Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática

XXXI SIEM

Santarém | Online
3 de julho de 2021

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

APM Associação de Professores de Matemática

Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática
XXXI SIEM

Proceedings of the Research Seminar in Mathematics Education
XXXI RSME

Painel Editorial
Susana Colaço
Ana Isabel Silvestre
Hélia Jacinto
Hélia Pinto
Lurdes Serrazina
Neusa Branco

SANTARÉM 2021
PORTUGAL

Periodicidade Anual
URL: https://www.apm.pt/siem_atas

EDITOR

APM
Associação de Professores
de Matemática

XXXI SIEM
seminário de investigação em
educação matemática 3 de julho de 2021

FICHA TÉCNICA

Título: Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática
Editor: APM Associação de Professores de Matemática
ISBN: 978-972-8768-74-4
ISSN: 2795-5192
[Suporte: Eletrónico];   [Formato: PDF / PDF/A]
Coordenação: Hélia Pinto
Revisão Técnica: Raquel Santos
Design gráfico e paginação: Teresa Cavalheiro
Data de publicação: 2021

XXXI SIEM
seminário de investigação em
educação matemática 3 de julho de 2021

Comissões do SIEM2021

Comissão Científica
Scientific Committee

Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora, Portugal

Alessandro Ribeiro, Universidade Federal do ABC, Brasil

Ana Isabel Silvestre, Projeto #EstudoEmCasa - DGE, Ci&DEI

Hélia Jacinto, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

Hélia Pinto, CI&DEI, Politécnico de Leiria, Portugal

João Pedro da Ponte, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

Luís Menezes, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viseu, Portugal

Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Márcia Cyrino, Universidade Estadual de Londrina, Brasil

Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal

Pablo Flores, Faculdade de Ciências da Educação da Universidade de Granada, Espanha

Paola Sztajn, North Carolina State University, USA

Paulo Correia, Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal, Portugal

Pedro Marques, Universidade de Évora, Portugal

Susana Colaço, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal

Comissão Organizadora
Organizing Committee

Ana Isabel Silvestre, Projeto #EstudoEmCasa - DGE, Ci&DEI

Hélia Jacinto, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

Hélia Pinto, CI&DEI, Politécnico de Leiria, Portugal

Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal

Susana Colaço, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal

Índice

Introdução 8

Conferências Plenárias
Plenary Talks

The intended and enacted school mathematics curriculum in Singapore
Berinderjeet Kaur 10

20 Anos Depois: O que aprendemos sobre o Triângulo Instrucional?
Paola Sztajn 26

Conferências com Discussão
Conferences with Discussion

A colaboração na formação de professores que ensinam matemática
Márcia Cyrino 40

Potencialidades do humor gráfico no ensino e na aprendizagem da Matemática
Luís Menezes, Pablo Flores 51

Desenvolver o raciocínio matemático a partir de estudos de aula
João Pedro da Ponte 61

Pensamento algébrico e desenvolvimento profissional de professores: explorando tarefas formativas com foco no raciocínio dos estudantes do ensino básico
Alessandro Jacques Ribeiro 69

Simpósios de Comunicações
Communication Symposiums

Simpósio de Comunicações 1
Ensino da divisão na educação primária: uma experiência com professores pedagogos
Carlos Mometti 82

O conhecimento de futuras professoras de 2.º ciclo sobre o pensamento matemático dos alunos numa proposta de trabalho interdisciplinar com as ciências
Neusa Branco, Bento Cavadas 95

Formação de professores da educação infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino de geometria: contribuições ao debate
Leila Pessôa Da Costa, Sandra Regina D'Antonio Verrengia, Regina Maria Pavanello 110

CARTAZ | Conhecimento Interpretativo do professor no âmbito da divisão de frações a partir de uma Tarefa para a Formação
Gabriela Gibim, Carla Alves, Miguel Ribeiro 121

Simpósio de Comunicações 2
Aprofundamento de conhecimentos sobre adição e subtração através do Tabuleiro Decimal
Rita Neves Rodrigues, Fernando Martins, Cecília Costa 126

Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens em crianças da Educação Pré-Escolar
Rita Engenheiro Rodrigues, Catarina Cruz, Fernando Martins, Rita Neves Rodrigues 144

Método de Singapura: O Colori na Aprendizagem da Adição
Catarina Silva, Dárida Fernandes, Inês Varela, Sofia Gomes 160

CARTAZ | Narrativas infantis na aprendizagem matemática nos primeiros anos: Experiência de uma professora estagiária
Sofia Rebelo, Susana Colaço, Neusa Branco 180

Simpósio de Comunicações 3
Processos de raciocínio matemático de estudantes de cálculo diferencial e integral em uma tarefa exploratória
Mariana V. Negrini , André L. Trevisan , Eliane M. de O. Araman 185

Desenvolvimento profissional para a integração da tecnologia no ensino da Matemática: em busca de teorias pragmáticas
Helena Rocha, Eleonora Faggiano, Ana Isabel Sacristán, Marisol Santacruz Rodriguez 197

CARTAZ | Tipologia de Tarefas nos Manuais Portugueses de Matemática A para 11.º ano
Letícia Gabriela Martins, Maria Helena Martinho 207

CARTAZ | Dificuldades de alunos do 12.º ano na resolução de tarefas combinatórias
Mónica Valadão, Nélia Amado, João Pedro da Ponte 211

CARTAZ | Análise da adequação didática nas aulas de probabilidades de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Sónia Raposo, Maria Manuel Nascimento, Helena Bogas 217

Simpósio de Comunicações 4
O aprender e ensinar matemática em tempos de Covid-19: uma experiência de ensino com o uso do jamboard e meet no ensino remoto
Cília Cardoso Rodrigues da Silva ______ 224

Um robô enfermeiro para tratamento ao Covid-19: Aprendizagem dos lugares geométricos com recurso a robôs e à resolução de problemas
Sónia Martins, Cátia Santos ______ 238

A aprendizagem de funções mediada pelo Geogebra e pela Modelação 3D
Sónia Abreu, Elsa Fernandes ______ 251

CARTAZ | Uso do celular para fins pedagógicos: visão dos alunos e professores
Marêssa Silva dos Santos, Janaina de Souza, Thais Oliveira Duque ______ 264

