicial para a tarefa da Aula de Investigação.

A tarefa foi testada pelos professores que a realizaram nos respetivos computadores. Procurou-se detetar possíveis dificuldades dos alunos, identificar melhorias que pudessem ser introduzidas e estimar o tempo necessário para a sua realização. Após esta experiência, foram sugeridas algumas simplificações, que não diminuíam o nível de desafio da tarefa e permitiam reduzir o tempo de execução.

Antecipando que a realização da tarefa podia ser mais rápida do que se pensava, a investigadora propôs uma extensão (Figura 3), a qual podia vir a ser apresentada se houvesse tempo ou trabalhada numa outra aula. A sugestão levava os alunos a estabelecerem relações entre figuras com características em comum: quadrado e retângulo, e pretendia levá-los a compreender porque é que o quadrado é um caso especial do retângulo.

9. E se fosse um retângulo, o que farias diferente? Demonstra.

10. Introduz a programação necessária para o teu ator desenhar um retângulo com um perímetro com 20 unidades de medida de comprimento (Considera o lado do quadrado como unidade de medida). Revê o projeto para corrigir erros que possam existir ou melhorar o projeto.

Figura 3. Extensão proposta para a tarefa da Aula de Investigação.

Na sessão seguinte elaborou-se o plano de aula detalhado e, ainda que tenham persistido algumas incertezas quanto às competências dos alunos em Scratch e a sua capacidade para mobilizar os seus conhecimentos matemáticos para resolverem a tarefa, a grande dúvida foi relativamente ao tempo necessário para que os alunos a conseguissem realizar e sistematizassem as aprendizagens emergentes. Face a esta situação e tal como pensado, decidiu-se que a aula teria um tempo normal de 60 minutos, que podia ser alargado até um máximo de 90 minutos e que, na pior das hipóteses, a tarefa seria realizada em duas aulas. Algumas decisões importantes também foram tomadas: a tarefa ia ser projetada, os alunos iam resolver todas as questões no computador e as apresentações seriam feitas a partir do compartilhamento e da projeção dos computadores individuais, ainda que os alunos pudessem estar junto à tela de projeção para apoiarem a sua apresentação. Também se decidiu que a primeira parte da tarefa, em que os alunos apenas necessitavam de seguir as instruções, seria feita em conjunto, garantindo que todos realizavam estes procedimentos. As restantes partes da realização da tarefa seguiriam as etapas da abordagem exploratória.

A aula de investigação

Estiveram presentes 23 alunos, cada um com o seu computador. Antes do início da aula, os computadores foram ligados, testadas as baterias e as ligações à internet. Os alunos foram estrategicamente sentados de modo a formarem grupos equilibrados, tendo em conta a sua maturidade intelectual e competência digital, e, embora cada um trabalhasse no seu computador, podiam interagir uns com os outros, dentro dos grupos.

A professora que conduziu a aula usou uma aplicação para apresentar a tarefa que projetou. Tal como planeado, a primeira parte foi feita coletivamente e os grupos iniciaram o trabalho autónomo a partir da questão 6. Apoiaram-se na resolução dos pequenos obstáculos e estavam muito entusiasmados. Observaram-se destrezas diferentes, que se refletiram no ritmo de progressão dos alunos. Contudo, a rapidez com que encontraram soluções válidas para a questão foi muito superior ao antecipado. Esta situação levou a que depressa se passasse para a apresentação e discussão das estratégias de construção do projeto, permitindo avançar para a sistematização.

A professora escolheu dois projetos, valorizando em cada um aspetos diferentes. No primeiro caso (Figura 4) questionou o aluno sobre como tinham chegado à medida do lado do quadrado, ao que este respondeu: "O cenário diz que 30 passos é uma quadrícula e nós fomos usar os múltiplos de 30 para andar os passos. Nós metemos 150, que é um múltiplo de 30, para andar 5 passos." A resposta do aluno evidenciou a sua capacidade para comunicar as suas ideias de forma clara, fazendo uso de linguagem matemática e demonstrando capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos.

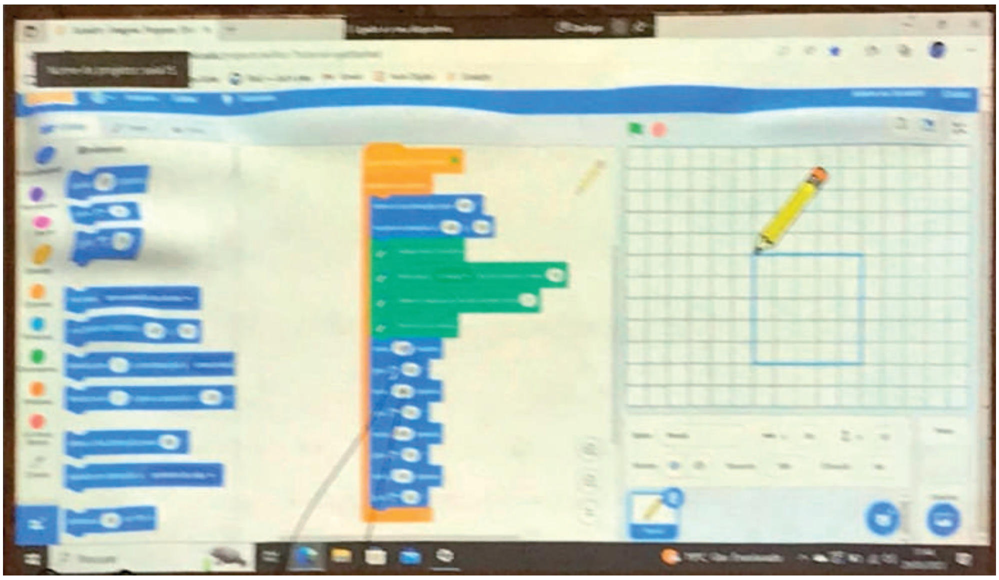


Figura 4. Apresentação de um projeto em Scratch para construção do quadrado.

Quando perguntou sobre a razão por que repetiram as duas instruções [número de passos e medida do gira] quatro vezes, este respondeu: "Porque são quatro lados iguais.", permitindo pôr em evidência as propriedades do quadrado e a existência de um padrão que se repete.

O outro projeto apresentado (Figura 5) demonstrou como era possível otimizar as instruções, pondo um bloco de "controlo" para diminuir o número de blocos usados, aspeto valorizado pela professora, que também questionou a apresentadora sobre a razão do seu quadrado sair do quadriculado, ao que esta respondeu que era por terem escolhido "100 passos".

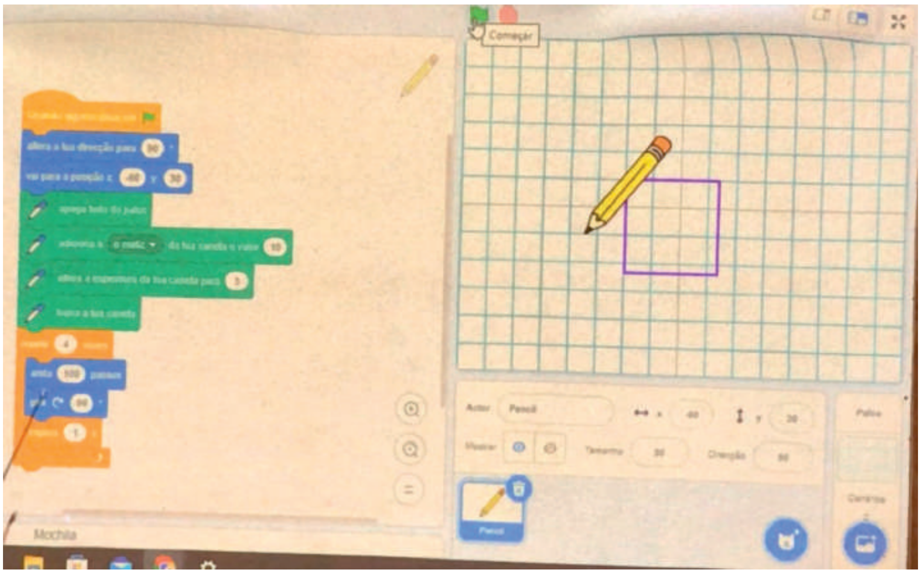


Figura 5. Apresentação do segundo projeto em Scratch para construção do quadrado.

Desafiada a encontrar uma solução válida, a aluna respondeu que: "tinha de ser um número que fosse múltiplo de 30."

Considerando o tempo disponível, a professora avançou com a extensão da tarefa e projetou as novas questões. Os alunos voltaram ao trabalho autónomo em pequeno grupo. No momento da apresentação, a professora elegeu dois projetos que se distinguiam pela estratégia usada pelos grupos e pela dimensão dos retângulos. No primeiro projeto (Figura 6), as alunas construíram o retângulo com uma estratégia definida para a medida dos lados, a qual foi explicada pela aluna que apresentou o projeto:

> Aluna: Como tinha de ser 20 de perímetro e nós queríamos que tivesse 2 quadrados aqui do lado (apontando) e como há dois lados laterais, nós fizemos 20−4=16. E depois, tínhamos de fazer 16:2 para ver quantos é que ficavam aqui e ficavam 8. E depois fizemos o 8x30=240 e depois girávamos 90º para fazer o ângulo. Depois para fazer o outro lado eram 60 passos porque 2x30=60.

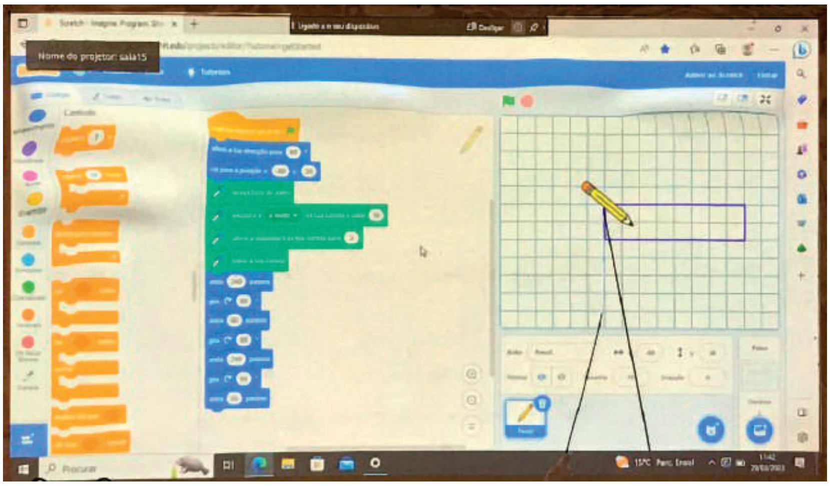


Figura 6. Apresentação do primeiro projeto em Scratch para construção do retângulo.

No segundo projeto, (Figura 7) o grupo mobilizou aprendizagens realizadas e otimizou a resolução apresentada.

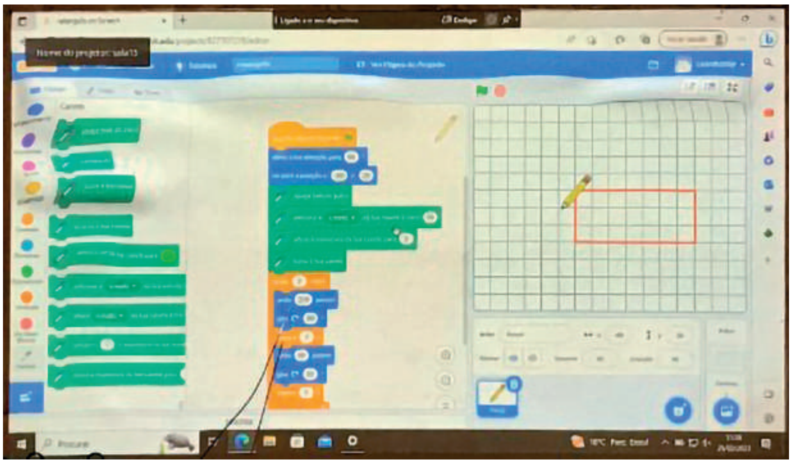


Figura 7. Apresentação do segundo projeto em Scratch para construção do retângulo.

Antecipando que nenhum grupo apresentasse o quadrado de 5x5 como uma solução válida, a professora preparou um slide (Figura 8) com todas as soluções possíveis e projetou-o, desencadeando a discussão.

Professora: Está ali uma figura que eu pergunto se alguém desenhou?
Alunos: ... [Hesitantes, não responderam.]
Professora: Que figura é aquela?
Alunos: É um quadrado.
Professora: Não é um retângulo?
Alunos: ... [Hesitantes] É... É... É...
Professora: É um retângulo?
Rodrigo: Não é!
Professora: É ou não é?

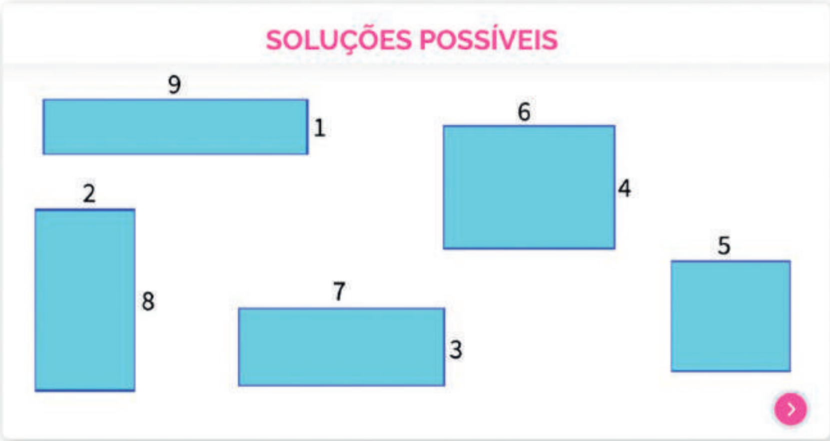


Figura 8. Slide projetado com as soluções possíveis para a questão 10.

A discussão gerada levou à identificação das características destes dois quadriláteros e a compreender que a igualdade na medida dos lados do quadrado é a propriedade que o diferencia do retângulo, o que faz desta figura geométrica um caso especial do retângulo.
Feita a sistematização das aprendizagens, a professora deu por concluída a aula de investigação. Contudo, como o tempo gasto foi inferior ao máximo previsto (90 minutos), desafiou os alunos para um novo projeto em Scratch. A reação foi eufórica.

Reflexão pós-aula

Após a aula de investigação, o grupo reuniu e refletiu sobre o que observou, em particular o desempenho dos alunos e a forma como decorreu a aula. Foi consensual que os alunos estiveram sempre muito motivados e envolvidos com a tarefa e que foram muito rápidos a resolver os desafios.
Elisa, a professora que conduziu a aula manifestou a sua satisfação pela forma como decorreu a aula, em particular pelo modo como os alunos se empenharam e pelas conquistas que fizeram. "Eu senti que a tarefa foi muito interessante para eles. (...) Achei que subi um pouco a fasquia no Scratch. Até achei que a tarefa foi fácil." E justificou: "Foi acessível a todos. Eu tinha a preocupação que alguns alunos pudessem ficar distantes dos outros, a nível de execução. Acho que os grupos funcionaram muito bem, de forma equilibrada. E conseguiram apresentar projetos diferentes."
Bela, uma das professoras que participou pela primeira vez, quase a atropelou para acentuar: "Eu gostei muito. Achei que a projeção da tarefa foi uma boa escolha, cativouos, e também gostei de observar a forma como eles [os alunos] se deram à tarefa. Achei excelente a forma como comunicaram."
Bruna, outra professora, valorizou a destreza dos alunos com a tecnologia e salientou a ligação que estabeleceram com as aprendizagens anteriores. Enfatizou o uso de tecnologia neste tópico e o trabalho em equipa como estratégias que facilitam a aprendizagem.

Bela voltou a intervir, referindo que "gostou de ver os alunos a aproveitarem as estratégias usadas por uns [otimização das estratégias] para depois resolverem o que vinha a seguir. (...) Quer dizer que [os alunos] estão atentos e estão abertos a formas mais eficientes de resolver."

Elisa comentou que "uma mais-valia desta abordagem [exploratória] tem sido essa; através da observação da estratégia do outro, eles conseguem perceber que pode ser uma estratégia facilitadora no futuro e vão utilizá-la. E nós vemos que resulta."

Bruna, acrescentou que "é evidente o à vontade com que os alunos vão ao quadro e comunicam as suas ideias, mesmo que tenham a sala cheia de gente. Ganharam desenvoltura!"

Elisa, reforçou: "A formação [estudo de aula] veio ajudar-nos nesse sentido. Eles [os alunos] ganharam maturidade (..) e procuram caminhos, explicam como sabem, e é muito positivo ver que estão à vontade. A comunicação melhorou substancialmente!"

Maria também realçou o "à vontade com que usaram o Scratch" e destacou a entreajuda observada, que contribuiu para a "boa dinâmica do trabalho".

Sandro ressalvou "toda a fluidez da aula", desde "a forma como a tarefa foi apresentada, ao trabalho dos alunos, à projeção dos projetos dos alunos, que reduziu o tempo de espera" e culminou com a síntese final, em que "ela [a professora que conduziu a aula] sistematizou todas as aprendizagens num slide, que projetou."

Xana, a outra professora que participa pela primeira vez, enfatizou o suporte visual como uma mais-valia, o facto de "estar projetado permite ganhar tempo e dá outra visibilidade às resoluções". Referiu também que para ela "o poder assistir às aulas e ver como os alunos resolvem as tarefas e como apresentam e justificam, tem sido muito interessante", reforçando que "eu aprendo quando vejo!".

Por fim, a investigadora elencou os aspetos que mais valorizou: "por um lado, o tempo que levaram a concretizar os desafios e o à-vontade a usarem o Scratch, por outro, o conseguirem mobilizar aprendizagens que fizeram noutros contextos e a forma como explicaram os seus processos de raciocínio" e que ilustrou com o visionamento de pequenos vídeos da aula de investigação. Embora o desenvolvimento do pensamento computacional não fosse o foco da tarefa, este esteve subjacente à sua realização e a investigadora aproveitou a ocasião para enfatizar esta ligação e envolver o grupo na identificação das práticas associadas a esta capacidade.

Conclusão

Do ponto de vista da aprendizagem dos alunos, os professores participantes referem maior autonomia, motivação e envolvimento por parte dos alunos. Observam também maior entreajuda e colaboração entre os grupos e melhor capacidade de comunicarem os seus processos de raciocínio. Reconhecem a capacidade de estabelecerem conexões e de mobilizarem aprendizagens para novos contextos. Admitem que muitas das evidências observadas resultam de aspetos da abordagem exploratória que têm vindo a desenvolver com as suas turmas. Relativamente ao uso de tecnologia na sala de aula, os professores reconhecem que pode ser um poderoso suporte para o trabalho em sala de aula, na medida em que dá ampla visibilidade e aumenta o ritmo de trabalho, se não existirem constrangimentos, que é muito importante na motivação dos alunos, mantendo-os envolvidos por mais tempo, e que o Scratch potenciou a aprendizagem dos alunos e o desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

No processo formativo, durante a exploração da tarefa que ia ser levada à prática, a possibilidade de aprenderem colaborativamente através da experimentação, reflexão e discussão sobre as suas próprias experiências em Scratch proporcionou aos professores uma perspetiva muito próxima dos processos de aprendizagem dos alunos e permitiu-lhes desenvolver a sua capacidade de antecipar estratégias e dificuldades dos alunos. O seu conhecimento profissional foi desenvolvido através do trabalho colaborativo e reflexivo, realizado no seio do grupo quando planificam, conduzem, observam e refletem sobre a aula de investigação. Esta ênfase na prática coloca o professor como protagonista do seu processo de desenvolvimento, tornando-o o principal agente da sua formação. Os resultados obtidos pelos alunos podem levar a que os professores compreendam que estas mudanças podem trazer benefícios para a aprendizagem dos alunos e se sintam confiantes para inovar nas suas práticas de sala de aula.

Reiterando Ni Shuilleabhain e Seery (2018), parece relevante participar em vários ciclos de estudo de aula sucessivos pois, como referem, reforça a confiança dos participantes para introduzirem mudanças na sua prática letiva e permite que observem os resultados dessas mudanças.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio da bolsa com referência SFRH/BD/144428/2019.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Canavarro, A.P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/ aprendizagens-essenciais-de-matematica

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education, 48*(4), 411–423.

Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 285-304. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9102-7

Lewis, C. & Tsuchida, I. (1997). Planned educational change in Japan: the case of elementary science instruction. *Journal of Education Policy*, *12*(5), 313-331. https://doi.

org/10.1080/0268093970120502

Ni Shuilleabhain, A. & Seery, A. (2018) Enacting curriculum reform through lesson study: a case study of mathematics teacher learning, *Professional Development in Education*, *44*(2), 222-236. https://doi.org/10.1080/19415257.2017.1280521

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J.P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. *Bolema, 30*(56). https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01

Anexo 1 – Proposta inicial da tarefa para a aula de investigação.

Constrói um quadrado com o Scratch

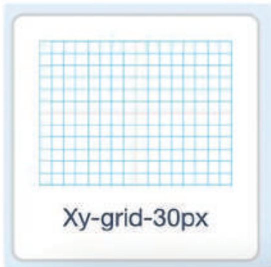
1. Nomeia o teu projeto "Projeto Scratch_Quadrado".

2. Apaga o "actor 1" e em seguida escolhe o ator "Pencil" para desenhar um quadrado.

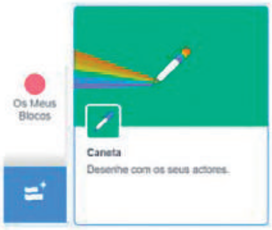
☺ Podes diminuir o tamanho do ator e no separador "Trajes" mudar a sua posição para definir a parte que queres que use para desenhar o quadrado.

3. Escolhe o cenário do quadriculado "XY-grid-30px" para este ficar visível no palco.

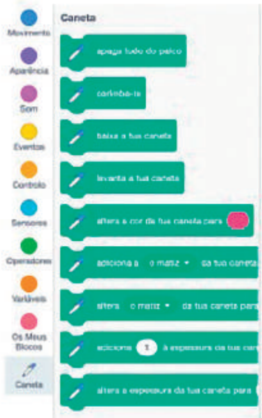
☺ Neste cenário, o comprimento do lado de uma quadrícula corresponde a 30 passos.



4. Adiciona a extensão de caneta.



☺ Com esta extensão, ficas com acesso a novos blocos que te vão ajudar a desenhar, como por exemplo:



5. Introduz esta programação:

☺ Com estas indicações o teu ator fica preparado para começar a desenhar. De cada vez que alguém clicar na bandeira verde a cor da caneta muda para vermos que se trata de um novo quadrado.

6. Agora, acrescenta os blocos necessários para o ator desenhar um quadrado sobre as linhas do quadriculado.

☺ Vais precisar de usar os seguintes blocos de movimento.

Ao andar determinado número de passos o teu ator vai desenhar um dos lados do quadrado.
Qual o número de passos que vais escolher para o lado do teu quadrado? E qual o valor que vais colocar no gira?

7. Clica na bandeira verde e verifica se o teu ator desenha um quadrado.

7.1 Se desenhou um quadrado, revê o teu projeto e procura se existe outra solução possível.

7.2 Se não desenhou um quadrado, procura onde podes melhorar o teu projeto e faz as correções necessárias.

☺ Compara o teu quadrado com o dos teus colegas.

Compara os códigos que inseriram e descobre o que há em comum e o que há diferente nos vários quadrados que foram desenhados.

8. Discutam se é possível outra solução que possa envolver a utilização de um número menor de blocos.

Como os alunos comunicam por escrito a resolução de um problema matemático? Um estudo com alunos do 11.º ano

How do students communicate the resolution of a mathematical problem in writing? A study with 11th grade students

Letícia Gabriela Martins[1], *Maria Helena Martinho*[2]

[1]CIEd, Universidade do Minho, lgb.martins@hotmail.com

[2]CIEd, Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt

Resumo. É *aconselhável que os alunos terminem a sua escolaridade obrigatória com as capacidades de resolução de problemas e de comunicação escrita devidamente desenvolvidas. No currículo português, estas capacidades são realçadas devido à importância atribuída ao facto de os alunos serem incentivados a justificar as suas ideias e resoluções, encadeando os seus raciocínios de forma organizada e coerente. Posto isto, consideramos pertinente desenvolver um sistema de categorias de análise da comunicação escrita, e apresentamos a análise de resoluções a um problema matemático, baseado nessa categorização, de forma a responder à questão Como é que os alunos comunicam as suas resoluções de problemas por escrito? As resoluções foram realizadas por alunos do 11.º ano, divididos em seis grupos, e foram analisadas em quatro tópicos: correção, completude (dividida em nível e tipo de justificação, e resposta final), representações e organização. Das seis resoluções apresentadas, uma é incorreta, uma parcialmente correta e as restantes corretas, todas elas organizadas e com resposta final explícita. O nível de justificação esteve entre alto e médio, e o tipo de justificação mais vezes observado foi o uso de regras. Quanto às representações, nenhum grupo utilizou todos os tipos em simultâneo, e apenas um recorreu a representação icónica.*

Abstract. *It is advisable that students finish their compulsory schooling with properly developed problem-solving and written communication skills. In the Portuguese curriculum, these skills are highlighted, due to the importance given to the fact that students are encouraged to justify their ideas and resolutions, linking their reasoning in an organized and coherent way. That said, we consider it pertinent to develop a system of categories for the analysis of written communication, and we present the analysis of resolutions to a mathematical problem, based on this categorization, in order to answer the question How do students communicate their problem resolutions in writing? These resolutions were carried out by 11th grade students, divided into six groups, and were analyzed in four topics: correction, completeness (divided into level and type of justification, and final answer),* *representations and organization. Of the six resolutions presented, one is incorrect, one partially correct and the rest correct, all of them organized and with an explicit final answer. The level of justification was between high and medium, and the type of justification most often observed was the use of rules. As for representations, no group used all types simultaneously, and only one resorted to iconic representation.*

Palavras-chave: resolução de problemas; comunicação escrita; ensino secundário

Keywords: problem-solving; written communication; high school

Introdução

A resolução de problemas e a comunicação escrita são duas das nove ideias chave apresentadas nas aprendizagens essenciais para a disciplina de Matemática A (MEC, 2023). Neste documento, é salientado o incentivo que deve ser dado para que o aluno justifique as suas resoluções, encadeando devidamente as suas ideias e raciocínios, com a utilização de múltiplas representações adequadas e com clareza, pontos que abordamos neste trabalho. Encontramos também um foco na avaliação formativa, algo que esperamos que esta investigação possa vir a contribuir, já que são definidas categorias de análise para as resoluções escritas aos problemas matemáticos, que poderão vir a ser úteis na hora de avaliar formativamente a resolução de problemas em sala de aula.

A escrita pode ser vista como um auxílio da resolução de problemas (Seo, 2015), e o raciocínio e a escrita ajudam no próprio pensamento crítico (Aineamani, 2018). Lee et al. (2020) refere que a resolução de problemas e a escrita partilham de processos mentais semelhantes com foco em alcançar o objetivo, o que reforça a forte ligação entre ambas. Estes autores acrescentam que escrever a resolução de um problema pode ser um processo desafiante, mas que com a experiência e com a prática, os alunos começam a melhorar, não só na questão de como resolvem problemas, mas também na forma de como escrevem os seus raciocínios.

Quando propomos que os alunos resolvam um problema, estamos também a pedir que comuniquem. É algo inevitável, já que será a única forma de termos acesso ao modo como pensam (Mata Pereira & Ponte, 2011). Nesta investigação, os alunos trabalharam maioritariamente em grupos, dinâmica fortemente recomendada por Adams e Hamm (2013) quando se pretende que os alunos resolvam problemas. Estes autores indicam que os alunos, além de trabalharem em pequenos grupos, devem ser incentivados a escrever como resolveram o problema proposto, e compararem e discutirem as suas respostas com os outros grupos. Esta comparação e discussão vai contribuir para que os alunos adquiram diferentes estratégias e formas de resolução, bem como ajudar a que os alunos tenham um maior cuidado na escrita das resoluções (Guerreiro et al., 2015). Através desta comunicação, os alunos acabarão por ser capazes de resolver problemas com maior eficácia (Thao & Trinh, 2018). Esta foi uma dinâmica que seguimos durante a recolha de dados, por forma a responder à questão *Como é que os alunos comunicam as suas resoluções de problemas por escrito?* Assim, apresentaremos os resultados da análise das resoluções de grupos de alunos a um problema proposto.

Comunicação escrita na resolução de problemas

A comunicação escrita acompanha os alunos ao longo de todo o seu percurso escolar sem que seja muito notada, quer seja para tirarem notas, fazer cálculos ou resolver problemas (Lee et al., 2020). A escrita matemática pode ser uma atividade de grande exigência a nível intelectual (Pantaleon et al., 2018) que permite que os alunos expressem os seus raciocínios através das suas próprias palavras, com imagens ou com modelos matemáticos (Yuniara et al., 2018). A escrita pode, então, ser uma ajuda para que os alunos consigam dar um melhor significado à Matemática e para desenvolver a sua capacidade de argumentação (Martinho & Rocha, 2018). Esta forma de comunicação permite, além da interação com os outros, que se tenha um registo do nosso próprio pensamento e do desenvolvimento e evolução das nossas ideias (McCarthy, 2010). Isto significa que, através da escrita, os professores também podem ter uma melhor perceção de como os seus alunos estão a aprender e como pensam matematicamente (Pugalee, 2001). Importa, então, contribuir para que os alunos pratiquem a escrita matemática, tendo em vista uma evolução da escrita das suas resoluções de modo que se tornem cada vez mais claras e completas (Martinho & Rocha, 2018). Para isso, é importante que os alunos tenham contacto com "tarefas que apelem ao desenvolvimento das suas capacidades de comunicação escrita em matemática, registando as suas ideias de forma clara, correta e lógica" (Costa & Pires, 2016). Estes autores acrescentam ainda que estes registos devem ser feitos com recurso a diferentes representações e com a devida justificação dos seus raciocínios. Aineamani (2018) reforça ainda que o facto de um aluno saber explicar devidamente o seu pensamento, com as respetivas justificações, significa que o aluno compreendeu os conhecimentos que estavam inerentes a essa tarefa. Esta autora refere que é importante que os alunos tenham momentos para justificar os seus raciocínios, sendo que para isso é necessário que os alunos tenham um ambiente em sala de aula que os encoraje a fazê-lo (Ponte & Quaresma, 2020).

Neste estudo, pretendemos perceber como os alunos comunicam as suas resoluções por escrito. Para isso, precisamos de estabelecer categorias de análise que nos permitam caracterizar essas comunicações. Santos e Semana (2015) indicam um possível sistema de categorias de análise, baseado em três pontos: a interpretação da tarefa, a justificação apresentada e as representações utilizadas. Na *interpretação*, as autoras consideram que se deve avaliar se o aluno identificou corretamente o objetivo e os dados da tarefa e também qual foi a linguagem utilizada. Na *justificação* é avaliada a correção e a completude da justificação, mas também o tipo de justificação utilizado. Quanto ao tipo, divide-se em quatro: vaga (justificação muito breve e pouco informativa), regras (uso de fórmulas matemáticas, regras ou definições), descrição procedimental (explicação do que é feito em determinada etapa) e justificação relacional (quando se explica a validade de uma etapa, podendo incluir, ou não, a explicação daquilo que é feito nessa etapa). Por fim, são analisadas as *representações* utilizadas – linguagem verbal, representação icónica ou representação simbólica –, bem como a precisão e completude da representação.

Um outro modelo, baseado no apresentado anteriormente, é registado por Martins e Martinho (2022), com quatro pontos de análise: correção, completude, representações e organização. No que concerne à *correção*, as autoras assumem que a resolução pode estar correta, parcialmente correta ou incorreta. Se a resolução apresentada está correta, então é exatamente essa a atribuição dada na categoria correção. Quanto à parcialmente correta, podemos ter duas possibilidades – pode ser parcialmente correta concluída, caso a resolução não esteja completamente correta, mas apresente partes significativas, ou parcialmente correta não concluída, caso a resolução não esteja concluída, mas o que está escrito é significativamente correto. Caso a resolução esteja incorreta ou não tenha partes significativas corretas, então assumimos que estamos perante uma resolução incorreta. Quanto à *completude*, esta categoria é dividida em três subcategorias: nível de justificação, tipo de justificação, e resposta final. O nível de justificação pode ser considerado alto, médio, baixo ou nulo, consoante a quantidade de justificações apresentadas. Já o tipo de justificação poderá ser relacional, procedimental, recurso à experimentação, uso exclusivo de regras, ou vaga. Ainda dentro da categoria de completude, temos a resposta final, que é assumida como explícita (caso se apresente uma resposta explicita ao problema), implícita (nos casos em que a resposta não está explicitamente presente mas é possível subentender qual era a resposta final), e ausente (quando não está explícita nem implícita, ou quando são apresentadas mais do que uma resposta). A terceira categoria de análise apresentada centra-se nas *representações* também já referidas anteriormente, nomeadamente linguagem verbal, representação icónica, e representação simbólica. Finalmente, na categoria de *organização*, Martins e Martinho (2022) colocam três níveis: organizada, parcialmente organizada, e desorganizada. No primeiro nível, resolução organizada, assumimos que a resolução está bem organizada, possuindo um fio condutor que nos permite seguir a resolução do início até ao final sem percalços. Já a parcialmente organizada apresentará partes que exigem que o leitor faça ligações entre diferentes etapas para perceber qual deve ser lida primeiro. E a desorganizada surge quando o leitor fica impedido de seguir devidamente a resolução apresentada. Este foi o modelo que seguimos para realizar a análise de resultados que aqui iremos apresentar.

