SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATAS DO XXXII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Setúbal
8 e 9 de julho 2022

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ATAS DO XXXII
SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROCEEDINGS OF THE XXXII
RESEARCH SEMINAR
IN MATHEMATICS EDUCATION

Painel Editorial

Editors

Ana Isabel Silvestre
Cláudia Torres
Hélia Pinto
Joana Cabral
Margarida Rodrigues

Setúbal 2022
PORTUGAL

Periodicidade Anual URL: https://www.apm.pt/siem_atas

APM
Associação de Professores
de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título:	Atas do XXXII Seminário de Investigação em Educação Matemática
Editor:	APM Associação de Professores de Matemática
ISBN:	978-972-8768-76-8
ISSN:	2795-5192
[Suporte: Eletrónico];	[Formato: PDF / PDF/A]
Coordenação:	Hélia Pinto
Revisão Técnica:	Margarida Rodrigues
Design gráfico e paginação:	Mário Baía
Data de publicação:	2022

Comissão Científica
Scientific Committee

Alessandro Jacques Ribeiro, *Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal*
Alexandra Gomes, *CIEC, IE, Universidade do Minho, Portugal*
Ana Barbosa, *ESE, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal*
Ana Boavida, *ESE, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal*
Ana Caseiro, *ESE, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal*
Ana Isabel Silvestre, *CI&DEI, Politécnico de Leiria, Portugal*
António Guerreiro, *Universidade do Algarve, Portugal*
Cláudia Torres, *Agrupamento de Escolas D. Dinis e #EstudoEmCasa Apoia , Portugal*
Cristina Morais, *Agrupamento de Escolas Monte da Lua, EB da Portela de Sintra, Portugal*
Cristina Martins, *ESE, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal*
Elvira Santos, *ISCE, Instituto Superior de Lisboa e Vale do Tejo, Portugal*
Fátima Mendes, *ESE, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal*
Helena Rocha, *CICS.NOVA, FCT, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal*
Hélia Jacinto, *Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal*
Hélia Pinto, *CI&DEI, Politécnico de Leiria, Portugal*
Joana Brocardo, *ESE, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal*
Joana Cabral, *ESE, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal*
João Pedro da Ponte, *Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal*
Lina Brunheira, *ESE, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal*
Lurdes Serrazina, *ESE, IPL, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal*
Manuel Vara Pires, *ESE, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal*
Margarida Rodrigues, *ESE, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, IE, UL, Portugal*
Maria Nascimento, *Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal*
Nádia Ferreira, *ISPA, Instituto Universitário, Portugal*
Nélia Amado, *FCT, Universidade do Algarve, UIDEF, IE, UL, Portugal*
Neusa Branco, *ESE, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal*
Pietro Di Martino, *Università di Pisa, Italy*
Rosa Ferreira, *CMUP, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal*
Susana Carreira, *FCT, Universidade do Algarve, UIDEF, IE, UL, Portugal*
Susana Colaço, *ESE, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal*

Comissão Organizadora
Organizing Committee

Ana Isabel Silvestre, *CI&DEI, Politécnico de Leiria, Portugal*
Cláudia Torres, *Agrupamento de Escolas D. Dinis e #EstudoEmCasa Apoia*
Hélia Pinto, *CI&DEI, Politécnico de Leiria, Portugal*
Joana Cabral, *ESE, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal*
Margarida Rodrigues, *ESE, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, IE, UL, Portugal*

ÍNDICE

1 Introdução

Conferências Plenárias
Plenary Talks

4 (Minha) Investigação sobre atitudes
Pietro Di Martino

8 Dificuldades ou oportunidades geradoras de aprendizagem dos números racionais? Uma perspetiva integradora do desenvolvimento numérico
Cristina Morais[1]

Simpósios de Comunicações
Communication Symposiums

20 O que valorizam os professores portugueses na aprendizagem da matemática? Um contributo do ***Values Alignment Study***
Ana Isabel Silvestre[1], Hélia Jacinto[2], Susana Carreira[3], Lurdes Serrazina[4], Elvira Santos[5], Manuel Vara Pires[6], Nélia Amado[7], Rosa Tomás Ferreira[8], Cristina Martins[9], Joana Castro[10]

36 Construções dos alunos sobre as operações combinatórias
Mónica Valadão, Nélia Amado, João Pedro da Ponte

51 Exploração de sequências repetitivas na construção do conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico
Vera Cristina de Quadros[1], Susana Carreira[2]

62 Estudo de aula: Uma oportunidade de desenvolvimento profissional em tempos de reforma curricular
Alexandra Souza[1], Margarida Rodrigues[2], João Pedro da Ponte[3]

76 Práticas de um formador de professores e a criação de oportunidades de aprendizagem profissional no ensino de matemática nos anos iniciais
Miriam Criez Nobrega Ferreira [1], João Pedro da Ponte[2], Alessandro Jacques Ribeiro[3]

87 O pensamento relacional de futuras educadoras e professoras: um estudo na formação inicial
Joana Cabral[1], Hélia Oliveira[2], Fátima Mendes[3]

99 A articulação entre avaliação, ensino e aprendizagem na sala de aula de matemática
Elsa Barbosa[1], Joana Latas[2], António Borralho[3], Maria João Carvalho[4]

113 Projeto RAFA - O privilégio da Avaliação Formativa e da sua articulação com a Avaliação Sumativa
Paulo Afonso[1], António Borralho[2], José Filipe[3], Paula Loureiro[4]

131 O questionamento nas práticas de futuros professores de Matemática: os casos Ana e Berta
Nadia Ferreira[1], João Pedro da Ponte[2]

Cartazes
Posters

147 Instructional materials to teach a student with autism to associate number with quantity.
Melody García-Moya[1], Rocío Blanco[2]

150 A promoção do desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora do 2.º ciclo através do estudo de aula
Nicole Duarte[1], Hélia Pinto[2], João Pedro da Ponte[3]

154 Tarefas ricas na formação de professores, em geometria
Alexandra Gomes[1], Catarina Vasconcelos Gonçalves[2], Dores Ferreira[3]

158 O conhecimento profissional do professor de matemática na integração de diferentes tecnologias
Maria do Carmo Botelho[1], Helena Rocha[2]

162 O conhecimento profissional do professor e a interdisciplinaridade em contexto de integração com a tecnologia
Tânia Coelho[1], Helena Rocha[2]

166 O desenvolvimento do pensamento computacional através da resolução colaborativa de problemas de matemática com tecnologias: Uma revisão sistemática de literatura
Ana Cláudia Simões[1], Hélia Jacinto[2], Neuza Pedro[3]

173 A condução de uma discussão coletiva num estudo de aula em Matemática
Filipa Faria[1], João Pedro da Ponte[2], Margarida Rodrigues[3]

Introdução

Ana Silvestre
Cláudia Torres
Hélia Pinto
Joana Cabral
Margarida Rodrigues

O *XXXII Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM)*, promovido pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática (APM), em colaboração com a Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, realizou-se nos dias 8 e 9 de julho de 2022, em Setúbal.

O seminário cumpriu o objetivo de proporcionar a partilha de experiências e conhecimentos entre a comunidade de investigadores em Educação Matemática e a comunidade dos professores que ensinam Matemática. Assim, realizaram-se em conjunto com o ProfMat, uma mesa-redonda plenária: *Desenvolver o Raciocínio Matemático: articulando teoria e prática*, moderada por Susana Carreira da Universidade do Algarve, bem como três conferencias com discussão: *Pensamento computacional e Matemática*, proferida por Carlos Albuquerque da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; *A Resolução de Problemas – com Tecnologia – nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico*, proferida por Hélia Jacinto do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa; e *Pontes na e com a Matemática: o poder das conexões*, por Isabel Vale e Ana Barbosa do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

O programa do SIEM incluiu ainda, o espaço GTI, moderado por Claúdia Torres e duas conferências plenárias, uma da responsabilidade de Pietro Di Martino da University of Pisa, sobre *(my) Research on attitude in mathematicas education* e outra da responsabilidade de Cristina Morais do Externato da Luz, sobre *Dificuldades ou oportunidades geradoras de aprendizagem dos números racionais? Uma perspetiva integradora do desenvolvimento numérico*. Houve ainda lugar à apresentação e discussão de comunicações e cartazes em três simpósios. De salientar que as comunicações e os cartazes apresentados foram selecionados a partir de um processo anónimo e rigoroso de revisão por pares, assegurado pelos elementos da Comissão Científica.

Neste documento, pretende dar-se expressão ao ambiente vivido no encontro, reunindo os textos das diversas contribuições para o respetivo programa científico. Estes textos estão organizados em torno de três secções: Conferências plenárias, Conferências com Discussão e Simpósios de Comunicações e Cartazes.

Esperamos que este livro de atas possa contribuir para divulgar os progressos e as novas temáticas na investigação em Educação Matemática, quer enriquecendo os estudos em curso, quer abrindo novas linhas de atuação. Agradecemos a todos os que de alguma forma contribuíram e contribuem para a realização e sucesso deste seminário e esperamos que a sua participação tenha sido profícua.

Ana Silvestre
Cláudia Torres
Hélia Pinto
Joana Cabral
Margarida Rodrigues

Conferências Plenárias
Plenary Talks

(Minha) Investigação sobre atitudes
(My) Research on attitudes

Pietro Di Martino

Department of Mathematics, Università di Pisa, Italy, pietro.di.martino@unipi.it

Resumo. *As atitudes em relação à matemática têm uma longa história na investigação em educação matemática. Ao longo do tempo, a investigação sobre atitudes desenvolveu uma ampla gama de metodologias e de perspetivas. Nesta palestra, irei refazer parte da história da minha pesquisa sobre as atitudes, partindo das primeiras questões abordadas para chegar ao desenvolvimento do modelo TMA e suas aplicações.*

Palavras-chave*:* Atitudes em relação à matemática.

Abstract. *Attitudes towards mathematics has a long history in mathematics education research. Over the time, research on attitudes developed a wide range of methodologies and perspectives, playing a growing role in the mathematics education research. In this talk, I will retrace part of the history of my research about attitude, starting from the first issues addressed to arrive at the development of the TMA model and its applications.*

Keywords*:* Attitudes towards mathematics.

Prologue

I want to begin this paper telling my research story, trying to share the reasons for my interest on attitude and affective factors.

Around the beginning of this second millennium, I was a graduate in mathematics interested in mathematics education and with a specific interest for the understanding the widespread phenomenon related to the students' difficulties in mathematics. The meeting with a charismatic researcher, Rosetta Zan, was decisive for me.

Rosetta identified three kinds of difficulties:

1. Students with difficulties in mathematics (focus on specific students' weaknesses)
2. The difficulties of mathematics (focus on epistemological issues of the mathematics)
3. The students' difficulties in mathematics (focus on the relation between students and mathematics, mediated by the teacher).

The latter category was particularly interesting for me and Rosetta, because it involved all the actors in the didactical triangle (Brousseau, 1997), stressing the role of the relationship among them and, therefore, overcoming the purely cognitive approach to students' difficulties in mathematics. Already at the end of the Eighties, several scholars in mathematics education underlined the limits of a purely cognitive approach in explaining students' difficulties in mathematical problem solving (Cobb, 1986; Schoenfeld, 1985).

Some years later, McLeod stated (1992, p. 575): "*Affective issues play a central role in mathematics learning and instruction (...) If research on learning and instruction wants to maximize its impact on students and teachers, affective issues need to occupy a more central position in the minds of researchers*"

Amongst the affective constructs, attitude was, at the end of the past millennium, the most controversial. In particular, the issue of definition began to be discussed: *what is the attitude towards mathematics* and *what are a positive and a negative attitude towards mathematics?* were two questions with no clear answers, even though several studies discussed the relationship between performances and positive/negative attitudes.

Rosetta and I began to work for solving this issue within the two following and related assumptions:

1. Attitude is a model of the observer, not a quality of the person: "*We now see attitude as at best a complex notion, and we conjecture that perhaps it is not a quality of an individual but rather a construct of an observer's desire to formulate a story to account for observations*" Ruffel, Mason & Allen, 1998, p. 1).
2. The definition of attitude should be a working definition: "*It is probably not possible to offer a definition of attitude toward mathematics that would be suitable for all situations, and even if one were agreed on, it would be probably too general to be useful*" (Kulm, 1980, p.358).

We decided to approach this issue collecting students' narratives about their school story with mathematics: we proposed the autobiographical essay: *Me and mathematics: my relationship with maths up to now*. Based on the collected data, we proposed the following characterization of attitude towards mathematics grounded in students' experiences (Di Martino & Zan, 2010):

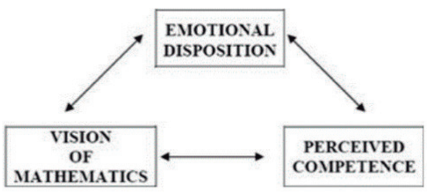


Figura 1. The TMA model (Di Martino & Zan, 2010)

The Three- dimensional Model for Attitude towards mathematics (TMA) is characterized by three dimensions (emotional disposition towards mathematics, vision of mathematics and perceived competence in mathematics) and by their mutual relationship.

The TMA model for attitude represented an answer to the question: *what is the attitude towards mathematics*?, but we also needed to characterize a positive and a negative attitude towards mathematics. This aspect was particularly significant because previous studies (Polo & Zan,) showed that the diagnosis "*this student has a negative attitude toward mathematics*" was frequently used by teachers of the different school levels, but it appeared as a sort of black box, the teachers' capitulation in front of the students' difficulties in mathematics. Therefore, the characterization of *negative* attitude could represent a turning point: the shift from a claim of surrender of the teacher to an useful construct for steering didactical actions.

We decided to reduce the complexity of the model, recognizing three dichotomies / polarities, one for each dimension of the TMA model:

1. Emotional disposition towards mathematics: positive vs negative emotional disposition.
2. Perceived competence in mathematics: high vs low perception.
3. Vision of mathematics, following Skemp's schema (Skemp, 1976): relational vs instrumental vision of mathematics.

In this way and despite the clear simplification, we recognized eight different profiles of attitude towards mathematics (see Fig. 2).

VISION OF MATHEMATICS	EMOTIONAL DISPOSITION	PERCEIVED COMPETENCE
RELATIONAL	POSITIVE	HIGH
RELATIONAL	POSITIVE	LOW
RELATIONAL	NEGATIVE	HIGH
RELATIONAL	NEGATIVE	LOW
INSTRUMENTAL	POSITIVE	HIGH
INSTRUMENTAL	POSITIVE	LOW
INSTRUMENTAL	NEGATIVE	HIGH
INSTRUMENTAL	NEGATIVE	LOW

Figura 2. The 8 different profiles of attitude

A negative attitude in our model is a profile with at least one negative component, i.e., we have a unique characterization of positive attitude towards mathematics (the first profile in Fig. 2), and seven different profiles of negative attitude towards mathematics. The didactical actions developed to overcome a negative attitude towards mathematics should be coherent with the specific profile of negative attitude we want to overcome.

A final significant observation: the third profile in Fig. 2 – the one corresponding to a student with a relational view of mathematics, a high perceived competence and a negative emotional disposition towards mathematics – represents, in a certain sense, a genuine negative attitude towards mathematics, because the student hold an epistemological correct view of mathematics, has a good perception of himself in mathematics, but, however, he does not like mathematics.

Well, we did not found any essays (amongst the more of two thousand collected) describing this profile.

Referências bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P. (1985). Two children's anticipations, beliefs, and motivations, *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 111–126. https://doi.org/10.1007/PL00020735

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). "Me and Maths": Toward a Definition of Attitude Ground on Students' Narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 27-48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Kulm, G. (1980). Research on mathematics attitude. In R. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 356-387). NCTM.

McLeod, D. (1992) Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575–596). Macmillan Publishing Company.

Polo, M., & Zan, R. (2006). Teachers' use of the construct 'attitude'. Preliminary research findings. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th CERME*. Barcelona: FundEmi.

Ruffell, M., Mason, J., & Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 1–18. https://doi.org/10.1023/A:1003019020131

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Press.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Dificuldades ou oportunidades geradoras de aprendizagem dos números racionais? Uma perspetiva integradora do desenvolvimento numérico

Rational numbers' difficulties or learning opportunities? An integrated perspective of numerical development

Cristina Morais[1]

[1]Agrupamento de Escolas Monte da Lua, EB da Portela de Sintra,

cristina.morais@agml.pt

Resumo. *Neste texto são apresentados e discutidos resultados de um estudo centrado no ensino e aprendizagem dos números racionais, nomeadamente na representação em numeral decimal. É dada particular atenção a um enquadramento suportado por (i) um entendimento da aprendizagem do conceito de número enquanto algo que é continuamente transformado e que evolui com a necessidade de dar sentido ao que é experienciado; e (ii) uma perspetiva de desenvolvimento numérico, em que o conceito de número é ampliado à medida que diferentes conjuntos numéricos são abordados. Não só é natural que os alunos recorram aos conhecimentos que possuem sobre os números inteiros e os estendam ao conjunto dos números racionais, como tal pode ser revelador de aprendizagem. São apresentadas evidências de que situações que provoquem o recurso a estes conhecimentos podem assumir-se como oportunidades para promover a construção da compreensão de números racionais.*

Palavras-chave: *números racionais; numeral decimal; desenvolvimento numérico.*

Abstract. *In this paper I present and discuss the results of a study centered on the teaching and learning of rational numbers, focusing their decimal representation. Particular attention is given to a framework supported by (i) an understanding of number concept learning as something that is continuously transformed and evolves along with the need to give meaning to what is experienced; and (ii) a numerical development perspective, in which the concept of number is expanded as different numerical sets are addressed. It's not only natural that students mobilize their knowledge about whole numbers and extend it to the set of rational numbers, but by doing so it can be perceived as evidence of their knowledge. In this paper, evidences are presented that situations that prompt the use of this knowledge can be assumed as opportunities to promote the construction of rational numbers' understanding.*

Keywords: *rational numbers; decimal numbers; numerical development.*

A aprendizagem dos números racionais

O ensino e aprendizagem dos números racionais tem sido amplamente investigado em educação matemática. Entre várias ideias consideradas basilares, destaca-se aqui que a compreensão dos números racionais implica um movimento flexível entre diferentes contextos, significados ou sentidos, e representações que estes números podem assumir (e.g., Lamon, 2001), sendo essencial uma integração e mobilização de diferentes representações de forma flexível (e.g., Ponte & Quaresma, 2011; Tian & Siegler, 2018), uma vez que diferentes representações dos números racionais explicitam diferentes relações subjacentes ao número representado (Tripathi, 2008). Esta compreensão é complexa e podemos encontrar na literatura várias evidências das dificuldades dos alunos no reconhecimento do mesmo número racional expresso em representações diferentes (e.g., Wang & Siegler, 2013), assim como uma percepção de que, por exemplo, entre números escritos na forma de fração só existem frações, ou que entre números na representação decimal, só existem números na representação decimal (e.g., Vamvakoussi et al., 2011).

É ainda bastante evidente na literatura a influência dos conhecimentos prévios dos alunos aquando da abordagem aos números racionais, associada à mobilização de conhecimentos de números inteiros. É particularmente notória esta mobilização no trabalho com a representação decimal de números racionais, por fazer uso do sistema de numeração decimal, tal como uma representação simbólica de números inteiros. Esta influência, que muitas vezes conduz a conclusões incorretas, não é apenas revelada por alunos numa fase inicial da aprendizagem dos números racionais, mas em diferentes faixas etárias (e.g., Baturo & Cooper, 1995; Durkin & Rittle-Jonhson, 2015), como em estudantes universitários (e.g., Vamvakoussi et al., 2012), futuros professores (e.g., Stacey et al., 2001) e até entre profissionais de diversas áreas (e.g., Pierce et al., 2008).

Contudo, entre todas as evidências de dificuldades associadas à compreensão dos números racionais, encontramos também estudos que defendem que o conhecimento dos números inteiros pode ser facilitador numa abordagem inicial aos números racionais (Guerreiro et al., 2018; Moss & Case, 1999). É inegável que a aprendizagem dos números racionais confere uma mudança significativa no modo como o número é conceptualizado, mas será esta uma mudança que interfere ou que amplia o que até então foi construído pelos alunos?

O estudo

As ideias em discussão neste texto emanam de um estudo realizado numa perspetiva de que os conhecimentos relativos aos números inteiros se constituem como uma influência natural à aprendizagem dos números racionais, ao invés de serem encarados como uma interferência à aprendizagem. Apresento aqui, de forma breve, o estudo realizado para melhor enquadrar as evidências discutidas neste texto. O estudo teve como objetivo compreender como alunos do 1.º ciclo constroem a compreensão dos números racionais, numa perspetiva de continuidade partindo da compreensão dos números inteiros, e focando a representação em numeral decimal. Seguiu a modalidade de Investigação Baseada em Design, na variante de um estudo de design na sala de aula (e.g.,Cobb et al., 2016; Ponte et al., 2016). Participaram 25 alunos de uma turma, entre os quais foquei um grupo de 4 alunos. Participaram também a professora titular e eu própria. A intervenção foi realizada nos 3.º e 4.º anos. Para a recolha de dados, foram usadas gravações vídeo e áudio das aulas e das reuniões com a professora, os registos realizados pelos alunos e professora, observação participante e notas de campo.

Foi realizado um estudo diagnóstico quando os alunos frequentavam o 2.º ano, cujos resultados, e em conjunto com a professora, informaram a seleção dos quatro alunos, e informaram também a intervenção. A intervenção decorreu ao longo de um ciclo de design constituído por três microciclos, cada um diretamente relacionado com uma das grandes etapas do percurso de ensino e aprendizagem delineado. O primeiro microciclo, realizado no 3.º ano, relacionou-se com a primeira etapa do percurso que envolveu o recurso a diferentes representações para interpretar números racionais em numeral decimal. O segundo microciclo, também realizado no 3.º ano, relacionou-se com a segunda etapa onde se promovia a emergência da estrutura decimal. O último microciclo ocorreu no 4.º ano, e teve como objetivo promover um movimento flexível entre representações de um mesmo número. Por fim, no final do 4.º ano foi realizada uma entrevista individual aos quatro alunos, que contemplou tarefas de representação, comparação e ordenação de números racionais, focando principalmente a representação em numeral decimal.

Na sala de aula

Começo por apresentar um episódio ocorrido numa fase inicial da intervenção, no primeiro microciclo. Trata-se de uma tarefa em que foram dadas três garrafas a cada grupo de alunos (figura 1). As garrafas tinham os rótulos tapados e foi pedido que, inicialmente, os alunos estabelecessem relações entre a capacidade de cada garrafa, podendo para isso encher as garrafas, fazer marcações ou outras ações que considerassem necessárias.

Figura 1. Garrafas de água usadas na tarefa.

De seguida, foram dadas três etiquetas,"1 L", "0,5 L" e "0,25 L", para que os alunos as associassem às respetivas garrafas, tendo em conta as relações previamente estabelecidas.

No grupo dos quatro alunos em foco, surge a discussão:

> Dinis: Vermelha [referindo-se à garrafa com rótulo vermelho, de 0,25L] igual a cinco litros...
>
> . . .
>
> Rute: Litros... Cinco litros??
>
> Dinis: Não, não...
>
> Bárbara: Um quarto de litro.
>
> Rute: Não, isto nem um litro é! . . . Não sei como é que se diz, mas não é um litro . . .
>
> André: Pois não!

Bárbara procura corrigir Dinis referindo que a garrafa de rótulo vermelho era "um quarto de litro", uma vez que, anteriormente, estabeleceram que a garrafa mais pequena continha um quarto da quantidade de água da garrafa maior que identificaram de imediato como sendo uma garrafa de 1 L. No entanto, nenhum dos alunos fez a conexão entre as representações "0,25 L" e "um quarto de litro", recorrendo ao conhecimento dos números inteiros para dar sentido à representação em numeral decimal dos números apresentados. Assim, associaram a etiqueta de "1 L" à garrafa de maior capacidade, "0,25 L" à garrafa de meio litro e "0,5 L" à garrafa menor e explicaram por que o fizeram:

> Investigadora (I): Porque é que acham que aquela [etiqueta 0,5 L] é dali [garrafa com rótulo vermelho]?
>
> Rute: É porque esta [garrafa] é a mais pequenina e isso é o número mais pequeno [0,5 L]
>
> . . .
>
> Dinis: [Tanto] A garrafa rosa como a etiqueta são as duas do meio.

Identifica-se aqui a generalização de que 0,25 é maior que 0,5 porque 25 é maior que 5. Como poderá tal generalização ser interpretada?

0,25 é maior que 0,5 porque 25 é maior que 5: Que interpretação?

Na literatura, podemos encontrar este tipo de generalizações associadas ao que é designado por *misconception* ou, em português, conceção errónea. Contudo, esta designação parece desconsiderar o que é a perspetiva do aluno, cuja ideia é efetivamente válida no contexto que lhe é familiar (25 > 5). Parece ter subjacente uma barreira entre o que é "certo" e "errado", tratando-se de uma conceção a evitar (Confrey, 1991; Swan, 2001). Encontramos também a expressão "conceção alternativa", cuja designação parece colocá-la em oposição a expressões como "conceções normais" ou "conceções culturalmente aceites", parecendo estar também a desvalorizar o desenvolvimento do conceito em questão pelo aluno, que não deixa de estar sustentado e relacionado com diferentes ideias (Confrey, 1991; Swan, 2001). Encontramos ainda outros termos, especificamente relacionados com o uso, incorreto, de conhecimentos dos números inteiros no trabalho com números racionais, como enviesamento provocado por estes conhecimentos ou distratores (e.g., Ni & Zhou, 2005;

Streefland, 1991). Estas expressões refletem um entendimento de que o conhecimento relativo aos números inteiros se constitui como barreira à aprendizagem dos números racionais, ou mesmo, que é necessária uma reorganização radical do conhecimento de modo a ser possível uma compreensão dos números racionais (e.g., Stafylidou & Vosniadou, 2004).

O posicionamento adotado perante estes termos é dependente da perspetiva tida perante o próprio conceito de aprendizagem. O que significa aprender?

Podemos, de forma simples, afirmar que aprendemos algo quando nos faz sentido, quando captamos a sua essência e, por isso, nos parece ficar harmonioso (Swan, 2001) ou, dito de outra forma, quando compreendemos verdadeiramente algo. No entanto, não é algo finalizado, uma vez que o conceito está, para quem o procura aprender, em constante mudança e evolução, sendo permeável às experiências tidas. Neste caso, é permeável às experiências que os alunos vão tendo com números pertencentes a diferentes conjuntos numéricos (Swan, 2001). Desta forma, a aprendizagem é aqui entendida enquanto transformação de conhecimento, pelo que, o que foi acima identificado amplamente como "conceções erróneas", não tem lugar nesta perspetiva, tratando-se antes de evidências de transformação de conhecimento realizada pelos alunos.

De regresso à sala de aula

Retomo a tarefa das garrafas de água. A alguns grupos de alunos da turma, foram dadas as mesmas etiquetas de "1 L" e "0,25 L" mas foi dada uma etiqueta com a representação "0,50 L" em vez de "0,5 L". António, um elemento de um grupo que tinha estas etiquetas, explica em grande grupo como associaram as etiquetas às garrafas:

> António: Porque um litro é cem… é cem por cento. (etiqueta de "1 L" associada à garrafa de maior capacidade)
>
> I: Ok, boa. Então metade…
>
> António: É cinquenta por cento. (etiqueta de "0,50 L" associada à garrafa de meio litro)
>
> Fábio: Depois metade dos cinquenta por cento será vinte e cinco por cento. (etiqueta de "0,25 L" associada à garrafa de menor capacidade)

Foi esta partilha que provocou no grupo de quatro alunos a seguinte reação:

> Rute: É que depois do que daquele grupo disse, pensei que zero vírgula cinco era metade e no outro trabalho... nós pensámos que esta [garrafa de 0,5L] era a metade desta [garrafa de 1L] e então percebi que esta é que era zero vírgula cinco . . . A vermelha nós pusemos um quarto no outro, então vinte e cinco, mais vinte e cinco, mais vinte e cinco, mais vinte e cinco é igual a cem.

Destaca-se a forma como os alunos mobilizaram conhecimento relativo aos números inteiros, associado a um conhecimento intuitivo de percentagem, para interpretar os números racionais representados.

Noutra tarefa, também resolvida no 3.º ano, no primeiro microciclo da investigação, era apresentada uma reta numérica e a localização de um número com uma seta (figura 2). Os alunos deviam indicar, justificando, se a seta apontava 12,5 ou 12,05.

Figura 2. Enunciado de uma tarefa (adaptada de Brocardo, Delgado, & Mendes, 2010).

Esta tarefa implicava o reconhecimento do valor posicional de zero associado à noção de densidade, propriedade do conjunto dos números racionais. Naturalmente, a sua resolução foi bastante desafiante:

> André: Não, mas os dois são iguais! Porque nenhum deles... Mas está ali dentro...
> Dinis: Pois...
> André: Se calhar os dois, são os dois aqui, se calhar nenhum tem razão!
> . . .
> Rute: Zero vírgula cinco e zero vírgula cinco de um quadradinho...
> Bárbara: Porque zero vírgula cinco é metade e isto está entre este [12] e este [12,1]...

Bárbara e Rute focam a sua atenção para o significado de 0,5 como metade, e procuram identificar que significado poderá ter a parte não inteira do número relacionando-a com a representação da reta numérica:

> Rute: Zero vírgula cinco e zero vírgula cinco de um quadradinho...
> Bárbara: Porque zero vírgula cinco é metade e isto está entre este e este...
> Rute: É como se isto fosse dez! O quadradinho é como se fosse dez.

Apesar da seta apontar para um espaço onde não é representada qualquer marca ou traço, alguns alunos reconheceram a possibilidade de existirem números posicionados nesse espaço, tentando identificar a grandeza do número. Por outro lado, outros alunos reconhecem 12,5 e 12,05 como iguais pelo facto de a parte não inteira do numeral conter um zero, provavelmente devido ao conhecimento relativo aos números inteiros de que 05 é igual a 5.

Aquando da discussão coletiva, foi traçada no quadro uma reta numérica (figura 3) e usada a comparação a uma lupa que pode ser colocada em qualquer espaço da reta para dar visibilidade à possibilidade de divisão de uma unidade em 10 partes iguais, da divisão de cada uma dessas partes novamente em 10 partes iguais, ficando a unidade inicial dividida em 100 partes iguais, podendo continuar-se esta divisão infinitamente.

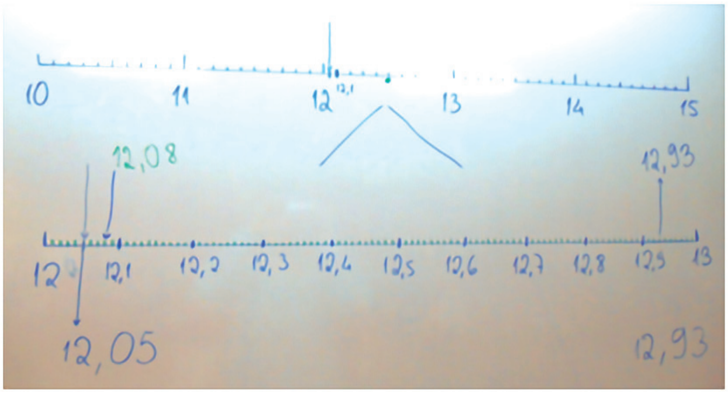


Figura 3. Registo realizado no quadro.

Noutra tarefa, também realizada no 3.º ano, no segundo microciclo, era pedido que os alunos discutissem se 0,67 seria maior que 0,9. Um aluno verbaliza com grande clareza por que considerou 0,9 maior que 0,67, recorrendo à grelha 10×10 (figura 4) para o justificar:

> Jorge: Primeiro pensei que zero vírgula sessenta e sete fosse maior que zero vírgula nove porque à primeira vista o sessenta e sete parece maior que o nove. . . Mas depois vi que podia pensar de outra maneira. Então, se nós pensarmos que cada coluna tem dez centésimas nós pintávamos seis colunas destas, sem o sete [em 0,67] ficava só sessenta. E o outro [0,9] ficava noventa centésimas, era maior que pintar sessenta e sete centésimas.

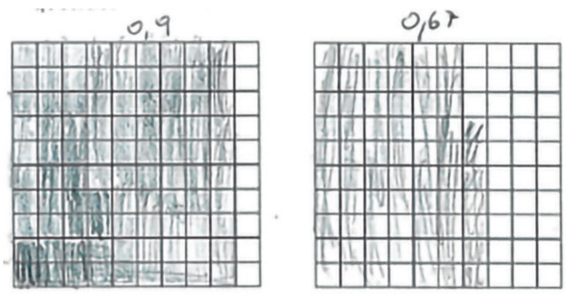


Figura 4. Registo realizado por Jorge

A representação dos números na grelha permitiu dar visibilidade à grandeza de cada número, possibilitando um olhar diferente da tentativa inicial, em que foram mobilizados conhecimentos relativos aos números inteiros que levariam a uma conclusão incorreta. Na discussão da tarefa, surge uma nova evidência na transformação do conhecimento relativamente aos números racionais:

> Rute: Eu acho que zero vírgula nove é maior do que zero vírgula sessenta e sete porque zero vírgula sessenta e sete ou sessenta e sete centésimas, só tem centésimas. Nove décimas tem nove déci... tem nove décimas.
>
> Bárbara: . . . E nove décimas é maior do que centésimas, pois se está a dividir em partes maiores.

As alunas revelam a noção de que um número racional na representação decimal que tenha algarismos na ordem das centésimas será certamente de menor grandeza do que um que tenha algarismos até à ordem das décimas. Esta generalização "mais algarismos, menor grandeza" evidencia uma clara transformação do conceito de número racional: uma conceptualização da unidade, envolvendo uma coordenação, ainda frágil, entre unidade, número de partes em que esta é dividida e o tamanho de cada uma das partes relativamente à unidade. Importa salientar que, nesta situação específica, esta generalização conduzia a uma resposta correta, contudo, tal não se verifica em todas as situações pelo que foi importante discutir a sua validade. Assim, foram apresentados os números 0,581 e 0,45 para que os alunos indicassem, justificando, qual o maior número. Bárbara retomou a sua ideia inicial:

> Bárbara: Porque quarenta e cinco centésimas está dividido em... menos partes e essas partes são maiores do que... as outras.

Os alunos foram incentivados a representar ambos os números, de forma a terem uma perceção da sua grandeza, o que se tornou essencial para que conseguissem refutar a generalização em causa, tal como Jorge partilhou:

> Jorge: Eu já percebi o meu erro é porque é o quinhentos e oitenta e um que é maior, são menos... as partes valem menos, mas são mais!

Reforça-se assim a importância de modelos como a grelha 10×10 ou a reta numérica para promover a validação ou refutação deste tipo de generalizações, mobilizando contraexemplos.

O último episódio refere-se a uma tarefa resolvida a pares no 4.º ano, no terceiro microciclo, de posicionamento de números numa reta numérica (i) fazendo variar a sua representação entre numeral decimal, fração e percentagem; e (ii) posicionando um número entre o último dito pelo colega e o número 1 (figura 5), até se esgotarem o número de jogadas.

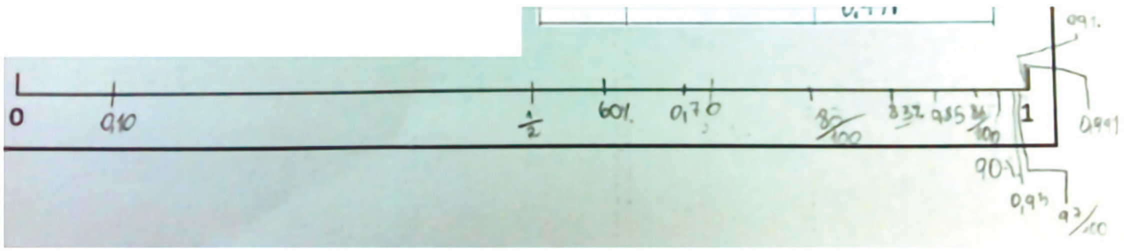


Figura 5. Registo realizado por Jorge.

Fisicamente, as possibilidades esgotam-se devido à falta de espaço para marcar números, mas o momento de discussão coletiva permitiu levar a discussão além dos registos realizados. Após Jorge partilhar que depois do último número por si assinalado poderia traçar

992/1000, Rute referiu que não haveria um número maior que pudesse ser representado na forma de percentagem, ao que um colega reagiu:

> Tomás: Eu acho que isso pode ser noventa e nove por cento vírgula três.

Vários colegas reagiram com surpresa, pois foi a primeira vez em que a componente numérica da representação em percentagem assumia uma representação em numeral decimal.

A discussão continuou com a questão "Que número pode ser situado entre 99,9% e 1?":

> Jorge: Acho que pode ser este: zero vírgula nove nove nove um.
>
> Guilherme: Existem formas infinitas.
>
> Catarina: Como é que nós fazíamos a seguir a esse número (0,9991), em fração?
>
> I: Não é a seguir. [Há] um possível [número] maior?
>
> Rute: Nove mil novecentos e noventa e nove sobre dez mil. Podemos escrever infinito em baixo!

A noção de infinito, inicialmente ligada à infinidade de elementos do conjunto dos números inteiros, é agora expandida a infinitos elementos existentes entre quaisquer dois números, ou seja, à densidade do conjunto dos números racionais. Esta tarefa promoveu não só um movimento entre diferentes representações de números racionais, mas também a construção da noção de grandeza, de que depende o posicionamento dos números na reta, bem como de densidade.

Dificuldades ou oportunidades geradoras de aprendizagem?

Os episódios apresentados referem-se a um percurso que teve como preocupação o desenvolvimento do sentido de número, entendido como um conhecimento global dos números e operações, associado à capacidade e intuição de o usar de modo crítico e flexível em diferentes situações (McIntosh et al., 1992). De forma gradual e evolutiva, é inicialmente desenvolvido no trabalho com os números inteiros cujo conhecimento irá suportar o entendimento dos números racionais.

De destacar o importante papel de tarefas que desafiaram os alunos a reconhecer que a grandeza de um número, convocada na comparação e ordenação de números, é característica comum ao conjunto dos números inteiros e dos números racionais. A noção de grandeza, entendida como o tamanho ou valor de um número, é apontada por vários autores como essencial para a compreensão dos números racionais (e.g., Lamon, 2007). Foram também propostas tarefas que promoviam o reconhecimento da densidade, enquanto propriedade do conjunto dos números racionais e que o distingue do conjunto dos números inteiros.

Retomo assim o título deste texto. Afirmações dos alunos como "0,25 é maior que 0,5 porque 25 é maior que 5" refletem as suas dificuldades na aprendizagem dos números racionais ou poderão constituir-se como oportunidades geradoras de aprendizagem? Como se procurou destacar neste texto, as evidências mostram que são oportunidades geradoras de aprendizagem e que não podem ser desconsideradas ou, até, evitadas no ensino e aprendizagem dos números racionais. Tratam-se sim de afirmações, naturais, que surgem à medida que o conceito de número é ampliado e reinterpretado a novos domínios (Swan, 2001), que surgem por existirem diferenças entre o conhecimento que os alunos têm e o conhecimento que se espera desenvolver (Prediger, 2006), sendo evidência de transformação de conhecimento, ou seja, de aprendizagem.

A aprendizagem dos números racionais constitui-se como a primeira oportunidade para os alunos compreenderem que as características que associam aos números inteiros não definem os números de um modo geral (e.g., Prediger, 2006; Siegler et al., 2011). Assim, é essencial considerar não só o que é diferente no trabalho com os números racionais, mas também o que é comum ao trabalho com os números inteiros, considerando assim uma perspetiva de que esta aprendizagem implica que alguns conceitos, até então abordados no conjunto dos números inteiros, são ampliados e enriquecidos, sendo estas noções basilares que sustentam a teoria integrada de desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011).

A mobilização de conhecimentos prévios para dar sentido aos números pertencentes a um novo conjunto numérico não só é evidência de uma etapa natural de construção de conhecimento como, quando intencionalmente discutidos, podem ser facilitadores de uma reinterpretação dos conceitos até então construídos, assumindo assim um papel essencial na aprendizagem dos números racionais.

Referências bibliográficas

Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1995). Strategies for comparing decimal numbers with the same whole-number part. In B. Atwed & S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the 18th annual conference of the mathematics education research group of Australia* (pp. 73–79). Darwin: MERGA.

Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2010). *Números e operações: 1.º Ano*. Lisboa: DGIDC. Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.26/5144.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (3rd Edition) (pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Confrey, J. (1991). Learning to listen: a student's understanding of powers of ten. In. E. Von Glasersfeld (Ed.). *Radical constructivism in mathematics education.* (pp. 111–138). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Durkin, K., & Rittle-Jonhson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21–29.

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa, 20*(1), 359–384.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 146–165). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias, *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Pierce, R., U., Steinle, V., A., Stacey, K., C., & Widjaja, W. (2008). Understanding decimal numbers: A foundation for correct calculations. *International Journal of Nursing Education Scholarship*, *5*(1), 1–15.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, XX*(1), 55–81.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *XXV*(2), 77–98.

Prediger, S. (2006). Continuities and discontinuities for fractions: A proposal for analyzing in different levels. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377–384). Prague: PME.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273–296.

Stacey, K. Helme, S., Steinle, V., Baturo, A.,Irwin, K. & Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(3), 205–225.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503–518.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in Mathematics Teaching* (pp. 147–165). London: Routledge/Falmer.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first?. *Educational Psychology Review, 30*(2), 351–372.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21*(5), 676–685.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344–355.

Wang, Y. Q., & Siegler, R. S. (2013). Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin, 58*(36), 4630–4640.

Simpósios de Comunicações
Communication Symposiums

O que valorizam os professores portugueses na aprendizagem da matemática? Um contributo do *Values Alignment Study*

What do Portuguese teachers value in mathematics learning? A contribution from the *Values Alignment Study*

Ana Isabel Silvestre[1], *Hélia Jacinto*[2], *Susana Carreira*[3], *Lurdes Serrazina*[4], *Elvira Santos*[5], *Manuel Vara Pires*[6], *Nélia Amado*[7], *Rosa Tomás Ferreira*[8], *Cristina Martins*[9], *Joana Castro*[10]

[1] Centro de Estudos em Educação e Inovação (CI&DEI), Portugal, anaisabelsilvestre@gmail.com

[2] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, hjacinto@ie.ulisboa.pt

[3] FCT, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, scarrei@ualg.pt

[4] Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, lurdess@eselx.ipl.pt

[5] ISCE - Instituto Superior de Lisboa e Vale do Tejo, Portugal, elviralazarosantos@gmail.com

[6] Centro de Investigação em Educação Básica, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal, mvp@ipb.pt

[7] FCT, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, namado@ualg.pt

[8] Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, Portugal, rferreir@fc.up.pt

[9] Centro de Investigação em Educação Básica, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal, mcesm@ipb.pt

[10] Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa & CICS-Nova, Portugal, joanac@eselx.ipl.pt

Resumo. *Este artigo reporta um estudo em que se pretendeu identificar e discutir os aspetos que os professores de matemática valorizam na aprendizagem desta disciplina. Foram inquiridos, por meio de um questionário eletrónico, 113 professores a lecionar no 7.º e/ou no 10.º ano de escolaridade em escolas públicas de todo o país. O estudo seguiu uma metodologia qualitativa e recorreu a uma análise de conteúdo para categorizar as respostas dos participantes. Num único item de resposta aberta solicitou-se a indicação de três aspetos que, na perspetiva do inquirido, são os mais importantes na aprendizagem da matemática. Os autores desenvolveram e operacionalizaram um protocolo de codificação baseado num quadro de análise pré-existente. Os resultados evidenciam que os dois valores mais frequentes são o Empenho e Motivação e o Bem-estar. Observou-se, assim, uma tendência para a valorização de aspetos que remetem para um forte* *investimento do próprio aluno na sua aprendizagem. Ficou evidente a relevância atribuída pelos professores ao Bem-Estar dos alunos, caraterizando-se pela valorização das relações entre o aluno e o professor e entre o aluno e a família. Discutem-se implicações destes resultados para a formação de professores e o desenvolvimento curricular, considerando o momento atual de alteração curricular.*

Palavras-chave: *Valores em Educação Matemática; Aprendizagem; Empenho e Motivação; Bem-estar.*

Abstract. *This article reports a study aimed at identifying and discussing the attributes that mathematics teachers value in the learning of mathematics. 113 teachers working with 7th and/or 10th grade students in public schools across the country were surveyed through an electronic questionnaire. The study followed a qualitative methodology and used content analysis to categorize the participants' responses. In a single open-response item, the participants were requested to identify the three most important aspects of mathematics learning. The authors developed and implemented a coding protocol based on a pre-existing analysis framework. The results show that the two most frequent values are Engagement and Motivation and Well-being. Thus, there was a clear trend to value aspects that refer to the students' own commitment in their learning. The importance attributed by the teachers to the students' Well-being was evident, and it can be characterized by their valuing of the relationships between the students and the teacher, and between the students and their family. Considering the ongoing curriculum changes, the implications of these results for teacher education and curriculum development are further discussed.*

Keywords: *Values in Mathematics Education; Learning; Engagement and Motivation; Well-being.*

Introdução

A investigação revela que o professor tem um papel determinante nos resultados de aprendizagem dos seus alunos (Hattie, 2003; Kyriakides et al., 2013), não só pela influência que pode exercer ao nível da qualidade da aprendizagem (Blazar & Kraft, 2017; Kieran et al., 2012), como também no âmbito do comportamento dos alunos e ainda da sua atitude perante a área disciplinar (Mullis et al., 2017). Vários estudos disponíveis evidenciam igualmente que as práticas pedagógicas dos professores são moldadas por fatores cognitivos, afetivos e também de natureza cultural (Presmeg, 2007; Seah & Wong, 2012). Investigações recentes mostram ainda que o professor e, em particular, as suas ações na sala de aula têm um impacto significativo na atmosfera emocional da aula de matemática (Laine et al., 2020). Desta forma, torna-se pertinente conhecer os aspetos que os professores valorizam no ensino e na aprendizagem da matemática, na medida em que isso permitirá uma compreensão mais profunda das suas decisões e ações em sala de aula (Aktaş et al., 2019).

Atualmente está em curso um estudo internacional - *Values Alignment Study* - que procura caracterizar o alinhamento entre os valores dos professores de matemática e os dos seus alunos com o intuito de melhorar a aprendizagem da matemática. Este estudo é desenvolvido por um consórcio de investigadores oriundos de 28 países, incluindo Portugal. É designado por *The Third Wave Project* e é liderado por Wee Tiong Seah, da Universidade de Melbourne. Uma das vertentes deste estudo internacional tem por base o questionário *WIFItoo - What I find important too,* dirigido a professores de matemática e seus alunos. Em Portugal, o estudo tem vindo a ser conduzido por uma equipa criada pelo Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática (APM). Neste âmbito, foram realizados dois estudos exploratórios que incidiram sobre os valores dos professores relativos ao uso de tecnologias (Silvestre & Jacinto, 2021) e relativos aos instrumentos de avaliação na aprendizagem da matemática (Jacinto et al., 2020). O presente artigo centra-se numa parte do estudo nacional em que se pretendeu identificar e discutir os aspetos que os professores de matemática portugueses reputam como importantes para aprender matemática, ou seja, o que valorizam na aprendizagem da matemática.

Nas secções seguintes, apresenta-se i) um enquadramento teórico que discute a noção de valores e o que é valorizado na aprendizagem, no quadro da investigação em Educação Matemática, ii) os aspetos metodológicos deste estudo, nomeadamente, a adaptação dos instrumentos internacionais ao contexto português, a sua aplicação, bem como as diferentes etapas na sintetização de um livro de códigos e os procedimentos de análise dos dados, iii) os resultados mais proeminentes e a sua discussão à luz de estudos internacionais relacionados, e iv) algumas considerações finais e implicações destes resultados.

Valores em Educação Matemática

Ao longo do tempo, diversas áreas disciplinares têm dado contributos para definir os valores em educação, prevalecendo aqueles que os referem como algo a que se atribui importância, relevância ou preferência, como resultado de experiências individuais, coletivas, culturais e sociais. Segundo Jurdark (1999), os valores são aquilo que os indivíduos consideram ser importante, que determina a sua tomada de decisão e a que dão prioridade quando procuram efetuar melhorias. Os valores atuam como guias do comportamento humano, ao moldarem as decisões ou ações consideradas como desejáveis (Bishop & Seah, 2008; Halstead & Taylor, 2000; Haste, 2018). Deste modo, as opções e as ações relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática refletem diretamente o que os alunos e os professores valorizam e indiretamente o que é valorizado pelas sociedades (Seah & Andersson, 2015). Quando se fala de um valor, é necessário ter em conta o indivíduo ou a comunidade que o detém e o objeto, ideia ou comportamento que é valorizado (Corey & Ninomiya, 2019).

O estudo das implicações do domínio afetivo sobre a aprendizagem surgiu com o propósito de explicar os motivos do insucesso dos alunos que, aparentemente, possuíam os recursos cognitivos necessários para serem bem-sucedidos em matemática (Di Martino & Zan, 2001). Atualmente, há consenso sobre a ideia de que a matemática é experimentada por muitas crianças, jovens e adultos sob a forma de sentimentos penosos, atitudes negativas e dilemas emocionais que condicionam a sua aprendizagem. Essa experiência é referida por alguns autores como a "matemática quente" (Ginsburg & Asmussen, 1988; McLeod, 1992), porque envolve sentimentos, motivações e crenças, que, apesar de negligenciados pelas explicações estritamente cognitivas, revelam ser cruciais na aprendizagem da matemática. Assim, parece importante explorar os afetos na formação matemática dos estudantes, pois eles parecem começar a experimentar a "matemática quente" desde que entram na escola.

No âmbito da Educação Matemática, vários investigadores referem que os valores, as crenças, as atitudes e as emoções são subdomínios dos afetos (DeBellis & Goldin, 2006; Hannula, 2012; Philipp, 2007). As relações entre os quatro conceitos são estreitas e a teorização da sua interligação tem sido produzida por diversos autores, geralmente tomando como ponto de partida o modelo de McLeod (1992) que os situa num contínuo entre o mais estável e cognitivo e o mais instável e afetivo. Um modelo da localização dos subdomínios no referido espectro contínuo é proposto por Leder e Grootenboer (2005), com a inclusão dos valores numa posição de conexão e de proximidade com as crenças e as atitudes (Figura 1).

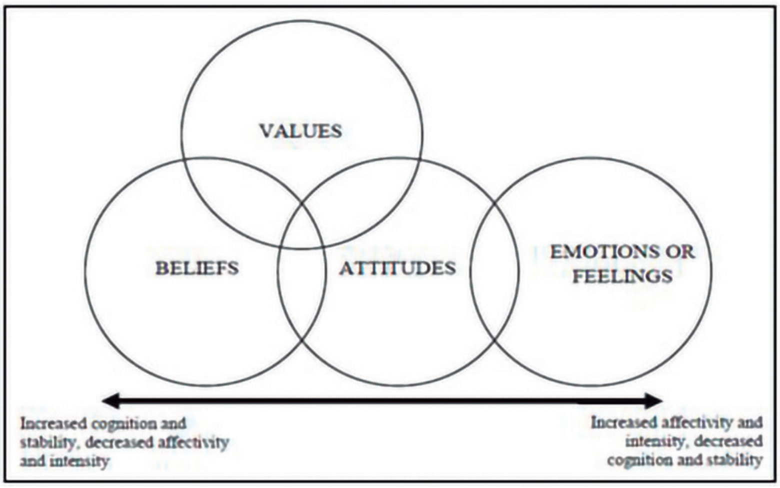


Figura 1. O modelo do domínio afetivo (Leder & Grootenboer, 2005, p. 2)

Outros investigadores consideram os valores uma variável que regula simultaneamente as dimensões cognitiva e afetiva (Seah & Andersson, 2015), ao funcionarem como ponte entre cognição e afeto, por um lado, e o comportamento, incluindo decisões e ações, por outro (Seah, 2019). O esquema da Figura 2 ilustra este papel de variável conativa (uma noção da Psicologia relativa a um impulso para uma ação, por oposição a uma decisão totalmente racional).