CARTAZ | Resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais: o caso da professora Sofia
Hélia Jacinto, Susana Carreira ______ 268

Simpósio de Comunicações 5
Práticas na aula de matemática: tarefas que desafiam
Alexandra Souza, Margarida Rodrigues ______ 274

O processo de generalizar: Um estudo com futuros professores
Margarida Rodrigues, Lurdes Serrazina, Lina Brunheira _ 286

CARTAZ | A antecipação das dificuldades – uma competência do professor na integração da modelação matemática na prática letiva
António Júlio Aroeira, Susana Carreira, João Pedro da Ponte ______ 301

CARTAZ | O uso da Plataforma HypatiaMat na promoção da aprendizagem da adição de números naturais
*Daniela Pires, Ana Elisa Santiago, Fernando Martins*____ 307

Introdução

Em 1990, nas Caldas da Rainha, realizou-se pela primeira vez o Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM) junto ao ProfMat. Desde então, a sua realização tem-se mantido regularmente, havendo nas últimas realizações um dia comum aos dois encontros. O SIEM teve este ano a sua trigésima primeira edição, pela primeira vez online, desta vez a seguir ao ProfMat, coincidindo o último dia deste com o do SIEM.

O SIEM é uma organização do GTI (Grupo de Trabalho de Investigação) que, através da sua Comissão Coordenadora convida para cada realização uma Comissão Científica responsável pelo respetivo programa. A sua realização junto ao ProfMat pretende cumprir um dos seus objetivos, a divulgação e partilha da investigação, em particular a que se realiza em Portugal, junto dos professores que ensinam Matemática.

Este ano o tema principal foi o currículo e incluiu três sessões em plenário. Desde logo a conferência plenária em conjunto com o ProfMat, da responsabilidade de Ana Paula Canavarro, Paulo Correia e Pedro M. Marques, intitulada: Afinal como estamos de programa de Matemática no Ensino Básico? Ainda em comum com o ProfMat realizaram-se as conferências com discussão: Desenvolver o raciocínio matemático a partir de estudos de aula por João Pedro da Ponte, Pensamento algébrico e desenvolvimento profissional de professores: explorando tarefas formativas com foco no raciocínio dos estudantes do ensino básico, por Alessandro Ribeiro, A colaboração na formação de professores que ensinam Matemática, por Marcia Cyrino e Potencialidades do humor gráfico no ensino e na aprendizagem da Matemática por Luís Menezes e Pablo Flores. O programa do SIEM incluiu, para além do espaço GTI, mais duas conferências plenárias, uma da responsabilidade de Berinderjeet Kaur, intitulada The intended and enacted school mathematics curriculum in Singapore e outra de Paola Sztajn com o título 20 anos depois: O que aprendemos sobre o Triângulo Instrucional?

Ocorreram também, à semelhança do que aconteceu em encontros anteriores, cinco simpósios de apresentação e discussão de comunicações e cartazes, propostos pelos participantes. Estas comunicações e cartazes passaram por um processo de revisão científica por pares. Foram aceites 13 comunicações e 9 cartazes. Para além da participação de investigadores portugueses, tivemos este ano, tirando partido da sua realização online, uma maior participação de investigadores internacionais, provenientes de diferentes países (Brasil, Espanha, Estados Unidos e Singapura).

Conferências Plenárias
Plenary Talks

The intended and enacted school mathematics curriculum in Singapore

Berinderjeet Kaur[1]

Abstract: The intended school mathematics curriculum is very comprehensive and issued by the Ministry of Education in Singapore. It is also revised periodically. The revision is guided by a number of considerations. One of them is the need for the young in Singapore to be global citizens of the future. Intentions must be translated into actions and teachers are the agents who translate the intended curriculum into the enacted curriculum. Research on mathematics instructional practices of secondary school mathematics teachers have facilitated our examination of 'How mathematically powerful are our classrooms in secondary schools?'

Keywords: school mathematics curriculum, intended curriculum, enacted curriculum, Singapore

1.0 Introduction

I would like to begin this paper with two quotes. The first is by Mr Andreas Schleicher, Special Advisor to the Secretary General on Education Policy and Deputy Director for Education and Skills of OECD, at the launch of the PISA 2012 results on Problem Solving in Singapore on April 2014. Schleicher said,

> Singapore's education system has at times been criticised for encouraging rote learning at the expense of developing creative skills. The PISA 2012 assessment of problem-solving skills proves those critics wrong. It shows that today's 15-year-olds in Singapore are quick learners, highly inquisitive, able to solve unstructured problems in unfamiliar contexts, and highly skilled in generating new insights by observing, exploring and interacting with complex situations. Indeed, no education system outperforms Singapore on this test. (Ministry of Education, 2014).

1. National Institute of Education Nanyang Technological University Singapore.

The second is from the same event by Ms Ho Peng, the Director-General in Singapore, who noted that:

> "We are pleased with the strong performance by our students in PISA 2012. This affirms our efforts in giving our students not just a strong foundation in literacy and numeracy, but also in equipping them with the skills to solve problems in real-world contexts. Over time, our teaching strategies have focused on helping students gain a deeper conceptual understanding and developing their thinking skills. Our students can navigate well in unfamiliar contexts because of the many opportunities to learn not just within the classroom, but also beyond the classroom through co-curricular activities and service projects. We will continue to look for ways to help our students grow to become compassionate and confident citizens, contributing not only to Singapore but also to the world." (Ministry of Education, 2014).

I would consider Andreas an outsider while Ho an insider. It is obvious from both the quotes that 15-year olds from Singapore are commendable problem solvers as they drew on their knowledge and skills to solve problems posed in the PISA 2012 test of Problem Solving. While Andreas has challenged the myth of East Asian Pedagogies for mathematics, Ho has shed light on the evolution of the school mathematics curriculum, the intended and enacted, in Singapore. In this paper, I will first briefly describe the intended school mathematics curriculum, viz-a-viz the Syllabus document of the Ministry of Education, and the role and scope of textbooks that support intents of the curriculum. Next, I will draw on a recent national level study of the enacted school mathematics curriculum in Singapore secondary schools and shed light on classroom practices of mathematics teachers in Singapore secondary schools.