Contexto e Metodologia

Nesta comunicação, apresentaremos resultados que representam uma parte de um estudo no qual participaram 29 alunos de duas turmas do 11.º ano de Ciências e Tecnologias, divididos em seis grupos, com idades entre os 15 e os 16 anos. Estes alunos frequentavam uma escola pública, inserida num centro urbano do distrito de Braga, e tinham o mesmo professor de Matemática A. Estes participantes inscreveram-se de modo voluntário neste projeto, no qual se pretendia que participassem em sessões de resolução de problemas em grupo e online, em horário extracurricular. Esta decisão deveu-se ao facto de estarmos em período pandémico, pelo que o trabalho em grupo presencial estaria comprometido. Foram realizadas 16 sessões de 90 minutos, coordenadas pela primeira autora deste trabalho, entre outubro de 2020 e maio de 2021, gravadas integralmente. Nestas sessões, os alunos começavam por se juntar em grupo, em salas separadas para cada grupo de trabalho. Na primeira parte da sessão, esperava-se que os grupos resolvessem o problema proposto, registando por escrito uma resolução construída por todos, da forma mais completa e justificada possível. No final, todos os alunos se juntavam numa sala conjunta, abrindo espaço para uma discussão das resoluções de cada grupo, no qual todos eram convidados a apresentar as suas resoluções, segundo determinada ordem definida pela investigadora, e todos os alunos eram incentivados a explicar as suas ideias e a questionar as resoluções dos colegas. Neste artigo, vamos apresentar a análise da comunicação escrita que os grupos registaram na resolução de um dos problemas propostos nessas sessões.

Esta investigação encontra-se numa posição nominalista e paradigma interpretativo (Neuman, 2014). São dados analisados de forma subjetiva por parte da investigadora, pelo que são resultados fechados em si mesmos, sem abertura de serem generalizáveis, apesar de ser possível tirar conclusões que podem ser usadas noutros casos (Neuman, 2014). Há uma forte interação entre a investigadora e os alunos que constituem o caso em estudo, e os resultados obtidos estão muito dependentes das interpretações feitas pela investigadora (Leavy, 2017). Além disso, trata-se de uma metodologia qualitativa, em que os dados incluem as vozes dos participantes, através da transcrição de diálogos e das suas resoluções escritas, e é feita uma descrição desses dados em conjunto com uma reflexão por parte do investigador (Creswell & Poth, 2018). Por fim, podemos considerar que se trata de um estudo de caso instrumental, uma vez que, segundo Stake (2005), o caso é apenas um meio para alcançar o fenómeno que se pretende estudar, sendo que o caso a estudar é constituído pelos alunos que se voluntariaram a participar neste projeto.

Apresentação dos resultados

Numa das sessões os alunos foram confrontados com o seguinte problema:

> Dois carros partem ao mesmo tempo de uma cidade A, dirigem-se a uma cidade B e depois regressam à cidade A. O primeiro carro segue sempre a uma velocidade constante igual a 50km/h. O segundo vai de A para B a 60km/h e regressa de B para A a 40km/h. Qual chega primeiro a A? [1]

Decidimos usar os resultados desta sessão, já que foi uma sessão na qual estiveram presentes todos os tipos de justificação e também para mostrar um exemplo que consideramos importante realçar – um exemplo de uma resolução incorreta com nível de resolução alto. Após se propor este problema aos alunos, e visualizadas todas as gravações desta sessão,

[1] Retirado de Veloso, E., & Viana, J. P. (1991). *Desafios* (Problema 51). Edições Afrontamento.

concluiu-se que a pergunta poderia já estar, de certo modo, enviesada, já que daria a entender que um deles chegaria primeiro, algo que foi registado numa nota de campo:

> Após ver as gravações (...), percebi que a pergunta até poderia ser tendenciosa, mas ainda assim os alunos não se deixaram influenciar por ela. Dois grupos responderam que os carros chegariam ao mesmo tempo, mesmo após colocarem a si próprios a questão sobre a pergunta e sobre o facto de a pergunta indicar que algum deles chegava primeiro. Ainda assim, mesmo que a pergunta não tenha influenciado, julgo que seria melhor a questão estar de outra maneira, de forma a não indicar desde logo que algum chegaria primeiro. (Excerto da nota de campo de 04/01/2021)

Como já se consegue antever, dois dos grupos não chegaram à resposta correta. Vamos, então, analisar as resoluções.

G1: Grupo com uma resolução incorreta

A discussão final da sessão começou pelo G1, por ter sido o único grupo a apresentar uma resolução considerada incorreta (Figura 1).

Figura 1

Resolução do problema pelo G1

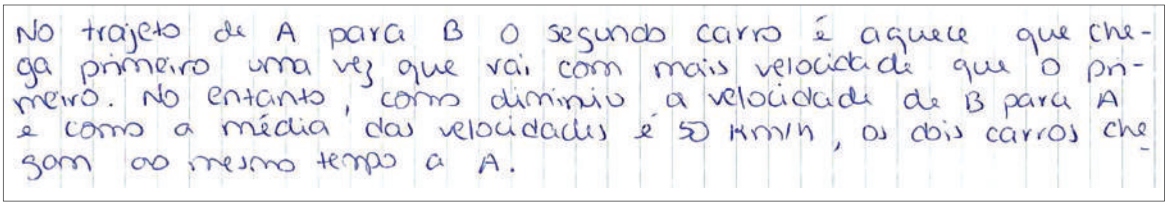

No trajeto de A para B o segundo carro é aquele que chega primeiro uma vez que vai com mais velocidade que o primeiro. No entanto, como diminiu a velocidade de B para A e como a média das velocidades é 50 Km/h, os dois carros chegam ao mesmo tempo a A.

Figura 1. Resolução do G1.

Como a conclusão deste grupo foi que os dois carros chegariam ao mesmo tempo, baseados na média aritmética entre as duas velocidades alcançadas pelo segundo carro, estamos perante uma resolução *incorreta*. Ainda assim, o nível de justificação é considerado *alto*, uma vez que apresenta todas as justificações necessárias para sustentar a resposta apresentada de forma *explícita*. Podemos assumir que esta resolução apresenta uma justificação baseada em *regras*, uma vez que uma das etapas se baseia em regras matemáticas conhecidas anteriormente (nomeadamente a média aritmética entre as velocidades), e pode também ser considerado o tipo *procedimental*, já que os alunos justificam que no trajeto de A para B é o carro mais rápido que chega primeiro. Todas estas justificações foram escritas usando apenas *linguagem verbal*, de modo *organizado*.

Este grupo, durante a sessão, chegou a duvidar se a questão colocada no problema quereria dizer que algum dos carros chegava primeiro, como podemos perceber pelo seguinte diálogo, transcrito nas notas de campo desta sessão:

03:30 – começam a tentar escrever a resposta:

(...)

Fausto: Mas, tipo, com esta pergunta só podemos dizer que chega um, não podemos dizer que chegam os dois, supostamente...

Carmo: Pois... supostamente...

Magda: Então a resposta é "nenhum", porque chegam os dois ao mesmo tempo. *(os colegas riem)* É porque faz sentido chegarem os dois ao mesmo tempo.

(...)

13:30 – visitei a sala deste grupo, para perguntar se tinham dúvidas

Magda: Aqui diz "Qual chega primeiro a A?", pode ser dois? Ou tem de ser só um carro?

Investigadora: Se vocês acharem que chegam os dois ao mesmo tempo... a resposta é os dois, sim, porque não?

Magda: Ok... obrigada! (Grupo 1, nota de campo da S4)

Como vemos pela resposta apresentada na Figura 1, eles seguiram a ideia inicial deles, sem voltar a considerar a questão da formulação da pergunta.

G2: Grupo com uma resolução parcialmente correta

Este grupo apresentou a sua resolução após o grupo anterior, já que seguiram um raciocínio semelhante, através da média aritmética das velocidades do segundo carro. A relevância de se ter chamado este grupo à discussão esteve no facto de, ao contrário do anterior, este grupo ter feito uma particularização que confirmasse o seu raciocínio inicial, como podemos ver na Figura 2.

Figura 2

Resolução do problema pelo G2

Como se vê pela Figura 2, o grupo começa por dizer que os carros chegarão ao mesmo tempo, apresentando posteriormente um exemplo que o confirmasse. Apesar de a resposta ser inequivocamente incorreta, considera-se que a resolução foi *parcialmente correta (concluída)*. Isto porque na segunda parte da resolução, na qual o grupo apresenta um exemplo, os cálculos realizados estão corretos, mas infelizmente os arredondamentos realizados não ajudaram a que o grupo se apercebesse que o resultado alcançado estaria errado. Quanto ao nível de justificação, assume-se que foi *alto*, pois apresenta todas as justificações necessárias logo na primeira parte da resolução, tendo depois reforçado a resposta com um exemplo e, no final, colocado de forma *explícita* a resposta final. Tal como no grupo anterior, o tipo de justificação é *procedimental* e baseado em *regras*, tendo ainda presente a *experimentação* ao usarem valores concretos para apresentar um exemplo que reforçava a resposta apresentada. Podemos ainda assumir a presença do tipo *relacional*, já que o grupo justifica a validade do que está a ser dito na primeira parte, com o exemplo que utilizam na segunda parte da resolução. A escrita é considerada *organizada*, com recurso a *linguagem verbal* e *representação simbólica*.

O carro A anda a uma velocidade constante de 50 Km/h enquanto que o carro B anda a 60Km/h de A-B e a 40 Km/h de B-A o que dá uma média no percurso total de 50 Km/h, o que quer dizer que vão chegar ao mesmo tempo ao ponto A.

Por exemplo.
se de A-B forem 2 Km:

50 Km — 1h
2 Km — x
$x = \frac{2}{50} = 0,04h$

No total, o carro A demora 0,08h

60 Km — 1h
2 Km — x
$x = \frac{2}{60} = 0,03h$

40 Km — 1h
2 Km — x
$x = \frac{2}{40} = 0,05h$

No total, o carro B demora 0,08h

Ou seja, demoram o mesmo tempo

Figura 2. Resolução do G2.

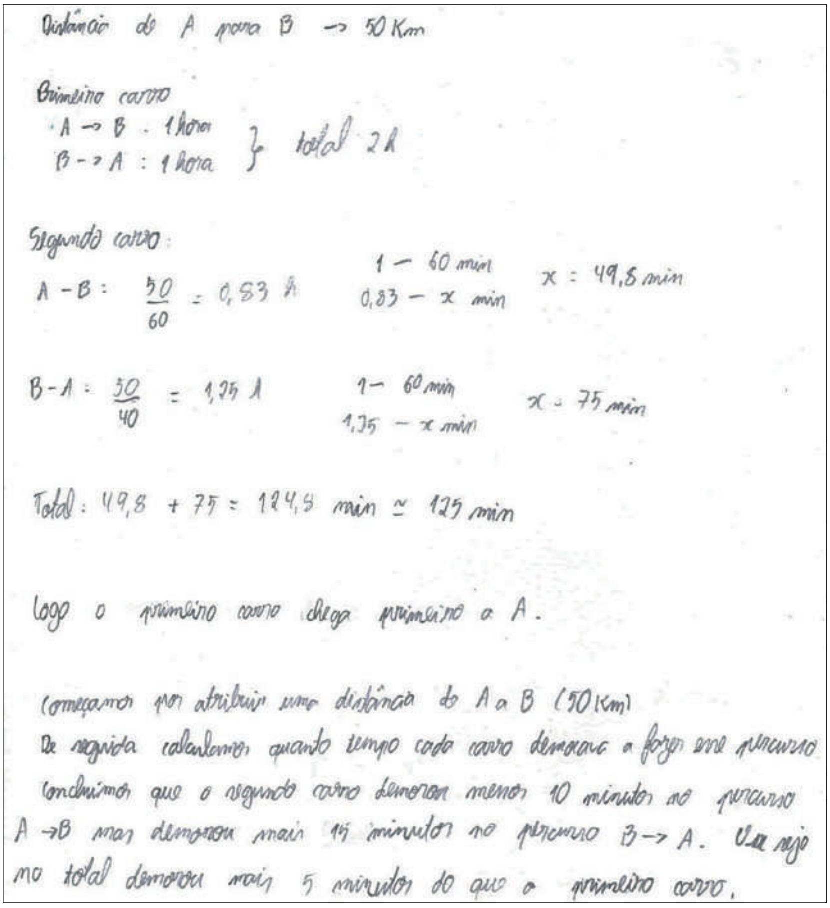
G5 e G6: Grupos que atribuíram 50km de distância entre A e B

Após apresentar duas resoluções com respostas incorretas, chega a vez de falarmos de resoluções consideradas corretas. Os grupos 5 e 6 tiveram resoluções idênticas, apenas se diferenciando por uma estratégia. Comecemos por ver a resolução de G6 (Figura 3).

Figura 3

Resolução do problema pelo G6

A resolução presente na Figura 3 é considerada *correta*, uma vez que o grupo chega à resposta correta, apesar de se ter apenas concentrado numa experiência isolada de uma distância em específico. Por este motivo, considera-se que o nível de justificação é *médio*, pois os alunos deram a sua resposta mediante uma distância concreta, sem terem apresentado outras possibilidades ou, até, uma generalização para qualquer distância possível – ou seja, não justificam como é garantido que realmente o primeiro carro chegaria sempre primeiro, independentemente da distância a percorrer. Dada esta atribuição de 50km, um dos tipos de justificação utilizados foi a *experimentação*, tendo ainda presente as *regras* (como é o caso da "regra de três simples") e o tipo *procedimental*. Este último tipo de justificação pode ser encontrado no parágrafo final, em que o grupo descreve o procedimento que utilizou para resolver o problema. Na Figura 4 encontramos uma resolução muito semelhante, mas em que a justificação procedimental é vista noutro contexto.


Distância de A para B → 50 Km

Primeiro carro
A → B : 1 hora
B → A : 1 hora } total 2 h

Segundo carro:
A - B: $\frac{50}{60} = 0,83$ h   1 — 60 min; 0,83 — x min   x = 49,8 min

B - A: $\frac{50}{40} = 1,25$ h   1 — 60 min; 1,25 — x min   x = 75 min

Total: 49,8 + 75 = 124,8 min ≃ 125 min

Logo o primeiro carro chega primeiro a A.

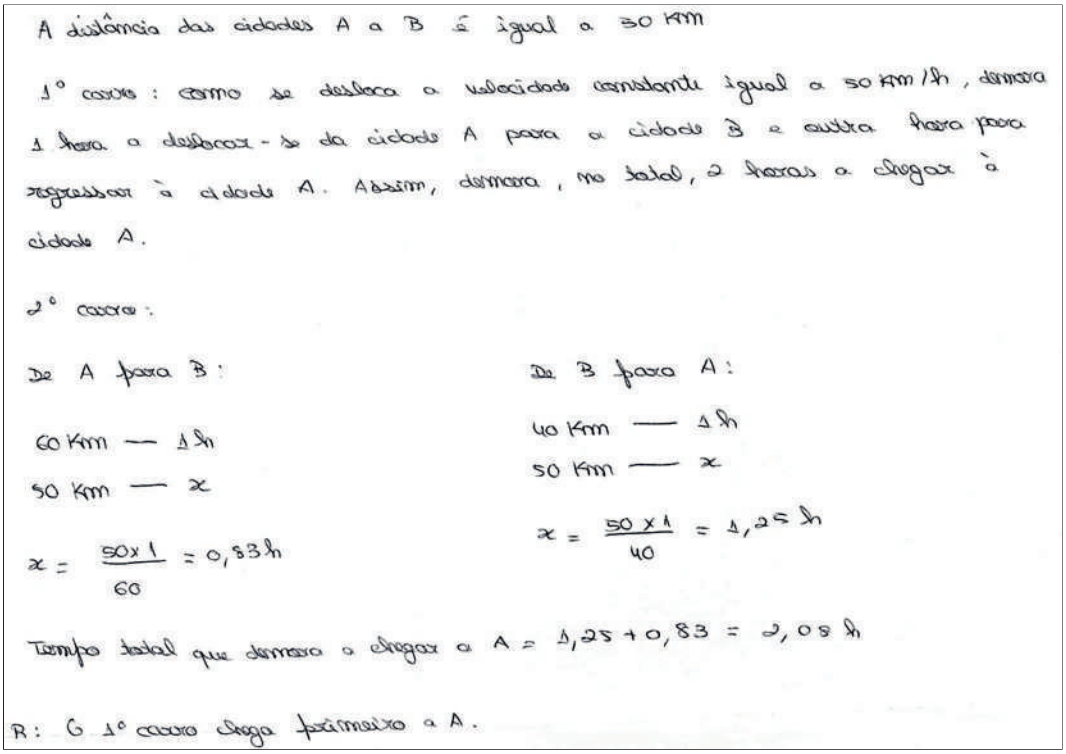
Começamos por atribuir uma distância de A a B (50 Km)
De seguida calculamos quanto tempo cada carro demorava a fazer o percurso
Concluímos que o segundo carro demorou menos 10 minutos no percurso A → B mas demorou mais 15 minutos no percurso B → A. Ou seja no total demorou mais 5 minutos do que o primeiro carro.

Figura 3. Resolução do G6.

Figura 4

Resolução do problema pelo G5

Aqui temos igualmente uma resolução *correta* com justificação de nível *médio,* à semelhança do grupo anterior. Novamente, pela atribuição de um valor concreto à distância entre as cidades, considera-se que foi utilizada a *experimentação*, juntamente com as *regras*. Vemos ainda o tipo de justificação *procedimental*, no momento em que o grupo justifica, por exemplo, que está a calcular o tempo total da viagem. Estas justificações são apresentadas, em ambos os casos (Figura 3 e Figura 4), com recurso à *linguagem verbal* e *representação simbólica*, tendo uma resposta final *explícita* e estando *organizadas*.



A distância das cidades A a B é igual a 30 Km

1° carro: como se desloca a velocidade constante igual a 50 Km/h, demora 1 hora a deslocar-se da cidade A para a cidade B e outra hora para regressar à cidade A. Assim, demora, no total, 2 horas a chegar à cidade A.

2° carro:

De A para B:

60 Km — 1 h

50 Km — x

$x = \frac{50 \times 1}{60} = 0,83$ h

De B para A:

40 Km — 1 h

50 Km — x

$x = \frac{50 \times 1}{40} = 1,25$ h

Tempo total que demora a chegar a A = 1,25 + 0,83 = 2,08 h

R: O 1° carro chega primeiro a A.

Figura 4. Resolução do G7.

G4: Grupo que utilizou apenas representação simbólica

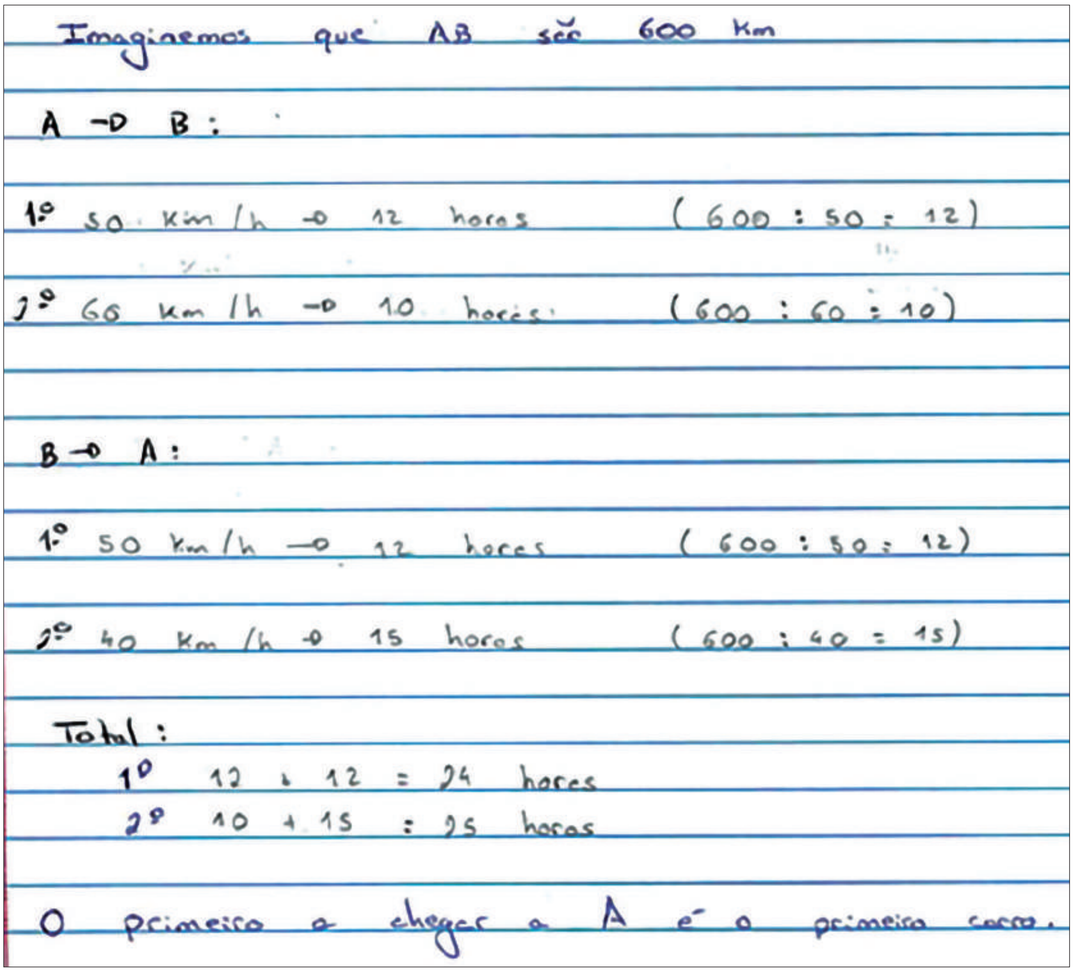
Neste problema, apenas o G4 utilizou exclusivamente representação simbólica (Figura 5).

Figura 5

Resolução do problema pelo G4

Como se pode observar, o G4 começa por utilizar uma distância fictícia entre as duas cidades, 600km neste caso. Após isso, fazem os cálculos do tempo que cada carro demora nos dois percursos, de A para B e vice-versa, apresentando o total de horas que cada um demoraria e concluindo, desse modo, que o primeiro carro seria o primeiro a chegar.

Tal como se considerou no caso dos grupos 5 e 6, aqui também se considera que a resolução é *correta* e o nível de justificação *médio*. No entanto, o tipo de justificação é apenas a *experimentação*, uma vez que apenas se observam os cálculos para esse caso em específico, e mais nenhum tipo de fundamentação. Esta resolução é igualmente *explícita* e *organizada*, sendo que apenas se considera a existência de *representação simbólica*, já que a linguagem verbal aqui presente não é considerada significativa na justificação da resolução.



Imaginemos que AB sãõ 600 Km

A → B :

1º 50 Km/h → 12 horas (600 : 50 = 12)

2º 60 km/h → 10 horas (600 : 60 = 10)

B → A :

1º 50 Km/h → 12 horas (600 : 50 = 12)

2º 40 Km/h → 15 horas (600 : 40 = 15)

Total :

1º 12 + 12 = 24 horas

2º 10 + 15 = 25 horas

O primeiro a chegar a A é o primeiro carro.

Figura 5. Resolução do G4.

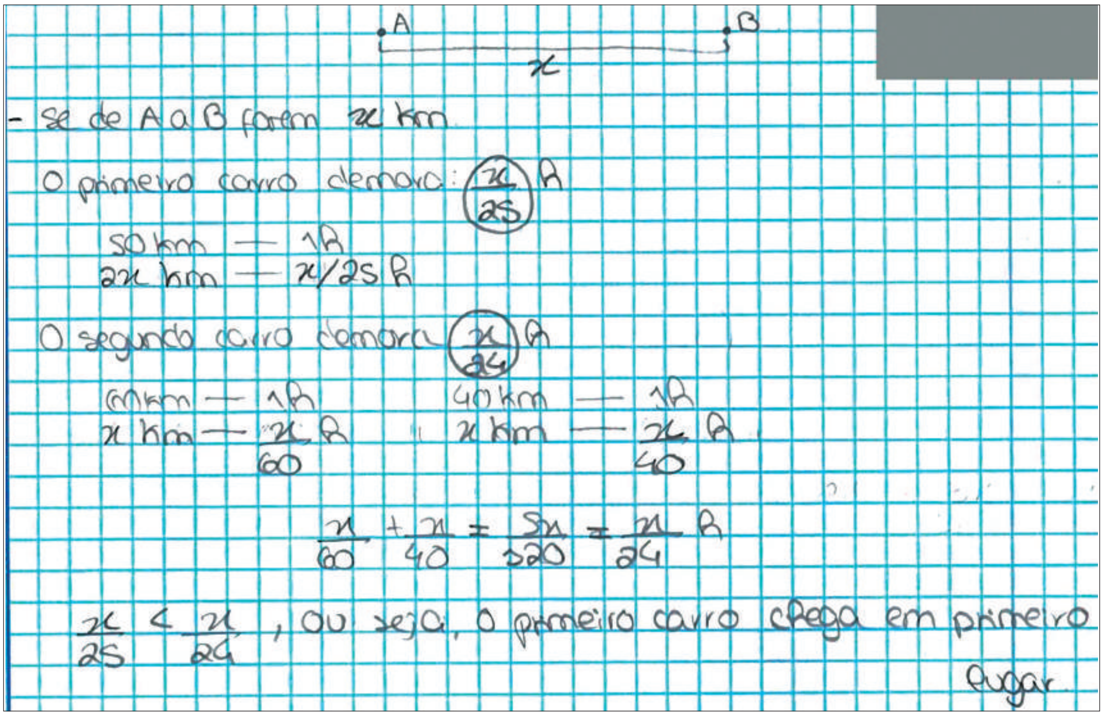
G3: Grupo que não apresenta um caso particular

Na discussão, o G3 foi deixado para o final. Antes de os chamar para apresentarem a sua resolução, questionei os alunos sobre a garantia de que realmente o primeiro carro chegaria primeiro, fosse qual fosse a distância entre as duas cidades. Assim, foi dado o mote para apresentarem a resolução que encontramos na Figura 6.

Figura 6

Resolução do problema pelo G3

Este grupo começou por recorrer a um esquema, no qual esclarece que vai usar como distância entre A e B. De seguida, utilizam fórmulas para estabelecer o tempo, em horas, que cada carro demoraria – aparentemente, com uma "regra de três simples". Estamos, então, perante a única resolução *correta* com um nível de justificação *alto*, apesar de terem recorrido apenas a *regras*. Tal como todos os outros grupos, a resposta final é *explícita* e *organizada*, tendo sido utilizados dois tipos de representação: *representação simbólica* nos cálculos, e *representação icónica* no esquema apresentado. Tal como acontece na resolução do G4 (Figura 5), a linguagem verbal apresentada não é significativa ao longo da resolução do problema, pelo que não é considerada neste caso.


A B

x

- se de A a B forem x km

O primeiro carro demora: $\frac{x}{25}$ h

50 km — 1h

2x km — $x/25$ h

O segundo carro demora $\frac{x}{24}$ h

60 km — 1h

x km — $\frac{x}{60}$ h

40 km — 1h

x km — $\frac{x}{40}$ h

$\frac{x}{60} + \frac{x}{40} = \frac{5x}{120} = \frac{x}{24}$ h

$\frac{x}{25} < \frac{x}{24}$, ou seja, o primeiro carro chega em primeiro lugar.

Figura 6. Resolução do G3.

Em jeito de síntese, na Tabela 1 apresentam-se os resultados dos grupos.

Tabela 1

Quadro-resumo com todos os pontos de análise observados na Sessão 4

Tabela 1. Pontos de análise observados na sessão 4

Comunicação escrita			G1	G2	G3	G4	G5	G6
Correção			I	PC-C	C	C	C	C
Completude	Nível de justificação		A	A	A	M	M	M
	Tipo de justificação	Relacional	-	X	-	-	-	-
		Procedimental	X	X	-	-	X	X
		Experimentação	-	X	-	X	X	X
		Regras	X	X	X	-	X	X
		Vaga	-	-	-	-	-	-
	Resposta final		E	E	E	E	E	E
Representações	Linguagem verbal		X	X	-	-	X	X
	Representação icónica		-	-	X	-	-	-
	Representação simbólica		-	X	X	X	X	X
Organização			O	O	O	O	O	O

Nota: C – Correta; PC-C – Parcialmente Correta Concluída; I – Incorreta; A – Alto; M – Médio; E – Explícita; O – Organizada; X – este ponto está presente na resolução deste grupo.

Verificamos, então, que neste problema tivemos quatro resoluções corretas, mas já se percebe que neste caso não há uma relação direta entre a correção e o nível de justificação: uma vez que três das resoluções corretas estão num nível médio, e as restantes três resoluções no nível alto (o que inclui as resoluções incorretas e parcialmente corretas). O tipo de justificação também foi muito variável, sendo que temos uma resolução de nível alto com quatro tipos de justificação utilizados, e outra de nível igualmente alto em que apenas se utilizam regras. Quanto às representações, foram observados todos os tipos nas resoluções a este problema. Todas as resoluções têm resposta final explícita e organizada.

Considerações finais

Nas aprendizagens essenciais para Matemática A, é referido que a resolução de problemas deve ser utilizada para estabelecer conexões entre diferentes conceitos, incentivando também a comunicação escrita (MEC, 2023). Este estudo procurou fazê-lo, com o objetivo de responder à questão: *Como é que os alunos comunicam as suas resoluções de problemas por escrito?* Para isso, criamos um ambiente que encorajava os alunos a comunicar as suas ideias matemáticas, tanto oralmente como na escrita (Ponte & Quaresma, 2020). No que toca ao sistema de categorias de análise da comunicação escrita dos alunos, apesar de nos basearmos em Santos e Semana (2015), fizemos algumas alterações. Uma delas foi a exclusão da categoria de *interpretação da tarefa*, uma vez que esta interpretação não era algo visível na resolução escrita dos alunos – seria percetível na fala dos alunos ao longo da resolução, mas não na sua escrita. Além disso, consideramos que esta categoria se enquadraria melhor ao nível de dificuldades observadas, do que na comunicação escrita das resoluções. Nas seis resoluções aqui apresentadas e analisadas, a um problema proposto a alunos do 11.º ano, encontramos uma resolução incorreta, uma parcialmente correta concluída, e as restantes quatro corretas. Já no nível de justificação, registamos três níveis médios, todos em resoluções corretas, e os restantes três altos. É importante reforçar que as resoluções incorretas e parcialmente corretas conseguiram, apesar disso, ter um nível de justificação alto – o que demostra que este nível não terá uma implicação direta com a correção da resolução. Também o tipo de justificação não é diretamente relacionado com o seu nível, já que conseguimos observar um nível alto com recurso a quatro tipos de representação (relacional, procedimental, experimentação e regras), e outro igualmente alto com apenas o uso de regras – tipo de justificação usado por quase todos os grupos neste problema. Relativamente aos tipos de representação, Seo (2015) realça que a escrita deve ir além das palavras, resultando de uma interligação entre os diferentes tipos de representação. Nos resultados aqui apresentados, apenas dois grupos recorreram exclusivamente a um tipo de representação (um com linguagem verbal, outro com representação simbólica), sendo que os restantes grupos utilizaram dois tipos de representação nas suas resoluções – em três casos vermos linguagem verbal e representação simbólica, já o outro grupo usou as representações icónica e simbólica.

Referências bibliográficas

Adams, D., & Hamm, M. (2013). *Demystify math, science, and technology: Creativity, innovation, and problem solving* (2nd ed.). Rowman & Littlefield Education.

Aineamani, B. (2018). How learners communicate their mathematics reasoning in mathematics discourse. In J. N. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. R. Mendes & M. Schütte (Eds.), *Language and communication in mathematics education* (pp. 65-74). Springer.

Costa, E., & Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: um estudo com alunos do 5.º ano. in M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 405-419). APM.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). SAGE Pubications Inc.

Guerreiro, A., Ferreira, R. A., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, 23*(44), 279-295. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539

Leavy, P. (2017). *Research design: Quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches*. The Guilford Press.

Lee, G. P., Lim, C. S., & Leong, L. M. (2020). Use mathematical writing as a practical approach to increase students' problem solving skills: A case study. *The Mathematics Enthusiast, 1*(1), 239-273. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1486

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática, 149-150*, 34-38.

Martins, L. G., & Martinho, M. H. (2022). Written resolution of a mathematical problem by 11th grade students. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 4)* (p. 374). PME.

Mata Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.º ano. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e aprendizagem da Álgebra, Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 347-264). SPIEM.

McCarthy, D. S. (2010). Communication in mathematics: Preparing preservice teachers to include writing in mathematics teaching and learning. *School Science and Mathematics, 108*(7), 334-340. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2008.tb17846.x

MEC (2023). *Aprendizagens essenciais* [10º ano, Matemática A]. MEC. Disponível em: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf

Neuman, W. L. (2014). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches* (7th ed.). Pearson Education Limited.

Pantaleon, K. V., Juniati, D., Lukito, A., & Mandur, K. (2018). The written mathematical communication profile of prospective math teacher in mathematical proving. *Journal of physics: Conference series, 947*, 1-6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/947/1/012070

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2020). Exploratory mathematics teaching and the development of students' use of representations and reasoning processes: An illustration with rational numbers. In L. Leite (Eds.), E. Oldham, A. S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado & M. H. Martinho, *Science and mathematics education for 21st century citizens: Challenges and ways forward* (pp. 131-148). Nova Science Publishers, Inc.

Pugalee, D. K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 101*(5), 236-245. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18026.x

Santos, L., & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 65-87. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9557-z

Seo, B. I. (2015). Mathematical writing: What is it and how do we teach it? *Journal of Humanistic Mathematics, 5*(2), 133-145. https://doi.org/10.5642/jhummath.201502.12

Stake, R. E. (2005). *Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), The SAGE handbook of qualitative research* (3rd ed., pp. 443-466). SAGE Publications Inc.

Thao, N. P., & Trinh, L. T. (2018). Some obstacles in mathematical communication of students while learning continous functions lesson. *Proceedings of 6th Asian Academic Society International Conference (AASIC)*, (pp. 389-402).