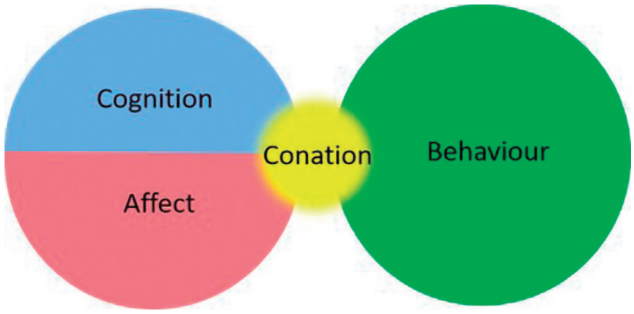


Figura 2. O modelo que estabelece os valores como ponte entre *cognição e afeto* e o *comportamento* (Seah, 2019, p. 102)

Em ambos os modelos está presente a visão de que os valores que mantemos influenciam o funcionamento cognitivo e afetivo. Também nos dois casos os autores salientam a grande proximidade entre valores e crenças, ao ponto de estes conceitos serem, por vezes, usados de forma indiferenciada. No entanto, os valores são diferentes das crenças, porque estas referem-se àquilo que o indivíduo considera ser verdadeiro ou falso (Goldin, 2002; Seah & Bishop, 2002), baseado em sensações, intuição, informação científica ou normas culturais. Já os valores são vistos como princípios que regem as escolhas ou avaliações, visando resultados ou comportamentos desejados ou desejáveis (Grootenboer et al., 2008). Clarkson et al. (2010) exemplificam a diferença:

> Nós podemos acreditar ser verdade que o uso de calculadoras gráficas ou CAS pelos alunos economiza tempo para que eles se envolvam em atividades matemáticas que requerem pensamento de ordem superior. O valor, por seu turno, é uma manifestação daquilo que nós valorizamos pessoalmente, quer seja a tecnologia, o pensamento de ordem superior ou a eficiência. Assim, a importância que colocamos nesses valores influencia e, reciprocamente, é influenciada pelas nossas crenças acerca do uso de calculadoras gráficas ou CAS pelos alunos. (p. 119)

Na comunidade *The Third Wave Project*, os valores em Educação Matemática são os princípios que os alunos e professores consideram importantes no ensino e aprendizagem da matemática (Kinone et al., 2020; Seah & Peng, 2012). O quadro conceptual, baseado no trabalho seminal de Bishop (1988) sobre valores relativos à Educação Matemática enuncia três dimensões: (i) valores sobre a matemática; (ii) valores sobre ensino e aprendizagem da matemática; e (iii) valores culturais e gerais sobre a educação. Os *valores sobre ensino e aprendizagem da matemática* são indicados como os valores relativos ao aprender e ao ensinar em contexto escolar (Kinone et al., 2020). No caso dos professores, são os aspetos que "se expressam através das práticas pedagógicas do sujeito nas escolas" (Seah, 2013, p. 194).

Tendo por base o questionário *WIFI - What I Find Important*, dirigido aos alunos, Kinone e Seah (2015) identificaram os valores sobre ensino e aprendizagem da matemática e categorizaram-nos em sete pares: aptidão e esforço, bem-estar e arduidade (*hardship*), processo e produto, aplicação e cálculo, factos matemáticos e ideias, exposição e exploração, e memorização e criação. Cada par é composto por valores complementares e, tal como Kinone et al. (2020) explicam, é possível admitir que ambos os valores de um par sejam importantes, embora não com a mesma intensidade. Por exemplo, um professor pode considerar importante que um aluno tenha um talento especial para a matemática (aptidão) e, simultaneamente, que demonstre esforço na sua aprendizagem da matemática. No entanto, se o professor valoriza mais o esforço do que a aptidão, ele pode incentivar os alunos a serem persistentes no seu trabalho como forma de aprender matemática, independentemente das suas aptidões matemáticas.

Metodologia

Em 2019, o GTI lançou um convite a todas as escolas públicas, básicas e secundárias, de Portugal continental e regiões autónomas para participarem no estudo "O que considero importante no ensino e na aprendizagem da matemática?" com o objetivo de caracterizar o alinhamento entre os valores veiculados pelos professores de matemática de 7.º e/ou 10.º anos e seus alunos, relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática. Neste artigo, apresenta-se uma parte do estudo em que se procura identificar e discutir apenas os aspetos que os professores consideram importantes na aprendizagem da matemática.

A recolha de dados

Os dados foram recolhidos por meio de dois questionários *online*, um dirigido aos professores e o outro aos alunos, compostos por itens de resposta fechada (escala de tipo Likert de 4 níveis) e itens de resposta aberta. O questionário dos professores, elaborado pelo consórcio *The Third Wave Project* (ver Kinone et al., 2020), foi traduzido do inglês e adaptado ao contexto português. Os itens sensíveis, tais como etnia ou condição migratória dos participantes, tiveram de ser removidos devido a limitações impostas pelo Ministério da Educação e para dar cumprimento ao Regulamento Geral de Proteção de Dados da União Europeia. A versão portuguesa do questionário foi testada por três professores de matemática e pelos seus alunos de 7.º e 10.º anos. De um modo geral, os respondentes consideraram os itens inteligíveis, mas forneceram algumas sugestões de reformulação. A versão final do questionário engloba um total de 68 itens. Neste artigo, tratam-se apenas os itens de 1 a 9, que visavam recolher dados sociodemográficos sobre os participantes, bem como o item 10 onde se solicitava aos professores que indicassem os três principais aspetos que influenciam a aprendizagem da matemática dos alunos.

Embora o estudo mais amplo tenha seguido uma abordagem metodológica mista (Creswell & Plano Clark, 2017), este artigo foca-se exclusivamente na análise qualitativa das respostas abertas dos professores participantes sobre os aspetos que consideraram mais importantes na aprendizagem da matemática (item 10).

Os participantes

No convite lançado às escolas foi solicitada a participação dos professores de matemática a lecionar no 7.º e/ou no 10.º ano de escolaridade, a quem foi, posteriormente, explicado o objetivo do estudo. No cumprimento de todas as questões éticas que se impõem em investigações desta natureza, garantiu-se que a participação no estudo seria anónima e voluntária, e que os dados recolhidos seriam tratados com confidencialidade. O questionário foi armazenado e administrado por meio de uma plataforma digital.

Responderam ao questionário 113 professores de matemática, de 78 escolas. Cerca de 63% dos professores lecionavam o 7.º ano, 28% o 10.º ano e cerca de 9% ambos os níveis. A amostra é composta por professores experientes, já que cerca de 65% dos docentes lecionavam há mais de 20 anos. Os respondentes tinham idade superior a 30 anos e uma larga maioria superior a 40 anos (Tabela 1).

Tabela 1. Caracterização dos participantes (N =113)

	Descrição	n (%)
Género	Feminino	89 (78,8%)
	Masculino	24 (21,2%)
Idade	30 – 39 anos	14 (12,4%)
	40 – 49 anos	52 (46,0%)
	50 – 59 anos	41 (36,3%)
	60 – 70 anos	6 (5,3%)
Experiência profissional	0 – 10 anos	6 (5,3%)
	11 – 20 anos	33 (29,2%)
	20 – 30 anos	60 (53,1%)
	Mais de 30 anos	14 (12,4%)

Nota: n =frequência, %=percentagem.

A análise de dados

Após o processo de limpeza dos dados recolhidos, procedeu-se a uma análise de conteúdo das respostas com o propósito de identificar os aspetos valorizados pelos professores relativamente à aprendizagem da matemática. O item 10 do questionário do professor solicitava a identificação dos três aspetos que, do seu ponto de vista, influenciam a aprendizagem da matemática por parte dos alunos e ainda uma justificação dessas escolhas (Figura 3). Assumiu-se que um professor, ao ter de mencionar três aspetos como os mais importantes, iria escolher aqueles que mais valoriza.

* 10. Quais são os principais aspetos que influenciam a aprendizagem da matemática pelos alunos?
(Escreva três aspetos que pense serem importantes e justifique as suas escolhas.)

(1)

(2)

(3)

Figura 3. Item 10 do questionário do professor

As dificuldades inerentes ao tratamento de uma grande quantidade de dados qualitativos associadas à necessidade de manter a coesão no processo de codificação, especialmente desafiante devido à dimensão da equipa de codificadores (os autores), conduziram à operacionalização da análise de dados em várias etapas.

Com o propósito de assegurar a confiabilidade e a validade da análise dos dados, optou-se por realizar uma etapa inicial que serviu um duplo propósito: por um lado, testar a utilidade da categorização definida por Kinone e Seah (2015) e a sua adequação ao contexto português e, por outro, preparar e treinar os investigadores na sua aplicação (Beresford et al., 2022). Assim, no âmbito de um processo de codificação de natureza dedutiva, procurou-se identificar os aspetos valorizados subjacentes a cada entrada de um subconjunto dos dados, correspondentes a 26 respondentes de uma dada região, tendo por base a categorização estabelecida por Kinone e Seah (2015). Organizados em duplas, os autores codificaram os dados de forma independente e, posteriormente, em grupo, compararam os resultados e discutiram as ambiguidades detetadas. Em seguida, os autores traduziram e adaptaram o livro de códigos original, tendo por base a experiência obtida com o subconjunto de dados em análise. Esta etapa permitiu que a equipa construísse um entendimento partilhado sobre cada uma das subdimensões consideradas, isto é, sobre cada par de valores.

Neste processo, o significado dos valores foi clarificado a partir de excertos ilustrativos retirados dos dados, e foram acrescentados valores inexistentes na categorização original (por exemplo, "Currículo, Metodologia e Organização da escola", em que se incluiu, entre outros, a menção ao currículo e à organização curricular; à organização da escola; às metodologias de ensino e aprendizagem, ou às tarefas. Assim, foi estabilizado o livro de códigos a utilizar na categorização dos dados (Tabela 2).

Numa etapa seguinte, e mantendo as duplas inicialmente definidas, os investigadores codificaram a totalidade dos dados referentes ao item em análise. Cada unidade de análise foi codificada por duas duplas. Findo este processo, a equipa reuniu-se e analisou os resultados do procedimento, tendo verificado concordância na codificação em cerca de 70% dos dados analisados. As discordâncias foram alvo de nova discussão entre os codificadores, até à obtenção de consenso sobre qual o código a atribuir.

Tabela 2. Valores sobre o ensino e aprendizagem da matemática (Adaptado de Kinone & Seah, 2015)

	Valor	Conteúdo	Códigos abertos
1	Aptidão	Valoriza o talento (aptidão, habilidade) na aprendizagem da matemática.	Talento; Inteligência; Intuição; Confiança; Curiosidade; Autoestima.
	Empenho e Motivação	Valoriza o esforço e a motivação na aprendizagem da matemática.	Empenho; Autonomia; Atenção; Motivação; Concentração; Interesse; Persistência; Organização; Paciência; Predisposição para aprender.
2	Bem-estar	Valoriza situações e ambiente calmo, de bem-estar, e gosto na aprendizagem da matemática.	Bom ambiente na sala de aula; Relação entre c professor e os alunos; Relação entre os alunos; Gosto pela matemática; Gosto por aprender; Família e sociedade.
	Arduidade	Valoriza o comportamento disciplinado, a dificuldade e o ambiente de tensão na aprendizagem da matemática.	Disciplina (comportamento); Trabalho árduo; Dificuldade; Treino (exaustivo/repetição).
3	Processo	Valoriza a realização de processos na aprendizagem da matemática.	Compreensão; Raciocínio; Resolução de problemas; Questões abertas; Avaliação formativa (comunicação).
	Produto	Valoriza a obtenção de produtos na aprendizagem da matemática.	Procedimento; Método; Fórmula; Resposta correta; Saber termos/palavras.
4	Aplicação de conhecimentos	Valoriza a aplicação do conhecimento na resolução de exercícios e problemas, na aprendizagem da matemática.	Exercícios e problemas de aplicação; Praticar para consolidar.
	Cálculo	Valoriza o cálculo e a execução de algoritmos na aprendizagem da matemática.	Destreza de cálculo; Rapidez da resposta; Resposta certa (precisão).
5	Factos matemáticos	Valoriza os factos matemáticos na aprendizagem da matemática.	Factos; Regras; Teoremas.
	Matemática em contexto	Valoriza o contexto do quotidiano ou mundo real na aprendizagem da matemática.	Exemplos de situações em que é necessário us a matemática; Aplicação à realidade.
6	Exposição	Valoriza a explicação por parte do professor ou de um aluno na aprendizagem da matemática.	Qualidade da explicação; Forma de explicar; Conteúdo da exposição (chama a atenção, avis coloca questões, várias propostas de resolução Organização da exposição e/ou explicação.
	Exploração	Valoriza a exploração e a descoberta pelos próprios alunos, incluindo a colaboração, na aprendizagem da matemática.	Exploração individual (pensar por si próprio, resolver por si, fazer por si, experimentação, experienciar; saber interpretar o que se pede); Exploração em grupo (cooperação; discussão; pensar em conjunto; colaboração; comparação raciocínio).
7	Memorização	Valoriza a memorização e o relembrar do conhecimento matemático tal como foi transmitido, na aprendizagem da matemática.	Memorizar; Memorizar: fórmulas; factos básic termos/palavras; procedimentos.
	Construção	Valoriza a criação de ideias, de processos e produtos pelo aluno na aprendizagem da matemática.	Aluno como autor; Ação; Atividade; Invenção Descoberta; Criação.
8	Recursos tecnológicos	Valoriza o uso de tecnologias na aprendizagem da matemática.	Computador; Quadro interativo; *Software*; Calculadora.
	Recursos não tecnológicos	Valoriza o uso de recursos não tecnológicos na aprendizagem da matemática.	Materiais manipuláveis; Material de desenho.
9	Currículo, Metodologia e Organização da escola	Valoriza aspetos relacionados com o currículo, metodologias e com a organização da escola na aprendizagem da matemática.	Currículo e organização curricular; Metodolog de ensino-aprendizagem; Tarefas; Dimensão d turma; Cultura da escola.

Resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados da análise dos dados, começando por referir que, do total de 339 respostas (provenientes de 113 inquiridos), não foram codificadas cinco respostas, porque o conteúdo não era percetível, sendo consideradas inválidas (Tabela 3). Nenhum professor deu três respostas inválidas.

Tabela 3. Frequências absolutas e relativas (1 c.d.) das respostas válidas e inválidas referentes ao item 10 do questionário

	R1 (%)	R2 (%)	R3 (%)
Respostas válidas	110 (97,3%)	112 (99,1%)	112 (99,1%)
Respostas inválidas	3 (2,7%)	1 (0,9%)	1 (0.9%)
Total de respostas	**113 (100.0%)**	**113 (100.0%)**	**113 (100.0%)**

Nota: R1=resposta 1, R2=resposta 2, R3=resposta 3.

Segue-se uma visão geral da distribuição dos valores sobre a aprendizagem da matemática considerados no quadro de análise (Tabela 2). Esses resultados globais estão detalhados na Tabela 4 e no Gráfico 1.

Tabela 4. Síntese das frequências absolutas e relativas (1 c.d.) dos valores mencionados pelos professores nas três respostas ao item 10 do questionário

	R1 (%)	R2 (%)	R3 (%)
Aptidão	3 (2,7%)	1 (0,9%)	3 (2,7%)
Empenho e Motivação	44 (40,0%)	44 (39,3%)	32 (28,6%)
Bem-estar	26 (23,6%)	19 (17,0%)	21 (18,8%)
Arduidade	5 (4,5%)	10 (8,9%)	11 (9,8%)
Processo	4 (3,6%)	2 (1,8%)	1 (0,9%)
Produto	8 (7,3%)	9 (8,0%)	10 (8,9%)
Aplicação de conhecimentos	0 (0,0%)	0 (0,0%)	5 (4,5%)
Cálculo	1 (0,9%)	0 (0,0%)	0 (0,0%)
Factos matemáticos	0 (0,0%)	0 (0,0%)	0 (0,0%)
Matemática em contexto	1 (0,9%)	4 (3,6%)	4 (3,6%)
Exposição	4 (3,6%)	3 (2,7%)	0 (0,0%)
Exploração	0 (0,0%)	3 (2,7%)	3 (2,7%)
Memorização	0 (0,0%)	1 (0,9%)	0 (0,0%)
Criação	0 (0,0%)	0 (0,0%)	0 (0,0%)
Recursos tecnológicos	0 (0,0%)	2 (1,8%)	2 (1,8%)
Recursos não tecnológicos	0 (0,0%)	0 (0,0%)	1 (0,9%)
Currículo, Metodologia e Organização escolar	14 (12,7%)	14 (12,5%)	16 (14,3%)
Equipamento e Condições físicas da escola	0 (0,0%)	0 (0,0%)	3 (2,7%)
Total de respostas válidas	**110 (100.0%)**	**112 (100.0%)**	**112 (100.0%)**

Nota: R1=resposta 1, R2=resposta 2, R3=resposta 3.

No Gráfico 1 representam-se as percentagens obtidas para cada um dos valores sobre ensino e aprendizagem da matemática em relação ao total de respostas válidas (R1, R2 e R3) dos professores. A percentagem é dada pelo quociente entre o número total de respostas da categoria e o número de respostas válidas.

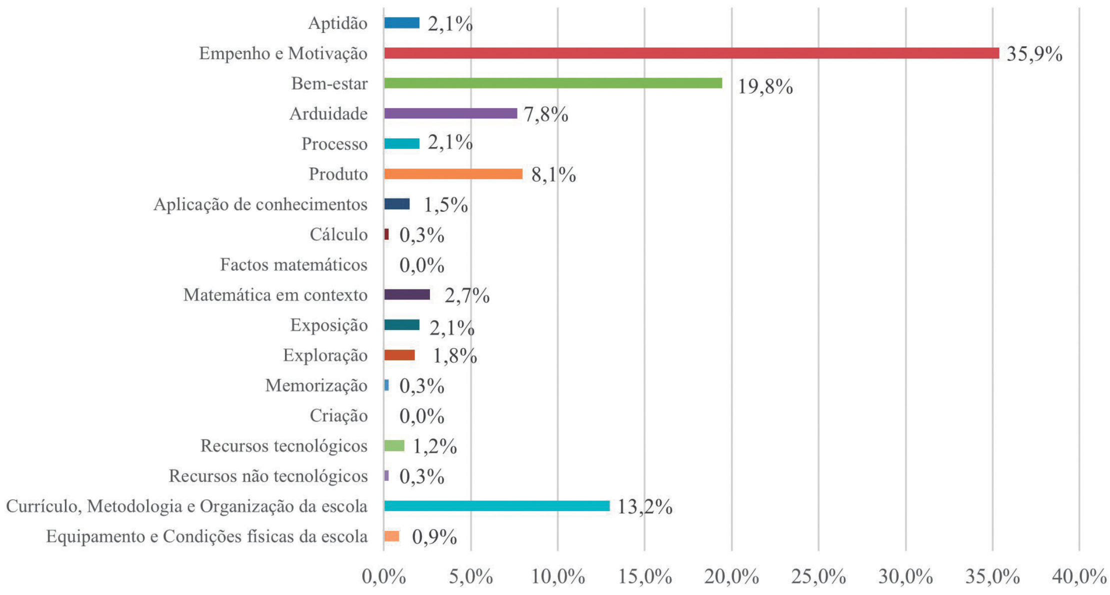


Gráfico 1. Percentagem da ocorrência de valores sobre ensino e aprendizagem da matemática manifestados pelos professores, no total das respostas válidas

Os resultados mostram que os dois valores proeminentes que surgem nas respostas dos professores são: *Empenho e Motivação* (35,9%) e *Bem-estar* (19,8%). Note-se que estas duas categorias compreendem cerca de 55% das respostas válidas. Seguem-se três outros valores, com uma expressão mais reduzida: *Currículo, Metodologia e Organização da escola* (13,2%), *Produto* (8,1%) e *Arduidade* (7,8%). Os restantes valores aparecem com uma percentagem residual ou nula. Portanto, os professores valorizam na aprendizagem dos alunos aspetos relacionados com o ensino e a aprendizagem.

Inspecionando as respostas dadas, por professor, verifica-se que 77 (68%) dos inquiridos valorizam o *Empenho e Motivação*, 51 (45%) o *Bem-estar* e 36 (32%) o *Currículo, Metodologia e Organização da escola*. Além disso, 11 (10%) valorizam o *Empenho e Motivação* nas três respostas que registaram.

Discussão

Os resultados encontrados permitem algumas reflexões, começando pela observação da forte tendência de valorização, pelos professores, do *Empenho e Motivação* dos seus alunos. Esta constatação parece repercutir uma visão da matemática escolar como uma disciplina difícil e da sua aprendizagem como dependente do envolvimento do aluno, assumindo que as dificuldades podem ser ultrapassadas com persistência e uma forte motivação para o desempenho (Niss, 2018). Numa síntese da literatura, Roche et al. (2021) concluíram que há uma série de fatores que favorecem o empenho dos estudantes, entre os quais está o facto de as atividades de aprendizagem serem percebidas pelos alunos como interessantes, divertidas ou desafiadoras. O conceito de interesse (situacional) está muito relacionado com o empenho, sendo que algumas caraterísticas das situações de aprendizagem fazem despertar o gosto e a atenção e manter a pessoa envolvida no trabalho com a situação. A investigação sobre interesse, empenho e motivação na matemática escolar e a sua relação com as práticas docentes tem vindo a crescer, como reportam Zhu e Kaiser (2022), particularmente através de estudos comparativos internacionais, no âmbito da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE). Um desses projetos de investigação - o estudo do *Global Teaching InSights* - procurou perceber as práticas de ensino que mais influenciam os resultados cognitivos e não-cognitivos dos estudantes. O quadro teórico desenvolvido no seio deste projeto elegeu seis domínios de práticas de ensino, entre os quais se encontra o envolvimento (interesse, empenho e motivação) dos alunos. Esses aspetos são mencionados pelos professores portugueses, mostrando valorizar o *Empenho e Motivação* dos seus alunos. Todavia, a manifestação desse valor resume-se a caraterísticas desejáveis dos alunos, dissociadas da influência das práticas de ensino e da área curricular.

Uma outra ideia que se destaca nos resultados é a da valorização do *Bem-estar*, em consonância com o pensamento veiculado no *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (Martins et al., 2017), segundo o qual o bem-estar é uma área de competência. A nível internacional, uma preocupação semelhante está patente, entre outros, nos estudos do *Programme for international student assessment* (PISA) 2015 e 2018 (OECD, 2017, 2019), ao avaliarem o bem-estar académico dos alunos. No relatório do PISA 2018, o bem-estar é definido com um construto multidimensional:

> O bem-estar é um construto multifacetado que inclui o bem-estar subjetivo, mas também o bem-estar objetivo. O bem-estar subjetivo pode ser definido como 'as avaliações que as pessoas fazem das suas vidas – o grau em que as suas avaliações conscientes e reações afetivas indicam que as suas vidas são desejáveis e estão a correr bem' (Diener, Oishi & Lucas, 2015). Inclui uma componente afetiva – emoções positivas e negativas – bem como uma componente cognitiva – julgamentos sobre a satisfação geral com a vida ou com domínios específicos da vida. (OECD, 2019, p. 262)

De forma global, percebeu-se que o fator mais decisivo na satisfação geral com a vida e bem-estar dos alunos foi a força das relações pessoais. A correlação mais alta com a satisfação ocorreu com o sentimento de pertença, seguido de perto pelas relações dos jovens com os pais e em terceiro lugar com os professores. Nos resultados com os professores portugueses, o valor do *Bem-estar* também surge claramente ligado à importância das relações pessoais (após aplicação dos códigos abertos da Tabela 2, encontraram-se menções às relações entre o professor e os alunos (31,7%) e às relações entre os alunos e os pais (22,2%)). Como tal, a valorização do *Bem-estar* está em linha com preocupações internacionais recentes, designadamente por parte da OCDE. Retira-se ainda dos resultados que o valor do *Bem-estar* parece não remeter para aspetos específicos da aula de matemática.

Outros estudos, no entanto, têm vindo a abordar a relação entre as ações dos professores e a atmosfera emocional da aula de matemática. Por exemplo, Laine et al. (2020) realizaram uma investigação, ao longo de três anos, com alunos finlandeses dos 3.º e 5.º anos do ensino básico. Aos alunos foi pedido que fizessem desenhos da sua aula de matemática e do seu grupo na aula, incluindo o professor e o próprio aluno. Além disso, foram efetuados vídeos de 180 aulas das turmas envolvidas. Alguns dos resultados apontam a centralidade das interações que ocorrem na sala de aula na construção de uma atmosfera emocional positiva. Nas aulas em que o clima era positivo, os alunos trabalhavam em grupos, discutiam ideias matemáticas e ajudavam-se entre si, colocando questões e dúvidas livremente; o professor circulava pelos grupos e apoiava os alunos que solicitavam ajuda, dentro do grupo. Pelo contrário, nas aulas com uma atmosfera emocional negativa, os alunos estavam geralmente sentados em pares, mas trabalhavam sozinhos e em silêncio. O professor também circulava entre os alunos, mas dava *feedback* individual e nem sempre atendia todos os alunos que solicitavam ajuda.

Observa-se que alguns dos aspetos diretamente associados à atmosfera emocional positiva na aula de matemática (por exemplo: Ênfase na compreensão; Resolução de desafios numéricos; Discussão de ideias matemáticas) referidos por Laine et al. (2020) têm uma expressão exígua nas respostas obtidas no estudo português (por exemplo: *Processo* (2,1%); *Aplicação de conhecimentos* (1,5%); *Exploração* (1,8%)). Pelo contrário, nas respostas do presente estudo surgem mais frequentemente os valores *Produto* (8,1%) e *Arduidade* (7,8%), os quais foram associados a um ambiente negativo da aula de matemática por Laine et al. (2020).

Apesar de menos apreciável, cerca de um terço dos professores valoriza o *Currículo, Metodologias e Organização da escola*, o que aponta para aspetos que determinam práticas de sala de aula. Examinando as 44 respostas que se enquadram nesta categoria, por aplicação dos códigos abertos da Tabela 2, constata-se que "Currículo e organização curricular" surge em 18 respostas (40,9%) e "Metodologias de ensino-aprendizagem" com a mesma frequência. Porém, nas respostas dos professores não se encontram evidências concretas aos tipos de metodologias e respetivas caraterísticas que são por eles valorizadas, tendo um caráter vago as informações que apresentaram (por exemplo: "estratégias diversificadas"; "método de ensino apelativo e interativo"). Desse modo, as referências dos inquiridos às metodologias não remetem para aspetos específicos da aprendizagem da matemática, contemplados em recomendações recentes (Martins et al., 2017; NCTM, 2017).

Conclusões e implicações

O estudo dos valores que os professores possuem acerca do ensino e aprendizagem da matemática é visto como pertinente para a compreensão das condições que podem levar a melhorias da aprendizagem da matemática. Em Portugal, a investigação recente sobre o domínio afetivo e, em particular, sobre a dimensão dos valores no ensino e aprendizagem da matemática é exígua. O presente estudo vem assim dar um contributo para uma área de investigação em que muitas questões permanecem em aberto e concorrer para um melhor entendimento da problemática no contexto internacional, como é ambicionado pelo *The Third Wave Project*.

Os resultados provenientes desta amostra de professores de matemática portugueses a lecionar no 7.º e/ou no 10.º ano levam a concluir que as suas respostas se concentraram num pequeno número de valores, aparentemente aglutinadores. Foi visível, sobretudo, a importância atribuída pelos inquiridos ao *Empenho e Motivação* e ao *Bem-estar* dos seus alunos, como aspetos importantes para a aprendizagem da matemática. Simultaneamente, foi possível perceber que os valores mais relacionados com a atividade da aula de matemática e com práticas de ensino não tiveram destaque nos resultados.

Face a estas conclusões, parece oportuno e necessário trazer a discussão sobre os valores acerca do ensino e aprendizagem da matemática para o contexto da prática educacional, em especial na formação de professores de matemática. No momento atual de renovação curricular, torna-se evidente a importância de tornar consciente e debater os valores que os professores possuem e como moldam os valores dos alunos.

Referências bibliográficas

Aktaş, F., Yakıcı-Topbaş, E, & Dede, Y. (2019). The elementary mathematics teachers' values underlying teacher noticing: The context of polygons. In P. Clarkson, W. T. Seah, & J. Pang (Eds.), *Values and valuing in mathematics education: Scanning and scoping the territory* (pp. 209–222). Springer.

Beresford, M., Wutich, A., du Bray, M. V., Ruth, A., Stotts, R., SturtzSreetharan, C., & Brewis, A. (2022). Coding qualitative data at scale: Guidance for large coder teams based on 18 studies. *International Journal of Qualitative Methods*, *21*, https://doi.org/10.1177/16094069221075860

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 179–191. http://dx.doi.org/10.1007/BF00751231

Bishop, A. J., & Seah, W. T. (2008). Educating values through mathematics teaching: Possibilities and challenges. In M. H. Chau & T. Kerry (Eds.), *International perspectives on education* (pp. 118–138). Continuum.

Blazar, D. & Kraft, M. (2017). Teacher and teaching effects on students' attitudes and behaviors. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 39*(1), 146–170.

Clarkson, P., Bishop, A., & Seah, W. T. (2010). Mathematics education and student values: The cultivation of mathematical wellbeing. In T. Lovat (Ed.), *International research handbook on values education and student wellbeing* (pp. 111–135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-8675-4

Corey, D. L., & Ninomiya, H. (2019). Values of the Japanese mathematics teacher community. In P. Clarkson, W. Seah, & J. Suk (Eds.), *Values and valuing in mathematics education*, (pp. 53–67). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-16892-6_4

Creswell, J., & Plano Clark, V. (2017). *Designing and conducting mixed methods research*. Sage.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 131–147. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4

Di Martino, P. & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: Some theoretical issues. *Proceedings of 25th Annual conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 351–358). PME.

Ginsburg, H. P., & Asmussen, K. A. (1988). Hot mathematics. *New Directions for Child Development*, *41*, 89–111. https://doi.org/10.1002/cd.23219884107

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59–72). Kluwer.

Grootenboer, P., Lomas, G., & Ingram, N. (2008). The affective domain and mathematics education. In H. Forgasz, A. Barkatsas, A. Bishop, B. Clarke, S. Keast, W-T. Seah, & P. Sullivan (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2004-2007* (pp. 255–270). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087905019_013

Hannula, M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137–161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Hattie, J. (2003). Teachers make a difference. What is the research evidence? *Australian Council for Educational Research Annual Conference on Building Teacher Quality* (pp. 1–17). University of Auckland.

Halstead, J. M., & Taylor, M. J. (2000). Learning and teaching about values: A review of recent research. *Cambridge Journal of Education, 30*(2), 169–202. https://doi.org/10.1080/713657146

Haste, H. (2018). *Attitudes and Values and the OECD Learning Framework 2030: A Critical Review of Definitions, Concepts and Data*. OECD. http://www.oecd.org/education/2030/

Jacinto, H., Santos, E. & Silvestre, A.I. (2020). Que instrumentos de avaliação da aprendizagem matemática são usados com maior frequência pelos professores em Portugal? Um quarteto (in) esperado". *Educação e Matemática*, 73-76.

Jurdak, M. (1999). The Role of Values in Mathematics Education. *Humanistic Mathematics Network Journal*, *21*, 17. http://scholarship.claremont.edu/hmnj/vol1/iss21/17

Kieran, C., Krainer, K., Shaughnessy, J., & Clements, M. (2012). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. In A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (Vol. 27, pp. 361–392). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_12

Kinone, C., & Seah, W. T. (2015). International comparative study "The Third Wave" and study on Values in Mathematics Education: Discussion on the framework of values in mathematics education by WIFI Study. In *Proceedings of the 3rd Spring research conference* (pp. 93–100). Japan Society of Mathematics Education.

Kinone, C., Soeda, Y., & Watanabe, K. (2020). The influences of teacher valuing on the development of student valuing in mathematics education: Data analysis of questionnaire survey in Miyazaki Prefecture using the questionnaire WIFI too developed by international comparative study The Third Wave. *Journal of JASME Research in Mathematics Education, 26*(1), 43–58.

Kyriakides, L., Christoforou, C., & Charalambous, C. Y. (2013). What matters for student learning outcomes: A meta-analysis of studies exploring factors of effective teaching. *Teaching and Teacher Education*, *36*, 143–152. https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.07.010

Laine, A., Ahtee, M., & Näveri, L. (2020). Impact of teacher's actions on emotional atmosphere in mathematics lessons in primary school. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*, 163–181. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09948-x

Leder, G., & Grootenboer, P. (2005). Affect and mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 1–8. https://doi.org/10.1007/BF03217413

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação/DGE.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Macmillan Publishing.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Hooper, M. (2017). Measuring changing educational contexts in a changing world: Evolution of the TIMSS and PIRLS questionnaires. In M. Rosén, K. Yang Hansen, & U. Wolff (Eds.), *Cognitive abilities and educational outcomes. methodology of educational measurement and assessmen*t. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43473-5_11

NCTM. (2017). Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática. (APM, trad.). NCTM (Obra original publicada em 2014).

Niss, M. (2018). Learning difficulties in mathematics. What are their nature and origin, and what can we do to counteract them? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *13*(17), 127–140.

OECD. (2017). *PISA 2015 results (Volume III): Students' well-being*. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264273856-en

OECD. (2019). *PISA 2018 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). IAP.

Presmeg, N. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 435–458). NCTM.

Roche, A., Gervasoni, A., & Kalogeropoulos, P. (2021). Factors that promote interest and engagement in learning mathematics for low-achieving primary students across three learning settings. *Mathematics Education Research Journal*. (Online first). https://doi.org/10.1007/s13394-021-00402-w

Seah, W. T. (2013). Assessing values in mathematics education. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol 4, pp. 193–200). IGPME.

Seah, W. T. (2019). Values in mathematics education: Its conative nature, and how it can be developed. *Research in Mathematical Education*, *22*(2), 99–121. https://doi.org/10.7468/jksmed.2019.22.2.99

Seah, W. T. & Andersson, A. (2015). Valuing diversity in mathematics pedagogy through the volitional nature and alignment of values. In A. Bishop, H. Tan, & T. Barkatsas (Eds.), *Diversity in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05978-5_10

Seah, W. T. & Bishop, A. J. (2002). Values, mathematics and society: Making the connections. In C. Vale, J. Roumeliotis & J. Horwood (Eds.), *Valuing mathematics in society* (pp. 105–113). Mathematical Association of Victoria.

Seah, W. T., & Peng, A. (2012). What students outside Asia value in effective mathematics lessons: A scoping study. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 44*, 71–82.

Seah, W. T., & Wong, N. Y. (2012). What students value in effective mathematics learning: A "Third Wave Project" research study. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *44*(1), 33–43.

Silvestre, A.I. & Jacinto, H. (2021). The use of technologies in mathematics teaching and learning in Portugal: teachers' pre-pandemic views. *Proceedings of 13th International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp. 9179-9187).

Zhu, Y., & Kaiser, G. (2022). Impacts of classroom teaching practices on students' mathematics learning interest, mathematics self-efficacy and mathematics test achievements: A secondary analysis of Shanghai data from the international video study Global Teaching InSights. *ZDM – Mathematics Education*. (Online first). https://doi.org/10.1007/s11858-022-01343-9

Construções dos alunos sobre as operações combinatórias

Students' constructions about combinatorial operations

Mónica Valadão, Nélia Amado, João Pedro da Ponte

EBS Tomás de Borba, monica.ar.valadao@edu.azores.gov.pt
FCT, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *A Análise Combinatória tem um grande potencial no ensino da Matemática. Quando apresentadas de forma adequada, as tarefas de contagem proporcionam aos alunos oportunidades de raciocinar matematicamente. Considerando que os alunos podem obter melhores desempenhos na resolução de tarefas de contagem se derem significado às fórmulas das operações combinatórias utilizadas, este trabalho procurou criar oportunidades de os alunos se envolverem numa atividade de reflexão e de generalização, que conduziu à construção das fórmulas das operações combinatórias. A presente comunicação analisa as resoluções de alunos de duas turmas do 12.º ano numa sequência de tarefas de contagem, bem com as generalizações que realizaram no processo de construção das fórmulas das operações combinatórias de arranjos simples e combinações. Os resultados apresentados têm por base um estudo de natureza qualitativa, segundo o paradigma interpretativo, e numa investigação baseada em design. A investigação realizou-se no contexto de um estudo de aula. Estes resultados mostram que os alunos são capazes de relacionar as operações combinatórias de permutação, arranjo simples e combinação e de construir as suas fórmulas, a partir da generalização do seu trabalho num conjunto de tarefas.*

Palavras-chave: Combinatória; compreensão; generalização.

Abstract. *Combinatorics has great potential in the teaching of mathematics. When adequately presented, counting tasks provide students with opportunities to reason mathematically. Considering that students can do better in solving counting tasks if the formulas of the combinatorial operations used have meaning for them, this work sought to create opportunities for students to engage in an activity of reflection and generalization, which led to the construction of formulas of combinatorial operations. This communication analyzes the resolutions of students from two 12th grade classes to a sequence of counting tasks, as well as the generalizations they made in the process of building the formulas of combinatorial operations of simple arrangements and combinations. The results presented* *are based on a qualitative study, interpretive paradigm and within a design-based research. The investigation was carried out in the context of a lesson study. These results show that students are able to relate the combinatorial operations of permutation, simple arrangement and combination and to build their formulas, from the generalization of their work in a set of tasks*

Keywords: Combinatorics;understanding; generalization.

Introdução

A contagem é uma das atividades matemáticas mais naturais, desde os primeiros anos. Vários estudos (Batanero et al., 1997; Lockwood, 2011) referem as dificuldades dos alunos em Análise Combinatória. É frequente a aprendizagem deste tema ser associada a experiências negativas de cálculo de arranjos, permutações e combinações que resultam da dificuldade em compreender estes conceitos. As tarefas de contagem envolvem um número reduzido de fórmulas e cada nova tarefa parece diferente da anterior. Para os alunos, é um desafio, e, muitas vezes, uma dificuldade, perceber os aspetos das tarefas de contagem a ter em atenção e as informações a retirar. Consequentemente, é comum observar os alunos a recorrerem a "palavras-chave" e à aplicação de fórmulas memorizadas, na sua resolução das tarefas. Lockwood (2014) considera que, apesar de alguns conseguirem obter sucesso recorrendo à utilização de tais estratégias, o seu uso excessivo conduz a uma perspetiva de que a resolução de tarefas de contagem se reduz à simples aplicação de fórmulas, sem a compreensão do conceito associado.

Na presente comunicação apresentamos os resultados de uma experiência de ensino da Combinatória, que procura envolver os alunos de forma ativa na resolução de uma sequência de tarefas que visam conduzir a uma compreensão profunda dos conceitos envolvidos e à construção das fórmulas das operações combinatórias.

Enquadramento teórico

O ensino da Análise Combinatória

A importância da Combinatória no currículo de Matemática do ensino secundário está bem patente na literatura em educação matemática (Batanero et al., 1997), quer pelo seu potencial como contexto para a resolução de problemas, quer pelas suas aplicações nas Probabilidades e em outras áreas do conhecimento. Os problemas combinatórios facilitam o desenvolvimento de processos de enumeração, de realização de conjeturas, de generalização e o pensamento sistemático, essenciais para a aprendizagem da Matemática em todos os níveis de ensino (English, 2005).

Ao analisarmos uma sequência de conteúdos de Combinatória, apresentada nos manuais escolares do 12.º ano, é comum observar a apresentação das fórmulas das operações combinatórias, seguida de vários exemplos e exercícios de aplicação. No entanto, a investigação indica que muitos alunos aplicam essas fórmulas de forma incorreta (Batanero et al., 1997; Lockwood, 2011), sugerindo que não compreenderam quando e porquê devem ser utilizadas. Batanero et al. (1997) apresentam algumas considerações didáticas a ter em conta no ensino da Combinatória. Segundo os autores, a compreensão dos conceitos (nomeadamente das operações combinatórias) não se pode reduzir ao uso de fórmulas e definições, deve emergir das práticas desenvolvidas durante a resolução das tarefas. Para os autores, o ensino da Combinatória deve ser baseado na resolução de tarefas diversificadas, em que os alunos sintam necessidade de utilizar procedimentos sistemáticos de enumeração, recorrência, classificação e diversas representações. O ensino deste tema deve enfatizar o raciocínio combinatório envolvido, em oposição à aplicação analítica de fórmulas de permutações, arranjos e combinações. Os autores consideram que na resolução de tarefas de contagem, os alunos devem começar por enumerar alguns resultados, para que compreendam a estrutura do problema e o que lhes é pedido. Também Roa et al. (2003) consideram importante apresentar aos alunos situações que os ajudem a desenvolver destrezas em Combinatória, sem que seja dada uma ênfase excessiva às definições das operações combinatórias e à sua utilização como único método de resolução dos problemas. Estratégias como dividir o problema inicial em subproblemas, traduzir o problema num problema equivalente e fixar variáveis devem ser consideradas e podem ser aplicadas na resolução de tarefas de contagem. Roa e Navarro-Pelayo (2001), consideram que são necessárias propostas de ensino que não se centrem apenas nas definições formais, mas que tenham em conta os diferentes tipos de tarefas combinatórias, uma variedade de abordagens e estratégias de resolução e diferentes modos de raciocínio.

Raciocínio Matemático

O conceito de raciocínio é central na educação matemática. "O raciocínio é uma capacidade transversal que, embora não exclusiva da Matemática, pode e deve ser promovida no trabalho em Matemática" (Ponte et al., 2020, p. 11). Cada vez mais se reconhece que a capacidade de raciocinar matematicamente é essencial para que os alunos aprendam com compreensão e consigam estabelecer conexões entre os vários domínios da matemática, percebendo de que forma os conceitos se relacionam uns com os outros e como podem ser usados na resolução de problemas.

As formas mais citadas de raciocínio são a dedução, a indução e a abdução. Ponte et al. (2020) referem que durante muito tempo os estudos em educação matemática se centravam exclusivamente no raciocínio dedutivo. Os raciocínios indutivo e abdutivo eram tidos como obstáculos ao raciocínio matemático. Porém, mais recentemente, essa visão alterou-se, sendo que as diferentes formas de raciocínio são vistas como complementares.

De acordo com Oliveira (2002), o conhecimento matemático é organizado e estruturado com base em inferências dedutivas. Associamos o raciocínio dedutivo à Matemática formal, às demonstrações e à lógica. Este tipo de raciocínio desenvolvese do geral para o particular, com conclusões necessárias e com um papel essencial na validação de conhecimento.

Porém, os novos conhecimentos desenvolvem-se de modo não dedutivo. No raciocínio indutivo formulam-se generalizações a partir da identificação de características comuns a diversos casos (Lannin et al., 2011). O raciocínio indutivo desenvolve-se do particular para o geral, sem conduzir a conclusões necessárias, mas com um papel-chave na criação de novo conhecimento. Observa-se, assim, que raciocinar matematicamente não se limita a um raciocínio lógico ou demonstrativo, inclui também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Conjeturar e Generalizar

Conjeturar é um processo central na atividade matemática (Pólya, 1954). Como indicam Lannin et al. (2011), na sala de aula de matemática o processo de conjeturar serve como um ponto de entrada na atividade matemática e constitui uma forma natural de os alunos se envolverem nos processos de raciocínio. Por vezes, as conjeturas podem ser alargadas, de forma a expressar relações ou situações matemáticas mais gerais (generalizações). Generalizar implica encontrar semelhanças entre situações e alargar o raciocínio para além do conjunto que as originou. O processo de generalização é fundamental na obtenção de informação nova e, consequentemente, na formulação de novas conjeturas, ou seja, de afirmações que se pensa serem verdadeiras e que, depois de testadas, se podem tornar, eventualmente, em resultados matemáticos (Brodie, 2010).

Segundo, Mata-Pereira e Ponte (2013), em situações do dia-a-dia, os alunos estão naturalmente predispostos a realizar generalizações. Formular uma generalização matemática pertinente representa uma tarefa desafiante, por isso, os autores consideram que “para que os alunos desenvolvam estratégias que conduzam à formulação de generalizações válidas e adequadas, é necessário um trabalho continuado ao longo do seu percurso escolar” (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 19).

A “descoberta” das fórmulas das operações combinatórias

Com base em diversas investigações, Reed e Lockwood (2021) defendem que os alunos podem obter melhores desempenhos na resolução de tarefas de contagem se as fórmulas das operações combinatórias utilizadas possuírem significado para eles. Estes autores realizaram duas experiências de ensino iterativas que envolveram os alunos num processo de construção das fórmulas das operações combinatórias. Essas experiências de ensino promoveram as atividades de generalização de relacionar (estabelecer relações de semelhança entre tarefas ou entre contextos) e estender resultados (aplicação de padrões e regularidades a novos casos), com o objetivo de criar oportunidades para os alunos refletirem sobre uma atividade combinatória inicial, na construção das fórmulas. Na perspetiva dos autores, uma forma de tentar atribuir significado às fórmulas das operações combinatórias, é levar os alunos a construir essas fórmulas a partir da generalização do seu trabalho num conjunto de tarefas.

Deste modo, envolver os alunos no processo de construção das fórmulas das operações combinatórias poderá conduzir a uma compreensão do seu significado e da forma como funcionam. Reed e Lockwood (2021) destacam dois aspetos importantes a ter em conta, no sentido de guiar os alunos à construção das fórmulas das operações combinatórias: apresentar tarefas que envolvem números grandes para motivar a generalização; e apresentar tarefas com contextos semelhantes, nas tarefas de permutações, arranjos e combinações, de modo a rentabilizar a relação natural entre situações e fórmulas. Segundo os autores, estas variáveis tiveram um impacto positivo no desempenho dos alunos, uma vez que eles se sentiram motivados a generalizar e o desenvolvimento da fórmula das combinações foi fortemente influenciado pelo trabalho realizado com as permutações e os arranjos simples. Destaca-se ainda que, mesmo após o contacto com as fórmulas das operações combinatórias (construídas pelos próprios alunos), os alunos não as aplicaram de forma imprudente. Em vez disso, começavam por considerar a natureza dos resultados (se a ordem dos objetos era relevante e se a repetição era permitida) e, só após essa reflexão, decidiam que fórmula deveriam aplicar.

Metodologia

Neste estudo foi utilizada uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, com base num paradigma interpretativo, e segundo uma investigação baseada em design. Foram formulados princípios de design referentes às tarefas e às ações de ensino do professor, que apoiam a construção da experiência de ensino. A conjetura inicial da IBD é de que uma intervenção baseada nestes princípios de design contribui para promover o raciocínio matemático dos alunos na aprendizagem da Combinatória.

A investigação foi desenvolvida durante a realização de um estudo de aula subordinado ao tema da Combinatória, lecionado na disciplina de Matemática A do 12.º ano de escolaridade. Com o trabalho realizado nas sessões do estudo de aula foi construída uma sequência didática constituída por sete aulas de 90 minutos, sobre a resolução de tarefas de contagem envolvendo as operações combinatórias de permutação, arranjo simples, combinação e arranjo completo. O estudo de aula decorreu no âmbito do trabalho de doutoramento da primeira autora desta comunicação.

A recolha de dados ocorreu em março de 2022, ao longo das sete aulas de 90 minutos da experiência de ensino, em duas turmas do 12.º ano das duas professoras participantes no estudo de aula. Uma das turmas tinha 19 alunos, com uma média de idades de 17 anos. A média das classificações dos alunos desta turma, na disciplina de Matemática, no 2.º período do presente ano letivo, foi de 15,3 valores e apenas três alunos obtiveram classificação negativa (9 valores). A outra turma era constituída por apenas 10 alunos, com média das idades de 18 anos. Nesta turma, a média das classificações na disciplina de Matemática, no 2.º período do presente ano letivo, foi de 13,5 valores e três alunos obtiveram classificação negativa.

Para a escolha das professoras participantes no estudo de aula, foi considerado apenas o ano de escolaridade que lecionavam. As duas professoras têm mais de vinte anos de serviço, sempre na escola onde lecionam atualmente. São professoras dinâmicas, que investem na sua formação e estão sempre disponíveis para aprender e melhorar a sua prática profissional. As aulas da experiência de ensino foram lecionadas pelas duas professoras, em cada uma das turmas, sendo que a recolha de dados foi realizada pela primeira autora desta comunicação, que assumiu o papel de observadora não participante. Para a recolha de dados foram utilizadas múltiplas fontes, tais como observação de aulas com gravação em vídeo e/ou áudio. Também se recolheram as resoluções das tarefas produzidas pelos alunos e foram tomadas algumas notas no diário de bordo da investigadora. Os dados apresentados nesta comunicação dizem respeito à terceira aula da sequência.

Nas primeiras aulas propôs-se a resolução de uma sequência de tarefas que envolviam situações de contagem simples, sem que tivessem sido formalizados os conceitos de arranjo, permutação e combinação, mas que conduziam à introdução desses conceitos. No fim da sequência de tarefas pretendia-se que os alunos fossem capazes, não só de manipular as fórmulas de permutação, arranjo simples, combinação e arranjo completo, mas também de compreender, relacionar e distinguir as operações combinatórias, aplicando-as na resolução de problemas combinatórios.

A primeira aula da experiência de ensino envolvia a resolução de um conjunto de tarefas de contagem simples, com valores pequenos nos parâmetros. É importante que os alunos comecem por resolver as tarefas utilizando estes valores para, a partir daí, estabelecerem padrões e relações, até conseguirem encontrar estratégias de resolução das tarefas compostas. Com o trabalho proposto nesta aula pretendia-se que os alunos resolvessem as tarefas de contagem recorrendo a processos não formais (esquemas, tabelas, diagramas, listas, etc.), escrevendo os conjuntos de resultados, de modo a compreenderem o que estava a ser contado. No fim da aula foram introduzidos os conceitos de fatorial e permutações de um número natural.

Na segunda aula da experiência de ensino foi proposta a resolução de uma sequência de oito tarefas de contagem. A compreensão e o entendimento combinatório dos alunos sobre as tarefas de contagem apresentadas, constituiu a base de trabalho para as etapas seguintes. Depois de terem resolvido as várias tarefas, foi pedido que os alunos as categorizassem, ou seja, que as agrupassem de acordo com o critério que considerassem mais adequado. O propósito desta atividade foi levar os alunos a encontrar relações entre as várias tarefas, a partir do trabalho anteriormente realizado, dando ênfase às suas semelhanças e diferenças. Após a construção das categorias, os alunos explicaram/ justificaram as associações que fizeram, caracterizando cada um dos grupos formados. Todos os alunos associaram as tarefas de acordo com a operação combinatória envolvida, e só no fim da aula a professora introduziu os conceitos de arranjos completos ou com repetição, permutações, arranjos simples ou sem repetição e combinações. Nesta aula não foi fornecida qualquer informação sobre as fórmulas de cálculo das operações combinatórias, pois foram os alunos que, na aula seguinte, construíram as expressões matemáticas que permitiriam obter a solução das tarefas de contagem envolvendo arranjos simples e combinações (os alunos apenas conheciam o conceito de fatorial).

Na terceira aula da experiência de ensino foi proposta uma sequência de três tarefas que conduziria às fórmulas das operações combinatórias. No final da resolução da sequência, os alunos tiveram oportunidade de estender os padrões e as regularidades encontradas na resolução das tarefas, escrevendo as fórmulas das operações combinatórias de arranjos simples e combinações, a partir do conceito de fatorial de um número natural. Com esta proposta, pretendeu-se criar oportunidades para que os alunos se envolvessem numa atividade de reflexão e de generalização no estudo das fórmulas básicas da combinatória. O principal objetivo foi perceber a forma como os alunos compreendiam as diferenças entre os vários tipos de tarefas de contagem e que tipos de relações estabeleciam entre elas e entre as respetivas fórmulas. Através das ações de categorização e caracterização os alunos puderam desenvolver uma compreensão profunda sobre as fórmulas básicas envolvidas nas tarefas de contagem, tal como é referido por Reed e Lockwood (2021).

Apresentamos aqui uma análise das resoluções dos alunos a tarefas que tinham como objetivo a construção da generalização das diferentes expressões das operações combinatórias. Esta análise é um processo descritivo e interpretativo.

Resultados

Através da resolução das tarefas propostas, os alunos tiveram oportunidade de estender os padrões e as regularidades encontradas na aula anterior. Pretendia-se que resolvessem as três tarefas propostas e que construíssem as fórmulas de cálculo das operações combinatórias de arranjo simples e combinação, a partir dos conceitos de permutação e fatorial de um número. No sentido de guiar os alunos à construção das fórmulas das operações combinatórias, as tarefas apresentadas envolviam números grandes para motivar a generalização e apresentavam contextos semelhantes nas tarefas de permutações, arranjos e combinações, de modo a rentabilizar a relação natural entre situações e fórmulas.

> ***Tarefa 1:" Caixa de bolas"***
>
> *Existem seis bolas dentro de uma caixa, indistinguíveis ao tato e identificadas com as letras A, B, C, D, E e F.*
>
> *a. Retira-se da caixa uma bola e regista-se a sua letra. Em seguida, sem colocar a bola de volta na caixa, retira-se outra bola. Repetimos o processo até formar uma sequência de seis letras. Quantas sequências de seis letras é possível obter?*
>
> *b. Retira-se da caixa uma bola e regista-se a sua letra. Em seguida, sem colocar a bola de volta na caixa, retira-se outra bola, formando assim uma sequência de duas letras. Quantas sequências de duas letras é possível obter?*
>
> *c. Retiram-se, simultaneamente, duas bolas da caixa e observam-se as letras representadas em cada bola. Quantos conjuntos diferentes, de dois elementos, é possível obter após a extração?*

Apresentam-se algumas resoluções dos alunos das duas turmas às tarefas propostas, que ilustram o seu desempenho global, bem como algumas expressões matemáticas obtidas por eles, para a resolução de tarefas de contagem envolvendo arranjos simples e combinações.

Na figura 1 apresentamos a resolução de Telma que mostra ser capaz de distinguir as diversas operações combinatórias estudadas, associando-as corretamente a cada uma das alíneas da tarefa "Caixa de bolas". A atividade de categorização e caracterização realizada pelos alunos na segunda aula da experiência de ensino facilitou a identificação de semelhanças e diferenças entre os vários tipos de tarefas de contagem, permitindo-lhes estender o raciocínio para além do conjunto onde essas características foram identificadas.