2.0 The intended school mathematics curriculum

The evolution of the intended school mathematics curriculum has been documented in detail elsewhere (Kaur, 2019a; 2019b). From the early 1950s till the present the curriculum has morphed from an adoption of Britain's school mathematics curriculum, as Singapore was a British colony till the early 1960's, to one that is progressive and a model for many countries around the world. Since 2000, the curriculum is best described as 'Mathematics for all but more mathematics for some' (Kaur, 2003, p. 440). The curriculum is tailored to meet the diverse needs of students across the ability range. In the following sub-sections, we provide glimpses of two key aspects of the intended curriculum.

2.1 The school mathematics curriculum document

This document, detailing the official curriculum for mathematics, is very comprehensive. The 2018 revised version comprises five sections (Ministry of Education, 2018), namely:

2.1.1 Aims, objectives and updates

This section provides the rationale for the updates effected in the revised document of the curriculum necessary to align the aims and objectives of teaching and learning mathematics for currency and global citizenship respectively. It also illuminates the place of mathematics within the context of school curriculum.

2.1.2 Big ideas and the school mathematics curriculum framework

This section provides a working definition of mathematics, explains how the four themes in the study of mathematics are derived and how they will guide teachers in the articulation of big ideas. For the first time, the disciplinarity of mathematics is emphasized in line with a future view

> Why it's important to think like a mathematician as the mechanics of math are becoming less important for humans … But a deep understanding of mathematical ideas and principles, and our capacity to think like mathematicians, are becoming more important

articulated by Schleicher (2019) at the unveiling of the PISA 2021 framework. The four themes are:

- **Properties and Relationships**

What are the properties of mathematical objects and how are they related?
- **Operations and Algorithms**

What meaningful actions can we perform on the mathematical objects and how do we carry them out?
- **Representations and Communications**

How can the mathematical objects and concepts be represented and communicated within and beyond the discipline?
- **Abstractions and Applications**

How can the mathematical objects be further abstracted and where can they be applied?

These themes provide a basis for the Big Ideas identified in the curriculum. The Big ideas are Equivalence, Proportionality, Invariance, Measures, Notations and Diagrams for grades 1-12, while another two: Functions and Models are only for grades 7-12.

This section also explicates the school mathematics framework, shown in Figure 1, which connects the "product" conception of mathematics and the "process" aspect of it and links both of them to the five factors that facilitate the development of mathematical problem solving (Wong & Lee, 2010). It represents an organizing framework that "presents a balanced, integrated vision that connects and describes the skills, concepts, processes, attitudes and metacognition" (Leinwand & Ginsburg, 2007, p. 32). It provides teachers with a structure and helps them focus on the five factors when enacting the curriculum so that they provide a more engaging, student-centred, and technology-enabled environment for learners and promote greater diversity and creativity in learning (Ministry of Education, 2012). As expected, the descriptors of the five components of the framework have evolved from one cycle of the curriculum revision to the next since its inception in 1990.

In 2018, the framework was again updated to reflect a maturity of the curriculum placing emphasis on mathematics as an academic discipline, for example in the past Concepts were directed at mathematical strands such as Number, Geometry, etc. (as shown in Table 1) but now the interpretation of concepts is provided with an underlying assumption concepts are in every strand of mathematics and what is pertinent is necessary for teachers to emphasize when teaching for Big ideas. Similarly, the other 4 factors were also updated. Table 1 shows the descriptors of the components for the periods 2013-2017 and as in the most recent revision of the curriculum.

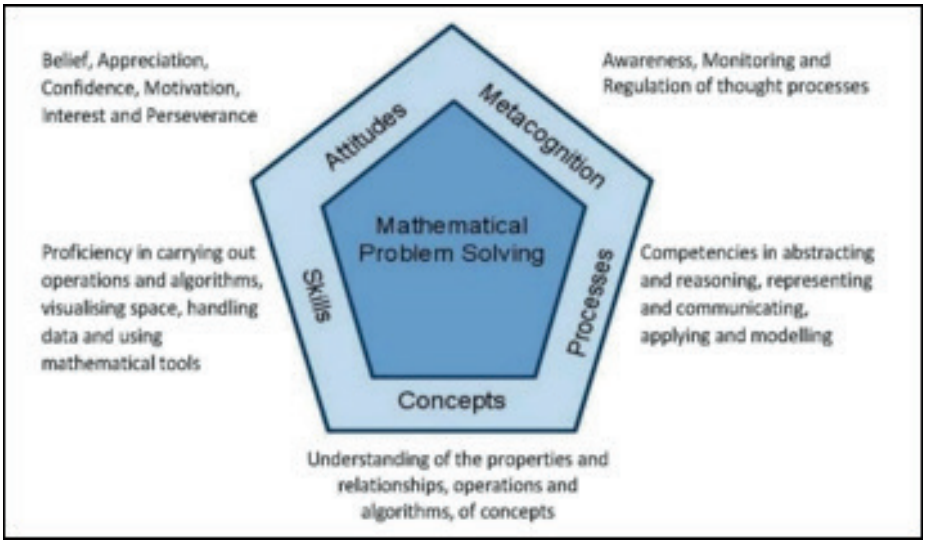


Figure 1. Framework of the School Mathematics Curriculum (Ministry of Education, 2018, p. S2-6)

Table 1.
Components and descriptors of the school mathematics curriculum framework

Component	Descriptors	
	2013 - 2017	2018 and beyond
Concepts	Numerical, Algebraic, Geometrical, Statistical, Probabilistic, Analytical	Understanding of the properties and relationships, operations and algorithms, of concepts

Skills	Numerical calculation, Algebraic manipulation, Spatial visualization, Data analysis, Measurement, Use of mathematical tools, Estimation	Proficiency in carrying out operations and algorithms, visualizing space, handling data, and using mathematical tools
Processes	Reasoning, communication and connections, Thinking skills and heuristics, Applications and modelling	Competencies in abstracting and reasoning, representing and communicating, applying and modelling
Attitudes	Beliefs, Interest, Appreciation, Confidence, Perseverance	Beliefs, Appreciation, Confidence, Motivation, Interest and Perseverance
Metacognition	Monitoring of one's own thinking, self-regulation of learning	Awareness, Monitoring, and Regulation of thought processes

2.1.3 The Mathematics content

This section details the content to be taught at very grade level. It is evident that the content has both horizontal and vertical alignments. By horizontal alignment it is meant that topics taught sequentially are organised such that topic '*n*' is a pre-requisite for topic '*n* + 1' within a strand. In addition, strands are also sequenced in a manner such that strand *x* (for example Number) supports the learning of strand *y* (Geometry or Statistics). By vertical alignment it is meant that 'each topic is revisited and introduced *in* increasing depth from one grade level to the next to enable students to consolidate the concepts and skills learned and to develop these concepts and skills further' (Lee et al., 2019, p. 36). This is what Bruner termed a spiral curriculum (Bruner, 1960).