Yuniara, P., Sinaga, B., & Dewi, I. (2018). Analysis of difficulties in completing mathematical communication problem solving in terms of learning styles using inquiry learning. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research, 200*, 764-768. https://doi.org/10.2991/aisteel-18.2018.166

O conhecimento estatístico de uma professora nas diferentes etapas de uma investigação estatística

The statistical knowledge of a teacher in the different stages of a statistical investigation

Mónica Patrício[1], *Ana Paula Canavarro*[2]

[1]Agrupamento de Escolas de Arraiolos, mopatricio@gmail.com

[2]Universidade de Évora, apc@uevora.pt

Resumo. *As investigações estatísticas assumem, nas orientações curriculares atuais, particular relevo, sendo o desenvolvimento da literacia estatística uma finalidade curricular fundamental do ensino da Matemática no Ensino Básico. Trata-se de algo exigente para os professores e este estudo tem como objetivo contribuir para a identificação e discussão do conhecimento de Estatística que os professores mobilizam quando põem em prática investigações estatísticas em sala de aula. Tem por base uma investigação mais ampla, de natureza qualitativa, que assumiu uma abordagem interpretativa, através de um estudo de caso de uma professora de Matemática do 2.º Ciclo. Relativamente ao conhecimento de Estatística, a análise de dados evidencia a necessidade de um maior aprofundamento deste conhecimento relativamente às etapas de planeamento da recolha de dados, onde se notaram algumas inseguranças, e de interpretação de dados e formulação das conclusões, em que um conhecimento predominantemente processual impactou e limitou a tomada de decisões sobre a representatividade dos resumos estatísticos gráficos e numéricos.*

Abstract. *Statistical investigations assume, in current curricular guidelines, particular relevance, promoting the development of statistical literacy as a curricular objective of teaching Statistics. This is something demanding for teachers and this communication aims to contribute to the identification and discussion of the knowledge of Statistics that teachers mobilize when they put statistical investigations into practice in the classroom. It is based on a broad investigation, of a qualitative nature, which took an interpretative approach, materializing through a case study on a 2nd Cycle Mathematics teacher. With regard to knowledge of Statistics, the data show the need for a greater deepening of this knowledge in relation to the planning stages of data collection, where some insecurities were noted, and the interpretation of data and formulation of conclusions in which a predominantly procedural knowledge had an impact and limited decision-making about the representativeness of graphical and numerical statistical summaries.*

Palavras-chave: Ensino da Estatística; Conhecimento de Estatística; Investigações estatísticas

Keywords: Statistics Teaching; Knowledge of Statistics; Statistical investigations

Introdução

O mundo do século XXI é governado por números. A informação estatística sobre as mais diversas áreas da esfera social e do conhecimento convive connosco a todo o momento e influencia consciente ou inconscientemente as nossas decisões a nível pessoal e profissional, orientando-nos no exercício da nossa cidadania (Franklin et al., 2007).

Neste contexto, a literacia estatística surge como objetivo fundamental do ensino da Estatística a nível básico em diversos países, incluindo Portugal. Visa fornecer aos cidadãos ferramentas para interpretarem a informação quantitativa no mundo ao seu redor e tomarem decisões inteligentes com base nela (Martins & Ponte, 2010; Steen, 2002).

O desenvolvimento da literacia estatística como objetivo curricular é uma perspetiva que se afasta bastante da visão que tem informado o ensino da Estatística e que privilegia competências de destreza de cálculo (determinação das medidas estatísticas) e processuais (construção de tabelas e gráficos). Requer um ensino da Estatística que tenha por base a realização de investigações estatísticas (Ponte & Sousa, 2010).

As orientações curriculares não têm tido reflexo visível na prática letiva dos professores e colocam-lhes sérios desafios (Fernandes, 2009). Os docentes evidenciam, de uma forma mais ou menos consciente, um fraco conhecimento estatístico e um fraco conhecimento didático neste domínio. Para além de revelarem dificuldades em alguns conceitos estatísticos, mostram também não saber como implementar uma perspetiva investigativa da Estatística necessária para prepararem alunos estatisticamente letrados (Batanero, 2011).

Torna-se premente investigar mais sobre o conhecimento que os professores têm e que conhecimento é necessário terem para ensinarem Estatística de acordo com as novas orientações curriculares (Canavarro et al., 2021). Para tal, procura-se dar resposta neste artigo à seguinte questão de investigação: Que conhecimento de Estatística evidenciou a professora nas diferentes etapas de uma investigação estatística em sala de aula?

Enquadramento teórico

Orientações curriculares para o ensino da Estatística

Em Portugal, à data da recolha de dados, as orientações para o ensino da Estatística presentes no documento curricular então em vigor (ME, 2007), eram concordantes com as atuais orientações curriculares (Canavarro et al., 2021) e estavam igualmente alinhadas com as mais importantes orientações internacionais - *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) e com o GAISE Report (2005) (Franklin et al., 2007). Estes documentos apresentam como objetivo curricular central do ensino da Estatística o desenvolvimento da literacia estatística, tendo por base a realização de investigações estatísticas, nas quais os estudantes devem ter oportunidade de formularem questões que possam ser respondidas pelos dados, sendo da sua responsabilidade a decisão de como recolher, organizar e representar a informação, cuja interpretação pode conduzi-los a estabelecer novas relações e conjeturas (Martins & Ponte, 2010; Ponte & Sousa, 2010).

Martins e Ponte (2010) propõem o ciclo investigativo dividido em quatro etapas (1. Formulação das questões de investigação; 2. Planeamento da recolha de dados; 3. Organização e tratamento dos dados; e 4. Interpretação dos resultados e formulação de conclusões). Cada uma destas etapas tem um valor próprio e envolve aspetos particulares de raciocínio e pensamento, cuja especificidade gera desafios para os professores e permitem identificar questões-chave no seu ensino (Henriques & Oliveira, 2012).

1. Formulação das questões de investigação. A primeira etapa parte de um problema que deve ter por base um interesse, uma curiosidade ou uma necessidade concreta dos alunos (Henriques & Oliveira, 2010). A partir dele formulam-se pequenas questões estatísticas que devem envolver variabilidade nos dados para que possam, efetivamente, ser respondidas por eles (Burguess, 2009; Martins & Ponte, 2010). Uma boa questão estatística deve ser adequada ao nível cognitivo dos alunos, estatisticamente rica, isto é, proporcionar um conhecimento vasto de Estatística, e estar relacionada com outras áreas do currículo (Heaton & Michaelson, 2002). A investigação tem identificado dificuldades dos professores em formular problemas dignos de investigação ou a orientar os alunos a fazê-lo (Makar & Fielding-Wells, 2011). Por exemplo, os futuros professores do estudo de Caseiro e Machado (2019) tenderam a apresentar apenas temas gerais. No estudo a que se referem Santos e Ponte (2014), embora a futura professora mostre ser capaz de gerar temas de investigação interessantes para os alunos e que surjam de forma natural, este aspeto não se concretizou na prática já que lhes apresentou uma pergunta inicial simples, formulada por si, com objetivo restrito de recolher os dados.

2. Planeamento da recolha de dados. Nesta etapa concebe-se e implementa-se um plano apropriado para selecionar e recolher os dados (Franklin et al., 2007). Verifica-se que os professores têm revelado pouca experiência com o raciocínio e com a tomada de decisões necessários para o planeamento da recolha e da organização de dados ou em apoiar os alunos neste trabalho (Makar & Fielding-Wells, 2011). Santos e Ponte (2014) referem que a futura professora estudada estabelece de antemão o plano de uso de questionários e também os tipos de perguntas a usar, reproduzindo experiências formativas suas. Quanto à recolha de dados, os futuros professores tendem a considerar esta fase confusa, demorada e barulhenta (Santos, 2015).

3. Organização e tratamento dos dados. Nesta etapa, resume-se a informação através de métodos de análise estatística (tabelas de frequências, gráficos e medidas) (Franklin et al., 2007). A este respeito, a investigação tem mostrado que os professores revelam dificuldades em selecionar os métodos de análise mais adequados à natureza dos dados (Fernandes et al., 2019, Leavy, 2010), detendo um conhecimento estatístico marcadamente processual que projetam no ensino deste tema (Santos 2015).

4. *Interpretação dos resultados e formulação de conclusões.* Nesta etapa, interpretam-se os resultados obtidos e reflete-se sobre a adequação dos dados e a eficácia da análise para formular as conclusões e responder às questões iniciais, fornecendo argumentos fortes baseados nessa mesma análise (Henriques & Oliveira, 2012). A complexidade desta etapa para os professores reside no facto de esta requerer um raciocínio forte que permita interligar e relacionar a análise de dados, as conclusões e a questão de investigação, mobilizando conhecimento processual e conceptual (Makar & Fielding-Wells, 2011). Os professores do estudo de Leavy (2010), por exemplo, revelaram um conhecimento processual que se traduziu numa fraca compreensão das medidas estatísticas e os levou a subestimarem a sua complexidade. Assim tiveram dificuldades em compreender a relação entre as medidas estatísticas, as suas propriedades e o impacto da forma da distribuição na sua representatividade. No estudo de Santos (2015), por exemplo, uma futura professora mostrou situar-se num nível avançado de interpretação gráfica “Ler além dos dados” (Friel et al., 2001), contudo, promove o desenvolvimento de um nível mais elementar ao nível de “ler os dados”, junto dos seus alunos.

Conhecimento do professor para ensinar Estatística.

No estudo do conhecimento do professor, o conhecimento pedagógico do conteúdo (Shulman, 1986) constitui uma referência a nível internacional, que estabelece que para ensinar o professor necessita de conhecimento do conteúdo, mas também do conhecimento de exemplos, explicações, modelos e representações que permitem tornar esse conteúdo compreensível para os alunos. Em Portugal, impulsionado pela teoria de Shulman (1986) e harmonizando-se com ela, surge o conhecimento didático (Rodrigues & Ponte, 2022). Este é um tipo de conhecimento que é essencialmente orientado para a prática letiva com Matemática, constituindo esta seu o cerne, onde se tomam as decisões mais importantes que regulam e orientam toda a atividade de ensinar. Inclui quatro componentes indissociáveis que estão sempre mais ou menos presentes sempre que o professor ensina Matemática: conhecimento do conteúdo (Estatística), conhecimento dos alunos e da aprendizagem, conhecimento do currículo e o conhecimento do ensino (prática letiva) (Canavarro, 2003; Ponte, 2010, 2012; Ponte & Oliveira, 2002).

O *conhecimento de Estatística*, inclui o conhecimento de tópicos específicos e relações entre eles, conceitos e procedimentos, bem como o conhecimento da disciplina. Refere-se também à perceção que os professores têm da estatística e a sua aplicação à resolução de problemas (Rodrigues & Ponte, 2022). O *conhecimento dos alunos e da aprendizagem* refere-se a um conhecimento profundo dos alunos como pessoas, dos seus interesses, gostos, valores, referências culturais e da forma como eles aprendem (Ponte, 2012). O *conhecimento do currículo* engloba o conhecimento das finalidades, dos objetivos e orientações gerais do ensino da Matemática, os quais o professor deve saber adaptar aos diferentes contextos educacionais (Rodrigues & Ponte, 2022). *O conhecimento da prática letiva* inclui todo o conhecimento que é mobilizado pelo professor antes da aula, em termos de preparação bem como depois, em termos de reflexão, mas o seu núcleo essencial diz respeito ao conhecimento sobre a condução da aula de Matemática. Os processos de planear, conduzir e refletir sobre o desenvolvimento de uma investigação estatística em sala de aula podem evidenciar este tipo de conhecimento (Rodrigues & Ponte, 2022).

Metodologia

Este estudo adotou uma metodologia de natureza qualitativa, ancorada no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Concretizou-se através de um estudo de caso (Patrício, 2022) de uma professora de Matemática do 2.º ciclo com cerca de dezasseis anos de experiência, Inês, nome fictício, já que a sua finalidade era evidenciar-se as suas particularidades à luz do quadro teórico de referência, confrontando-o com outros casos já existentes na literatura como forma de mapear de maneira geral a temática em estudo, almejando generalizar para a teoria e levantar novas questões para futuras investigações (Ponte, 2006). Utilizaram-se diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados que lhe conferiram robustez (Yin, 2010): dois entrevistas semiestruturadas (E) (antes e após a recolha de dados); entrevistas informais após cada aula observada (RAO); observação não participante (AO) de sete aulas com o desenvolvimento de uma investigação estatística, adaptada de Sousa (2002) (Anexo 1); observação participante das sessões de trabalho colaborativo (STC); análise documental dos planos de aula realizados pela professora.

Este estudo teve uma abordagem colaborativa. A professora integrou juntamente com a investigadora um grupo de trabalho colaborativo que se assumiu como um importante veículo que pretendeu fornecer o contexto para que o conhecimento da professora se revelasse, se clarificasse e se aprofundasse, já que Inês nunca tinha desenvolvido investigações estatísticas em sala de aula (Boavida & Ponte, 2002). Nele se selecionou a tarefa de investigação estatística a desenvolver com os alunos, adaptada de Sousa (2002) (Anexo 1), se discutiram ideias fundamentais sobre Estatística e se preparou a prática letiva e se refletiu sobre ela.

O modelo adotado para a análise de conteúdo na presente investigação (Figura 1) teve como referência o modelo do *conhecimento didático do professor* de Matemática (Canavarro, 2003; Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002), a partir do qual se definiram duas unidades de análise: *(i) o conhecimento de Estatística; (ii) conhecimento sobre o ensino da Estatística*.

Relativamente à unidade de análise i), que é aquela a que se refere o presente estudo, estabeleceram-se como categorias de análise as quatro etapas de uma investigação estatística enunciadas por Martins e Ponte (2010) e as subcategorias referentes ao *conhecimento de conceitos de organização e representação dos dados* presentes no PMEB (ME, 2007) e outras que emergiram da análise de dados.

Unidade / Categorias	Conhecimento de Estatística
Etapa 1 - Formular questões de investigação	- Formulação de questões estatísticas - Variáveis estatísticas (natureza)
Etapa 2 – Planeamento da recolha de dados	- População e amostra - Dados (natureza) - Métodos de recolha de dados - Recolha de dados
Etapa 3 – Organização e tratamento de dados	- Tabelas de frequências - Representações gráficas: seleção; construção - Medidas estatísticas: seleção; determinação; significado
Etapa 4 – Interpretação dos resultados e formulação das conclusões	- Interpretação dos dados: Análise de representações gráficas; Análise das medidas estatísticas - Formulação de conclusões: Conclusões sustentadas pelo estudo; Resposta à questão inicial do estudo; Novas questões suscitadas pelo estudo.

Figura 1. Unidades, categoria e subcategorias de análise (Martins & Ponte, 2010; ME, 2007; Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002) (adaptado)

Resultados

Durante o desenvolvimento da investigação estatística, o *conhecimento de Estatística sobre as suas diferentes etapas*, emergiu em alguns episódios das aulas, os quais se passam a analisar por etapa.

Etapa 1: Formulação das questões de investigação

No arranque da investigação, Inês mostrou saber determinar se uma questão de investigação é adequada, ou seja, se é de natureza estatística (Burguess, 2009) e revelou conhecer a importância de se formularem questões de investigação claras e inequívocas para que os objetivos da investigação se vissem cumpridos, ao encontro do que defendem Makar e Fielding-Wells (2011).

> Professora: Será que a nossa pergunta pode ficar no ar? Vocês acham que devemos escrever assim "Diz caraterísticas tuas psicológicas." ou devemos fazer uma pergunta mais fechada?
>
> Aluno: Fechada. Só podem escolher das opções que estão lá.
>
> Professora: Exatamente, M.! Então, vocês têm que perceber quando vão fazer a vossa questão que tipo de resposta é que querem, certo. Percebido? (AO_2)

Etapa 2: Planeamento da recolha de dados

A professora revelou um conhecimento adequado sobre os conteúdos "natureza dos dados" "população e amostra" e "sondagem". Contudo, mostrou ter uma noção limitada sobre o significado do termo "Censo", parecendo restringi-lo ao Recenseamento da População Portuguesa realizada pelo Instituto Nacional de Estatística e não o identificando com o estudo que estava a desenvolver com os alunos na sua turma.

> É de tal maneira complicado estudar a população toda que só se faz esses estudos [Censos] de dez em dez anos. De resto, fazem-se estudos mais pequeninos. Está bem.
>
> Então aqui no nosso estudo a população é igual à amostra (AO_3).

Quanto aos métodos de recolha de dados, Inês mostrou ter algum conhecimento sobre as implicações da natureza das variáveis na seleção das técnicas de recolha de dados, mais evidente no caso dos dados de natureza contínua, que cuidou que fossem recolhidas por medição. Revelou uma maior predileção por questionários, tal como no estudo de Santos e Ponte (2014), com recurso a questões de resposta fechada com hipóteses de resposta, talvez por lhe ser mais familiar esta técnica. Para com as restantes técnicas de recolha de dados (observação, entrevista), Inês mostrou um menor à-vontade, pois não previu a necessidade de elaboração de folhas de registo de dados no caso destas. "Eu nem sequer tinha propriamente pensado muito no assunto [folhas de registo de dados]" (STC_8). Mostrou também alguma dificuldade em estabelecer um plano de recolha de dados adequado para variáveis sobre aspetos de personalidade.

Quanto à recolha de dados propriamente dita, Inês identifica esta etapa como uma atividade confusa, barulhenta e demorada, aspeto também verificado no estudo de Santos (2015).

Etapa 3: Organização e representação de dados

A professora evidenciou um bom domínio do conhecimento processual, pois mostrou saber construir corretamente tabelas de frequências e todas as representações gráficas preconizadas pelo programa (ME, 2007), bem como saber calcular corretamente medidas estatísticas (média, moda e amplitude) de dados simples e agrupados em tabelas de frequências ou gráficos.

Inês mostrou deter igualmente conhecimento concetual, pois evidenciou saber selecionar corretamente representações tabulares e medidas estatísticas adequadas à natureza das variáveis em estudo. No caso dos gráficos, os quais selecionou previamente para os alunos construírem, embora tenha mostrado, no geral, ter noção que há uns mais adequados do que outros, ao contrário do que sugere o estudo de Fernandes et al. (2019), revela não ter muita segurança nesse seu conhecimento pois não se compromete muito com esta ideia junto dos alunos. Outras vezes, perdeu o foco da adequação em prol do cumprimento dos conteúdos programáticos, aspeto que muito pesava nas suas decisões, para garantir a construção de gráficos diversificados dentro de cada grupo.

Etapa 4: Interpretação de dados e formulação das conclusões

No que concerne à interpretação de dados, Inês evidenciou igualmente conhecimento concetual. Relativamente à análise das representações gráficas, revelou situar-se num nível avançado de interpretação gráfica "Ler além dos dados" (Friel et al., 2001), contudo, exigiu frequentemente um nível de interpretação mais elementar ao nível de "ler os dados", ao encontro do estudo de Santos (2015). Assim, a professora mostrou saber analisar as relações implícitas no gráfico, como fazer estimativas relativamente à ordem de grandeza da média em relação à moda num gráfico de barras.

Já quanto à análise das medidas estatísticas, Inês evidenciou conhecer as propriedades da média, em particular da sua fraca resistência, conhecer o seu significado e a forma como elas se relacionam, ao contrário do estudo de Caseiro e Machado (2019). Revela uma compreensão concetual do significado de média, contudo situada ao nível mais elementar de "divisão por partilha", tal como em Rodrigues e Ponte (2021).

> Professora: […] A média é um valor que me dá uma ideia como se toda a gente fizesse o mesmo. Toda a gente ganhasse o mesmo, toda a gente pesasse o mesmo, toda a gente medisse o mesmo! Então, se este fosse um valor real, todos vocês, em média, praticavam quantas horas de desporto por semana?
>
> Aluno: Quase 5 horas.
>
> Professora: […] não é um valor que corresponda completamente ao perfil de cada um de vocês, pois não?! Digam-me uma coisa: Será que neste conjunto de dados, há algum valor que também vai influenciar a média como também acontecia há bocadinho?
>
> Alunos: …
>
> Professora: Há algum valor que vá influenciar a média esperada, ou não?
>
> Aluno: As 20 horas.
>
> Professora: As 20 horas, que nós até sabemos que é verdade, sim senhor, e vai influenciar. Portanto, ali o desporto que a A. e a C. praticam é como se tivesse a passar para vocês! […] Qual era o valor esperado? Qual era a moda? É praticar quantas horas?
>
> Aluno: Duas.

Mostra conhecer o impacto da forma da distribuição na representatividade da média, ao contrário do estudo de Rodrigues e Ponte (2021), mas não retira grandes implicações práticas, pois evidencia não saber justificar quando uma medida de centro é mais útil do que outra, como no estudo de Leavy (2010).

No que se refere à formulação das conclusões, a resposta às questões de investigação foi um objetivo sempre presente para Inês, incitando os alunos à escrita de um texto final a caraterizar o aluno típico da turma como resposta ao problema inicial, diferentemente de uma futura professora do estudo de Santos e Ponte (2014). Com efeito, a professora relacionou sempre as questões iniciais com a análise de dados para formular as conclusões (Makar & Fielding-Wells, 2011) insistindo na sua sustentação através da incorporação de argumentos provenientes da análise, tal como preconizam Henriques e Oliveira (2012).

> […] vão ter de descrever o aluno típico de acordo com as vossas variáveis.[…] Agora, a vossa tem de ser o mais completo possível […]vão analisar as tabelas de frequências, vão analisar os gráficos, vão analisar as medidas estatísticas e vão elaborar um texto […] (AO_6).

Conclusões

Este estudo indicia que as tarefas de investigação estatística podem constituir um tipo de tarefa complexa, cujo desenvolvimento coloca desafios ao conhecimento estatístico dos professores, os quais são de diferente natureza de etapa para etapa.

É ainda notório no conhecimento de Inês, a herança de uma experiência passada, no seu percurso formativo e profissional, marcada por um ensino da Estatística orientado para uma lógica de trabalho fragmentado, baseado no domínio de procedimentos estatísticos isolados, que dispensa os alunos na tomada de decisões sobre quais os métodos estatísticos devem usar. Todavia, são igualmente evidentes as marcas do seu investimento em formação contínua, e em trabalho colaborativo, como é o caso deste projeto, que se traduzem numa intenção emergente da parte da professora em proporcionar aos seus alunos um ensino da Estatística que apele mais ao desenvolvimento de capacidades de nível concetual nos alunos e mais concordante com as orientações curriculares então em vigor (ME, 2007).

Assim, Inês revelou, sobre as diferentes etapas de uma investigação estatística, um conhecimento estatístico adequado, nomeadamente a nível processual, que foi onde mais se destacou e, principalmente, na etapa de *Organização e tratamento dos dados*.

A nível concetual, o conhecimento da professora também se evidenciou. Contudo, quando o trabalho estatístico apelava à tomada de decisões importantes sobre a adequação dos métodos e processos estatísticos, que evocam um conhecimento bem situado sobre investigações estatísticas, como é no caso da *etapa de planeamento da recolha de dados*, verificou-se que o conhecimento da professora tem margem para se aprofundar. O mesmo aconteceu, no caso da *etapa de interpretação de resultados e formulação das conclusões*, em que é preciso tomar decisões sobre a representatividade dos resumos estatísticos, gráficos e numéricos, que transformam os dados em informação para responder às questões de investigação, verifica-se que um conhecimento marcadamente processual, herança da experiência passada da professora, limitou o alcance e sustentação das conclusões formuladas.

Na medida que as investigações estatísticas têm vindo a assumir uma centralidade crescente no currículo (Canavarro et al., 2021), é importante que os professores estejam preparados para ensinar Estatística por esta via. Assim, este estudo parece sugerir, ao encontro do que defendem Santos e Ponte (2014), a necessidade de os professores aprofundarem o seu conhecimento de Estatística e da sua didática, através de experiências de formação centradas no desenvolvimento de investigações estatísticas, para que as orientações curriculares sejam uma realidade na prática dos professores e estes possam preparar adequadamente os seus alunos para as exigências da sociedade do século XXI (Batanero, 2011).

Referências bibliográficas

Batanero, C. (2011). Teachers' beliefs, attitudes and knowledge. In C. Batanero, G., Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 497-418). Springer.

Boavida, A M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 43-55). APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994) *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Burgess, T. A. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(1&2), .3–24.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos.* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. G. (2021). Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Caseiro, A., & Machado, R. (2019). A experiência de realização de projetos em educação estatística: um estudo com futuros professores dos primeiros anos. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Online: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Fernandes, J. A., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. MolinaPortillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Fernandes, J. A. (2009). Ensino e aprendizagem da Estatística: Realidades e desafios. In *Actas do XIXEIEM — Vila Real.* https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/9368

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum Framework.* American Statistical Association. http://www.amstat.org/

Friel, S. N., Curcio, F., and Bright, G. W., (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education* 32 (2): (pp. 124-158): http://www.jstor.org/stable/74967

Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 35-59.

Henriques, A., & Oliveira, H. (2012). Investigações estatísticas: um caminho a seguir. *Educação e Matemática, 120*, 3-8.

Leavy, A. (2010). Teaching statistics at the primary level: Identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. In *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics. Liubliana, Eslovénia.*

Martins, M. E. G. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados.* Ministério da Educação, DGIDC.

Makar, K., & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 347-358). Springer.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

NCTM. (2007). Princípios e n*ormas para a matemática escolar* (tradução do original em inglês). APM e IIE.

Patrício, M. S. (2022). *Conhecimento sobre estatística e o seu ensino com investigações estatísticas: um estudo de caso no 2.º Ciclo do Ensino Básico*. [Doctoral dissertation, Universidade de Évora]. Repositório da Universidade de Évora. http://hdl.handle.net/10174/34883

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2010). O papel do professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que mudanças? In GTI (Ed.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 61-88). APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Coord.), *Teoria, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83–98). GRAO.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, *11*(2), (pp.145–163).

Rodrigues, B., & Ponte, J. P. (2021). Da formação à prática: Experiências de duas professoras sobre as investigações estatísticas no envolvimento do aluno. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n4p402-409.

Rodrigues, B. M. B., & da Ponte, J. P. (2022). Teacher Education and Didactics Knowledge to Teach Statistics: A Case Study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(2), 225-243.

Santos, R. (2015). *O conhecimento de estatística e sua didática de futuros professores* (Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa, Instituto de Educação). https://repositorio.ul.pt/handle/10451/19954

Santos, R., & Ponte, J. P. (2014). Learning and teaching statistical investigations: A case study of a prospective teacher. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education (Proceedings of the 9th International Conference on the Teaching of Statistics, Flagstaff, Arizona, July (pp.13–18). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* (pp. 4-14).

Sousa, O. (2002). *Investigações estatísticas no 2.º ciclo do ensino básico* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa).

Steen, L. (2002). *A problemática da literacia quantitativa. Educação e Matemática*, *69*, (pp.79-88).

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Bookman.

ANEXO 1

Como são os alunos da minha turma?[2]

Supõe que queres comunicar a um aluno de um país distante, ou mesmo, quem sabe, a um extraterrestre, como são os alunos da tua turma. Para isso, necessitas de caracterizar o aluno típico da turma, recolhendo dados sobre algumas das suas características. Por forma a melhor conseguires transmitir o que pretendes, necessitas ainda de organizar e representar esses dados e de recorrer a medidas estatísticas que te ajudem a descrevê-lo. Todo este processo inclui diversas etapas que é importante que sigas para que, no fim, escrevas uma pequena carta caracterizando o aluno típico da turma, integrando as diferentes características que foram estudadas.

1.ª etapa

Preparação das questões de investigação

Discute, com os teus colegas, sobre:

1. Os dados (físicos, sociais, culturais, ...) que devem entrar na caracterização do aluno típico da turma;
2. Como pensas que vai ser o perfil do aluno típico da tua turma;
3. Será necessário traçar um perfil para os rapazes e outro para as raparigas? Justifica a decisão tomada.

2.ª etapa

Preparação da recolha dos dados

1. Escreve na forma de pergunta cada uma das características a investigar.
2. Que respostas pensas obter para cada pergunta?
3. De que modo (através de observação, medição ou inquérito) podes obter as respostas?
4. Prepara folhas de registo para os dados que vais recolher. Usa uma folha para cada uma das características que vais estudar.
5. Qual é a natureza dos dados em cada caso? Diz quais são os que dizem respeito a qualidades e quais os que foram obtidos por contagem ou medição (qualitativos discretos ou contínuos, respectivamente).

3.ª etapa
Organização e representação dos dados

Nesta etapa vais tentar descobrir formas de organizar e representar os dados. **Para cada conjunto de dados que recolheste**, responde às seguintes questões:

1. Organiza os conjuntos de dados em tabelas de frequências absoluta e relativa.
2. Para te ajudar a resumir os dados podes calcular algumas medidas estatísticas:

   a) Existe algum valor mais frequente. Se sim, diz qual é (moda)?

   b) Existe algum número que é o ponto de equilíbrio de todos os valores? Se sim, calcula-o (média). Será que podes calcular a média para todos os tipos de variáveis?

   c) Se o conjunto de dados foi obtido por contagem ou medição, indica qual é o valor mínimo, o valor máximo e a distância entre estes dois valores (amplitude). Achas que os teus dados estão muito concentrados ou estão espalhados?
3. Seleciona a resentação gráfica que te pareça mais adequada (diagramas de caule e folhas, pictogramas, gráficos de barras e/ou gráficos circulares) para cada um dos teus conjuntos de dados.

4.ª etapa
Interpretação dos dados

Analisa os vários conjuntos de dados que tu e os teus colegas obtiveram. Compara as diferentes representações que apareceram.

1. Escolhe, justificando, aquela que, em cada caso, dá uma melhor visão dos dados.
2. Repara nas respectivas medidas estatísticas, usadas para resumir a informação contida num conjunto de dados. Consegues dizer quando é preferível utilizar uma ou outra, ou se será indiferente a sua utilização?
3. Consegues dizer qual o conjunto de dados com maior e com menor amplitude? O que quererá isto dizer?

Escreve agora a tua carta dando a conhecer os alunos da tua turma, integrando as diferentes características que foram estudadas.

(Não te esqueças de referir os aspectos positivos e negativos acerca da tua turma que a investigação realizada permitiu fazer sobressair e adiantar possíveis formas de perpetuar os positivos e extinguir os negativos.)

Discutindo uma Tarefa para a Formação como recurso para desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor no âmbito da rotação

Discussing a Task for Teacher Education as a resource to develop teachers' Interpretative Knowledge in the scope of rotation

Caroline Silva[1], Miguel Ribeiro[2]

[1]Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, caroldesouza86@gmail.com

[2]Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, cmribas78@gmail.com

Resumo. *Uma prática central no trabalho do professor de matemática é a interpretação das produções dos alunos referentes à realização de tarefas em sala de aula. Para que essa interpretação contribua para discussões matemáticas que levam ao entendimento dos alunos é requerido que o professor seja detentor de um conhecimento matemático especializado denominado Conhecimento Interpretativo. O Conhecimento Interpretativo permite ao professor entender, interpretar e propor feedback com base nas formas de pensar expressas nas produções dos alunos, sejam elas incorretas ou não usuais. Todavia, por ser especializado, desenvolver esse conhecimento demanda contextos formativos com essa intencionalidade. Neste texto apresenta-se e discute-se a estrutura, o conteúdo e os objetivos de uma Tarefa Interpretativa, que corresponde a um tipo específico de Tarefa para a Formação e que se associa ao objetivo de aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor no âmbito da rotação.*

Abstract. *One of the core practices of the work of teaching concerns the interpretation of students' productions. In order to allow such interpretation to contribute to promote students understanding it demands teachers to have the so called Interpretive Knowledge. Such Interpretative Knowledge allows the teacher to understand, interpret and propose feedback grounded on students thinking expressed in their productions, whether incorrect or unusual. However, because it is specialized, developing this knowledge, demands educational contexts with this intentionality. In this paper we present, discuss the structure, content and goals of one Interpretive Tasks, which correspond to a specific type of Task for Teacher Education, aiming at accessing and developing the teachers Interpretative Knowledge in the scope of the rotation.*

Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo; Tarefas Interpretativas; Rotação.

Keywords: Interpretive Knowledge; Interpretive Tasks; Rotation.

Introdução

Entre as práticas a serem realizadas pelo professor, a interpretativa é central, pois o trabalho do professor em sala de aula sustenta-se na implementação de tarefas matemáticas (Mason & Johnston-Wilder, 2006) e na interpretação das produções dos alunos referentes a essas tarefas. Para o professor entender, interpretar e atribuir significado às produções dos alunos, principalmente as incorretas ou não usuais – que podem ser matematicamente adequadas, porém inesperadas – é requerido um conhecimento matemático especializado denominado Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014).

O CI não se desenvolve na prática de sala de aula, necessitando de contextos formativos especializados com esse fito (Ribeiro, Mellone, & Jakobsen, 2013). Tais contextos são associados ao uso de recursos intencionais para desenvolver o CI. Exemplos desses recursos são as Tarefas Interpretativas (Mellone et al., 2020), que correspondem a um tipo específico de Tarefa para a Formação (Ribeiro, Almeida, & Mellone, 2021).

As tarefas que focam tópicos da Geometria têm sido negligenciadas nas aulas de matemática, sendo que um dos motivos que sustenta essa negligência é a falta de conhecimento geométrico por parte do professor (e.g., Couto & Ribeiro, 2017; Gomes, 2012). No âmbito da Geometria, as transformações geométricas isométricas são tópicos em que os professores apresentam dificuldades, consequentemente, os alunos também (e.g., Gaspar & Cabrita, 2014; Gomes, 2012), por isso, são considerados elementos críticos no conhecimento do professor e bons candidatos para serem discutidos em contextos formativos que visam desenvolver o CI.

Esta comunicação parte de um projeto de pesquisa mais amplo que foca a importância e o papel das Tarefas para a Formação de professores e no desenvolvimento do seu CI. Temos por intuito apresentar e discutir a estrutura, o conteúdo e os objetivos de uma Tarefa Interpretativa no âmbito da transformação geométrica rotação.