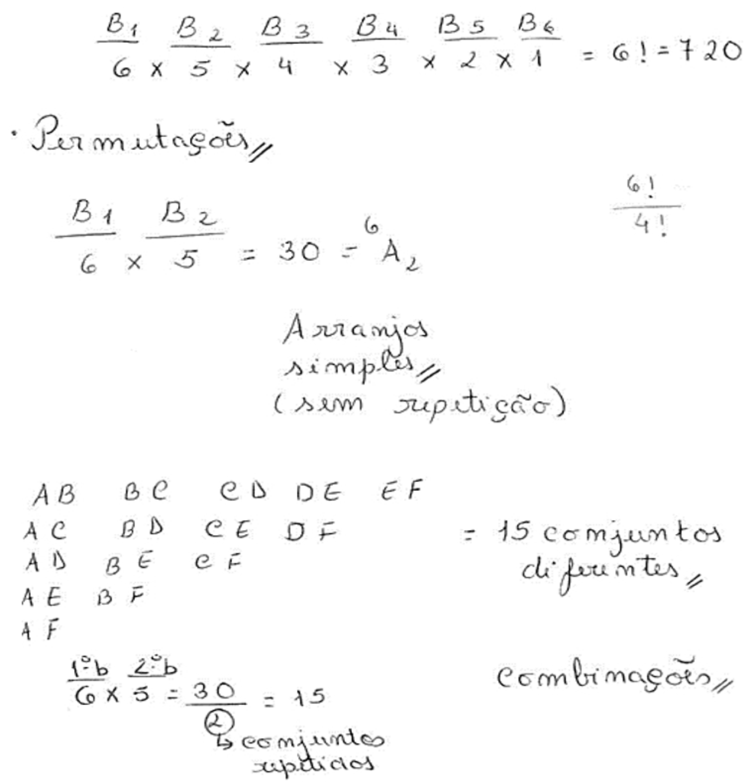


Figura 1. Resolução de Telma da tarefa 1

Todos os alunos compreenderam o conceito de fatorial de um número natural, usando este conceito corretamente nas situações em que se pretende organizar um conjunto completo de elementos. Nas tarefas envolvendo permutações, o número de posições disponíveis é igual ao número de elementos que vamos organizar. Existe um certo número de opções para cada posição e esse número diminui à medida que se considera a posição seguinte.

Com a sua resolução, Hélder (figura 2) parece compreender como obtém o número de arranjos simples de seis elementos, tomados dois a dois, partindo na noção de fatorial de um número natural. Nesta questão apenas se pretende organizar um subconjunto de elementos. A resolução de tarefas de contagem envolvendo arranjos simples implica organizar objetos num conjunto de lugares inferior ao número de objetos disponível. Nesta situação, se considerarmos o número total de maneiras de organizar os elementos disponíveis, teremos resultados a mais. Como o número de lugares disponíveis é inferior ao número total de elementos, é necessário determinar a diferença entre os dois, que representará os elementos que não vamos considerar. Hélder parece compreender a situação e divide o número de maneiras de organizar todos os elementos (6!) pelo número de maneiras de organizar os elementos que não pretende considerar (4!), obtendo, assim, o número total de maneiras de organizar seis elementos em dois espaços disponíveis. Como referem Ball e Bass (2003), o conhecimento que não é justificado não envolve raciocínio e, por conseguinte, facilmente se torna conhecimento infundado. Através da representação utilizada, o aluno justifica e explica as suas ideias, tornando o seu raciocínio claro e melhorando a sua compreensão conceptual.

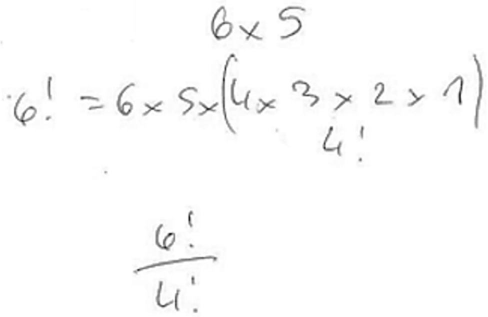


Figura 2. Resolução de Hélder à alínea a) da tarefa 1

Na resolução apresentada na figura 3, Tiago expõe uma relação encontrada entre as operações combinatórias de arranjos simples e combinações, o que revela que o aluno atribuiu um significado à fórmula das combinações e não a aplica de forma irrefletida.

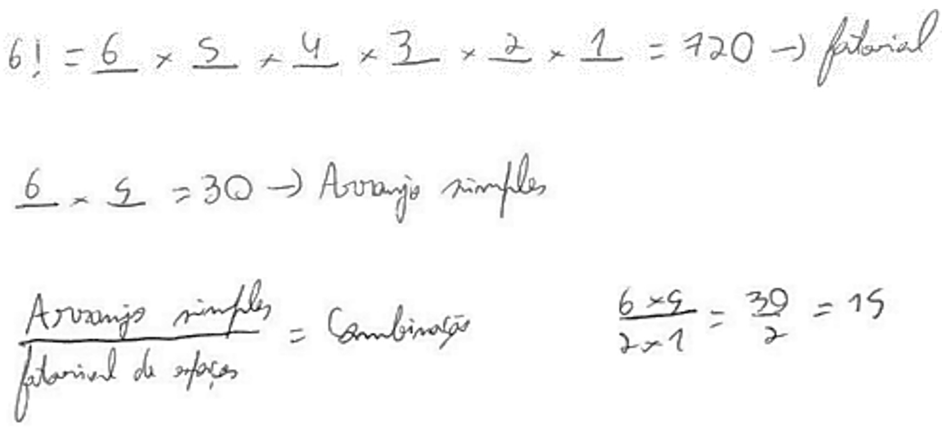


Figura 3. Resolução de Tiago à tarefa 1

> ***Tarefa 2:" Passeio no jardim"***
>
> *Sete amigos estão a passear num jardim.*
>
> *a. Os sete jovens vão colocar-se lado a lado para tirar uma fotografia. De quantas maneiras diferentes se podem dispor os sete jovens, se não houver qualquer restrição?*
>
> *b. Durante o passeio, os jovens passam por um banco corrido com três lugares e decidem descansar um pouco. De quantas maneiras diferentes pode o banco ser ocupado por três dessas sete pessoas?*
>
> *c. No fim do passeio, os jovens decidiram comer um gelado. Três dos sete amigos vão comprar os gelados para todos. De quantas maneiras é possível escolher três pessoas para irem comprar o gelado?*

Fátima resolve corretamente cada uma das alíneas da tarefa 2 (figura 4) e mostra compreender a relação existente entre cada uma das operações combinatórias. Na resolução apresentada há evidência de que a aluna pensou sobre as relações matemáticas existentes entre as três operações, desenvolvendo algumas conjeturas. A aluna escreveu uma expressão matemática que permite obter o número de arranjos simples de sete elementos tomados três a três, partindo do conceito de fatorial, e uma expressão matemática que permite obter o número de combinações de sete elementos tomados três a três, partindo da noção de arranjo simples e fatorial.

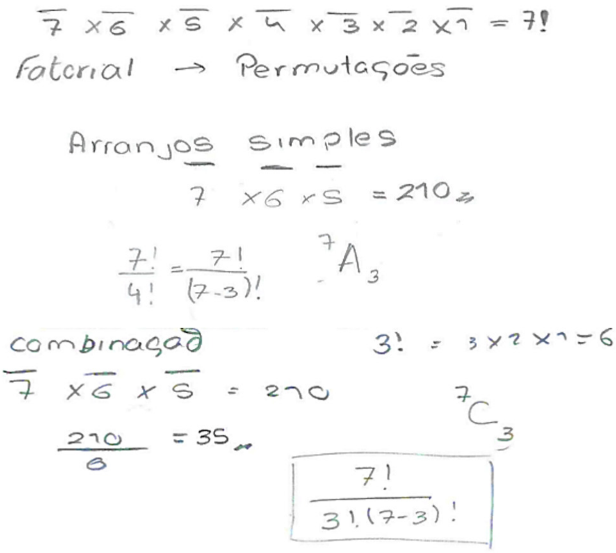


Figura 4. Resolução de Fátima da tarefa 2

Tarefa 3:" O prédio da Ana"

A Ana vive num prédio com oito apartamentos.

a. *A garagem do prédio tem oito vagas individuais, numeradas de 1 a 8. De quantas maneiras diferentes os oito residentes do prédio (a Ana, a Beatriz, o Carlos, o Daniel, a Ema, o Filipe, o Guilherme e a Helena) podem estacionar os seus carros na garagem?*

b. *Nas férias da Páscoa, cinco dos oito residentes do prédio viajaram de carro, ficando apenas três (a Ana, a Beatriz e o Carlos), que estacionam os seus carros na garagem. De quantas maneiras poderão fazê-lo?*

c. *Os oito residentes decidiram organizar-se para escolher a cor da tinta que vão utilizar para pintar o prédio. De quantas maneiras é possível escolher um grupo de três pessoas para escolher a cor da tinta?*

O principal aspeto a considerar quando se resolvem as tarefas envolvendo combinações é não contabilizar dois resultados idênticos como sendo distintos. É importante que os alunos compreendam que, neste tipo de tarefa, a alteração da ordem dos elementos origina resultados idênticos. Através de alguns resultados, Irene compreendeu que utilizando, por exemplo, as letras A, B e C é possível escrever seis sequências que correspondem ao mesmo triângulo (figura 5). Desta forma, a aluna encontrou uma relação entre as permutações, os arranjos simples e as combinações e mostrou que é possível obter as combinações a partir dos arranjos simples, eliminando os resultados repetidos. Através da justificação apresentada, a aluna fornece um argumento convincente para a conjetura estabelecida, confirmando a sua afirmação com base em evidência.

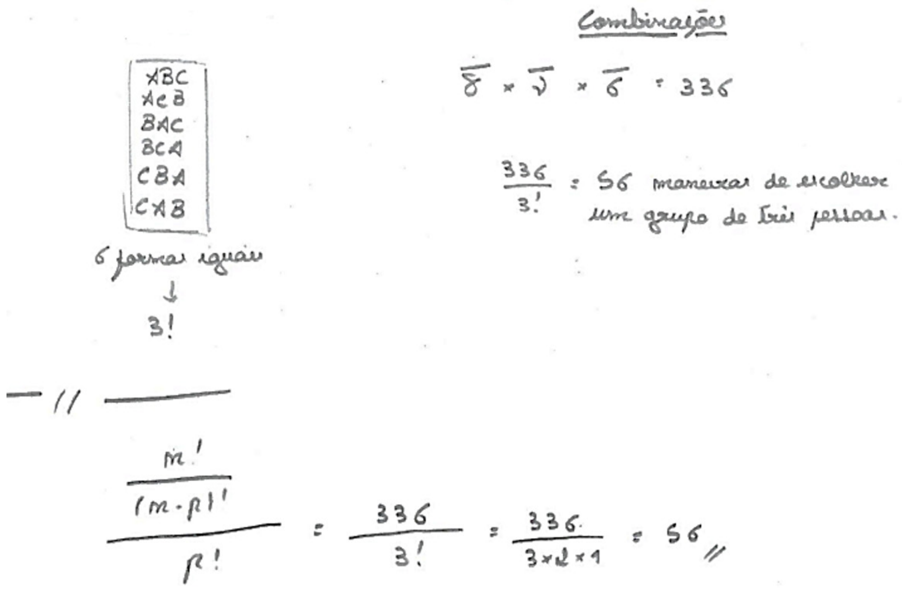


Figura 5. Resolução de Irene da alínea c) da tarefa 3

Para além da resolução das três tarefas de contagem, os alunos foram desafiados a escrever expressões matemáticas que permitissem obter a solução de qualquer tarefa de contagem envolvendo arranjos simples e combinações. As resoluções de Gustavo e Carlos (figuras 6 e 7) são dois exemplos das generalizações que os alunos foram capazes de realizar, a partir do trabalho produzido na resolução das tarefas. Nas generalizações apresentadas, há evidência de que o foco deixou de ser uma situação ou um caso específico, dirigindo-se para os padrões, os procedimentos, as estruturas e as relações entre eles. Partindo das conclusões e conjeturas estabelecidas na resolução das tarefas, os alunos formularam uma conjetura de âmbito mais geral. Neste caso, perceberam que a grande diferença entre as permutações de *n* elementos e os arranjos simples de *p* elementos tomados a partir de *n* elementos, reside no facto de, neste caso, não "utilizarmos" os *n* elementos disponíveis. Assim, é necessário fazer , em que representa os elementos que não devem ser considerados e, por isso, estão a mais.

Partindo da fórmula dos arranjos simples, e considerando que é necessário retirar os resultados repetidos (que resultam apenas da permutação dos elementos considerados), Gustavo e Carlos obtiveram também a expressão , em que representa os resultados que são repetidos e devem ser retirados.

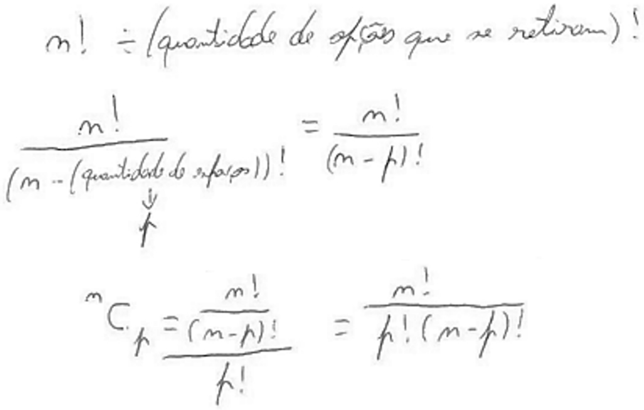


Figura 6. Resposta de Gustavo para as expressões matemáticas que permitem obter a solução das tarefas de contagem envolvendo arranjos simples e combinações

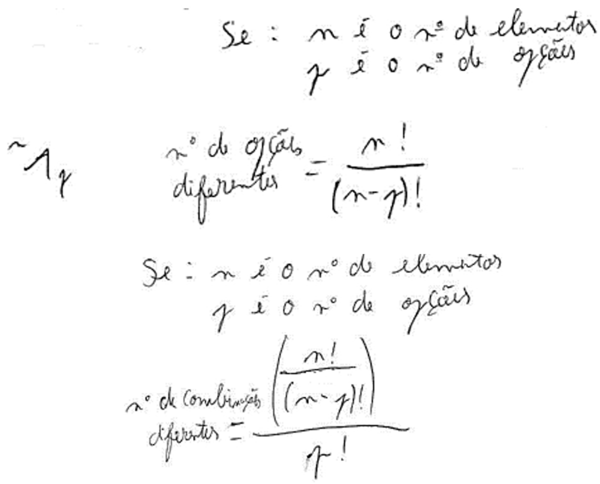


Figura 7. Resposta de Carlos para as expressões matemáticas que permitem obter a solução das tarefas de contagem envolvendo arranjos simples e combinações

A resolução do Sebastião (figura 8) demonstra como a atividade proposta criou oportunidades de os alunos estenderem os padrões e as regularidades encontradas na resolução das três tarefas, conduzindo-os à construção das fórmulas das operações combinatórias. Na sua justificação, o aluno utiliza evidência empírica, ou seja, a justificação fornecida baseia-se na veracidade de exemplos particulares. Como refere Lannin (2005), estabelecer a validade de uma generalização é uma tarefa muito desafiadora para os alunos e muitos deles contam com a validação empírica para apoiar as suas afirmações. De uma maneira geral, os alunos foram capazes encontrar semelhanças entre as diversas situações apresentadas e alargar o raciocínio para resultados mais amplos.

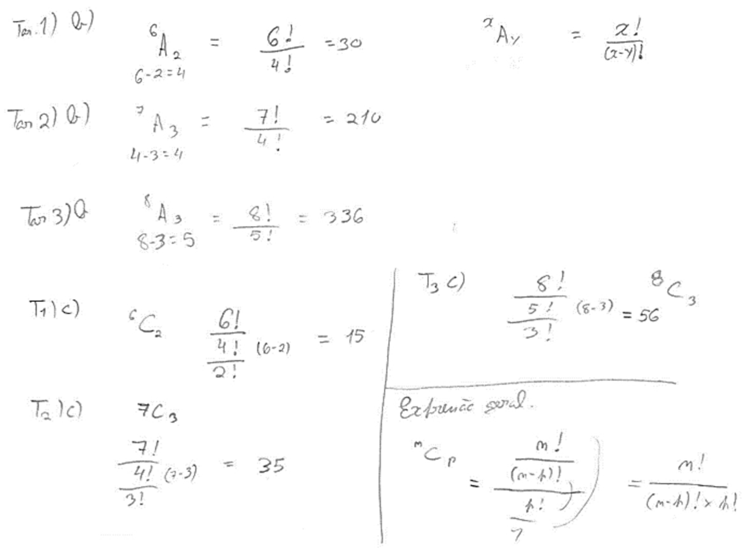


Figura 8. Resposta de Sebastião para a expressão matemática que permite obter a solução das tarefas de contagem envolvendo combinações

Conclusão

A planificação da experiência de ensino foi elaborada durante a realização de um estudo de aula e exigiu um intenso trabalho de pesquisa e uma reflexão sobre as estratégias de ensino a utilizar. Através do trabalho desenvolvido pelas professoras e pela investigadora, na preparação da sequência didática, foi possível promover uma aprendizagem mais significativa da Combinatória, tendo como foco o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Nas aulas da experiência de ensino, foi proposta uma sequência de tarefas que seguia uma progressão direcionada para a compreensão dos conceitos e construção das fórmulas das operações combinatórias. Envolver os alunos no processo de construção das fórmulas das operações combinatórias conduziu a uma compreensão profunda do seu significado, da forma como funcionam e como são aplicadas na resolução das tarefas de contagem. Verificou-se que os alunos foram capazes de relacionar as operações combinatórias de permutação, arranjo simples e combinação e de construir as suas fórmulas, a partir da generalização do seu trabalho num conjunto de tarefas. Os alunos identificaram semelhanças e diferenças entre cada uma das operações, refletiram sobre os padrões e as relações matemáticas existentes, compreendendo quando e porquê cada uma das operações deve ser utilizada. Partindo das conjeturas elaboradas durante a realização de uma sequência de tarefas, os alunos foram capazes de alargar o raciocínio e formular conjeturas de âmbito mais geral

Os resultados obtidos, mostram que a realização da sequência de tarefas proposta levou os alunos a uma aprendizagem com compreensão. Os alunos envolveram-se ativamente na resolução das tarefas, discutindo com os seus colegas as estratégias que utilizavam, sentiram-se motivados a generalizar e o desenvolvimento da fórmula das combinações foi fortemente influenciado pelo trabalho realizado com as permutações e os arranjos simples. Estes resultados mostram que a aprendizagem da Análise Combinatória pode ser feita com compreensão, envolvendo os alunos ativamente na construção dos conceitos e das fórmulas. Tal como referem Lockwood (2011, 2014) e Batanero et al. (1997), não devemos reduzir a resolução de tarefas de combinatória à aplicação de definições e fórmulas estudadas.

Referências

Ball, D.L., & Bass H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In Editores (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). NCTM.

Batanero C., Navarro-Pelayo V., & Godino J. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.). *Assessment challenge in statistics* education (239-252). IOS Press.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer.

English, L.D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G.A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Springer.

Lannin, J. (2005) Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten: Grade 8*. NCTM.

Lockwood, E. (2014). A set-oriented perspective on solving counting problems. *For the Learning of Mathematics, 34*(2), 31–37.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*, 307–322. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9320-7.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEM*, *62*, 17–31. http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.021.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *BOLEMA*, *32*(62), 781–801. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02.

Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Eds.) Em *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.25-40). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.

Ponte, J.P. (2017). Desenvolver o raciocínio matemático a partir do trabalho em sala de aula. *Livro de atas do VIII Congresso Ibero Americano de Educación Matemática* (p. 21-29).

Ponte, J.P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula. *Educação e Matemática*, *156*, 7-11.

Reed, Z., & Lockwood, E. (2021). Leveraging a categorization activity to facilitate productive generalizing activity and combinatorial thinking. *Cognition and Instruction*. https://doi.org/10.1080/07370008.2021.1887192.

Roa, R., & Navarro-Pelayo V. (2001). Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Jornadas Europeas de Estadística: la enseñanza y la difusión de la estadística.* (pp.254-254).

Roa, R., Batanero, C, & Godino, J. (2003). Estrategias generals y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática, 15*(2), 5–25.

Exploração de sequências repetitivas na construção do conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico

Exploration of repetitive sequences in the construction of specialized knowledge for teaching algebraic thinking

Vera Cristina de Quadros[1], *Susana Carreira*[2]

[1]Instituto Federal do Mato Grosso/Brasil; Universidade do Vale do Taquari/Brasil, vera.quadros@ifmt.edu.br

[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve/Portugal; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa/Portugal, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Esta comunicação relata parte de uma pesquisa em andamento sobre os conhecimentos matemáticos e pedagógicos aprendidos por professores para ensinar álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental brasileiro, a partir de um processo formativo em comunidade. Neste recorte, temos o propósito de investigar o conhecimento especializado desenvolvido pelos professores participantes, quando da exploração de uma tarefa de aprendizagem profissional envolvendo sequências repetitivas. Em uma abordagem qualitativa interpretativa, analisamos o conhecimento especializado desenvolvido e revelado pelos professores, no início da formação, a partir de três indicadores: identificação da unidade; estratégias de exploração das sequências repetitivas; e, expressão da lei de formação. Os aprendizados revelados pelos professores, partindo de generalizações próximas e aritméticas e chegando a generalizações distantes e algébricas, são evidências que nos permitem considerar que eles começaram a construir o conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico. Nossa pesquisa traz indícios da viabilidade e relevância de uma formação docente voltada ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos para ensinar sob um viés singular, em um contexto formativo em comunidade, mediatizado pela exploração de tarefas profissionais de aprendizagem.*

Palavras-chave: formação docente; pensamento algébrico; conhecimento matemático para ensinar.

Abstract. *This article presents part of an ongoing research on the mathematical and pedagogical knowledge for teaching algebra in the early years that was learned by Brazilian elementary school teachers on a community process of continuing education. In this instance, we aim to analyze the specialized knowledge developed by the participating teachers, when exploring a professional learning task involving repetitive sequences. In an interpretative qualitative approach, we analyzed the specialized knowledge developed and revealed by the teachers, at the* *beginning of their training, based on three indicators: identification of the unit; strategies for exploring repetitive sequences; and expression of the formation law. The learning revealed by the teachers, starting from close and arithmetic generalizations and arriving at distant and algebraic generalizations, are evidence that allow us to consider that they began to build specialized knowledge for the teaching of algebraic thinking. Our research shows evidence of the feasibility and relevance of teacher training aimed at the development of mathematical knowledge to teach under a specific trend, in a community training context, mediated by the exploration of professional learning tasks.*

Keywords: *continuing education; algebraic thinking; mathematical knowledge for teaching.*

Introdução

No Brasil, tradicionalmente, não se ensinava álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental (AIEF). Em 2018, com a promulgação da primeira Base Nacional Comum Curricular (BNCC), foi estabelecido o ensino de álgebra desde o início da escolaridade. De lá para cá, aumentou sobremaneira a demanda por formação continuada dos professores em serviço nos AIEF, especialmente porque o ensino da álgebra não era objeto de estudo nos cursos superiores de Licenciatura em Pedagogia.

Consoante com Ribeiro (2011), compreendemos que os professores são a principal fonte de conhecimento para os alunos na escola e, por isso mesmo, necessitam ter um sólido conhecimento profissional. Ainda, concordamos que a formação docente é fundamental para que o pensamento algébrico seja parte integrante do trabalho em sala de aula nos AIEF, como afirmam vários pesquisadores brasileiros (e.g., Araújo, 2008; Ferreira et al., 2017; Freire, 2011; Luna & Souza, 2013).

Por isso, compartilhamos da ideia de que a formação deve possibilitar "a construção de um repertório de conhecimentos para preparar e implementar tarefas matematicamente desafiadoras" (Ferreira et al., 2016, p. 45). Mas uma construção coletiva e compartilhada, que promova interações entre professores, a fim de melhorarem sua prática, ou seja, em comunidade de prática, onde possam aprender com os pares, refletindo e analisando práticas docentes. Aliás, conforme afirmam Baldini et al. (2017), as comunidades de prática (CoP) vêm-se apresentando como um espaço fértil para a promoção e exploração de processos de aprendizagem de professores que ensinam matemática. Um espaço e tempo criado e cultivado entre professores que se dispõem a aprender juntos, compartilhando experiências, saberes, concepções, e que buscam desenvolver conhecimentos profissionais para melhorar sua prática.

Nessa perspectiva, em nossa investigação sobre como os conhecimentos profissionais para ensinar álgebra nos AIEF são aprendidos por professores, em andamento na Universidade do Vale do Taquari, no Brasil, desenvolvemos um processo formativo em CoP, com professores pedagogos em serviço de escolas públicas, que ensinavam matemática a crianças, no período de março a maio de 2021. Dessa formação e da investigação, fazemos um recorte, que aqui reportamos, com o objetivo de identificar o conhecimento especializado desenvolvido pelos professores participantes, quando da exploração de uma tarefa de aprendizagem profissional envolvendo sequências repetitivas. Para tal, apresentamos brevemente o aporte teórico e a metodologia adotada na formação. Depois, em uma abordagem qualitativa interpretativa, apresentamos os resultados e nossa análise interpretativa.

Álgebra nos AIEF

Conforme a BNCC (Brasil, 2018), a finalidade da álgebra nos AIEF é o desenvolvimento do pensamento algébrico, finalidade esta já defendida por autores como Ponte et al. (2009). A BNCC revela afinidade a uma concepção atual da álgebra, compreendida como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007).

De acordo com Kaput (1999), o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolaridade deve-se dar integrando-o com outros temas matemáticos, isto é, mediante uma algebrização do currículo. Um desenvolvimento onde a generalização desempenha um papel central, compreendida como "[...] uma afirmação que descreve uma verdade geral sobre um conjunto de dados matemáticos" (Blanton, 2008, p. 3). Ainda, há que se expressar simbolicamente as generalizações, isto é, "traduzi-las em alguma linguagem, seja em uma linguagem formal ou, para crianças pequenas, em entonação e gesto" (Kaput, 1999, p. 6). Nessa ótica, o pensamento algébrico é compreendido como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade (Blanton & Kaput, 2005, p. 413).

Dentre as três vertentes propostas por Kaput (2008) para trabalhar generalização e simbolismo no currículo da matemática escolar, nomeadamente, aritmética generalizada, pensamento funcional e modelagem, a BNCC dá ênfase à aritmética generalizada e ao pensamento funcional (Brasil, 2018). Em virtude da pesquisa que aqui reportamos, destaca-se o pensamento funcional, que envolve a realização de generalizações sobre dados que se relacionam (Blanton, 2008), mediante o trabalho com sequências, relações e funções (Blanton & Kaput, 2011). Mais especificamente, centra-se no trabalho com sequências, que envolve construção e generalização de sequências repetitivas. Na sequência repetitiva há uma unidade visível que se repete ciclicamente (Threlfall, 1999), a unidade de repetição, o menor subconjunto de termos da sequência que a pode gerar (Liljedahl, 2004). A identificação e compreensão da unidade que se repete possibilita continuar sua representação, procurar regularidades e estabelecer generalizações, conseguindo determinar a ordem de diferentes termos da sequência (NCTM, 2000). Além disso, pode-se analisar o tipo de generalização construída, podendo ser consideradas próximas ou distantes (Stacey, 1989) bem como aritméticas ou algébricas (Radford, 2006).

Conhecimento Matemático para Ensinar

Nesta pesquisa, demarcada pela relação entre o conhecimento matemático do professor dos AIEF e o ensino que efetiva em sua sala de aula, optamos pela perspectiva do Conhecimento Matemático para Ensinar (CME), proposta por Ball et al. (2008). Concebem o conceito de CME, tendo foco no ensino, definindo-o como o conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensinar matemática.

Ball et al. (2008) categorizaram os diferentes tipos de conhecimento e de habilidade matemática envolvidos no ensino de Matemática em dois domínios: a) o conhecimento específico do conteúdo, composto pelos conhecimentos comum, especializado e horizontal do conteúdo; b) o conhecimento pedagógico do conteúdo, constituído pelo conhecimento do conteúdo em relação aos estudantes, ao ensino e ao currículo. Destas categorias, destaca-se o conhecimento especializado do conteúdo, compreendido como um conhecimento matemático exclusivo para o ensino e que vai além daquele ensinado aos alunos.

O desenvolvimento do CME de professores em serviço alinha-se à abordagem proposta por Ball e Cohen (1999). Esses autores propuseram um currículo de desenvolvimento profissional formativo baseado na prática, que envolve as relações entre desenvolvimento profissional e melhoria do ensino e da aprendizagem, com atividades e tarefas de ensino reais, envolvidas no trabalho com a matemática, que denominam tarefas de aprendizagem profissional – as TAP (do original, em inglês: *professional learning tasks*).

Nesta perspectiva, uma formação docente em CoP para desenvolver o CME mediatizado pelas TAP, implica em elaborar e organizar tarefas "para atingir um objetivo específico para a aprendizagem de professores [...] levando em consideração o conhecimento prévio e as experiências" dos professores (Ribeiro, 2017, p. 35).

Contexto formativo e metodologia

A pesquisa em curso, sobre os conhecimentos matemáticos e didáticos aprendidos e mobilizados por professores para ensinar álgebra nos AIEF, é de natureza qualitativa de cunho interpretativo (Creswell, 2007). Teve como campo de pesquisa um grupo de professores dos AIEF da rede municipal de ensino, no interior do Estado de Mato Grosso, mediante a realização de um programa de formação continuada. Eram 21 professores licenciados em Pedagogia, que ensinavam matemática a crianças de 6 a 10 anos. Eles foram selecionados pelos diretores das escolas onde trabalhavam, com a responsabilidade de, posteriormente, compartilhar seus aprendizados com os demais professores das escolas.

Ocorreram 9 encontros, de março a maio e 2021, em um total de 55 horas formativas. Adotamos uma configuração híbrida, com três encontros presenciais e os demais online, incluindo atividades remotas. Considerando o fato desses encontros terem sido online, os professores recebiam previamente as tarefas, bem como os textos, para poderem imprimir (se quisessem) e realizar as leituras. Nos encontros, as tarefas eram resolvidas, socializadas e discutidas. Nosso intento era criar situações que provocassem a participação dos professores, assumindo um papel ativo em seu processo formativo, construindo e sendo responsável pela sua trajetória de aprendizagem e corresponsável pela aprendizagem do outro.

Quanto à organização pedagógica da formação, sob o aporte teórico do CME, as intervenções pedagógicas estiveram centradas na exploração de TAP, com resoluções e discussões. As TAP incluíram resolução de tarefas de ensino desenhadas para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos dos AIEF, estudos de vivências de sala de aula (relatos de professores sobre sua prática de ensino e seus alunos; excertos de artigos e ou pesquisas; resoluções de alunos) e exploração do conhecimento matemático e pedagógico dos professores. Denominamos de tarefas de ensino as tarefas matemáticas elaboradas a fim de possibilitar a exploração e a reflexão acerca do seu caráter potencialmente algébrico e de como elas poderiam ser aplicadas pelos professores em suas turmas, com as devidas adequações (Blanton & Kaput, 2005).

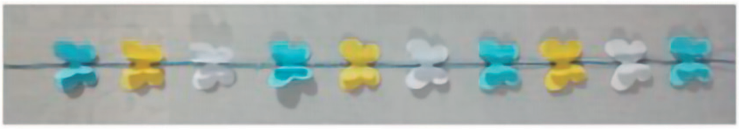
Nesta comunicação consideramos os dados produzidos quando trabalhamos com *sequências repetitivas*, mediante resolução e discussão de duas tarefas de ensino da TAP 1 (T1 e T2), no decurso do segundo e terceiro encontros, respetivamente. Para tanto, utilizamos os seguintes instrumentos: observação direta e anotações do diário de campo da pesquisadora-formadora, transcrições das gravações e do chat dos encontros, e as produções escritas dos professores. Dos dados, selecionamos diálogos e excertos de falas (episódios da prática compartilhada da comunidade) que dão indícios do início da construção do conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico nos AIEF por parte dos professores, na vertente do pensamento funcional. Adotamos nomes fictícios para manter o sigilo dos professores.

Por fim, para proceder a análise dos dados, adotamos a Análise Textual Discursiva (Moraes & Galiazzi, 2016), com a identificação de três unidades de significado (indicadores) para a categoria conhecimento especializado do conteúdo, designadamente: identificação da unidade de repetição; estratégias de exploração das sequências repetitivas; e, expressão da lei de formação.

Início da construção do conhecimento especializado para o ensino de álgebra

As T1 e T2 eram tarefas matemáticas desenhadas para crianças dos AIEF que possibilitavam explorar regularidades e construir generalizações com sequências repetitivas pictóricas, formadas por pendentes de borboletas coloridas. Na T1, inicialmente, havia o diálogo interdisciplinar com Arte, Língua Portuguesa e Ciências da Natureza, com recursos audiovisuais. Depois, então, as explorações matemáticas, contando com o recurso visual do pendente (figura 1). Na T2, havia o desafio de criar seu próprio pendente de borboletas, conforme orientações dadas e atendendo aos seguintes critérios: construir um pendente utilizando apenas duas cores de borboletas, até completar 11 borboletas; formar uma sequência com as borboletas, organizando-as como preferir. Desse modo, pensando no contexto infantil, buscamos incorporar experiências concretas, táteis na aprendizagem (Blanton & Kaput, 2011), com recurso visual e manipulável; e, a partir das criações, explorar regularidades e construir generalizações.

No trabalho com as sequências repetitivas de borboletas, utilizamo-nos de questões exploratórias (figuras 1 e 2), cuja ideia subjacente é que se começasse fazendo uma generalização próxima até chegar em uma generalização distante e algébrica. Ainda, como propõem Camargo et al. (2018), o lúdico e a imaginação foram considerados no planejamento das tarefas, por isso, na T1 utilizamos a palavra *segredo* e não *motivo* para aguçar a curiosidade e o imaginário infantil. Mas, no cuidado em ensinar a linguagem matemática adequada, nas tarefas seguintes, fomos incorporando e substituindo essa palavra do universo infantil por *motivo* e, depois, *padrão/regularidade* (identificação do significado, consoante a Vale & Pimentel, 2013).



Observe atentamente o pendente de borboletas para responder as questões abaixo.

a) Se você fosse continuar o pendente, qual seria a cor da próxima borboleta? Como sabe disso?
b) Qual é o segredo dessa sequência?
c) Qual seria a cor da 15ª borboleta? Como sabe disso?
d) Qual seria a cor da borboleta na 26ª posição? Como sabe disso?
e) Se continuasse essa sequência para o lado esquerdo (para cima), qual seria seria a cor da próxima borboleta? Como sabe disso?
f)Paula é uma aluna do 5º ano. Ela disse que a cor da borboleta tem relação com a tabuada do 3. Você concorda com ela? Por quê?
g) Como você pode fazer para saber a cor de uma borboleta em uma posição qualquer?

Figura 1. Exploração do pendende de borboletas da T1-TAP 1

Observando o pendente que você construiu, responda:

h) Se você fosse continuar esse pendente, qual seria a cor da próxima borboleta? Como você sabe disso?
i) Qual é o segredo/motivo da sequência que você construiu?
j) Qual seria a cor da 20ª borboleta? Como você sabe disso?
k) Qual seria a cor da borboleta na 100ª posição? Como sabe disso?
l) Você consegue escrever uma regra que possa representar a cor da borboleta em uma posição qualquer (indefinida) da sequência?

Figura 2. Exploração dos pendendes de borboletas da T2-TAP 1

A seguir, analisamos os dados produzidos acerca do conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico que começou a ser revelado pelos professores, a partir dos indicadores, designadamente: identificação da unidade de repetição; estratégias de exploração das sequências repetitivas; e, expressão da lei de formação.

Identificação da unidade de repetição

Com base em Ponte et al. (2009), as questões *a* e *h* provocavam a continuar a sequência, mediante a representação do termo imediatamente a seguir aos dados, permitindo o reconhecimento visual, quase que intuitivo (qual o elemento seguinte, considerando a unidade que se repete?). Já as questões *b* e *i* dependiam da identificação da unidade de repetição. Identificação que deve ser promovida em sala de aula, pois a percepção e a compreensão da unidade de repetição é que permite determinar a ordem de diferentes termos da sequência (NCTM, 2000), permite sua continuação e sua generalização (Threlfall, 1999).

Na sequência repetitiva da T1 a unidade de repetição era composta por três elementos (borboletas), de três cores, na sequinte disposição: azul-amarelo-branco. O padrão era do tipo ABCABC. Assim, o primeiro termo da unidade era uma borboleta azul, o segundo termo uma borboleta amarela e o terceiro termo uma borboleta branca. Os professores, logo que observaram o pendente, identificaram que era uma sequência de cores que se repetiam, indicando que a próxima borboleta seria amarela. Mas as justificativas sobre como sabiam que era a borboleta amarela ficaram centradas em suas percepções visuais, como expressaram estas professoras: "porque é uma sequência" (Orquídea Branca); "é uma sequência de cores que se repetem" (Rubi); "eu coloquei também que a figura mostra que logo depois do azul vem o amarelo" (Esmeralda). Até esse momento, os professores visualmente identificaram as cores, mas sem conseguir descrever a unidade que compunha a sequência, ratificando a afirmação de Blanton e Kaput (2005) de que a maioria dos professores que ensinam crianças tem pouca experiência com os tipos de pensamento algébrico, sendo frequentemente meros produtos da formação tradicional que receberam.

Somente quando, sob nossa intervenção e na interação na comunidade, discutiram e refletiram sobre as regularidades que percebiam, é que conseguiram identificar a unidade de repetição, como depois comunicaram alguns professores: "sequência lógica de 3 cores, seguir sempre azul-amarela-branca" (Esmeralda), "3 borboletas e 3 cores, não é?" (Pérola); "eu coloquei que ela é feita de 3 em 3" (Rubi); "o primeiro trio, na mesma ordem de cores, sempre se repete" (Veio); "é a ordem das cores e por serem 3 cores, então tem aquela sequência e sempre é pelo número 3" (Orquídea Branca); "eu coloquei que é a sequência de 3 cores intercaladas" (Lua).

Na exploração da T2, todos os professores identificaram com facilidade a unidade que se repetia em suas sequências, já denominando-as de sequências repetitivas. Talvez, pelo fato de todos terem criado pendentes no padrão ABAB, como explicitado em linguagem natural pela professora Esmeralda: "as formas, intercalam de um a um, não tem assim: duas amarelas e uma azul, duas amarelas e uma azul; só intercala de um a um". Ao registrarem o padrão das sequências que construíram, escreveram a partir das cores que utilizaram, como por exemplo: "pelo fato que eu tenho apenas duas cores, então, se a primeira é amarela, a segunda sempre será azul" (Orquídea Branca); "eu utilizei essa referência de intercalar, porque a minha era branca e preta, então se uma é branca a outra é preta e vice-versa" (Toco).

Além disso, diferentemente da T1, já na questão *h* os professores conseguiram estabelecer uma relação de natureza geral que permitiria descrever a regularidade de suas sequências, como: "eu fui no ímpar, par, ímpar, par, terminou com ímpar seria branca e o par era azul...

a décima segunda seria azul" (Veio); "sequência observando a ordem, se ocupa posição ímpar ou par" (Pérola); "não, eu dividi por dois, se fosse exato era amarelo, se sobrasse algum era azul" (Maia); "como são duas borboletas, também posso usar os múltiplos de 2" (Violeta).

Estratégias de exploração das sequências repetitivas

Nas questões *c*, *d*, *e*, *j* e *k*, os professores buscaram estratégias de resolução para determinarem elementos em diferentes posições. Na T1, nossa intervenção pedagógica foi direcionada a suscitar reflexões sobre a unidade de repetição da sequência e que relações podiam fazer, quais caminhos poderiam explorar a partir disso. Nessa busca, os professores foram percebendo a relação entre o termo e sua ordem na sequência, bem como, utilizaram-se dessa relação para indicar o termo de uma ordem.

Não obstante, ao explorarmos a T2, vários professores trouxeram elementos do que experienciaram na discussão da T1, de tal forma que buscaram estratégias gerais de exploração desde o início, já na resolução da questão *h*, evidenciando generalização distante, ou seja, resolvendo a questão a partir da construção e uso de uma regra geral (Stacey, 1989). Para tanto, utilizaram-se de duas estratégias de resolução: a) associação com números ímpares e pares, relacionando os termos e suas posições na sequência (Ponte et al., 2009); b) a partir do objeto inteiro, explorando multiplicações e divisões por dois (Stacey, 1989). Porém, não chegamos a explorar explicitamente os critérios de divisibilidade (nem do 2 nem do 3), por não serem objeto de conhecimento dos AIEF.

Verificamos que, no início da resolução e discussão da T1, os professores recorreram a estratégias locais, ou seja, estratégias recursivas, mediante desenho e contagem sucessiva dos termos ou identificando a diferença constante (as variações de cores e sua ordenação), ou seja, relacionando cada termo da sequência com o anterior (Ponte et al., 2009). Por isso mesmo, podemos inferir que realizaram generalizações próximas (Stacey, 1989), que dependiam da observação de termos anteriores. Todavia, na medida que as questões se complexificavam, exigindo informações sobre termos mais distantes nas sequências, precisaram encontrar outras estratégias, nomeadamente: por multiplicação, por divisão e pela associação com ímpar e par.

Já a questão *f* propunha refletir sobre uma relação de natureza geral que poderia descrever toda a regularidade da sequência, com a estratégia do objeto inteiro (Ponte at al., 2009; Stacey, 1989), ou seja, utilizando-se dos múltiplos do terceiro termo da sequência (múltiplos de 3) para determinar termos distantes/ausentes. Gerou longa discussão na comunidade, pois alguns professores não percebiam nem reconheciam essa possível relação. Tal situação parece revelar que esse professores estavam generalizando aritmeticamente, pois, segundo Radford (2006), é característico desse tipo de generalização conseguir descobrir uma regularidade nos termos dados de uma sequência, continuá-la ou identificar se um termo pertence à sequência ou não, mas sem elaborar uma regra geral.

Expressão da lei de formação

Por fim, as alíneas *g* e *l* questionavam sobre quais as relações que os professores encontraram entre os termos da sequência e a sua ordem, tendo por base o comprimento da unidade que se repetia, relações essas que lhes permitiriam generalizar algebricamente. Os professores vieram num crescente de aprendizados, pois da participação nas discussões e reflexões, conseguiram construir e expressar em linguagem natural as leis de formação das sequências repetitivas, cada um a seu modo.

Na T1, as construções das leis de formação focalizaram nos múltiplos de 3. Algumas expressões da lei comunicadas por algumas professoras foram: "é só dividir… se sobrou, resta o número que é a borboleta, se é a primeira ou se é a segunda; sem resto, é a terceira" (Azaleia); "pega o número e divide por 3; se for completo, está *ok*, é branca; senão, traz 2 ou traz 1 para trás" (Maia); "achando os múltiplos de 3: toda vez que o resto for 2, a minha borboleta vai ser amarela, sempre que o resto da divisão, em uma sequência com 3 elementos, for resto 1, borboleta azul; e, se a conta der inteira, quer dizer, sendo que eu consigo resolver, então eu estou exatamente encontrando um múltiplo de 3, então é borboleta branca" (Esmeralda).

Na T2, os professores identificaram facilmente a unidade que se repetiu e estabeleceram duas relações entre os termos e as suas posições na sequência. Uma relação foi de associação da posição, enquanto representação numérica da sequência, com números ímpares e pares; a outra relação, com os múltiplos de 2. Vejamos alguns registros escritos dos professores: "os números pares sempre serão a segunda cor" (Orquídea Branca); "na minha sequência, a borboleta branca está nos números pares (0, 2, 4, 6 e 8) e a borboleta preta está nos números ímpares (1, 3, 5, 7 e 9)" (Pérola); "borboletas ocupando posições pares devem ser amarelas, ocupando posições ímpares devem ser azuis" (Esmeralda); "o segundo termo, a segunda borboleta (amarela) representa um múltiplo de 2, toda divisão exata será borboleta amarela, toda divisão com resto, será borboleta verde" (Iasc), "múltiplos de dois na segunda borboleta, não múltiplo, na primeira" (Azaleia). Outro professor compartilhou:

> Eu coloquei assim: os números terminados em um, três, cinco, sete e nove na minha sequência aqui são vermelhas porque são ímpares e os números terminados em zero, dois, quatro, seis e oito são azuis porque são pares. Então, 2489 vai ser vermelha, 3486 vai ser azul. (Professor Veio, 3º Encontro, 2021)

Destarte, a partir de Radforf (2006), ponderamos que, no decurso do trabalho com as sequências repetitivas, esses professores chegaram à generalização algébrica, isto é, a partir da identificação de uma regularidade local, generalizaram a todos os termos da sequência, conseguindo encontrar elementos da sequência que estão para além do campo perceptivo.

Conclusão

Na formação docente realizada, consoante com outras pesquisas afins (e.g., Araújo, 2008; Baldini et al., 2017; Ferreira et al., 2017; Freire, 2011; Vale & Pimentel, 2013), consideramos que os professores foram se assumindo aprendizes, nas resoluções e discussões das tarefas, nas reflexões, nas partilhas de suas ideias matemáticas e pedagógicas. De um lado, podemos pensar que, similarmente ao processo de aprendizagem dos alunos para desenvolver o pensamento algébrico, explicitado em inúmeras pesquisas (e.g., Blanton & Kaput, 2005, 2011; Radford, 2006; Stacey, 1989), os professores trilharam suas aprendizagens, aprendendo a *ver* uma sequência repetitiva: identificar a unidade de repetição e os termos que a compõem, adotar diferentes estratégias de exploração e expressar leis de formação. Por outro lado, há uma especificidade nessa aprendizagem mediatizada por uma TAP, ela é profissional, voltada para a melhoria de sua prática docente, para o ensino às crianças (Ball & Cohen, 1999). Por isso, também refletiram e discutiram sobre como ensinar a seus alunos.

Nesta ótica, compreendemos que os aprendizados revelados pelos professores no trabalho com sequências repetitivas, partindo de generalizações próximas e aritméticas, mediante uso de estratégias recursivas, e avançando para estratégias que possibilitavam obter qualquer termo da sequência, chegando a generalizações distantes e algébricas, são evidências que nos permitem considerar que os professores começaram a construir o conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico, na dimensão do pensamento funcional.

Por isso, consideramos que nossa pesquisa traz indícios da viabilidade e relevância de uma formação docente voltada ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos para ensinar sob um viés singular - em um contexto formativo de CoP, isto é, de aprendizagem com o outro, na e da prática pela interação, diálogo e partilha, mediatizada pela exploração de TAP.

Referências bibliográficas

Araújo, E. A. (2008). Ensino de álgebra e formação de professores. *Educação Matemática Pesquisa*, *10*(2), 331–346. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1740

Baldini, L. A. F., Oliveira, J. C. R., & Cyrino, M. C. C. T. (2017). Comunidade de Prática de formação de professores que ensinam matemática: constituição, energia e cultivo. *Revista de Educação Matemática*, *14*(16), 55–66. https://doi.org/10.25090/remat25269062v14n162017p55a66

Ball, D., & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). Jossey Bass.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer.

Brasil (2018). *Base Nacional Curricular Comum: educação é a base.* MEC, Brasília. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_ site.pdf

Camargo, G. G., Bagne, J., Bolognani, M. S. F., & Coletti, S. (2018). Desenvolvimento do pensamento algébrico com crianças: possibilidades de práticas na educação infantil. In A. M. Nacarato & I. A. Custódio (Orgs.), *Desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática* (pp. 25-70). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Creswell, J. W. (2007). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. (2ª ed. Trad. Luciana de Oliveira da Rocha). Artmed.

Ferreira, M., Ribeiro, C., & Ribeiro, A. (2016). Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. *Educação e Fronteiras*, *6*(17), 34–47. http://ojs.ufgd.edu.br/index.php/educacao/article/view/5785/2948

Ferreira, M., Ribeiro, C., & Ribeiro, A. (2017). Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké*, *25*(3), 496–514. https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648585

Freire, R. S. (2011). *Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental*. [Tese de Doutoramento]. Universidade Federal do Ceará, Brasil. http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/3304

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.). *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 133-155). Routledge.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Taylor & Francis.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5–26. https://doi.org/10.48489/quadrante.22814

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics, 26*(3), 24–42.

Luna, A., & Souza, C. (2013). Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(4), 817–835. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17747

Moraes, R., & Galiazzi, M. (2016). *Análise textual discursiva*. (3ª ed.). Editora Unijuí.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Ministério da Educação, Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), Portugal. http://hdl.handle.net/10451/7105

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). PME.

Ribeiro, A. J. (2017). Caminhos e percalços de um projeto de pesquisa desenvolvido por um grupo trabalhando em colaboração e em cooperação. In A. J. Ribeiro, F. J. B. Bezerra, & V. M. S. Gomes (Orgs.), *Formação de professores que ensinam Matemática e a Álgebra da Educação Básica: um projeto desenvolvido na Universidade Federal do ABC no âmbito do Observatório da Educação* (pp. 11-40). Edições Leitura Crítica.

Ribeiro, C. M. (2011). A importância do conhecimento do conteúdo matemático na prática letiva de uma professora: discutindo um modelo de análise. *Zetetiké*, *19*(35), 71–102. https://doi.org/10.20396/zet.v19i35.8646646

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147–164.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Cassell.

Vale, I., & Pimentel, T. (2013). O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. *Da Investigação às Práticas*, *3*(2), 98–124.

Estudo de aula: Uma oportunidade de desenvolvimento profissional em tempos de reforma curricular

Lesson Study: An opportunity for professional development in times of curricular reform

Alexandra Souza[1], *Margarida Rodrigues*[2], *João Pedro da Ponte*[3]

[1]UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, paralexandra@gmail.com

[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *O objetivo desta comunicação é discutir como a participação num estudo de aula pode promover o desenvolvimento profissional dos professores, em particular do seu conhecimento didático e que aspetos desse conhecimento são desenvolvidos e, por outro lado, compreender qual poderá ser o seu contributo para este desenvolvimento em tempos de reforma curricular. Prestamos particular atenção à fase de planeamento da aula de investigação e à reflexão pós-aula. A investigação insere-se no paradigma interpretativo e segue uma abordagem qualitativa. Os participantes são cinco professores do 1.º ciclo e a primeira autora, que dinamizou o estudo de aula. Os dados foram recolhidos por observação participante, com a elaboração de um diário de bordo, recolha documental e gravação áudio das sessões de trabalho e vídeo da aula observada. Os resultados mostram que estes professores, ao participarem neste estudo de aula, desenvolveram trabalho colaborativo sobre: a seleção de tarefas, a planificação de aulas, a condução de aulas numa abordagem exploratória e a reflexão sobre todo o processo com foco nas aprendizagens dos alunos. Ao fazê-lo, mobilizaram o seu conhecimento didático para tomar decisões sobre as experiências de aprendizagem a propor, pensadas à luz do novo referencial. Este estudo sugere que, em tempos de reforma curricular, o estudo de aula pode contribuir para a introdução de novas práticas letivas e promover o desenvolvimento profissional dos docentes envolvidos.*

Palavras-chave: Estudo de aula; Desenvolvimento profissional; Conhecimento didático; Gestão curricular.

Abstract. *The aim of this communication is to discuss how participation in a lesson study can improve the professional development of teachers, in particular their didactic knowledge and what aspects of this knowledge are developed and understand its contribution to teachers' professional development in a curricu-*

lum reform. We pay particular attention to the planning phase of the research lesson and post-lesson reflection. The investigation is follows the interpretative paradigm and a qualitative approach. The participants are five teachers from the 1st cycle and the first author, who facilitated the lesson study. Data was collected through participant observation by the first author, with the preparation of a logbook, document collection and audio recording of the work sessions and video of the research lesson. The results show that these teachers, when participating in this lesson study, developed collaborative work on: task selection, lesson planning, conducting classes in an exploratory approach and reflecting on the whole process focusing on students' learning. In doing so, they mobilized their didactic knowledge to make decisions about the learning experiences to propose, which were thought of in the light of the new curriculum framework. This study suggests that in times of curricular reform lesson studies can encourage the introduction of new teaching practices and promote the professional development of the teachers involved.

Keywords: Lesson study; Professional development; Didactic knowledge; Curriculum management.

Introdução

Em 2021 o governo revogou os programas e metas curriculares da disciplina de Matemática (MEC, 2013) e aprovou novas Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021), que são o referencial curricular das várias dimensões do desenvolvimento curricular para esta disciplina e que entrarão em vigor de forma faseada a partir do ano letivo de 2022/2023.

Assim, no atual contexto educativo, o papel do professor enquanto gestor do currículo torna-se particularmente exigente. Isso resulta, por um lado, da necessidade de recuperação das aprendizagens dos alunos e, por outro lado, de se ter de focar no que é efetivamente relevante para o ensino e aprendizagem da Matemática. Resulta, ainda, da reforma curricular em curso, com o consequente desajuste dos manuais escolares, que são fortes mediadores do currículo (Ponte, 2005).

Face a estes desafios que se colocam aos professores, mas também à escola, consideramos que o estudo de aula, enquanto processo formativo de natureza colaborativa, pode ser uma oportunidade para promover uma reflexão em torno dos métodos de ensino e dos ambientes de aprendizagem. O estudo de aula pode também criar condições para a realização de mudanças refletidas nas práticas de sala de aula, nomeadamente implementando práticas de ensino exploratório promotoras das aprendizagens dos alunos, que valorizem a participação ativa destes numa perspetiva dialógica da construção do conhecimento, de modo a propiciar aprendizagens com significado para todos e em sintonia com as novas orientações curriculares.