As mentioned in section 2.0, students in Singapore take mathematics courses at levels suited to their academic ability. Essentially for the secondary school students there are three courses of study, the Express course, the Normal (Academic) course and the Normal (Technical) course. Students in the Express course are from the top 60% of a cohort, in the Normal (Academic) the next 25 % of a cohort and the Normal (Technical) the bottom 15% of a cohort. The content for the Normal (Technical) course is a subset of that for the Normal (Academic) and the content for the Normal (Academic) course is a subset of that for the Express course. This provides the less academically able students more time to work through the mathematics and also the organisation of the content facilitates lateral transfers between course of study. When a child moves laterally between courses, often bridging takes place for content topping where necessary.

Whatever the course of study, the content is equally detailed. Accompanying the content are learning experiences for teachers to engage students with. These are expressed as “students should have opportunities to …” and focus teachers on the student-centric aspect of learning mathematics.

2.1.4 Pedagogy

This section outlines the process of teaching and learning that is contextualised in the Singapore Teaching Practice (https://opal.moe.edu.sg/stp). It suggests approaches to address the mathematical problem-solving focus and the five components in the framework. It advocates three phases of learning and suggested activities in each of the phases which are as follows.

- **Readiness Phase**

Student readiness to learn is vital to learning success. Teachers have to consider the learning environment, students’ prior and pre-requisite knowledge, and motivating contexts that will interest students.

- **Engagement Phase**

This is the main phase of learning where teachers engage students (Encouraging Learner Engagement) cognitively, affectively and behaviourally. The engagement phase can include one or more of the following: Activity-based learning, teacher-directed inquiry or Direct instruction.

- **Mastery Phase**

The mastery phase is the final phase of learning where students consolidate and extend their learning. The mastery phase can include one or more of the following: Motivated practice, Reflective review or Extended learning.

As noted by Lee et al. (2019) the curriculum recognizes the need for ‘age-appropriate strategies’ such as through the use of concrete manipulatives and pictorial representations to scaffold the learning and for sense making. The key pedagogical approach advocated by the curriculum document is the ‘Concrete – Pictorial – Abstract’ (C-P-A) approach (Leong et al., 2015) particularly for the teaching of the number and algebra strand.

It also emphasizes the use of formative assessment strategies to improve learning and inform teaching and explains the role of technology in the teaching and learning of mathematics. Most importantly this section guides teachers in addressing the shifts in the revised curriculum such as teaching for Big ideas and also reinforce the need to teach for relational understanding (Skemp, 1976) as knowing the why, what and how is important for students to be adept at mathematical problem solving.

2.1.5 Assessment

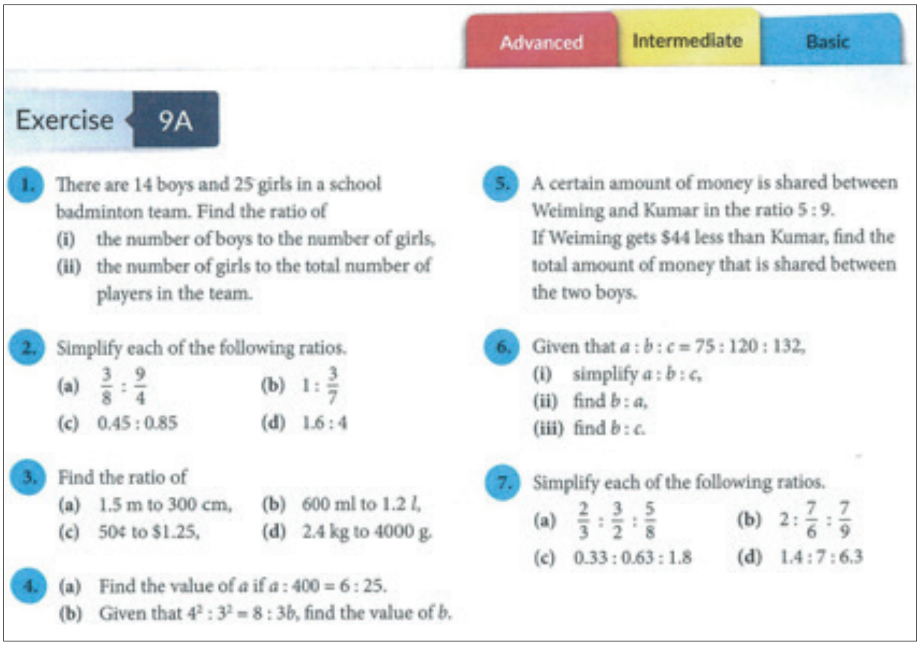
This section focuses on summative assessment. It states the assessment objectives and provides guidelines for designing school-based summative assessments, including tables of specifications and formats. School-based assessments need to be consistent with the curriculum expectations at each grade level, both in terms of content coverage and difficulty levels of the test items. End of year school-based examinations specific to a grade level across the nation must also be comparable to ensure that standards of instruction are maintained and teachers are accountable for quality of instruction. The national examination formats are also included. These are essential for teachers to prepare students for the national examinations at the appropriate grade levels.

2.2 Textbooks

In Singapore, the main instructional materials for use by teachers are textbooks. The textbooks are produced commercially and compete for official adoption by the Ministry of Education. They adhere very closely to the intended school mathematics curriculum issued by the Ministry as this is a necessary condition for adoption. The publishers of the textbooks are closely guided by the curriculum specialists at the Curriculum Planning and Development Division of the Ministry of Education during the conceptualization and writing phases of the books. The purpose of this is to ensure that the quality of the books meets the standards set by the Ministry of Education.