Algumas discussões teóricas

O Conhecimento Interpretativo (CI) é um conceito teórico sobre o conhecimento do professor de matemática associado à sua prática profissional especializada de interpretar produções dos alunos (Jakobsen et al., 2014). Segundo a Enciclopédia Springer Nature, o Conhecimento Interpretativo:

> Refere-se ao conhecimento matemático amplo e profundo que permite aos professores apoiarem os alunos no desenvolvimento do seu próprio conhecimento matemático tendo como ponto de partida os seus próprios raciocínios e produções, independentemente de serem não standard ou incorretas. O CI complementa o conhecimento de erros típicos ou estratégias dos alunos, com o conhecimento de possíveis origens de erros típicos e atípicos e o conheci-

> mento do uso dos erros como uma efetiva fonte de aprendizagem (Di Martino, Mellone, & Ribeiro, 2020, p. 3).

De natureza matemática, o CI inclui o conhecimento dos tópicos a serem ensinados, as conexões a serem estabelecidas entre esses tópicos e as formas de produzir em matemática, associando as especificidades desse conhecimento à compreensão do professor dos motivos que sustentam as dificuldades dos alunos nesses tópicos e os principais erros cometidos. Isso relaciona-se com assumir como ponto de partida o quê e como os alunos conhecem para uma prática profissional do professor de possibilitar que os alunos entendam o que e por que o fazem a cada momento, a partir dos raciocínios e formas de pensar matematicamente expressos em suas produções.

Considerando o CI como um conhecimento especializado para a prática profissional do professor, essa especialização é associada ao conceito do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018). O CI sustenta a prática interpretativa, pois é o conhecimento do professor que molda os objetivos de ensino e a sua prática pedagógica – o que e como o professor diz e faz – (Ribeiro et al., 2022) e possibilita que ele entenda, interprete e atribua significado às produções dos alunos, sejam elas incorretas ou não usuais (Di Martino et al., 2020).

Interpretar produções dos alunos demanda um conhecimento matemático além do *saber fazer*, incluindo também entender como e porque se faz, quando se pode fazer e conhecer as características do resultado ao utilizar procedimentos matemáticos. Envolve conhecer definições, propriedades e fundamentos de uma variedade de tipos de registros de representação, fenomenologia e aplicações dos tópicos e que sustentam o fazer matemático em contexto de prática matemática do professor (Carrillo et al., 2018).

O CI também se relaciona com conhecer uma diversidade de formas de solucionar um problema ou representar algo em matemática, que corresponde aos elementos do espaço solução do professor – mesmo que o problema apresente uma única solução (Jakobsen et al., 2014). Todavia, geralmente o espaço solução dos professores é composto por um único elemento (Jakobsen et al., 2014), o que significa que o professor conhece essencialmente um modo de proceder matemático. Logo, quando o professor se depara com uma produção fora do seu espaço solução, ele apresenta dificuldades em interpretá-la, podendo considerá-la como incorreta, apenas por ser diferente da sua.

O CI, que sustenta a prática interpretativa, relaciona-se com a ideia de *noticing*, na perspetiva de ser um olhar específico para a prática profissional do professor (Mason, 2002) para atribuir significado ao pensar matemático dos alunos que possibilite entender, interpretar e decidir diante desse pensar (e.g., Fernández et al., 2018; Ivars, Fernandéz, & Llinares, 2019). *Noticing é, assim,* uma competência profissional, mas por considerarmos a necessidade de um foco no conhecimento matemático especializado em contextos de (e para) práticas profissionais interpretativas, assume-se explicitamente a necessidade de focar a atenção no conhecimento matemático significativo (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010) dos alunos e isso só será possível se essa competência profissional for desenvolvida e discutida em contextos matematicamente significativos.

Consideram-se três categorias de interpretação (Mellone et al., 2017): (i) Interpretação avaliativa relaciona-se com avaliar como correta ou não a produção do aluno e apresentar a sua própria forma de fazer – impondo como correta a sua forma (única) de fazer (Mellone et al., 2023); (ii) Interpretação para a prática letiva associa-se a repensar o planeamento e propor tarefas futuras, conforme as produções dos alunos; (iii) Interpretação como pesquisa envolve reanalisar a sua produção, inclusive a sua formalização matemática, procurando identificar alguma coerência nas produções dos alunos, ainda que estejam fora do seu espaço solução.

Após interpretar as produções dos alunos, o professor propõe *feedback* que é uma maneira dele comunicar com os alunos, possibilitando que revejam a sua produção, repensem as estratégias utilizadas e desenvolvam o seu entendimento matemático (Santos & Pinto, 2009). Esse será um *feedback* do tipo construtivo (Di Martino et al., 2017) e permite o professor interpretar para além de possíveis erros ou estratégias não usuais.

Outros tipos de *feedback* (Galleguillos & Ribeiro, 2019) são: (i) *feedback* sobre como resolver o problema – orientações instrutivas de procedimentos a serem seguidos para resolverem um problema específico; (ii) *feedback* confuso – apesar de correto é incompreensível para o aluno devido à complexidade das orientações; (iii) contraexemplo como *feedback* – contém um exemplo explicativo do porquê a resolução do aluno é incorreta; (iv) *feedback* superficial – orientação insuficiente ou inconsistente, que não ajuda o aluno entender os seus erros.

Considerando as dificuldades dos alunos e professores, um dos tópicos matemáticos problemáticos são as transformações geométricas isométricas (e.g., Gaspar & Cabrita, 2014; Gomes, 2012; Küchemann, 1981). A rotação é uma dessas transformações geométricas isométricas, sendo considerada a mais difícil de ser entendida (Gomes, 2012). Efetuar uma rotação corresponde a implementar um algoritmo que envolve a figura inicial, a partir de um centro (ponto ou reta) e um ângulo de rotação, obtendo uma imagem congruente à inicial.

Algumas dificuldades dos alunos e dos professores (Gaspar & Cabrita, 2014; Gomes, 2012) referem-se a: entender que para efetuar a rotação, deve-se seguir um conjunto de procedimentos (algoritmos) e compreender que a figura se mantém congruente com a imagem após o movimento realizado – isometria (Bairral & Silva, 2011); identificar o centro de rotação, principalmente, quando ele não pertence à figura (Gaspar & Cabrita, 2014; Küchemann, 1981); identificar que o movimento realizado é a rotação, confundindo-a com translação (Abar & Alencar, 2011) e com reflexão (Gomes, 2012). Estas dificuldades associam-se a uma falta de entendimento do que difere cada uma das transformações geométricas (além do nome).

Tarefa para a Formação: o caso da Tarefa Interpretativa

Quando conceitualizamos um contexto formativo, procuramos discutir contextos da prática esperada – atual e futura. Considerando que a prática matemática do professor se sustenta em elaborar e implementar tarefas matemáticas (Mason & Johnston-Wilder, 2006) também em contextos formativos assumimos essa estrutura como foco. Todo o contexto formativo se configura como um contexto de recolha de informações para responder a alguma questão de pesquisa e, por isso, toda a Tarefa para a Formação – TpF (Ribeiro et al., 2021) se associa a uma questão de pesquisa.

Estas TpF formam parte de um conjunto de documentos que foram preparados como forma de sustentar a formação a ser realizada: a Tarefa Formativa. Assim, toda Tarefa Formativa é composta por quatro documentos: (i) Tarefa para a Formação; (ii) documento com as cinco dimensões centrais para a implementação da tarefa em sala de aula; (iii) documento do professor e (iv) documento do formador.

(i) Tarefa para a Formação: tem como objetivo aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor (Ribeiro et al., 2021) em determinado tópico. É conceitualizada focando tópicos problemáticos para os alunos e professores, estruturadas em duas ou três partes. A Parte Preliminar é proposta quando a tarefa é de introdução ao tópico e associa-se ao objetivo de aceder ao conhecimento do professor sobre o tópico foco da discussão, atentando a alguma dimensão do conhecimento matemático ou pedagógico e procura estabelecer um ponto de partida para as discussões a serem efetuadas. A Parte I é estruturada a partir de uma tarefa para o aluno (indicada dentro de um retângulo) seguida de questões para o professor, visando desenvolver o seu Conhecimento Especializado.

Um tipo de TpF (Ribeiro et al., 2021) foca no desenvolvimento do CI, e nesses casos denominam-se de Tarefas Interpretativas – TI (Mellone et al., 2020), que contém uma Parte II, tipicamente composta por um conjunto de produções de alunos (escritas, em vídeo, discussões de sala de aula) escolhidas porque se mostram matematicamente potentes para desenvolver o CI (Mellone et al., 2020) e a solicitação para o professor interpretar e propor um *feedback* construtivo.

(ii) documento com as cinco dimensões: contém um conjunto de indicações centrais para o professor implementar, discutir e atingir os objetivos de aprendizagens matemáticas da tarefa para o aluno (e.g., Ribeiro & Torrezan, 2022): (1) Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa; (2) Recursos necessários e forma(s) de trabalho dos alunos; (3) Habilidade da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) associada à tarefa; (4) Possíveis dificuldades dos alunos; (5) Comentários para a implementação e discussões matemáticas associadas.

(iii) documento do professor: engloba todos os elementos centrais do conhecimento matemático especializado do tópico abordado na TpF que se almeja desenvolver nos professores participantes da formação (Ribeiro et al., 2021) como definições matemáticas, registos de representação, procedimentos e possíveis conexões entre o tópico central da tarefa e outros tópicos.

(iv) documento do formador: contém orientações para o formador implementar a TpF. Indica os objetivos formativo e de pesquisa, bem como as discussões relativas às especificidades da formação que se pretende realizar, detalhando os objetivos de cada questão da TpF e o Conhecimento Especializado e Interpretativo que se espera desenvolver. Também contém exemplos de possíveis respostas, do conhecimento envolvido e a explicitação da dinamização da discussão a ser realizada em cada etapa (Ribeiro et al., 2021).

No trabalho que desenvolvemos considera-se pesquisa e formação de forma imbricada, pelo que, toda TI é sempre associada a uma questão de pesquisa. Como ponto de partida para discutir a conceitualização, estrutura e conteúdo das TI trazemos um exemplo de uma destas Tarefas para a Formação no âmbito da rotação (ver Tabela 1). A questão de pesquisa associada à posterior implementação desta TI é: *que estrutura, conteúdo e objetivos uma Tarefa Interpretativa deve possuir para aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo de professores de matemática que participam num contexto formativo com foco nos procedimentos, propriedades e definições de rotação?*

Tabela 1. Tarefa Interpretativa no âmbito da rotação[1]

Entendo a rotação
Parte Preliminar
1. O professor Mário quer discutir com seus alunos dos 7.º anos a definição matemática de rotação. Ele encontrou algumas definições e vai levá-las para discutir numa formação da responsabilidade do CIEspMat[2] , pois necessita de ajuda para saber qual a definição é mais adequada para discutir com os seus alunos. Ajude o professor a escolher a(s) definição(ões) mais adequada(s) apresentadas abaixo e justifique porquê.
Definições de rotação encontradas pelo professor Mário:
(A) Numa rotação, toda figura roda em relação a um ponto denominado centro de rotação. As figuras original e final têm as mesmas medidas, e os elementos da figura original e final estão à mesma distância do centro de rotação.
(B) A simetria de rotação ocorre quando uma figura plana gira em torno de um ponto, de acordo com um ângulo (com medida de abertura entre 0º e 360º), em certo sentido (horário ou anti-horário). Com isto, obtemos sempre uma figura que mantém a mesma forma e o mesmo tamanho da figura original.

[1] Apresenta-se uma síntese da TI. Algumas questões foram reduzidas de modo a cumprir com o limite de espaço disponível.

[2] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br

Parte I

Tarefa: Rodando cartas[3]

(Deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder àa questões. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

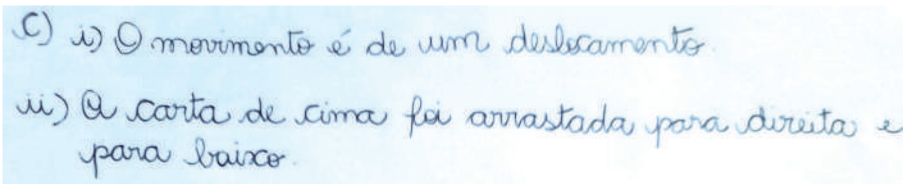
1. Observe as Situações com cartas de um baralho "dama":

   c) Registe o que lhe chamou a atenção ao observar as cartas de cada uma das Situações.
   d) Na Situação 1 consegue identificar qual o movimento efetuado para construir a carta toda a partir de uma de suas partes? Justifique.
   e) Na Situação 2:
      i) Consegue identificar qual o movimento efetuado para obter a nova carta? Se sim, descreva-o, se não justifique.
      ii) Explique os procedimentos que se podem efetuar para obter a nova imagem.
   f) Em cada situação consegue identificar algum ponto que se mantém fixo, quando se efetua o movimento? Justifique.

2. Considere a tarefa anterior:
   i) Resolva a tarefa por si mesmo (sem pensar num contexto de ensino).
   ii) Qual será a maior dificuldade dos alunos ao resolver esta tarefa? Justifique a sua resposta.
   iii) O que os alunos já têm de conhecer para realizar essa tarefa? Justifique a sua resposta.

Parte II

1. Após implementar esta tarefa com seus alunos do 7.º ano D, o professor Mário obteve algumas respostas e resolveu também levá-las para discutir na formação do CIEspMat. Veja as produções das alunas Aline e Camila referente às questões c) e d) da tarefa para o aluno:


C) i) O movimento é de um deslocamento
ii) a carta de cima foi arrastada para direita e para baixo.

Produção de Aline para a questão c).

[3] Adaptado de Paques e Oliveira (2012).

c) i) Apenas a carta foi girada um pouquinho.
ii) Você pega a carta e coloca o dedo em um canto e gira.

Produção de Camila para a questão c).

d) Todos os pontos são fixos.

Produção de Aline para a questão d).

d) Na situação 1 não tem pontos fixos e na situação 2 o ponto fixo é o do canto debaixo esquerdo da carta

Produção de Camila para a questão d).

a) Para cada uma das produções, indique se as considera matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.
b) Proponha um *feedback* a dar às alunas (mais do que dizer se está correto ou incorreto ao professor cumpre atribuir significado às resoluções das alunas de modo a, posteriormente, auxiliar no desenvolvimento do seu conhecimento matemático).

A pergunta da Parte Preliminar procura aceder ao conhecimento do professor associado ao que ele considera ser uma definição matemática (Zazkis & Leikin, 2008) – matematicamente válida – e que seja compreensível para os seus alunos. Para isso, incluem-se "pseudo definições" que se encontram em livros didáticos brasileiros para que reflitam, compreendam e desenvolvam, por meio das discussões a serem realizadas, o que caracteriza uma definição matemática bem como sobre a existência de diferentes definições para um mesmo tópico.

A Parte I contém uma tarefa para os alunos do 7.º ano (12 ou 13 anos), de acordo com os documentos curriculares oficiais brasileiros (Brasil, 2018). Ao solicitar que o professor resolva a tarefa por si mesmo pretende-se aceder ao seu conhecimento matemático que será do nível dos alunos (resolver a mesma tarefa que se espera que os alunos resolvam): movimento efetuado (questão a)); procedimentos realizados para obter a imagem por meio da rotação (questões b) e c) - i); diferenciar a rotação das restantes transformações isométricas (questão c) – ii); procedimentos associados a rotação e os elementos constituintes que determinam essa transformação (questão d). É de notar que as questões da tarefa para o aluno são sempre formuladas considerando as maiores dificuldades identificadas na revisão teórica, o que levou, neste caso específico, há escolha de exemplos cujos centros de rotação pertencem à figura – considerando que esta será uma tarefa de introdução ao tópico (Ribeiro et al., 2021).

A segunda questão para o professor tem como objetivo discutir a antecipação das dificuldades dos alunos na tarefa para que, posteriormente, essa antecipação contribua para identificar e entender melhor os erros presentes nas produções da Parte II. A terceira questão para o professor visa discutir o conhecimento dos alunos (o que e como conhecem ou deveriam conhecer) que fundamentaria a realização da tarefa, por exemplo, para problematizar a equivalência entre reflexão central e a rotação de 180º (Bairral & Silva, 2011) como na Situação 1 da tarefa para o aluno.

A Parte II contém um conjunto de produções de alunos que o professor deverá interpretar e atribuir significado às formas de pensar e proceder. Ao solicitar que indique as produções (in)corretas e os motivos matemáticos que as sustentam (questão a), foca-se a atenção nos níveis de CI.

A produção de Aline para a questão c) foi incluída pois apresenta uma resposta incompleta para o movimento efetuado, expressando a rotação apenas como um deslocamento (em i)); apresenta o erro de considerar o movimento como duas translações (questão ii)). A produção relativa à questão d), não identifica que foi realizado um movimento para obter a carta toda a partir de uma das suas metades, o que procura trazer para a discussão a dificuldade relativa à visualização da rotação já efetuada e a falta de entendimento de que as transformações geométricas são associadas à ideia de movimento.

A produção de Camila para a questão c) foi incluída pois associa-se a um entendimento da rotação como uma volta, mas não especifica a amplitude e sentido do ângulo. Também se associa ao procedimento de como se efetua a rotação, que necessita de ser mais detalhado, de modo a incluir todos os elementos fundamentais da rotação. A produção da questão d) procura possibilitar a discussão da dificuldade e o erro associado, a identificar o centro de rotação como o único ponto que se mantém fixo ao efetuar a rotação (na Situação 1 pertence à figura), apesar de, identificar corretamente esse ponto fixo na Situação 2, que corresponde a um dos vértices da figura.

Estas produções foram incluídas visando discutir a identificação dos erros e conhecimento associado e requerido em termos de estratégias, procedimentos e propriedades da rotação, de modo a atribuir significado aos raciocínios matemáticos das alunas. A opção pela inclusão destas produções está relacionada com o desenvolvimento do hábito de efetuar uma prática interpretativa sustentada em atribuir significado aos motivos matemáticos que sustentam os erros e a entender as estratégias e procedimentos utilizados para resolver a tarefa, envolvendo repensar a sua própria formalização matemática, numa perspectiva de possibilitar chegar até uma interpretação como pesquisa (Mellone et al., 2017).

Ao solicitar a atribuição de um *feedback* (questão b), o objetivo é situar o professor no contexto de sua prática interpretativa, incitando-o a propor um *feedback* construtivo (Di Martino et al., 2017) que envolve interpretar a produção dos alunos para além do certo e errado, considerando como ponto de partida o que e como os alunos revelam conhecer e, a partir disso, propor orientações claras e objetivas que auxiliam os alunos a desenvolver o seu entendimento matemático.

Esta TI forma parte de um conjunto de TpF para um curso de formação contínua de professores que será o contexto da recolha de informações da pesquisa associada à questão:

que Conhecimento Interpretativo revelam professores de matemática que participam num contexto formativo ao resolverem uma Tarefa Interpretativa e as conexões entre rotação, reflexão, translação e simetria? A recolha de informações envolve a implementação de algumas TpF e a discussão, a partir da resolução dos professores.

Considerações finais

Desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor é necessário diante da sua relevância e especialidade para a prática profissional do professor (Jakobsen et al., 2014). Para que esse desenvolvimento ocorra, é essencial, por um lado, desenhar contextos formativos com essa intencionalidade e, por outro lado, desenvolver pesquisa e formação de forma imbricada, que permitam informar sobre o conteúdo desse conhecimento, os seus níveis e como ele se desenvolve.

As transformações geométricas isométricas são um dos muitos tópicos em que os alunos revelam dificuldades (Gaspar & Cabrita, 2014) e os professores também (Gomes, 2012) e são tópicos que fundamentam o entendimento matemático de outros, pelo que se tornam essencial serem um foco de atenção na pesquisa e na formação.

As Tarefas Interpretativas assumem igualmente o papel de instrumento para a recolha de informações e identificação dos níveis de conhecimento dos resolutores, bem como do seu conteúdo, sendo essenciais para que possamos desenvolver formações especializadas e especializantes (Ribeiro et al., 2022). Para que possamos refinar as TpF, o entendimento da prática e o conhecimento do professor, algumas questões que necessitam ser respondidas referem-se a, por exemplo:

(i) Como a natureza, foco e conteúdo das TI impactam nas discussões matemáticas especializadas e na mobilização de conhecimento especializado do professor?
(ii) Quais os elementos das TpF potenciam e limitam (e como e por que isso ocorre) o desenvolvimento do CI (promovem o desenvolvimento de conhecimento entre diferentes níveis)?
(iii) Como o CI se desenvolve em contextos formativos, considerando as mudanças de níveis desse conhecimento ao longo do tempo pela discussão de diferentes tópicos (transformações geométricas isométricas)?

Agradecimentos

O presente trabalho é parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

Referências

Abar, C. A. A. P., & Alencar, S. V. (2011). A gênese instrumental em propostas de atividades com o uso do Geogebra. *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM., 761-773.

Bairral, M. A., & Silva, M. A. (2011). *Instrumentação do Ensino da Geometria*. (Vol.2, 2.ed.). Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ.

Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular. *Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica*.

Carrillo, J. et al. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Couto, S., & Ribeiro, M. (2017). Conhecimento interpretativo do professor que ensina matemática: o caso do cubo. *Espaço Plural*, 18(36), 174-195.

Di Martino, P., Mellone, M., Minichini, C., & Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms. In *Proceedings of Third ERME Topic Conference on Mathematics Teacher Education*, 66-75.

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. In: *Stephen Lerman. (Org.). Encyclopedia of Mathematics Education. 1ed.: Springer International Publishing*, 424-428.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances De Investigación en Educación Matemática*, 13, 39–61.

Galleguillos, J., & Ribeiro, M. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3281-3288). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Gaspar, J. M. P., & Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM., 169–190.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Coimbra: APM., 233–243.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Principles in the design of tasks to support preservice teachers' noticing enhancement. In *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 408-415).

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 135-150.

Küchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics* 11 –16, 137-157. London: John Murray.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Londres: Routledge.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin.

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., & Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. In Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2948-2955). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Mellone, M., et al. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, 22(2), 154-167.

Paques, O. T. W., & Oliveira, S. R. (2012). Oferenda musical de Bach. Série Matemática na Escola. Guia do professor, versão para tela, p. 9. Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1143.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel: PME.

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1-32.

Ribeiro, M., Policastro, M. S., Caldatto, M. E., & Almeida, A. R. (2022). Interpretative knowledge of prospective kindergarten and primary teachers in the context of subtraction. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 24(3), 1-31.

Ribeiro, M., Torrezan, E. (2022). *Conhecimento e prática matemática do professor para entender a medida de uma distância*. Coleção CIEspMat – Formação. (Vol.9). Campinas: Cognoscere.

Mellone, M.; Jakobsen, A.; Ribeiro, M.; Parlati, A. (2023). Ethical dimension in the use of interpretative tasks in mathematics teacher education: division of fractions. In *CERME13* (a aparecer).

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of PME 33,* (Vol. 5, pp.49–56). Thessaloniki: PME.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131–148.

Saberes escolarizados e defasagem da aprendizagem: recomposição da aprendizagem de matemática no pós-pandemia

Schooled knowledge and learning gap: recomposition of mathematics learning in the post-pandemic

Janaina Oliveira Silva1, Roberto X. A. Filho2, Laôr F. de Oliveira3, Herman R. Assumpção4

[1, 2, 3, 4] Sesi-SP, profajanainasilva@gmail.com

Resumo. *Este texto busca apresentar sobre o desenvolvimento de um programa educacional oferecido aos municípios do estado de São Paulo pelo Sesi-SP, o qual tem como pergunta norteadora a seguinte questão: o que é possível fazer para alavancar a recomposição da aprendizagem de matemática no ensino fundamental? O programa nasceu da preocupação com o retorno às aulas presenciais no Brasil que corroboravam com o que as pesquisas informavam: defasagens de aprendizagem em diversos níveis escolares e nos eixos essenciais para o desenvolvimento de outros componentes curriculares e tem como objetivo auxiliar na recomposição da aprendizagem desses saberes escolarizados. Para tal, relatamos sobre a estrutura do programa, bem como apresentamos os seus resultados obtidos nas avaliações realizadas pelos estudantes que participaram do programa por meio da parceria entre o Sesi-SP e o município durante a sua implantação. Com isso, esperamos contribuir com os estudos da área a partir da discussão dos dados e das reflexões propiciadas.*

Abstract. *This text seeks to present the development of an educational program offered to municipalities in the state of São Paulo by Sesi-SP, which has as its guiding question the following question: what can be done to leverage the recomposition of mathematics learning in elementary school? The program was born out of a concern with the return to face-to-face classes in Brazil, which corroborated what the research reported: learning gaps at different school levels and in the essential axes for the development of other curricular components, and aims to help in the recomposition of the learning of these schooled knowledge. To this end, we report on the structure of the program, as well as present the results obtained in the evaluations carried out by students who participated in the program through the partnership between Sesi-SP and the municipality during its implementation. With this, we hope to contribute to studies in the area based on the discussion of the data and reflections provided.*

Palavras-chave: *Defasagem da aprendizagem; Recomposição de saberes; Ensino e aprendizagem; Programas educacionais.*

Keywords: *Learning gap; Recomposition of knowledge; Teaching and learning; Educational programs.*

Introdução

No Brasil, a educação básica obrigatória está dividida em segmentos que englobam estudantes dos 4 aos 18 anos, e é ofertada gratuitamente pelo Estado, mas pode ser oferecida também por instituições privadas (mediante crivo estabelecido por órgãos educacionais competentes).

A educação básica é segmentada de acordo com a idade dos estudantes e perpassa por conhecimentos que são orientados para cada fase de suas vidas. Assim, temos a educação infantil voltada para as crianças de zero a 5 anos, com obrigatoriedade para aquelas que têm entre 4 e 5 anos; o ensino fundamental dividido em duas fases: anos iniciais (dos 6 aos 10 anos) e anos finais (dos 11 aos 14 anos); e, ensino médio (dos 15 aos 17 anos), conforme previsto em legislação vigente e documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Sabemos que a escola tem papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes, pois é o espaço em que se concretiza a sistematização dos conhecimentos dos diversos saberes, incluindo os relacionados à linguagem matemática seja ela para a etapa concernente aos anos iniciais (ou seja, para os estudantes dos 6 aos 10 anos), seja ela para os anos finais (estudantes de 11 a 14 anos) do ensino fundamental. Nas palavras de Delors (1998):

> (...) A instituição escolar não se confunde com a comunidade mas, guardando a sua especificidade, deve evitar desligar-se do ambiente social. A comunidade a que pertencem constitui um poderoso vetor de educação, quanto mais não seja pela aprendizagem da cooperação e da solidariedade ou, de maneira mais profunda, talvez pela aprendizagem ativa da cidadania. (Delors, 1998, p. 112).

Considerando tal perspectiva, é importante refletir sobre o que é esperado do estudante em cada fase da escolarização do ensino fundamental. Nos anos iniciais, espera-se, de acordo com a BNCC que haja "*a progressão do conhecimento ocorre pela consolidação das aprendizagens anteriores e pela ampliação das práticas*" (BNCC, 2018), já nos anos finais, espera-se que os estudantes tenham:

> (...) desafios de maior complexidade, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios (BNCC, 2018).

Dadas essas orientações dos órgãos oficiais, faz sentido que observemos o que alguns estudos realizados indicam sobre a proficiência da matemática. O Todos pela Educação (2021), em seus estudos, aponta que, no contexto brasileiro, já havia defasagem no aprendizado de matemática até o ano de 2019, o que foi agravado com a pandemia de Covid-19 a partir de 2020. Outro estudo, da mesma entidade, aponta que esse agravamento se torna ainda mais evidente quando comparados os resultados entre os estudantes da rede pública e os da rede privada.

Observemos os gráficos a seguir da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) de 2018 acerca do nível de proficiência em matemática (Figura 1):

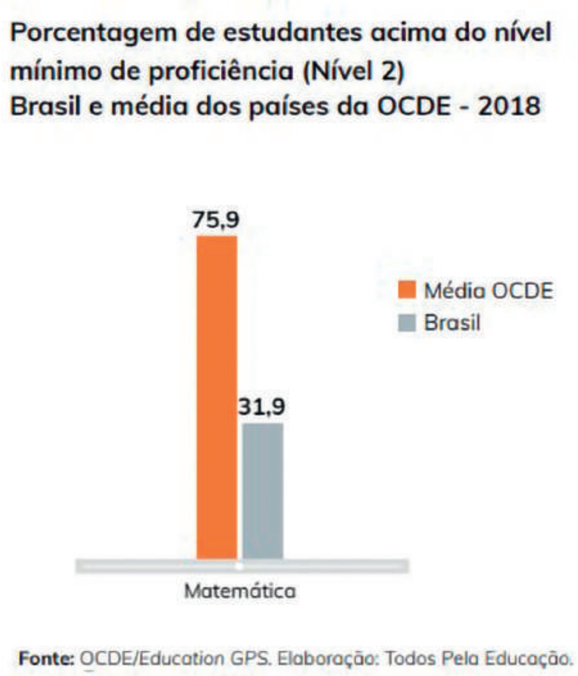


Figura 1. Comparativo: Média Brasil e países OCDE (Fonte: Anuário Brasileiro de Educação Básica de 2021 (p. 76). Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2021/07/Anuario_21final.pdf. Acesso em 03/04/2023).

Notamos com o gráfico que há uma grande disparidade na proficiência de matemática entre o Brasil e os países que compõem a OCDE, indicando uma diferença de 44 pontos percentuais.

Já por esse dado notamos a necessidade da implementação de caminhos que suscitam no desenvolvimento de ações que oportunizem a superação da defasagem dos conhecimentos escolarizados relacionados à matemática, seja ela dos anos iniciais ou finais, seja por meio de políticas públicas ou por via da implantação de programas e projetos educacionais fomentados por instituições de cunho privado ou por organizações não governamentais. Dessa maneira, o objetivo deste texto é apresentar os resultados do programa a fim de destacar aspectos evidenciados em documento institucional os quais apontam para caminhos na implantação de ações educacionais.

Contexto paulista para a aprendizagem da matemática: anos iniciais e finais

Visto o desequilíbrio das defasagens dos conhecimentos matemáticos, o Sesi-SP propôs aos municípios do estado de São Paulo o Programa Emergencial de Educação Pós-pandemia Recompondo Saberes.

O foco do programa é auxiliar na recomposição da aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental por meio da transferência de tecnologias, em especial, com a proposição de uma solução educacional agregadora às práticas já desenvolvidas pelos professores da rede pública. Nesse sentido, podemos trazer o que Delors apresenta acerca das ações comunitárias para o âmbito da vida escolar:

> (...) Devem multiplicar-se as parcerias entre o sistema educativo e as empresas de modo a favorecer a aproximação necessária entre formação inicial e formação contínua. As formações em alternância para os jovens podem completar ou corrigir a formação inicial e, conciliando saber com saber-fazer (…) (Delors, 1998, p. 113).

Visto por esta perspectiva, a proposta do programa consiste em oferecer formação continuada a professores que ensinam matemática nos anos iniciais ou finais, as quais são ministradas pela equipe técnica educacional do Sesi-SP, além de acompanhamento personalizado às necessidades detectadas pelos professores que atuam junto aos alunos das escolas participantes do programa. Desse modo:

> (...) a educação passa a ser um assunto que diz respeito a todos os cidadãos que passam a ser atores e não mais simples consumidores passivos de uma educação dada pelas instituições. Todos podem experimentar diversas situações educativas e, até, desempenhar, alternadamente, o papel de aluno e de professor dentro da sociedade educativa. Integrando, deliberadamente, o informal no formal a educação corresponde, assim, a uma produção constante da sociedade que passa a ser inteiramente responsável por ela, e se transforma através dela. (…) (Delors, 1998, p. 116).

Consta ainda da proposta, o oferecimento de material de apoio e suporte à plataforma digital, onde os professores encontram materiais teóricos e práticos para a aplicação em sua sala de aula, assim, juntamente com o analista técnico educacional, eles podem elaborar estratégias de ensino que visam suprir as defasagens na aprendizagem.

Compreendido por este viés, o Programa Emergencial de Educação Pós-pandemia Recompondo Saberes emerge como um caminho para a superação das defasagens de aprendizagem dos estudantes, a fim de que possam aumentar sua proficiência em matemática.

Procedimentos e metodologia

Para este trabalho, os dados foram obtidos a partir de um documento interno da instituição intitulado "Relatório final - dezembro 2022" em que constam informações acerca dos resultados das avaliações aplicadas junto aos estudantes do ensino fundamental (anos iniciais e finais) ao longo da vigência do programa nos municípios participantes.

Os dados foram coletados a partir da inserção em sistema informático das respostas dos estudantes às questões que compunham as avaliações. Após essa primeira etapa, os dados foram tratados em sistema de maneira que com os números obtidos fossem elaborados gráficos com os resultados. Apresentamos uma leitura acerca de alguns desses gráficos.

Esses dados compilam os números e índices acerca dos resultados da avaliação diagnóstica e da final, as quais foram elaboradas pensando na abordagem de cinco eixos temáticos: Linguagem dos números; Pensamento algébrico; Pensamento geométrico; Probabilidade e estatística; e Grandezas e medidas. As avaliações ocorreram em momentos distintos ao longo do desenvolvimento do programa: avaliação diagnóstica, no primeiro mês de atuação junto aos municípios; e a final, na etapa de encerramento das ações formativas do programa. Após a compilação desses dados, efetuamos a observação analítica sobre eles e tecemos nossas considerações.

Resultados e discussão

A seguir, apresentamos os dados relacionados ao aprendizado da matemática nos anos iniciais e finais. O primeiro gráfico (Figura 2) mostra o panorama comparativo relativo aos resultados obtidos pelos estudantes dos anos iniciais na avaliação diagnóstica e na final.