Esta comunicação decorre de um projeto de investigação de doutoramento em curso. Um dos seus principais objetivos é compreender como é que o estudo de aula promove o desenvolvimento do conhecimento didático da Matemática dos professores envolvidos. Nesta comunicação focamo-nos nas decisões dos professores na etapa de preparação da aula de investigação e nas que decorreram da reflexão pós-aula de um ciclo de estudo de aula, cujo objetivo era desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas a partir dos seus conhecimentos matemáticos. Este artigo visa discutir como o estudo de aula pode promover o desenvolvimento profissional dos professores, em particular:

1. Como a sua participação pode potenciar o desenvolvimento do seu conhecimento didático e que aspetos desse conhecimento são desenvolvidos?
2. Qual poderá ser a sua contribuição num período de reforma curricular?

Estudo de Aula

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores, de natureza colaborativa e reflexiva, assente na prática letiva e com foco nas aprendizagens dos alunos. O processo parte de uma questão relevante relacionada com as aprendizagens dos alunos, que os professores identificam e querem melhorar. Para o efeito, os professores trabalham colaborativamente na preparação de uma aula de investigação com o objetivo de melhorar a qualidade da aprendizagem dos alunos. A aula é lecionada por um dos professores e observada pelos restantes que refletem sobre a sua eficácia para a questão identificada. Decorre em várias etapas interrelacionadas – planificação, lecionação/observação e reflexão sobre a aula de investigação – que se constituem num ciclo, podendo haver um único ou vários (Lewis et al., 2009; Murata, 2011). Cada ciclo oferece oportunidades para o aprofundamento de questões relevantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de aprendizagem dos alunos e à dinâmica da sala de aula (Ponte et al., 2016).

Sendo um processo com origem no Japão, onde tem uma forte tradição, o estudo de aula encontra-se disseminado por vários países incluindo Portugal. Para o efeito, e dado que o processo de ensino-aprendizagem é eminentemente cultural, têm sido estudadas as adaptações necessárias para a sua adequação aos vários contextos e cultura dos participantes (Ponte et al., 2016; Takahashi & McDougal, 2016), com a preocupação de manter a sua essência. Certas adaptações envolvem um processo de reformulação da aula de investigação que depois é lecionada por outro professor a outros alunos (Murata, 2011). Alguns estudos realizados em Portugal incluem uma fase de seguimento depois da aula de investigação, procurando pôr em prática em novas aulas as aprendizagens profissionais adquiridas (Ponte et al., 2016).

Desenvolvimento do conhecimento didático através do estudo de aula

A orientação para a prática letiva, fomentada pelo estudo de aula, acaba por colocar em evidência um dos aspetos do conhecimento profissional do professor, que segundo Ponte e Oliveira (2002) pode ser designado por conhecimento didático e inclui quatro vertentes: o conhecimento da Matemática, o conhecimento do currículo, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento da prática letiva. Na perspetiva destes autores, a vertente do conhecimento da Matemática abarca o conhecimento dos conceitos e procedimentos matemáticos, das representações desses conceitos e as conexões internas (entre os diversos tópicos da Matemática) e externas (com outras disciplinas e áreas do conhecimento). O conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, envolve conhecer os seus alunos como pessoas e o modo como aprendem. O conhecimento do currículo é determinante na tomada de decisões sobre a forma de orientar o processo de ensino-aprendizagem tendo em conta o contexto e as características da turma e deve acompanhar a evolução das perspetivas curriculares. O conhecimento da prática letiva, considerado o âmago do conhecimento didático, abarca todos os aspetos que respeitam à condução das aulas de Matemática, desde as planificações à criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor (Ponte & Oliveira, 2002).

Na organização do seu trabalho os professores usam o seu conhecimento profissional para tomar decisões sobre as experiências de aprendizagem a propor aos alunos, considerando as orientações curriculares, o contexto, as características destes e as suas experiências prévias. São estas ações que o professor desenvolve e em que mobiliza várias dimensões do seu conhecimento profissional, que correspondem ao modo como faz a gestão do currículo. Assim, enquanto componente fundamental do processo de ensino, a gestão curricular compreende um conjunto de ações intencionais que se materializam na planificação da prática letiva, nos seus diferentes níveis, para um dado horizonte temporal (Ponte, 2005) e que envolvem o conhecimento dos seus alunos e dos seus processos de aprendizagem, o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do currículo, a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação.

Tendo sido revogado o anterior programa (MEC, 2013) e homologado um novo programa de Matemática, denominado *Aprendizagens Essenciais de Matemática* (Canavarro et al., 2021), está em curso uma reforma que introduz modificações curriculares significativas, sendo necessário que os professores se apropriem destas alterações para adequar as suas práticas. Esta reforma não é uma simples reorganização de conteúdos de um ano para outro, nem uma mudança em que se procura substituir um método de ensino por outro. Estas *Aprendizagens Essenciais de Matemática* assentam em princípios basilares com "implicações que se refletem na definição dos objetivos e conteúdos de aprendizagem, das orientações metodológicas e das orientações para a avaliação" (p. 2).

Na verdade, a filosofia subjacente ao currículo, enquanto elemento estruturante, tem consequências nos objetivos desse ensino e nas orientações metodológicas, que vão necessariamente influenciar a atuação do professor. A aprovação de um programa que perspetiva o aluno enquanto agente ativo na construção do seu conhecimento, como é o caso, tem implicações na prática letiva, nomeadamente porque preconiza um ensino em que os alunos têm um papel mais participativo, em que são chamados a realizar "uma parte importante de descoberta e construção do conhecimento" (Ponte, 2005, p. 13). Segundo Quaresma e Ponte (2017), esta abordagem exploratória adotada em muitos estudos de aula em Portugal tem muitas semelhanças com o "*structured problem solving*", usado nos estudos de aula no Japão, mas é mais ajustada à realidade portuguesa.

Em Portugal, uma aula típica com uma abordagem exploratória é estruturada em três fases: a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" pelos alunos, e a fase de "discussão e sintetização" (Canavarro et al., 2014; Stein et al., 2008). Na primeira fase, o professor apresenta uma tarefa desafiante à turma e deve assegurar que os alunos compreenderam o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. Na segunda fase, os alunos realizam trabalho autónomo sobre a tarefa, individualmente ou preferencialmente em pequenos grupos. Na fase seguinte, segue-se a apresentação e discussão coletiva das resoluções selecionadas. O professor tem de "orquestrar" a discussão, gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também fomentar a qualidade matemática das suas explicações e argumentações, de modo que possam progredir nas suas aprendizagens. A aula termina com uma sistematização das aprendizagens que resume tudo o que aconteceu de importante durante a aula e reforça os aspetos considerados fundamentais de acordo com os objetivos definidos (Canavarro et al., 2014; Stein et al., 2008).

Na perspetiva do professor, a prática do ensino exploratório representa um enorme desafio que começa com a escolha de uma tarefa desafiante, ou seja, uma tarefa capaz de promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e de fomentar o surgimento de conhecimento novo. Uma tarefa é considerada desafiante quando estimula os alunos a mobilizarem os seus conhecimentos prévios para desenvolverem um processo de resolução, fazendo uso de diferentes estratégias e representações matemáticas (Ponte, 2005). Este trabalho continua com a preparação da aula, durante a qual o professor avalia as potencialidades da tarefa, planeia a sua exploração e prepara-se para lidar com a complexidade dessa exploração em sala de aula. Atinge o seu ponto de exigência máximo no decorrer da própria aula, nomeadamente durante a discussão coletiva. Termina com uma reflexão sobre a aula. Podemos dizer que é uma prática muito exigente e complexa na qual é determinante a escolha de tarefas apropriadas, mas também o que se faz com elas (Ponte, 2005), sobretudo a exploração das suas potencialidades num ambiente promotor da comunicação, que desenvolva as capacidades dos alunos de questionar, explicar e argumentar. De certa maneira, podemos dizer que põe em evidência a vertente fundamental do conhecimento didático – conhecimento da prática letiva – considerando que envolve "tudo o que se passa antes da aula, em termos de preparação e tudo o que se passa depois, em termos de reflexão, mas o seu núcleo essencial diz respeito à condução efetiva das situações de aprendizagem" (Ponte & Oliveira, 2002, p. 10).

Metodologia de investigação

Esta investigação, em que seguimos uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), resulta da realização de um estudo de aula, numa escola do 1.º ciclo de Lisboa, no ano letivo de 2021-2022 com quatro professores que lecionam turmas do 2.º ano de escolaridade e uma professora que faz apoio a estas turmas. As sessões foram dinamizadas pela primeira autora deste artigo com o apoio dos outros dois autores. A realização desta investigação foi autorizada pela DGE e pela direção do Agrupamento e os participantes consentiram a gravação de todas as sessões. Os cinco professores que integram este estudo de aula, e a quem atribuímos pseudónimos, são considerados experientes, com 18 ou mais anos de serviço docente no 1.º ciclo e estavam motivados para participar.

Os dados apresentados neste artigo referem-se ao ciclo em que esta aula de investigação foi lecionada e foram recolhidos por observação participante com elaboração de um diário de bordo, gravação áudio das sessões de trabalho colaborativo dos professores e vídeo da aula de investigação e a transcrição das partes relevantes e recolha documental, como planificações, tarefas e resoluções dos alunos. Atendendo ao objetivo desta comunicação, a análise de dados incidiu sobre as ações dos professores nas sessões de planeamento e reflexão desta aula de investigação e procurou identificar elementos relevantes tendo em vista a implementação de práticas de ensino exploratório, bem como o desenvolvimento do seu conhecimento didático.

Ciclo de estudo de aula

"Como desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas, a partir dos seus conhecimentos matemáticos" foi a questão proposta para aprofundamento pelo grupo de participantes. Tendo em conta a sua centralidade na Matemática, considerou-se um tema pertinente e abrangente para se poder prolongar por todo o ano letivo, o que possibilitaria fazer várias aulas de investigação sobre diferentes tópicos, ou seja, mais do que um ciclo de planificação, lecionação/observação e reflexão.

Esta decisão levou a que numa fase inicial da etapa de planificação os professores procurassem aprofundar o seu conhecimento sobre a resolução de problemas e os processos de aprendizagem dos alunos, discutindo o seu conhecimento didático à luz da teoria e do conhecimento proveniente da investigação. Numa fase seguinte e já tendo identificado o tópico sobre o qual ia incidir a aula de investigação, procuraram aprofundar o seu conhecimento sobre o conteúdo e sobre as trajetórias de aprendizagem dos alunos dentro desse tópico e partilhar as suas experiências. Este trabalho de rever as orientações curriculares foi feito para cada aula de investigação de modo a reavivar aspetos matematicamente importantes do tópico escolhido, mas também para tomar consciência de eventuais alterações curriculares decorrentes da mudança em curso.

Planeamento da aula de investigação

Com o propósito de escolher uma tarefa desafiante, os professores observaram diferentes propostas, analisando as suas potencialidades para os objetivos de aprendizagem delineados para esta aula. Entre outras preocupações, as discussões para a escolha da tarefa envolveram a sua conformidade com os objetivos definidos, o seu nível de desafio e a sua adequação ao currículo. Atendendo a que os alunos tinham feito um 1.º ano atípico (decorrente das medidas impostas pela pandemia Covid-19) e que está em curso uma reorganização curricular, os professores foram igualmente sensíveis a estas questões. A aula ia ser sobre polígonos e tinha como objetivo de aprendizagem "compor figuras planas a partir de figuras dadas". Pretendia-se aferir os conhecimentos dos alunos sobre este assunto e ampliá-los, sobretudo alargar o conceito de polígono a uma maior diversidade de figuras do que aquelas que são vulgarmente apresentadas em fichas e manuais. Implicitamente, na trajetória pensada estavam também abordagens iniciais às noções de perímetro e área. Face a este propósito, os professores confrontaram o seu conhecimento sobre este assunto, partilharam experiências de ensino, colocaram dúvidas e questões e definiram o ponto que consideravam importante a que os alunos deviam chegar, partindo do que achavam que eles já sabiam e antecipando eventuais limitações, no sentido em que achavam que os alunos iam ficar muito agarrados às formas mais habituais.

Não tendo encontrado uma tarefa que correspondesse às suas expectativas, e até porque nesta fase as propostas ainda estão muito veiculadas a outro tipo de visão do currículo, optou-se por construir uma tarefa ajustada ao que se delineou. Assim, e a partir do tema de investigação definido e do tópico escolhido, por sugestão da investigadora, procurou-se que a tarefa para esta aula (figura 1) estabelecesse conexões matemáticas entre conteúdos dos temas Números e Operações (que tinham trabalhado até ao momento) e da Geometria e Medida. Pensando nos polígonos surgiu a ideia de pegar numa forma geométrica conhecida (a cruz verde - símbolo usado para identificar as farmácias), que também permitia fazer ligações à realidade e ao tema do estudo do meio Sociedade (símbolos e instituições).

Painel luminoso

Este painel luminoso da farmácia é muito antigo e precisa ser substituído por um mais económico. Para isso o farmacêutico decidiu aproveitar a cruz e:

1 – Substituir todas as lâmpadas por lâmpadas led de cor verde. Quantas vai precisar?
Explica como pensaste.

2 - Contornar a cruz com lâmpadas led iguais, mas de cor vermelha. Quantas lâmpadas vão ser necessárias?
Explica como pensaste.

3 – Imagina outro polígono formado com todas as lâmpadas led de cor vermelha. Desenha-o.

Figura 1. Proposta inicial da tarefa para a aula de investigação

A primeira questão da tarefa situava-se numa zona de conforto dos alunos e procurava ativar os seus conhecimentos prévios para resolver uma multiplicação no sentido aditivo, estimulando a sua capacidade de encontrar estratégias mais eficientes. Elisa, a este propósito, refere que "para os seus alunos, esta questão será mais um exercício", na perspetiva em que já têm um processo para a resolver (Ponte, 2005). A segunda questão procurava que os alunos progredissem por conta própria a partir da sua *zona de desenvolvimento proximal*, abrindo caminho para novas aprendizagens. Por um lado, pretendia-se que desenvolvessem estratégias para calcularem o total de lâmpadas necessário ao preenchimento da linha de fronteira do polígono referido, recorrendo à adição ou multiplicação. Por outro lado, procurava-se fazer a ponte com conhecimentos geométricos já trabalhados e potenciar a sua abrangência, nomeadamente para o conceito de perímetro, usando uma unidade de medida não convencionada. Para Maria, a dificuldade que encontra nesta questão tem a ver com a linguagem "contornar a cruz" ao que Bruna acrescenta "vão passar por cima da linha". Elisa acha que esta questão "é mais desafiante" e propõe que a cruz tenha uma malha quadriculada por trás, "para ser mais fácil e dar segurança". A terceira e última questão, aquela que se considerou o momento-chave da aula, oferecia a possibilidade de aplicarem os conhecimentos adquiridos com criatividade, ampliando-os. Implicitamente pretendia-se ativar o conhecimento prévio dos alunos sobre polígonos, e estabelecer ligações com novos conhecimentos (perímetro e área), desenvolvendo bases para que os alunos compreendessem estes novos conhecimentos. Propositadamente, os professores decidiram não fazer o diagnóstico da situação, sendo esta a questão que lhes ia dar essa informação. Para Bruna, que não lecionou a turma no ano anterior, "era importante saber o que [os alunos] tinham aprendido" para poder delinear o trabalho. A tarefa construída foi testada pelos professores e procurou-se que pensassem no papel de alunos para que eventuais fragilidades pudessem ser encontradas, a fim de introduzir melhorias (figura 2).

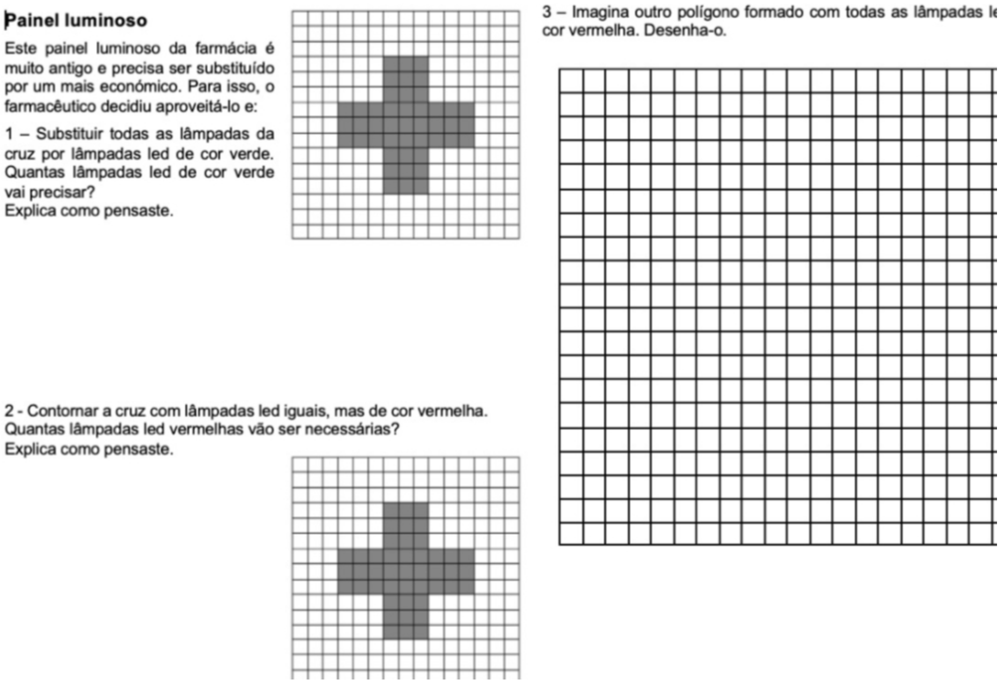


Figura 2. Proposta da tarefa usada na aula de investigação

As sugestões de Elisa, professora que ia lecionar a aula, para inserir a cruz numa malha quadriculada, distribuir as questões na folha com espaço para resposta, repetir a imagem da cruz nas duas primeiras questões e usar a orientação horizontal da folha foram todas aceites.

De seguida, o grupo elaborou um plano de aula detalhado, com base num modelo que já tinham trabalhado (Ponte et al., 2015), em que descreveram as atividades a realizar para promover um caminho entre o que consideraram o ponto de partida para o trabalho dos alunos e o que desejavam que os alunos aprendessem. Esse modelo ajudou-os a organizar aspetos gerais da aula (estratégia geral, estrutura da aula e recursos a usar) e a estruturar outros aspetos mais específicos a partir de uma previsão dos acontecimentos, nomeadamente da antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos (figura 3).

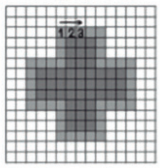
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração esperada**	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Etapa 2 **Trabalho autónomo** (Trabalho a pares) Resolução da Q1 Lâmpadas verdes	5 min	Q1 – Definir uma estratégia para calcular este produto Q1 – Identificar que cada quadrícula escura corresponde a uma lâmpada. Correspondência 1 a 1. Identificar um padrão de 5 quadrados com um conjunto de 3+3+3 (adição repetida) ou 3X3 (multiplicação). Encontrar o número de lâmpadas de cada quadrado (9) e depois multiplicar por 5. 5X9=45	Q1 – Se os alunos não o fizerem o professor pode sugerir que simplifiquem o problema, focando a atenção num quadrado só (maior). Procurar dividir o problema em etapas mais simples e resolver etapa a etapa. Depois passar ao passo seguinte. Quantos quadrados de lâmpadas temos? Quantas lâmpadas em cada quadrado?	Q1 – Mostrar compreensão que a cruz do painel tem 5 quadrados e que para cada quadrado são necessárias 9 lâmpadas. Para preencher a cruz necessitam do quíntuplo de lâmpadas de um quadrado. 5X9=45
Etapa 2 **Trabalho autónomo** (Trabalho a pares) Resolução da Q2 Lâmpadas vermelhas	5 min	Q2 – Definir uma estratégia para conseguir contar o número de lâmpadas necessário ao contorno da figura. A – Marcar no desenho e contar 1 a 1. Vão ser necessárias 40 lâmpadas led. B – Separar os "topos" dos "intervalos" e perceber que em cada "topo" precisa de 5 lâmpadas e em cada "intervalo" também. Então 8 X 5 = 40. C – Perceber que há várias simetrias na figura e conseguir calcular as lâmpadas para cada uma das partes. Ex: 4 X 10 = 40. Dificuldades possíveis: • Linguagem: contornar; • Não conseguirem encontrar uma estratégia para contar todas as quadrículas da fronteira e perderem-se na contagem.	Q2 – Se estiverem a fazer contagem 1 a 1 e se perderem, propor que assinalem o ponto de partida.  Poderá haver dificuldade nas lâmpadas que são comuns a cada parte. Sugerir que se lembrem da "estratégia do iogurte" (metade para cada).	Q2 – Mostrar compreensão que é necessário criar uma moldura//linha continua/fronteira à volta da cruz, preenchendo todas as quadrículas com lâmpadas de outra cor. Compreender que há uma regularidade na medida dos lados do polígono e é possível encontrar uma estratégia mais eficiente. Um resultado errado não deve condicionar a questão seguinte.
Etapa 2 **Trabalho autónomo** (Trabalho a pares Resolução da Q3 Polígono diferente	10 min	Q3 – Construir um polígono a partir do número de lâmpadas encontrado na questão anterior, mantendo a correspondência: 1 quadrícula/1 lâmpada. • Criar figuras muito formais; • Construir figuras com quadriculas vazias/não preenchidas no seu interior e, portanto, não contabilizadas.	Incentivar os alunos a serem criativos e originais na construção do novo polígono. Para terem uma perceção melhor da figura imaginada sugerir que preencham cada quadricula usada, evitando erros de contagem.	Q3 – Mostrar compreensão para a possibilidade de construir diferentes polígonos com o mesmo número de quadrículas (a mesma medida de área).

Figura 3. Excerto da planificação

A preparação da discussão coletiva na aula e síntese final da aula por parte do professor foram os aspetos mais difíceis de concretizar. O plano foi finalizado com a explicitação dos indicadores para a avaliação dos alunos, os quais resultam de objetivos mais específicos decorrentes do objetivo definido, cuja verificação ao longo da aula permite obter informação sobre a progressão dos alunos. Estas informações fornecem contributos para as etapas seguintes, permitem aferir a estratégia de ensino e são cruciais para fazer uma avaliação da aula.

A antecipação de respostas prováveis dos alunos, permitiu o reconhecimento de situações que configuram incorreções, de acordo com erros identificados na literatura. A previsão de possíveis dificuldades também contribuiu para que os professores se preparassem para dar dicas aos alunos quando estão bloqueados de modo a promoverem o seu raciocínio, mantendo o nível do desafio.

Nesta etapa, os professores trabalharam colaborativamente aspetos essenciais à implementação de práticas do ensino exploratório, como a escolha de tarefas desafiantes e a preparação detalhada da aula, delineando a exploração matemática que se pretendia fazer e acautelando o que era possível prever.

Reflexão pós-aula

Após a aula de investigação, o grupo discutiu o trabalho realizado pelos alunos e refletiu sobre o que observaram, em particular as produções dos alunos. Confirmaram-se algumas suposições relativamente à questão 1: soluções diversificadas que indiciaram diferentes patamares de desenvolvimento dos alunos e que permitiram, na discussão feita na aula, pôr em evidência a sua eficiência (figura 4).

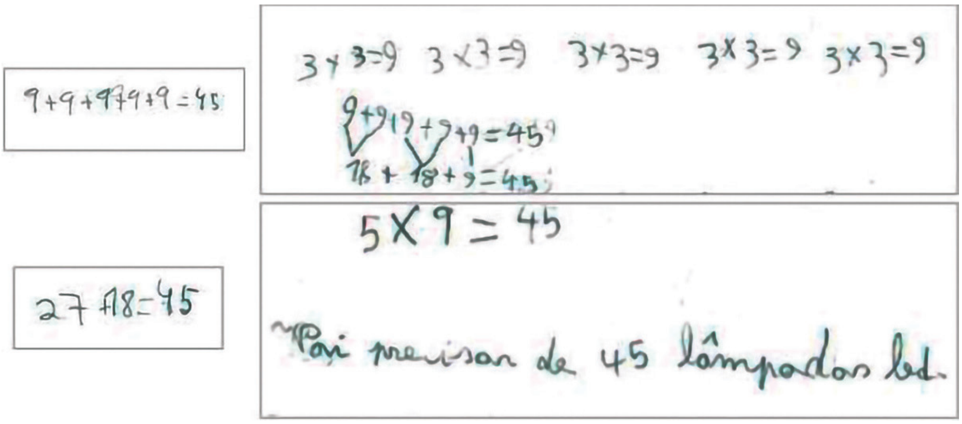


Figura 4. Resoluções dos alunos para a questão 1

As situações inesperadas relativamente às questões 2 e 3, por um lado, sugerem que os alunos conseguem fazer mais do que os professores previram (figura 5) e (figura 6), e por outro lado, apresentam soluções que evidenciam pouca consistência no conceito de polígono (figura 7), que embora previstas foram desvalorizadas por se achar que não iam acontecer. Esta situação foi alvo de reflexão mais aprofundada e considerou-se importante desencadear mecanismos de superação das fragilidades identificadas.

Ganharam então maior relevância duas hipóteses: a possibilidade de estes alunos não terem realizado as experiências necessárias para a construção de um conhecimento robusto relativo aos polígonos e a eventualidade de terem sido induzidos em erro pela associação à questão anterior da tarefa. Pensando nesta segunda hipótese, Maria sugeriu um reajuste na tarefa, alterando no enunciado da questão 3 a cor de referência para verde, remetendo os alunos para a quantidade (e figura) da questão 1, alegando que "o que nós queremos é que eles construam outro polígono, independentemente do número". Aceite a sugestão, os restantes professores seguiram o mesmo plano de aula usando a tarefa reformulada.

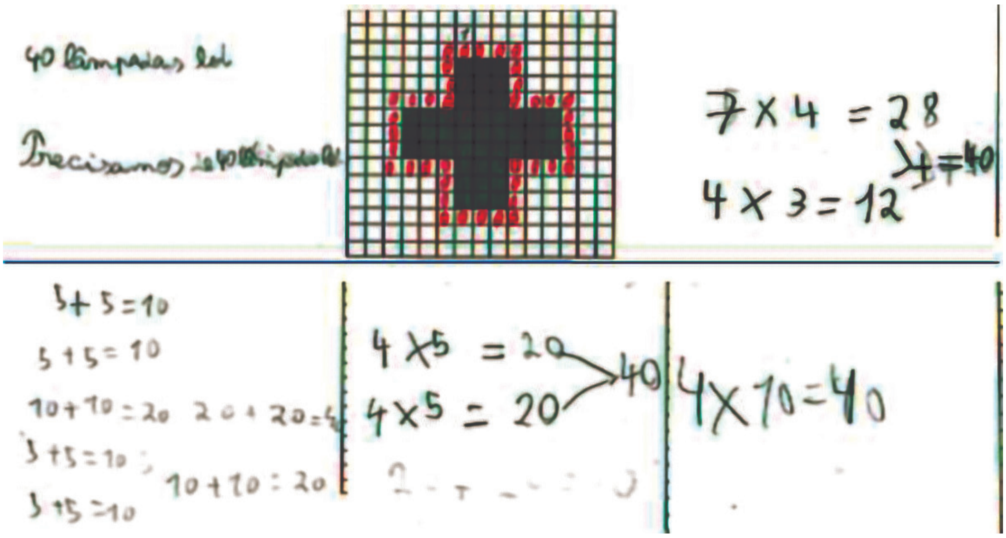


Figura 5. Resoluções de alunos para a questão 2

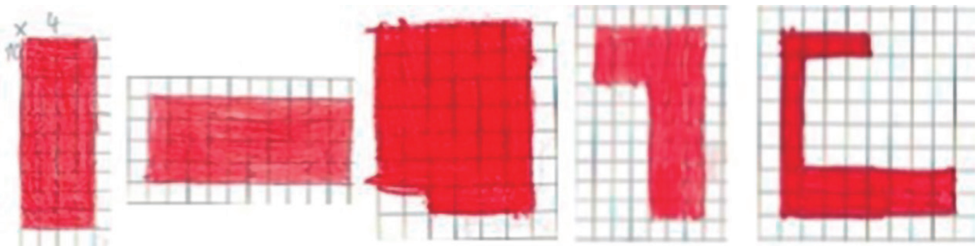


Figura 6. Resoluções de alunos para a questão 3

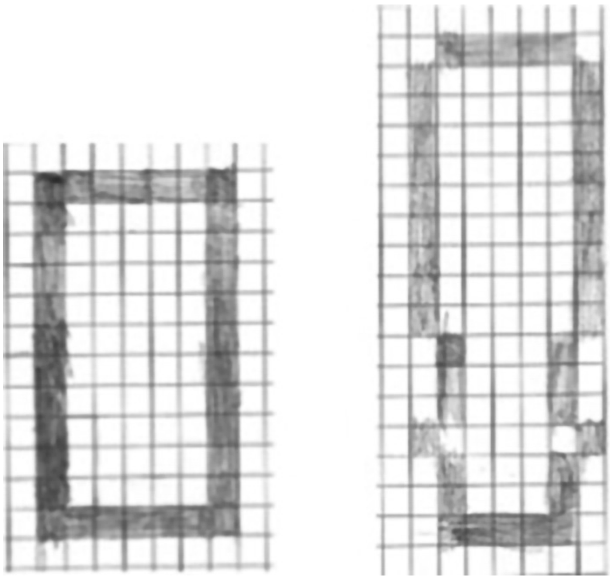


Figura 7. Outras resoluções de alunos para a questão 3

Discutindo a outra hipótese e tendo em conta que estes alunos iniciaram a sua escolaridade num período conturbado pela pandemia (suspensão de aulas presenciais e aplicação de medidas restritivas que condicionaram algumas experiências educativas, nomeadamente experiências manipulativas desejáveis), Sofia propôs que a seguir “fizessem uma aula de tetraminós”. Na sua opinião, uma experiência manipulativa de construção de figuras planas ia ajudar a “consolidar o conceito de polígono” e permitia que progredissem nos conceitos de área e perímetro, sobretudo para os alunos “perceberem que com a mesma área podem construir várias diferentes e que podem não ter o mesmo perímetro”.

Esta situação pôs em evidência a importância da reflexão sobre a aula de investigação, na medida em que deu contributos informados para as decisões a tomar para o futuro, nomeadamente sobre o trabalho que pode prosseguir a trajetória pensada e o que precisa ser retomado, criando novas possibilidades de aprendizagem para os alunos que ainda não a realizaram. O valor destas decisões sai robustecido porque resultam de uma experiência refletida de um grupo de professores e agregam os contributos dos diferentes intervenientes na reflexão.

A experimentação da tarefa e a antecipação das estratégias e dificuldades dos alunos estão intimamente relacionadas à própria aula de investigação, pois fornecem indicadores ao professor que a leciona para adequar a sua gestão da aula, mas também à discussão pós-aula, sendo muitas vezes o ponto de partida para a reflexão conjunta. Esta estrutura cíclica do estudo de aula deu consistência ao trabalho dos professores.

Considerações finais

A motivação e a disponibilidade destes professores para participar no estudo de aula foi determinante para o trabalho que se desenvolveu. Ao participarem neste estudo de aula, estes professores puderam desenvolver trabalho colaborativo sobre a seleção de tarefas, a planificação de aulas, a condução de aulas numa abordagem exploratória e a reflexão sobre todo o processo com foco nas aprendizagens dos alunos. Este foco nas aprendizagens dos alunos que o estudo de aula fomentou, implicou a mobilização do conhecimento profissional do professor para tomar decisões sobre as experiências de aprendizagem a propor, considerando as orientações curriculares, o contexto, as características dos alunos e as suas experiências prévias.

Este conhecimento profissional do professor que foi mobilizado, sendo um conhecimento de natureza prática, assente na experiência e na reflexão sobre a experiência (Ponte & Oliveira, 2002), é dinâmico e evolui com a prática de ensino. Por esta razão, e observando que neste programa (Canavarro et al., 2021) são valorizadas “práticas de ensino promotoras das aprendizagens matemáticas dos alunos que simultaneamente potenciam o alcançar dos objetivos de aprendizagem definidos” (p. 5), este estudo de aula procurou estimular a implementação de práticas de ensino exploratório que consideram os alunos no processo de aprendizagem como agentes ativos na construção do seu conhecimento. Neste sentido, todo o trabalho que os professores realizaram em torno da preparação e condução de aulas no quadro do ensino exploratório promoveu o desenvolvimento de uma compreensão aprofundada dos conteúdos e incentivou-os a compreenderem as ideias dos alunos (Murata, 2011), contribuindo para que valorizassem mais a sua participação ativa numa perspetiva dialógica da construção do conhecimento (Ponte, 2005), acabando por ter repercussões no desenvolvimento do seu conhecimento didático. Este conhecimento didático que é mobilizado na prática letiva está sempre presente na atividade de um professor nas suas quatro vertentes (Ponte & Oliveira, 2002), como um todo orgânico e integrado, ainda que possa ser chamado a intervir de diferentes formas nos diversos momentos. Como tal, todas as vertentes do conhecimento didático do professor se desenvolvem quando este participa num estudo de aula.

Deste modo, e sendo o estudo de aula um processo de desenvolvimento profissional ancorado na prática letiva e informado pelo conhecimento proveniente da investigação, consideramos que reúne as condições necessárias para ser promotor da reflexão colaborativa sobre estas alterações curriculares e apoiar os professores nesta tomada de decisões sobre a forma de orientar o processo de ensino-aprendizagem, encorajando-os a implementar práticas letivas, em sintonia com as recentes orientações curriculares.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio da bolsa com referência SFRH/BD/144428/2019.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/ aprendizagens-essenciais-de-matematica

Canavarro, A.P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 217-233). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 285-304.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning toge*ther (pp. 1-12). Springer.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J.P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145–163.

Ponte, J.P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação Matemática, 133*, 26-35.

Ponte, J.P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. *Bolema, 30*(56). https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01

Quaresma, M., & Ponte, J.P. (2017). Participar num estudo de aula: A perspetiva dos professores. *Boletim do GEPEM, 71*, 98-113.

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: Maximizing the impact of lesson study. *ZDM: Mathematics Education*, *48*, 513–526.

Práticas de um formador de professores e a criação de oportunidades de aprendizagem profissional no ensino de matemática nos anos iniciais

Practices of a teacher educator and the creation of professional learning opportunities in mathematics teaching in the early years

Miriam Criez Nobrega Ferreira [1], *João Pedro da Ponte*[2], *Alessandro Jacques Ribeiro*[3]

[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, criezmiriam@gmail.com
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt
[3]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, a.ribeiro@ie.ulisboa.pt

Resumo. *Este estudo busca investigar de que forma as práticas desenvolvidas por um formador de professores em processo de formação continuada, durante a orquestração de discussões coletivas, contribuem para a criação de oportunidades de aprendizagem profissional acerca do conhecimento da prática educativa no que se refere ao trabalho com o pensamento algébrico voltado para os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A metodologia é qualitativa-interpretativa e os dados foram recolhidos a partir de vídeos dos momentos de discussões coletivas. A análise dos dados nos permitiu levantar que é por meio da coordenação das cinco práticas do formador que a orquestração das discussões coletivas pode contribuir na criação de oportunidades de aprendizagem profissional.*

Palavras-chave: Formador de professores; Discussões coletivas; Formação de professores; Ensino de matemática.

Abstract. *This study seeks to investigate how the practices developed by a teacher educator, during the orchestration of collective discussions, contribute to the creation of professional learning opportunities about the knowledge of educational practice with regard to working with algebraic thinking aimed at teachers in the early years of Elementary School. The methodology is qualitative-interpretative and the data were collected from videos of the moments of collective discussions. The analysis of the data allowed us to find that it is through the coordination of the five practices of the teacher educator, which the orchestration of collective discussions can contribute to creating of professional learning opportunities.*

Keywords: Teacher educator; Collective discussions; Teacher education; Mathematics teaching.

Introdução

Da mesma forma que nas salas de aula da educação básica imperam relações altamente complexas (Opfer & Pedder, 2011), ambientes de formação de professores carregam estruturas e práticas sociais próprias que necessitam ser analisadas a partir de seus elementos (Lave & Wenger, 1991). Nesta comunicação damos ênfase a um destes elementos que se traduz no papel do formador de professores ao conduzir processos formativos.

Baseado em estudo anterior de Ferreira et al. (no prelo), que apresentou um modelo que associa características específicas das ações do formador na orquestração de discussões coletivas à práticas gerais, nosso estudo buscou aprofundar esta investigação ao tentar compreender de que forma as práticas desenvolvidas por um formador de professores durante a orquestração de discussões coletivas, contribuem para a criação de oportunidades de aprendizagem profissional acerca do conhecimento da prática educativa no que se refere ao trabalho com o pensamento algébrico por parte dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Dada a escassez de pesquisas que abordam o papel dos formadores de professores, sua prática e sua formação (Jaworski & Huang, 2014), o presente estudo busca contribuir tanto para uma definição do conhecimento necessário ao formador (Goodwin & Kosnik, 2013), como para a criação de princípios que orientem o design da formação de formadores.

Revisão de literatura

Oportunidades de Aprendizagem Profissional

Processos formativos tem por objetivo que os professores avancem em seus conhecimentos e consigam implementar rotinas pedagógicas que possibilitem aos alunos ricas oportunidades de aprendizagem (Gibbons & Cobb, 2017), considerando que a relação entre o conhecimento matemático dos professores para o ensino e o desempenho em matemática de seus alunos é significativo (Hill et al., 2005). Neste sentido a literatura vem se debruçando sobre aspectos que se referem a processos formativos de alta qualidade (Darling-Hammond et al., 2017; Desimone, 2009) e propondo modelos que podem contribuir para o desenho, a condução e a avaliação de processos formativos. Um exemplo é fornecido por Ribeiro e Ponte (2020), por meio do modelo "Oportunidades de Aprendizagem Profissional para Professores" (PLOT[1]) (Fig. 1).

Neste modelo são apresentados três domínios, observados a partir de um todo organicamente complexo (Ferreira et al., 2022): Papel e Ações do Formador (PAF), Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) e Interações Discursivas entre os Participantes (IDP). Este modelo parte do princípio de que a aprendizagem do professor se situa em sua práti-

[1]Do inglês Professional Learning Opportunities for Teachers (PLOT).

ca diária, na troca entre os pares e a partir de tarefas preparadas especificamente para sua formação.

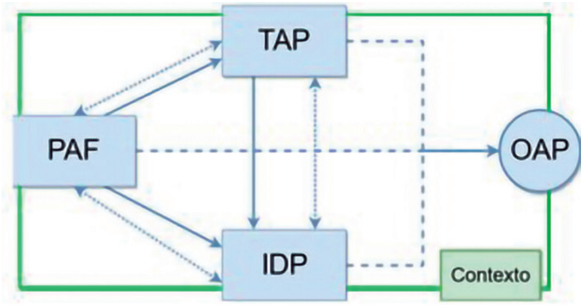


Figura 1. Modelo PLOT
Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 4).

Embora não seja muito extensa a literatura sobre as oportunidades de aprendizagem profissional a professores (Ribeiro & Ponte, 2020), podemos designar aprendizagem profissional "como um produto de atividades fornecidas externamente e incorporadas ao trabalho que aumentam o conhecimento dos professores e os ajudam a mudar sua prática de ensino de maneira a apoiar o aprendizado dos alunos" (Darling-Hammond et al., 2017, p. 2). Considerando que os processos formativos, a depender de sua estruturação e condução, representam experiências que podem resultar em aprendizagem profissional, a grande questão a ser perseguida é quais são e como estas experiências levam os professores a avançar em seus conhecimentos. Por sua vez, para Hiebert et al (1997) a compreensão é resultado de conexões e relações que o indivíduo estabelece com as práticas sociais por meio de sua participação (Lave & Wenger, 1991) em que estão inseridas mudanças nas ações, registros e falas dos professores (Watson & Mason, 2007).

Práticas e ações do formador de professores

A literatura vem apontando ações que o formador pode efetivar em processos formativos de forma a contribuir para que os professores consigam estabelecer relações entre o que já conhecem e novos conhecimentos (Elliott et al., 2009; van Es et al., 2014; Zhang et al., 2011). Neste sentido, Ferreira et al. (no prelo) formularam um modelo em que buscou-se entender quais ações o formador desenvolveu na orquestração das discussões coletivas em um processo formativo. Ao observar padrões nas ações do formador, os autores sugeriram práticas centrais para a condução destas discussões (Quadro 1) que carregam a potencialidade de ajudar os formadores a propiciar aos professores oportunidades de aprendizagem profissional.

Práticas do formador	Descrição	Ações do formador
Estabelecer uma comunidade de aprendizagem	Proporcionar um ambiente em que os professores se sintam seguros e encorajados a compartilhar suas ideias e práticas	Elogiar e incentivar
		Descontrair
		Apoiar
		Compartilhar experiências pessoais
		Convidar
Interpretar as interações dos professores e entre professores	Atribuir significado e sentido às interações dos e entre os professores	Validar
		Parafrasear (revoicing)
		Estender/Ampliar
		Solicitar esclarecimentos
		Ouvir
		Esclarecer/explicar
Estabelecer conexões	Estabelecer relações com elementos internos e externos ao processo formativo	Relacionar
		Retomar
Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos	Lançar questões desafiando os professores a avançar em seus conhecimentos	Contrapor
		Questionar
Sistematizar aprendizagens	Fazer uma síntese das discussões e conhecimentos relacionando com os objetivos da formação	Resumir os tópicos principais da discussão
		Recuperar os conhecimentos prévios

Quadro 1. Classificação das práticas e ações do formador durante discussões coletivas

Fonte: Ferreira et al. no prelo

A prática *estabelecer uma comunidade de aprendizagem* tem por objetivo principal encorajar o grupo de professores a se envolver nas discussões coletivas. Para tanto cabe ao formador favorecer a construção de um clima relacional em que além dos professores se sentirem confortáveis e seguros para expor suas ideias, possam também se sentir encorajados a falar a partir de sua própria perspectiva. A prática de *interpretar as interações dos professores e entre professores* envolve a compreensão do contexto, da fala e das atitudes dos professores, se consubstancializando em intervenções do formador, que possam criar oportunidades de aprendizagem profissional. Considerando que a aprendizagem é construída por meio do estabelecimento de relações, a prática de *estabelecer conexões* requer do formador fazer conexões tanto com elementos externos ao processo formativo como a prática diária dos professores, como com elementos da própria formação, como assuntos anteriormente discutidos. A prática de *desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos* se refere aos momentos em que os professores são confrontados e provocados em suas ideias o que resulta na reflexão e busca por argumentos sobre essas mesmas ideias. Por fim, a prática de *sistematizar aprendizagens* tem por objetivo retomar os principais temas da discussão, sintetizando os conhecimentos que se relacionam ao objetivo do encontro.

Conhecimento da prática educativa

São vários os estudos que buscam compreender o conhecimento dos professores que ensinam matemática. Entre eles estão os estudos de Ponte (2012) que divide os conhecimentos necessários à docência em quatro dimensões: (i) conhecimento da matemática para o seu ensino, (ii) conhecimento do aluno e da aprendizagem, (iii) conhecimento da prática educativa, e (iv) conhecimento do currículo.

Com foco especificamente na prática educativa, um dos conhecimentos necessários ao professor é o gerenciamento da comunicação matemática em sala de aula (Ponte et al., 2012), mais especificamente como conduzir as tarefas matemáticas. Uma das formas é por meio do ensino exploratório, que possui uma forte componente de discussão, favorecendo a argumentação matemática (Ponte et al., 2017), abordagem apropriada para o trabalho com o pensamento algébrico, sendo composta por uma organização em três etapas (Stein et al., 2008): introdução, realização e discussão. A introdução da tarefa matemática é uma parte crítica (Ponte et al., 2013), considerando que é necessário que os alunos entendam o proposto pela tarefa (aspecto cognitivo) ao mesmo tempo em que se envolvam, predispondo-os à participação (aspecto relacional) (Ponte et al., 2012). A realização envolve o trabalho em pequenos grupos em que os alunos refletem e resolvem a tarefa matemática. Na fase de discussão da tarefa os alunos apresentam suas resoluções ao grupo todo cabendo ao professor gerenciar este momento, estando atento aos objetivos que se queria atingir. Neste sentido, cabe a formação de professores, propiciar momentos em que as características da abordagem de ensino exploratório e a forma de sua operacionalização possam ser discutidos.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) uma vez que considera a prática de um formador de professores na orquestração de discussões coletivas, em um processo de formação continuada, em que participaram 14 professores que lecionavam nos 3.º, 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental de uma mesma rede de ensino em um município do estado de São Paulo, Brasil. A realização desta investigação foi autorizada pela Secretaria Municipal de Educação e os participantes consentiram com a gravação das sessões.

O processo formativo, inspirado pelo modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020) e utilizando o ensino exploratório como a abordagem de condução de todo o processo formativo e utilizando Tarefas de Aprendizagem Profissional, teve por objetivo que os professores compreendessem (i) a necessidade de trabalhar com o pensamento algébrico já anos iniciais, (ii) os conteúdos matemáticos necessários ao seu desenvolvimento, a aritmética generalizada, o pensamento funcional e as diferentes interpretações do sinal de igualdade (Hohensee, 2015) e, (iii) os conhecimentos da prática educativa objetivando sua operacionalização em sala de aula. Contou com uma carga horária de 64 horas, distribuídas em 32 horas presenciais (8 encontros semanais de 4 horas) e 32 horas de trabalho autônomo, tendo por formador a primeira autora deste artigo.

Os dados foram coletados nos momentos de discussões coletivas, gravados em vídeo a partir de duas câmeras, uma delas direcionada ao formador e a outra aos professores. As discussões foram transcritas focando os momentos em que os conhecimentos da prática educativa estavam sendo discutidos.

Buscando responder ao objetivo do presente estudo, foram observadas quais práticas do formador poderiam se relacionar com os conhecimentos da prática educativa, e de que forma esta relação (entre as práticas do formador e o conhecimento envolvido) se estabeleceu com vistas a criação de oportunidades de aprendizagem profissional. Ainda que outros conhecimentos sejam igualmente importantes ao professor que ensina matemática como conhecimento do aluno, do currículo e conhecimentos matemáticos, por uma questão de limitação de espaço estes últimos serão tema de estudos futuros. A análise dos dados teve como base as ações e práticas do formador discutidos em Ferreira et al. (no prelo), descritos no Quadro 1.

Práticas do formador para promover a criação de oportunidade de aprendizagem profissional

A seguir apresentamos episódios que representam diferentes práticas e ações do formador quando orquestrava discussões coletivas referentes a prática educativa cujo objetivo era observar, em pormenores, a fase de introdução de uma tarefa matemática. Doravante, tanto as práticas quanto as ações do formador estão escritas em itálico.

Na TAP *Analisando uma aula de matemática*, as quatro fases da abordagem de ensino exploratório foram discutidas de forma aprofundada. No que se relaciona a fase da introdução de uma tarefa matemática, o formador apresentou um vídeo em que a professora (do vídeo) fez a introdução, junto aos seus alunos da educação básica, de uma tarefa matemática. Em seguida, os professores discutiram em subgrupo os aspectos principais da introdução de uma tarefa matemática e após foi feita a discussão coletiva, chamando os professores a comentar suas observações:

> Marina: [Na fase de introdução da tarefa,] o professor precisa perguntar [aos alunos] se entenderam realmente [a tarefa]. Pedir para a criança explicar, se ela entendeu o que é para fazer na atividade porque normalmente a gente atropela. Porque

> como eles não leem [o que precisa ser feito], eles já pegam os números e já vão fazendo as contas, então antes de fazer: Eu quero saber o que você precisa fazer. Aí vai mudando o comportamento [dos alunos].
>
> Formador: [Dirigindo-se ao grupo todo] Por que isso que a Marina falou é importante?

Ao *interpretar* o posicionamento de Marina, o formador fez um *questionamento* que embora simples envolveu ações importantes que desencadearam no prosseguimento da discussão. A primeira delas se refere ao *convite* que o formador fez aos professores de modo que eles participassem e manifestassem suas ideias a partir da colocação da colega, o que pode favorecer a construção de uma *comunidade de aprendizagem* na medida em que o grupo teve a oportunidade de se envolver apoiando a cultura de tornar públicas suas ideias. Ao mesmo tempo em que *convidou* o grupo a se manifestar, o formador *validou* a fala de Marina, *desafiando* os participantes a refletirem e justificarem a importância do que foi falado por Marina, focando explicitamente no conteúdo discutido naquele momento. Neste sentido, o formador ao *interpretar, validar* e *convidar*, *desafiou* os professores a se aprofundar para que pudessem avançar em seus conhecimentos.

A partir do *questionamento* do formador, os professores foram revelando outros aspectos da introdução de uma tarefa matemática, justificando sua importância para o processo de ensino-aprendizagem:

> Debora: Se eles não entenderem a comanda [o que deve ser feito na tarefa matemática] eles não vão saber de onde partir.
>
> Amanda: Porque se não eles começam [a perguntar]: o que é pra fazer mesmo professora?
>
> Paula: Tem uma parte do texto que eu estava lendo, da importância de pedir para os alunos contarem para gente a tarefa. É a parte que até anotei aqui "quando os alunos não se interessam pela tarefa ou eles não compreendem", quando eles não compreendem eles também não ficam interessados e o "sucesso das suas aprendizagens em matemática fica comprometido". Então essa questão de você pedir o que é para fazer, o que vocês entenderam, você chama a atenção deles, prestarem atenção o que eles estão lendo geralmente já atiça a curiosidade deles e todos compreendem para efetivamente realizar a tarefa.
>
> Formador: Vocês acham que este formato [de introdução da tarefa matemática] pode colaborar para aquela grande reclamação que as crianças não interpretam, não sabem ler, não entendem o problema?

A partir do *questionamento* feito pelo formador, houve a oportunidade de Paula evidenciar e compartilhar duas características centrais da introdução de uma tarefa matemática: levar os alunos a se interessarem e consequentemente realizarem a tarefa com empenho (aspecto relacional) e a compreensão do que é necessário ser feito (aspecto cognitivo). Após o posicionamento de Paula, o formador fez um *questionamento* que carrega um dos elementos que compõem as formações de alta qualidade: o *estabelecimento de uma relação* com o contexto e com os desafios que os professores enfrentam em seu cotidiano. É muito comum a queixa de que os alunos, ao ler as tarefas matemáticas, não entendem o que leem e por isso apresentam equívocos em suas resoluções. Neste sentido, o formador, ao conhecer este tipo comum de queixa, buscou estabelecer uma *conexão* direta com a prática diária do professor (elemento externo ao processo formativo), *relacionando* a introdução da tarefa matemática (foco no ensino) a uma dificuldade dos alunos (foco na aprendizagem) levando os professores a refletirem, contribuindo na geração de hipóteses sobre as relações entre ensino e aprendizagem.

Na continuidade da discussão, o formador perguntou aos professores o que mais que a professora do vídeo apresentou ao introduzir a tarefa matemática:

> Eliana: Tem a antecipação. Que nem no aperto de mãos, perguntar quantos [apertos de mão] vocês acham que vai ter de resposta, acho que vai ter quatro apertos, acho que vai ser três.
>
> Debora: Tem um outro aspecto que é chamar o aluno para ler.
>
> Formador: Isso. Em vez de você ler, porque a voz do colega dá uma outra entonação. Tem outra coisa que a professora Celia fez e é bem bacana.
>
> Adriana: Explicar com as próprias palavras.
>
> Formador: Isso vai ajudando. Ela fez outra coisa, o que foi?

Neste trecho além de *validar* a fala de Debora o formador teve a ação de *parafrasear* na medida em que reformulou com suas próprias palavras a fala da professora, trazendo mais elementos a discussão numa ação de *esclarecer e explicar*. É possível perceber que o formador ao conhecer de forma aprofundada os elementos que compõem uma introdução de uma tarefa matemática foi solicitando que os professores expusessem esses elementos. Nesta situação, o formador, não satisfeito com as respostas dos professores, afirmou que teria outras coisas importantes no vídeo a serem ressaltadas, *questionando* os professores.

> Adriana: Ela trouxe o cubo.
>
> Formador: Isso, ela trouxe o cubo, para a questão da visualização. Porque em matemática a gente traz a importância das diferentes representações e a visualização é importante. Se a gente voltar na tábua de Pitágoras, se a gente perceber que a criança tem muita dificuldade em visualizar a multiplicação, na introdução [da tarefa matemática] seria um bom momento [de fazer perguntas]. Vocês conhecem essa tábua? O que a gente tem que fazer ai? Fala para mim. Tem que preencher? Para que a criança depois de você dar a tarefa não vá toda hora na sua mesa perguntar o que é pra fazer, porque o aluno não tinha entendido. Então quando a gente vai planejar tarefas desta natureza a gente tem que antecipar as dificuldades e na introdução tentar contornar estas dificuldades, para que o aluno consiga realizar a tarefa matemática.

Este trecho sugere que a resposta que o formador estava esperando foi dada por Adriana. A professora do vídeo analisado pelos professores havia trazido cubos com os adesivos autocolantes como material concreto, representação que poderia ajudar os alunos no entendimento do enunciado da tarefa matemática. Além disso, o formador *estabeleceu uma conexão* com elementos internos ao próprio processo formativo quando *retomou* uma TAP desenvolvida anteriormente em que se referia as dificuldades dos alunos em preencher a Tábua de Pitágoras, o que pode propiciar aos professores oportunidades de estabelecer relações, potencializando a construção de maiores significados. Outra *relação* estabelecida pelo formador foi com o planejamento do professor que sugere, na perspectiva de *estender e ampliar,* considerar no planejamento as possíveis dúvidas ou equívocos que os alunos possam ter em relação a tarefa matemática proposta.