Kaur et al. (2006), in their study of grade eight mathematics teachers, who were recognized for their teaching competency in their respective schools, found that textbooks amplify an explicit link between the Ministry of Education's prescribed curriculum and the enacted curriculum as they form a critical component of the teacher's intended curriculum. The teachers in the study stated that, as there was a tight alignment between the intended curriculum from the Ministry of Education and the content of the textbooks, they used mathematical tasks from the books for both learning and practice in their lessons. Also, Zhu and Fan (2002) in their study on the use of textbooks by mathematics teachers at grades seven and eight in Singapore found that textbooks were the main print resource for worked examples and exercises for mathematics teachers. Teachers often supplemented their collection of worked examples from other sources such as reference texts and/or e-resources available on the internet or in the form of CD-ROMs, but they almost always used the exercises in the textbooks for homework assignments. They also found that the academic status of the school, the teaching experience of the teacher and the gender of the teacher did not affect the ways in which teachers used the textbook. Ho and Toh (2019) in their study of how algebraic thinking is developed through examples and exercise in grades 7 and 8 textbooks in Singapore noted that a good foundation for students was evident though more could be done for students to engage with reflective practice, in view of 21st century competencies.

As textbooks mirror the intents of the curriculum prescribed by the Ministry of Education and need approval for use in schools, it is expected that textbooks are also constantly evolving. One can infer this from the nature of exercises a textbook presents for a topic of the content. For readers to have a sense of the questions Figures 2a, 2b and 2c shows an exercise comprising 24 questions for the topic of ratio (grade 7) from a textbook for the Express Course of study. The questions are graded as Basic (Q 1-10), Intermediate (Q 11-19) and Advanced (Q 20 – 23). It is evident from Questions 1 to 10, that there is a concerted push towards the development of procedural fluency with a grasp of the concept of ratio. The innumerable forms of numbers (whole numbers, decimals, fractions) and units of measure (cm, m; cents, dollars; g, kg; ml, l) allow the teacher to also fore ground the Big idea of equivalence when engaging students in practice. In the next level of questions, Intermediate, (Questions 11-19), it is apparent that there is a significant jump of cognitive demand where students need procedural fluency to mitigate presentation of ratios in complex and extended forms such as making relationships between ratio of 2 quantities presented as ratios of three quantities, and so forth. It may be said that instrumental understanding (Skemp, 1976) alone cannot support a child in resolving these tasks, definitely relational understanding must be present. Lastly in the Advanced Level (Questions 20 – 23) it is evident that procedural fluency, a rigorous grasp of the concept and ability to draw on appropriate mathematical processes such as thinking skills (compare and contrast, what if, etc.), heuristics (make a guess, check and modify your guess, list possibilities, etc.) is required for students to successfully complete the question



Advanced | Intermediate | Basic

Exercise 9A

1. There are 14 boys and 25 girls in a school badminton team. Find the ratio of
   (i) the number of boys to the number of girls,
   (ii) the number of girls to the total number of players in the team.

2. Simplify each of the following ratios.
   (a) $\frac{3}{8} : \frac{9}{4}$ (b) $1 : \frac{3}{7}$
   (c) $0.45 : 0.85$ (d) $1.6 : 4$

3. Find the ratio of
   (a) 1.5 m to 300 cm, (b) 600 ml to 1.2 *l*,
   (c) 50¢ to \$1.25, (d) 2.4 kg to 4000 g.

4. (a) Find the value of a if $a : 400 = 6 : 25$.
   (b) Given that $4^2 : 3^2 = 8 : 3b$, find the value of b.

5. A certain amount of money is shared between Weiming and Kumar in the ratio 5 : 9. If Weiming gets \$44 less than Kumar, find the total amount of money that is shared between the two boys.

6. Given that $a : b : c = 75 : 120 : 132$,
   (i) simplify $a : b : c$,
   (ii) find $b : a$,
   (iii) find $b : c$.

7. Simplify each of the following ratios.
   (a) $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} : \frac{5}{8}$ (b) $2 : \frac{7}{6} : \frac{7}{9}$
   (c) $0.33 : 0.63 : 1.8$ (d) $1.4 : 7 : 6.3$

Figure 2a. Questions on ratio (Yeap et al., 2020, p. 45)

Basic | Intermediate | Advanced

Exercise 9A

8. Find the ratio of
(a) 580 ml to 1.12 l to 104 ml,
(b) 2.8 kg to 700 g to 1.05 kg,
(c) 32 m to 2.4 km to 64.8 m,
(d) \$7.60 to 84¢ to \$6.

9. Nadia, Yi Hao and Devi make a total of 1530 toys in the ratio 12 : 16 : 17. Find
(i) the number of toys Yi Hao makes,
(ii) the amount of money Devi earns if she is paid \$1.65 for each toy.

10. In 2015, a total of 510 000 patients were admitted to hospitals. There were 12 000 doctors and 38 000 nurses registered in the country, and 800 volunteers who helped out in the hospitals. Find the ratio of
(i) the number of patients to the number of doctors,
(ii) the number of doctors to the number of nurses to the number of volunteers.

11. Simplify each of the following ratios.
(a) $0.75 : 3\frac{5}{16}$ (b) $7\frac{1}{7} : 4.5$
(c) $24\% : 1\frac{1}{5}$ (d) $0.84 : 0.84\%$

12. Find the ratio of
(a) $1\frac{2}{3}$ h to 800 s, (b) $4\frac{1}{5}$ kg to 61.6 g,
(c) $3\frac{3}{4}$ l to 250 ml, (d) \$2.05 to 75¢.

13. (a) Given that $\frac{2x}{5} = \frac{3y}{8}$, find the ratio of $x : y$.
(b) Given that $\frac{7x}{9} = \frac{14y}{3}$, find the ratio of $x : y$.

14. In a school of 1200 students, the ratio of the number of teachers to students is 1 : 15.
After some teachers join the school, the ratio of the number of teachers to students becomes 3 : 40. Find
(i) the initial number of teachers in the school,
(ii) the number of teachers who join the school.

15. If $p : q = \frac{3}{4} : 2$ and $p : r = \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, find
(i) $p : q : r$,
(ii) $q : r$.