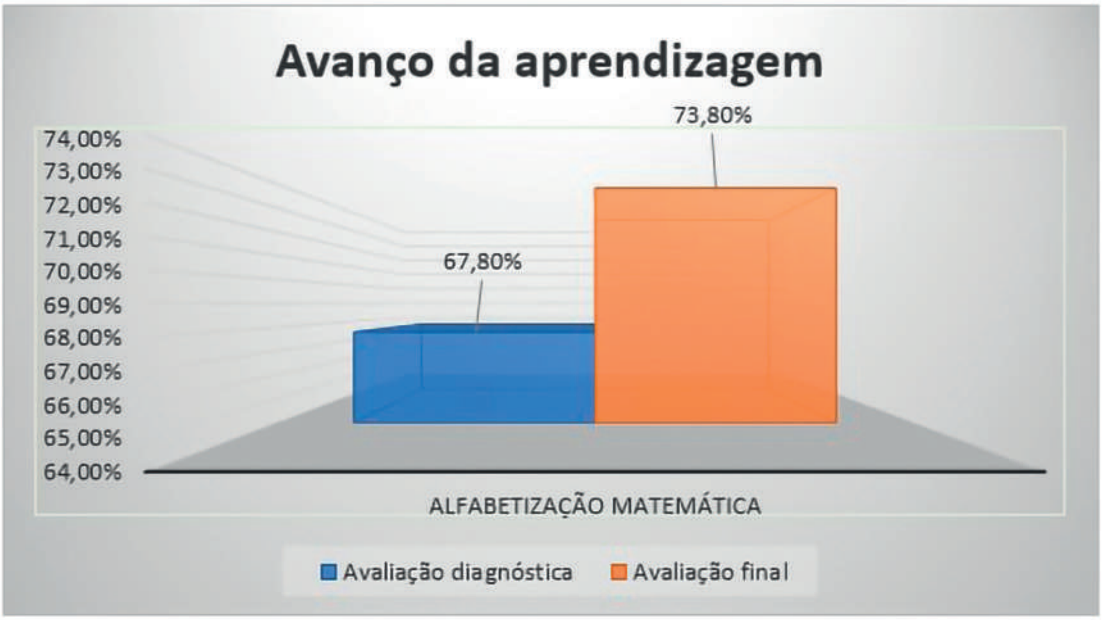


Figura 2. Anos iniciais (Fonte: Relatório final, 2022).

A observação dos dados do gráfico nos aponta que houve um avanço no desenvolvimento das habilidades entre as avaliações inicial e final. Podemos notar que o crescimento foi de 6 pontos percentuais. Esse avanço é bastante significativo, pois estamos falando de estudantes que se encontram na fase inicial da escolarização, nos anos escolares que são voltados à alfabetização, ou seja, à iniciação ao processo de ensino-aprendizado sistematizado, o qual contou com questões que trabalharam conceitos e conteúdos que perpassaram cinco eixos temáticos:

- Linguagem dos números
- Pensamento algébrico
- Pensamento geométrico
- Probabilidade e estatística
- Grandezas e medidas

Assim, de modo geral, os resultados nos mostram que houve uma evolução no tocante às aprendizagens concernentes aos saberes escolarizados para a etapa do ensino fundamental anos iniciais, permitindo-nos afirmar que o Programa Emergencial de Educação Pós-pandemia Recompondo Saberes impactou positivamente nos municípios participantes, visto que os estudantes tiveram seu desempenho aumentado.

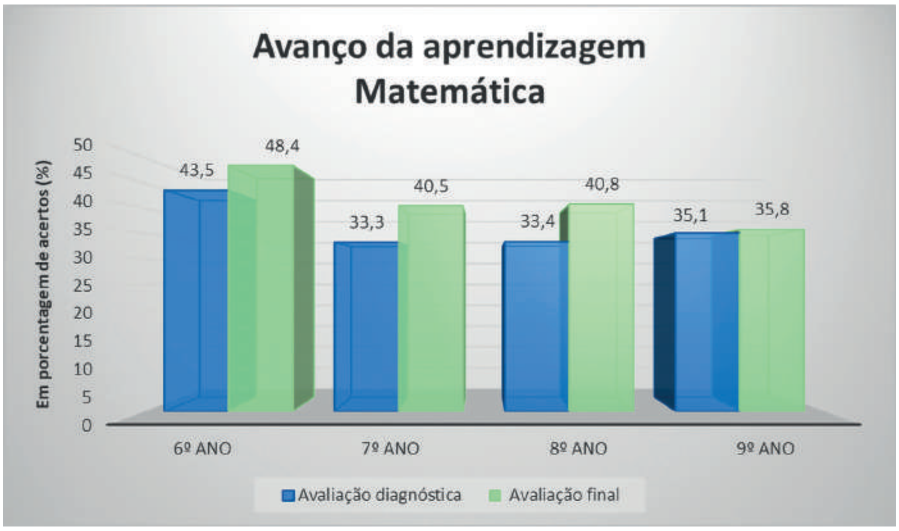


Figura 3. Anos finais (Fonte: Relatório final, 2022).

A observação dos dados do gráfico (Figura 3) nos aponta que houve um avanço no desenvolvimento das habilidades entre as avaliações inicial e final em todos os anos finais do ensino fundamental. Note-se que os índices apontam para uma variação de crescimento que parte de 0,7% (para o 9.º ano) e atinge o máximo de 7,4% (para o 8.º ano). Sabemos que, historicamente, a aprendizagem dos saberes matemáticos encontra diversas barreiras, desde as estruturais às de ordem didática ou falta de motivação de estudantes e docentes.

Notamos com a análise dos resultados que tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais houve um avanço na aprendizagem. Isso se torna ainda mais latente se considerarmos que a avaliação final tem um grau de complexidade maior, o que nos possibilita afirmar que, mesmo quando os índices parecem numericamente discretos, houve a efetivação da aprendizagem. Desse modo, podemos trazer o que Ausubel (1982) afirma sobre a aprendizagem significativa "(...) *ocorre com a incorporação de conhecimento novo na estrutura cognitiva do estudante, e pode ser associado a um conhecimento prévio, relacionado e relevante, já existente nessa estrutura cognitiva*" (Ausubel, 1982).

Nesse sentido, podemos afirmar que o processo de recomposição dos saberes, no contexto do programa, se edificou como um caminho produtivo para a superação das defasagens dos estudantes no que concerne aos conhecimentos escolarizados de matemática, dado que se estabeleceu um percurso em que "[...] *o processo educativo seria necessariamente singular, voltado para a formação de uma subjetividade autônoma, completamente distinta daquela resultante do processo de subjetivação de massa [...]*" (Gallo, 2003, p. 98).

Assim, ao analisarmos as avaliações de matemática do ensino fundamental, notamos que o gradativo aumento demonstra uma ampliação no repertório dos estudantes, bem como um afinamento das habilidades inerentes a cada um dos anos escolares seja no âmbito da complexidade, seja no alicerce de conceitualizações, visto que ao considerarmos que foram trabalhados os eixos temáticos (Linguagem dos números; Pensamento algébrico; Pensamento geométrico; Probabilidade e estatística; e Grandezas e medidas) nas avaliações e os resultados apresentarem um aumento no aproveitamento, isso nos permite afirmar que houve um desenvolvimento positivo geral dos saberes escolarizados advindos da matemática.

Considerações finais

Ao considerarmos o âmbito educacional no contexto pós-pandemia , notamos que a defasagem da aprendizagem de matemática, em especial, merece atenção, dado que esses conhecimentos podem impactar no processo de aprendizagem das etapas subsequentes.

Nesse sentido, a análise dos dados nos aponta para a necessidade de implantação de soluções (ou alternativas) educacionais que busquem suprir essas defasagens na aprendizagem. Uma dessas maneiras é via implantação de programas educacionais que visem a recomposição de saberes escolarizados, caso em que se pode incluir o Programa Emergencial de Educação Pós-pandemia Recompondo Saberes.

Assim, neste texto apresentamos a estruturação do programa e como ele se desenvolveu junto aos municípios parceiros que o adotaram como uma possibilidade a mais para a recomposição da aprendizagem de matemática de seus estudantes.

Com isso, podemos afirmar que o programa desenvolveu-se de maneira a fomentar ações de formação continuada aos docentes participantes do programa para que eles pudessem aplicar em sala de aula os recursos, as ferramentas e subsídios disponibilizados de forma que o conjunto de ações (dentro e fora da sala de aula) propiciam uma aprendizagem mais significativa, com isso, favorecendo o aumento da proficiência de matemática dos alunos do ensino fundamental.

Referências bibliográficas

Ausubel, D. P. (1982). *A aprendizagem significativa*. Moraes.

Lei n. 9.394/1996. (1996). Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. DF.

Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica. Brasília: MEC. (2013). Ministério da Educação.

Base Nacional Comum Curricular [BNCC]. (2018). Brasília. MEC. Recuperado de: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.

Delors, Jacques. (1998). *Educação: um tesouro a descobrir*. Cortez.

Ferreiro, E., Teberosky, A. (1986). *Psicogênese da língua escrita*. Artmed.

Ferreiro, E. (2001). *Reflexões sobre alfabetização*. Cortez.

Gallo, S. (2003). *Deleuze e a educação.* Autêntica.

Perini, M. A. (1996). *Gramática descritiva do Português.* Ática.

Rabelo, E. H. (1998). *Avaliação: novos tempos, novas práticas.* Vozes.

Moran, J. (2018). Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: Bacich, L., Moran, J. (Orgs.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Penso, 2018.

Todos pela educação. (2021). *Nota técnica: Impactos da pandemia na alfabetização de crianças.* Recuperado de: <https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2022/02/digitalnota-tecnica-alfabetizacao-1.pdf>.

Conhecimento profissional do professor: A influência das perturbações tecnológicas no ensino de Matemática e Física

Teacher's professional knowledge: The influence of technological disruptions in the teaching of Mathematics and Physics

Tânia Coelho[1], Maria do Carmo Botelho[2], Helena Rocha[3]

[1,2,3] CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal, [1]ta.coelho@campus.fct.unl.pt, [2]mcb17696@campus.fct.unl.pt, [3]hcr@fct.unl.pt

Resumo. *Este estudo analisa o papel do conhecimento profissional do professor na integração de tecnologia nas disciplinas de Matemática e de Física no ensino secundário. Tem como objetivo perceber como o conhecimento do professor é mobilizado na integração de diferentes tecnologias em situações de perturbação tecnológica. A metodologia adotada é qualitativa com orientação interpretativa e envolve dois professores, um de Matemática e um de Física. Os resultados sugerem que os professores envolvidos no estudo, em contextos de Matemática e Física, mobilizam o KTMT quando se deparam com uma situação de perturbação tecnológica. Durante o uso da tecnologia em aula, constata-se que as perturbações observadas nos dois professores ocorrem em situações não planeadas ou imprevistas, durante a realização das tarefas propostas.*

Abstract. *This study analyzes the role of the teacher's professional knowledge in the integration of technology in Mathematics and Physics subjects in high school. It aims to understand how the teacher's knowledge is mobilized in the integration of different technologies in situations of hiccups. The adopted methodology is qualitative with an interpretative orientation and involves two teachers, one of Mathematics and one of Physics. The results suggest that the teachers involved in the study, in Mathematics and Physics contexts, mobilize the KTMT when faced with technology perturbations. During the use of technology in class, it appears that the hiccups observed in the two teachers occur in unplanned or unforeseen situations, while carrying out the proposed tasks.*

Palavras-chave: conhecimento profissional, integração da tecnologia digital, perturbação tecnológica, matemática, física

Keywords: professional knowledge, integration of digital technology, hiccups, mathematics, physics

Introdução

A introdução da tecnologia em sala permite que as aulas se tornem mais dinâmicas e interativas, tornando possível aos professores de Matemática e de Física incorporarem uma ampla gama de ferramentas digitais nas suas aulas para além da Calculadora Gráfica (CG).

O acesso a uma variedade de tecnologias incluindo simuladores, aplicativos de aprendizagem e plataformas de e-learning permite aos professores criarem experiências mais envolventes e personalizadas (Freiman, 2014), contribuindo para a compreensão de conceitos matemáticos e físicos de maneira mais eficaz. Para Roberts et al. (2013) a relação entre a tecnologia, a matemática e a educação é complexa, enfatizando que essa complexidade não é apenas causada pela tecnologia, mas pela forma como os professores a integram na sala de aula. Por sua vez Bryan (2006) refere que a implementação da tecnologia em Física, tem um impacto significativo no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina, permitindo melhorar a capacidade de interpretação dos conceitos.

Nesse sentido é reconhecido o papel do professor na integração da tecnologia, o seu conhecimento profissional é também tido em conta por diversos autores (Clark-Wilson et al., 2020; Drijvers et al., 2016; Hoyles, 2018; Rocha, 2020). Parece mesmo existir um consenso entre diversos autores de que o conhecimento do professor para integrar tecnologia no ensino de matemática é um dos fatores cruciais quando se trabalha em sala de aula onde esta está disponível (Drijvers et al., 2016). A este nível são referidos diferentes domínios de conhecimento como conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico, e conhecimento tecnológico (Clark-Wilson et al., 2020; Even & Ball, 2009; Zbiek et al., 2007; Rocha, 2020; Roesken, 2011; Tabach & Trgalová, 2019).

O principal objetivo do estudo é caracterizar as situações experienciadas pelos professores, quando confrontados com perturbações tecnológicas e como o seu conhecimento profissional lhes permite ultrapassar estes momentos. Nesse sentido, adotamos o modelo do Conhecimento para Ensinar Matemática com Tecnologia – KTMT de Rocha (2020), pois o mesmo integra a investigação centrada no conhecimento profissional e a investigação centrada no uso da tecnologia, e a noção de perturbação tecnológica "Hiccup" de Clark-Wilson (2013) e Clark-Wilson e Noss (2020). Especificamente, pretende-se compreender:

- Como se caracterizam as situações de perturbação tecnológica observadas nas disciplinas de Física e Matemática?
- Como o conhecimento do professor contribui para superar os desafios enfrentados com a perturbação tecnológica nas aulas de Física e Matemática?

A tecnologia no ensino da Matemática e Física

Vários são os estudos que abordam os diferentes tipos de tecnologias disponíveis para o ensino de Matemática e da Física, sendo dado particular destaque às tecnologias que permitem aos professores e aos alunos investigar objetos matemáticos e conexões, usando diferentes representações matemáticas para resolver problemas (Zbiek et al., 2007).

Zbiek et al. (2007) referem ainda que as tecnologias gerais de comunicação, documentação e apresentação são essenciais para apoiar o intercâmbio de ideias matemáticas. As tecnologias matemáticas, tais como folhas de cálculo, Computer Algebra Systems (CAS), Dynamic Geometry Software (DGS) e applets, permitem aos professores e alunos investigar objetos e conexões matemáticas utilizando diferentes representações matemáticas e resolver problemas matemáticos.

Perturbações tecnológicas em sala de aula

Stockero e Zoest (2013) descrevem *perturbação tecnológica* numa aula como "um instante" onde ocorre interrupção no fluxo da mesma proporcionando ao professor "uma oportunidade de modificar a instrução a fim de estender ou mudar a natureza do entendimento matemático dos alunos" (p. 127). Por sua vez, considerando a perspetiva do professor, Clark-Wilson e Noss (2015), descrevem estes momentos de perturbação desencadeados pelo uso da tecnologia como um *hiccup*. Segundo os mesmos autores, estas perturbações referem-se a interrupções ou desafios que ocorrem durante a implementação de atividades tecnológicas em sala de aula e que podem surgir devido a problemas técnicos, dificuldades na operação dos recursos tecnológicos, falta de compreensão do uso da tecnologia, problemas na integração da tecnologia ou problemas na integração da tecnologia com o currículo.

Para Clark-Wilson e Noss (2015), é expectável que o professor ao integrar a tecnologia no ensino seja confrontado com situações não planeadas ou imprevistas em sala de aula à medida que os alunos resolvem as tarefas propostas, existindo uma relação entre a experiência dos professores com os alunos e a sua aprendizagem.

As perturbações tecnológicas podem ser vistas como oportunidades para o desenvolvimento do KTMT dos professores, já que ao enfrentarem estes obstáculos, os professores são levados a refletir sobre as suas próprias práticas.

Conhecimento profissional do professor ao integrar tecnologia nas suas aulas

O KTMT de Rocha (2020) é uma conceptualização do conhecimento profissional do professor que centra num único modelo as pesquisas desenvolvidas sobre o conhecimento dos professores e a integração da tecnologia na prática letiva. Este modelo tem como base os modelos de Shulman (1986), Mishra e Koehler (2006) e Ball et al. (2008), onde são considerados quatro domínios do conhecimento base: Matemática, Ensino e Aprendizagem, Tecnologia e Currículo, sendo o último influente nos restantes. Da confluência dos domínios base, Rocha (2020) considera ainda, neste modelo, dois interdomínios do conhecimento: o Conhecimento da Matemática e Tecnologia (MTK) e o Conhecimento do Ensino-Aprendizagem e Tecnologia (TLTK) (Tabela 1).

Tabela 1. Conhecimentos integrados no MTK e TLTK

MTK	TLTK
- Conhecimento da fidelidade matemática da tecnologia, - Conhecimento das novas ênfases que a tecnologia coloca sobre a matemática, - Conhecimento de novas sequências dos conteúdos e a fluência representacional	- Conhecimento das novas questões com que a tecnologia confronta os alunos, - Conhecimento da concordância matemática das tarefas propostas, - Conhecimento de diferentes tipos de tarefas e de como tirar partido das potencialidades disponibilizadas pela tecnologia

Da articulação simultânea de todos os domínios do conhecimento detido pelo professor, surge o Conhecimento Integrado (IK). As crenças e conceções do professor, bem como o contexto onde este trabalha, são também considerados neste modelo.

Metodologia

Este trabalho insere-se na investigação desenvolvida pelas autoras, sobre o conhecimento profissional do professor no uso de tecnologias nas disciplinas de Matemática e Física. Pretende-se aqui apresentar um dos aspetos analisados, tendo por base uma das perturbações tecnológicas observadas nas aulas dos dois professores participantes.

Dada a natureza do problema em estudo e em linha com as ideias defendidas por Yin (2003), a pesquisa aqui apresentada adota uma abordagem qualitativa, com base em estudos de caso. O estudo envolveu dois professores, um de Matemática (M) e outra de Física (F), a lecionarem no ensino secundário, com uma longa experiência no uso de tecnologias em sala de aula. A recolha de dados envolveu entrevistas aos professores, observação de aulas, onde o domínio das funções estava a ser trabalhado em Matemática e sua aplicação em Física no 10.ºano de escolaridade, bem como recolha de documentos. Foram realizadas entrevistas semiestruturadas antes e depois de cada aula, com a intenção de saber o que cada professor preparou e as razões dessas opções e o balanço de como a aula ocorreu, respetivamente. Os professores, nas entrevistas, foram convidados a compartilhar livremente os seus planos, partilhando as razões sobre a escolha da tecnologia adotada (CG, comum a ambas as disciplinas) e as suas reflexões sobre a aula. A análise dos dados foi principalmente de natureza descritiva e interpretativa. Como quadro teórico recorreu-se ao modelo KTMT (Rocha, 2020), para analisar os domínios do conhecimento mobilizados pelos professores numa situação de perturbação tecnológica (Clark-Wilson & Noss, 2015). A perturbação aqui apresentada, comum aos dois professores, no ensino de funções em Matemática e respetiva aplicação no tema “Energia e sua conservação” em Física foi: Perturbação tecnológica resultante da obtenção de um resultado inesperado.

Análise dos dados

Nesta secção, através das tarefas propostas pelos professores M e F bem como da natureza das perturbações tecnológicas destacadas, observamos como os professores mobilizaram o seu conhecimento profissional para ultrapassar as perturbações sentidas.

Na realização de uma tarefa era solicitado que os alunos fatorizassem a função polinomial $f(x)=4x^3+8x^2-11x+3$, através da determinação dos zeros com recurso à CG.
Durante a realização da tarefa o professor M foi questionado por um aluno, que utilizava a CG Casio *fx*-CG50, sobre a diferença dos zeros que eram dados no gráfico da calculadora (Figura 1) e os determinados analiticamente:

> Professor M: Mas porque é que na tua [calculadora] não aparecem estes aqui? A tua não apanha um meio. Porque é que ele não está a aparecer?
>
> Aluno: Não sei. Eu também percebi que se fizesse a fórmula resolvente, deste aqui, também me ia dar um meio.
>
> Professor M: Tem de dar.
>
> Aluno: Mas está-me a dar um mais raiz de dois sobre dois.

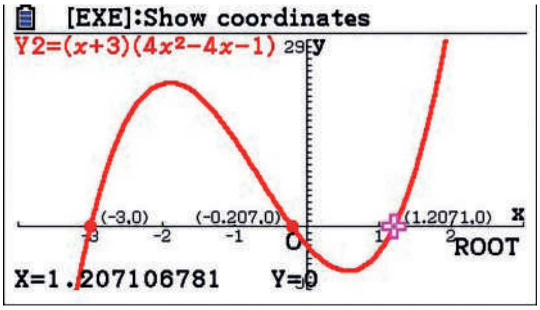


Figura 1. Gráfico observado

Constatando que os zeros obtidos na CG não correspondem aos obtidos analiticamente, o aluno recorre ao menu Equação da CG, para verificar as soluções de um dos fatores do polinómio da equação (Figura 2).

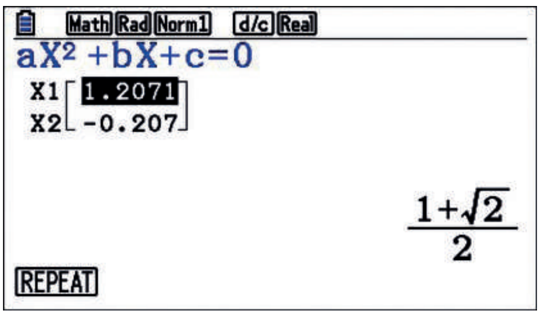


Figura 2. Soluções da equação do fator de 2.º grau

Com o intuito de explicar ao aluno que o gráfico obtido na CG, não corresponde ao gráfico do polinómio fatorizado, pois o gráfico esperado deveria apresentar apenas os zeros -3 e $\frac{1}{2}$, sendo o último um zero duplo, o professor M mobiliza o seu conhecimento matemático:

Professor M: Isto até é um zero duplo. Toca e sobe. O que é que tu fizeste aí que eu não estou a ver o teu erro. Não estou a ver o teu erro. Quatro x, oito x ao quadrado menos onze x mais três. Fatorizaste. Isto está certo. Aqui dá ao cubo, aqui dá...

Perante esta situação e, após não detetar qualquer erro quer na expressão algébrica quer na janela de visualização, opta por colocar na sua calculadora TI-84 Plus as duas expressões algébricas, a geral e a fatorizada, de forma a confrontar as duas, e constata que os gráficos destas diferem (Figura 3). O professor M, ao optar por recorrer à sua CG, evidencia um maior conforto com um dos modelos, ou seja, executa uma ação guiada pelo seu TK.

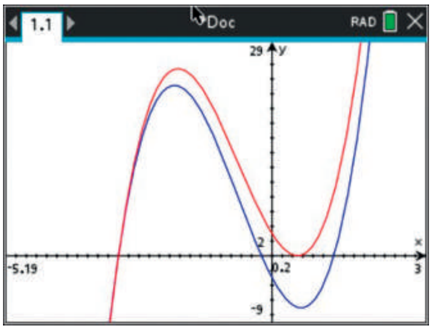


Figura 3. Gráficos dos polinómios

Ao constatar que os gráficos diferiam, decidiu voltar a rever todos os cálculos analíticos, efetuados pelo aluno, mobilizando o seu conhecimento matemático. Durante a verificação dos mesmos, o professor M é interrompido por um outro aluno que o alertou para o erro existente na resolução analítica do colega, um dos fatores do polinómio deveria ser $4x^2$-$4x$+1, mas o aluno inseriu $4x^2$-$4x$-1. Detetado o erro o professor M indica ao aluno que insira novamente a expressão na calculadora, e que verifique se os zeros da função já estão corretos:

Aluno1: Isto aqui é 1.

Aluno: Ah, pois é!

Professor M: Tem de bater certo! É um. Espera, vai já ver na máquina.

Aluno: Já dá o um meio.

Professor M: Tinha de dar.

Constata-se assim que a perturbação tecnológica resultou da obtenção de um gráfico distinto do esperado, observando-se que o professor recorreu ao conhecimento matemático, ao conhecimento tecnológico e ainda ao MTK para ultrapassar esta situação.

Uma das tarefas proposta pela professora F é analisar a relação entre a Energia cinética (E_c) e a massa de um corpo em movimento (m), através das representações tabular e gráfica dos dados disponibilizados aos alunos. Ao iniciar a tarefa, a professora revela conhecimento da tecnologia que pretende integrar na aula, bem como das falhas que podem ocorrer com a utilização da mesma, indicando a possibilidade de superar o problema através de uma segunda estratégia, o que nos indica que a tarefa foi refletida tendo em conta o TLTK:

> Professora F: Hoje vamos dar continuidade à aula anterior, se o projetor não falhar vou mostrar o Excel, espero que esteja operacional, caso contrário tenho de mudar de estratégia, quero que vejam como a Energia cinética varia relativamente à massa. Vou analisar o gráfico… e tabela e gráfico vão estar lado a lado, para eles compararem.

Com a intenção de explicar a relação matemática entre duas grandezas físicas, a professora F recorre à folha de cálculo Excel, pois considera que esta contribui de forma eficaz no processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo. A tarefa tem como objetivo os alunos visualizarem a relação de proporcionalidade entre grandezas físicas, através da visualização dinâmica entre as representações gráfica, tabular e algébrica, observando-se que a professora mobiliza desta forma o MTK.

No desenvolvimento da tarefa, começa por analisar como a E_c varia em função da massa (m) quando a velocidade é contante e igual a 10 m/s, tendo em conta que $E_c = \frac{1}{2}.mv^2$ (Figura 3):

> Professor F: Eu tenho aqui uma tabela que construí no Excel, e tenho aqui que a velocidade do meu corpo é de 10 m/s (…) vou fixar um dado, o que tenho aqui é a massa e a fórmula de cálculo da energia cinética…confirmem que eu calculei bem isto. Têm a velocidade e a massa, vamos lá, confirmem lá o cálculo de energia cinética.

Enquanto percorre a sala, a professora F verifica que os alunos sentem dificuldade na introdução dos dados nas calculadoras e aplicação do telemóvel, tecnologia que permite em sala de aula. A dificuldade dos alunos em inserir a fração $\frac{1}{2}$ na tecnologia, fez com que fosse necessária a orientação da professora:

> Professora F: Posso dar-vos uma dica para não ficarem aí parados…qual a fórmula da E_c?
>
> Aluno: E_c é igual a um meio da massa vezes a velocidade ao quadrado.
>
> Aluno: Não está a dar o mesmo.
>
> Professora F: Não deu? Mas o que estão a fazer?
>
> Aluno: Não consigo, dá diferente, dá o dobro do que está no quadro.
>
> Professora F: Está em falta o valor inicial da expressão, um meio, que corresponde a 0,5.

Esta situação revelou-se como uma perturbação tecnológica, sendo necessário a professora observar os dados introduzidos na CG individualmente por cada aluno, procurando detetar o erro. Ao verificar o erro cometido por cada aluno, a professora constatou ainda que alguns não conseguiram inserir *v* com expoente dois, na tecnologia que estavam a usar, tendo sido necessário reforçar que *v* ao quadrado é igual ao produto de *v* por *v*, como se verifica na expressão $E_c = \frac{m}{2} * 10 * 10$ (Figura 4).

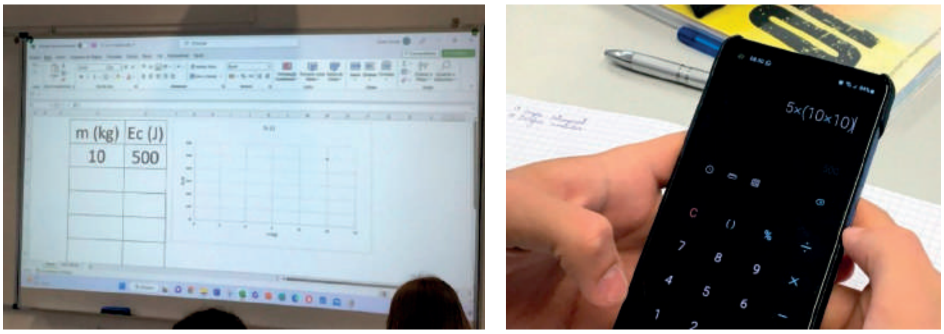


Figura 4. Cálculo de E_C

Constata-se que a perturbação aqui associada pela obtenção de dados inesperados, provocou um impasse na resolução da tarefa, levando a professora a mobilizar diferentes conhecimentos associados ao MTK.

Conclusões

Durante o uso da tecnologia em aula, constata-se que as perturbações tecnológicas observadas nos dois professores ocorrem em situações não planeadas ou imprevistas em sala de aula, durante a realização das tarefas propostas, tal como referido por Clark-Wilson e Noss (2015). A análise dos dados permite-nos concluir que a perturbação tecnológica observada é resultante da obtenção de um resultado inesperado nas tarefas promovidas pelo professor M e pela professora F. Embora a perturbação em análise seja comum aos dois professores, é distinto o motivo que a despoletou, assim como o processo empregue para a ultrapassar em sala de aula.

Para superar o desafio encontrado na perturbação tecnológica observada, resultante da obtenção de um resultado inesperado, constatou-se que os professores envolvidos no estudo, mobilizam de diferentes formas o KTMT. As situações observadas permitem-nos ainda concluir que apesar dos conhecimentos mobilizados pelos professores serem os mesmos (Matemática, Tecnológico e MTK), diferem na forma como são utilizados.

Agradecimentos

Este trabalho é apoiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., que concedeu uma bolsa de doutoramento ao segundo autor (2021.04983.BD) e financiou o projeto TecTeachers (2022.03892.PTDC).

Referências bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bryan, J. (2006). Technology for physics instruction. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 6*(2), 230-245. https://www.learntechlib.org/primary/p/21004/

Clark-Wilson, A. (2013, February 6th - 10th). *How teachers learn to use complex new technologies in secondary mathematics classrooms: the notion of the hiccup*. [Paper presentation]. Eighth Congress of European Research in Mathematics Education, Antalya.

Clark-Wilson, A., & Noss, R. (2015) Hiccups within technology mediated lessons: a catalyst for mathematics teachers' epistemological development. Research in Mathematics Education, 17(2), 92-109. https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1046476

Clark-Wilson, A., Robutti, O. & Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 1223–1242. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01196-0

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M., Cao, Y., Maschietto, M. (2016). Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey. In: *Uses of technology in lower secondary mathematics education*. ICME-13 Topical Surveys. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4

Even, R., & Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/ 10.1007/978-0-387-09601-8

Freiman, V. (2014). Types of technology in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education, 20*, 1-20. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Roberts, D., Leung, A., & Lin, B. (2013). From the slate to the web: Technology in the mathematics curriculum. In A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 525–547). Springer.

Rocha, H. (2020). Graphical representation of functions using technology: a window to teacher knowledge. *Teaching Mathematics and its Applications, 39*(2), 105-126. https://doi.org/10.1093/teamat/hrz011

Roesken, B. (2011). Mathematics teacher professional development. In B. Roesken (Ed.), *Hidden dimensions in the professional development of mathematics teachers* (pp. 1–28). Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Stockero, S. L. & Zoest, L. R V. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(2), 125-147. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9222-3

Tabach, M. & Trgalova, J. (2019). The knowledge and skills that mathematics teachers need for ICT integration: The Issue of Standards. 10.1007/978-3-030-19741-4_8.

Yin, R.K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods.* (4th edition). Sage Publications.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (2nd ed., pp. 1169–1207). Information Age Publishing.

O papel da intuição no ensino da matemática segundo Felix Klein e José Sebastião e Silva

The role of intuition in teaching mathematics according to Felix Klein and José Sebastião e Silva

Circe Mary Silva da Silva

Universidade Federal de Pelotas (Brasil), cmdynnikov@gmail.com

Resumo: *Na perspetiva de Felix Klein e de José Sebastião e Silva, para onde se inclina o pêndulo na abordagem de conceitos teóricos da matemática: para a lógica ou para a intuição? Procuro problematizar esta questão interpretando duas obras destes autores que tiveram repercussão em ambos os países. Uma revisita a Matemática elementar de um ponto de vista superior (1908) de Felix Klein tem o objetivo de compreender o significado do conceito de intuição para o autor e de ressaltar o seu papel no ensino. Em Portugal, desdobramentos da perspetiva de Klein estão no cálculo infinitesimal contido na obra Álgebra, de Sebastião e Silva (1956). Concluí que Klein traz uma nova proposta para o ensino da matemática, que deve ser abordada sob três perspetivas: a perspetiva matemática, que preconiza uma matemática orgânica, sem descontinuidade entre o ensino elementar e superior, e com aplicações; a perspetiva histórica, que sugere o uso do princípio genético; e, a perspetiva didática, que recomenda o uso do método intuitivo. Sebastião e Silva apresenta uma conceção muito semelhante à de Klein.*

Abstract: *From the perspective of Felix Klein and José Sebastião e Silva, where does the pendulum swing when approaching theoretical concepts in Mathematics: towards logic or intuition? I try to problematize this issue by interpreting two works by these authors that had repercussions in both countries. A revisit to Elementary Mathematics from a Higher Point of View (1908) by Felix Klein aims to understand the meaning of the concept of intuition to the author and to emphasize its role in teaching. In Portugal, an unfolding of Klein's perspective can be seen in the infinitesimal calculus contained in the Algebra textbook of Sebastião e Silva (1956). I conclude that Klein brings a new proposal for Mathematics teaching, which must be approached from three perspectives: the mathematical perspective, which advocates mathematics, must be organic, without discontinuity between elementary and higher education and with applications; the historical perspective, that suggests the use of the genetic principle; and the didactic perspective, that recommends the use of the intuitive method. Sebastião e Silva brings a conception very similar to the one of Klein.*

Palavras-Chave: matemática; ensino da matemática; intuição; história da matemática.
Keywords: mathematics; mathematics teaching; intuition; history of mathematics

Introdução

A popularidade do detetive Sherlock Holmes quase obscureceu o seu criador – Conan Doyle (1859-1930). Os amantes da literatura criminalista deleitam-se com os dois personagens fictícios: o sagaz detetive e seu companheiro, o Dr. Watson. Sherlock Holmes repete muitas vezes a expressão: "- Elementar, meu caro Watson!". À época de Doyle e Felix Klein, o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) discutia amplamente o papel da intuição na matemática. Para Poincaré, a lógica não bastava, era preciso a intuição para a criação em matemática. Ele afirmava que, "Necessitamos uma faculdade que nos faça ver o fim de longe, e essa faculdade é a intuição" (Poincaré, 1995, p. 21). Entre os vários tipos de intuição, ele situava em primeiro lugar o apelo aos sentidos, à imaginação e dizia que, também, a generalização por indução era um tipo de intuição. Os dicionários dizem que o intuitivo está fundado na intuição, e que esta palavra significa o ato de ver, discernir, a capacidade de pressentir. Doyle utiliza a intuição no primeiro sentido de Poincaré, como percetivo – "Com a sua aguçada <u>intuição</u> de mulher [...]". "Tenho uma certa <u>intuição</u> nesse sentido". À intuição Klein atribuiu grande importância não apenas na investigação matemática, mas também no ensino, conforme discutirei neste texto.