Discussão dos resultados

Em estudos anteriores acerca do processo formativo ora em análise, foi possível registrar mudanças na prática dos professores participantes "tanto com relação a sua compreensão sobre o significado do pensamento algébrico como à forma de trabalhar em sala de aula" (Ferreira et al., 2022, p. 184), mas ainda precisávamos investigar como o formador contribuiu nas mudanças referidas. Neste sentido, num outro estudo, ao decompor o trabalho do formador na orquestração de discussões coletivas (Ferreira et al., no prelo) foram identificadas ações e práticas do formador que carregam a potencialidade de ajudar os formadores de professores no desenvolvimento de processos formativos.

O momento de discussões coletivas é o momento em que muitas das oportunidades de aprendizagem profissional podem ocorrer (Elliott et al., 2009), pelo que há a necessidade de uma condução que envolva os participantes nesta discussão e os instigue a levantar novas possibilidades de atuação docente. Ao buscar favorecer a compreensão dos professores acerca da importância e das características que envolvem a introdução de uma tarefa matemática (prática educativa), o formador se utilizou de várias ações e práticas, que contribuíram para a criação de oportunidades de aprendizagem profissional. Com exceção da prática de *sistematizar aprendizagens*, todas as outras práticas foram representadas pelas ações a elas associadas.

Aos professores foram possibilitados momentos em que estes pudessem compartilhar suas ideias, quando o formador fez o *convite* a partir da fala de uma colega, contribuindo para que os professores se envolvessem com o processo formativo (Gibbons & Cobb, 2017), característica importante de processos de desenvolvimento profissional eficazes (Zhang et al., 2011). Nas ações de *questionar*, ainda que estejam incluídas ações de *convidar*, existe uma forte componente de *desafio* em que os professores são levados a refletir, propiciando uma reorganização de seu conhecimento (Escudeiro-Ávila et al., 2021). Ao *interpretar* o contexto, as falas e as atitudes dos professores, o formador conduz a discussão monitorando seu desenvolvimento (Stein et al., 2008). Neste sentido, esta prática tem por base o conhecimento do formador, quando por exemplo, *estabeleceu uma conexão* entre as dificuldades que os alunos apresentam ao interpretar uma tarefa matemática e a forma como esta tarefa é apresentada, mas também se relaciona ao objetivo que o formador tem ao trabalhar aquele determinado conteúdo com os professores.

Conclusão

Nestas sessões de formação deste estudo, mediante as ações do formador, a discussão foi-se desenvolvendo num movimento crescente de melhoria das ideias, em que o formador, por meio de sucessivos questionamentos, perseguia o objetivo de levantar as características centrais da introdução de uma tarefa matemática. Para tanto, o formador se utilizou das ações (constantes nas práticas descritas no Quadro 1) de *convidar* (estabelecer uma comunidade de aprendizagem), *validar, parafrasear, esclarecer* e *explicar* (interpretar as interações dos professores e entre professores), *relacionar* e *retomar* (estabelecer conexões) e, principalmente, *questionar* (desafiar os professores), que, de forma conjuntural, resultaram na criação de oportunidades de aprendizagem profissional.

Além de ratificar o papel do formador como fundamental na condução de discussões coletivas produtivas (Ribeiro & Ponte, 2020) por meio de um discurso dialógico no lugar de um discurso autoritário (Zhang et al., 2011), sugerimos que não são as práticas ou ações isoladas, mas antes sua coordenação que orientam a orquestração das discussões coletivas que se deseja produtiva para a aprendizagem docente. Assim, uma contribuição importante de nosso estudo é o foco nas diferentes práticas do formador que se combinam para levar a criação de oportunidades de aprendizagem profissional, objetivo primeiro dos processos formativos. O presente estudo também contribui para a definição do conhecimento necessário ao formador (Goodwin & Kosnik, 2013) bem como para a criação de princípios que orientem o design da formação de formadores.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Learning Policy Institute.

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher,* 38(3), 181–199.

Elliott, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., & Kelley-Petersen, M. (2009). Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. *Journal of Teacher Education*, *60*(4), 364-379.

Escudero-Ávila, D., Monte, M. & Contreras, L. C. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics Teacher Education. In M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators*, Research in Mathematics Education, https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Ferreira, M. C. N, Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (submetido). *Práticas e ações de um formador de professores que ensinam matemática na orquestração de discussões coletivas.*

Ferreira, M. C. N., da Ponte, J. P. & Ribeiro, A. J. (2022). Towards an approach to teachers' professional development: how to work with algebraic thinking in the early years. *PNA*, 16(2), 167-190. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.22234

Gibbons, L. K., & Cobb, P. (2017). Focusing on teacher learning opportunities to identify potentially productive coaching activities. *Journal of Teacher Education*, 68(4), 411-425.

Goodwin, A. L., & Kosnik, C. (2013). Quality teacher educators = quality teachers? Conceptualizing essential domains of knowledge for those who teach teachers. *Teacher Development,* 17(3), 334-346, https://doi.org/10.1080/13664530.2013.813766

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., & Murray, H. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Heinemann.

Hill, H. C., Rowen, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 20(2), 371-406.

Hohensee, C. (2015). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(3), 231-257.

Jaworski, B., & Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM, 46*(2), 173–188.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge University Press.

Opfer, V. D., & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research*, *81*(3), 376-407.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoria, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 20(1), 71-94.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké, 28*, 1-20.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313 340. http://dx.doi.org/10.1080/10986060802229675

van Es, E. A., Tunney, J., Goldsmith, L., & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education, 64*(4), 340-356. https://doi.org/10.1177/0022487114534266

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 10, 205-215.

Zhang, M., Lundeberg, M., & Eberhardt, J. (2011). Strategic facilitation of problem-based discussion for teacher professional development. *Journal of the Learning Sciences*, *20*(3), 342-394. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.553258

O pensamento relacional de futuras educadoras e professoras: um estudo na formação inicial

Preservice teachers' relational thinking: a study in initial teacher education

Joana Cabral[1], *Hélia Oliveira*[2], *Fátima Mendes*[3]

[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal, joana.cabral@ese.ips.pt

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, hmoliveira@ie.ulisboa.pt

[3]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal, fatima.mendes@ese.ips.pt

Resumo. *Esta comunicação tem como objetivo caracterizar o pensamento relacional de um par de futuras educadoras e professoras (FEPs), e insere-se numa investigação mais ampla desenvolvida no âmbito de uma experiência na formação inicial de professores. O estudo assume uma metodologia qualitativa, tem como participantes um par de formandas e os métodos de recolha de dados são a observação participante, complementada com registo áudio e vídeo, e a recolha documental. No âmbito desta comunicação, a análise de dados baseia-se na análise das produções escritas das formandas relativas a três tarefas, bem como dos diálogos entre os elementos do par, durante a realização das tarefas. Os resultados evidenciam que a experiência de formação contribuiu para que as formandas expressassem uma perspetiva mais relacional nas suas produções, quando comparando com as tarefas iniciais em que, na sua resolução, se encontravam focadas na apresentação de cálculos. Este estudo permite ainda refletir sobre a importância de promover, na formação inicial, oportunidades para que os FEPs aprofundem o seu pensamento relacional numa perspetiva compatível com a Early Algebra, tendo em conta a sua relevância para as aprendizagens dos alunos.*

Palavras-chave: pensamento algébrico; pensamento relacional; *early algebra*; formação de educadores e professores; experiência de formação.

Abstract. *This communication aims to characterize the relational thinking of a pair of preservice teachers (PTs) and is part of a broader research developed within the scope of a teacher education experiment. The research follows a qualitative methodology, the participants are a pair of PTs, and the methods of data collection were participant observation of the classes, with audio and video recordings, and documents collection. For this communication, the data comes from* *the PTs' written productions within the scope of three tasks and the discussions between them. The results show that the teaching experiment contributed for the PTs to express themselves in a more relational way in their productions, when comparing with the initial tasks when they were focused on calculation. This study also allows us to reflect on the importance of promoting, in initial training, opportunities for PTs to deepen their relational thinking in a perspective compatible with Early Algebra, considering its relevance for children's learning.*

Keywords: algebraic thinking; relational thinking; early algebra; initial teacher education; teacher experiment.

Introdução

A literatura tem destacado a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais, apontando domínios importantes para tal, como o pensamento relacional (Blanton et al., 2018; Carpenter et al., 2003; Oliveira & Mestre, 2014). Em particular, diversos autores (Blanton et al., 2018; Pitta-Pantazi et al., 2020) e, inclusivamente, as novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2021), têm enfatizado a relevância da promoção da transição entre a aritmética e a álgebra, destacando que uma abordagem focada na aritmética generalizada pode contribuir de forma positiva para a aprendizagem posterior da álgebra formal por parte dos alunos. Para que os professores possam apoiar os alunos nesta transição, é essencial que tenham conhecimentos sólidos e aprofundados, numa perspetiva compatível com uma abordagem à álgebra nos anos iniciais – *Early Algebra* (Carraher & Schliemann, 2007). No entanto, a investigação tem vindo a mostrar que frequentemente os (futuros) professores não estão familiarizados com aspetos associados ao pensamento algébrico nos anos iniciais, nomeadamente, quanto ao pensamento relacional (Branco, 2013; Hohensee, 2017).

Esta comunicação, que se enquadra numa investigação mais ampla (Cabral, 2021) no âmbito de uma experiência de formação realizada numa Licenciatura em Educação Básica (LEB), pretende dar resposta à seguinte questão de investigação: Como se caracteriza o pensamento relacional de um par de formandas, nomeadamente, o modo como exploram relações numéricas e propriedades das operações e perspetivam o significado do sinal de igual? Com este estudo pretende-se também compreender a contribuição da experiência de formação para o aprofundamento do pensamento relacional das formandas.

O pensamento relacional

A importância de os alunos, desde os anos iniciais, desenvolverem o pensamento algébrico, que pode ser caracterizado como um hábito mental que envolve a "capacidade de construir, justificar e expressar conjeturas sobre estruturas matemáticas e relações" (Blanton & Kaput, 2004, p. 142), tem sido destacada na literatura. Um dos domínios considerados é o pensamento relacional que remete para uma compreensão aprofundada da aritmética de um ponto de vista generalizado (Carpenter et al., 2003), incluindo aspetos como a equivalência, expressões, equações e inequações (Blanton et al., 2018). Dado que a aritmética é o tema com maior incidência no currículo de matemática dos anos iniciais, é essencial que esta seja vista como mais do que um conjunto de procedimentos, uma vez que aprender aritmética é, de acordo com Mason (2018), "ganhar facilidade com os números, é pensar algebricamente, mesmo que não explicitamente" (p. 334). A aritmética deve, assim, ser tratada de um ponto de vista generalizado, com ênfase no raciocínio sobre as operações e propriedades associadas aos números (Carpenter et al., 2003).

A partir desta perspetiva surgiu uma proposta curricular que consiste na integração de modos de pensamento algébrico desde os primeiros anos da educação básica, designada *Early Algebra* (Carraher & Schliemann, 2007). Deste ponto de vista, o desenvolvimento do pensamento relacional deve incluir o trabalho com números/quantidades, operações, propriedades e igualdades (Kieran et al., 2016), com foco na generalização das operações aritméticas e das suas propriedades e num olhar sobre a estrutura das relações ariméticas e não estritamente sobre o resultado das operações (Pitta-Pantazi et al., 2020). Em particular, é crucial que as igualdades sejam percecionadas como uma equivalência entre expressões numéricas e que o sinal de igual assuma um significado relacional (Blanton et al., 2018; Kieran et al., 2016; Molina et al., 2009). Tendo em conta a importância da compreensão relacional para a aprendizagem dos alunos (Kieran et al., 2016), as tarefas propostas devem permitir a perceção do equilíbrio numérico das igualdades através da decomposição ou rearranjando algumas combinações numéricas (Kieran, 2007) e a exploração de igualdades que impliquem propriedades das operações (Pitta-Pantazi et al., 2020).

O conhecimento matemático do professor no âmbito da álgebra

O conhecimento matemático dos professores e as aprendizagens matemáticas dos alunos estão fortemente relacionados, sendo essencial que os (futuros) professores tenham um conhecimento profundo dos conteúdos que ensinam (Ma, 1999), em particular, no domínio da álgebra (Welder & Simonsen, 2011). Dado que, muitas vezes, as experiências prévias à formação centram-se numa visão mecanicista da matemática, muito focadas em procedimentos e memorização, é necessário que a formação inicial promova diferentes formas de aprender matemática (Appova & Taylor, 2019). Em particular, os formandos precisam de compreender e reconstruir os seus conhecimentos anteriores com maior profundidade e significado (Ponte & Chapman, 2016).

Especificamente no âmbito da *Early Algebra*, a investigação destaca que muitos futuros professores tiveram um contacto muito reduzido, ou mesmo inexistente, com o desenvolvimento do pensamento algébrico numa perspetiva compatível com a álgebra nos anos iniciais (Hohensee, 2017). Neste sentido, é essencial que a formação promova oportunidades para que os próprios formandos desenvolvam o pensamento algébrico e se tornem conhecedores de modos adequados de promover aprendizagens significativas no que se refere, nomeadamente, à aritmética generalizada e à interpretação do sinal de igual (Hohensee, 2017).

Diversos autores têm realizado estudos relativamente ao desenvolvimento do pensamento relacional de (futuros) professores e, em particular, do modo como transitam entre o pensamento aritmético e algébrico (Branco, 2013; Hohensee, 2017; Magiera et al., 2011; Vermeulen & Meyer, 2017). Os estudos referidos defendem a importância do desenvolvimento da compreensão do significado do sinal de igual e identificam dificuldades dos formandos, muitas vezes associadas a uma visão operatória deste sinal. Em particular, o estudo de Vermeulen e Meyer (2017), com professores em serviço, evidencia dificuldades relativamente ao significado do sinal de igual por parte dos seus participantes. No entanto, os autores destacam que através de discussões reflexivas se registou uma transição gradual da compreensão dos formandos, passando de uma compreensão implícita do significado relacional do sinal de igual para uma compreensão explícita. À semelhança do estudo referido, a investigação tem evidenciado que, de um modo geral, o pensamento relacional dos (futuros) professores se desenvolve positivamente quando a formação lhes proporciona essa oportunidade, nomeadamente através da exploração de diferentes igualdades e equações, resolução de problemas, discussões de várias estratégias aritméticas e algébricas e análise de produções de alunos (Branco, 2013; Magiera et al., 2011; Vermeulen & Meyer, 2017). Magiera et al. (2011) destacam ainda a importância de o formador, ou a própria tarefa, darem indicações claras para que os formandos expressem o seu pensamento de forma relacional, uma vez que, sem estas indicações, podem continuar a assumir uma abordagem centrada em aspetos operacionais.

Contexto do estudo e metodologia

O estudo no qual se insere esta comunicação foi desenvolvido a partir de uma experiência de formação, realizada numa unidade curricular (UC) denominada Padrões e Álgebra, do 3.º ano de uma LEB. O objetivo da experiência de formação foi promover, em simultâneo, o pensamento algébrico das formandas e a sua capacidade de *noticing* o pensamento algébrico de crianças. Esta experiência teve a duração de 11 aulas, das quais três dedicadas ao domínio do pensamento relacional, lecionadas pela primeira autora, que assumiu o papel de formadora e investigadora. Na primeira aula foi realizada uma tarefa de diagnóstico e as restantes aulas foram organizadas a partir da realização de tarefas com foco em aspetos do conhecimento matemático das formandas, geralmente seguidas de tarefas incidindo sobre a análise do pensamento dos alunos, a partir de resoluções escritas e de vídeos de sala de aula.

O estudo assume uma metodologia qualitativa (Creswell, 2012) e os métodos de recolha de dados foram a observação participante das aulas da UC, complementada com registo áudio e vídeo, e a recolha documental das produções das formandas. No âmbito desta comunicação foram consideradas para análise as produções escritas e os diálogos de um par de formandas, Anabela e Bianca. A escolha das participantes teve em consideração o desempenho na tarefa de diagnóstico, a assiduidade às aulas da experiência de formação e a sua experiência matemática prévia à Licenciatura, sendo que as duas formandas tinham frequentado com sucesso a disciplina de Matemática A no Ensino Secundário. A análise baseia-se nas produções individuais relativas a duas tarefas, a tarefa de diagnóstico (TD) e a tarefa Igualdades e Desigualdades Numéricas – Parte 2 (T2), bem como nas produções escritas do par e nos diálogos entre as formandas relativamente à tarefa Igualdades e Desigualdades Numéricas – Parte 1 (T1). As questões colocadas nessas tarefas implicam a avaliação do valor lógico de igualdades ou a determinação dos valores que completam equações. As questões da TD não indicam de que forma as formandas devem justificar as suas respostas, mas previamente à resolução da T1 e da T2 foi dada a indicação de que deveriam, sempre que possível, completar as igualdades ou avaliar o seu valor lógico sem proceder à determinação do valor representado pelas expressões.

O quadro de análise centra-se em duas categorias principais – *explorar relações numéricas* e *explorar propriedades de operações* – e uma categoria transversal a estas – *significado do sinal de igual*. A categoria *explorar relações numéricas* remete para a perceção e generalização de relações entre números e para a identificação da variação entre elementos de uma expressão numérica, como a compensação ou a decomposição numérica (Kieran, 2007, Molina et al., 2009). *Explorar propriedades de operações* refere-se à identificação de propriedades elementares das operações (como a propriedade comutativa da adição e da multiplicação) e sua generalização (Carpenter et al., 2003; Pitta-Pantazi et al., 2020). A categoria relativa ao *significado do sinal de igual* é considerada transversal, dado que influencia o olhar do indivíduo sobre as igualdades. Uma vez que o significado do sinal de igual pode estar associado a uma perspetiva de operador direcional ou relacional (Kieran et al., 2016), a atribuição exclusiva de um significado operacional ao sinal de igual pode condicionar a exploração da igualdade como uma relação entre duas expressões (Molina et al., 2009). Assim, considera-se que este aspeto é intrínseco às duas categorias principais consideradas.

Resultados

A análise de dados apresentada em seguida está organizada de acordo com as duas categorias de análise principais, sendo que em cada categoria os dados são analisados cronologicamente por tarefa. Em cada tarefa o enunciado implica a avaliação do valor lógico de igualdades ou a determinação dos valores que completam equações e respetiva justificação.

Explorar relações numéricas

Na resolução, individual, da TD, as formandas determinam o valor que preenche o espaço em falta de uma equação, assumindo que a igualdade é válida caso ambas as expressões representem o mesmo valor (Figura 1).

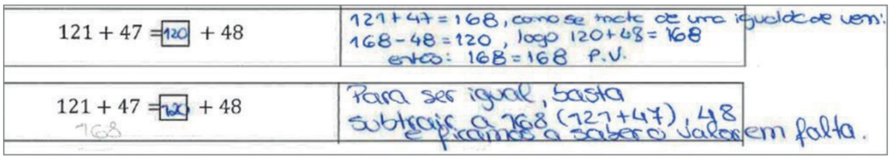


Figura 1. Resolução de Anabela (em cima) e de Bianca (em baixo) da TD – Q2: E1

Ambas procedem da mesma forma, sendo que inicialmente determinam a soma das parcelas do primeiro membro e em seguida retiram a esse valor a segunda parcela do segundo membro, assumindo que a diferença corresponde ao valor em falta. Anabela e Bianca reconhecem a equação como a representação de uma equivalência entre os valores numéricos dos dois membros, evidenciando uma perspetiva relacional do sinal de igual.

Na T1, realizada a pares, as formandas avaliam o valor lógico de uma igualdade, procedendo ao cálculo da expressão de cada membro (Figura 2).

Figura 2. Resolução de Anabela e Bianca da T1 – Q1: I10

O par identifica a igualdade como verdadeira, uma vez que as expressões de ambos os membros representam o mesmo valor, mas, contrariamente ao que lhes é solicitado, não procura estabelecer relações numéricas entre os diferentes membros.

Após a resolução da T1 foi realizada uma discussão em que foram explorados vários tipos de relação que é possível estabelecer entre os membros de uma igualdade, nomeadamente, relações de compensação. Possivelmente motivadas por esta discussão, na resolução da T2, individualmente, as formandas focam-se na relação de compensação para determinar o valor que completa a equação (Figura 3).

Ambas reconhecem a parcela comum nos dois membros da igualdade e atendem à relação entre as segundas parcelas de cada um dos membros. As formandas compreendem que a segunda parcela do segundo membro é duas unidades superior à parcela correspondente do primeiro membro, sendo que Anabela se refere exclusivamente às parcelas, enquanto Bianca aponta especificamente os números em causa. Tendo por base as relações percecionadas, as formandas retiram duas unidades à terceira parcela do primeiro membro obtendo uma equivalência entre expressões.

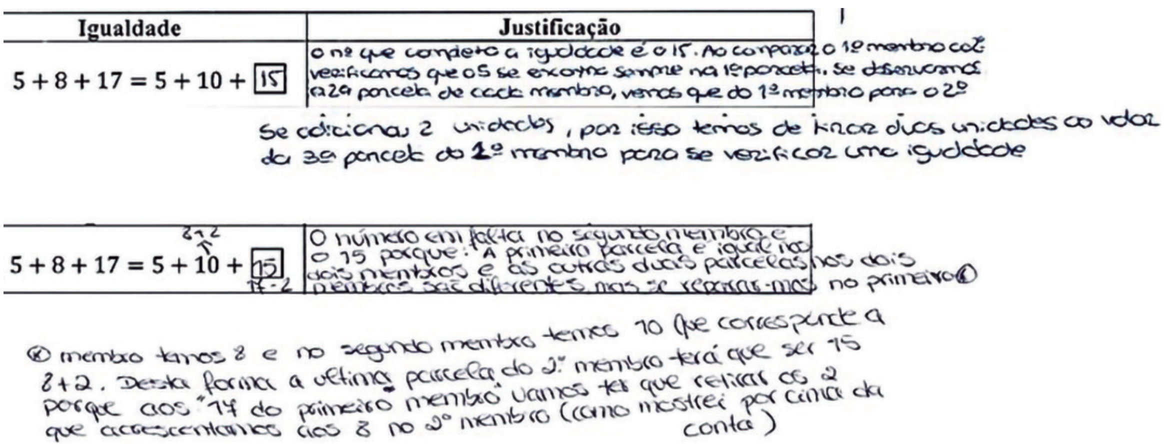


Figura 3. Resolução de Anabela (em cima) e Bianca (em baixo) da T2: E1

Explorar propriedades de operações

Na TD, relativamente à mobilização de propriedades das operações, as duas formandas têm abordagens distintas. Na sua resolução Anabela mobiliza, de forma implícita, a propriedade comutativa da adição (Figura 4).

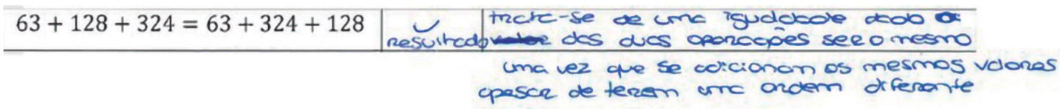


Figura 4. Resolução de Anabela da TD – Q1: I1

A formanda começa por classificar a primeira igualdade como verdadeira, mencionando “dado o resultado das duas operações ser o mesmo”, o que poderia indiciar o recurso ao cálculo da expressão numérica em cada membro para verificar a validade da igualdade. No entanto, em seguida, justifica a sua afirmação referindo “uma vez que se adicionam os mesmos valores apesar de terem uma ordem diferente”, o que aponta para o conhecimento da propriedade comutativa da adição, ainda que implicitamente. Anabela refere “valores” e “ordem diferente” o que sugere que não está focada nos números específicos desta igualdade, possivelmente identificando a propriedade em causa como válida para qualquer caso.

Já Bianca não recorre à propriedade implicada e, para avaliar o valor lógico da igualdade, determina a soma das parcelas de cada membro e verifica que se trata do mesmo valor (Figura 5).

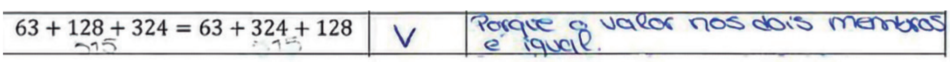


Figura 5. Resolução de Bianca da TD – Q1: I1

Na produção escrita da T1, enquanto par, as formandas justificam que a igualdade "7+4=4+7" é verdadeira através do cálculo dos valores numéricos representados pelas expressões de cada membro (Figura 6).

$7+4=4+7$ $11 = 11$	V	Porque os dois membros são iguais (valores)

Figura 6. Resolução de Anabela e Bianca da T1 – Q1: I1

Ainda que, por escrito, as formandas não evidenciem o estabelecimento de relações entre as parcelas de cada membro, o diálogo que ocorreu entre as duas permite inferir que percecionaram a propriedade comutativa da adição:

> Anabela: . . . não podíamos dizer que estamos a somar os mesmos números em ordem diferente e por isso é que dá onze de cada lado? Podia ser dez mais um e treze menos dois, por exemplo, ia dar o mesmo, mas não é igual . . .
>
> Bianca: O valor da soma dá o mesmo. Porque sete mais quatro é igual a onze e quatro mais sete é igual, isto é uma propriedade qualquer que eu agora não me lembro do nome.

Em particular, Bianca refere que se recorda da existência de uma propriedade que permite validar esta igualdade, ainda que não se recorde da sua designação. O diálogo permite ainda inferir que Anabela olha para a igualdade como uma equivalência entre expressões, dado que refere que poderia ter várias outras expressões que representam o número 11, enquanto Bianca parece mais focada nos cálculos.

Além desta igualdade as formandas validam outras no decorrer da T1, mobilizando, implicitamente, o conhecimento relativo à propriedade comutativa (da adição e da multiplicação) (Figura 7).

$\frac{7}{2}+39+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+39$	✓	em cada membro apenas se trocaram as parcelas, sendo os membros com parcelas iguais.
$0{,}3\times 87=87\times 0{,}3$	V	o valor do 1º e 2º membro é igual, apenas se trocaram de ordem as parcelas

Figura 7. Resolução de Anabela e Bianca da T1 – Q1: I9 e I12

As suas justificações, evidenciam, no primeiro caso, que reconhecem a propriedade comutativa da adição para qualquer valor, independentemente do número de parcelas e conjunto numérico e, no segundo, que a comutatividade é válida também para a multiplicação. As formandas mostram também saber que a propriedade comutativa não é aplicável a qualquer operação, nomeadamente à subtração (Figura 8).

$21-10=10-21$	F	No 1º membro o resultado é positivo No 2º membro o resultado é simétrico do 1º membro

Figura 8. Resolução de Anabela e Bianca da T1 – Q1: I6

Ao serem confrontadas com a igualdade, Bianca refere que "no segundo membro o resultado vai ser simétrico ao do primeiro logo não são iguais" não procedendo a qualquer cálculo para verificar o valor lógico desta igualdade.

Ainda que o par evidencie reconhecer, mesmo sem a designação formal, a propriedade comutativa e as operações às quais se aplica, a produção escrita relativamente a uma igualdade que implica a propriedade associativa (da multiplicação) indicia algumas dificuldades na expressão da diferença entre estas duas propriedades (Figura 9).

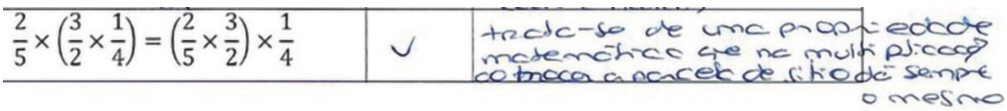


Figura 9. Resolução de Anabela e Bianca da T1 – Q1: I4

As formandas referem-se a "uma propriedade matemática que na multiplicação ao trocar a parcela de sítio dá sempre o mesmo", o que parece indicar uma confusão entre "troca" de fatores e prioridade das operações, para além de utilizarem incorretamente a designação de parcela. Durante a apresentação da sua resolução à turma e, ainda que sintam alguma dificuldade em expressar-se, o diálogo entre o par e a formadora evidencia que compreendem que se trata de propriedades diferentes:

> Formadora: Trocaram as "parcelas" de sítio?
>
> Anabela: Os parênteses.
>
> Bianca: Não, foi os parênteses. Dentro dos parênteses foi trocada uma das parcelas . . . Há uma troca de parcelas, comparando os dois membros. Mudou a prioridade … é uma propriedade das operações.
>
> Formadora: Então e qual é que é o nome desta propriedade?
>
> Anabela: Associativa.

Além de evidenciar que reconhecem que não se trata de uma troca de fatores, que designam por parcelas, o excerto apresentado permite também perceber que Anabela se recorda da designação da propriedade em causa.

Considerações finais

A análise de dados apresentada evidencia que, relativamente a *explorar relações numéricas*, numa fase inicial, as formandas estão focadas em determinar o valor representado por cada uma das expressões para avaliar o valor lógico das igualdades ou para completar a equação. Já na tarefa final, individualmente, procuram comparar as expressões matemáticas sem calcular o valor que representam. Ambas as formandas passaram a explorar as equações e igualdades de um ponto de vista relacional, recorrendo a relações de compensação, inclusivamente em situações de adição com mais do que duas parcelas em cada membro.

No que se refere a *explorar propriedades de operações*, Anabela reconhece, implicitamente, e mobiliza a propriedade comutativa da adição, desde a tarefa de diagnóstico, enquanto Bianca, nesta tarefa, se mostra focada no cálculo numérico, não fazendo qualquer referência a esta propriedade. Já na tarefa final (T2), enquanto par, as formandas mobilizam a propriedade comutativa da adição independentemente do número de parcelas e do conjunto numérico em causa. Reconhecem também a validade da comutatividade para a multiplicação, ao contrário do que sucede na subtração. Os dados mostram, ainda, que as formandas têm algumas dificuldades em explicar diferenciadamente as propriedades associativa e comutativa.

Desde a tarefa de diagnóstico, as formandas reconhecem as diferentes igualdades e equações apresentadas como representação de uma equivalência entre os valores numéricos de dois membros, evidenciando uma perceção relacional do sinal de igual. No entanto, em particular no início da experiência, o modo como abordam as diferentes expressões assenta essencialmente na determinação dos resultados em cada membro, o que evidencia uma interpretação relacionada com a realização do cálculo. A primazia que as formandas atribuem ao cálculo numérico parece indiciar que perspetivam o sinal de igual como símbolo de uma equivalência, mas de forma implícita, o que vai ao encontro dos resultados do estudo de Vermeulen e Meyer (2017).

As diferentes abordagens das formandas na tarefa de diagnóstico e na tarefa final realçam a importância das discussões coletivas e das indicações explícitas das tarefas e ou da formadora, já que apenas quando lhes foi solicitado que procurassem relações, em vez de efetuar o cálculo dos valores em ambos os membros, as formandas atenderam às mesmas. Estes resultados vão ao encontro da investigação de Magiera et al. (2011), em que os autores referem que, se o formador ou o enunciado da tarefa não promovem expressamente um modo relacional de pensar, muitos formandos podem ter abordagens centradas em aspetos operacionais. Neste caso, possivelmente tendo em conta o percurso prévio à LEB, parece haver por parte das formandas a conceção de que a determinação dos valores de ambos os membros de uma igualdade ou equação é a forma mais sólida de apresentar uma justificação. Em particular, no caso de Bianca, o facto de inicialmente não atender a nenhuma relação parece indiciar que as suas experiências anteriores à formação podem ter promovido uma visão mecanicista da matemática em vez de um olhar relacional. Estes resultados permitem inferir que as formandas, não terão tido, enquanto alunas, muitas oportunidades para desenvolver o pensamento algébrico, e em particular relacional, numa perspetiva da *Early Algebra*.

Deste modo, a experiência de formação parece ter contribuído para o aprofundamento do pensamento relacional das formandas e, portanto, do seu conhecimento matemático, no sentido de darem maior atenção a aspetos algébricos que podem emergir da aritmética, nomeadamente as relações numéricas e a generalização das propriedades das operações.

Este é um facto particularmente relevante tendo em conta o contexto atual nacional com as novas orientações curriculares a enfatizarem a importância de uma abordagem à aritmética generalizada (ME, 2021), uma vez que, se os professores estiverem focados apenas em aspetos operacionais, dificilmente poderão promover as aprendizagens dos alunos neste âmbito.

Ainda que estes resultados sejam circunscritos a um par de participantes e a um número reduzido de aulas, o modo como as formandas parecem ter compreendido que um olhar relacional é matematicamente mais produtivo do que um operacional (Hohensee, 2017) e a forma como parecem ter sido esbatidas algumas conceções a esse respeito são bastante encorajadores e devem ser tidos em conta na formação inicial de professores.

Agradecimentos

A pesquisa teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017)

Referências

Appova, A., & Taylor, C. E. (2019). Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 179-204. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9385-z

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-50). Springer.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cabral, J. (2021). O conhecimento matemático de futuras educadoras e professoras e a sua capacidade de perceber o pensamento algébrico das crianças (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Information Age Inc.

Creswell, J. W. (2012). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). Sage.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Prospective K-8 teacher's knowledge of relational thinking. *Mathematics, Statistics and Computer Science Faculty Research and Publications, 422.* https://epublications.marquette.edu/mscs_fac/422

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 329-350). Springer.

Ministério da Educação. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática – Ensino Básico*. DGE. http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 341-368.

Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes. In Y. Li, E. Silver & S. Li (Eds). *Transforming mathematics instruction: multiple approaches and practices* (pp. 173-197). Springer.

Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M., & Christou, C. (2020). Different types of algebraic thinking: An empirical study focusing on middle school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 965-984. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10003-6

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). Routledge.

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The Equal Sign: Teachers' Knowledge and Students' Misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 136-147. https://doi.org/10.1080/18117295.2017.1321343

Welder, R. M., & Simonsen, L. M. (2011). Elementary teachers' mathematical knowledge for teaching prerequisite algebra concepts. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers (IUMPST): The Journal, 1*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu

A articulação entre avaliação, ensino e aprendizagem na sala de aula de matemática

The articulation between assessment, teaching and learning in the mathematics' classroom

Elsa Barbosa[1], *Joana Latas*[2], *António Borralho*[3], *Maria João Carvalho*[4]

[1] Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora, ebarbosa@uevora.pt

[2] Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora, joanarblatas@gmail.com

[3] Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora, amab@uevora.pt

[4] Agrupamento de Escolas Manuel Ferreira Patrício, mariacarvalho@ebim.pt

Resumo. *O desempenho dos alunos na disciplina de Matemática continua a ser problemático, o que, de acordo com a investigação, está associado à persistência de práticas de avaliação quase exclusivamente orientadas para a classificação e desarticuladas com as práticas de ensino. Neste contexto, o presente artigo pretende analisar a articulação entre os processos de avaliação, ensino e aprendizagem numa sala de aula de matemática do 7.º ano de escolaridade, no âmbito de um projeto de investigação mais alargado. Assumindo-se uma visão holística da sala de aula, a modalidade de design research foi utilizada para dar resposta a uma intervenção neste contexto, por meio de implementação de recursos educativos e práticas de avaliação, ensino e aprendizagem, com consequência no desenvolvimento profissional dos intervenientes. Os resultados preliminares sugerem episódios de articulação entre os processos em causa assentes na coadunação entre práticas de preparação, ação e reflexão após as aulas, consistentes com as funções das tarefas e da sua implementação, definição de estratégias de ensino, da utilização sistemática de feedback, da autoavaliação e da avaliação entre pares, por forma a permitir que os alunos consigam regular e autorregular as suas aprendizagens.*

Palavras-chave: sala de aula de matemática; articulação; práticas letivas; participação dos alunos; avaliação formativa.

Abstract. *Students' performance in the subject of Mathematics continues to be problematic which, according to investigations, is associated to the persistence of assessment practices almost exclusively driven by rating and disjointed from* *teaching practices. In this context, the current article aims to analyse the articulation between assessment, teaching and learning processes in a 7th grade Mathematics classroom, in the scope of a wider investigation project. Taking on a holistic vision of the classroom, the design research mode was used to answer an intervention in this context, by means of the implementation of educational resources and assessment, teaching and learning practices, with a consequence in the professional development of the parties involved. Preliminary results suggest articulation episodes between the processes in hand rooted in the link between preparation, action and reflection after classes consistent with the functions of the tasks and their implementation, the definitions of teaching strategies, the systematic use of feedback strategies, self-assessment and assessment among peers, so as to allow students to regulate and self-regulate their learnings.*

Keywords: Mathematics classroom, articulation; teaching practices: student participation; formative assessment.

Introdução

A investigação na área da avaliação formativa sugere três resultados com particular interesse: i) a avaliação formativa melhora de forma muito significativa as aprendizagens de todos os alunos; ii) os alunos com mais dificuldades são os que mais beneficiam com a utilização sistemática da avaliação formativa; iii) os alunos que são submetidos regularmente a avaliações formativas obtêm melhores resultados em avaliações externas (Black & Wiliam, 1998). Em particular, os estudos sobre esta modalidade de avaliação com o foco em programas de desenvolvimento profissional de professores apresentam poucas evidências da relação entre a avaliação formativa e as aprendizagens dos alunos, principalmente dado o curto período temporal dos mesmos (Randel et al., 2016). Ainda no panorama internacional, Anderson e Palm (2017) implementaram um programa de desenvolvimento profissional no âmbito da avaliação formativa que parece ter produzido efeitos nas práticas avaliativas dos professores a que a ele foram sujeitos, recomendando, ainda assim, o alargamento da duração da experiência.

Em Portugal, o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática tem sido alvo de questionamento, sobretudo no que diz respeito aos resultados das avaliações externas como, por exemplo, no PISA e nos exames nacionais. Esses questionamentos conduzem a reflexões sobre as suas possíveis causas, em particular, a nível das práticas letivas dos professores de Matemática. Alguma investigação neste âmbito tem feito emergir práticas letivas, entre elas, de avaliação quase exclusivamente orientadas para a classificação e desarticuladas com as práticas de ensino (Barbosa, 2019; Barbosa et al., 2017; Borralho et al. 2019; Lucena et al., 2018). Justifica-se assim a pertinência de um estudo de média duração no sentido de implementar uma estratégia de avaliação formativa através de tarefas a desenvolver na sala de aula, profundamente comprometida com o desenvolvimento curricular (prática de ensino) e articulada com a avaliação sumativa. Neste contexto, assumiu-se a sala de aula como um sistema de determinados tipos de atividades complexas e socialmente situadas, o que possibilitou estudar as suas especificidades e pluralidades, permitindo obter uma visão mais holística da mesma.

Este artigo tem como objetivo analisar a articulação entre os processos de avaliação, ensino e aprendizagem numa sala de aula de matemática do 7.º ano de escolaridade.

Enquadramento teórico

A necessidade de melhorar as práticas escolares é atualmente uma realidade comummente aceite. Não faz sentido continuar-se a ensinar, aprender e avaliar em contextos de sala de aula, mais ou menos magistrais, onde os professores passam a maior parte do tempo a falar para um conjunto de alunos ouvir (Fernandes, 2022). Neste contexto, é possível afirmar que a aprendizagem, em particular a da matemática, se coaduna com uma organização de aula, inserida num modelo de ensino exploratório, em que os alunos e os professores assumem um papel ativo, na qual as tarefas assumem a centralidade por desencadearem os processos de aprender, ensinar, avaliar e regular a atividade decorrente na sala de aula (Mescouto et al., 2021; Ponte, 2005). Para tal, é necessário que o professor se assuma como um profissional com um saber próprio e exclusivo do seu grupo profissional, conhecedor profundo dos conteúdos que ensina, reflexivo e crítico. Tem ainda de ter a capacidade de organizar situações de ensino e de as orientar em sala de aula. No que diz respeito à avaliação é importante referir que esta tem cada vez mais destaque no processo educativo havendo, no entanto, a necessidade de se modificar as práticas de avaliação das aprendizagens dos alunos, o que implicará mudanças profundas nas formas de organizar e desenvolver o ensino e vice-versa (Fernandes, 2015, 2020, 2022; Santos et al., 2010; Black & Wiliam, 2018; Perrenoud, 1999).

Avaliar formativamente é avaliar para a aprendizagem, ou seja, é fazer com que os alunos aprendam com compreensão, desenvolvendo competências do domínio cognitivo e metacognitivo. Nesta perspetiva, é necessário haver um estreito relacionamento entre a avaliação, o currículo, as estratégias e as metodologias a desenvolver em sala de aula. Desta forma, o professor deve organizar o ensino por sequências lógicas e ordenadas de tarefas, capazes de irem ao encontro dos interesses, motivações e capacidades dos alunos, o que implica: (i) planificar uma unidade; (ii) definir objetivos; (iii) ser criativo na elaboração da sequência de tarefas, que devem ser algebrizadas e capazes de transmitir informações claras e precisas ao aluno sobre o seu conhecimento; (iv) planear as abordagens a utilizar, de acordo com os objetivos previamente definidos; (v) definir materiais e estratégias para ajudar os alunos a ultrapassar dificuldades. Neste ponto é importante salientar a necessidade de o professor definir como deve propor as tarefas aos alunos, por forma a ajudá-los na sua exploração, incentivando-os a usar diversificadas, mas adequadas estratégias de resolução, não esquecendo a necessidade de promover um ambiente de trabalho estimulante, capaz de envolver os alunos nas tarefas propostas; (vi) estabelecer conexões entre os diferentes conteúdos matemáticos, em particular durante as discussões com as turmas, sem esquecer a relevância da realização de sínteses finais. Neste contexto, cabe ao professor a decisão dos papéis que ele próprio assume em sala de aula e a de escolher os dos alunos (Barbosa, 2019; Ponte, 2010); (vii) fornecer *feedback* adequado, capaz de ajudar os alunos a atingirem os objetivos propostos; e (viii) elaborar, democraticamente, critérios de avaliação que ajudem a desenvolver a capacidade de os alunos se autoavaliarem e autorregularem (Barbosa, 2019; Fernandes, 2020).

Quanto aos alunos, devem assumir um papel ativo na capacidade de gerir e desenvolver os seus conhecimentos. Cabe-lhes principalmente a responsabilidade pelo desenvolvimento dos processos referentes à autoavaliação e autorregulação das suas aprendizagens.

Desenvolver a aprendizagem dos alunos depende da relação estreita entre as práticas de ensino, de avaliação e a participação dos alunos, onde as tarefas, (re)avaliadas em função do *feedback* que o professor recebe dos alunos e vice-versa, assumem um papel central na sala de aula, como é ilustrado na figura seguinte (figura 1).

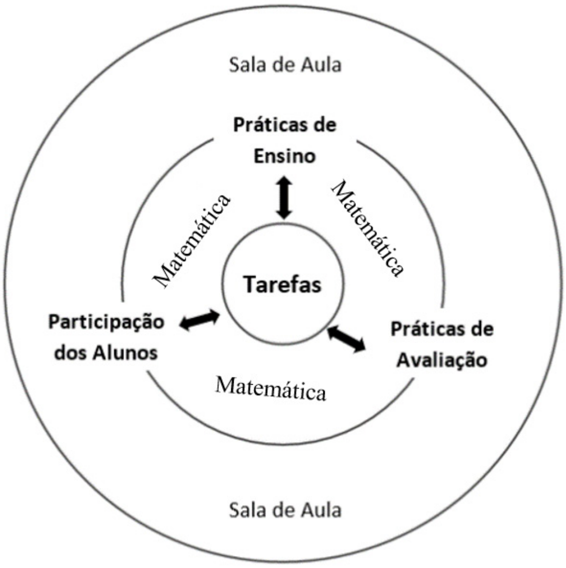


Figura 1. Relação entre práticas de ensino, de avaliação e participação dos alunos

Metodologia

A metodologia de investigação deste estudo enquadra-se no paradigma interpretativo, com recurso a uma abordagem qualitativa. O projeto onde se insere utiliza a modalidade de *Design Research* no sentido de desenvolver uma intervenção em sala de aula de matemática por meio de implementação de recursos educativos e práticas de avaliação, ensino e aprendizagem, com consequência no desenvolvimento profissional dos intervenientes. O modelo utilizado foi adaptado de Reeves (2006) e comporta quatro dimensões, contínuas e interligadas: contextualização/problema; soluções sustentadas; ciclos iterativos e avaliação.

O projeto de investigação em causa, RAFA – Avaliação Formativa na Prática Letiva do Professor de Matemática: Relações com as Aprendizagens, está a ser implementado em turmas de 6.º e 7.º ano em colaboração com professores de matemática em dois agrupamentos escolares no interior do país. Desta forma, a implementação tem-se enquadrado nas orientações nacionais do currículo e, muito especialmente, norteada para as Aprendizagem Essenciais da Matemática (DGE, 2018) e o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória – PASEO (Martins et al., 2017). Além disso, as estratégias têm privilegiado o trabalho colaborativo entre investigadores e professores de matemática, no sentido de apoiar estes últimos na conceção dos recursos de sala de aula, na sua implementação e no desenvolvimento de competências de investigação sobre a prática letiva (GTI, 2002).

Numa primeira dimensão, um *brainstorming* entre investigadores e professores permitiu clarificar os principais aspetos relacionados com o(s) problema(s) em estudo, identificando as expectativas em relação aos produtos de investigação e dos respetivos contributos para a resolução do problema. Em particular ficaram clarificadas as funções das tarefas a propor em sala de aula no sentido de, simultaneamente, constituírem-se como parte do processo de ensino e de abrangerem propósitos de aprendizagem e de avaliação que permitissem, por um lado, potenciar o *feedback* ao aluno a apoiá-lo na autorregulação da aprendizagem e, por outro, informar o professor e apoiá-lo a regular o ensino. Neste âmbito foram efetuadas observações de aulas de todos os professores envolvidos no projeto no sentido de melhor compreender o contexto para poder-se, com esta informação, adequar-se o desenvolvimento da solução à realidade observada.

Na sequência desta abordagem exploratória, foi desenvolvida uma estratégia para dar resposta à articulação entre os processos de avaliação, ensino e aprendizagem em sala de aula – dimensão 2. Para isso tornou-se evidente a sua coadunação com práticas de ensino exploratórias. Na realidade, o ensino exploratório aparenta ser adequado ao desenvolvimento de tarefas em sala de aula promotor de continuada articulação entre a aprendizagem, a avaliação e o ensino. Todavia, a implementação de um ensino desta natureza implica que o professor: i) escolha criteriosamente as tarefas a apresentar aos alunos; ii) planifique de forma cuidada a sua exploração; iii) controle as questões e comentários que faz aos alunos durante a apresentação destas, bem como do trabalho autónomo, de modo a não lhes indicar a estratégia a seguir; iv) resista a validar as resoluções dos alunos durante o respetivo trabalho autónomo de modo a não reduzir o seu interesse em participar na discussão; v) seja capaz de recusar a alunos que se voluntariem a possibilidade de apresentar as respetivas resoluções à turma, caso estas não sejam o contributo mais interessante para o desenvolvimento da estratégia traçada pelo professor; vi) preveja a utilização de recursos que agilizem a comunicação dos alunos; vii) favoreça a discussão efetiva de ideias por parte dos alunos; viii) promova um ambiente estimulante na sala de aula em que os alunos sejam encorajados a participar ativamente, a desenvolver o seu próprio trabalho e a querer saber do trabalho dos outros (Barbosa, 2019; Canavarro, 2011; Fernandes, 2011). Neste sentido, foram estabelecidas equipas de trabalho colaborativo para serem implementados os ciclos iterativos – dimensão 3 – constituindo-se por momentos de planificação, implementação, em par pedagógico, e reflexão no sentido de, por um lado, analisar em detalhe a prática letiva e, por outro, desenvolver competências de investigação, nos professores, sobre a sua própria prática. Já na dimensão 4, avaliação, os pontos de situação após cada ciclo iterativo permitiram reajustar as estratégias, tornando-as mais individualizadas de acordo com as práticas de ensino e de avaliação, no sentido de contribuírem de forma mais direta para o desenvolvimento profissional de cada um dos professores envolvidos no projeto e, simultaneamente, adequá-las às características dos alunos de cada turma.

Os dados apresentados neste artigo referem-se à sala de aula de matemática de uma turma de 7.º ano de escolaridade, com 19 alunos de uma escola pública no interior do Alentejo. A professora da turma é experiente e empenhada no seu desenvolvimento profissional. A unidade de análise considerada foi a sala de aula, focando-se nos professores, alunos e as suas dinâmicas nos processos de avaliação, ensino e aprendizagem. A opção de incluir os alunos como participantes teve por base a obtenção de informações relevantes sobre as práticas letivas, nomeadamente para compreender as práticas da professora em ação, e para conhecer a adequação destas práticas à aprendizagem. Além disso, a sua participação, traduziu-se numa oportunidade de desenvolver mecanismos para regular a sua aprendizagem. Deste modo, as práticas de ensino, práticas de avaliação e a aprendizagens dos alunos, constituem-se como os objetos de estudo. A recolha de dados decorreu entre março e junho de 2022 e consistiu na observação participante em processos decorridos antes, durante e após as aulas de matemática, mas também na produção escrita das tarefas propostas aos alunos e nas reflexões da professora acerca da sua prática letiva. Em particular, esta recolha enquadrou-se em ciclos iterativos consecutivos no decorrer da implementação de duas sequências de tarefas em sala de aula, durante a organização do ensino e a elaboração conjunta de tarefas, bem como ao longo da reflexão decorrida no final de cada aula observada. Um ciclo incidiu na relação entre as dinâmicas das práticas de ensino, de avaliação e o papel dos alunos quanto à sua aprendizagem e o conseguinte na relação entre a distribuição de *feedback* durante os momentos da aula, em particular em momentos de trabalho autónomo e na discussão em plenário, e o nível de participação dos alunos. Por sua vez, as incidências dos ciclos constituem-se como dimensões dos objetos de estudo, baseadas em características identificadas na literatura. A sistematização de tais dimensões por objeto de estudo deu origem à matriz de investigação. Coerente com esta, para analisar os dados elaboraram-se sínteses narrativas de cada objeto de estudo ao longo de cada procedimento e fonte de recolha de informação, bem como de cada um destes em relação aos primeiros. A triangulação decorreu da análise cruzada das mencionadas sínteses.

Resultados

Os resultados agora apresentados constituem-se como preliminares, obtidos no trabalho desenvolvido com uma das professoras de matemática de uma turma de 7º ano, participante no projeto, focado nas dinâmicas dos processos de ensino, avaliação, em particular, na distribuição de *feedback* em contexto de sala de aula, e na participação dos alunos, com o objetivo de desenvolver as suas aprendizagens.

Quanto à organização do ensino, e de acordo com o que foi anteriormente referido, destaca-se que as tarefas desenvolvidas em sala de aula foram selecionadas e/ou concebidas e preparadas em conjunto pela professora e pela equipa de investigadores. No que diz respeito às dinâmicas de sala de aula, planificou-se a implementação das tarefas; discutiu-se a importância de apresentá-las aos alunos antes de estes iniciarem o seu trabalho, tal como de os alertar para a necessidade de explicarem as suas estratégias e justificarem as suas conclusões; decidiu-se, tendo em atenção o facto de a generalidade das tarefas terem um cunho exploratório ou investigativo, que deveriam ser trabalhadas maioritariamente em pequeno grupo. A figura 2 mostra uma das tarefas implementadas em sala de aula.

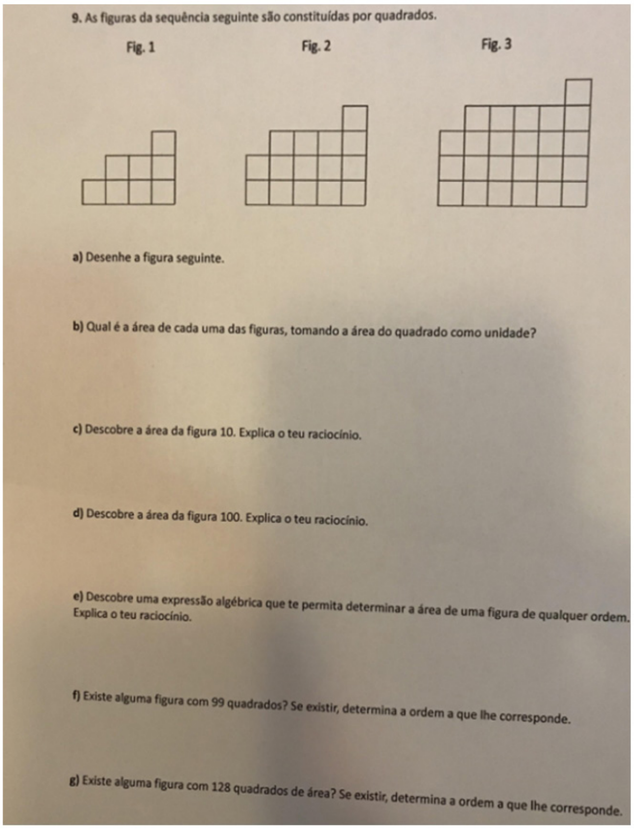

9. As figuras da sequência seguinte são constituídas por quadrados.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a) Desenhe a figura seguinte.

b) Qual é a área de cada uma das figuras, tomando a área do quadrado como unidade?

c) Descobre a área da figura 10. Explica o teu raciocínio.

d) Descobre a área da figura 100. Explica o teu raciocínio.

e) Descobre uma expressão algébrica que te permita determinar a área de uma figura de qualquer ordem. Explica o teu raciocínio.

f) Existe alguma figura com 99 quadrados? Se existir, determina a ordem a que lhe corresponde.

g) Existe alguma figura com 128 quadrados de área? Se existir, determina a ordem a que lhe corresponde.