16. Given that $x : 3 : \frac{9}{2} = \frac{15}{4} : 4\frac{1}{2} : y$, find the value of x and of y.

17. Albert, Imran and Siti invested \$427 000, \$671 000 and \$305 000 in a property respectively and they agreed to share the profit in the ratio of their investments.
After a few years, they sold the property for \$1 897 500.
Find the amount of profit each of them received.

18. The numbers of roses, sunflowers and tulips a florist has are in the ratio 5 : 6 : 9.
After the florist sells 50 roses, the ratio becomes 3 : 4 : 6.
Find the number of roses left after 50 of them are sold.

19. Vani makes a fruit drink for a party. She uses lemonade, strawberry syrup and carbonated water in the ratio 3 : 1 : 4. She has enough lemonade and carbonated water to make 6 litres of the fruit drink.
(i) Strawberry syrup is sold in 240-ml bottles. Find the number of bottles of strawberry syrup she has to buy.
(ii) Vani decides to use up all the strawberry syrup bought as calculated in part (i). Find the additional amounts of lemonade and carbonated water Vani has to buy in order to maintain the ratio of 3 : 1 : 4.

20. Find the number that must be added to 3 and 8 so that the ratio of the first number to the second number becomes 2 : 3.

Figure 2b. Questions on ratio (Yeap et al., 2020, p. 46)

Advanced | Intermediate | Basic

Exercise 9A

21. Given that $x : y = 3 : 4$ and $y : z = 5 : 8$, find the value of $\frac{2y}{3x - y + 2z}$.

22. Three numbers x, y and z are such that $x : y : z = 5 : 4 : 3$.
OPEN
(a) Suggest one set of values of x, y and z if $x \neq 5$.
(b) Suggest one set of values of x, y and z if $0 < x < 1$.

23. Bernard and Shufen are competing in an election to be the president of the Student Council.
The ratio of votes Bernard receives to that which Shufen receives from Class A is 1 : 2.
The ratio of votes they receive from Class B is 3 : 2.
(a) Bernard claims that neither he nor Shufen wins the election because the ratio of votes he receives to that Shufen receives is 4 : 4.
Is Bernard correct? Explain.
OPEN (b) Shufen claims that she has won the election. Suggest one set of the number of votes each of them received from each class such that Shufen's claim is true.

Figure 2c. Questions on ratio (Yeap et al., 2020, p. 47)

Figure 3 shows two questions from the national examination that students take at the end of grade 10 for the Express course of study. It is apparent that the intermediate level exercises in the textbook are representative of the national level questions students from the Express course of study would do at their national examinations.

General Certificate of Education Ordinary Level (2019) - Paper 1 Question 19 Ann and Ben each have a savings account. The ratio Ann's savings : Ben's savings = 7 : 5. They each spend $60 from their savings. The new ratio Ann's savings : Ben's savings = 3 : 2. Find how much money Ann now has in her account.
General Certificate of Education Ordinary Level (2015) - Paper 1 Question 12 (a) Wong makes a fruit drink. He uses apple juice, peach juice and lemonade in the ration 5 : 2 : 8 respectively. He uses 2.4 litres of lemonade. i) How much apple juice does he use? ii) how much fruit drink does he make altogether? b) Min makes a fruit drink using orange juice, lemonade and pineapple juice. The ratio orange juice : lemonade is 2 : 5. The ratio of lemonade : pineapple juice is 3 : 4. Find the ratio orange juice : lemonade : pineapple juice.

Figure 3. Questions on ratio in the General Certificate of Education Ordinary Level Examinations

3.0 The enacted school mathematics curriculum in Singapore secondary schools

A recent comprehensive study of the enacted secondary school mathematics curriculum conducted at the national level has shed light on several characteristics of mathematics instruction in our schools. Two key outputs of the study, namely

- Mathematical instructional practices in Singapore secondary schools (Kaur & Leong, 2021)
- Twelve questions on mathematics teaching – Snapshots from A study of the enacted school mathematics curriculum in Singapore (Kaur et al., 2019)

provide readers with glimpses of mathematics instructional practices of our teachers in secondary schools. A copy of the twelve questions book may be downloaded from www.tinyulr.com/Enact-12Q at no cost. In this paper I will share the findings in relation to the question: How mathematically powerful are the classrooms in Singapore secondary schools? which is question 12 in the book.

3.1 The Teaching for Robust Understanding of Mathematics Framework

According to Schoenfeld's (2014) Teaching for Robust Understanding of Mathematics (TRU Math) framework, the five dimensions of mathematically powerful classrooms as shown in Figure 4 are (i) The Mathematics, (ii) Cognitive Demand, (iii) Access to Mathematical Content, (iv) Agency, Authority and Identity, and (v) Uses of Assessment.

The Five Dimensions of Mathematically Powerful Classrooms	
The Mathematics	The extent to which the mathematics discussed is focused and coherent and to which connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) are addressed and explained.
Cognitive Demand	The extent to which classroom interactions create and maintain an environment of productive intellectual challenge conducive to students' mathematical development.
Access to Mathematical Content	The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core mathematics being addressed by the class.
Agency, Authority and Identity	The extent to which students have opportunities to conjecture, explain, make mathematical arguments, and build on one another's ideas, in ways that contribute to their development of agency and authority resulting in positive identities as doers of mathematics.
Uses of Assessment	The extent to which the teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings

Figure 4. The five dimensions of mathematically powerful classrooms (Schoenfeld, 2014)

3.2 How mathematically powerful are the classrooms in Singapore secondary schools?

To answer this question, we map the pedagogy of the teachers in Singapore mathematics classrooms onto that of mathematically powerfully classrooms advocated by Schoenfeld, based on the findings from the study of the enacted secondary school mathematics curriculum conducted at the national level from 2016 – 2020.

3.2.1 Dimension 1 – The Mathematics

This is the quality of the mathematics that gets discussed. According to

Schoenfeld, if the mathematics is impoverished or if the mathematics is learnt procedurally, students cannot grow to be powerful thinkers and sensemakers. It is not just the mathematics and what the teacher presents, but what sense the students make of the mathematics. Our study shows that teachers draw on three key approaches when engaging students in learning mathematics. The approaches are (i) explaining the concept/formula/property to the whole class while asking questions along the way; (ii) guiding the whole class to discover the concept/formula/property; and (iii) asking students to do a task to discover the concept/formula/property. Teacher's choice of approach was not fixed but rather dependent on their lesson goals, as in a lesson a teacher often drew on more than one of these approaches. Teachers also help students to make connections among mathematical ideas in their instructional materials in a number of ways, including: (i) connecting across different modes of representations; (ii) developing from earlier concepts rather than presenting each as isolated ideas; and (iii) reinforcing conceptual links established earlier.