A intuição tem sido estudada principalmente na psicologia cognitiva e as contribuições que a história da educação matemática pode fornecer, são pouco conhecidas pelos professores. A intuição representa no processo de aprendizagem um papel coparticipante que deve ser levado em consideração pelo docente. Na escola, em geral, é comum que os alunos se apropriem de conhecimentos de forma acabada, algoritmos prontos, teoremas inquestionáveis e que parecem ter surgido como num passe de mágica. Alves (2016) afirma que muitos dos obstáculos, enfrentados pelos alunos, resultam da metodologia que o professor utiliza, quando não tem em conta a natureza e o desenvolvimento do raciocínio matemático, bem como a psicologia cognitiva.

Neste estudo, discuto as ideias de Klein contidas na obra *Matemática elementar sob um ponto de vista superior* procurando entender o conceito de intuitivo, e o modo como o autor exemplifica um ensino que considera a intuição como ponto de partida. Bem como, a conceção portuguesa de José Sebastião e Silva em defesa do uso da intuição no ensino da matemática.

A metodologia adotada é a bibliográfica analítica, na medida em que se aborda o conceito de intuição no seu desenvolvimento histórico, e a abordagem desse conceito nas obras do alemão Klein e do português Sebastião e Silva, que visavam o ensino da matemática do ensino secundário. David Tall (2013) suporta teoricamente a análise dos conceitos de intuição e formalização. Segundo ele, o pensamento matemático começa com objetos físicos e operações sobre esses objetos. Diz ainda que, o pensamento matemático se desenvolve na criança, a partir de uma matemática prática que explora a forma, o espaço e a contagem em conceitos como o número. Nessa fase, há o mundo corpóreo (intuitivo) e simbólico em ação. Entretanto, à medida que o raciocínio matemático se desenvolve, há uma mudança adicional do estudo de objetos para a matemática formal. Tall (2013) considera que a longo prazo, os indivíduos usam diferentes tipos de matemática que os torna indivíduos pensantes na sociedade. Mas, a alfabetização matemática necessita de uma matemática prática com alguns *insights* sobre matemática teórica. Não apenas os psicólogos, mas também matemáticos especialistas, como aqueles que foram investigados no presente estudo, refletiram sobre a forma como os indivíduos entendem a matemática formal e isso permitiu que percebessem as diferentes necessidades dos estudantes tanto ao nível universitário como secundário.

A obra Matemática elementar sob um ponto de vista superior

Após a primeira edição em 1908, em alemão, as reedições e traduções de *Matemática elementar sob um ponto de vista superior* têm sido muitas[1], mantendo viva uma obra de mais de cem anos. Em Portugal, as edições desta obra são de 2009 a 2011, e a obra *Geometria* é publicada em 2014.

Segundo Menghnini e Schubring (2019), o *Elementarmathematik* de um manuscrito tornou-se um bestseller. A receção deste livro foi diferente nos vários países. No Brasil, o principal personagem que impulsionou a circulação de propostas de mudança no ensino de matemática, na primeira metade do século XX, foi Euclides Roxo (1890-1950), à época professor do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Percebe-se uma consonância com aquelas ideias elaboradas por Felix Klein em 1908, trazendo uma conexão entre a Aritmética, Álgebra e Geometria, que reunidas resultariam numa única disciplina – a matemática (Silva & Rios, 2017; Valente, 2004).

Neste livro Klein usa diferentes perspetivas: a perspetiva matemática, a perspetiva histórica e a perspetiva didática. A perspetiva didática visa preparar os futuros professores para as suas tarefas docentes e fornecer-lhes a visão geral e os antecedentes necessários; ele justifica a perspetiva histórica por considerar que o desenvolvimento histórico é a “única forma científica” de ensinar matemática; a perspetiva da matemática é necessária como uma ferramenta para explicar os conteúdos da matemática escolar (Figura 1).

[1] A Open Library indica 39 edições em língua alemã e inglesa. https://openlibrary.org/works/OL3783651W/Elementarmathematik_vom_h%C3%B6heren_Standpunkte_aus?mode=all#editions-list

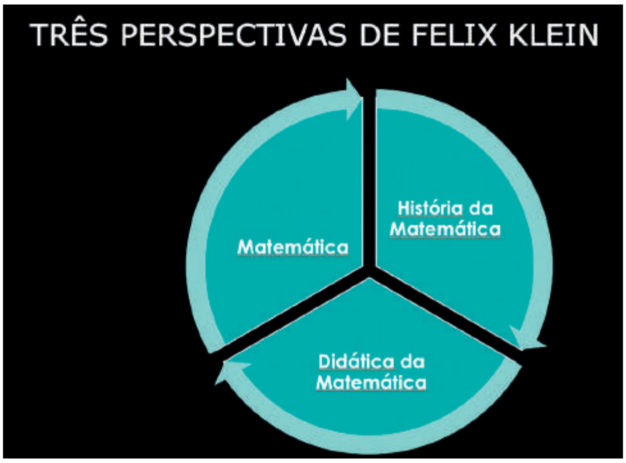


Figura 1. Três perspetivas

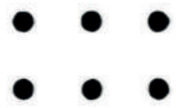
O conceito de intuitivo (Anschauung)

O princípio do discernimento epistemológico de Aristóteles (1973, p. 17), pode ser melhor compreendido por meio da seguinte citação na Ética de Nicômano: "É preciso, pois cuidar para em todas as questões, não buscar a causa de um modo igual. [...] Entre os princípios, uns são apreendidos por indução, outros pela sensação, outros por hábito e assim por diante". É a partir da razão intuitiva que se aprende os primeiros princípios e a sabedoria é alcançada pela combinação da razão intuitiva com o conhecimento científico. Aristóteles (1973, p. 137) afirma: "A razão intuitiva é tanto começo como fim, pois as demonstrações partem destes e sobre estes versam".

Nota-se que Klein não se limita a uma única conceção de intuitivo, usando-a em diferentes contextos. Na aritmética, apresenta o método intuitivo e genético para responder à questão de como os números são ensinados nas escolas alemãs a partir dos objetos concretos e familiares à criança (Klein, 2009, p. 9).

Na entrada sobre intuição, na *Encyclopedia of Mathematics Education* (2014), está a sua etimologia, do latim, "intuire" seria entendido como contemplar, olhar para dentro (Tirosh & Tsamir, 2014), os autores esclarecem que dependendo da área de conhecimento, o significado pode variar. Para Descartes, a intuição é uma forma de conhecimento pelo qual é revelada a própria essência das coisas; para Bergson é um meio particular de apreender a verdade; para Hadamard e Poincaré, a intuição é fonte de inovação genuína e criativa; e para o psicólogo Bruner, é o primeiro e necessário passo para a educação continuada.

No ensino inicial da aritmética, Klein (2009) aconselha a que não se faça uma exposição sistemática das leis fundamentais da adição e multiplicação; e, que uma demonstração intuitiva da comutatividade da multiplicação poderia ser introduzida como se observa na Figura 2.



"Se contarmos os pontos por linhas, como existem duas com três pontos cada, obtemos 2.3 pontos; por outro lado, se contarmos os pontos por colunas, obtemos 3.2 pontos; e assim podemos concluir que 2.3=3.2"

Figura 2. demonstração intuitiva da propriedade comutativa (Fonte: Klein, 2009, p. 15).

Para ultrapassar a perceção sensorial, é o princípio da indução matemática, que traz a verdade intuitiva e para fundamentar as leis do cálculo, o autor concorda com Poincaré, dizendo que "a estabilidade de toda estrutura matemática se baseia na intuição, no mais amplo sentido desta palavra" (Klein, 2009, p. 16).

O momento certo para a passagem do intuitivo para o dedutivo é explicado por Klein com as seguintes palavras: "Até que se obtenha uma demonstração da compatibilidade lógica no domínio dos números inteiros, devemos ter presente que essa mesma compatibilidade se baseia apenas no facto de existirem coisas intuitivas, que se relacionam intuitivamente, obedecendo a estas leis" (Klein, 2009, p. 34).

Para a didática da matemática, Klein apresenta uma demonstração intuitiva (Figura 3), para mostrar uma questão algébrica resolvida geometricamente pelo produto de segmentos, que resulta numa área.

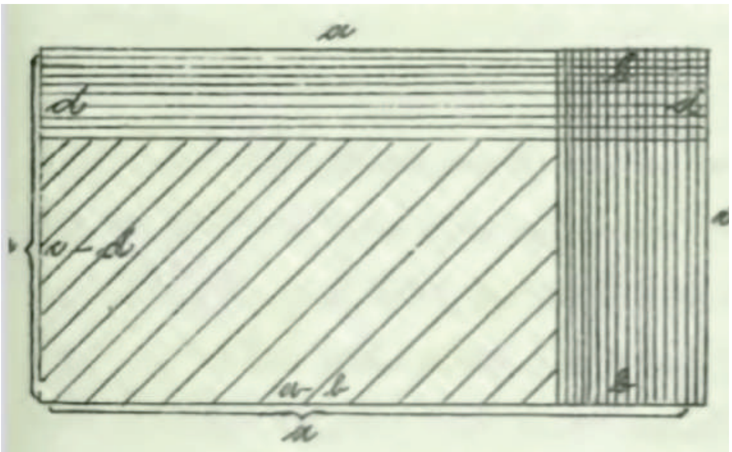


Figura 3. (a-b)(c-d)= ac-ad-bc+bd (Fonte: Klein, 1908, p. 65)

Outra importante menção à noção de intuição é aquela em que aborda a perceção empírica que compreende tudo que nos cerca e é passível de medida; a outra é a perceção abstrata de espaço ou intuição idealizadora subjetiva, esta vai além da inexatidão e da observação dos sentidos.

No que concerne à Geometria, Klein afirma que a fonte de todos os conceitos geométricos fundamentais é a perceção. A partir deles faz-se uma idealização adequada e passa-se a fundamentação lógica. Ele explora muito o conceito de perceção espacial e, vê os axiomas da geometria não como arbitrários, mas: "[...] antes afirmações razoáveis que são em geral induzidas pela perceção espacial e cujo conteúdo preciso é determinado por conveniência" (Klein, 2014, p. 84).

Ao discutir sobre o conceito de área, retoma o papel da intuição – "Esta noção está contudo presente na ideia intuitiva que todos temos de espaço, ainda que de uma forma mais ou menos inexata" (Klein, 2014, p. 64). Sugere começar com uma apresentação simples, conforme pode ser lida nos *Elementos* de Euclides. Outro exemplo de perceção intuitiva, em geometria, é a noção de curva. Para deixar essa noção mais clara e precisa, sugere o uso da análise, onde as noções de comprimento de arco, área de superfícies curvas, entre outras. podem ser pensadas como o limite de uma linha poligonal inscrita.

Klein prossegue afirmando que os objetos da geometria abstrata não podem ser totalmente apreendidos pela intuição espacial; todavia, a intuição "ajuda a construir uma prova e a obter uma visão geral, e além disso, é uma fonte de invenções e novas conexões mentais". No âmbito da geometria prática, ele dá como exemplo os números comensuráveis e incomensuráveis, que só fazem sentido na matemática de precisão, ou seja, matemática pura.

No meu entendimento, Klein expressa que os conceitos e axiomas fundamentais da geometria não são factos obtidos da perceção imediata, mas idealizações dessas perceções, por exemplo, o ponto não existe na perceção sensorial, ele existe a partir da imagem ficcional que fizemos de um pequeno espaço que se torna cada vez menor, ao qual não podemos chegar, apenas num limite idealizado. É a perceção sensorial que induz ao conteúdo idealizado. Quando o intuitivo não consegue expressar com clareza, objetividade e certeza dos objetos matemáticos, é preciso deixar de lado a intuição e passar-se a formalização, ou seja, à lógica. Klein utilizou muitas vezes a palavra intuição ou intuitivo na sua obra, mas não apresentou nenhuma de definição deste conceito (Tabela 1).

Tabela 1. Síntese dos usos de intuição

Aritmética (Parte 1, 2009)	**Análise** (2011)	**Geometria** (parte 2, 2012)
Intuitivamente compreensível (p. 4); perceção espacial (p. 5) intuitivo (p. 10); perceção simultânea (p. 15); verdade intuitiva (p. 16); mínimo de intuição (p. 18); significado intuitivo (p. 32); coisas intuitivas (p. 34); demonstrações intuitivas (p. 35); interpretação intuitiva (p. 98)	Maneira indutiva (p. 91); processo indutivo (p. 92); perceção dos sentidos (p. 92); evidência intuitiva (p. 94); perceção ingênua (p. 95); intuição geométrica (p. 99); aproximação intuitiva (p. 100); perceção interna ou externa (p. 107); elementos intuitivos (p. 127); origem intuitiva (p. 130); intuição espacial e intuição numérica (p. 139)	Perceção espacial (p. 11) **Geometria** (parte 3, 2014) Perceção espacial (p. 47); perceção o do espaço (p. 47); Ideia intuitiva (p. 64); perceção intuitiva (p. 67); perceção usual (p. 70); perceção sensorial (p. 73); Factos intuitivos (p. 74); perceção imediata (p. 83); posse intuitiva (p. 83); perceção geométrica intuitiva (p. 111)

A maneira como o autor emprega as palavras intuição e perceção estão muito próximas. Ele não parece distinguir entre o que seria uma perceção espacial de uma intuição espacial. Ao comentar sobre o método de trabalho do investigador, ele reforça o papel da intuição dizendo que o matemático "usa essencialmente a sua fantasia e procede de maneira indutiva auxiliado por expedientes heurísticos" (Klein, 2011, p. 91).

Cálculo Infinitesimal

A ciência nunca descansa, apesar de, individualmente, o investigador poder fatigar (Klein, 2011, p. 86).

No início do século XX, Klein considerava que as ideias básicas de função, geometria analítica e cálculo infinitesimal eram conhecimentos que poderiam ser ensinados na escola. A sua proposta foi recebida, inicialmente, com alguma resistência e cautela. Mas, passados alguns anos, ela foi incorporada no ensino elementar, permanecendo até a atualidade em muitos países.

Klein (2011, p. 109) desejava que os alunos tivessem familiaridade com "[...] os conceitos que são expressos pelos símbolos $y = f(x), \frac{dy}{dx}, \int ydx$, [...] sob essas designações; não, de facto, como uma nova disciplina abstrata, mas como uma parte orgânica de toda instrução e que ela avance lentamente, iniciando com exemplos simples".

Ao abordar os princípios do cálculo infinitesimal, começa com uma digressão histórica. Ele mostra a importância de usar a intuição sensorial imediata, mesmo que o conceito de limite ainda não esteja fundamentado, mas é essa intuição que ajuda a entender o conceito básico do cálculo. Historicamente, por exemplo, a perceção sensorial, foi a responsável pela criação da integral definida; partindo da definição da área de uma superfície como a soma de um número muito grande de retângulos (Figura 4), que foi usado por Kepler, Cavalieri, entre outros. A definição abstrata determina que "a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, isto é, a área limitada pela curva e os eixos como o limite da soma dos retângulos estreitos inscritos nesta área, quando o seu número aumenta e sua largura decresce sem limite" (Klein, 2011, p. 92).

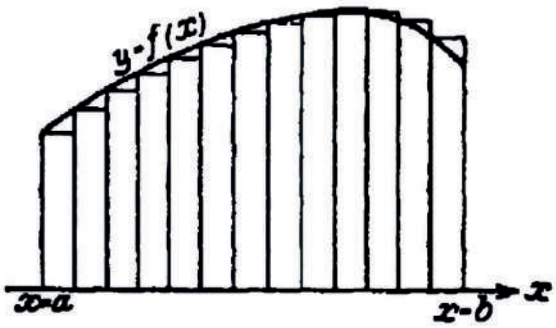


Figura 4. Área de uma superfície (Fonte: Klein, 1945, p. 209)

A perceção sensorial deixa entrever que como o desenho não é exato, não podemos diminuir indefinidamente esses retângulos, mas apenas aumentar seu número e deixá-los bem estreitos, portanto como o limite não é exato, a medida dessa área só pode ser aproximada. A perceção sensorial nos dá uma visão ingénua. Do mesmo modo, ele ressalta que foi uma intuição ingénua que conduziu ao quociente diferencial de uma função, isto é a tangente à curva.

Newton desenvolveu o novo cálculo em numerosos exemplos, sem entrar em explicações sobre os seus fundamentos. Assim, Klein explica a formulação de Newton:

> Se se considerar, por exemplo, um movimento x = f (t) sobre o eixo x, no tempo t, então toda gente tem uma noção do que significa a velocidade deste movimento e, se analisarmos este movimento, concluímos que, no fundo, o significado da velocidade é o valor-limite do quociente das diferenças $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Newton fez da velocidade de x, relativamente ao tempo a base de seus desenvolvimentos, chamou-lhe 'fluxão' de x e representou-o por $\dot{x}$. Considerou todas as variáveis x, y como dependentes desta variável fundamental t, o tempo e, em consequência, o o quociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ aparece como o quociente de duas fluxões $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que atualmente escreveríamos na forma $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ (Klein, 2011, p. 97).

Klein reconhece que a diferença entre o método dos antigos matemáticos, como Cavalieri e Kepler com o Cálculo Infinitesimal, e o dos modernos, é que há, por parte dos últimos, uma recusa em aceitar a evidência intuitiva, motivo pelo qual recorrem à noção abstrata de limite. Referindo-se a Cauchy e ao importante teorema do valor médio[2], ele apresenta o enunciado e uma visualização geométrica, questionando: "como é que alguém pode dar uma demonstração rigorosa do teorema do valor médio sem apelar à intuição geométrica?" (Klein, 2011, p. 99).

Na investigação científica, segundo ele, o matemático faz uso de sua fantasia e procede indutivamente por meio de expedientes heurísticos. Afirma: "É precisamente na descoberta e no desenvolvimento do cálculo infinitesimal que esse processo indutivo, construído sem etapas lógicas convincentes, desempenhou um papel tão grande; e o auxílio heurístico efetivo foi muitas vezes a perceção dos sentidos" (Klein, 1945, p. 208).

Klein deixa entrever a sua visão de tratamento superior dado a matemática elementar. As ilustrações têm a ver com a perceção visual, assim como as amostras da literatura popular, que não pertencem ao mundo formal, elas estão no mundo intuitivo; as aplicações da matemática abstrata ou pura servem como uma ligação entre a teoria e a prática; o desenvolvimento histórico da matemática, ao qual ele faz referência várias vezes no seu texto, e que mostra como o homem adquire conhecimento. Tudo isso caracteriza o que ele denomina matemática elementar de um ponto de vista superior.

[2] Se uma função contínua $f(x)$, possui derivada $f'(x)$ em qualquer ponto de um intervalo dado, então tem que existir uma um ponto $x+\vartheta h$ entre x e $x+h$ tal que $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\vartheta h)$, e $0<\vartheta<1$

A intuição no Compêndio de Álgebra de Sebastião e Silva e Silva Paulo

A atualidade da visão didática de Sebastião e Silva manifesta-se na seguinte citação: "O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional […] e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta" (Sebastião e Silva, 1975, p. 11).

A introdução do cálculo infinitesimal (CI), segundo os programas de matemática de 1948, em Portugal, deveria ocorrer na disciplina de álgebra. A elementarização do CI – isto é a sua inserção como um saber escolar e não apenas universitário – começou a ocorrer em muitos países na primeira metade do século XX. Ainda sem autonomia, os princípios básicos do CI apareceram incluídos na Álgebra, inicialmente, nos programas de ensino e na maioria dos livros escolares. Em França, isso não foi diferente, em 1905, os conceitos básicos de CI foram inseridos na Álgebra, nos anos finais do ensino secundário. Entretanto, em 1982, na reforma dos programas de matemática, esses saberes foram transferidos à análise pois, segundo Artigue (2011): "o colapso da álgebra das estruturas, o desaparecimento dos elementos da teoria dos conjuntos, [...] oferecem ao ensino da análise um espaço para se desdobrar. A sua participação nos programas está a aumentar substancialmente" (Artigue, 2011, p. 18).

Em Portugal, no início da década de 1950, os livros únicos deveriam ser usados em todos os liceus. A escolha de tal livro era realizada mediante concurso. O primeiro livro de Álgebra para o 3º ciclo liceal, selecionado em 1950 foi o Compêndio de Álgebra de António Augusto Lopes. Em 1955, foi aprovado o livro de José Sebastião e Silva em parceria com José da Silva Paulo. Poeticamente, em 1951, Sebastião e Silva ao referir-se aos conceitos do CI no ensino secundário, destacou o papel da intuição na construção do conhecimento matemático:

> As grandes ideias criadoras são sempre assim: o seu efeito sobre a mente juvenil é comparável ao do ar forte da montanha, que primeiro entontece, mas depois estimula e avígora. Dá-se o choque inicial — e logo depois começa a lenta, subterrânea germinação de ideias que só o tempo e a sã pedagogia podem levar a bom termo. Há que semear com antecedência as intuições primeiras para que a colheita se possa fazer no momento oportuno (Silva, 1951, p. 1).

Prossegue defendendo a ideia fundamental para o sucesso do ensino da matemática – conciliar o máximo de intuitividade com o máximo de racionalidade. Para ele, assim como para Poincaré, a matemática não é só lógica, é um "produto humano" e assim sendo está associada às necessidades do homem, e a sua existência na terra.

Em muitos textos de Sebastião e Silva, a importância da intuição no desenvolvimento do pensamento matemático é ressaltada: "Não esquecer que, na investigação matemática, a intuição precede normalmente a lógica" e ainda: "Normalmente o aluno só pode tomar consciência da necessidade de certo grau de rigor, depois de ter compreendido os assuntos em primeira aproximação ou de modo intuitivo" (Silva, 1974, p. 11).

Uma primeira crítica positiva ao Compêndio de Álgebra apareceu na Gazeta de Matemática em 1958. O professor de matemática Barros (1958) destacou a clareza da introdução do conceito de derivada e as relações da derivada com a cinemática, assunto da física do 6º ano. Elogiou, também, as considerações de ordem intuitiva.

Sebastião e Silva manifestava a sua conceção de que o conceito de derivada deveria ser introduzido vinculado ao conceito de velocidade, quase que como um retorno a uma das motivações de sua criação.

> Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade, e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física — é um erro grave de pedagogia. Com tal orientação abstracta, o aluno ficará perplexo e frio, como diante dum corpo sem alma; ao passo que tudo se ilumina, e o espirito se povoa de belas ressonâncias criadoras, apenas se estabelece o contacto com o mundo externo (Silva, 1951, p.4).

A primeira edição do Compêndio de Álgebra ocorreu em 1956. O conceito de derivada seguiu a seguinte ordenação: função, limite, continuidade e derivada. Para os autores, sem as aplicações da derivada, sem as suas concretizações, os alunos receberiam esse novo conceito como uma pura abstração, o que dificultaria a sua aprendizagem. A introdução da derivada é realizada num extenso texto em que os autores comentam que a variação num gráfico é o que primeiro nos desperta atenção. Os autores trazem uma exemplificação da variação de temperatura num intervalo de tempo. Um gráfico acompanha o texto (Figura 5).

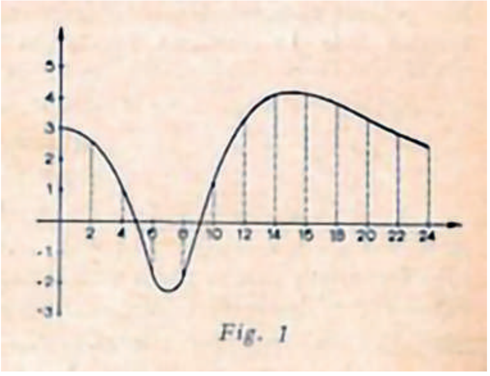


Figura 5. Variação de temperatura em função do tempo (Fonte: Silva e Paulo (1957, p. 168)

A discussão gira em torno da interpretação do gráfico, nos momentos de maior ou menor declive da curva. Um apelo à intuição transparece: "Esta intuição que temos da maior ou menor rapidez, com que, num dado fenómeno, uma grandeza varia com outra, é traduzida pelo conceito de derivada – um dos mais importantes de toda a matemática, pura e aplicada" (Silva & Paulo, 1957, p. 168).

Na primeira edição de 1956, há uma explicação sobre o conceito de velocidade, todavia esta foi excluída das edições posteriores. O problema trata da rapidez de comboios: considerando que a distância de Lisboa ao Porto é de 330 km, supondo que se a duração de uma viagem de carro foi de 5h 12min, a divisão do número de quilómetros pelas horas despendidas dá 63,4 km/h aproximadamente. Seguem com a discussão, trazendo um gráfico e deduzindo que a velocidade verdadeira do movimento no instante t, representado por v é dada por $v = \lim_{t \to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$.

O segundo exemplo, que permanece nas edições posteriores, é a do declive de uma reta, acompanhado de dois gráficos, no qual se define declive ou coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos A (x_1, x_2) e B (y_1,y_2) é dado pela razão $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Os declives são exemplificados por meio das equações de duas retas: $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$, mostrando que a primeira tem declive positivo e a segunda tem declive negativo.

Após ter explicado intuitivamente o conceito de declive, eles introduzem o conceito de tangente. Um gráfico auxilia na explicação (Figura 6). As várias retas que passam pelo ponto P_0, insinuam um movimento, difícil de ser representado.

A partir de uma curva qualquer C, que é representada pela função *y= f(x),* tomando dois pontos P e P_0, onde as coordenadas de P e P_0 são, respetivamente, (x, y) e (x_0, y_0), já que a função é contínua, quando $x \to x_0$ a variável y tende para y_0. Então o ponto P tende para P_0.

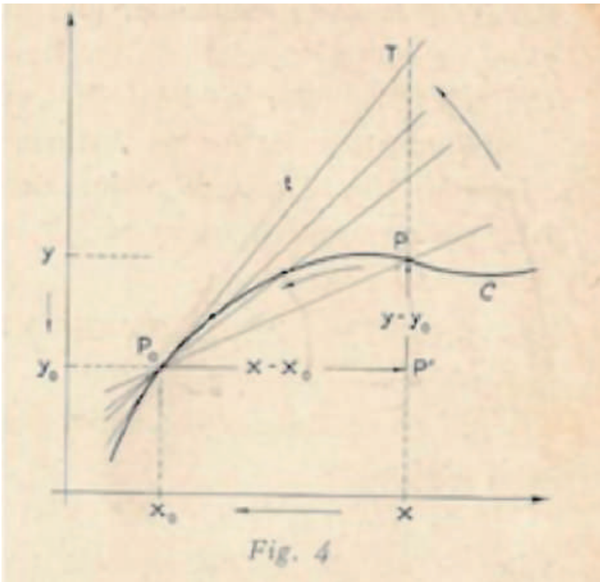


Figura 6: Tangente à uma curva (Fonte: Silva e Paulo (1957, p. 171)

Assim o declive da reta tangente P P_0 será $d = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, para $x \neq x_0$

Se $x \to x_0$, a variável d, função de x, tenderá a um limite finito. Logo $d_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

A reta t que passa pelo pontoP_0 e tem declive d_0 é chamada de tangente à curva nesse ponto. A conclusão apresentada: "Quando o ponto móvel P tende para o ponto fixo P_0, a secante tende para uma posição limite, t, que é a tangente à curva no ponto P_0. O declive da curva no ponto P_0 é o declive da tangente à curva nesse ponto" (Silva & Paulo, 1957, p. 171).

Por meio dessas duas problematizações, que refletem o significado mecânico e geométrico, o solo foi germinado, o conceito geral de derivada, mais abstrato, será introduzido não como algo misterioso, mas com um significado que foi previamente mostrado.

Para Tall (2002), uma abordagem intuitiva do cálculo concentra-se em ideias percetivas fundamentais antes de ser introduzido qualquer tipo de simbolismo. No ensino, não começamos com as ideias formais de limites, mas com ideias intuitivas de representações gráficas de funções. Ele exemplifica: "[...] a inclinação de um gráfico tempo-distância é uma velocidade, e a inclinação de um gráfico tempo-velocidade é uma aceleração, então nos concentramos nos sentidos incorporados de distância, velocidade e aceleração, em vez da matemática subjacente mais simples que cada uma é obtida da anterior como a inclinação de seu gráfico" (Tall, 1992, p. 12).

Conclusões

Matemática Elementar sob um ponto de vista superior é um livro diferente dos livros didáticos da época, pois contém uma proposta dirigida para a formação de professores de matemática, não para os iniciantes: "a obra é de um lado sintética e de outro pedagógica, pois visa "propagar esta nova forma de olhar o problema da matemática escolar" (Klein, 2009, p. 5). O autor sugere usar o método intuitivo no ensino como uma primeira via de apresentar os conceitos matemáticos, usando exemplificações, experiências, gráficos e tudo aquilo que possa auxiliar o aluno numa primeira abordagem de novos conceitos. Começa com exemplos da aritmética, relaciona-a com a geometria e, finalmente, mostra o uso do método intuitivo no cálculo diferencial e integral.

Em Portugal, pode-se dizer, que o conceito de intuição foi amplamente utilizado na obra *Compêndio de Álgebra*, que foi aprovada para o ensino nos liceus e teve muitas edições.

Ambos os matemáticos, apesar de distanciados temporalmente, tinham conceções pedagógicas sobre o ensino da matemática muito próximas. Consideravam, não ser possível um tratamento totalmente formalizado da matemática no ensino secundário, porque como reconhecem psicólogos como Bruner e Tall, os conceitos teóricos são formados gradualmente e precisam do apoio da perceção sensorial.

Este retorno ao passado continua atual, pois, segundo Tall (2013), o apelo à intuição no ensino da matemática continua a ocupar seu papel na construção do conhecimento pelo aluno. Na visão de Klein, o pêndulo deve oscilar igualmente entre a lógica e intuição. Quase meio século depois, Sebastião Silva afirmava praticamente o mesmo - o máximo de intuitividade com o máximo de racionalidade.

Referências bibliográficas

Alves, F. R. V. (2016). Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o seu ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia*, 9 (3), 1-21.

Aristóteles. (1973). *Ética a Nicômaco*. São Paulo: Abril Cultural. Col. Os pensadores, n. 4.

Artigue, M. (2011). Les questions de développement curriculaire à travers um example: l'ensiegnement de l"analyse em France au lyccée depuis le début du XXème siècle. *Quadrante*, XX, (1), 7-29.

Barros, L. (1958). Crítica de livros. *Gazeta de Matemática*, março/jun, (71), 44-46.

Doley, A. C. (2015). *Obra Completa – Sherlock Holmes*. Brasil: Harper Collins Brasil.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Leipzig: Teubner.

Klein, F. (1945). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint.* New York: Dover.

Klein, F. (2009). *Matemática Elementar de um ponto de vista superior.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Klein, F. (2011). *Matemática Elementar de um ponto de vista superior*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Klein, F. (2014). *Matemática Elementar de um ponto de vista superior*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Menguini, M., & Schubring, G. (2019). Elementary mathematics from a higher standpoint – conception, realization, and impact on teacher education. In: Hans-Georg Weigand et al. (Ed.) *The Legacy of Felix Klein*. ICME- 13 Monographs(pp.167-168). Springer Open.

Pestalozzi, J. (1998). *Sämtliche Kerke – kritische Ausgabe*. Band 13. Zurique: Verlag Neue Zürcher Zeitung.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto.

Silva, C. M. S. (2017). Imagens nos livros didáticos de matemática: Georg Augusto Büchler e Karl Sölter. *Acta Scientiarum*, 39 (1), jan-mar, 55-65.

Silva, C. M. S., & Rios, D. (2017). Apropriação de ideias modernizadoras de Felix Klein em práticas docentes de matemática no Colégio Gonzaga. *Com a palavra o professor*, v. 4, n. 8, 55-73.

Silva, J. S. (1974). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática,* v.1. Lisboa: Edição GEP, 1974.

Silva, J. S., & Paulo, J. S. (1956). *Compêndio de álgebra*. 3º ciclo dos liceus, v.1, 6º ano. 2. Ed. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, J. S., & Paulo, J. S. (1957). *Compêndio de álgebra*. 3º ciclo dos liceus, v.1, 6º ano. 2. Ed. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, J. S. (1951). A análise infinitesimal no ensino secundário. *Gazeta de matemática*, ano xii, n. 49, 1-4.

Tall, D. (1992). To transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proff. In Grouws D.A. (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, (pp. 495–511). https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge University Press.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2014). Intuition in Mathematics Education. In: Stephen Lerner (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. London, (pp. 326-329). Springer.

Valente, W. (2004). (Org). *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Valente, W. (2015). *Elementar*. Cadernos de Trabalho, v. 1. São Paulo: Editora da Física.

Cartazes
Posters

O pensamento algébrico: uma experiência transversal

The algebraic reasoning: a transversal experience

Laura Bandarra[1]

[1] Agrupamento n.º 1 de Serpa, laurabandarra@gmail.com

Resumo. *O desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser uma aposta desde os primeiros anos e favorecer a construção das ideias algébricas com vista ao desenvolvimento progressivo de um raciocínio matemático expresso de forma formal pelos alunos. Isto requer que se estabeleçam conexões curriculares entre a Álgebra dos diferentes anos de escolaridade, numa lógica de articulação vertical. O presente poster tem como intenção divulgar uma dessas experiências, em torno do subtópico Regularidades em sequências.*

Abstract. *The development of algebraic thinking should be a commitment from the early years and favor the construction of algebraic ideas with a view to the progressive development of mathematical reasoning expressed formally by the students. This requires establishing curricular connections between the Algebra of the different years of schooling, in a vertical articulation logic. The present poster intends to promote one of these experiences, around the subtopic Regularities in sequences.*

Palavras-chave: pensamento algébrico, articulação vertical, sequências

Keywords: algebraic thinking, vertical articulation, sequences

Da literatura...