Figura 2. Tarefa implementada em sala de aula, durante o decorrer do projeto

Os conteúdos nela abordados foram as relações e as expressões numéricas, a variável, as expressões algébricas, os polígonos, bem como a noção de área, as potências e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Os alunos eram atentos e participativos e houve, sempre, um ambiente propício à aprendizagem. A aula iniciava-se com os alunos sentados em pequenos grupos, aos quais eram distribuídas as tarefas a realizar, conforme sugere a figura 3.

Figura 3. Distribuição dos alunos na sala de aula. Momento inicial de uma aula

O trabalho a realizar era apresentado pela professora, que teve sempre a preocupação de contextualizar as tarefas que distribuía no início das aulas. Posteriormente os alunos davam início ao trabalho, lendo a tarefa e discutindo sobre as dificuldades sentidas e as estratégias mais adequadas para a resolução das questões apresentadas. Porém o funcionamento dos grupos nem sempre era o pretendido, havendo inicialmente a tendência de se subdividirem, criando subgrupos, como ilustra uma aluna no seu relatório de avaliação.

> Sempre procuramos trabalhar todos com todos, mas a falta de interação e interesse por parte de alguns integrantes do grupo fazia a criação de subgrupos, mas sempre que nos dávamos conta disso desfazíamos imediatamente o tal subgrupo. (…) Não gostei muito do facto de nem todos mostrarem interesse ao fazerem as tarefas prejudicando assim o funcionamento do grupo. (RA)[1]

De salientar que nesta fase da aula a professora tinha o hábito de observar o trabalho que os diferentes grupos iam realizando, conforme é ilustrado na fotografia seguinte (figura 4), com o objetivo de os questionar sobre o trabalho desenvolvido, distribuindo *feedback* continuo, com recurso a questões orientadoras.

[1](RA) Relatório de avaliação individual, elaborado por alunos da turma.

Figura 4. Trabalho em pequeno grupo

No contexto da tarefa acima apresentada (figura 2) e com o objetivo de distribuir *feedback* aos alunos, foram pensadas diferentes questões orientadoras, como por exemplo: Que alterações podes fazer na figura para a transformares numa figura conhecida? Ou em várias figuras conhecidas? Identificas algum/alguns polígono(s) na figura? Como se calcula a área de um retângulo?

Esta metodologia, segundo a professora, foi importante para a evolução do envolvimento dos alunos no trabalho a desenvolver em sala de aula, todavia, seria difícil de implementar sem o apoio da equipa de investigadores, como é afirmado pela docente.

> Considero, no entanto, que houve uma evolução bastante significativa, nas minhas questões orientadoras aos pequenos grupos, muitas vezes discutidas com a equipa de investigadores. (RP)[2]

No que diz respeito ao trabalho em pequeno grupo, os alunos foram se tornando cada vez mais autónomos, cooperantes e empenhados, discutindo ideias entre si. Neste ponto, é ainda importante referir que os alunos foram capazes de utilizar o *feedback* fornecido, melhorando a sua participação em sala de aula, o que acabou por contribuir para o desenvolvimento das suas aprendizagens, como é corroborado pelos testemunhos da professora e dos alunos, como pelas resoluções apresentadas pelos alunos (figura 5).

> É interessante verificar que os alunos, à semelhança dos professores, também já fazem questões orientadoras aos seus pares. Considero que houve ainda uma

[2] (RP) Reflexão escrita da responsabilidade da professora participante no projeto.

> evolução na comunicação matemática, quer na exploração, quer nas reflexões das tarefas. (RP)
>
> Nesta tarefa, todos trabalharam com todos e todos tentaram dar o seu melhor nos respetivos exercícios, no meu ver. Desta vez conseguimos fazer com que todos trabalhassem. (…) Gostei do facto de todos terem contribuído com a sua parte para a realização da tarefa, sem ninguém ter ficado mais para trás ou ter seguido a realização das tarefas sozinho. (RA)

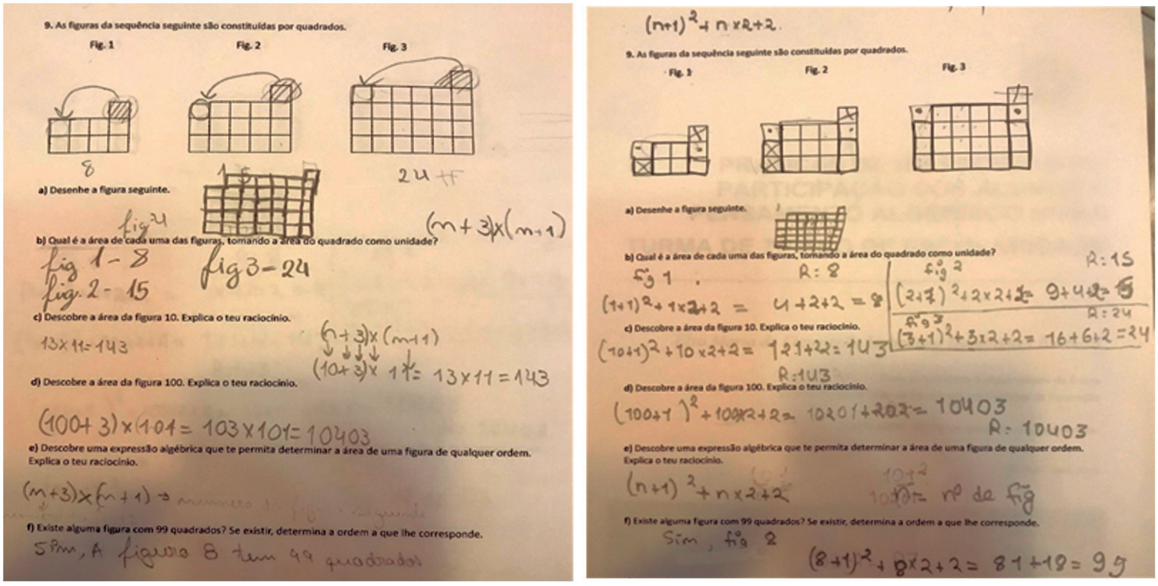


Figura 5. Resoluções dos alunos, observação de aulas

A autoavaliação foi facilitada pela elaboração conjunta (alunos e professora) de uma rubrica, em sala de aula. Na realidade, esta ajudou-os a compreenderem melhor o que era esperado deles e consequentemente a otimizarem os seus desempenhos. Neste sentido, a rubrica potenciou também uma articulação entre a avaliação formativa e sumativa.

> Depois [do *feedback*] conseguimos resolver muito mais facilmente as tarefas seguintes, com as estratégias que fomos percebendo. (...) Confirmamos, sim, sempre o nosso resultado. (RA)

Além disso, a avaliação entre pares também esteve presente ao longo das aulas, havendo espaço, sob a coordenação da professora, para os alunos discutirem as resoluções dos colegas, partilhando ideias e estratégias, não só em pequeno grupo, como em grande grupo, durante a realização das sínteses finais, como é ilustrado nas imagens seguintes (figuras 6 e 7).

Figura 6: Sínteses finais, em grande grupo

Figura 7. Sínteses finais, em grande grupo

Não obstante, foi notória a dificuldade da professora em alterar as suas práticas, no que diz respeito à realização das sínteses finais, em grande grupo, tendo a tendência para centrar a discussão em si própria.

> A dificuldade que ainda sinto prende-se com a discussão em grande grupo, após a realização das tarefas em pequenos grupos. Embora faça um esforço para contrariar a minha vontade, rapidamente centro a discussão em mim. (RP)

Ainda assim, ao longo da observação de aulas ficou evidente uma evolução na postura da professora durante as discussões em grande grupo, verificando-se o afastamento do quadro acompanhado como uma evidência da tentativa de centrar o seu papel na "orquestração" da discussão do grande grupo (figura 5).

Esta evolução só foi possível com base numa reflexão individual da docente relativamente ao seu papel e ao dos alunos na sala de aula, estimulada e complementada pelas reflexões conjuntas com os investigadores com base nas observações de aulas. Entre os aspetos trabalhados destacam-se a preparação dos diálogos com os alunos, antevendo um conjunto de questões que pudessem surgir, além da capacidade, para responder a questões imprevistas, por forma a ser capaz de estabelecer "pontes" entre estas e os conceitos matemáticos trabalhados.

Considerações finais

A investigação defende uma estreita relação entre a avaliação, a aprendizagem e o ensino. Na realidade, é através deste relacionamento que se torna possível alcançar o desenvolvimento sustentável das práticas letivas. Não obstante, o sucesso destas, ou seja, de uma boa articulação entre práticas de ensino, de avaliação e a aprendizagem dos alunos, em contexto de sala de aula, esteve essencialmente dependente de uma boa definição de estratégias de ensino, da utilização sistemática de *feedback*, da autoavaliação e da avaliação entre pares, por forma a permitir que os alunos consigam regular e autorregular as suas aprendizagens. Além disso, é ainda preciso ter em atenção a forma como a tarefa lhes foi apresentada pelo professor, mas também como esta foi explorada, bem como o modo como foi feita a discussão final e a síntese de conteúdos.

No entanto, de acordo com o acima referido pela docente, tudo parece indicar para que a tão necessária inovação pedagógica esteja dependente do apoio que os professores possam vir a ter em sala de aula. Para que aconteça uma verdadeira mudança, estes têm de ser apoiados nas suas práticas profissionais em contexto escolar (Wiliam, 2007). No presente estudo, foram percetíveis as dificuldades e as inseguranças da professora aquando da implementação de práticas distintas das que integravam as suas rotinas. Todavia a docente não está isolada pois a investigação refere que a mudança de práticas traz grandes inquietações aos professores (Fernandes, 2022; Santos et al., 2010; Perrenoud,1999). Neste enquadramento, é essencial que lhes seja dado tempo para estudarem, observarem, analisarem e refletirem, sobre as realidades pedagógicas no sentido de as melhorarem, o que implica que as escolas criem espaços e tempos de trabalho, onde os professores possam desenvolver o seu trabalho, bem como trabalhar colaborativamente com outros colegas (Barbosa, 2019; Fernandes, 2022; Santos et al., 2010).

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto interno do Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora de referência CIEP/INT/4.

Referências bibliográficas

Anderson e Palm (2017). The impact of formative assessment on student achievement: A study of the effects of changes to classroom practice after a comprehensive professional development programme. *Learning and Instruction*, *49*, 92-102. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.12.006

Barbosa, E. (2019). *Práticas de um Professor, Participação dos Alunos e Pensamento* Algébrico numa Turma de 7.º de Escolaridade. [Tese de Doutoramento, Universidade de Évora]. Repositório Institucional da Universidade de Évora. https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/25606

Barbosa, E., Borralho, A., Lucena, I (2017). Avaliação das aprendizagens em matemática em Turmas de anos iniciais. *Educação Matemática em Revista*, *22*(56), 109-124. http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/832

Black, P. (2009). Os professores podem usar a avaliação para melhorar o ensino?. *Práxis Educativa*, *4*, 195-201. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.4i2.195201

Black, P. & Wiliam, D. (2018). Classroom assessment and pedagogy. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *25*(6), 551-575. https://doi.org/10.1080/0969594X.2018.1441807

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7-74. http://dx.doi.org/10.1080/0969595980050102

Borralho, A., Cid, M. & Fialho. I. (2019). Avaliação das (para as) Aprendizagens: Das questões Teóricas às Práticas de Sala de Aula. In M. I. Ortigão, D. Fernandes, T. Pereira & L. Santos (Org), *Avaliar para Aprender no Brasil e em Portugal: Perspectivas Teóricas, Práticas e de Desenvolvimento* (pp. 219-240). Editora CRV.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

DGE (2018). *Aprendizagens Essenciais. 7º ano. Matemática*. Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf

Fernandes, D. (2011). Articulação da aprendizagem, da avaliação e do ensino: Questões teóricas, práticas e metodológicas. In M.P. Alves & J. M. Ketele (Orgs.), *Do currículo à avaliação, da avaliação ao currículo* (pp. 131-142). Porto Editora.

Fernandes, D. (2015). Práticas de avaliação de dois professores universitários: pesquisa utilizando observações e narrativas de atividades das aulas. *Educar em revista*, *1*(Ed. Especial), 109-135.

Fernandes, D. (2020). Avaliação pedagógica, currículo e pedagogia: contributos para uma discussão necessária. *Revista de Estudos Curriculares*, *11*(2), 2020.

Fernandes, D. (2022). *Avaliar e aprender numa cultura de inovação pedagógica*. Leya Educação.

GTI (2002). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. APM.

Lucena, I. Dias, J. & Borralho, A. (2018). Práticas letivas de sala de aula de Matemática nos anos iniciais. *Estudos de Avaliação Educacional, 29*(70), 254-274. https://doi.org/10.18222/eae.v29i70.5107

Martins, G. O., Gomes, C. A., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilho, J., Silva, L. M., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. F & Rodrigues, S. M. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. MEC. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Mescouto, J.; Lucena I. & Barbosa, E. (2021) Tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem--avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação Matemática Debate*, *5*(11), 1-22.

Perrenoud, P. (1999). Não mexa na minha avaliação! Para uma Abordagem Sistémica da Mudança Pedagógica. Em A. Estrela & A. Nóvoa (Orgs.) *Avaliações em Educação: Novas Perspectivas* (pp.171-190). Porto Editora.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. EM GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). APM.

Ponte, J. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21*, 13-30.

Randel, B., Apthorp, H., Beesley, A., Clark, T., & Wang, X. (2016). Impacts of professional development in classroom assessment on teacher and student outcomes. *The Journal of Educational Research, 109*(5), 491-502. http://dx.doi.org/10.1080/00220671.2014.992581

Reeves, T. (2006). Design research from a technology perspective. Em J. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 52-66). Routledge.

Santos, L., Pinto, J., Rio, F., Pinto, F. L., Varandas, J. M., Moreirinha, O., Dias, P., Dias, S., & Bondoso, T. (2010). *Avaliar para aprender. Relatos de experiência de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto editora.

Wiliam, D. (2007). Changing classroom practice. *Educational Leadership, 65*(4), 36-42. http://csl.sd79.bc.ca/wp-content/uploads/sites/148/2019/05/Changing-classroom-practice-EL-2006-2007.pdf

Projeto RAFA - O privilégio da Avaliação Formativa e da sua articulação com a Avaliação Sumativa

RAFA Project - The privilege of Formative Assessment and its articulation with Summative Assessment

Paulo Afonso[1], *António Borralho*[2], *José Filipe*[3], *Paula Loureiro*[4]

[1]Centro de Investigação em Património, Educação e Cultura do Instituto Politécnico de Castelo Branco, Portugal

paulo.afonso@ipcb.pt

[2]Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora, Portugal

amab@uevora.pt

[3]Agrupamento de Escolas Afonso de Paiva, Castelo Branco, Portugal

jmsmfilipe@gmail.com

[4]Agrupamento de Escolas Afonso de Paiva, Castelo Branco, Portugal

paula.loureiro@afonsopaiva.pt

Resumo. *Este artigo visa dar a conhecer a implementação em sala de aula de um projeto de investigação assente na temática da avaliação formativa em articulação com a da avaliação sumativa, designado de projeto RAFA. Alicerçados em tarefas de ensino, aprendizagem e de avaliação desafiantes, os ambientes de sala de aula estudados numa das duas regiões do país onde o mesmo está a ser implementado colocaram de manifesto a intenção dos respetivos docentes promoverem um clima de sala de aula baseado no papel ativo dos estudantes na construção das suas aprendizagens. Recorrendo a metodologias ativas de trabalho em pequenos grupos, os alunos eram convidados a pensar alto e a resolverem as tarefas matemáticas de modo colaborativo. Nos momentos de discussão das tarefas no grupo turma, os docentes assumiam a postura de questionadores com a intenção explícita de os alunos tomarem consciência dos processos de pensamento utilizados na resolução das tarefas propostas, podendo, assim, assumir o papel de reguladores das suas aprendizagens em contexto de avaliação formativa. Os momentos de avaliação sumativa também serviam o propósito formativo pois, através da produção de feedbck de qualidade por parte dos docentes, os alunos consciencializavam-se sobre as aprendizagens já ocorridas e quais os mecanismos ou procedimentos cognitivos a mobilizar para atingirem este desígnio. Dos dados recolhidos contata-se que as tipologias das turmas tiveram influência nos resultados de aprendizagem alcançados.*

Palavras-chave: Matemática; Avaliação Formativa; Tarefas Matemática; Trabalho colaborativo.

Abstract. *This article aims to present the implementation in the classroom of a research project based on the theme of formative assessment in conjunction with that of summative assessment, called the RAFA project. Based on challenging teaching, learning and assessment tasks, the classroom environments studied in one of the two regions of the country where it is being implemented demonstrated the intention of the respective teachers to promote a classroom climate based on paper active participation of students in the construction of their learning. Using active methodologies for working in small groups, students were invited to think out loud and solve mathematical tasks collaboratively. In the moments of discussion of the tasks in the group, the professors assumed the posture of questioners with the explicit intention of the students to become aware of the thought processes used in the resolution of the proposed tasks, being able, thus, to assume the role of regulators of their learning in formative assessment context. The summative assessment moments also served the training purpose because, through the production of quality feedback by the teachers, the students became aware of the learning that had already taken place and what mechanisms or cognitive procedures to mobilize to achieve this goal. From the data collected, it appears that the typologies of the classes had an influence on the learning outcomes achieved.*

Keywords: Mathematics; Formative Assessment; Mathematics Tasks; Collaborative work.

Introdução

O Projeto RAFA, acrónimo do Projeto de Avaliação Formativa na Prática Letiva do Professor de Matemática: Relações com as Aprendizagens, está afeto ao Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora (CIEP – UE). Tem como investigador responsável um professor desse Centro e da equipa de investigadores fazem parte outros dois elementos desse Centro e um elemento do Centro de Investigação em Património, Educação e Cultura do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Como principais objetivos visa promover práticas de avaliação pedagógica associadas a tarefas matemáticas criteriosamente selecionadas para proporcionarem um papel ativo dos estudantes na construção das suas aprendizagens. Estas tarefas têm o seu enquadramento pedagógico no Currículo Nacional da Matemática para o Ensino Básico, no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória do nosso país e nos critérios de avaliação definidos nas respetivas escolas abrangidas.

Metodologia

Do ponto de vista metodológico este projeto adotou a modalidade de *design research* (Reeves, 2006) com o intuito de se promover o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos e a tomada de consciência por parte dos estudantes que nele participam das suas aprendizagens matemáticas.

O projeto tem-se desenvolvido em duas regiões do interior de Portugal, Évora e Castelo Branco e os seus participantes são os alunos e os professores de duas turmas de Matemática do 6.º ano do 2.º Ciclo do Ensino Básico e de duas turmas de Matemática do 7.º ano do 3.º Ciclo do Ensino Básico, distribuídas, igualmente por estas duas regiões. A opção por estes níveis de escolaridade baseou-se na sequencialidade curricular entre o final de um dos ciclos de escolaridade e o início do ciclo de escolaridade seguinte. Assim, o projeto envolve quatro docentes, dois do 6.º ano e dois do 7.º ano do Ensino Básico, com um total de 81 alunos. A seleção destes docentes teve por base os seguintes critérios: (a) serem professores profissionalizados em Matemática, (b) terem disponibilidade e vontade em participar, no sentido de se poderem desenvolver profissionalmente e (c) terem na sua componente letiva uma redução de 100 minutos nos respetivos Agrupamentos para se poderem dedicar ao projeto.

O projeto desenvolve-se entre o mês de julho de 2021 e o mês de dezembro de 2022. Antes do início deste ano letivo, a equipa de investigadores, em exclusivo, e esta com a dos docentes envolvidos na sua implementação em contexto de sala de aula, realizaram várias reuniões de caráter preparatório. O início da implementação em sala de aula ocorreu em outubro de 2021.

Foram estabelecidas como linhas de força do projeto os seguintes aspetos: (a) o clima de sala de aula basear-se no ensino exploratório, com tarefas matemáticas desafiantes que, simultaneamente, servissem o propósito de se ensinar, de se aprender e de se avaliar; (b) a promoção da comunicação entre docente e alunos via questionamento, ou só entre estes, no sentido de se privilegiar o trabalho colaborativo em grupos pequenos e a explicitação, oral e escrita, do processo de raciocínio utilizado na realização das tarefas propostas; (c) a promoção de *feedback* de qualidade e o envolvimento dos estudantes na avaliação, de natureza formativa, sobre as suas aprendizagens, em articulação com a avaliação sumativa. Concordamos com Fernandes (2022), quando refe que: "Assim, por exemplo, fazer perguntas aos alunos, dar-lhes tempo para responderem e distribuir-lhes *feedback* de qualidade pode constituir uma inovação pedagógica com real valor numa diversidade de contextos" (p. 7).

O entendimento que aqui é feito em relação ao conceito de avaliação formativa vai ao encontro da conceptualização de Borralho (2021), quando refere que: "A avaliação formativa está vinculada à melhoraria das aprendizagens de todos os alunos e diretamente relacionada para o quotidiano das aulas, ou seja, integrada nos processos de ensino e de aprendizagem o que significa que tem de ser realizada quando os professores estão a ensinar e os alunos a aprender." (p. 18). Por sua vez, o conceito de avaliação sumativa, realizada após a sequência de ensino, também visa no contexto deste projeto a melhoria das aprendizagens do alunos e o ensino dos professores (Borralho, 2021).

Como finalidade última, pretende obter-se material de aprendizagem dos estudantes, revelador do seu conhecimento sob vários pontos de vista: (a) poder ser alvo de elaboração de casos multimédia; (b) dar visibilidade aos resultados desta iniciativa; (c) para assumirem o papel de promoção de desenvolvimento profissional de outros docentes em eventuais contextos de formação.

Em síntese, o planeamento do projeto com base no envolvimento paritário da equipa de investigadores e dos docentes implementadores do mesmo em contexto de sala de aula visava criar condições para os estudantes poderem tomar consciência das suas aprendizagens. Para tal, pretendia-se promover neles a ação metacognitiva face aos processos de aprendizagem já ocorridos, bem como apelar à procura de estratégias a desenvolver por eles próprios para o atingir deste desígnio. De facto, estamos em sintonia com (Ponte et al, 2007), quando referem que: "(…) são fundamentais os momentos de reflexão, discussão e análise crítica envolvendo os alunos, pois estes aprendem, não só a partir das atividades que realizam, mas sobretudo da reflexão que efetuam sobre essas atividades" (p. 11).

As tarefas matemáticas na aprendizagem da Matemática

No âmbito deste projeto, os investigadores e os docentes envolvidos na lecionação, em trabalho colaborativo presencial e, também, a distância, via plataforma zoom, optaram por planificar momentos de aprendizagem baseados em ensino exploratório (Ponte, 2005), com tarefas diversificadas e mais abertas (Fernandes, 2022), como problemas, investigações ou jogos. O recurso aos tradicionais e rotineiros exercícios foi remetido para um plano menos relevante do ponto de vista da exigência cognitiva com que se pretendia desafiar os estudantes envolvidos no projeto. A conceção das tarefas visava vários propósitos: (a) a construção de conceitos, a compreensão dos procedimentos matemáticos; (b) o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes; e (c) o estabelecimento de conexões entre a Matemática e entre outras áreas do saber. Em síntese, as tarefas planificadas visavam que os estudantes formulassem estratégias próprias de resolução e mobilizassem conhecimentos e capacidades.

Relativamente à sua implementação optou-se pelo trabalho em pequenos grupos, onde os alunos eram convidados a pensar alto, comunicando oralmente as suas ideias com os colegas do respetivo grupo de modo a contribuírem, posteriormente, para a resolução escrita de cada tarefa. Assim, após os momentos de resolução colaborativa, na vertente oral, os alunos colaboravam na resolução escrita do grupo a cada tarefa. Enquanto isto ocorria, os professores movimentavam-se pela sala, observando o trabalho de cada grupo, evitando dar respostas a eventuais dúvidas ou perguntas que iam surgindo. Em vez disso preferiam devolver essas dúvidas ou questões à turma, de modo que todos pudessem participar.

A utilização de recursos educativos, digitais ou não, também foi equacionada nos momentos de planificação, optando-se pelo seu uso quando isso constituísse uma mais-valia formativa para os estudantes. No 6.º ano utilizaram-se, a título de exemplo, instrumentos de medida, modelos de sólidos geométricos e recorreu-se várias vezes à utilização do Geogebra para a criação e posterior exploração de tarefas de natureza geométrica. O recurso a algumas aplets (app) existentes na Internet também fez parte da estratégia assumida em algumas aulas. A título de exemplo, utilizou-se a app que permitia a investigação interativa das planificações do cubo a partir de alguns hexaminós, bem como o site da Microsoft para a compreensão interativa da unidade de volume dm^3 e a sua relação com o cm^3. Já ao nível do 7.º ano, a opção recaiu na elaboração de conjuntos de tarefas encadeadas, sempre suportadas em imagens auxiliadoras da componente interpretativa dos enunciados.

Avaliação formativa e aprendizagem da Matemática

Neste projeto constitui-se como sendo importante os alunos tomarem consciência dos seus conhecimentos e de como conseguem gerir, verificar e controlar esses conhecimentos (Flavell, 1979; Lester e Garofalo, 1985 e Bourón, 1999), em linha com o pensamento de Guzmán (1999), quando refere que quanto melhor nos conhecermos a nós mesmos, mais eficazmente poderemos utilizar os recursos de que dispomos. Com esta deliberação metodológica pretendia-se que os alunos se envolvessem no trabalho colaborativo, partilhando as suas dúvidas com os colegas de grupo, em detrimento de questionarem os docentes sobre essas dúvidas. Ainda assim, quando questionados pelos estudantes, os docentes devolviam as perguntas com outras perguntas para que fossem os alunos a questionarem a sua forma de pensar e a tentar junto do trabalho do grupo resolver essas mesmas dúvidas. Assim sendo, os episódios de *feedback* dos docentes serviam para que fossem os alunos a procurarem outros caminhos ou estratégias diferenciadas para a resolução das suas dúvidas. Por outro lado, existiu a intenção explícita de os professores criarem momentos de reflexão individual sobre o trabalho desenvolvido e sobre as aprendizagens levadas a cabo por cada estudante. Para tal, foram solicitados aos estudantes pequenos relatórios escritos que cumprissem essa função avaliativa sobre o ponto da situação em que cada um se posicionava face às aprendizagens esperadas.

Várias foram as aulas observadas pelos investigadores, cuja missão principal consistia na recolha de dados para a elaboração do relatório final do projeto. Para tal, recorreram a notas de campo, registos vídeo e registos fotográficos. Contudo, não foram raras as vezes em que se integraram nas dinâmicas de sala de aula, interagindo com algum grupo ou comunicando para toda a turma, em plena sintonia com os respetivos docentes, no que concerne ao *feedback* a prestar sobre o desempenho dos alunos enquanto resolvedores das tarefas propostas.

O caso do 6.º ano em Castelo Branco

O docente da turma do 6.º ano de Castelo Branco envolvido no projeto é Licenciado em Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática e Ciências da Natureza, Mestre em Supervisão e Avaliação Escolar e é profissionalizado desde o ano de 1996. A respetiva turma é constituída por 19 alunos e é seu docente desde o ano letivo anterior.

Este professor descreve-se como sendo focado num desenvolvimento profissional que consiga dar as melhores respostas às dificuldades de todos os alunos. De acordo com as sua palavras, tem investido sistematicamente no âmbito do conhecimento científico, pedagógico e curricular sobre o que os alunos aprendem e como aprendem, visando sempre a apropriação de mais e melhores aprendizagens.

Em sua opinião, a turma em causa é muito heterogénea, com alguns alunos a revelar empenho face às atividades propostas e com boas capacidades de resolução de problemas e de comunicar matematicamente por via oral. Contudo, também existem alguns alunos menos motivados para a Matemática e que se distraem facilmente e, nem em contexto de trabalho de grupo, modificam esta sua atitude. No entender deste professor, deveria haver maior envolvimento por parte dos alunos, pois sentiu que, de modo geral, existe falta de compromisso e definição de objetivos pessoais que se manifestam em atitudes de desinteresse, de irresponsabilidade e sem valorização do seu próprio trabalho.

O trabalho que a equipa de investigadores teve oportunidade de acompanhar incidiu nas temáticas das Isometrias, dos Sólidos Geométricos e do Perímetro do Círculo. O episódio de sala de aula que agora se apresenta é ilustrativo do tipo de trabalho levado a cabo pelo docente e do envolvimento de alguns estudantes nas tarefas propostas, bem como do tipo de comunicação oral estabelecido entre ele e a turma, numa perspetiva de avaliação formativa.

Os alunos tinham sido convidados a explorar o conceito de reflexão axial, estando o eixo de reflexão posicionado em locais diferentes nas referidas transformações geométricas face aos objetos sobre os quais teriam de encontrar as respetivas imagens. Durante o trabalho em grupos o professor reparou que num deles havia um aluno (Aluno A) que estava a resolver a última tarefa da folha usando um processo diferente dos restantes elementos, pois estava a utilizar instrumentos de medida, em vez de contar as quadrículas (Figura 1):

Figura 1.– Aluno A a resolver a tarefa no seio do grupo

Assim, no momento da discussão da tarefa, o professor pediu-lhe para ir ao quadro explicar como a tinha resolvido. A Figura 2 evidencia o início da explicação da resolução levada a cabo.

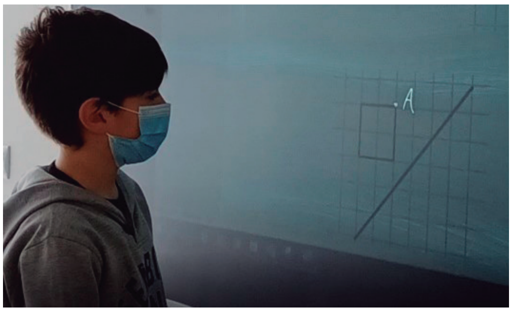


Figura 2. Aluno A a explicar para a turma o processo de resolução utilizado

Contudo, este aluno, perante a turma, em vez de explicar como resolveu o problema no seu lugar, fê-lo recorrendo à estratégia usada pelos restantes elementos do grupo. Ora, isto gerou um momento de comunicação matemática muito interessante envolvendo vários intervenientes e onde se torna explícita a intenção avaliativa do professor em fazer pontos de situação face às aprendizagens que estavam a ocorrer:

> Aluno A – "*A partir do ponto A contei 3 quadrículas para a direita e 3 quadrículas para baixo.*"
>
> Professor – "*Mas não foi assim que tu fizeste, pois não? Tu usaste o esquadro, não foi? Então, é assim, eu tenho aqui um esquadro… não precisas do esquadro?*"
>
> Aluno A – "*Não.*"
>
> Professor – "*Mas como tu utilizaste o esquadro, por isso é que eu estava aqui… Vejam como o vosso colega fez… e é esse o procedimento que nós devemos usar?*"
>
> Aluna B – "*Por ser mais fácil, eu começava pelo vértice que está mais perto do eixo.*"
>
> Professor – "*Mas começando pelo A não pode ser? Aquele não está bem?*"
>
> Aluna B – "*Está, está!*"
>
> Professor – "*O processo que ele utilizou para descobrir o ponto A está correto?*"
>
> Aluna B – "*Está.*"
>
> Professor – "*Podemos utilizar sempre esse processo?*"
>
> Vários alunos – "*Sim.*"
>
> Aluna B – "*Como o quadrado tem os lados todos iguais, faz duas quadrículas para todo o lado.*" (Figura 3).

Figura 3. Aluna B na sua intervenção oral

Professor – "*Mas não foi assim que tu fizeste, pois não? Como é que tu fizeste com o esquadro? Qual foi a tua preocupação?*"

Aluna C – "*Tu tiveste que achar a distância do ponto A ao eixo e depois com a mesma distância do eixo até ao ponto.*" (Figura 4)

Figura 4. Aluna C na sua intervenção oral

Aluno A – "*Eu pus a régua no eixo r, depois pus o esquadro a medir do ponto A até ao eixo…*"

Professor – "*Boa, exatamente! A tua preocupação foi traçar o quê?*"

Aluno A – "*A reta do ponto A até ao eixo.*"

Professor – "*Mas qual a posição relativa em relação ao eixo?*"

Investigador – "*Seria uma reta paralela?*" (pois o aluno ficou em silêncio após a pergunta do professor).

Aluno A – "*Perpendicular.*"

Professor – "*Pois, a tua preocupação foi essa. És capaz de explicar aos colegas? Tens aí o esquadro.*"

O Aluno A pegou no esquadro e tentou unir os dois pontos que já estavam desenhados no quadro sem a utilização da régua, pelo que o professor teve que intervir, questionando-o da seguinte forma:

Professor – "*Tens a certeza que é perpendicular? Falta-te aí a régua, não é?*"

Aluno A – "*Pois…*"

Professor – "*Não tens aí uma régua, mas podes imaginar que a régua está aqui. Onde é que tu vais colocar o esquadro em cima da régua?*" (O professor deslocou-se para junto do Aluno A, no quadro, e apontou para o eixo de reflexão, como se a régua estivesse a sobrepô-lo).

O aluno colocou o esquadro sobre o eixo de reflexão a fazer um ângulo reto, de modo que a união do ponto A até ao eixo de reflexão fosse um segmento de reta perpendicular a esse eixo.

Professor – "*Então, e agora?*"
Aluno A – "*Agora prolongo na mesma distância ao eixo.*" (Figura 5).

Figura 5. Aluno A na utilização do esquadro como recurso auxiliar

O professor, do ponto de vista avaliativo, questionou o aluno sobre se tinha a certeza de que as duas distâncias dos pontos ao eixo de reflexão eram iguais e este respondeu que tinha usado o compasso. Assim, o professor pediu que também confirmasse essa ideia matemática no quadro podendo usar o compasso. Foi isso que o aluno fez (Figura 6) e a turma concordou com a construção geométrica feita pelo seu colega:

Figura 6. Aluno A na utilização do compasso como recurso auxiliar

Na continuação da exploração da trefa no grupo turma, o professor perguntou se tinha havido alguém ou algum grupo que a tivesse resolvido de maneira diferente. A este propósito a Aluna B voluntariou-se para explicar no quadro o seu processo de resolução:

Aluna B – "*Eu comecei por este vértice e depois fazia o mesmo quadrado e encontrava este ponto.*" (Figura 7).
Professor – "*Mas tu sabes que a distância é igual, é?*"
Aluna B – "*Porque está aqui a…*"
Professor – "É a diagonal de um quadrado, não é? Meia diagonal para um lado e meia diagonal para o outro, é isso?", (percebendo que a aluna estava com dificuldade em referir esta palavra).

Aluna B – "*Sim. Pronto, como eu sei que um quadrado tem os lados todos iguais, ou seja, neste caso, duas quadrículas em cada lado, eu contei duas, e aqui e aqui.*" (Desenhou o quadrado final – Figura 8)

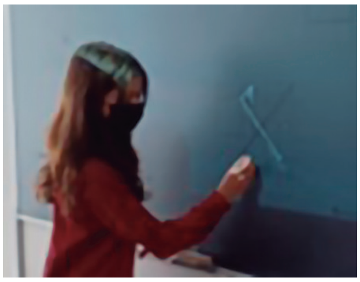


Figura 7. Aluna B a explicar o seu processo de resolução

Figura 8. Aluna B a concluir o seu processo de resolução

Como síntese avaliativa da atividade pediu-se aos alunos para se pronunciarem se tinham ou não compreendido a tarefa e se tinham ficado a perceber que a poderiam ter resolvido com recurso a instrumentos de medida ou pelo processo de contagem do número de quadrículas para cada vértice do quadrado original em relação ao eixo de reflexão dado. Tirando partido destes exemplos, do ponto de vista do conhecimento matemático, ficou explícita a necessidade de as retas acessórias utilizadas na resolução da tarefa terem de ser sempre perpendiculares ao eixo de reflexão.

O caso do 7.º ano em Castelo Branco

A docente do 7.º ano é Licenciada em Engenharia, com habilitação para a docência. A sua profissionalização, desde o ano de 2000, ocorreu no contexto da Profissionalização em Serviço. Descreve-se como sendo preocupada com as aprendizagens dos alunos e considera-se uma professora exigente. Apesar de tendencialmente recorrer ao ensino mais direto, reconhece vantagens na aplicação de tarefas de caráter exploratório.

Quando questionada sobre se a participação neste projeto tinha alterado as suas rotinas de ser professora de Matemática, a sua resposta foi a seguinte: "Alterou bastante. Sendo um ensino de caráter exploratório, tive que ter em conta as diferentes possibilidades de resolução de cada grupo e consequentemente diferentes questões orientadoras para elucidar os alunos sem lhes dar a resposta, no caso de haver algum obstáculo que impedisse o grupo de avançar ou concretizar a tarefa."

A turma afeta a este projeto pertence ao Ensino Articulado e é constituída por 26 alunos. Na opinião da docente, trata-se de uma turma globalmente envolvida nas tarefas que lhes coloca e os resultados de aprendizagem são muito positivos. Do ponto de vista do trabalho de grupo, têm vindo a manifestar atitude colaborativa e com resoluções muito completas face às tarefas propostas.

O trabalho que a equipa de investigadores teve oportunidade de acompanhar abrangeu o tema das sequências e regularidades e o das equações. O exemplo que que agora selecionámos, sobre o tema de iniciação às equações, ilustra a forma como a docente costumava trabalhar com a turma, promovendo o trabalho colaborativo e a comunicação oral baseada no questionamento. Em todas as aulas deste projeto a turma dividia-se em pequenos grupos e no início de cada aula um elemento de cada grupo dirigia-se à secretária da professora para levar um envelope onde estava o conjunto de tarefas que já tinham resolvido, bem como as que lhes faltavam resolver.

No caso vertente, cada grupo foi convidado a resolver a seguinte tarefa da Figura 9:

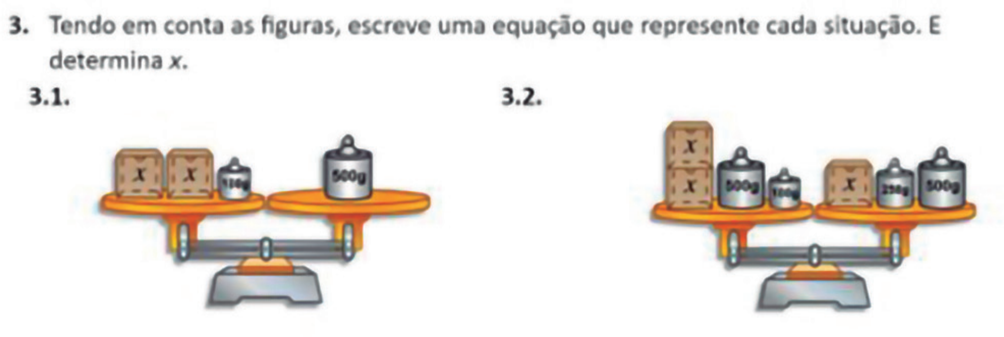


Figura 9. Tarefa sobre equações lineares que cada grupo tinha para resolver

Cada aluno de cada grupo tinha uma folha com cada tarefa para a poderem resolver, tendo uma folha branca adicional para colocarem a resolução acordada pelo grupo. Todos os grupos resolveram as duas situações com procedimentos algorítmicos semelhantes aos da Figura 10:

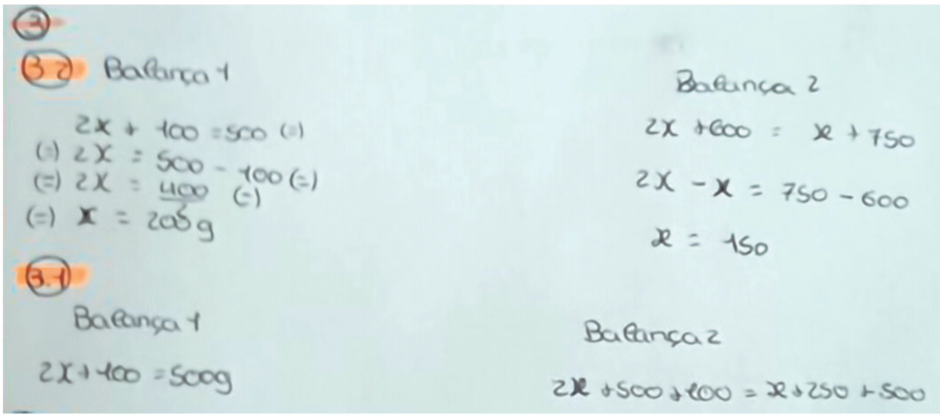


Figura 10. Exemplo dos procedimentos algorítmicos utilizados por um dos grupos

No momento de exploração da tarefa em grupo turma, a professora pretendia introduzir alguns princípios de equivalência na resolução de equações e pediu a um aluno para explicar no quadro da sala de aula a resolução do grupo sobre a 1.ª balança. Eis a comunicação matemática ocorrida após o aluno ter escrito no quadro a equação que modelava o contexto da 1.ª balança: 2x + 100 = 500 (Figura 11):

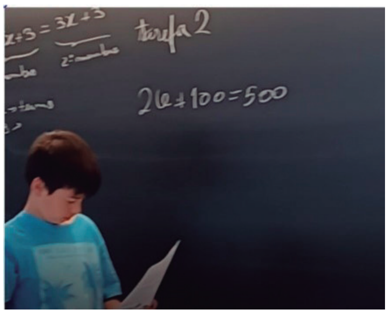


Figura 11. Início da explicação da resolução levada a cabo por um dos grupos

Professora – “*Os restantes grupos concordam com a situação que representa a balança 1?*”
Vários alunos – “*Sim.*” (Figura 12)

Figura 12. Turma atenta à resolução do quadro, comparando com a sua

Professora – “*Como é que vocês resolveram a pergunta 3.2, que é: Determina o valor de x?*”

O aluno começou por escrever o símbolo de equivalência à frente da equação que havia escrito e a professora, apesar de assumir algum protagonismo na orientação do diálogo, questionou-o de forma continuada:

> Professora – "*Olha, que símbolo é este, que nós ainda não falámos cá?*"
>
> Aluno – "É o… equivalente."
>
> Professora – "*E onde é que vocês foram ver do símbolo equivalente?*"
>
> Aluno – "*Boa pergunta!*" (sorrisos do aluno e da restante turma).
>
> Professora – "*Nós ainda não falámos cá do símbolo equivalente, pois não?*"
>
> Vários alunos – "*Não.*"
>
> Professora – "*Ele até está a fazer bem, mas já vamos falar do símbolo equivalente, uma vez que ele o introduziu. Vamos só deixá-lo terminar.*"

Eis a resolução completa levada a cabo pelo aluno (Figura 13):

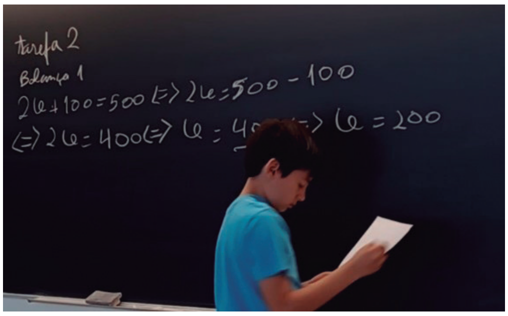


Figura 13. O aluno termina de resolver a tarefa no quadro

> Professora – "*Tu usaste o símbolo de equivalência, mas não nos sabes dizer porquê, pois não? Mas este símbolo, que se chama símbolo de equivalência, na verdade, o que é que isto quer dizer? Ele está ali a escrever várias equações sucessivamente, está ou não esta?*"
>
> Vários alunos – "*Está.*"
>
> Professora – "*E estão separadas pelo símbolo de equivalente. Significa que aquelas equações têm, exatamente, a mesma solução, isto é, o valor do x em cada uma delas é o mesmo. Portanto, aquelas equações têm sempre a mesma solução. E equações com a mesma solução chamam-se equações equivalentes. Isto está aqui no verso da vossa ficha. Se calhar eles adiantaram-se e viram um bocadinho do que aqui estava escrito!*"

O aluno disse não com o abanar da cabeça, mas a professora continuou e disse:

> Professora – "*E também aplicaram os princípios que aqui estão atrás. Então, o que é que nos dizem esses princípios de equivalência? Explica lá aos colegas que ainda estão um bocadinho mais atrasados.*"
>
> Aluno – "*Quando se muda um termo de membro, muda o sinal.*"
>
> Professora – "*Mas isso tem a ver com um princípio de equivalência que vocês têm no verso da folha. O que é que nos diz esse princípio de equivalência? Vocês estão a aplicar sem saber que estão a aplicar. Quando nós estamos a trabalhar com as nossas*

> *balanças, se retiramos o peso do prato direito, por exemplo, o peso de 100g do prato direito, para que a balança se mantenha em equilíbrio, o que vou ter que fazer no prato esquerdo?"*
>
> Aluna B – "*Retirar o mesmo peso.*"
>
> Professora – "*Tirar também 100g, certo? Esse é o primeiro princípio de equivalência, que nos diz que se nós adicionarmos ou subtrairmos o mesmo número, o mesmo peso, estamos a trabalhar com pesos, a ambos os membros de uma equação, a equação que resulta daí é equivalente à que tínhamos anteriormente, isto é, têm a mesma solução.*"

Para acrescentar mais informação a este princípio de equivalência, a professora chamou a atenção para o facto de o aluno do quadro ter utilizado a divisão por 2, dizendo o seguinte:

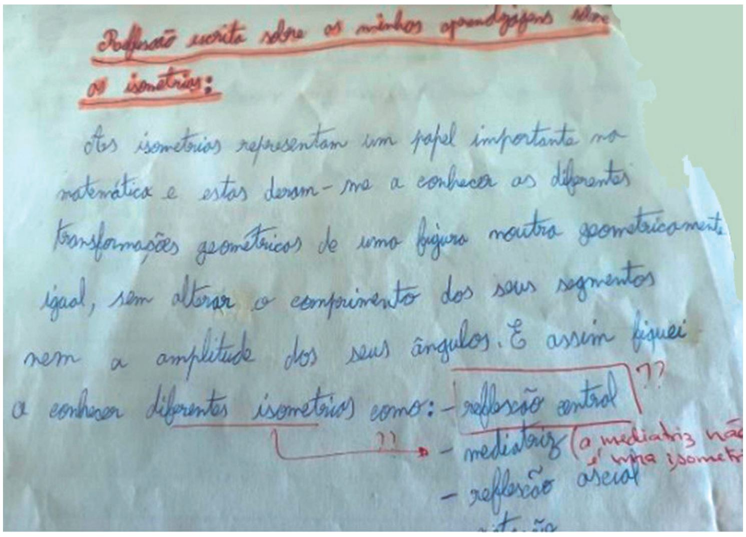
> Professora – "*Se dividirmos ambos os membros de uma equação por qualquer número, exceto pelo número zero, e quem diz dividir, diz multiplicar, obtemos também equações equivalentes. E foi isso que ele fez, porque vejam… se dividirmos 2x por 2... quanto é vamos obter, quanto é que será?*"
>
> Aluna C – "*x*".
>
> Professora – "*Será x, que é o que ele aqui tem, correto? E então também dividiu o 400 por 2. Ao dividir o 400 por 2 deu o nosso peso.*"

Em síntese, a professora, apesar de revelar ainda alguma tendência para assumir algum protagonismo na orientação da comunicação oral entre os vários intervenientes da turma, tirou partido desta tarefa para introduzir novos conceitos matemáticos, tendo valorizado o trabalho colaborativo prévio dos estudantes.

Considerações Finais

Estes dois exemplos, um de cada professor envolvido neste projeto, ilustram bem o que foi o trabalho desenvolvido com as respetivas turmas ao longo deste ano letivo, no âmbito deste projeto, assentes numa perspetiva explícita de avaliação formativa. Para o professor do 6.º ano, este projeto não terá trazido mudanças significativas tendo em conta que as suas práticas já valorizavam as aprendizagens ativas e construtoras do conhecimento dos alunos, baseando-se em discussões orais que pontualizavam as aprendizagens já realizadas e fazendo com que alguns alunos tomassem consciência do que ainda teriam que investir para conseguir alcançar as aprendizagens desejadas. Ainda assim, reconhece que deve dar mais tempo/espaço ao Aluno para o desenvolvimento, construção, organização dos seus raciocínios.

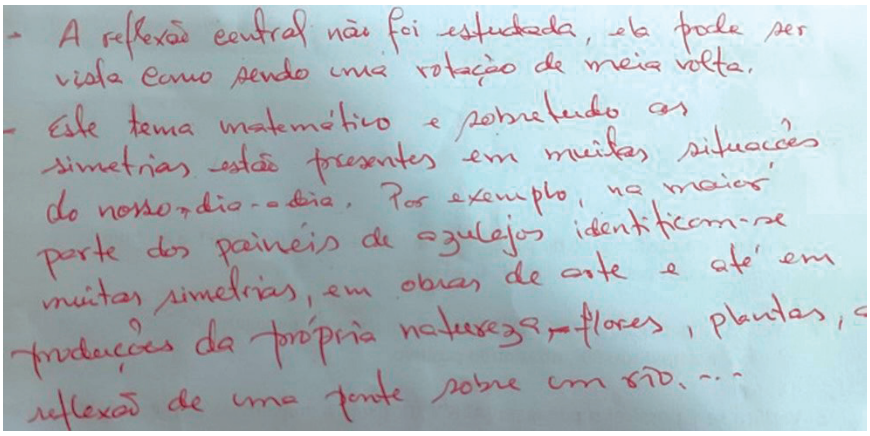
O trabalho de pequenos grupos não é, pois, algo novo nas suas aulas e a comunicação foi muito baseada na estratégia da promoção da verbalização do raciocínio dos estudantes. Pediu-se-lhes não apenas que o fizessem oralmente, mas, também, por escrito. A título de exemplo, eis o que alguns alunos do 6.º ano escreveram sobre as aprendizagens ocorridas no tema das isometrias e os respetivos *feedbacks* que receberam, por escrito, por parte do professor (Figuras 14 a 17):



Reflexão escrita sobre as minhas aprendizagens sobre as isometrias:

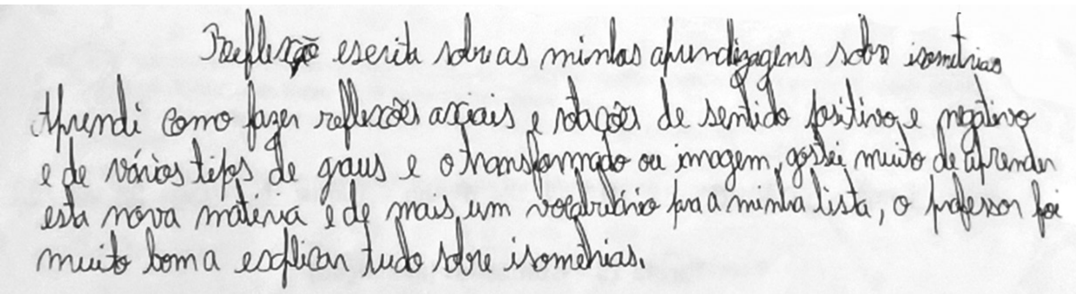
As isometrias representam um papel importante na matemática e estas deram-me a conhecer as diferentes transformações geométricas de uma figura noutra geometricamente igual, sem alterar o comprimento dos seus segmentos nem a amplitude dos seus ângulos. E assim fiquei a conhecer diferentes isometrias como: - reflexão central ??
?? - mediatriz (a mediatriz não é uma isometria)
- reflexão axial

Figura 14 . Reflexão de um aluno sobre Isometrias



- A reflexão central não foi estudada, ela pode ser vista como sendo uma rotação de meia volta.
- Este tema matemático e sobretudo as simetrias estão presentes em muitas situações do nosso dia-a-dia. Por exemplo, na maior parte dos painéis de azulejos identificam-se muitas simetrias, em obras de arte e até em muitas produções da própria natureza, flores, plantas, a reflexão de uma ponte sobre um rio, ...

Figura 15. *Feedback* do docente



Reflexão escrita sobre as minhas aprendizagens sobre isometrias
Aprendi como fazer reflexões axiais e rotações de sentido positivo e negativo e de vários tipos de graus e o transformado ou imagem, gostei muito de aprender esta nova matéria e de mais um vocabulário para a minha lista, o professor foi muito bom a explicar tudo sobre isometrias.

Figura 16. Reflexão de um aluno sobre Isometrias

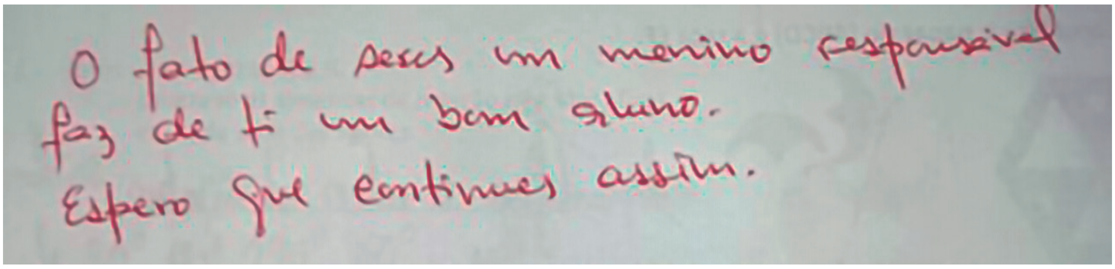


Figura 17. *Feedback* do docente

Este tipo de *feedback* dado por escrito a cada aluno permite, de facto, que tomem, de facto, consciência das aprendizagens levadas a cabo e do que lhes falta fazer para atingirem as aprendizagens previstas, de acordo com os critérios estabelecidos e que são do conhecimento de todos. Além disso, estes escritos dos alunos sobre as suas aprendizagens, permitem fazer um balanço, com indicações claras, aos alunos e professor sobre essas mesmas aprendizagens.