3.2.2 Dimension 2 – Cognitive Demand

This is the extent students are engaged in productive struggle to make sense of mathematical concepts. According to Schoenfeld, if the mathematics is cut up into little bitesize pieces such that students do not get to do any real thinking, then they are not building their mathematical muscles; or if the mathematics is beyond their level and they are given challenges they cannot make sense of so they end up just memorizing, then they are not doing the right kind of sensemaking. The real challenge for instruction with regard to this dimension, is how the teacher makes sure that the students are engaged in a way that they are actually doing some thinking and problem solving within the range of what they can do so they grow by virtue of having done that sensemaking, and doing that means that the teacher has to have arranged the contingencies of instruction so that the mathematics and the instructions meet the students where they are and support them to grow their mathematics. Our study shows that teachers develop students' thinking skills and heuristics, through (i) teaching problem solving heuristics explicitly; and (ii) teaching thinking skills explicitly. They also facilitate the development of metacognitive strategies amongst their students, through 3 key approaches: (i) getting students to compare different ways of solving a problem; (ii) providing opportunities for their students to reflect on their own learning, including helping them to monitor their learning; and (iii) getting students to check for reasonableness of their answers after solving a problem. In addition, teachers also stimulate students' thinking via their instructional materials in a number of ways, including: (i) including mathematical items that are deemed challenging to students at appropriate junctures so that students are given opportunities to grapple with mathematical conceptual knowledge that is beyond mere mechanical applications; and (ii) providing opportunities for students to make comparisons across methods.

3.2.3 Dimension 3 – Access to Mathematical Content

This is about enabling every single student in the classroom to engage powerfully with the mathematical content and to do sensemaking with the content. Different students come to different tasks with different strengths and different understandings. According to Schoenfeld, narrow-band activities that can be approached in only one way limit the mathematical riches, the kinds of conversations that the class is engaged in, and the numbers of students engaged in the tasks. Tasks that enable all students access to mathematical content have low floors and high ceilings – they are easy to begin to understand, and students make progress on them in relatively unsophisticated ways, but also in very sophisticated ways, making mathematical connections along the way. Our study shows that teachers emphasise mathematical processes by developing students' mathematical reasoning and communication skills through 2 key approaches: (i) getting students to explain and justify their or their peers' working; and (ii) helping students draw conjectures about mathematical relationships. Teachers also adopt different approaches to make connections between mathematics in the classroom and real-world context, including: (i) using real-world examples in lessons; and (ii) encouraging students to discuss assumptions made. Teachers also help students to gain fluency in applying formula using their instructional materials in a number of ways, including: (i) arranging mathematical items in gradually-increasing levels of difficulty; (ii) using a variety of examples and items judiciously to help students gain familiarity to the different ways of applying the formula in an appropriate range of tasks; and (3) developing formulas by building on previously-learnt methods or ideas so as to strength the links in students' learning.

3.2.4 Dimension 4 – Agency, Authority and Identity

This is getting students to develop a sense of agency in mathematics, seeing themselves as people who can do mathematics, develop an identity as a mathematics person who can do it when is confronted with a mathematical challenge. According to Schoenfeld, students in a mathematically powerful classroom not only have the opportunity to do sensemaking, but to talk to each other about it, to make contributions to the classroom discourse, to have others build on their ideas so that mathematics class becomes a place where people sort out reasoning collectively and building on one another's ideas. Our study shows that teachers create opportunities for and orchestrate math talks in their classrooms, mostly drawing on the basic repertoire of teaching talk: rote, recitation, and instruction/exposition, and occasionally the two kinds: discussion, and dialogue. Students are mostly engaged in the basic repertoire of learning talk: narrate and explain; and are given occasional opportunities to develop their repertoire of learning talk, such as speculate, imagine, explore, analyze, evaluate, discuss, argue, justify, and question. These math talks lie in a continuum between univocal and dialogic, depending on the instructional goals. Teachers also adopt various approaches to imbue desired attitudes, such as interest, appreciation, confidence and perseverance, for the learning of mathematics amongst their student, including: (i) building students' confidence by starting with tasks that they can do before progressing to more difficult tasks; (ii) encouraging students to persevere when solving a mathematics problem; (iii) using real-life examples and applications to help students appreciate the relevance of mathematics; (iv) making lessons interesting by telling jokes or stories; and (v) making lessons interesting by using funny mathematics-related video.

3.2.5 Dimension 5 – Uses of Assessment

This is assessment done in the moment of instruction in the service of helping teacher and students understand what the students understand so that teacher can do something about it. It is to understand students' thinking well enough to anticipate what students can do, to provide students the opportunity to reveal what they know, then instruction can meet them where they are and help them move forward and cognitive demands can be adjusted accordingly so that the students are doing sensemaking and building their own understanding. Our study shows that teachers adopt the following actions in their moments of instruction so as to assess students' understanding:

- walking around the class noting student work that teacher would draw on to provide the class feedback during whole class review;
- exchanging ideas with students on how to solve a problem;
- asking students open-ended questions and allowing them to build on each other's responses to develop concepts or clarify their understanding;
- building on students' responses rather than merely receiving them;
- providing students with probing guidance (open-ended questions about their thinking and why they are considering certain approaches) when they face difficulty with a mathematical task they are doing;
- providing feedback to individuals for in-class work and homework to serve as information and diagnosis so that students can correct their errors or improve; and
- providing collective feedback to whole class for common mistakes and misconceptions related to in-class work and homework.

They also encourage their students to self-assess and deepen their own understanding by:

- asking questions when they do not understand;
- explaining how their solutions or how their answers are obtained;
- analyzing why a procedure (that teacher has shown on the board) works or why a solution method makes sense;
- offering alternative method(s) or solution(s) to a problem teacher has shown on the board;
- asking questions (such as 'what if') to probe further or deepen understanding;
- defending and explaining to classmate(s) why their approach/method to solve a problem is better (more efficient or more elegant);
- critiquing one another's work presented on board/screen so as to

improve their understanding of concepts or elegance in their presentation/solution; and
- discussing features of a problem that teacher has shown on the board so as to select a particular procedure or solution method.