Blanton e Kaput (2008) consideram que o pensamento algébrico surge como um processo pelo qual os alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas às suas idades. Em particular, perceber o conceito de variável é crucial para o estudo da álgebra, pois um dos grandes problemas do esforço que os alunos fazem para compreender e trabalhar em álgebra, resulta da sua limitada interpretação do termo variável (NCTM, 1991, p.122).

Uma perspetiva que emergiu nos últimos anos é que o pensamento algébrico pode (e deve) desenvolver-se desde o início da escolaridade, mesmo sem o uso de uma linguagem simbólica, em que o trabalho com sequências assume grande destaque (Ponte, 2017).

A experiência

A presente experiência decorreu num agrupamento de escolas localizado no concelho de Serpa (Baixo Alentejo). O estudo concretizado é de natureza qualitativa, em que a autora do presente poster teve o papel de observadora participante e esteve presente em todas as aulas. As turmas envolvidas foram 4 do pré-escolar (72 alunos), 3 do 1.º ano (60 alunos), 1 do 5.º ano (14 alunos) e 2 do 7.º ano (40 alunos). Em todas as aulas realizadas as crianças exploraram a tarefa, organizadas em grupos de 4 a 5 alunos.

Com esta iniciativa, pretendia-se analisar de que forma os alunos de diferentes níveis de ensino identificam, descrevem e verbalizam as regularidades, e inclusive como expressam formalmente o termo geral de uma sequência (nos 2.º e 3. º ciclos), utilizando a letra como variável. O enunciado das tarefas concretizadas em todas as turmas envolvidas centrava-se numa sequência de figuras alusivas a diversos recursos existentes no Baixo Alentejo (Figura 1).

Figura 1. Sequência de figuras comum às tarefas concretizadas desde o pré-escolar até ao 3.º ciclo

Ano de escolaridade	Objetivos de aprendizagem	Tarefa aplicada	Resultados obtidos
Pré-Escolar	Identificar e descrever regularidades em sequências variadas em contextos diversos, estabelecendo conexões matemáticas com a realidade próxima; Criar e modificar sequências, usando materiais manipuláveis e outros recursos.	Determinar os quatro termos seguintes de sequências geradas da utilização de duas, três ou mais figuras da inicial (ver Figura 1).	Analisaram o processo de construção de diversas sequências e conseguiram compreender a regra de construção de cada uma delas e identificar os termos seguintes corretamente. Expressaram os termos das sequências oralmente.
1.º Ano	(iguais aos estabelecidos para o pré-escolar)	Determinar os décimos termos das sequências geradas da utilização de duas, três ou mais figuras da inicial (ver Figura 1).	Para além dos obtidos no pré-escolar, conseguiram expressar os termos por escrito.
5.º Ano	Identificar e descrever em linguagem natural ou simbólica uma possível lei de formação para uma dada sequência;	Determinar os quartos termos seguintes e o vigésimo da sequência da Figura 1.	Conseguiram obter os termos seguintes da sequência (próxima e distante) e interligar a posição das figuras com o conceito “múltiplos de um número”. No decorrer da discussão coletiva dos resultados obtidos, obtiveram os termos gerais das posições das diversas figuras e compreenderam a noção de variável, de uma forma intuitiva.
7.º Ano	Reconhecer regularidades em sequências ou sucessões de números racionais e determinar uma lei de formação, expressando-a em linguagem natural ou simbólica;	Determinar o centésimo e o termo geral da sequência da Figura 1.	Obtiveram os termos gerais das posições das diversas figuras e compreenderam a noção de variável, de uma forma intuitiva.

Figura 2. Uma das sequências analisada pelos alunos do pré-escolar e 1.º ano

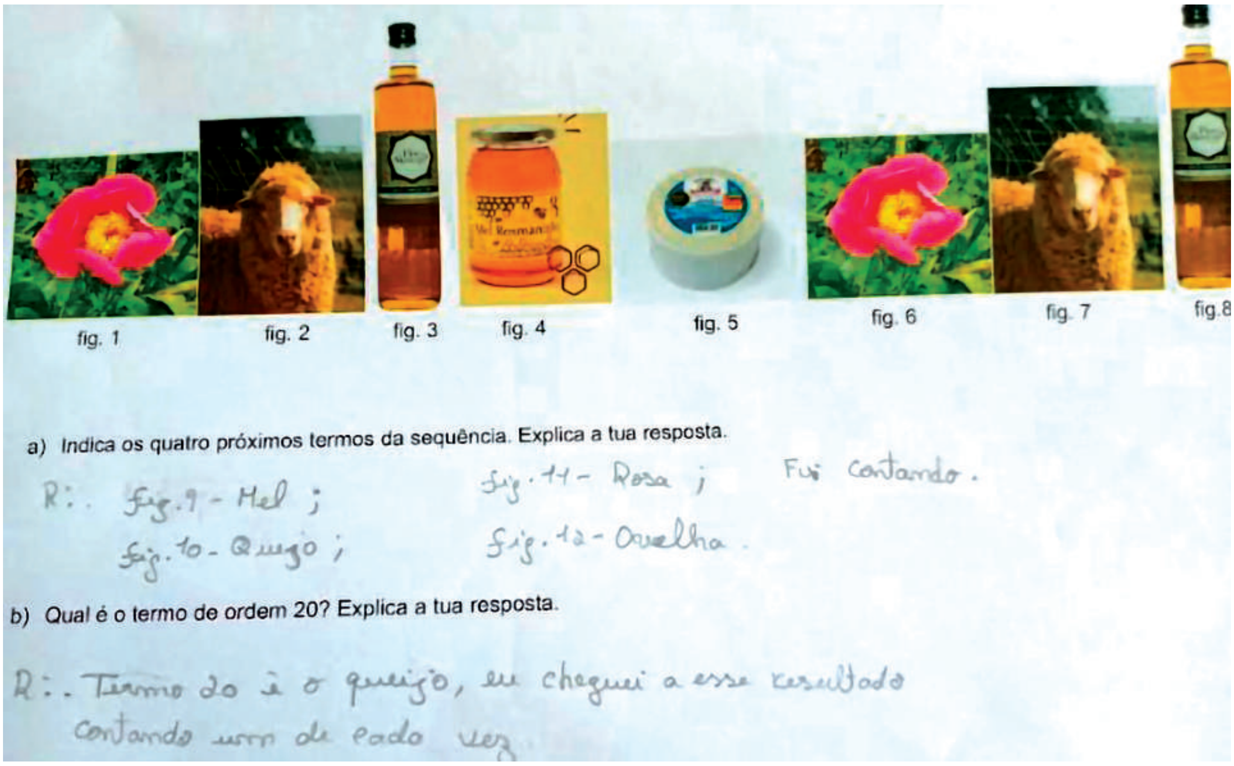


Figura 3. Produção de um grupo de alunos do 5.º ano

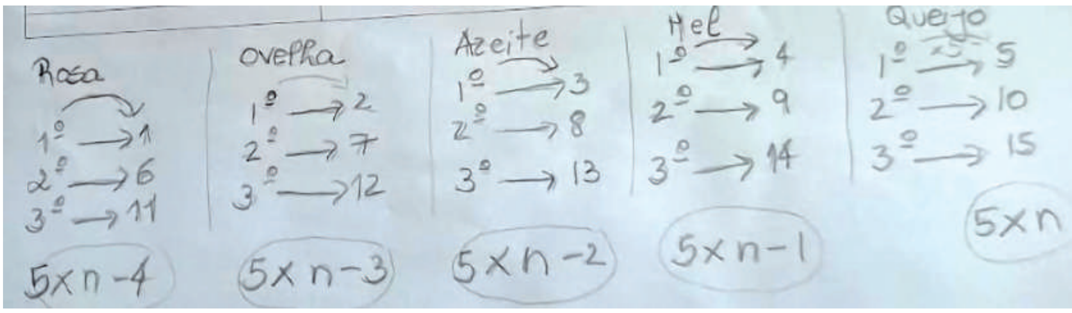


Figura 4. Produção de um grupo de alunos do 7.º ano

Conclusão

Com a concretização desta experiência, os alunos identificaram, construíram e compreenderam as sequências, comunicaram as suas ideias, oralmente ou por escrito, construíram relações entre diferentes conceitos matemáticos e, nos 5.º e 7.º anos, desenvolveram a noção do conceito de variável para efetuar generalizações.

Referências bibliográficas

Blanton, M., & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. APM e IIE.

Ponte, J. P. (2017). A aprendizagem da Álgebra: resultados de estudos portugueses. *Educação e Matemática,144,* pp. 27-32. APM.

Desenvolvimento profissional de professores: Trabalhando com generalização de padrões em um curso de formação continuada

Professional development of teachers: Working with pattern generalization in a continuing education course

Jorge Henrique Gualandi[1]

[1]Instituto Federal do Espírito Santo-campus Cachoeiro de Itapemirim, Brasil, jhgualandi@ifes.edu.br

Resumo. *A generalização de padrões configura um tema transversal ao currículo e promove o desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim, destaca-se a importância de professores em formação inicial ou continuada e alunos em todos os níveis de ensino vivenciarem tarefas relacionadas com padrões.*

Abstract. *The generalization of patterns configures a cross-curricular theme and promotes the development of algebraic thinking. Thus, we highlight the importance of teachers in initial or continuing education and students at all levels of education experiencing tasks related with patterns.*

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Formação de professores; Generalização de padrões.

Keywords: Algebraic thinking; Teacher education; Generalization of patterns.

Introdução

Neste texto, abordamos algumas reflexões acerca de uma prática desenvolvida com professores que ensinam matemática na educação básica (EB), em um curso de formação continuada (FC), no que concerne ao desenvolvimento do pensamento algébrico, mais especificamente a generalização de padrões, por considerarmos, assim como Barbosa (2009) e Vale e Barbosa (2019), a transversalidade dos padrões no currículo de matemática, o que permite fazer conexões entre os tópicos da matemática. A FC foi associada à seguinte questão de investigação: Quais os reflexos de uma FC na prática letiva de professores que ensinam matemática? Entendemos que, para o professor desenvolver com seus alunos tarefas relacionadas aos padrões, é importante que ele tenha vivenciado, em sua formação inicial ou continuada, situações que provoquem discussões acerca dessa temática.

Por que a generalização de padrões?

Kieran (2004) destaca que a generalização de padrões é considerada um meio pelo qual o sujeito pode desenvolver modos de pensar algebricamente. Ponte et al. (2009) consideram que a generalização é um elemento central do pensamento algébrico e Vale Barbosa (2019) destacam que os padrões são a essência da matemática e a linguagem na qual é expressa. A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) aborda o desenvolvimento do pensamento algébrico como um dos objetivos do ensino da álgebra para o ensino fundamental (EF), ressaltando que, "para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, [...] em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações" (Brasil, 2018, p. 270). Os *Standards* 2000 (NCTM, 2000) salientam, como um dos objetivos do currículo de matemática, compreender padrões, relações e funções para todos os níveis de ensino, enfatizando que o pensamento algébrico diz respeito às estruturas, à simbolização e ao estudo da variação e "compreender que padrões, relações e funções faz[em] parte do estudo das estruturas" (NCTM, 2000, p. 37). Diante do exposto, entendemos que o ensino da matemática por meio dos padrões pode proporcionar aos alunos a aprendizagem de uma matemática contextualizada e significativa, visto que os padrões compõem uma temática transversal ao currículo, proporcionando aos sujeitos relacionar a matemática com ela mesma e com outras áreas do conhecimento.

Metodologia

Esta pesquisa, de natureza qualitativa, foi desenvolvida em um contexto de FC com professores que ensinam matemática na EB, em um município do estado do Espírito Santo, Brasil. O curso de FC foi estruturado com base em alguns pressupostos da Engenharia Didática, conforme descrita por Artigue (1988), seguindo as fases de análises preliminares, a análise *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e discussão e validação. Nos encontros, trabalhamos tarefas com múltiplas resoluções com o intuito de proporcionar aos sujeitos situações relacionadas à generalização de padrões. A produção de dados se deu por meio da observação participante, bem como por meio dos protocolos de resoluções das tarefas e através das gravações em áudio das falas dos participantes. Participaram dessa investigação quatro professores que ensinam matemática nos anos iniciais (primeiro ao quinto ano) e oito nos anos finais (sexto ao nono ano) do EF. O trabalho foi desenvolvido em duplas, com o propósito de haver trocas de experiências e discussões entre os pares. A análise dos dados se deu por meio da categorização dos registros acerca das tarefas desenvolvidas e pelas falas dos participantes.

Algumas considerações

Os momentos de reflexão proporcionados nas discussões revelaram que grande parte dos participantes realizou com seus alunos tarefas relacionadas com a generalização de padrões o que evidenciou a importância do trabalho com padrões em qualquer nível e ensino. Os participantes destacaram que, ao trabalhar, com seus alunos, tarefas com múltiplas resoluções promoveu nesses estudantes a autonomia, visto que havia necessidade em explicar o caminho do desenvolvimento da tarefa e não simplesmente resolvê-la. Após a categorização dos dados observamos que após essa FC, os participantes destacaram algumas mudanças no fazer docente, tais como: o trabalho em duplas; a prática de socialização das múltiplas resoluções desenvolvidas pelos alunos e; a prática de organização de tarefas relacionadas à generalização de padrões (próxima ou distante). Concluímos que as experiências vivenciadas nessa FC promovera o desenvolvimento profissional dos participantes.

Referências bibliográficas

Artigue, M. (1988). *Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Barbosa, A. C. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico*. [Tese de doutoramento]. Repositório da Universidade do Minho. https://repositorium.sdum.uminho.pt.

BRASIL. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. http://basenacionalcomum.mec.gov.br.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *Mathematcs Educator*, *8*(1) 139-151.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. DGIDC.

Vale, I., & Barbosa, A. (2019). Pensamento algébrico: Contributo da visualização na construção da generalização. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(3), 398-418

Cinemat II: a Matemática pelas lentes do Cinema

Cinemat II: Mathematics through Cinema lenses

Isabella Araújo de Moura Oliveira[1], *Marli Duffles Donato Moreira*[2]

[1]*Universidade Federal de Viçosa, isabella.moura@ufv.br*
[2]*Universidade Federal de Viçosa, marliddmoreira@ufv.br*

Resumo. *O projeto CINEMAT pretende investigar que matemática é revelada pelo cinema e suas concepções epistemológicas, fundamentado na articulação matemática e cultura tendo o cinema como instrumento mediador da enculturação matemática.*

Abstract. *The CINEMAT project intends to investigate what mathematics is revealed by cinema and its epistemological conceptions, based on the articulation between mathematics and culture, having cinema as a mediating tool for mathematics enculturation.*

Palavras-chave: Enculturação Matemática; Filmes; Cultura.

Keywords: Mathematical Enculturation; Movies; Culture.

Histórico

O projeto *CINEMAT: a matemática pelas lentes do cinema* iniciou-se em agosto de 2017, com alunos de graduação da Universidade Federal de Viçosa (UFV). Na perspetiva da enculturação matemática, a matemática é construída pelas diferentes sociedades humanas ao longo da história (Bishop, 1991). O cinema e a matemática se entrelaçam com a cultura possibilitando o desenvolvimento e a apropriação da forma matemática de perceber, organizar e interagir na sociedade.

Este projeto fundamenta-se em três perspectivas: (i) Enculturação Matemática (Bishop, 1991); (ii) Teoria da Atividade (Leontiev, 1978) e (iii) Pensamento e Linguagem (Vigotski, 2008).

Conforme a Teoria da Atividade (Leontiev, 1978), a aprendizagem humana é essencialmente social. O cinema, nesse contexto, atua como mediador entre a cultura matemática e os participantes, promovendo a conexão e a compreensão dos conceitos matemáticos por meio da linguagem cinematográfica.

Segundo Vigotski (2008), a linguagem desempenha um papel fundamental como um instrumento complexo de mediação entre o indivíduo e o mundo, definindo-o como um ser social, histórico e cultural. Portanto, ao ensinar e aprender matemática, é crucial explorar a conexão dessa disciplina com a vida e a cultura, desenvolvendo a habilidade de leitura do mundo.

Desta forma, a linguagem audiovisual favorece a aproximação do conhecimento matemático possibilitando a compreensão das sociedades. No projeto, os filmes exibidos são instrumentos de mediação para a enculturação matemática estimulando atitudes positivas em relação à disciplina, tornando o aprendizado mais dinâmico, interessante e atrativo. Assim, o cinema desempenha o papel de revelar o legado histórico-cultural das gerações anteriores.

CINEMAT II

O projeto CINEMAT II encontra-se em andamento. Após um processo de revisão de literatura e triagem de filmes/vídeos que focam na matemática e em sua relação com a cultura, alguns filmes selecionados já foram exibidos: "Não olhe para Cima" e "O homem que viu o Infinito" (Figura 1).

Figura 1. Exibições dos filmes Não Olhe para Cima e O homem que viu o Infinito (Fonte: Dados da pesquisa)

Em cada sessão, seguimos a seguinte metodologia: (i) Apresentação do projeto; (ii) exibição do filme e; (iii) questionário virtual (Google Forms). Os participantes (estudantes universitários) têm a oportunidade de compartilhar suas experiências por meio desse questionário, e suas respostas são utilizadas como fonte de dados para a pesquisa.

Após a exibição dos filmes, foram propostas dinâmicas de discussão sobre o conhecimento matemático e a cultura retratada em cada história com o propósito de problematizar sobre a matemática percebida e sua relação com a cultura e a sociedade.

Utilizamos a rede social Instagram @cinemat.ufv para divulgar e convidar os estudantes para os encontros de exibição e discussão dos filmes.

Resultados

Nas exibições, contamos com a participação de 22 pessoas na primeira sessão e 20, na segunda. Todos os participantes eram alunos do curso de graduação em Matemática (Licenciatura e Bacharelado/UFV). Destacamos, a seguir, algumas das respostas obtidas no questionário.

> Participante A: Sim, eu acredito que o cinema pode ser um recurso didático muito eficaz. O cinema pode ser utilizado para ensinar uma variedade de assuntos. Ele pode ajudar os alunos a visualizar eventos e conceitos abstratos de maneira mais clara e pode ser uma ferramenta poderosa para engajar os alunos e aumentar sua compreensão do assunto.
>
> *Participante B: Nos cálculos, mostra o quando a matemática é instrumento muito importante na sociedade e naquele caso, na sobrevivência da humanidade.*
>
> *Participante C: A matemática traz a possibilidade de construir explicações científicas para a realidade sócio político cultural vivida. Assistir ao filme reforçou minha concepção da matemática como construção humana.*

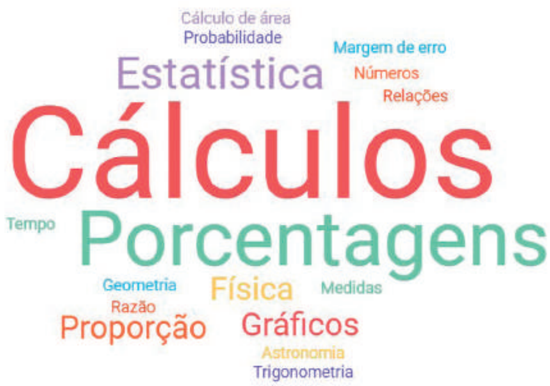


Figura 2. Nuvem de palavras construída a partir das respostas no questionário do filme Não olhe para Cima (Fonte: Dados da pesquisa)

A nuvem de palavras (Figura 2) foi construída a partir das respostas da pergunta "Que matemática/conceitos/ideias você observou no filme assistido?". Os resultados, até o momento, indicam que o cinema favorece a apropriação de objetos matemáticos e a percepção de matemática como parte da cultura humana.

Considerações

Este projeto busca contribuir para a problematização entre matemática e a cultura revelada nos filmes exibidos e incentivar o uso do cinema como um instrumento mediador de apropriação da cultura matemática.

Os filmes apresentados exploram diversos conceitos matemáticos com o objetivo de estimular uma perspectiva crítica sobre o mundo e a sociedade em que vivemos. Dessa forma, por meio deste projeto, espera-se que a matemática seja reconhecida como parte integrante da cultura humana, integrada ao ensino universitário e valorizada como uma forma de compreender e transformar o ambiente educacional e social.

Agradecimentos

Agradecemos ao PIBIC/CNPq UFV 2022/2023 pelo apoio a esta pesquisa.

Referências bibliográficas

Bishop, A. J. (1991). M*athematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Editora Moraes.

Vigotski, L. S. (2008). *Pensamento e linguagem* (4ªed). Martins Fontes.

Desenvolvimento do conhecimento do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico

Teachers Interpretative Knowledge development and its connections with the tasks for teacher education in the scope of Measurement, Algebraic, Geometric and Stocastic Thinking

Miguel Ribeiro[1], *Adilson Dalben*[2], *Alessandra Almeida*[3], *Sandra Menezes*[4]

[1]Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP,
cmribas78@gmail.com
[2]Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP,
adilson.dalben@gmail.com
[3]Pontifícia Universidade Católica de Campinas – PUCC,
alessandraalmeida628@gmail.com
[4]Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP,
sandra.smenezes@hotmail.com.br

Resumo. *Neste projeto temos por foco as especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico, Geométrico, Estatístico e as conexões entre Medida e Operações e das Tarefas para a Formação que potenciam o desenvolvimento desse conhecimento.*

Abstract. *This project focus on the specificities of teachers Interpretative and Specialized Knowledge in the scope of Algebraic, Geometric, Stocastic Thinking, the connections between Measurement and Operations and the Tasks for Teacher Education supporting the development of such specialized knowledge.*

Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo; MTSK; Tarefas para a Formação.

Keywords: Interpretative Knowledge; MTSK; Tasks for Teacher Education.

Algumas ideias e discussões iniciais

Os resultados dos alunos relacionam-se com o conhecimento do professor e, portanto, melhorar a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos pressupõe desenvolver o conhecimento do professor (e.g., Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004). Neste projeto assume-se a importância de considerar como ponto de partida o que os alunos conhecem e como o conhecem de matemática, e o feedback que se fornece, considerando as especificidades do conhecimento do professor na perspectiva do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK e do Conhecimento Interpretativo – CI (Di Martino, Mellone, & Ribeiro, 2020; Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014). O MTSK é composto por dois domínios de conhecimento – matemático e pedagógico – e no CI identificam-se vários níveis de conhecimento associado aos tipos, forma e conteúdo da interpretação e feedback fornecido.

De entre os temas matemáticos em que os alunos revelam maiores dificuldades e são, portanto, problemáticos também para (futuros) professores encontramos o Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico e o entendimento da Medida e suas conexões com as Operações. Considerando estes temas, e o fato de a prática do professor se sustentar na preparação e implementação de tarefas (Mason & Johnston-Wilder, 2006), para a transformação dessa prática considera-se a centralidade do conhecimento especializado do professor, o que levou à conceitualização das Tarefas para a Formação – TpF (e.g., Ribeiro, Almeida, & Mellone, 2021).

Neste projeto buscamos aprofundar o entendimento do conhecimento revelado por (futuros) professores em cada um destes temas e a natureza e foco das TpF que assumem o papel de recurso para desenvolvimento do conhecimento do professor e de coleta de informações para a pesquisa.

Contexto e método

Considera-se uma abordagem cíclica com pelo menos dois ciclos que permitem refinar as TpF e discutir as suas potencialidades e limitações para aceder e desenvolver o conhecimento dos participantes. As informações serão coletadas em contextos de formação inicial e continua de professores desde a Educação Pré-Escolar até ao Ensino Secundário[1] (todos gravados em áudio e vídeo). A conceitualização das TpF e a metodologia de implementação – abordagem pedagógica formativa Ciclo Individual-Coletivo-Individual, abreviadamente Ciclo ICI (Pacelli et al., 2020) – serão também foco de pesquisa como contextos pedagógicos de desenvolvimento do MTSK e CI.

Para a análise do conhecimento dos (futuros) professores pretendemos refinar os níveis de Conhecimento Interpretativo; o conteúdo de cada subdomínio do MTSK e a natureza e foco das TpF.

Alguns resultados esperados

Entre os resultados esperados referimos:

(A) Identificar o conteúdo, natureza e níveis de Conhecimento Interpretativo do professor;

(B) Identificar o conteúdo de distintos subdomínios do MTSK, e suas relações, que sustentam o Conhecimento Interpretativo;

(C) Conceitualizar um conjunto de Tarefas para a Formação com foco no desenvolvimento do CI e discutir as suas características nucleares que potencializam o desenvolvimento desse conhecimento.

[1] Educação Infantil até ao Ensino Médio, utilizando a nomenclatura atual no contexto brasileiro.

Agradecimentos

O presente trabalho é parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

Referências

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. In: *Stephen Lerman. (Org.). Encyclopedia of Mathematics Education. 1ed.: Springer International Publishing*, 424-428.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 135-150.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L.V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 26(3), pp. 237-257.

Pacelli, T., Mellone, M., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2020). Collective discussions for the development if interpretative knowledge in mathematics teacher education In: ICMI Study 25, Lisbon, 1, pp. 1 – 10.

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), pp. 1-32.

Qual o entendimento dos professores acerca de diferentes tipos de tarefas matemáticas?

What is teachers' understanding of different types of mathematical tasks?

Dores Ferreira[1], *Alexandra Gomes*[2], *Catarina Vasconcelos Gonçalves*[3]

[1]AE de Real, doresferreira@gmail.com
[2] CIEC/IE-UMinho, magomes@ie,uminho.pt
[3] IEESFafe, catarinavasconcelosgoncalves@gmail.com

Resumo. *O uso de tarefas matemáticas e a formação de professores são dois tópicos importantes. Este estudo objetiva perceber o entendimento de professores do 1.º CEB sobre diferentes tipos de tarefas. Constatou-se que, apesar da dificuldade em descrever diferentes tipos de tarefa, os professores anteveem várias vantagens, mas também dificuldades no seu uso.*

Abstract. *The use of mathematical tasks and teacher training are two important topics. This study aims to perceive the understanding of primary school teachers about different types of tasks. It was found that, despite the difficulty in describing different types of tasks, teachers foresee several advantages but also difficulties in using them.*

Palavras-chave: Tarefas matemáticas; Formação de professores; Professores do Ensino Básico.

Keywords: Mathematical tasks; Teacher training; Primary school teachers.

Enquadramento

É através das tarefas que os alunos desenvolvem o seu conhecimento matemático, o sentido do que significa fazer Matemática e a forma como compreendem a natureza da Matemática (Jones & Pepin, 2016). O professor desempenha um papel fundamental na seleção/criação de tarefas e na forma como coordena a atividade dos alunos. (Sullivan et al., 2015).

Investigações recentes mostram que os professores que usam tarefas matemáticas de alta qualidade e que incentivam a discussão em sala de aula tendem a ter alunos com melhor desempenho em Matemática. Contudo, tarefas de elevado desafio cognitivo são difíceis de implementar na sala de aula e são frequentemente transformadas em tarefas de baixo desafio cognitivo. Por sua vez, os professores tendem a preferir tarefas de baixo nível cognitivo, como exercícios de rotina e situações envolvendo a aplicação de procedimentos memorizados (Stein et al., 2009). Os professores podem ser avessos ao uso de tarefas desafiadoras porque estão preocupados com o tempo para cumprir os programas, sentem insegurança relativamente ao seu conhecimento matemático para o ensino (Kaur & Chin, 2022), têm baixas expectativas acerca das capacidades dos alunos e acomodaram-se numa rotina baseada no uso de manuais. A formação de professores pode desempenhar um papel relevante promovendo a familiarização/contacto com tarefas desafiadoras, considerando os futuros professores como aprendizes (Rachamim, et al., 2022), facultando oportunidades para projetarem tarefas que enfatizem diferentes aspetos do conteúdo matemático e incentivem diferentes tipos de pensamento matemático, ajudando-os a construir e expandir o seu "conhecimento matemático e capacidade de design didático-matemático" (Jones & Pepin, 2016, p. 106).

Metodologia

Este póster apresenta um estudo que objetiva perceber o entendimento de professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) acerca de diferentes tipos de tarefas matemáticas, seguindo uma metodologia qualitativa de cariz interpretativo (Creswell, 2007). Os participantes são 16 docentes do 1.º CEB, envolvidos numa ação de formação. Nesse âmbito, foram desenhadas e implementadas tarefas geométricas de *Classificar*, *Avaliar* e *Analisar* (Swan & Swain, 2010). Na formação, os professores resolveram tarefas individualmente, analisaram resoluções em pequeno grupo e discutiram-nas em grande grupo. Após a abordagem a cada tipologia, responderam a um questionário (4 questões) acerca do seu entendimento sobre esse tipo de tarefa. Na primeira questão pedia-se a descrição; nas segunda e terceira as vantagens na sua utilização direcionadas, para o ensino e para a (própria) formação. A quarta pedia a identificação das dificuldades/desafios na utilização do tipo de tarefa.

Neste trabalho apresentaremos a análise às respostas ao questionário, realizada através da análise de conteúdo (Bardin, 2011).

Resultados

A maior parte dos professores não apresenta *descrições* das tarefas, mas usa adjetivos, (como por exemplo: "interessantes", "exigente") ou refere-se a um potencial uso em sala de aula ("deve ser usada com regularidade na nossa prática pedagógica").

Quanto às *vantagens para a (própria) formação e para o ensino,* as respostas dadas apresentam razões centradas no professor e nos alunos, independentemente de a questão incidir sobre vantagens para uma ou para outra.

Relativamente às *dificuldades/desafios*, as respostas centram-se na gestão da sala de aula, no conhecimento do professor e no conhecimento e capacidades do aluno.

Na figura 1 apresentam-se, esquematicamente, vantagens e dificuldades/desafios identificados pelos professores.

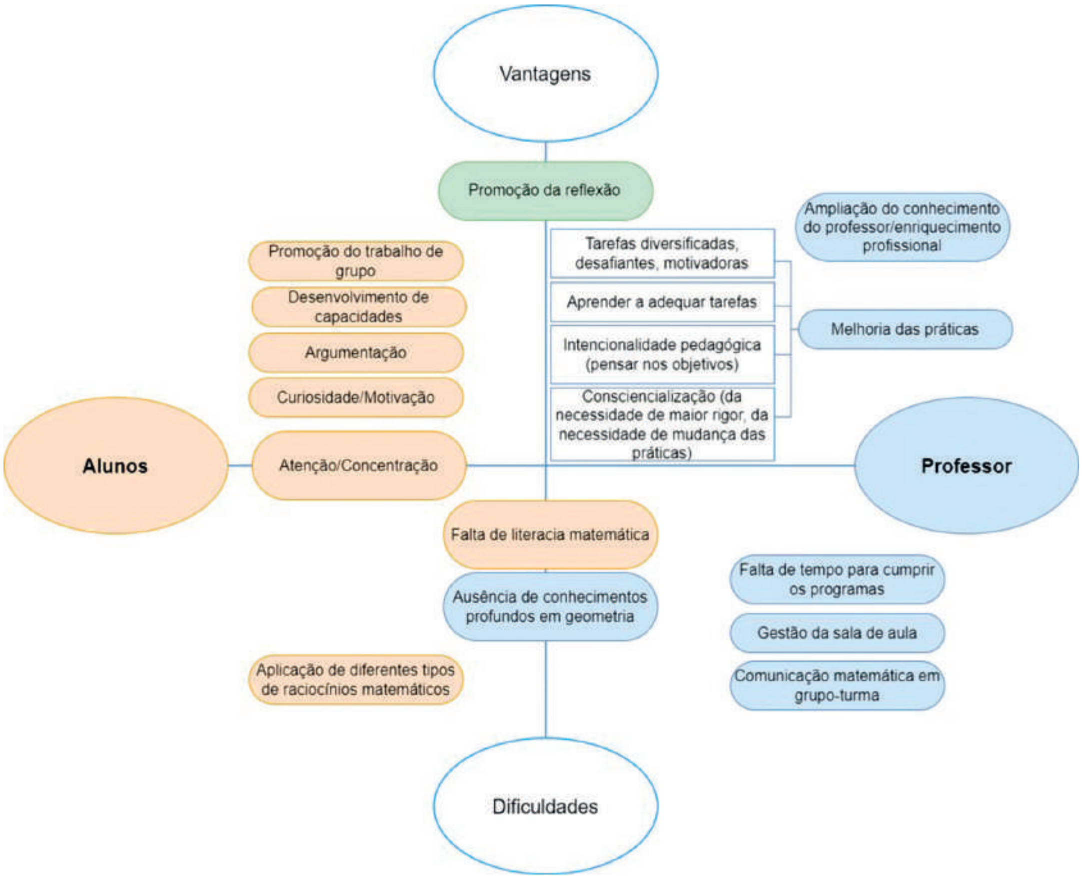


Figura 1. Vantagens/dificuldades identificados pelos professores

Considerações finais

Os professores revelaram não lhes ser evidente descrever cada tipologia e dar respostas diferenciadas para cada tipo de tarefa. Contudo, elencaram várias vantagens na utilização dos diferentes tipos de tarefas, apesar de não distinguirem as vantagens para a formação do professor das vantagens para o ensino e a maior parte das respostas remeterem para as segundas. Também foram avançadas várias dificuldades/desafios quer para o professor, quer para o aluno. Consideraram-se as dificuldades conjuntamente, pois constatou-se que o que para uns é encarado como dificuldade, para outros é encarado como desafio.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo.* Edições 70.

Creswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). Sage Publications.

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19(2),* 105-121.

Kaur, B., & Chin, S. L. (2022). Nature of mathematics tasks and what teachers do. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 46, 101169.