Contudo, ainda em termos de avaliação, este docente carateriza a turma sob dois pontos de vista diferentes. Por um lado, salienta que é reconhecido em alguns alunos que inicialmente manifestavam pouca apetência pela Matemática, que o seu progresso, se tornou notório, talvez devido à enfatização de uma avaliação focada para as aprendizagens. Por outro lado, também destaca que há uma parte da turma que não se envolveu nas tarefas, acabando por criar alguma entropia ao trabalho de outros alunos. De acordo com este docente, a fraca comunicação entre os alunos pouco subsidiou a aquisição de novas aprendizagens. Isto porque embora tenha havido alguma insistência em que isso ocorresse, havia dificuldade em os alunos ouvirem os colegas e discutir as ideias matemáticas subjacentes.

Em sua opinião, esta turma não o tem deixado satisfeito, pois apesar de todo o empenho e dedicação em conceber tarefas interessantes e em criar climas de aprendizagem em que se apela ao papel ativo dos estudantes (Ponte, 2005), ainda constata que:

> muitos alunos até apresentam piores resultados devido à dificuldade de respeitar o trabalho de grupo e não aproveitarem de forma útil a autonomia que lhes é dada, devido a interesses alheios ao contexto da sala de aula. Alguns alunos acabam por revelar alguma desorientação e falta de envolvimento nas tarefas propostas devido à implicação do esforço de terem que pensar. Há uma grande parte de alunos que entende o trabalho escolar como sendo a resolução de exercícios de forma rotineira, com indicações bem precisas daquilo que devem fazer. Se isso não acontecer, acabam por não conseguir qualquer concretização.

Desta reflexão é importante repensar o papel que as várias tipologias de tarefas podem desencadear na ação do estudante. Para muito deles, existe um maior conforto se apenas lhe é pedida a resolução de exercícios. Perante tarefas mais abertas, como sejam problemas ou tarefas de investigação, manifestam maiores dificuldades, pois o seu nível de resiliência e de comprometimento com as tarefas é reduzido.

No que diz respeito ao trabalho levado a cabo pela docente do 7.º ano, várias vezes os alunos referiram que achavam muito interessante o trabalho que estava a ser desenvolvido e que era uma maneira de aprender que lhes agradava. Ainda assim, a docente acrescenta que:

> Alguns grupos, apesar da minha insistência para debaterem sempre as questões entre todos, queixaram-se que um elemento ou outro não estaria a participar da forma esperada. No entanto, o balanço é muito positivo, parece-me. Acho que aprendemos todos, alunos e professora.

Em termos das aprendizagens realizadas, esta docente salienta que antes da participação no projeto, os resultados eram bons na sua maioria. Com a participação neste projeto constata como principal diferença a melhoria dos resultados dos alunos menos bons. Acrescenta que a generalidade dos alunos desta turma tem gosto em aprender, sobretudo: "Quando são construtores do seu próprio conhecimento é notório que esse gosto ainda é maior."

Como aspeto final, salientamos as realidades de duas turmas distintas, sendo a do 7.º ano mais vocacionada para a procura do sucesso educativo e onde os alunos com mais dificuldades puderam tirar mais partido deste projeto. Do facto, ao estarem envolvidos em trabalho colaborativo de pequenos grupos, empenharam-se em dar respostas objetivas e fundamentadas a tarefas desafiantes. Tal ocorreu, baseando-se em constantes momentos de avaliação formativa por parte da docente. Deste modo, o trabalho no âmbito deste projeto contribuiu para aumentar o grau de envolvimento e de empenho face ao que lhes vinha sendo proposto.

Ainda assim, na outra turma, a do 6.º ano, apesar de terem ocorrido vários momentos de envolvimento e empenho dos estudantes, (tal como na turma do 7.º ano), o professor lamentou o facto de haver alguns alunos descomprometidos com a aula de Matemática e com a sua própria aprendizagem. O trabalho do docente nos vários momentos de avaliação formativa constatava esse descomprometimento de alguns alunos perante o que lhes estava a ser solicitado, enquanto tarefas de aprendizagem, e eles próprios também tinham consciência de que algo teria de mudar para que as suas aprendizagens pudessem ocorrer como era desejável!

Referências bibliográficas

Borralho, A. (2021). Avaliação pedagógica e avaliação em larga escala: Perspectivas, limites e relações. In T. Pereira (org.), Avaliação Pedagógica: Limites e Possibilidades (pp. 13-32). CRV.Burón, J. (1999). *Enseñar a aprender: Introdución a la Metacognición*. Mensajero, 5.ª Ed.

Borralho, A., Cid, M. & Fialho. I. (2019). Avaliação das (para as) Aprendizagens: Das questões Teóricas às Práticas de Sala de Aula. In M. I. Ortigão, D. Fernandes, T. Pereira & L. Santos (Org), *Avaliar para*

Aprender no Brasil e em Portugal: Perspectivas Teóricas, Práticas e de Desenvolvimento (pp. 219-240). Editora CRV.

Burón, J. (1999). *Enseñar a aprender: Introdución a la Metacognición*. Mensajero, 5.ª Ed.

Fernandes, D. (2022). *Avaliar e aprender numa cultura de inovação pedagógica*. Leya.

Fernandes, D. (2020). *Avaliação Formativa*. Documento de trabalho. Projeto MAIA, https://www.researchgate.net/publication/339956122_Avaliacao_Formativa

Flavel, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new área of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 906-911.

Guzmán, M. (1999). *Para pensar mejor. Desarrolloo de la creatividad a través de los processos matemáticos*. Ediciones Pirámide.

Lester, F. e Garofalo, J. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal of Research in Mathematics Education*, 26 (3), 163-176.

Ponte et all. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. DGIDC - Ministério da Educação.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Reeves, T. (2006). Design research from a technology perspective. Em J. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp.52–66). Routledge.

O questionamento nas práticas de futuros professores de Matemática: os casos Ana e Berta

Mathematics future teachers practices of questioning: The cases of Ana and Berta

Nadia Ferreira[1], *João Pedro da Ponte*[2]

[1] ISPA - Instituto Universitário,
nadiadferreira@gmail.com
[2] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa,
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *Neste artigo, analisamos as práticas de duas futuras professoras do 2.º ciclo, procurando compreender como preparam, concretizam e refletem sobre o processo de questionamento na exploração de tarefas sobre números racionais. A recolha de dados foi realizada através da observação e gravação vídeo de quatro aulas de cada futura professora. Foram realizadas entrevistas no início e no final do estágio e antes e depois de cada aula. As aulas e as entrevistas, depois de transcritas, foram analisadas considerando o tipo de questionamento previsto e realizado. Também foram analisadas as respetivas planificações e reflexões escritas de modo a compreender o processo de preparação do questionamento e as ideias que tinham sobre o processo. Os resultados mostram que nem sempre os futuros professores anteveem um questionamento que os prepare para a concretização dos seus propósitos e que o tipo de questões está relacionado com o objetivo da interação e não estritamente com o momento de trabalho. Em todos os momentos podemos encontrar diversos tipos de questões. As perguntas de focalização são as mais recorrentes nas práticas das futuras professoras. As questões de inquirir são usadas para desafiar os alunos na resolução das tarefas e as de focalização para os guiar durante a resolução. Para as futuras professoras, para não alterar a natureza prevista para as tarefas propostas, colocam-se desafios no questionamento a realizar.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores de Matemática; Prática de ensino supervisionada; Números racionais; questionamento.

Abstract. *In this article, we analyze the practices of two future teachers of the 2nd cycle, trying to understand how they prepare, enact and reflect on the questioning process in the exploration of tasks on rational numbers. Data collection was carried out through observation and video recording of four classes of each future teacher. Interviews were conducted at the beginning and end of the internship and* *before and after each lesson. The lessons and interviews, after being transcribed, were analyzed considering the type of questioning foreseen and carried out. The respective written plans and reflections were also analyzed in order to understand the process of preparing the questioning and their ideas about the process. The results show that the future teachers do not always foresee a questioning that prepares them for achieving their purposes and that the type of questions is related to the aim of the interaction and not strictly to the moment of work. At all times we can find varied types of questions. Focusing questions are the most recurrent in the practices of future teachers. Inquiry questions are used to challenge students in solving tasks and focus questions to guide them during the solving process. In order not to change the expected nature of the proposed tasks, the questioning raised challenges for future teachers.*

Keywords: Initial training of mathematics teachers; Supervised teaching practice; rational numbers; questioning.

Introdução

O conhecimento que os futuros professores desenvolvem durante a sua formação inicial constitui um campo de muitas dúvidas e controvérsias. Importa compreender qual o conhecimento para ensinar Matemática necessário aos futuros professores, à entrada, durante e no final da sua formação (Ponte & Chapman, 2016). Damos atenção ao conhecimento sobre os números racionais uma vez que é um tema que levanta dificuldades na aprendizagem dos alunos, desafia os professores no que diz respeito ao conhecimento e às suas práticas, e tem grande relevância nos documentos curriculares dos primeiros anos (Ferreira, 2021).

Perceber a relação íntima entre o conhecimento e a prática dos professores é um empreendimento complexo (Ponte & Chapman, 2016), dada a sua relação com a prática docente. A sua compreensão requer que o observemos na perspetiva dos principais atores. Isiksal e Cakiroglu (2011) mostram que os futuros professores têm diferentes ideias sobre os erros e dificuldades dos alunos e referem várias estratégias para os evitar e ultrapassar. Em Portugal, Ponte et al. (2007) alertam que os futuros professores revelam ideias nem sempre alinhadas com os resultados da investigação e, quando o fazem, sublinham a importância das questões abertas, de levar os alunos a construir as suas ideias sem que lhes sejam dadas as respostas e de os alunos comunicarem as suas questões, ideias e raciocínios.

Sendo o ensino-aprendizagem dos números racionais um significativo desafio profissional, é importante compreender o conhecimento do futuro professor que ensina este tópico (Isiksal & Cakiroglu, 2010). Ponte e Chapman (2016) alertam para a importância de investigar as experiências de ensino-aprendizagem de futuros professores de modo a compreender as dinâmicas vividas, suas potencialidades e desafios. Assim, neste artigo analisamos a prática de ensino supervisionada de duas futuras professoras, procurando compreender como preparam e concretizam o questionamento a desenvolver junto dos alunos e que ideias emergem nas suas reflexões sobre o questionamento conseguido para apoiar e desafiar os seus alunos.

Prever, concretizar e refletir sobre o questionamento

Debruçando-nos na prática letiva, reconhecemos duas dimensões essenciais no conhecimento didático: o conhecimento sobre as tarefas e o conhecimento sobre os alunos (Ponte & Chapman, 2016). Relacionando estas duas dimensões temos aspetos relativos à comunicação e às ações dos professores desenvolvidas na prática letiva. Atravessando e integrando estas dimensões identificamos o conhecimento sobre o currículo e avaliação (Ferreira, 2021).

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática é complexo e multidimensional. Assim, o olhar sobre o conhecimento para ensinar, no que respeita à dimensão didática, assume igual complexidade. A gestão dos contributos dos alunos e a explicitação das ideias matemáticas é exigente e importa que os futuros professores saibam dar explica*ções, colocar questões, ouvir as* respostas das crianças e responder de forma diferenciada aos alunos (Ferreira, 2021). Segundo Boavida et al. (2008), para promover uma aprendizagem significativa, o processo de questionamento não é fácil. Ou seja, é necessário fazer questões que não tenham implícita a resposta e que não tenham por resposta apenas "sim" ou "não". Importa, também, dar tempo aos alunos para pensarem e responderem ao contrário de lançar de imediato as ideias a construir. De modo a promover alguma aprendizagem, as questões devem implicar, por parte dos alunos, análise, reflexão e a explicação de raciocínios, de modo a que o professor perceba o que o aluno sabe e não sabe. Assim, as questões devem ser tendencialmente de natureza aberta e desencadear, sempre que possível, uma discussão sobre os conceitos a aprender. Note-se que ainda assim as questões mais fechadas podem ser importantes para focar os alunos no essencial. Ponte et al. (2007) alertam para importância que os futuros professores tendem a dar a estes aspetos, ainda que esta visão não seja partilhada por todos eles.

A comunicação, na sua dimensão discursiva, pode ser oral e escrita, incluindo a linguagem e as representações matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000). É também um aspeto essencial de qualquer prática pedagógica (Ponte et al., 2012). Comunicar é tornar algo em comum podendo-se fazer uso de gestos, representações ativas, pictóricas e simbólicas, explicações e questões.

Um aspeto central da comunicação é o questionamento, podendo distinguir-se entre diversos tipos de questões (Ponte & Serrazina, 2000) ou estudar diversos padrões de questionamento (Martinho, 2007; Menezes et al., 2014). Partindo do trabalho de Love e Mason, Ponte e Serrazina (2000) identificam diferentes tipos de questões, dependendo da razão pela qual se questiona: (i) Questões de *inquirição*, quando o professor questiona para procurar que surja uma variedade de respostas legítimas; (ii) Questão de *focalização*, quando o professor questiona para que os alunos deem atenção a um dado ou condição; e (iii) Questões de *confirmação*, quando o professor questiona para obter a resposta conhecida e esperada (Ponte & Serrazina, 2000). Note-se que, complementarmente, pode existir lugar à negociação de significados matemáticos e a processos como redizer para apoiar o desenvolvimento da linguagem dos alunos. Neste sentido Menezes et al. (2014) salientam a importância de considerar os propósitos dos professores para colocarem determinadas perguntas. Sendo as questões pedidos de informação dirigidos aos alunos, ou servem para aceder ao conhecimento dos alunos, chamadas de perguntas de teste ou de verificação, ou são questões para promover a compreensão e o conhecimento matemático dos alunos.

Martinho (2007), no seu estudo, debruçou-se sobre os casos de três professoras que questionavam bastante os alunos, individualmente e em grande grupo, e verificou que as professoras recorriam predominantemente a diferentes tipo de questões. Todas recorriam a questões de confirmação dando mais ou menos espaço aos alunos para darem a resposta. Também todas recorriam a questões de focalização principalmente quando questionavam individualmente. As questões de inquirição foram menos frequentes nas práticas das docentes e surgiram quando as professoras já estavam despertas para a importância deste tipo de questões na promoção das aprendizagens.

Para além da função das questões o seu foco também pode ser díspar. No seu estudo Johar et al. (2017) debruçam-se sobre as implicações que a natureza das tarefas e a natureza do questionamento trazem para o conhecimento que é construído sobre frações. Os autores encontraram diferenças no foco do questionamento relacionadas com a formação dos futuros professores e em aspetos curriculares e culturais, nomeadamente no que se relaciona com o seu conhecimento matemático, a cultura de sala de aula e os recursos curriculares disponíveis como os manuais escolares. Assim, os futuros professores, na resolução de problemas com contexto matemático ou não matemático tendiam a questionar com maior ou menor frequência os seus alunos. Um outro aspeto que emergiu relacionava-se com o propósito do questionamento servindo este para explorar uma maior diversidade de estratégias, mostrando maior flexibilidade na abordagem às tarefas propostas ou para apoiar os alunos na resolução de problemas com diferentes estratégias com foco apenas em determinadas ideias, representações ou conceitos matemáticos. Assim, o questionamento pode ser considerado um aspeto estruturante da comunicação dos professores. Pode ser analisado o tipo de questões que o professor faz e quando as faz e, ainda, o foco destas questões, sendo importante que o futuro professor tenha claro para si os propósitos do questionamento.

Metodologia de investigação

Este estudo assume uma abordagem qualitativa e interpretativa, seguindo um design de estudo de caso (Stake, 1995). Analisamos neste artigo as práticas duas futuras professoras do 2.º ciclo do ensino básico (Ana e Berta), formandas de duas escolas superiores de educação (designadas por ESE A e ESE B), que iam lecionar números racionais durante o estágio do último semestre do mestrado em ensino.

Foram recolhidos e analisados os quatro vídeos de aulas de cada futura professora, transcritos na sua totalidade. Foram audiogravadas entrevistas semiestruturadas no início (iEI) e no final do estágio (iEF) e antes (iEAAx) e depois de cada aula (iEDAx). Foram ainda recolhidos os documentos produzidos no estágio (planificações, registos pessoais e reflexões escritas). A análise dos dados assume um cunho descritivo e interpretativo procurando caracterizar o processo de planificação, concretização e reflexão sobre o questionamento de futuras professoras identificando o tipo de questões que realizam e os desafios durante o questionamento. Os dados foram analisados dedutivamente partindo do quadro teórico anteriormente apresentado (Goetz & LeCompte, 1984).

O questionamento na prática pedagógica: os casos de Ana e Berta

Perspetivas sobre a previsão do questionamento e planificação

Ana e Berta pertenciam a ESE diferentes e, como estudantes, tiveram percursos académicos distintos. Na formação inicial, quer na licenciatura, como no mestrado, Ana considerou-se e era considerada como uma boa aluna, mas que tinha que estudar os aspetos matemáticos a ensinar. Ainda assim sentiu, por vezes, dificuldade em executar os seus propósitos. Via a Matemática como uma ciência e também como uma ferramenta a usar no quotidiano e considerava que era importante que os alunos compreendessem os conceitos. Berta teve um percurso diferente e considerou-se uma aluna trabalhadora e com facilidade de levar a cabo as tarefas pedidas, obtendo muito boas classificações em todas as unidades curriculares. Via a Matemática como uma ciência centrada na resolução de problemas e considerava importante que os alunos compreendessem os conceitos e desenvolvessem a comunicação matemática. As indicações dadas a ambas para a planificação eram idênticas, mas o seu processo foi diferente. Nas entrevistas, Ana e Berta, debruçaram-se sobre o processo de preparação das aulas e sobre o questionamento.

Ana era insegura no que pretendia, sentindo-se dividida entre as abordagens de ensino. Considerou importante que os alunos compreendessem os conceitos e que o professor fosse um "bom explicador". Sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais, referiu que, para iniciar o tema, deve-se propor problemas: "Então e agora o que é que me estão a pedir aqui? Como é que vamos fazer? Como é que nós podemos fazer? A discussão de várias estratégias, a exploração do que surge, até chegar realmente ao ponto da questão"

(AEF). Ou seja, perspetivou questões genéricas para a construção do conhecimento sobre números racionais. Quando questionada sobre como pretendia ultrapassar as suas inseguranças, referiu que tinha que "planificar, trabalhar bem os materiais … ter bem presente o que quero fazer … Tenho de estar muito bem preparada para aquilo que eles me possam dizer" (AEI). Ou seja, valorizou o processo de planificação. Estava alerta para a exploração dos materiais selecionados e que, na planificação, devia antecipar resoluções dos alunos.

As disciplinas da ESE davam orientações sobre os aspetos essenciais a incluir nos planos de aula e Ana sentiu que não correspondia ao pedido, mas não se articulou com os supervisores. No plano de aula previu a exploração do conceito de inverso de um número racional e que os alunos descobrissem a propriedade (Figura 1).

(90')

Correção do trabalho de casa (propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração).

Entrega das questões-aula. Demonstração da correção de um dos problemas propostos (o caracol e o poço).

Ficha de consolidação das propriedades da multiplicação.

Tarefa exploratória:
Propõe-se aos alunos a representação pictórica de produtos de números racionais (por exemplo: $\frac{1}{3}$de 3; $\frac{2}{5}$de$\frac{5}{2}$). Pelas representações efetuadas os alunos descobrem a regularidade: o produto de um número pelo seu inverso é 1 e identificam que nas multiplicações efetuadas com frações, há a inversão do numerador pelo seu denominador.

Figura 1. Antevisão de Ana para a aula 1

Nas restantes aulas a planificação escrita foi organizada do mesmo modo e Ana não previu questões a colocar aos alunos.

Assim, Ana considerou que o professor devia ser um "bom explicador" e um desafiador que apoia os alunos nas suas aprendizagens questionando-os. O questionamento tinha como objetivo fazer emergir diversas resoluções e focalizar os alunos em determinadas resoluções. As questões elaboradas eram gerais e para um contexto da resolução de problemas. Valorizou o processo de planificação, mas não preparou o questionamento.

Berta desenvolveu um processo de planificação diferente. Era segura e preparou o seu trabalho com os supervisores. Considerou importante que os alunos compreendessem os conceitos e desenvolvessem a comunicação matemática através da resolução de problemas. Para o momento de proposta e exploração da tarefa 2: "A Herança do Rei" registou as questões: "O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis?". Este questionamento era igual em todas as tarefas, era desafiante e pouco próximo dos conceitos a explorar ou às dificuldades dos alunos. Notese que a supervisora sugeriu a explicitação das questões, no caso de os alunos terem dúvidas. Berta acrescentou "ter atenção às diferentes representações por parte dos alunos". Na primeira versão da planificação da tarefa 3: "Petrolex Lda" as questões eram mais específicas e procuravam apoiar e guiar os alunos (Figura 2).

Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos.

Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece?

Comment: Qual pode ser a dificuldade inicial? Não ter um valor para o preço da gasolina?

Comment: Incentivar a que realizem os cálculos com um valor se não estiverem a conseguir avançar!

Comment: Envolvendo o quê nessa estratégia? Ter também atenção à utilização de diferentes representações, por parte dos alunos: frações, decimais,…

Figura 2. Primeira antevisão da tarefa 3 e respetivos comentários da supervisora

No segundo parágrafo formulou questões, focando-se na questão da razoabilidade do preço. Depois das sugestões da supervisora, Berta fez algumas alterações e passou a definir questões mais próximas dos conceitos que queria trabalhar. O foco das questões estava nos processos de resolução de problemas e no conceito de percentagem, diversificou as questões e incluiu questões de natureza mais desafiante.

Para a discussão da tarefa previu a apresentação das resoluções e questionar os alunos, mas sem especificar como. O trabalho ficou dividido em duas aulas e depois de analisar as resoluções previu a discussão em grande grupo na segunda parte. Berta pretendia explorar o erro que tinha previsto, de modo a levar os alunos a compreender o conceito de percentagem (Figura 3).

Um dos elementos do par, escolhido pelo professor, faz a apresentação oral e escrita no quadro. O docente solicita muita atenção por parte dos colegas de turma, para que consigam colocar questões. O professor também deve colocar questões como: Por que escolheram este preço para a gasolina? Esse preço é razoável? Os resultados seriam diferentes se escolhessem outro preço? Por que razão os preços não voltam ao preço inicial, independentemente do valor escolhido? O que é que isso tem a ver com as percentagens? O valor do aumento e da descida alguma vez seriam iguais? Porquê?

É importante que os alunos percebam o conceito de percentagem e que o relacionem com o de unidade, para entenderem que duas percentagens iguais, que incidem sobre unidades diferentes, não podem dar resultados iguais. Para isso, o professor utiliza cartolinas (uma tira é a unidade; outra tira que é a unidade e mais 10%; outra tira que é a nova unidade e se retira 10%).

Figura 3. Antevisão da segunda parte da aula da tarefa 3

Na planificação de Berta, observamos que previu questões a realizar de modo a explorar as diferentes resoluções e a interligá-las.

Berta, na sua reflexão escrita, referiu que foi "questionando os alunos, no sentido de os fazer pensar sobre a tarefa". Nos casos dos alunos com dificuldades, teve que "fazer novas questões e dar algumas pistas". Para apoiar e guiar os alunos "eu respondia fazendo, também, uma questão". Apesar da preparação feita, considerou o questionamento como um desafio:

> Eu acho que o grande desafio vai ser colocar as questões . . . tentar que eles desconstruam esta ideia, tentar levá-los a dar um valor [aceitável] à gasolina . . . As questões, também vão ser importantes. Tenho algumas preparadas, mas vamos ver se consigo. . . Houve pares que não me disseram que tinham de pensar num valor e, portanto, tive de dizer. Não era o que eu queria, mas, tentei de outra forma, não consegui. Noutros pares consegui! (BEAA3)

Ou seja, Berta sentiu que existiam desafios relativos ao questionamento sem descer o nível de complexidade das tarefas. Assim, previu realizar questões que pudessem desafiar e apoiar os alunos a resolver a tarefa. Este questionamento era genérico e com feedback da supervisora, especificou algumas questões. Na tarefa 3, depois de ter tido acesso às diferentes resoluções, previu questões para explorar as diferentes resoluções e a interligá-las. Note-se que continuou a apontar como desafiante o questionamento sem descer o nível de desafio da tarefa.

Ana e Berta deram importância ao processo de planificação, mas fizeram-no de modo diferente. Também era comum a relevância que deram ao papel desafiador do professor na construção do conhecimento por parte dos alunos. Ana acrescentou o papel de bom "explicador". Ana, apesar de mais insegura, previu pouco o trabalho a realizar e sem discutir a antevisão com os supervisores. Berta preparou e descreveu os diferentes momentos das aulas e discutiu a sua planificação com os supervisores aprofundando o questionamento previsto. Ana não registou o questionamento, mas nas entrevistas elaborou questões gerais com objetivo de fazer emergir diversas resoluções ou focalizar os alunos em determinadas resoluções. Berta registou as questões dos diferentes momentos das aulas. Inicialmente as questões eram gerais, mas com as sugestões da supervisora, especificou. Depois de ter acesso às resoluções dos alunos, diversificou o questionamento previsto de modo a explorar as diferentes resoluções e a interligá-las. Berta, apesar de prever questões, temia descer o nível de desafio das tarefas.

Concretização do questionamento

Ana e Berta desenvolveram a sua prática letiva de modo diferente. Ana, inicialmente, na primeira fase da prática letiva, pretendia que os alunos compreendessem os conceitos sobre números racionais e em seguida, na segunda fase da prática letiva, propôs-se a recorrer a problemas com contextos não matemáticos. Berta pretendia a exploração dos conceitos e desenvolver capacidades matemáticas através de tarefas com contextos não matemáticos.

Ana, no momento de proposta da tarefa 1, da primeira fase da prática, sugeriu as estratégias que esperava que os alunos adotassem. Na segunda fase da prática letiva, apresentou o contexto enquadrando as tarefas das duas aulas seguintes de modo a que os alunos dessem significado ao proposto. Iniciou o trabalho identificando aspetos fundamentais do contexto. A questão colocada focalizou os alunos procurando clarificar o significado de dividir como partilhar.

No momento de exploração das tarefas, na primeira fase da prática, Ana circulou, observou as resoluções e reforçou o pedido. Interagiu pouco com os alunos e sugeriu as resoluções previstas. Na segunda fase, pretendia uma dinâmica diferente e observou, questionou e reforçou o que era pedido. Quando se deparou com alunos bloqueados, e que ainda não tinham começado o trabalho, guiou-os focando-os no enunciado e no que era pedido na tarefa: "O Luís é o dono do chocolate e ele vai dividir uma parte do chocolate entre os dois irmãos. Eu tenho um chocolate. Vou tirar $\frac{1}{3}$ desse chocolate. E esse $\frac{1}{3}$ vou dividir por vocês as duas". Ou seja, sentiu necessidade de, com alguns alunos, voltar a identificar dados e as condições da situação colocada. No seu discurso introduziu a palavra dividir e sugeriu a operação. Esta indicação pode ter alterado o nível de complexidade da tarefa para aqueles alunos. Nas restantes tarefas, no momento de trabalho autónomo, questionou pouco e tendia a sugerir estratégias quando os alunos sentiam dificuldades.

Nos momentos de discussão das tarefas em grande grupo o questionamento tinha como objetivo apoiar a apresentação das resoluções por parte dos alunos. Na primeira aula, da primeira fase da prática, Ana pediu aos alunos que resolvessem e representassem pictoricamente a expressão "$\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$. Solicitou a um aluno que apresentasse a sua resolução correta e guiou a apresentação e retomou a situação colocada: "A Gabi foi dividir cada uma das 5 unidades ao meio. Mas é isso que nos dizem para fazer? … Nós temos que representar $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$". Quando os alunos, com o seu apoio, terminaram a apresentação, desenvolveu explicações sobre os procedimentos e conceitos ou sistematizou as ideias.

Na segunda fase da prática, as tarefas permitiam diferentes resoluções por parte dos alunos. Uma das tarefas exploradas foi a Tarefa 1:

> **Resolve os problemas e explica o teu raciocínio**
>
> ***A Família MATS***
>
> **A animação começa ao pequeno-almoço. O Filipe, o irmão mais velho, está a falar sobre o jogo de futebol da noite anterior. Está tão feliz que decide partilhar $\frac{1}{3}$ do seu chocolate com os seus dois irmãos, a Patrícia e o Samuel. Quanto recebeu cada um?**

Figura 4. Tarefa 3 para introduzir a divisão de frações (Ana)

A primeira apresentação no quadro foi da aluna Raquel que desenhou a sua resolução e Ana apoiou a explicação:

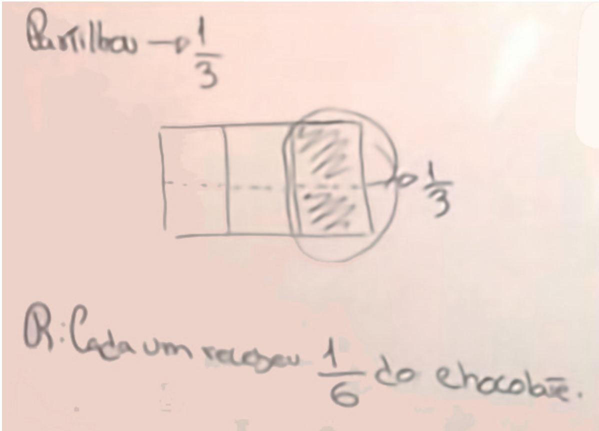


Figura 5. Resolução no quadro da Tarefa 1 (Fase 2)

> Raquel: Primeiro eu fiz a tablete de chocolate, depois fiz $\frac{1}{3}$ (apontando para a fração $\frac{1}{3}$ na parte superior da resolução e para a representação pictórica) e depois...
> Ana: Ou seja dividiste o chocolate em quantas partes?
> Raquel: Depois como iria dividir $\frac{1}{3}$ em dois porque dá metade para cada irmão...
> Ana: Foste dividir em dois porque dá metade para cada irmão. E porque é que chegaste a $\frac{1}{6}$? Como é que chegaste a $\frac{1}{6}$?
> Raquel: Porque depois ele começa a ser dividido... E ele só tem aqui uma...
> Ana: Ele só deu um bocado para cada irmão, ok... (Raquel sentou-se)

A aluna dividiu a unidade em três partes iguais. Em seguida dividiu as três partes ao meio, referindo que eram dois irmãos. Ana, inquirindo, guiou a aluna a explicar como chegou ao quociente $\frac{1}{6}$ que estava omisso na resolução. Raquel explicou que cada irmão ficou com uma parte da terça parte e Ana validou a resposta. No final da apresentação das resoluções, da primeira tarefa, Ana guiou os alunos para o algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica) desenvolvendo um processo de questionamento com perguntas de focalização que terminou numa breve explicação: “quando nós estamos a dividir por dois por quanto é que multiplicamos?”. Quando os alunos deram a resposta esperada pela futura professora, Ana redisse as últimas respostas e reforçou a ideia geral a compreender, introduzindo o algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica) explicando o procedimento de cálculo. Na discussão das tarefas, na primeira fase da prática, Ana solicitou a um aluno que apresentasse a sua resolução correta e apoiou guiando a apresentação. Na segunda fase da prática, promoveu a apresentação das diferentes resoluções e foi apoiando e guiando os alunos nas apresentações e na explicitação das suas ideias. No final, reviu as estratégias registadas no quadro, validando os resultados. Neste momento, (i) desenvolveu um questionamento cada vez mais focado, guiando e informando os alunos até chegar aos procedimentos a aprender; (ii) guiou com questões cada vez menos desafiantes e mais focalizadas chegando a sugerir processos.

Berta, propôs aos alunos três tarefas e em todas, quando iniciou o trabalho, explorou o contexto não matemático das tarefas. Na "tarefa do rei" sublinhou o número de filhos do rei e que a situação era de partilha equitativa. Leu a situação (Figura 6):

- O filho mais velho receberia sempre $\frac{5}{10}$ da fortuna;
- O filho mais novo receberia sempre a quarta parte da fortuna;
- Os restantes filhos receberiam igualmente a restante fortuna.

1.1. Qual das seguintes representações corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos? Porquê?

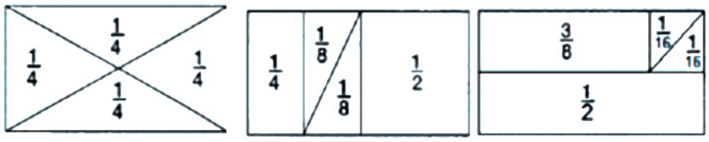


Figura 6. Questão 1.1. da tarefa 2 da Berta

> José: Era injusto!
>
> Berta: "Primeiro o que é que vamos querer saber? Que parte da herança recebeu cada um dos filhos?" Portanto, quanto é que recebeu o filho mais velho, que parte recebeu o mais novo e os outros dois?
>
> Ana: Como é que fazemos? Fazemos uma bola?
>
> Berta: Fazem como vocês acharem que é melhor, para [qual a melhor opção] … Portanto nós sabemos um dos valores de um dos filhos, o filho mais velho. Quanto é que será que receberam os outros? Vocês aqui têm que dizer tanto para o mais novo como para os do meio.

Berta leu a tarefa e sublinhou dados importantes e questões-chave a ter em conta. Envolvendo os alunos estruturou um caminho de resolução, recorrendo a questões de focalização. Na interação com os alunos, com questões e sugestões, estruturou a resolução – primeiro verificaram que parte da herança coube ao filho mais velho e ao mais novo e depois calcularam que parte coube aos outros dois filhos de forma equitativa – mas, ao fazê-lo, baixou o nível de desafio da tarefa. Nas restantes tarefas propostas, Berta clarificou a situação colocada, inquirindo os alunos sobre a questão central e confrontando-os com as diferentes respostas que foram surgindo, ou saltou este momento.

Nos momentos de trabalho autónomo e exploração da tarefa Berta circulou e desafiou os alunos a focar-se na questão central da pergunta da tarefa proposta. Na tarefa 2 (Figura 6), inquiriu e focalizou, apoiando o estabelecimento de relações entre representações e a identificação da unidade de referência, para tal guiou os alunos e sugeriu a resolução.

A questão 1.1. apresentava três representações possíveis das condições (Figura 6). Perante as dúvidas que foram surgindo, Berta focou os alunos em $\frac{5}{10}$ como equivalente a metade e o seu significado na herança. Para que os alunos estabelecessem relações entre as várias representações, repetiu a questão da tarefa focando no contexto e no estabelecimento da relação pretendida. Perante a dificuldade dos alunos, a futura professora insistiu:

> Berta: Não podes ajudar [Para o outro aluno]! [O aluno recorreu à calculadora] Ai a calculadora! Mas o que quer dizer $\frac{5}{10}$? Pensa lá!
> Aluno: É... no testamento é metade!
> Berta: Então, o filho mais velho vai receber quanto?
> Aluno: Metade? (revelando alguma insegurança)
> Berta: Metade do quê?
> Aluno: Do testamento da herança.

De modo a focar a atenção na unidade de referência, Berta salientou a ideia que a fração é referente a uma unidade específica – a herança. Quando o aluno chegou à ideia de metade da unidade (herança), sugeriu que os alunos representassem as suas ideias sem indicar a forma de o fazer. Noutros momentos de exploração de tarefas, em grande grupo, quando detetava dificuldades generalizadas, Berta clarificou condições dando informação complementar, para depois, focar na questão colocada, sugeriu que testassem a sua conjetura ou saltou este momento.

Nos momentos de discussão das tarefas fez diferentes opções. No momento de discussão das questões da Tarefa 2, na questão 1.1, explicou a resolução, combinando informações com questões de focalização, terminando com a ideia fundamental reforçando a resolução registada dos alunos no quadro. Exemplo desta opção foi o momento de discussão da questão 1.1., onde, interagindo com a representação (Figura 7) afirmou: "Portanto aqui era $\frac{1}{2}$ que era metade, depois dividia ao meio e ficava $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{8}$. Concordam com esta opção?"

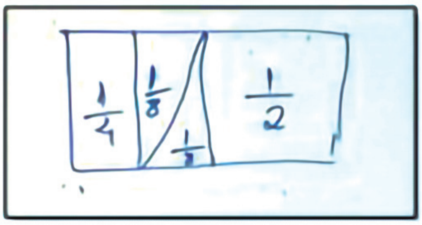


Figura 7. Representação da resposta correta à questão 1.1

Os alunos acenaram afirmativamente e, partindo da representação, Berta estabeleceu a relação entre as frações e as percentagens ($\frac{1}{2}$; 0,5 ; 50%). Guiou os alunos sobre a restante resolução da questão 1.1 combinando informações com questões de focalização que remetiam para o significado das frações apresentadas no enunciado:

> Berta: É uma dessas quatro partes que o rei dividiu a herança, certo. Depois sabíamos que a restante herança era dividida então por os outros dois filhos. E que herança é que nós tínhamos?
> Aluno: $\frac{1}{8}$

> Berta: O que é que isso significa? Temos ali $\frac{1}{8}$ mas nós sabíamos que deste total, o todo, nós tínhamos metade que era para o filho mais velho, tínhamos $\frac{1}{4}$ para o filho mais novo, e o que é que nos sobrava aqui?
>
> Aluno: Os restantes filhos.
>
> Berta: Os restantes filhos. $\frac{1}{8}$ para cada filho. O que é [$\frac{1}{8}$] em relação a $\frac{1}{4}$?

Guiando os alunos, Berta estabeleceu a parte que cabia aos filhos do meio ($\frac{1}{8}$) e estabeleceu a relação de metade com $\frac{1}{4}$. Nas questões seguintes sugeriu a representação da situação ou guiou os alunos na apresentação das suas resoluções, incorretas e corretas. Nestes momentos, apoiou os alunos guiando com questões de confirmação e redizendo ideias dos alunos ou apoiou a discussão.

Na proposta e na exploração da tarefa, Ana e Berta recorreram a questões de *inquirição e focalização*. Ana começava por desafiar, mas, logo em seguida, recorria a questões de *focalização*. Berta *redizia* as suas afirmações de modo a guiar os alunos na resolução das tarefas. Berta para promover a discussão colocava questões de *confirmação e redizia* para guiar. Quando os alunos tinham dificuldades usava questões de focalização. Por vezes as questões de *focalização e confirmação* eram acompanhadas com processos de redizer mantendo a mesma informação ou acrescentando ideias.

Conclusão

Importa compreender o conhecimento dos futuros professores no momento da sua prática supervisionada, assumindo que o conhecimento do futuro professor é sujeito a circunstâncias que permitem a perceção da sua natureza (Ponte & Chapman, 2016). Assim, neste artigo analisámos, na prática de ensino supervisionada de duas futuras professoras, como preparam e concretizam o questionamento junto dos alunos e que ideias emergem nas suas reflexões sobre o questionamento realizado para apoiar e desafiar os seus alunos.

Ana e Berta consideravam que um professor devia apoiar e guiar os alunos na construção do conhecimento desafiando-os a pensar sobre as suas resoluções. Nas suas planificações descreveram as aulas de modo diferente. Ana não previu um questionamento, mas nas entrevistas elaborou questões gerais que tinham como objetivo evidenciar diversas resoluções ou focalizar os alunos em determinadas estratégias na resolução de problemas. Berta previu as questões gerais, a colocar nos diferentes momentos da aula, e com o apoio da supervisora especificou mais o questionamento. Depois de analisar as resoluções dos seus alunos diversificou as questões previstas na sua planificação. Para ela, a concretização do processo de questionamento, sem alterar a natureza das tarefas, era um desafio.

Na concretização das aulas previstas, na proposta e na exploração da tarefa, Berta e Ana recorreram a questões de *inquirição e focalização*. Ana começava por *inquirir* de modo a desafiar os alunos e, em seguida, para os guiar, recorria a questões de *focalização*. Berta, para apoiar os alunos, tentando promover a discussão, recorreu a questões do tipo *confirmação*. Nas circunstâncias onde os alunos tinham dificuldades na resolução das tarefas mostrou tendência para usar questões de focalização. Ambas as futuras professoras acompanhavam as questões realizadas nos diferentes momentos com processos de redizer mantendo a mesma informação ou acrescentando ideias.

Neste artigo podemos concluir que, na preparação que os futuros professores fazem para a lecionação, nem sempre anteveem um questionamento que lhes possibilite a concretização dos seus propósitos. Ou seja, um questionamento que desafie os alunos a construir as suas ideias matemáticas. Também se conclui que o tipo de questões está relacionado com o objetivo da interação e não estritamente com o momento de trabalho. Nos diferentes momentos da aula existe um maior enfâse num tipo de interação e, por isso, determinados tipos de questões surgem mais nuns momentos do que noutros, mas em todos os momentos podemos encontrar os três tipos de questões. As perguntas de focalização são as mais recorrentes nas práticas das futuras professoras.

Referências

Boavida, A.M., Paiva, A.L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos. DGIDC.

Ferreira, F. (2021). *Conhecimento didático e prática pedagógica de futuros professores no ensino dos números racionais* [Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade do Lisboa]. http://hdl.handle.net/10451/47812

Goetz, J.P., & Le Compte, M.D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.* Academic Press.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 213–230.

Johar, R., Patahuddin, S.M., & Widjaja, W. (2017). Linking pre-service teachers' questioning and students' strategies in solving contextual problems: A case study in Indonesia and the Netherlands. *The Mathematics Enthusiast*, *14(1)*, 101-128. Available at: https://scholarworks.umt.edu/tme/vol14/iss1/8

Martinho, M.H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico* [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1523

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M.H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J.P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de Matemática* (pp. 135-164). IE (on-line).

Mewborn, D.S. (2000). Learning to teach elementary mathematics: Ecological elements of a field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*, 27-46.

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). Taylor & Francis.

Ponte, J.P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, *1*, 67-88.

Ponte, J.P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), 39-74.

Stake, R. (1995). *A arte da investigação com estudos de caso*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Cartazes
Posters

Instructional materials to teach a student with autism to associate number with quantity.

Melody García-Moya[1], *Rocío Blanco*[2]

[1]University of Castilla-La Mancha, melody.garcia@uclm.es
[2]University of Castilla-La Mancha, mariarocio.blanco@uclm.es

Resumo: *O objetivo do presente estudo foi ensinar a uma criança com autismo a associação de número com quantidade na faixa de 1 a 5. Neste trabalho participou um aluno de 9 anos e 8 meses com diagnóstico de TEA e TDAH com deficiência intelectual leve (QI = 58). O estudo consistiu em: uma sessão de avaliação inicial, cinco sessões de treinamento, uma sessão de avaliação final e uma sessão de manutenção seis semanas após a última sessão de treinamento. Cada sessão durou aproximadamente 15 minutos. Ao longo do treinamento, o aluno teve que utilizar três diferentes materiais manipuláveis baseados na metodologia TEACCH. Os resultados mostraram que o aluno não só alcançou a nota máxima na avaliação final, como também manteve seu aprendizado.*

Palavras-chave: *Associar número com quantidade. Transtorno do espectro do autismo. Materiais. Matemática. Escola básica.*

Abstract: *The objective of the present study was to teach a child with autism the association of number with quantity in the range of 1 to 5. In this work participated a 9 years and 8 months student with a diagnosis of ASD and ADHD with mild intellectual disability (IQ = 58). The study consisted in: one initial evaluation session, five training sessions, one final evaluation session, and one maintenance session six weeks after the last training session. Each session lasted approximately 15 minutes. Along training, the student had to use three different manipulative materials based on the TEACCH methodology. The results showed that the student not only achieved the maximum score in the final evaluation, but also kept up his learning.*

Keywords: *Associate number with quantity. Autism spectrum disorder.* Materials. Mathematics. Mainstream primary school.

Some students with Autism Spectrum Disorder (ASD) may have difficulties in learning mathematical content, such as those requiring numerical skills (Aagten- Murphy et al., 2015; Bullen et al., 2020). Therefore, specific resources are needed to help them overcome these difficulties and also, to help teachers promote the inclusion of students with ASD in mainstream classrooms.

The association of number with quantity is one of the basic skills for developing number sense. Several authors have explored the use of manipulatives with students with ASD obtaining positive results (Kaffer, 2010; Maajeeny, 2017; Garcia, Arantes & Goyos, 2017). For this reason, the objective of the present study was: to teach a child with autism the association of number with quantity in the range of 1 to 5 using various materials.

This work is part of a doctoral thesis in which a large number of students with ASD have participated. In this work, we focus on a 9 years and 8 months old student with a diagnosis of ASD and ADHD with mild intellectual disability (IQ = 58), who attends the fourth year of an mainstream primary school. He receives educational support from special education teachers and follows a teaching-learning process adapted to his needs. In addition, he has a lower vocabulary and understanding of pragmatics than expected for his age.

The study consisted in: one initial evaluation session, five training sessions, one final evaluation session, and one maintenance session six weeks after the last training session. Each session lasted approximately 15 minutes. Along training, the student had to use three different manipulative materials based on the TEACCH methodology (Schopler et al., 1971): (1) Five foam hands with different raised fingers and number cards from 1 to 5; (2) Five worms to fullfil with finger paint, and number cards from 1 to 5; (3) Number cards from 1 to 5, a can with 12 crayons and an empty container to perform the counting.

The evaluation criteria were: (1) The student needs very notable help to carry out the activity or do not carry it out; (2) The student performs the activity with considerable help, that is, the student solves half of the activity correctly and autonomously; (3) The student solves more than half of the activity correctly and autonomously; (4) The student performs the activity correctly and autonomously. Furthermore, when the student achieved the maximum score in three consecutive sessions, the student stopped working with that material.

Figure 1 shows the scores obtained by the student during the learning experience. In the initial evaluation, the student had difficulties in associating the number with the quantity in the range of 1 to 5 of the numerical sequence. The student improved his performance during training sessions. In this phase, the student carried out three activities, each one with a different material. Material 1 was the easiest for the student to use because he could touch and count the fingers of the five foam hands. Material 2 was somewhat complicated for the student, because he sometimes also counted the head of the worm, even though it was not painted. Material 3 required attention and, sometimes, the student made mistakes by adding a different amount from that one indicated by the number on the card. In the final evaluation, he reached the maximum score and he kept this score in the maintenance session.

The results suggest the suitability of the use of materials based on the TEACCH methodology to teach the association of number with quantity to students with ASD. Our findings are consistent with results obtained by other researchers (Kaffer, 2010; Maajeeny, 2017; Garcia, Arantes & Goyos, 2017) and support the benefits of using the TEACCH methodology with students with ASD to improve their educational skills (Sanz-Cervera et al., 2018).

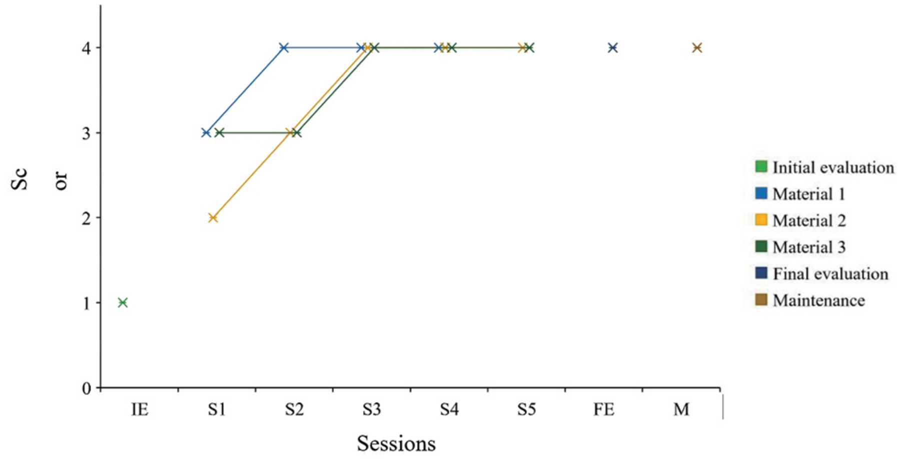


Figure 1. Scores obtained by the student.

This experience highlights the importance of using educational tools adapted to the strengths and limitations shown by students with ASD to facilitate their learning and inclusion in mainstream schools.

Bibliographic references

Aagten-Murphy, D., Attucci, C., Daniel, N., Klaric, E., Burr, D., & Pellicano, E. (2015). Numerical estimation in children with autism. *Autism Research*, *8*(6), 668-681.

Bullen, J. C., Swain Lerro, L., Zajic, M., McIntyre, N., & Mundy, P. (2020). A developmental study of mathematics in children with autism spectrum disorder, symptoms of attention deficit hyperactivity disorder, or typical development. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *50*(12), 4463-4476.

Garcia, R. V., Arantes, A. K., & Goyos, A. C. (2017). Enseñanza de las relaciones numéricas para niños con trastorno de espectro autista [Teaching Numerical Relationships for Children with Autism Spectrum Disorder]. *Psicologia da Educação*, (45), 11-20.

Kaffer, C. L. (2010). *The effects of video modeling on skill acquisition in children with autism spectrum disorder* [Doctoral thesis, Universidad de Arizona]. UMIR. https://www.proquest.com/docview/821710492?accountid=14513

Maajeeny, F. (2017). *The effects of interactive whiteboard instruction on early numeracy skills of students with autism spectrum disorders* [Doctoral thesis. Universidad de Maryland]. Drum.lib.umd.edu. https://drum.lib.umd.edu/bitstream/handle/1903/19350/Maajeeny_umd_0117E_17847.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sanz-Cervera, P., Fernández-Andrés, M. I., Pastor-Cerezuela, G., & Tárraga-Mínguez, R. (2018). Efectividad de las intervenciones basadas en metodología TEACCH en el trastorno del espectro autista: un estudio de revisión [Effectiveness of interventions based on TEACCH methodology in autism spectrum disorder: a review study]. *Papeles del psicólogo*, *39*(1), 40-50.

Schopler, E., Brehm, S., Kinsbourne, M., & Reichler, R. J. (1971). The effect of treatment structure on development of autistic children. *Archives of General Psychiatry*, *24*, 415–421.

A promoção do desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora do 2.º ciclo através do estudo de aula

Promoting the development of a 5th grade prospective teacher's didactic knowledge through lesson study

Nicole Duarte[1], *Hélia Pinto*[2], *João Pedro da Ponte*[3]

[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e CI&DEI, nicoleduarte@edu.ulisboa.pt

[2]Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria e CI&DEI, helia.pinto@ipleiria.pt

[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: *Procuramos mostrar de que forma o estudo de aula promove o desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de Matemática e Ciências Naturais do 2.º ciclo, em particular na seleção de tarefas e antecipação de respostas dos alunos, no âmbito da Matemática. Os dados foram recolhidos através da observação das sessões do estudo de aula e de entrevistas semiestruturadas realizadas a Margarida antes e após o estudo de aula. As sessões e as entrevistas foram gravadas e transcritas e foi adotada uma estratégia de análise temática. Ao participar no estudo de aula, Margarida envolveu-se num trabalho exploratório, assente na reflexão e colaboração com professores mais experientes, sobre a seleção de tarefas e a antecipação das respostas dos alunos, o que lhe permitiu refletir sobre estes aspetos do conhecimento didático, pelo que este processo se mostrou favorável para o desenvolvimento das suas aprendizagens.*

Palavras-chave: estudo de aula; conhecimento didático; formação inicial de professores.

Abstract: *We aim to show how the lesson study promotes the development of the didactic knowledge of a 5th grade Mathematics and Natural Sciences prospective teacher, in particular in task selection and anticipation of students' responses, within the scope of Mathematics. Data were collected through observation of the lesson study sessions and semi-structured interviews conducted with Margarida before and after the lesson study. The sessions and interviews were recorded and transcribed and a thematic analysis strategy was adopted. By participating in the lesson study, Margarida engaged in exploratory work, based on reflection and collaboration with more experienced teachers, on task selection and anticipation of student responses, which allowed her to reflect on these aspects of didactic knowledge, so this process proved favorable for the development of her learning.*

Keywords: lesson study; didactic knowledge; initial teacher education.

Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores em que o foco é a aprendizagem dos alunos. Este processo é caracterizado por um trabalho de colaboração e reflexão e tem como intuito a identificação das dificuldades dos alunos para depois serem preparadas aulas de investigação que são analisadas e discutidas (Perry & Lewis, 2009). No estudo de aula, os professores podem preparar aulas exploratórias, em que os alunos têm oportunidade de desenvolverem diversas aprendizagens, nomeadamente ao nível do seu raciocínio, comunicação matemática e resolução de problemas (Ponte, 2005).

O estudo de aula permite assim que os futuros professores trabalhem colaborativamente com professores experientes, promovendo oportunidades para desenvolverem o seu conhecimento didático. O nosso objetivo é mostrar de que forma o estudo de aula promove o desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de Matemática e Ciências Naturais do 2.º ciclo, em particular na seleção de tarefas e antecipação de respostas dos alunos, no âmbito da Matemática.