Rachamim, M., Berman, A. & Koichu, B. (2022). Using scaffolds in support of teachers as task designers in geometry: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2100293

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based math instruction: A casebook for professional development.* Teachers College Press.

Sullivan, P., Knott, L., Yang, Y. (2015). The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. In: Watson, A., Ohtani, M. (eds) *Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_3

Swan, M., & Swain, J. (2010). The impact of a professional development programme on the practices and beliefs of numeracy teachers. *Journal of further and Higher Education*, *34(2)*, 165-177.

Pensamento Computacional na Matemática: perspetivas para o ensino e aprendizagem no estado de São Paulo

Computational Thinking in Mathematics: perspectives for teaching and learning in state of the São Paulo

Janaina Oliveira Silva[1], *Herman R. Assumpção*[2], *Laôr F. Oliveira*[3], *Roberto X. A. Filho*[4]

[1, 2, 3, 4] Sesi-SP, profajanainasilva@gmail.com

Resumo. *Este trabalho apresenta o programa PCMat o qual tem como foco a aprendizagem da matemática no contexto da educação pública de São Paulo e procura aumentar a proficiência de matemática com formação contínua de professores do ensino fundamental e aplicação prática com alunos dos 6 aos 14 anos.*

Abstract. *This work presents the PCMat program, which focuses on learning mathematics in the context of public education in São Paulo and seeks to increase mathematics proficiency with continuing education of elementary school teachers and practical application with students from 6 to 14 years old.*

Palavras-chave: Educação matemática; Saberes escolarizados; Ensino e aprendizagem; Programas educacionais.

Keywords: Mathematics education; School knowledge; Teaching and learning; Educational programs.

Considerações iniciais

Este trabalho traz à luz a apresentação de um programa educacional que tem como foco a aprendizagem da matemática no contexto da Educação brasileira, em particular, a educação pública do estado de São Paulo, cuja pergunta norteadora se envereda na seguinte questão: como o Pensamento Computacional (PC) pode contribuir para o avanço na proficiência da linguagem matemática?

Nesse sentido, este trabalho procura apresentar a solução educacional PCMat, bem como a sua estrutura, de maneira a propiciar reflexões sobre como o programa pode oferecer possibilidades para o aprimoramento da proficiência da matemática a partir do desenvolvimento de seus quatro pilares basilares.

O programa foi elaborado pela equipe técnica do Sesi-SP e tem como escopo a formação contínua de professores do ensino fundamental e também propicia a aplicação de atividades práticas nas aulas de matemática para alunos dos 6 aos 14 anos (anos iniciais: dos 6 aos 10 anos; anos finais: dos 11 aos 14 anos).

A estrutura do programa pretende trabalhar com o pensamento computacional a partir dos seus quatro eixos: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos e procura trazer esses conceitos para dentro do âmbito da educação matemática dos estudantes na faixa etária relacionada a esta etapa escolar.

Assim, neste trabalho apresentamos a estrutura do programa PCMat, bem como delineamos a proposta educacional do programa com as necessidades de aprendizagem dos alunos e das ações formativas a serem desenvolvidas com os professores que ensinam matemática.

Contexto

Partimos de estudos realizados pelo Ministério da Educação, por meio dos resultados da Saeb 2019 o qual apresenta dados sobre a percentagem de estudantes com a aprendizagem considerada adequada para a componente curricular de matemática tanto nas redes pública quanto nas privadas.

Abaixo, apresentamos esses dados (Figura 1):

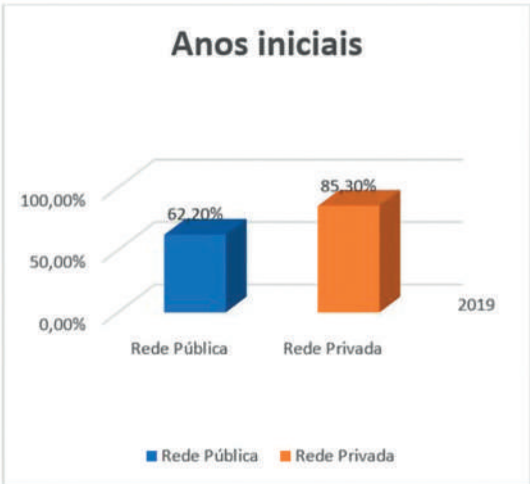


Figura 1. Porcentagem da aprendizagem adequada por rede de ensino - Anos iniciais
(Fonte: MEC/INEP-DAEP - Microdados do Saeb 2019)

A observação dos dados do gráfico 1 mostra-nos que para os anos iniciais, cerca de 38% dos estudantes não têm uma aprendizagem considerada adequada para a componente curricular da matemática na rede pública, enquanto na rede privada esse índice é de 14,7%, isto é, há uma diferença considerável de 23,1 pontos percentuais que distanciam a aprendizagem entre as redes, evidenciando, com isso, uma desigualdade entre os saberes escolarizados entre os alunos de cada rede.

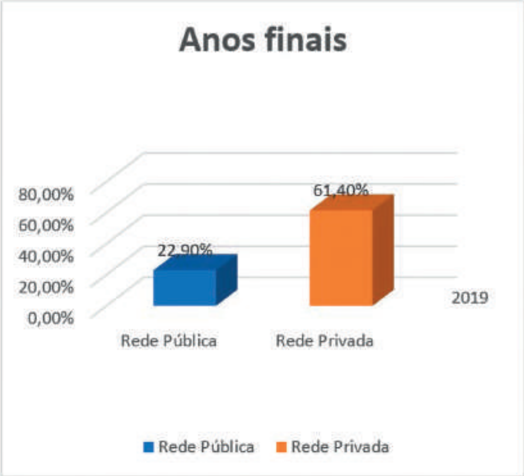


Figura 2. Porcentagem da aprendizagem adequada por rede de ensino - Anos finais
(Fonte: MEC/INEP-DAEP - Microdados do Saeb 2019)

Ao observarmos os dados do gráfico 2 (Figura 2), notamos que os estudantes da rede pública estão 38,5 pontos percentuais abaixo dos estudantes que são matriculados na rede privada, quando comparadas a adequação da aprendizagem de matemática. Isso equivale a dizer que os alunos da rede pública têm cerca de 37,29% da aprendizagem, considerando o estatuto máximo atingido por aqueles da rede particular.

O estado de São Paulo abrange 645 municípios, os quais possuem mais de 7.050 escolas e mais de 250.000 professores, dos quais 99% têm formação em nível superior e menos da metade tem formação pós-graduada *lato sensu* e ou *stricto sensu*.

Atualmente, a rede pública de educação do estado de São Paulo possui cerca de 36% do total de matrículas no Brasil, totalizando, aproximadamente, 2,3 milhões de estudantes que frequentam o ensino fundamental, ou seja, com alunos que variam entre 6 e 10 anos (para os anos iniciais) e entre 11 e 14 anos (para os anos finais).

Considerando o defasamento da aprendizagem de matemática presente no ensino fundamental (anos iniciais e finais), é necessário um importante investimento qualitativo em prol da superação desses *déficits* de saberes escolarizados. Nesse sentido, surge o programa PCMat, cujo objetivo é fomentar subsídios para o aumento da proficiência de matemática, centralizando esforços na formação de docentes e na aplicação prática dos pilares do pensamento computacional nas aulas voltadas para a aprendizagem da componente curricular da matemática.

Programa Educacional PCMat

Dado o contexto em que se encontra a educação paulista no tocante à aprendizagem da matemática, tanto nos anos iniciais quanto nos finais do ensino fundamental, o Sesi-SP propõe a implantação de um programa educacional que tem como eixos dois agentes do processo de ensino-aprendizagem: o docente e o estudante.

O programa PCMat visa aumentar a proficiência de matemática dos estudantes com faixa etária dos 6 aos 14 anos, matriculados em escolas da rede pública do estado de São Paulo. Para tal, conta-se como estratégias ações formativas de professores que atuam no ensino fundamental e aplicação de atividades práticas que fomentem o desenvolvimento do pensamento computacional (PC) nessas vivências.

Incluir o pensamento computacional nas vivências dos saberes escolarizados nas palavras de Wing (2010) auxilia no desenvolvimento, na elaboração e resolução de problemas. Nas suas palavras:

> (...) processos de pensamento envolvidos na formulação de problemas e as suas soluções de modo que as mesmas são representadas de uma forma que pode ser eficazmente executada por um agente de processamento de informações. (Wing, 2010).

Nesse sentido, o pensamento computacional na concepção do programa está delineado para se constituir a partir de abordagens disruptivas, que considerem os contextos e as necessidades educacionais detectadas pelos professores dos estudantes dos municípios participantes.

O PCMat, portanto, pode ser entendido como uma solução educacional a ser implantada, isto é, trata-se de uma transferência de tecnologia educacional em que o pensamento computacional é alicerce para o ensino de matemática. Assim, podemos visualizar o programa a partir do seguinte diagrama (Figura 3):

Figura 3. Programa PCMat (Fonte: autoria própria, 2023).

Como podemos notar pelo diagrama, o programa PCMat está estruturado de maneira a contemplar quatro eixos de desenvolvimento no processo de ensino-aprendizagem: pensamento computacional, resolução de problemas e função social, alfabetização matemática e ludicidade e metodologias ativas.

O alicerce para o PCMat é o PC com seus quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo. O conjunto desses elementos procura o desenvolvimento da lógica computacional, oportunizando ao estudante uma nova forma de olhar os seus objetos de aprendizagem que compõem tanto os saberes escolarizados quanto aqueles que fazem parte da vida cotidiana de cada um.

Sobre a decomposição, França (2020) afirma que se trata de:

> (...) uma habilidade fundamental na solução de problemas. Ela consiste em dividir um problema complexo em partes menores, facilitando o seu entendimento e gerenciamento. Essas partes podem ser entendidas, resolvidas, desenvolvidas e avaliadas separadamente (...) (França, p. 32, 2020).

Considerando tal perspectiva para o PC a decomposição torna mais eficaz a compreensão das partes para o entendimento geral, do todo, visto que apesar de as partes poderem ser separadas, elas podem ser integradas no conjunto ao longo do processo.

Isto leva-nos a pensar sobre a construção desse todo. Assim, passamos ao segundo pilar: o reconhecimento de padrões. A seu respeito, França (2020) afirma:

> (...) está associada à identificação de padrões e à exploração dessas características, possibilitando resolver novos problemas mais rapidamente com base em soluções de problemas anteriores (...) reconhecendo padrões nos dados, processos e estratégias que serão usados na resolução do problema. (França, p. 33, 2020).

Em outras palavras, é afirmar que o reconhecimento de padrões permite a exploração das características próprias àquele objeto ou problema, o que possibilita pensar em maneiras de rearranjá-lo e de identificar nele aspectos que auxiliem na resolução do problema dado.

Tal etapa leva ao terceiro pilar: a abstração. França (2020) define-o como sendo o:

> (...) processo de filtrar – ignorar – os detalhes dos padrões e se concentrar nas características gerais, criando-se uma representação do problema que está sendo resolvido. Assim, é requerida a habilidade de escolher os detalhes certos que serão ignorados para que o problema se torne mais fácil, sem perder tudo o que é importante. (França, p. 34, 2020).

Isto significa dizer que se de um lado é preciso ver as partes de maneira detalhada; de outro, também é preciso ignorar o que é desnecessário e observar as características e aspectos mais gerais para que se possa construir um algoritmo ou pensamento algorítmico (França, 2020).

Nas palavras da autora, trata-se de *(...) um conjunto de passos específicos para resolver um problema. (...) Neles, cada instrução é explicitada e a ordem em que elas devem ser executadas é planeada. (França, p. 35, 2020).*

Assim, ao considerar tais pilares, o programa PCMat incorpora na sua concepção um fazer que perpassa à construção de uma lógica. Contudo, esses pilares não são impostos, são contextualizados a partir da apresentação de situações-problema que necessitam de uma solução tangível e acessível, efetivando-se, com isso, uma aprendizagem significativa ligada à função social da matemática.

Vale ressaltar que este processo se dá desde os anos iniciais da escolarização do aluno, no Brasil, caracterizado pela entrada do estudante no ensino fundamental. Isso significa dizer que, juntamente com o processo de alfabetização da língua portuguesa, a escola, como fomentadora dos saberes escolarizados, também precisa de preocupar-se com a alfabetização matemática, inserindo no contexto a linguagem matemática de modo que o estudante tenha desde cedo acesso aos pilares do pensamento computacional.

Outro aspecto importante neste processo é a ludicidade e a utilização de ferramentas próprias das metodologias ativas, pois elas orientam para uma aprendizagem que coloca o estudante como sujeito ativo na construção do seu conhecimento.

Metodologia

Como escopo metodológico, ao longo do desenvolvimento do programa serão aplicadas duas avaliações com a finalidade de medir os avanços obtidos no processo de aprendizado. A primeira tem como objetivo diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos conteúdos a serem trabalhados. A segunda prova procura medir a efetivação e, consequente, os avanços conseguidos no processo de aprimoramento destes conhecimentos.

Após a etapa de cada avaliação, os resultados serão recolhidos por meio de inserção das respostas às questões em sistema informático e, na sequência, os dados serão categorizados e analisados. A análise destes dados nos permitirá desenvolver novas ações pedagógicas a fim de sinalizar ajustes necessários para o percurso.

Resultados esperados

Por um lado, com a implantação do programa PCMat junto dos parceiros educacionais, espera-se aumentar a proficiência de matemática dos estudantes da rede pública, por meio de formações práticas com os docentes, com o uso de materiais, ferramentas e recursos os quais têm como linha norteadora o pensamento computacional (PC).

Por outro lado, espera-se como resultados que o programa educacional oportunize aos estudantes atividades que os auxiliam na resolução de problemas a partir de quatro pilares principais do PC, que são: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos.

Deste modo, os resultados permitirão retomar a questão norteadora, que é: como é que o Pensamento Computacional (PC) pode contribuir para o avanço na proficiência da linguagem matemática? Com isso, desencandear-se-á uma discussão acerca da aplicação do pensamento computacional no âmbito da educação e da sua característica potencializadora na atuação da matemática, tornando a sua aprendizagem mais significativa para o estudante e, consequentemente, mais eficaz.

Considerações finais

A situação evidenciada no contexto educacional do estado de São Paulo mostra-nos índices que deflagram a defasagem na aprendizagem de matemática no ensino fundamental (tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais), fazendo-se necessária a implantação de ações que vislumbram melhorar esses números e, consequentemente, aumentem o nível de proficiência dos estudantes na faixa etária condizente com essa etapa escolar.

É por esse viés que o programa PCMat se estrutura, pois tem como objetivo fomentar ações, tendo como base o pensamento computacional, que auxiliem o aumento da proficiência de matemática de estudantes dos 6 aos 14 anos, por meio de formação contínua de professores e aplicação de atividades práticas junto dos estudantes em sala de aula.

Neste sentido, o programa encontra lugar na construção de um processo de ensino-aprendizagem que leva em consideração o protagonismo do estudante, as necessidades de aprendizagem, o contexto educacional, de maneira que o conjunto de ações propiciem uma aprendizagem significativa e, por conseguinte, favorece o aumento da proficiência de matemática dos estudantes.

Referências bibliográficas

Ausubel, D. P. (1982). *A aprendizagem significativa*. Moraes.

Brackmann, C. P. (2017). *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. (Tese de doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, RS.

Lei n. 9.394/1996. (1996). Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. DF.

Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica. Brasília: MEC. (2013). Ministério da Educação.

Base Nacional Comum Curricular [BNCC]. (2018). Brasília. MEC. Recuperado de: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.

Delors, Jacques. (1998). *Educação: um tesouro a descobrir*. Cortez.

Moran, J. (2018). *Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda*. In: Bacich, L., Moran, J. (Orgs.). (2018). Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Penso.

Todos pela educação. (2021). *Nota técnica: Impactos da pandemia na alfabetização de crianças*. Recuperado de: <https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2022/02/digitalnota-tecnica-alfabetizacao-1.pdf>.

VALENTE, J. A. (2016). *Integração do Pensamento Computacional no Currículo da Educação Básica: Diferentes Estratégias Usadas e Questões de Formação de Professores e Avaliação do Aluno*. Revista e-Curriculum, v. 14, n. 3.

WING, J. M. (2010). *Computational Thinking: What and Why?* Disponível em: <http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf>

A aprendizagem cooperativa no desenvolvimento de competências interpessoais no ensino e aprendizagem da matemática

Cooperative learning in the development of interpersonal skills in teaching and learning mathematics

Maria da Graça Magalhães[1], *Helena Santos Silva*[2], *José Pinto Lopes*[3]

[1]Escola Secundária/3 Henrique Medina, 500gmagalhaes@eshm.edu.pt
[2]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIIE – Centro de Investigação e Intervenção Educativas da Universidade do Porto, helsilva@utad.pt
[3]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIIE – Centro de Investigação e Intervenção Educativas da Universidade do Porto, jlopes@utad.pt

Resumo. *A aprendizagem cooperativa pode ser promotora do processo de ensino e aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática A, no que respeita às competências de relacionamento interpessoal. Neste estudo exploratório, foi adotada uma metodologia qualitativa e descritiva, em três turmas do 10.º ano. Para tal, foram planificados e aplicados dois métodos de aprendizagem cooperativa, Graffiti Cooperativo e Verificação em Pares, na resolução de duas tarefas matemáticas. Os resultados obtidos, ainda que provisórios, permitiram constatar que os métodos cooperativos podem desenvolver, nos alunos competências interpessoais, que estimulam o sucesso e o gosto pela Matemática.*

Abstract. *Cooperative learning can be a promoter of the teaching and learning process of students in the discipline of Mathematics A, with regard to interpersonal relationship skills. In this exploratory study, a qualitative and descriptive methodology was adopted in three classes of the 10th grade. To this end, two methods of cooperative learning, Cooperative Graffiti and Peer Checking, were planned and applied in the resolution of two mathematical tasks. The results obtained, although provisional, allowed us to verify that cooperative methods can develop, in students, interpersonal skills, which stimulate success and liking for mathematics.*

Palavras-Chave: *Aprendizagem Cooperativa; Matemática; Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória; Competências Interpessoais.*

Keywords: *Cooperative Learning; Mathematics; Profile of Students at the End of Compulsory Education; Interpersonal Skills.*

Introdução

A aprendizagem cooperativa é uma abordagem educacional que apresenta um modelo alternativo para a organização da educação, em diferentes níveis, envolvendo o trabalho em pequenos grupos heterogéneos, com diferentes níveis de desempenho (Johnson et al., 1999; Lopes & Silva, 2022). Esta metodologia inclui uma organização da atividade de forma a garantir a participação equitativa de todos os elementos do grupo, fornecendo a cada um deles as mesmas oportunidades de participarem, maximizando as possibilidades de aprenderem e, principalmente de trabalharem em equipa (Pujolás, 2012; Johnson & Johnson, 2009). Os grupos cooperativos têm cinco caraterísticas: a interdependência positiva, a responsabilidade individual e de grupo, a interação estimuladora preferencialmente face a face, as competências interpessoais e de pequeno grupo, e, a avaliação grupal ou reflexão sobre o trabalho realizado pelo grupo (Slavin, 1999; Johnson et al. 1999; Johnson & Johnson, 2009).

São vários os métodos de aprendizagem cooperativa, potenciadores do ensino e da aprendizagem da Matemática, nomeadamente, o *Graffiti Cooperativo e a Verificação em Pares* (Lopes & Silva, 2022). Os métodos cooperativos promovem o desenvolvimento de competências na área da resolução de problemas, revisão de conteúdos e de comunicação, além de incentivarem a consolidação de conhecimentos e a partilha de informações e raciocínios, tornando os alunos participantes mais ativos no processo de ensino e de aprendizagem (Muñiz et al., 2017; Johanning, 2000; Klang et al., 2021).

Atendendo a que em Portugal não há estudos sobre a utilização da Aprendizagem Cooperativa, no ensino da Matemática A, nomeadamente dos métodos *Graffiti Cooperativo* e *Verificação em Pares*, desenvolveu-se um estudo exploratório com o objetivo de averiguar a influência da Aprendizagem Cooperativa no desenvolvimento de competências de relacionamento interpessoal, nos alunos do 10.º ano, na disciplina de Matemática A.

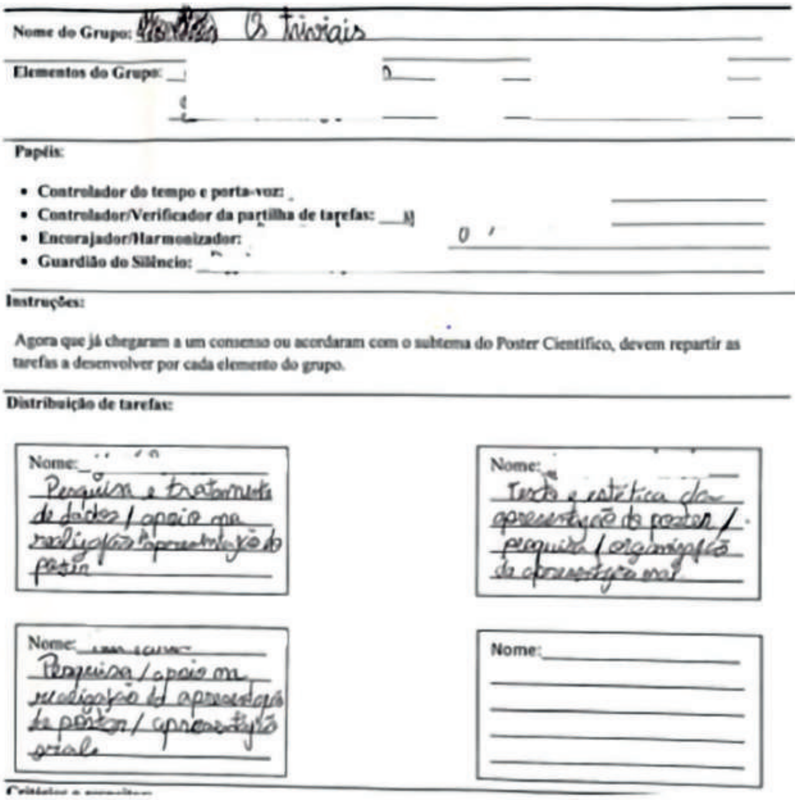
Metodologia

Foi desenvolvido um estudo de caráter qualitativo, essencialmente descritivo e interpretativo, em três turmas de Matemática A, numa escola do norte de Portugal. Participaram 73 alunos, com média de idade de 14,7 (desvio padrão de 0,56), sendo 29 alunos do sexo feminino (39,7%) e 44 do sexo masculino (60,3%). A professora analisou os resultados dos alunos nos questionários sumativos e formou grupos heterogéneos com base nas médias das classificações. As turmas foram divididas em grupos de 3 a 5 alunos, segundo os métodos *Graffiti Cooperativo* e *Verificação em Pares*. Foram planificadas duas tarefas: elaboração de um Póster Científico sobre "O π e o real" e a realização de uma ficha formativa sobre "Divisão inteira de Polinómios". As competências interpessoais dos alunos foram avaliadas através de reflexões individuais e em grupo, usando grelhas adaptadas de Lopes e Silva (2022). No método *Graffiti Cooperativo*, foram atribuídos papéis aos membros das equipas: controlador de tempo, porta-voz, verificador da partilha de tarefas, encorajador/harmonizador e guardião do silêncio.

Apresentação e Discussão de Alguns Resultados

Método Graffiti Cooperativo

Do trabalho cooperativo efetuado pelos grupos é apresentada uma "*Folha de tarefas a desenvolver por cada grupo*" (Figura 1).



Nome do Grupo: Os Triviais

Elementos do Grupo:

Papéis:

- **Controlador do tempo e porta-voz:**
- **Controlador/Verificador da partilha de tarefas:**
- **Encorajador/Harmonizador:**
- **Guardião do Silêncio:**

Instruções:

Agora que já chegaram a um consenso ou acordaram com o subtema do Poster Científico, devem repartir as tarefas a desenvolver por cada elemento do grupo.

Distribuição de tarefas:

Nome: Pesquisa e tratamento de dados / apoio na realização da apresentação do poster

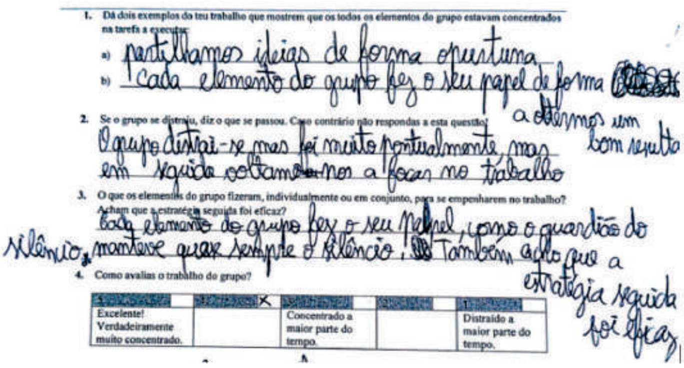
Nome: Texto e estética da apresentação do poster / pesquisa / organização da apresentação oral

Nome: Pesquisa / apoio na realização da apresentação do poster / apresentação oral

Nome:

Figura 1. Exemplo de "*Folha de tarefas a desenvolver por cada grupo*"

No final da tarefa, os alunos efetuaram reflexões, individuais (Figura 2) e em grupo (Figura 3).



1. Dá dois exemplos do teu trabalho que mostrem que os todos os elementos do grupo estavam concentrados na tarefa a executar.
   a) partilhamos ideias de forma oportuna
   b) cada elemento do grupo fez o seu papel de forma a obtermos um bom resultado
2. Se o grupo se distraiu, diz o que se passou. Caso contrário não respondas a esta questão.
   O grupo distrai-se mas foi muito pontualmente, mas em seguida voltamo-nos a focar no trabalho
3. O que os elementos do grupo fizeram, individualmente ou em conjunto, para se empenharem no trabalho? Acham que a estratégia seguida foi eficaz?
   Cada elemento do grupo fez o seu papel, como o guardião do silêncio, manteve quase sempre o silêncio. Também acho que a estratégia seguida foi eficaz.
4. Como avalias o trabalho do grupo?

	X			
Excelente! Verdadeiramente muito concentrado.		Concentrado a maior parte do tempo.		Distraído a maior parte do tempo.

Figura 2. Grelha "*Reflexão individual sobre o trabalho de grupo*"

Hoje, no nosso grupo:		Sempre	Às vezes	Raramente	Nunca
1.	Escutamos as opiniões e as ideias dos outros elementos do grupo	X			
2.	Contribuímos com ideias e opiniões.	X			
3.	Discutimos os nossos pontos de vista e os nossos sentimentos.	X			
4.	Reformulamos os pontos de vista e os sentimentos dos outros elementos do grupo.		X		
5.	Expressámos os nossos desacordos de forma educada.	X			
6.	Conseguimos chegar a um consenso.	X			
7.	Gerimos o nosso tempo com eficácia.		X		

O que é que os elementos do grupo fizeram, em conjunto ou individualmente, para se entenderem bem uns com os outros?

Respeitamo-nos uns aos outros, ouvimos as ideias e as opiniões dos nossos colegas e cada elemento do grupo cumpriu a sua função.

Adaptado de Éducation, Citoyenneté et Jeunesse Manitoba (2005)

Figura 3. Grelha "*Como trabalhamos em grupo*"

Da análise dos documentos verifica-se um envolvimento dos alunos na planificação e na distribuição de tarefas a serem executadas por cada elemento do grupo. Ao serem atribuídos papéis, os alunos sentiram-se mais responsabilizados e envolvidos na execução da tarefa e no sucesso da sua equipa, nomeadamente referiram que: "*tivemos um bom capitão do silêncio e encorajador. Ouvimos as ideias uns dos outros e cooperamos*"; "*respeitámos as opiniões dos elementos do grupo, comparando as nossas pesquisas e aceitando comentários críticos*".

Método Verificação em Pares

Na aplicação do método os alunos realizaram uma tarefa sobre "Divisão inteira de Polinómios". A professora constatou que, apesar de alguns alunos com melhores resultados à disciplina de Matemática A, no início da tarefa terem demonstrado algumas dificuldades em aceitar trabalhar cooperativamente com colegas com mais dificuldades, após algum incentivo por parte da docente e, devido à interdependência positiva que foram criando, os constrangimentos desapareceram e, nas aulas seguintes, os discentes apresentaram melhorias nas competências interpessoais, nomeadamente, maior espírito de interajuda e de equipa, uma preocupação em escutar a opinião do outro e em respeitar as regras. No final da atividade os alunos elaboraram reflexões individuais (Figura 4) e em grupo (Figura 5). Os alunos consideraram que: "*fizemos os exercícios de forma a ajudar os outros*"; "*cooperámos entre todos para manter um bom ambiente de trabalho*"; "*tentamos sempre ajudar e* *não ficou ninguém para trás*"; "*foi eficaz pois podemos trabalhar em grupo e discutir ideias*"; "*participação de todos*"; "*estivemos concentrados*"; "*os elementos do grupo, mostraram-se empenhados, ajudamos uns aos outros, para que cada um esclarecesse as dúvidas e não ficasse com dificuldades*".

1. Dá dois exemplos do teu trabalho que mostrem que os todos os elementos do grupo estavam concentrados na tarefa a executar:

a) Na correta realização do exercício em função das soluções

b) Esclarecimento de dúvidas em grupo e comparação de resultados

2. Se o grupo se distraiu, diz o que se passou. Caso contrário não respondas a esta questão!

O grupo só se distraiu no caso das dúvidas do conjunto serem comuns, procurando a ajuda da ~~professora~~ professora.

3. O que os elementos do grupo fizeram, individualmente ou em conjunto, para se empenharem no trabalho? Acham que a estratégia seguida foi eficaz?

A estratégia seguida foi eficaz, o grupo entreajudou-se, empenhando-se assim no trabalho.

4. Como avalias o trabalho do grupo?

5	4 X	3	2	1
Excelente! Verdadeiramente muito concentrado.		Concentrado a maior parte do tempo.		Distraído a maior parte do tempo.

Figura 4. Grelha "*Reflexão individual sobre o trabalho de grupo*"

Hoje, no nosso grupo:		Sempre	Às vezes	Raramente	Nunca
1.	Escutamos as opiniões e as ideias do par e dos outros elementos do grupo.	X			
2.	Contribuímos com ideias e sugestões de resolução dos problemas.	X			
3.	Expressámos os nossos desacordos de forma educada.	X			
4.	Conseguimos chegar a um consenso.	X			
5.	Incentivamos os colegas com mais dificuldades a resolver os problemas.	X			
6.	Refletimos sobre as estratégias/raciocínios na resolução de cada problema.	X			
7.	Gerimos o nosso tempo com eficácia.	X			

O que é que os elementos do grupo fizeram, em conjunto ou individualmente, para se entenderem bem uns com os outros?

Os elementos do grupo, mostraram-se empenhados, ajudamo-nos uns aos outros para que cada um esclarecesse as dúvidas e não ficasse com dificuldades.

Figura 5. Grelha "*Como trabalhamos em grupo*"

Com a implementação dos dois métodos de aprendizagem cooperativa, quer a docente quer os alunos consideram que foram desenvolvidas competências interpessoais: o espírito de interajuda, o saber escutar os outros, ou respeitar as regras, o souber partilhar ideias e o criar espírito de equipa.

Considerações Finais

Estes resultados, embora provisórios e focados apenas nos resultados relativos às competências de relacionamento interpessoal, parecem indicar, de acordo com Zakaria et al. (2010), que a aprendizagem será mais bem-sucedida quando os alunos têm a oportunidade de explicar ou esclarecer as suas ideias. Para alcançar sucesso no ensino e aprendizagem da Matemática, é crucial que aos alunos seja dada a oportunidade de comunicar e raciocinar matematicamente, desenvolvendo competências interpessoais e autoconfiança para resolver problemas matemáticos. Essas competências podem ser adquiridas através da implementação de métodos de aprendizagem cooperativa, em sala de aula (Johnson & Johnson, 1990; Cohen & Lotan, 2014).

Referências bibliográficas

Cohen, E. G., & Lotan, R. A. (2014). *Designing groupwork: strategies for the heterogeneous classroom third edition*. Teachers College Press.

Johanning, D. (2000). An analysis of writing and postwriting group collaboration in middle school pre-algebra. *School Science and Mathematics*, 100, 151-160.

Johnson, D. W., & Johnson, R.T. (1990). Using Cooperative Learning Math. In N. Davidson (Ed.), *Cooperative Learning in Mathematics* (pp.103-125). Addison-Wesley.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula.* Paidós Educador.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. *Educational researcher*, *38*(5), 365-379.

Klang, N., Karlsson, N., Kilborn, W., Eriksson, P., & Karlberg, M. (2021). Mathematical problem-solving through cooperative learning—The importance of peer acceptance and friendships. In *Frontiers in Education* (p. 324). Frontiers.

Lopes, L., & Silva, H. (2022). *A Aprendizagem Cooperativa na Sala de Aula.* (2.ª ed.). LIDEL, Edições Técnicas, Lda.

Muñiz, J. C. I., García, L. F. G., & Fernández-Río, J. (2017). Marco teórico el qué y el porqué del aprendizaje cooperativo. In J. C. I. Muñiz, L. F. G. García & J. F. Río (Coord.), *Aprendizaje cooperativo: teoría y práctica en las diferentes áreas y materias del curriculum* (pp.17-83). Ediciones Pirámide.

Pujolàs, P. (2012). Aulas inclusivas e aprendizagem cooperativa. In D. Rodrigues (Org.), Educação Inclusiva dos Conceitos às Práticas de Formação (2.ª ed.) (pp.45-88). Instituto PIAGET.

Slavin, R. E. (1999). *Aprendizaje cooperative: Teoria, investigación y práctica.* AIQUE.

Zakaria, E., Chin, L. C, & Daud, M. Y. (2010). The Effects of Cooperative Learning on Students' Mathematics Achievement and Attitude towards Mathematics. *Jornal de ciências sociais,* 6 (2), 272-275. https://thescipub.com/pdf/jssp.2010.272.275.pdf

SIEM XXXIII BARCELOS

5|6 julho 2023

SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APM Associação de Professores de Matemática