Metodologia

Este estudo é de cariz qualitativo e de cunho interpretativo, realizado no âmbito de um estudo de aula conduzido durante o ano letivo de 2021/2022. Nele participaram duas futuras professoras que frequentavam o Mestrado em Ensino no 1.º ciclo e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo, a sua professora supervisora, a professora cooperante e a investigadora (primeira autora). Neste cartaz é apresentado o caso de Margarida (nome fictício) que fazia a sua prática pedagógica numa turma de 5.º ano.

O estudo de aula contemplou um total de 12 sessões: (1) identificação do problema; (2-6) planificação das aulas de investigação; (7-8) lecionação das aulas de investigação sobre números racionais; (9-10) discussão após as aulas de investigação; (11-12) reflexão sobre as aulas de investigação.

Os dados foram recolhidos através da observação das sessões do estudo de aula e de entrevistas semiestruturadas realizadas a Margarida antes e após o estudo de aula. As sessões e as entrevistas foram gravadas e transcritas. Foi adotada uma estratégia de análise temática, sendo identificados momentos relevantes nas várias sessões do estudo de aula e consequentes transcrições, sobre os assuntos "seleção de tarefas matemáticas" e "antecipação de respostas dos alunos". Foram organizados episódios que evidenciaram aprendizagens de Margarida relativas a estes assuntos e foram analisados segundo o quadro teórico apresentado.

Aprendizagens sobre a seleção de tarefas matemáticas

Margarida começou por fazer uma primeira seleção de tarefas que acabou por compreender que não se adequavam a alunos do 5.º ano, justificando que "alunos do 1.º ciclo (…)

não iam conseguir de imediato resolvê-las, mas para alunos do 2.º ciclo já pode não haver dificuldade nenhuma. Ainda para mais nesta turma… que os alunos têm imensas experiências".

Numa nova seleção das tarefas, Margarida explicou que o seu critério foi o grau de abertura para "tentar que haja o maior número possível de estratégias diferentes para depois usar na discussão. Senão é só a apresentação de uma ou duas… nem discussão há". Assim, optou por um conjunto de tarefas abertas que proporcionassem aos alunos situações para as quais não possuíam um imediato método de resolução e que também permitissem uma variedade de resoluções, para que, no momento da discussão, houvesse a apresentação de várias estratégias por parte dos alunos.

As sessões do estudo de aula permitiram, segundo Margarida, "pensar e ver as tarefas de forma diferente. Não as escolher só porque sim", mas atendendo às suas características, objetivos e potencial para a aprendizagem dos alunos.

Aprendizagens sobre a antecipação de respostas dos alunos

Margarida demonstrou bastantes dificuldades em apresentar mais do que uma resolução das tarefas, explicando que estas "são muito simples, mas eu não sei como eles as vão resolver. Não é que eu não saiba resolver". Era notória a sua dificuldade em antecipar as respostas dos alunos por ainda não possuir o necessário conhecimento sobre os alunos.

Margarida compreendeu que esta sua dificuldade influencia a sua segurança em sala de aula. Segundo ela, não é habitual fazer um tão detalhado trabalho de antecipação do trabalho dos alunos, mas afirma que este é necessário para que consiga compreender o raciocínio deles. Segundo a própria, "sem a antecipação das respostas deles eu não tinha conseguido tornar a discussão interessante. Ia apenas passar de resolução em resolução. Apresentação e não discussão".

A concluir

Margarida refletiu sobre o desenvolvimento das suas aprendizagens decorrentes do estudo de aula, referindo a necessidade de atentar nas características das tarefas a propor aos alunos de forma a promover momentos de discussão interessantes. Assim, mencionou o grau de abertura e de desafio das tarefas, bem como a relevância de desafiar os alunos (tal como sugerido por Ponte, 2005). Demonstrou ainda ter em atenção as características específicas dos alunos e a necessidade de selecionar tarefas tendo isso em consideração.

Relativamente à antecipação das respostas dos alunos, sentiu algumas dificuldades, pese embora compreenda que é um trabalho essencial na preparação de uma aula. Afirmou que preparar detalhadamente o trabalho dos alunos lhe conferiu segurança ao orientar a discussão e a torná-la rica e pertinente.

Ao participar no estudo de aula, Margarida envolveu-se num trabalho exploratório, assente na reflexão e colaboração com professores mais experientes, sobre a seleção de tarefas e a antecipação das respostas dos alunos. Tal envolvimento permitiu-lhe refletir sobre estes aspetos do conhecimento didático, pelo que este processo se mostrou favorável para o desenvolvimento das suas aprendizagens, em particular nestes aspetos do conhecimento didático (Perry & Lewis, 2009).

Agradecimentos

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto UIDB/05507/2020.

Referências

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10*(4), 365-391. https://doi.org/10.1007/s10833-008-9069-7

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Tarefas ricas na formação de professores, em geometria

Alexandra Gomes[1], *Catarina Vasconcelos Gonçalves*[2], *Dores Ferreira*[3]

[1]CIEC/IE-UMinho, magomes@ie,uminho.pt,
[2]*IESFafe*, *catarinavasconcelosgoncalves@gmail.com*
[3]AE de Real, *doresferreira@gmail.com*

Resumo. *As tarefas influenciam o que os alunos aprendem e como aprendem. Deste modo, destaca-se a importância dos professores em formação se envolverem em tarefas cuidadosamente desenhadas, com alto nível cognitivo. Neste poster apresenta-se uma investigação cujo objetivo é investigar o contributo da formação no sentido de tornar os professores mais capazes de criar e implementar tarefas ricas. É apresentada uma tarefa exemplificativa do contributo da formação.*

Palavras-chave: Tarefas matemáticas; Formação de professores; Ensino Básico; Geometria.

Abstract. *Tasks influence what students learn and how they learn. Thus, it is important for teachers in training to be involved in carefully designed tasks, with a high cognitive level. This poster presents a research which aims to investigate the contribution of training in making teachers more able to create and implement rich tasks. A task is presented as an example of the contribution of training.*

Keywords: Mathematical tasks; Teacher training; Basic Education; Geometry.

As tarefas matemáticas

As tarefas influenciam o que os alunos aprendem e como aprendem. É através das tarefas que os alunos desenvolvem o seu conhecimento matemático e o seu sentido do que significa fazer matemática, condicionando também a forma como compreendem a natureza da matemática (Jones & Pepin, 2016).

O professor desempenha um papel fundamental na seleção/criação de tarefas e na forma como coordena a atividade dos alunos. Na formação inicial e contínua parece ser essencial que os professores se envolvam em tarefas cuidadosamente desenhadas, com alto nível cognitivo (Stein & Smith, 1998) e preparadas de modo a ajudá-los a construir e expandir o seu "conhecimento matemático e a sua capacidade de design didático-matemático" (Jones & Pepin, 2016, p. 106).

Chapman (2013) refere o "mathematical-task knowledge for teaching" como sendo o conhecimento que permite ao professor selecionar/criar tarefas atrativas e desafiadoras, que promovam o conhecimento conceptual (Hiebert & Lefevre, 1986) e ser capaz de explorar o potencial da tarefa.

Piggot (2008) e Ahmed (In Swan, 2005) indicam algumas características das "tarefas ricas", tais como: envolvem todos os alunos (com diferentes níveis de desafio); permitem aos alunos tomar decisões; envolvem os alunos em testar, provar, explicar, refletir, interpretar; promovem a discussão, comunicação e trabalho colaborativo; estimulam a originalidade e a descoberta; encorajam perguntas do tipo "e se?" e "e se não?"; permitem a utilização de diferentes métodos e respostas.

Metodologia

Neste poster apresenta-se parte de uma investigação em curso, que tem como objetivo investigar o contributo da formação no sentido de tornar os professores mais capazes de criar e implementar tarefas ricas.

A metodologia adotada na investigação é a Design-Based research (Brown, 1992). Foram desenhadas tarefas de *Classificar*, *Avaliar* e *Analisar* (Swan, 2005). Estas tarefas foram implementadas numa ação de formação para docentes do 1.º ciclo do ensino básico. Na formação, os professores resolveram tarefas individualmente, analisaram as resoluções em pequeno grupo e discutiram-nas em grande grupo. Como trabalho final, os professores tiveram que criar tarefas geométricas para implementar em sala de aula. A recolha de dados foi feita ao longo das sessões, recorrendo a uma diversidade de técnicas: notas de campo, registos de episódios, produções dos professores e questionários.

Breve análise de alguns resultados

A análise dos dados ainda se encontra em curso mas, foi possível constatar que a ação de formação permitiu: esclarecer dúvidas relativas aos conceitos geométricos envolvidos nas tarefas; promover uma maior consciencialização da importância de diversificar as tarefas na sala de aula; impulsionar a alteração das práticas mais expositivas para práticas mais voltadas para a compreensão e resolução de problemas; valorizar os processos de pensamento e do conhecimento conceptual e promover o pensamento criativo associado à resolução de tarefas em geometria.

De seguida apresenta-se uma das tarefas criada por um dos grupos de professores, como exemplo do contributo da formação.

Considera um quadrado em papel colorido recortado, dobrado pelas diagonais e cortado em quatro triângulos congruentes.
Constrói figuras geométricas planas, através da composição dos triângulos (unindo-os pelos lados congruentes).
Em grupo, agrupem as figuras geométricas construídas de acordo com um dado critério e caracteriza-o.

Figura 1. Tarefa proposta a uma turma de 4.º ano

Como se pode ver na Figura 2, os alunos uniram os lados dos triângulos e construíram novas figuras geométricas, o que estimulou a criatividade, a originalidade e a descoberta.

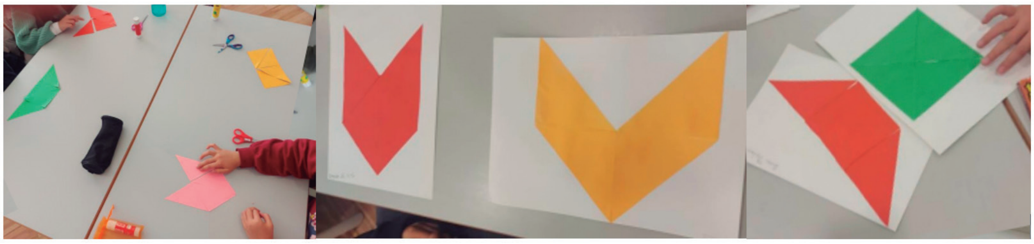


Figura 2. Construções geométricas dos alunos

Durante a atividade, os alunos formularam questões do tipo "e se unirmos estes dois lados que figura iremos obter"; "e se unirmos estes?"; o que promoveu o debate de ideias e raciocínios, e lhes permitiu testar e tomar decisões sobre as hipóteses colocadas.

A definição de critérios de classificação também esteve presente, tendo os grupos usado diferentes critérios para agrupar as suas construções.

Figura 3. Classificação segundo o critério: "ter (ou não) ângulos agudos"

Figura 4. Classificação segundo o critério: "ser (ou não) convexa"

Figura 5. Cartaz final

Considerações finais

O exemplo apresentado é paradigmático e ilustra a capacidade de criação de tarefas ricas, por parte dos professores.

Espera-se que esta investigação contribua para alargar o conhecimento sobre os possíveis contributos da formação no sentido de fornecer ferramentas para tornar os professores mais capazes de criar/adaptar e implementar tarefas ricas.

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59(5),* 389–407.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2 (2),* 141-178.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *The Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 1–6.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. H. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics* (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19(2),* 105-121.

Piggott, J. (2008). *Rich tasks and contexts*. Retrieved from www.nrich.maths.org

Stein, M. K. Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3(4),* 268-275.

Swan, M. (2005). *Improving learning in Mathematics: challenges and strategies*. Department for Education and Skills Standards Unit.

O conhecimento profissional do professor de matemática na integração de diferentes tecnologias

The mathematics teacher's professional knowledge in the integration of different technologies

Maria do Carmo Botelho[1], *Helena Rocha*[2]

[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, mcb17696@campus.fct.unl.pt

[2]CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

Resumo: *O uso da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem tem levado diversos autores a investigar não só o seu potencial, mas também os desafios que este acarreta. O papel do professor é reconhecido por diversos autores, pela forma como integra a tecnologia em sala de aula, assim como pela importância do seu conhecimento profissional na implementação da mesma. Contudo, poucos estudos se têm debruçado sobre a escolha que o professor faz da tecnologia, os critérios que a determinam, assim como a relação entre as características específicas da mesma e os domínios do conhecimento profissional que podem assumir maior protagonismo na utilização dessa mesma tecnologia em sala de aula. Este estudo visa caracterizar o conhecimento do professor de matemática quando usa diferentes tecnologias no ensino e aprendizagem. Assim, pretende-se estudar a existência de relações entre os domínios específicos do Knowledge for Teaching Mathematics with Technology – KTMT e a integração da tecnologia escolhida. Este será o modelo usado como quadro teórico, pois o mesmo integra a investigação centrada no conhecimento profissional e a investigação centrada no uso da tecnologia. A metodologia escolhida para esta investigação é de natureza qualitativa e interpretativa, recorrendo a três estudos de caso de professores de Matemática A do 10.º ano de escolaridade. A recolha de dados terá por base três instrumentos: entrevistas semiestruturadas, observação de aulas e recolha documental.*

Abstract: *The use of technology in the teaching and learning process has led several authors to investigate not only its potential, but also the challenges it brings. The role of the teachers is recognized by several authors, due to the way they integrate technology in the classroom, as well as the importance of their professional knowledge in its implementation. However, few studies have addressed the teachers' choice of technology, the criteria that determine it, as well as the relationship between the specific characteristics of the technology and the domains of professional knowledge that may play a more relevant role in the use of technology in the classroom. This study aims to characterize the mathematics teachers' knowledge when using different technologies in teaching and learning. It also aims to* *study the existence of relationships between the specific domains of the Knowledge for Teaching Mathematics with Technology – KTMT and the integration of the chosen technology. This will be the model used as the theoretical framework, as it integrates research focused on professional knowledge and research focused on the use of technology. The methodology chosen for this research is qualitative with an interpretative orientation, using three case studies of 10th grade Mathematics teachers. Data collection will be based on three instruments: semi-structured interviews, classroom observation and documental gathering.*

Palavras-chave: conhecimento profissional, integração da tecnologia, Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia – KTMT, matemática.

Keywords: professional knowledge, integration of digital technology, Knowledge for Teaching Mathematics with Technology – KTMT, mathematics.

Introdução

Reconhecendo o potencial da tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática, nomeadamente para o desenvolvimento de novas formas de trabalho em sala de aula, assim como para a promoção de uma aprendizagem mais significativa, potenciada pelo trabalho com múltiplas representações (Clark-Wilson & Hoyles, 2020), há autores que referem a integração da tecnologia como sendo um processo difícil, realçando como determinante o conhecimento profissional dos professores (Rocha, 2020a; Hoyles & Lagrange, 2010). Esta consciencialização tem levado ao desenvolvimento de vários modelos do conhecimento profissional do professor, inspirados no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) de Shulman (1986), onde é dada particular atenção à questão da tecnologia.

Objetivos e questões de investigação

Este estudo, em fase inicial de desenvolvimento, tem como objetivo caracterizar o conhecimento do professor de matemática quando usa diferentes tecnologias digitais no ensino e aprendizagem, mais especificamente, pretende-se estudar a existência de relações entre os domínios específicos do Knowledge for Teaching Mathematics with Technology – KTMT (Rocha, 2020b) e a integração da tecnologia escolhida. Pretende-se ainda estudar a preponderância de um domínio do conhecimento, em detrimento de outro, conforme a tecnologia utilizada.

Com o objetivo de refletir sobre a influência dos domínios do KTMT, na implementação da tecnologia nas práticas profissionais do professor, pretende-se responder às seguintes questões:

1. Como é que o conhecimento profissional do professor determina a forma como este integra a tecnologia na sua prática?

2. Que domínios do KTMT são enfatizados na integração da tecnologia na prática profissional?
3. Que diferenças existem no conhecimento mobilizado pelo professor quando se altera a tecnologia usada?

Enquadramento teórico

Embora existam modelos que realçam o conhecimento detido pelo professor sobre a tecnologia, estes mesmos modelos não dão especial atenção à forma de a integrar na prática letiva (Rocha, 2020b; Drijvers et al., 2016; Hoyles & Lagrange, 2010).

No que se refere ao conhecimento necessário para a integração da tecnologia na prática profissional, existem igualmente poucos estudos que abordam o contributo do trabalho com recurso a diferentes tecnologias no desenvolvimento profissional do professor ou, de que forma são mobilizados os diferentes domínios do seu conhecimento. Este aspeto já apontado por Rocha (2020b), será um ponto de partida para este estudo.

O quadro teórico deste estudo, centra-se no modelo KTMT (Figura 1) de Rocha (2020b), pois o mesmo integra num único modelo a investigação centrada no conhecimento profissional e a investigação centrada no uso da tecnologia.

Figura 1. Modelo KTMT

Nesta concetualização do conhecimento profissional são considerados quatro domínios base de conhecimento (Matemática, Currículo, Ensino-Aprendizagem e Tecnologia), dois conjuntos de conhecimentos interdomínios, o MTK (Matemática, Currículo e Tecnologia), que se centra na forma como a tecnologia influencia a matemática e o TLTK (Ensino-Aprendizagem, Tecnologia e Currículo), que inclui a forma como a tecnologia afeta ou influencia o ensino aprendizagem, reforçando ou restringindo certas abordagens. Este modelo considera também o IK (Conhecimento Integrado), sendo este um conhecimento detido pelo professor e resultante da articulação simultânea de todos os outros domínios (base, MKT e TLTK). No KTMT é considerado ainda o professor e a sua influência, sendo integrado no modelo as suas crenças e conceções, bem como o contexto onde este trabalha.

Metodologia

A metodologia escolhida para esta investigação é de natureza qualitativa e interpretativa, recorrendo a três estudos de caso de professores de Matemática A do 10.º ano de escolaridade.

Sendo o estudo relativo à integração da tecnologia que os professores fazem na sua prática letiva, e tendo como objetivo caracterizar o conhecimento do professor de matemática quando usa diferentes tecnologias, a investigação terá uma forte componente de observação da prática do ensino da matemática, em ambiente de sala de aula.

A recolha de dados terá por base três instrumentos: entrevistas semiestruturadas, observação e análise documental. A análise dos dados recolhidos será orientada à luz do modelo KTMT e, consequentemente, dos seus diferentes domínios do conhecimento.

Resultados esperados

Espera-se que este estudo possa contribuir para clarificar aspetos da prática e do conhecimento do professor, promovendo uma melhor compreensão sobre a integração das tecnologias na prática profissional.

Agradecimentos

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., que concedeu uma bolsa para a realização deste doutoramento (2021.04983.BD).

Referências bibliográficas

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM, 52*(7), 1223-1242.

Drijvers, P., Ball L., Barzel, B., Heid, M., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey* (ICME-13). Springer.

Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (2010). Introduction. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 1–11). Springer.

Rocha, H. (2020a). Graphical representation of functions using technology: a window to teacher knowledge. *Teaching Mathematics and its Applications*, *39*(2), 105-126.

Rocha, H. (2020b). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM, 52*(7), 1381-1396.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

O conhecimento profissional do professor e a interdisciplinaridade em contexto de integração com a tecnologia

Teacher's professional knowledge and interdisciplinarity in a context of technology integration

Tânia Coelho[1], *Helena Rocha*[2]

[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
ta.coelho@campus.fct.unl.pt

[2]CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
hcr@fct.unl.pt

Resumo: *O potencial da abordagem interdisciplinar no ensino das ciências é amplamente reconhecido, nomeadamente em contextos de carácter tecnológico. A sua implementação não se tem, contudo, revelado fácil. Alguns estudos apontam a dificuldade de implementação desta abordagem por parte dos professores, sugerindo a necessidade de melhor compreender o conhecimento profissional necessário para o fazer. Neste estudo adota-se o modelo Application and Pedagogical Content Knowledge – APCK, para identificar aspetos que caracterizem o conhecimento profissional detido pelo professor, em contexto de articulação interdisciplinar com tecnologia. Adota-se uma metodologia qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso de dois professores, um de Matemática e outro de Físico-Química. A recolha de dados baseou-se em entrevistas e na observação de aulas onde os professores recorriam a uma abordagem interdisciplinar e ao uso da calculadora gráfica. As principais conclusões sugerem que os professores têm noção clara das dificuldades e dos benefícios subjacentes à articulação interdisciplinar e que lidam com estes socorrendo-se, nomeadamente, do seu conhecimento de conteúdo em ambas as disciplinas, integrando a tecnologia, e criando diferentes dinâmicas em sala de aula, o que sugere diferentes mobilizações do APCK do professor.*

Palavras-chave: interdisciplinaridade, matemática, físico-química, conhecimento profissional, Application and Pedagogical Content Knowledge – APCK.

Abstract: *The potential of the interdisciplinary approach in science teaching is widely recognized, namely in technological contexts. However, its implementation has not been easy. Some studies point to the teachers difficulty in implementing this approach, suggesting the need to better understand the professional knowledge required to do so. In this study, the Application and Pedagogical Content Knowledge – APCK model is adopted to identify aspects that characterize the* *professional knowledge held by the teacher, in an interdisciplinary approach integrating technology. A qualitative and interpretative methodology was adopted, based on case studies of two teachers, one of Mathematics and the other of Physics and Chemistry. Data collection was based on interviews and observation of classes where teachers resorted to an interdisciplinary approach and the use of a graphing calculator. The main conclusions suggest that teachers have a clear notion of the difficulties and benefits underlying the interdisciplinary approach and that they deal with these using, namely, their knowledge of both disciplines content, integrating technology, and creating different dynamics in the classroom, which suggests different mobilizations of the teachers' APCK.*

Keywords: interdisciplinarity, mathematics, physics and chemistry, teacher knowledge, Application and Pedagogical Content Knowledge – APCK.

Introdução

A abordagem de diferentes modelos de conhecimento do professor, reforça a ideia de que o ensino implica um campo de conhecimentos que possa ser sistematizado e partilhado com outros (Shulman, 2004), onde o trabalho dos professores, cada vez mais complexo e dinâmico, depende da flexibilidade e do acesso a conhecimentos de diferentes domínios (Koehler & Mishra, 2009).

No âmbito do ensino das ciências em geral e, em particular na promoção de atividades de carácter interdisciplinar, a tecnologia revela-se fundamental, requerendo o desenvolvimento de um conhecimento profissional específico (Viseu & Rocha, 2020).

Rocha (2019), ao investigar este tipo de articulação disciplinar, valoriza a construção do conhecimento pedagógico de conteúdo, adotando uma conceptualização desenvolvida a partir do modelo TPACK de Mishra e Koehler (2006) e propondo um modelo mais abrangente, o Application and Pedagogical Content Knowledge (APCK). Neste modelo a Matemática assume destaque entre as Ciências devido à sua linguagem universal, comum às restantes, e por isso integradora *per se* (Rocha, 2019).

O modelo procura analisar os conhecimentos implícitos na integração de mais do que uma área disciplinar e onde são mobilizados os conhecimentos do professor relativamente às aplicações matemáticas adoptadas, à pedagogia e ao conteúdo em destaque, conhecimentos base do modelo, permitindo com isso identificar aspetos que caracterizem o conhecimento profissional detido pelo professor, em contexto de articulação interdisciplinar com tecnologia, tendo por base dois professores, um de Matemática e outro de Físico-Química.

No processo pretendemos responder às seguintes questões:

- Quais os domínios do modelo APCK que prevalecem no processo de articulação entre as disciplinas de Físico-Química e Matemática com recurso à tecnologia?
- Que potencialidades são reconhecidas e exploradas pelo professor com este tipo de abordagem?
- Que dificuldades encontra o professor na articulação e integração de diferentes domínios de conhecimento através dum ensino onde se pretende promover a interdisciplinaridade?

Conhecimento profissional do professor – o modelo APCK

O modelo adota uma abordagem integradora do conhecimento profissional do professor, permitindo compreender aspetos relativos a um processo de ensino-aprendizagem de carácter interdisciplinar, sendo a conceptualização base assumida neste estudo.

O uso de aplicações matemáticas promove um uso diferente do conhecimento matemático baseado num conhecimento de contexto real e de carácter interdisciplinar, onde os temas deixam de ser abordados de uma forma específica e organizada, requerendo por isso uma abordagem diferente, onde opções como trabalho colaborativo, discussão de diferentes abordagens e apresentação do trabalho desenvolvido são centrais (Rocha, 2019).

A articulação das áreas de conhecimento base – Content Knowledge (CK), Pedagogical Knowledge (PK) e Application Knowledge (AK) – sugerem novos domínios de conhecimento – Application and Content Knowledge (ACK), Application and Pedagogical Knowledge (APK) e Pedagogical Content Knowledge (PCK) – que sofrem dinâmicas distintas consoante o domínio de conhecimento mais desenvolvido no processo.

Metodologia

Adota-se uma metodologia qualitativa com orientação interpretativa, baseada em estudos de caso, num estudo sobre o conhecimento profissional do professor em contexto de interdisciplinaridade, envolvendo dois professores de Matemática e Físico-Química, com elevada experiência profissional e que pontualmente trabalham em tarefas promotoras de articulação disciplinar com recurso à calculadora gráfica. Recorre-se a dois instrumentos metodológicos – a entrevista e a observação de aulas – com vista a encorajar os professores a refletir sobre a sua práxis e contribuir para a construção do conhecimento profissional com base na interpretação das suas próprias experiências e interações com o meio envolvente para assim analisar o APCK de ambos.

Resultados

Ao longo deste estudo, os professores revelam capacidade reflexiva sobre a sua práxis, que se antevê como promotora do conhecimento sobre as aplicações matemáticas num determinado contexto.

Com claro conhecimento dos conteúdos programáticos de ambas as disciplinas, permitindo-lhes com isso criar dinâmicas distintas e diferentes tipos de estratégias para implementar uma abordagem interdisciplinar, os professores, embora promovam nas suas dinâmicas tarefas de carácter interdisciplinar revelam que o processo é *quasi* individual, indicando que a interdisciplinaridade ainda é uma prática pouco implementada entre pares, apesar do currículo promover momentos explícitos para a mesma, como as DAC´s (domínios de autonomia curricular). Os entraves encontrados pelo não envolvimento de outros colegas, conteúdos explorados na Matemática do ensino secundário complexos e desfasados dos conteúdos da Físico-Química, e o foco nos exames dificultam este tipo de abordagem.

Conclusões

As principais conclusões sugerem que os professores têm noção clara das dificuldades e dos benefícios subjacentes à articulação interdisciplinar e que lidam com estes socorrendo-se nomeadamente do seu conhecimento de conteúdo em ambas as disciplinas, integrando a tecnologia, e criando diferentes dinâmicas em sala de aula, o que nos sugere diferentes mobilizações do APCK do professor.

Referências bibliográficas

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary issues in technology and teacher education, 9*(1), 60-70.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*, 1017–1054.

Rocha, H. (2019). Interdisciplinary tasks: Pre-service teachers' choices and approaches. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A.S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado & M. H. Martinho (Eds.), *Proceedings of the ATEE Winter Conference 'Science and mathematics education in the 21st century'* (pp. 82-93). ATEE and CIEd.

Shulman, L. S. (2004). Research on teaching: a historical and personal perspective. In L.S. Shulman (Ed.), *The wisdom of practice: essays on teaching learning, and learning to teach* (pp. 364-381). Jossey-Bass.

Viseu, F., & Rocha, H. (2020). Interdisciplinary technological approaches from a mathematics education point of view. In L. Leite, E. Oldham, A. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & H. Martinho (Eds.), *Science and mathematics education for 21st century citizens: challenges and ways forward* (pp. 209-229). Nova Science Publishers.

O desenvolvimento do pensamento computacional através da resolução colaborativa de problemas de matemática com tecnologias: Uma revisão sistemática de literatura

Mathematical problem solving with technologies in the development of computational thinking: A systematic literature review

Ana Cláudia Simões[1], *Hélia Jacinto*[2], *Neuza Pedro*[3]

[1] Agrupamento de Escolas de Atouguia da Baleia & Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, ana.simoes4@edu.ulisboa.pt

[2] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, hjacinto@ie.ulisboa.pt

[3] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, nspedro@ie.ulisboa.pt

Resumo: *As novas Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico voltam a enfatizar o desenvolvimento da capacidade de Resolução de Problemas de Matemática (RPM), explicitando que os alunos devem ter oportunidade para resolver problemas recorrendo à tecnologia. Considera o desenvolvimento do Pensamento Computacional (PC), de forma integrada, como uma nova capacidade matemática que permite dotá-los de ferramentas e estratégias necessárias à resolução de problemas computáveis e a valorização de competências transversais imprescindíveis à aprendizagem da Matemática, de que a colaboração é exemplo. Esta Revisão Sistemática de Literatura (RSL) informa sobre o que já foi feito no âmbito desta temática, bem como a sua pertinência e conduz para novas linhas de investigação.*

Palavras Chave: Revisão Sistemática de Literatura; Resolução de Problemas; Matemática; Colaboração; Pensamento Computacional; Tecnologias

Abstract: *The new Essential Learning for Basic Education are emphasizing once again the development of Mathematics Problem Solving capacity, explaining that students should have the opportunity to solve problems using technology. It considers the development of Computational Thinking, in an integrated way, as a new mathematical ability that allows them to be equipped with the tools and strategies necessary to solve computable problems and the valoration of transversal skills,essential to the learning of Mathematics, onwhich collaboration is example. This Systematic Literature Review brings awareness on what has already been done in this area, as well as its relevance and leading to new lines of investigation.*

Keywords: Systematic Literature Review; Problem solving; Math; Collaboration; Computational Thinking; Technologies

Introdução

As novas Aprendizagens Essenciais enfatizam o desenvolvimento da capacidade de Resolução de Problemas de Matemática (RPM), em particular, com recurso à tecnologia. Consideram ainda o desenvolvimento do Pensamento Computacional (PC) como uma nova capacidade matemática que permite dotar os alunos de ferramentas e estratégias necessárias à resolução de problemas computáveis e valorizam competências transversais como a colaboração.

A investigação tem mostrado que a capacidade de RPM pode ser desenvolvida de forma colaborativa na presença de ferramentas tecnológicas (Powell et al., 2018) e que estas permitem o desenvolvimento de estratégias de resolução que não estariam ao alcance dos alunos se não lhes tivessem acesso (Carreira *et al.*, 2016).

O PC, por seu lado, tem sido conceptualizado como o tipo de pensamento necessário para formular um problema e expressar etapas da sua resolução, de tal forma que um computador possa realizar, com sucesso, a sequência definida (Wing, 2006). Recentemente, Li *et al.* (2020) perspetivaram o PC "como um modelo de pensamento que é mais sobre pensamento do que sobre computação" (p. 4).

Este cartaz visa apresentar os resultados preliminares de uma Revisão Sistemática da Literatura (RSL) que suporta um estudo com foco no desenvolvimento do PC, de alunos de 2.º ciclo, mediante a resolução colaborativa de problemas de matemática com tecnologias. Os objetivos que orientaram esta RSL foram:

1. caracterizar a bibliografia mais atual em torno das temáticas;
2. identificar os principais resultados da investigação quanto ao papel da resolução colaborativa de problemas com tecnologias no desenvolvimento do PC;
3. identificar, a partir da literatura, desafios no desenvolvimento do PC na RPM com tecnologias.

Metodologia

No campo da investigação em educação, uma RSL tem o potencial de contribuir tanto para sumariar o estado da arte em dado subdomínio como para encontrar lacunas no mesmo (Gomes & Caminha, 2014). Neste estudo, utilizou-se o protocolo PRISMA (Page *et al.*, 2021) seguindo as etapas: identificação, análise e inclusão (Figura 1).

A pesquisa efetuou-se na base de dados SCOPUS à qual foram aplicadas 3 equações de pesquisa, em inglês, tendo a primeira pesquisa a função de cruzar os termos definidos como importantes, com o objetivo de obter toda a literatura existente sobre o tema (Tabela 1). O número reduzido de artigos obtidos após a 1.ª aplicação dos critérios de inclusão/exclusão (Tabela 2) revelou a parca existência de trabalhos com foco nestas temáticas. Surgiu a necessidade de duas novas pesquisas de forma a acolher trabalhos relacionados com a resolução de problemas com tecnologias e com o desenvolvimento do PC de alunos de 10-12 anos.

Tabela 1. Equações de pesquisa

	Equações de Pesquisa
1ª Equação de pesquisa	TITLE-ABS-KEY (("solving problems" OR "problem solving" OR problem-solving) AND ("computational thinking" OR cod* OR program* OR colab*) AND (technolog* OR "digital tools") AND math* AND elementary) AND NOT SRCTITLE (proceeding OR conference) AND PUBYEAR > 2006
2ª Equação de pesquisa	TITLE-ABS-KEY (("solving mathematical problems" OR "mathematical problem solving" OR "mathematical problem-solving") AND (technolog* OR "digital tools") AND (elementary OR "junior-high student") AND NOT SRCTITLE (proceeding OR conference))
3ª Equação de pesquisa	TITLE-ABS-KEY (("mathematical problem solving") AND "computational thinking")

Na 1.ª etapa foram identificadas 34 obras, excluindo-se 4 artigos de conferência. Procedeu--se à análise do título, resumo e palavras-chave dos 30 artigos, tendo sido desconsiderados 12 pela aplicação de critérios de exclusão definidos e enunciados na Tabela 2, resultando em 18 artigos elegíveis. Em seguida passou-se à leitura integral dos mesmos, tendo sido ainda excluídos 10 por terem foco distinto do desejado. Obteve-se um conjunto final de 8 artigos que foram incluídos na RSL (em anexo).

Tabela 2. Critérios de Inclusão e exclusão da RSL

	Critérios de Inclusão	Critérios de exclusão
quanto ao tipo de documento	Artigos com revisão por pares Publicações posteriores a 2006	Conferência/Atas Capítulos de Livros Revisões de Literatura
quanto aos participantes	Alunos Ensino Básico (1º/2º/3º Ciclo)	Ensino Secundário Ensino Superior Formação de Professores Educação Especial Fora do foco de aprendizagem da matemática

Resultados preliminares

Após a análise dos 8 estudos incluídos nesta RSL, constatou-se que são provenientes de diversos países, com prevalência de países asiáticos (Tabela 3). Todos abordam a RPM, 87.5% associam o uso da tecnologia e 62.5% abordam o PC. Somente 2 artigos referem aspetos de colaboração (12.5%) e apenas um integra os quatro temas considerados no objetivo central da RSL.

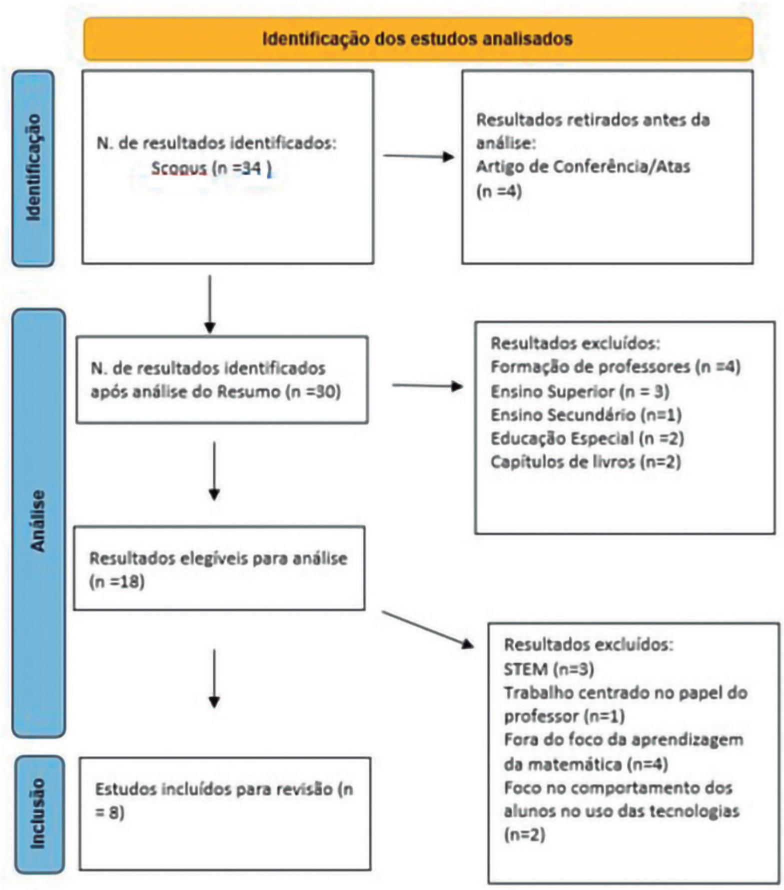


Figura 1. Etapas seguidas no processo de RSL de acordo com o protocolo PRISMA (adaptado de Page et al., 2021)

Tabela 3. Resumo das caraterísticas gerais do estudo (autor, país, temas)

	Autores (ano)	País	RPM[1]	Tec[2]	Colab[3]	PC[4]
1.	Sung, Ahn, & Black (2017)	Hong Kong	X			X
2.	Garcia I., Pacheco C. (2013)	México	X	X	X	X
3.	Evans, Feenstra, Ryon, & McNeill (2011)	EUA	X	X	X	
4.	Chen, Chiu & Chou (2017)	Taiwan	X	X		
5.	Chu , Yang, Tseng, & Yang (2014)	Taiwan	X	X		
6.	Cui & Ng (2021)	Hong Kong	X	X		X
7.	Ng & Cui (2021)	Hong Kong	X	X		X
8.	Ng, Liu & Cui (2021)	China	X	X		X

Nota: RPM[1] (Resolução de Problemas de Matemática); Tec[2] (Tecnologia); Colab[3] (Colaboração); PC[4] (Pensamento Computacional)

Embora os estudos se debrucem sobre atividades que envolvem a RPM, os seus enquadramentos teóricos são bastante diversos. As principais influências teóricas são de natureza construtivista (e.g. cognição distribuída), embora haja também alguns trabalhos alinhados com o construcionismo. O PC é discutido sob diferentes lentes teóricas, destacando-se a taxonomia de Weintrop para desenhar ambientes de aprendizagem da matemática com a presença de PC, e a perspetiva *maker*.

Quanto à metodologia, identificaram-se 6 estudos qualitativos (3 estudos de caso, 1 estudo interpretativo, e 2 investigações baseadas em design); e 2 estudos quantitativos (1 experimental e outro quasi-experimental). Nestes estudos notou-se uma prevalência de tarefas que envolviam Números e Operações com números, e ainda Geometria e Álgebra, cobrindo os 3 ciclos de ensino embora haja menos estudos com foco no 2.º ciclo. Recorreu-se a ferramentas de computação e robótica (e.g., Scratch Junior e Arduíno), ambientes de geometria dinâmica (e.g., GeoGebra) e outras ferramentas desenvolvidas pelos investigadores (e.g., aplicação iOS, sistemas tutoriais inteligentes).

Relativamente ao segundo objetivo desta RSL, estes estudos permitem perceber que a RPM é um contexto viável para o desenvolvimento do PC, tal como evidenciado em 6 dos 8 artigos. O estudo [1] revelou que embora os alunos tenham recebido pouca instrução sobre RPM com o Scratch, desenvolveram capacidades de abstração, pensamento sequencial e de reconhecimento de padrões, o que se justificou com o uso de um ambiente de aprendizagem para desenvolver processos de pensamento, sem estar focado na programação/tecnologia. Em [7] observou-se que as situações problemáticas desenhadas (*digital making*) promoveram competências de modelação e pensamento algorítmico, desenvolvendo capacidades de abstração, teste e depuração, e de RPM. Em [8], os autores concluíram que os alunos desenvolveram competências no âmbito do PC e da RPM durante o seu envolvimento em atividades de produção digital, embora tivessem dificuldades nos problemas menos estruturados apoiando a ideia de Wing (2006) que refere que o PC permite a reformulação de um problema aparentemente difícil noutro mais facilmente solucionável.

O tipo de tecnologias também foi alvo de escrutínio, pois é importante compreender o que acontece quando os alunos recorrem a ferramentas digitais para expressar o raciocínio matemático na RPM (Carreira *et al.*, 2006). No estudo [4] comparou-se a RPM envolvendo frações em ecrãs tácteis e com mesas digitalizadoras, concluindo-se que os alunos se mantiveram mais atentos e focados por mais tempo na tarefa ao usar os primeiros. O estudo [5] mapeou o comportamento dos alunos durante a RPM, através de um sistema tutorial inteligente que permitia ultrapassar dificuldades dos alunos.

No que se refere ao papel da colaboração, abordada em dois dos estudos, constatou-se que esta assume relevância, tal como mostra o estudo [2] onde a interação entre alunos na RPM é fonte de motivação, cooperação e diálogo, comunicação esta que se pode estender para além da sala de aula se suportada por soluções digitais. O estudo [3] mostra que o uso de tecnologia na RPM de forma colaborativa estimula a capacidade de comunicação de princípios e propriedades matemáticas dos alunos.

Por fim, em alinhamento com o terceiro objetivo da RSL, verificou-se que o estudo [6] permitiu concluir que as dificuldades sentidas pelos alunos em RPM que recorrem ao PC se relacionavam com o facto de terem de aprender a usar o ambiente baseado em PC e, simultaneamente, aplicar conceitos matemáticos para aí resolver os problemas.

Considerações finais

Esta RSL permitiu perceber a pertinência do desenvolvimento articulado entre as capacidades de RPM, com tecnologias e o PC. Apesar de pouco evidente nos artigos analisados, a colaboração é um aspeto que deve ser valorizado na RPM, o que motiva a realização de novos estudos em torno do tema. Informa também o estudo a desenvolver quanto ao *design* da intervenção e ao tipo de ferramentas tecnológicas a usar, bem como em relação às eventuais dificuldades dos alunos. A diminuta expressividade de estudos com foco no 2.º ciclo, justifica a intenção de prosseguir com investigação a este nível.

Referências bibliográficas

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). Youngsters Solving Mathematical Problems with Technology. *Mathematics Education in the Digital Era, 5*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24910-0

Gomes, I. S. & Caminha, I. O. (2014). Guia para estudos de revisão sistemática: uma opção metodológica para as Ciências do Movimento Humano. *Movimento*, *20*(1), 395–411. https://doi.org/10.22456/1982-8918.41542

Li, Y., Schoenfeld, A.H., diSessa, A., Graesser, A., Benson, L., English, L. & Duschl, R. (2020). Computational thinking is more about thinking than computing. Journal for STEM Education Research, *3*, 1–18. https://doi.org/10.1007/s41979-020-00030-2

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., *et al.* (2021). The PRISMA 2020 statement: an updated guideline for reporting systematic reviews. BMJ, 372 (71) https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Powell A. B., Alqahtani M., & Singh B. (2018). Supporting students' productive collaboration and mathematics learning in online environments. In R. Jorgensen & K. Larkin (Eds), *STEM Education in the Junior Secondary* (pp. 37-56). Springer.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Anexo 1. Artigos analisados na RSL

[1] Sung W., Ahn J., & Black J. B. (2017). Introducing computational thinking to young learners: Practicing computational perspectives through embodiment in mathematics education. *Technology, Knowledge and Learning, 22*(3), 443-463. https://doi.org/10.1007/s10758-017-9328-x

[2] Garcia I., & Pacheco C. (2013). A constructivist computational platform to support mathematics education in elementary school. *Computers and Education, 66*, 25-39. https://doi.org/-10.1016/j.compedu.2013.02.004

[3] Evans, M., Feenstra, E., Ryon, E., & McNeill, D. (2011). A multimodal approach to coding discourse: Collaboration, distributed cognition, and geometric reasoning. *Computer Supported Learning 6*, 253. https://doi.org/10.1007/s11412-011-9113-0

[4] Chen, C.H., Chiu, C.-H. & Lin, C.-P., & Chou, Y.-C.(2017). Students' attention when using touchscreens and pen tablets in a mathematics classroom. *Journal of Information Technology Education: Innovations in Practice, 16* (1), 91-106. https://doi.org/-10.28945/3691

[5] Chu Y.-S., Yang H.-C., Tseng S.-S. & Yang C.-C. (2014). Implementation of a model-tracing-based learning diagnosis system to promote elementary students' learning in mathematics. *Educational Technology and Society, 17*(2), 347-357. http://www.jstor.org/stable/-jeductechsoci.17.2.347

[6] Cui, Z., & Ng, O.-L. (2021). The interplay between mathematical and computational thinking in primary school students' mathematical problem-solving within a programming environment. *Journal of Educational Computing Research, 59*(5), 988-1012. https://doi.org/10.1177/0735633120979930

[7] Ng, O.-L., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem-solving in a programming context: towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education, 53* (4), 847-860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

[8] Ng, O.-L., Liu, M., & Cui, Z. (2021). Students' in-moment challenges and developing maker perspectives during problem-based digital making. *Journal of Research on Technology in Education.* https://doi.org/10.1080/15391523.2021.1967817

A condução de uma discussão coletiva num estudo de aula em Matemática

Conducting a whole-class discussion in a lesson study in mathematics

Filipa Faria[1], *João Pedro da Ponte*[2], *Margarida Rodrigues*[3]

[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
filipa.faria@edu.ulisboa.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
jpponte@ie.ulisboa.pt
[3]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa,
margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: *Nesta comunicação é analisada a condução de uma discussão coletiva em Matemática, preparada num Estudo de Aula. O estudo é de caráter qualitativo, sendo que os dados foram recolhidos na entrevista inicial e na discussão coletiva conduzida por Marta, uma das professoras participantes, recorrendo-se a uma análise de discurso. No caso de Marta, é possível identificar algumas mudanças positivas nos traços discursivos sobre as discussões entre a entrevista e a sua posterior condução. Contudo, aspetos do seu discurso na entrevista estão, em parte, desarmonizados com a condução observada. Assim, considera-se relevante a preparação, condução e reflexão de mais do que uma aula neste processo formativo, dando particular atenção à discussão coletiva.*

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem da Matemática; Discussão coletiva; Estudo de Aula

Abstract: *This communication analyses the orchestration of a whole-class discussion in Mathematics, prepared in a Lesson Study. The study is qualitative, and data were collected in the initial interview and in the whole-class discussion orchestrated by Marta, one of the participating teachers, using discourse analysis. In Marta's case, it is possible to identify some positive changes in the discursive traits of the discussions between the interview and its subsequent orchestration. However, aspects of her discourse in the interview are, in part, out of harmony with the observed discussion. Thus, it is considered relevant to prepare, orchestrate and reflect on more than one lesson in this process, paying particular attention to whole-class discussion.*

Keywords: Teaching-learning in Mathematics; Whole-class discussion; Lesson Study

Introdução

O estudo de aula (EA) é um processo de desenvolvimento profissional de cunho colaborativo e reflexivo. De acordo com Fujii (2018), num EA cabe aos professores prepararem e refletirem sobre as suas práticas de ensino, responsabilizando-se pelo seu desenvolvimento profissional. Este autor salienta ainda como particularidade de um EA em Matemática as caraterísticas da tarefa e da aula a conduzir, visto que as tarefas deverão considerar aspetos da resolução de problemas e a estrutura de aula deve aproximar-se da abordagem exploratória (Ponte, 2005). A discussão coletiva (DC), um dos momentos estruturais desta abordagem, deverá ser de natureza comunicativa, contribuindo para um ambiente em que os alunos apresentam, explicam, argumentam e ouvem ativamente acerca da sua e da atividade matemática dos seus pares. Assim, fomenta-se a construção de novo conhecimento através de uma negociação coletiva de significados e da criação de uma linguagem matemática comum, sob a monitorização e orientação do professor (NCTM, 2014; Stein et al., 2008; Rodrigues et al., 2020). Para Ponte e Serrazina (2004), o foco não deverá recair sobre a "qualidade da fala do professor, mas na qualidade do discurso partilhado de professores e alunos e no modo como os significados matemáticos são interactivamente construídos na sala de aula" (p. 11), nomeadamente durante a DC.

Abordagem metodológica

Este estudo integra-se numa investigação mais ampla que pretende compreender de que modo a prática dos professores de preparação e condução de DC, no quadro de uma abordagem exploratória, pode ser promovida pelo EA no 2.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) em Matemática. Nesta comunicação é analisada a fase de condução de uma DC preparada num ciclo de EA. O estudo mais amplo segue uma Investigação Baseada em Design (IBD), de caráter qualitativo, sendo que os dados aqui apresentados dizem respeito ao 1.º ciclo da IBD e foram recolhidos através de observação participante com gravação vídeo e áudio.

O EA organizou-se em 12 sessões que decorreram ao longo do ano letivo de 2021-2022, seguindo o ciclo composto por cinco fases de Fujii (2016) (figura 1). Neste ciclo de EA participaram nove professoras. Os dados analisados nesta comunicação foram recolhidos na entrevista inicial da professora Marta e na sua condução da aula de investigação na sua turma de 6.º ano. A escolha desta participante recaí sobre o facto de ter sido a primeira participante a conduzir uma aula de investigação. Marta licenciou-se numa Escola Superior de Educação e leciona há cerca de 27 anos.

Figura 1. As cinco fases do EA de acordo com Fujii (2016).

As tarefas e a planificação da aula foram produzidas com a colaboração de todas as participantes do EA. A aula tinha como objetivo que os alunos reconhecessem a relação de proporcionalidade direta entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência e que designassem por π a constante de proporcionalidade.

Para analisar os dados, realizou-se a transcrição da entrevista e da DC conduzida por Marta. Recorreu-se a uma análise de discurso e, como consequência, os excertos discursivos são analisados pela produção de um intertexto (Fiorentini & Lorenzato, 2006). Este intertexto procura identificar no conteúdo e forma das intervenções da professora durante a condução da discussão coletiva os traços do seu enquadramento discursivo acerca das DC durante a entrevista individual inicial (figura 2).

Questões sobre a DC realizadas na entrevista inicial individual	Enquadramento discursivo de Marta em relação às DC
Quais são os objetivos das DC em Matemática?	Conduzir os alunos a aceitarem a diversidade de estratégias; Identificar as dúvidas dos alunos; Proporcionar o desenvolvimento da comunicação matemática; Proporcionar uma melhor relação dos alunos para com a disciplina.
O que tem em consideração para dar início à DC?	Aguardar que os alunos concluam a tarefa.
Como gere o aparecimento de estratégias com diferentes níveis de eficácia durante as DC?	Valorizar a partilha de diferentes estratégias, a formalização de uma estratégia eficaz é feita pela professora.

Figura 2. Questões e respetivo enquadramento discursivo de Marta em relação às DC na entrevista inicial.

Resultados

Na entrevista inicial, Marta salientou que aguarda que os alunos terminem a tarefa para dar início à DC. Ainda que este aspeto tenha sido alvo de reflexão durante o EA, o tempo de trabalho autónomo foi prolongado para que os grupos concluissem as tarefas. Esta decisão não encurtou o tempo planificado para cada DC uma vez que os tempos para introduzir cada tarefa foram mais curtos do que o planificado. Contudo, não houve tempo para realizar a síntese coletiva.

No que diz respeito ao aparecimento de diferentes estratégias, verificou-se a valorização da partilha por parte de todos os grupos. Durante o trabalho autónomo, nenhum dos grupos se aproximou da escrita desta relação através da linguagem simbólica e, ao invés do que referiu na entrevista inicial, Marta não formalizou sozinha esta relação. Procurou, através da exploração de uma tabela e da linguagem natural dos alunos, que estes contribuissem para a escrita da fórmula durante a DC. Conduzir a DC considerando as contribuições dos alunos foi um dos aspetos amplamente discutidos durante o EA.

Já em relação ao desenvolvimento da comunicação matemática, um dos objetivos das DC referido por Marta na entrevista, a professora assumiu ela própria o esclarecimento de algumas situações de desacordo e questionamento entre os alunos. Assim, alertou para a sobreposição dos segmentos do diâmetro no primeiro grupo que apresentou, ao invés de envolver a turma na discussão, partilhou conjeturas que os alunos formularam durante o trabalho autónomo, ao invés de lhes dar tempo para serem os próprios a fazer essa partilha, e algumas das questões colocadas pelos alunos durante a DC foram imediatamente respondidas por Marta.

Considerações finais

A condução de DC e de aulas com caraterísticas exploratórias é um desafio para os professores, tal como a sua participação num EA. No caso de Marta, é possível identificar algumas mudanças positivas nos traços discursivos sobre as DC durante a entrevista inicial e a sua posterior prática de condução. Contudo, muitos aspetos do seu enquadramento discursivo na entrevista inicial estão, em parte, desarmonizados com a condução da DC observada. Considera-se, assim sendo, que um EA deverá contemplar, pelo menos, duas aulas de investigação, possibilitando que a professora tenha, depois de refletir sobre a sua prática de condução de DC, oportunidade de voltar a preparar, conduzir e refletir sobre uma DC.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e Tecnologia e do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa por meio da bolsa com referência UIDP/04107/2020.

Referências bibliográficas

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática–percursos teóricos e metodológicos.* Autores Associados.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 411-423, http://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, N. Shuilleabhain & A. Takahashi (Eds.), *Lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1-21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O Professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, *13*(2), 51-74.

Rodrigues, C., Ponte, J. P., & Menezes, L. (2020). Práticas discursivas de professores de Matemática na condução de discussões coletivas. *Quadrante*, *29*(2), 24–46. https://doi.org/10.48489/quadrante.22575

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

XXXII SIEM
Setúbal 2022
SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APM
Associação de Professores de Matemática