4.0 Concluding remarks

For any curricula to be relevant it must be reviewed periodically. The Singapore school mathematics curriculum is reviewed once every six years. The review considers both external and internal factors when evaluating the currency and efficacy of the curriculum. Global developments are key considerations as our students are global citizens and may be part of an economy anywhere in the world. National policies and initiatives in education are also of paramount importance as mathematics is one of the many school subjects that makes a school curriculum which is often shaped by social and political elements of a national agenda.

Findings from international benchmark studies such as Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), Programme for International Student Assessment (PISA) and research carried out at the National Institute of Education (NIE) with funding from the Ministry of Education provide inputs into what we teach, how we teach and when we teach specific topics of the content in the curriculum. The voice of teachers is also a key consideration when a review of the curriculum is carried out as they are our front liners who enact the curriculum and know their students best.

Lastly, it may be said that no curriculum can be ideal as change and evolution are inevitable. One that is valid and optimal for period x will not be the same for the next period y. This is a happy problem as the quest for a better curriculum keeps us all scaling greater heights in our deliberations, creations of prototypes, etc.

References

Bruner, J.S. (1960). *The process of education*. MA: Harvard University Press.

Ho, S.Y. & Toh, T.L. (2019). Representation of algebra concepts in Singapore secondary mathematics textbooks. In Vistro-Yu, C. & Toh, T.L. (Eds.), School mathematics curricula - Asian perspectives and glimpses of reform (pp. 105-126). Springer Nature.

Kaur, B. (2003). Mathematics for all but more mathematics for some. In B. Clarke, R. Cameron, H. Forgasz, A. Bishop & W. T. Seah (Eds.), *Making mathematicians* (pp. 440 - 455). The Mathematical Association of Victoria.

Kaur, B. (2019a). Evolution of Singapore's school mathematics curriculum. In Vistro-Yu, C. & Toh, T.L. (Eds.), *School mathematics curricula - Asian perspectives and glimpses of reform* (pp. 21-38). Springer Nature.

Kaur, B. (2019b). Overview of Singapore's education system and milestones in the development of the system and school mathematics curriculum. In T. L. Toh, B. Kaur & E.G. Tay (Eds.), *Mathematics education in Singapore* (pp. 13-33). Springer.

Kaur, B. & Leong, Y.H. (Eds.) (2021). *Mathematics instructional practices in*

Singapore secondary schools. Springer Nature.
Kaur, B., Low, H.K. & Seah, L.H. (2006). Mathematics teaching in two Singapore classrooms: The role of the textbook and homework. In D.J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective* (pp. 99-115). Sense publishers.
Kaur, B., Toh, T. L., Lee, N. H., Leong, Y. H., Cheng, L. P., Ng, K. E. D., Yeo, K. K. J., Yeo, B. W. J., Wong, L.F., Tong, C.L., Toh, W.Y. K. & Safii, L. (2019). *Twelve questions on mathematics teaching.* National Institute of Education.
Lee, N.H., Ng, W.L.& Lim, L.G.P. (2019). The intended school mathematics curriculum. In T.L. Toh, B. Kaur & E.G. Tay (Eds.), *Mathematics education in Singapore* (pp. 35-53). Springer Nature.
Leinwand, S. & Ginsburg, A. (2007). Learning from Singapore math. *Educational Leadership, 65* (3), 32-36.
Leong, Y.H., Ho, W.K., & Cheng, L.P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. T*he Mathematics Educator, 16* (1), 1-19.
Ministry of Education (2012). *Secondary mathematics teaching and learning syllabuses.* Singapore: Author
Ministry of Education (2014). *PISA 2012 Study: Singapore students excel in thinking flexibly and creatively to solve complex and unfamiliar problems.* Singapore: Ministry of Education Press Release (www.moe.gov.sg/press)
Ministry of Education (2018). *Secondary mathematics syllabuses.* Singapore: Author
Schleicher, A. (2019, October 11). *OECD Education and Skills Today.* OECD Education Today.
Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher, 43* (8), 404-412.
Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.
Wong, K.Y. & Lee, N.H. (2010). Issues of Singapore mathematics education. In F.K.S. Leung & Y. Li (Eds.), *Reforms and issues in school mathematics* in East Asia (pp. 91-108). Sense Publishers.
Yeap, B.H., Yeo, B.W.J., Choy, B.H., The, K.S., Wong, L.F., Lee, S. & Ong C.H. (2020). *Think mathematics – Textbook 1B* (New syllabus mathematics) (8th Edition). Shingle Publishers Pte Ltd.
Zhu, Y. & Fan, L. (2002). Textbook use by mathematics teachers at lower secondary level in Singapore. In D. Edge, & B.H. Yeap (Eds.), *Proceedings of second East Asia Conference of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 194-201). Singapore: National Institute of Education.

20 Anos Depois: O que aprendemos sobre o Triângulo Instrucional?

20 years later: what have we learned about the instructional triangle?

Paola Sztajn[1]

Resumo: Há 20 anos, Cohen e Ball (2001) definiram instrução como sendo as interações entre professores, alunos, e currículo no contexto de um ambiente de aprendizagem. Essa definição foi depois representada como um triângulo instrucional e também expandida para examinar a formação de professores (Nipper & Sztajn, 2008). Retornando ao triângulo instrucional, nessa apresentação examino o que aprendemos sobre a instrução nesses últimos 20 anos, considerando o que sabemos hoje sobre o professor, os alunos, o currículo e a interação entre eles quando o objetivo é promover a aprendizagem—tanto no contexto da escola como no contexto da formação do professor. Em particular, discuto a questão da equidade na instrução, certamente o maior desafio do momento para todos os educadores que têm como base de seu trabalho o objetivo de garantir a aprendizagem de todos os alunos, independentemente de características tais como raça, etnia, género, língua, nível socioeconómico.

Palavras-chaves: instrução, equidade, práticas.

Abstract: *Twenty years ago, Cohen and Ball (2001) defined instruction as the interactions between teachers, students, and curriculum in the context of a learning environment. This definition was later represented as an instructional triangle and also expanded to examine teacher education (Nipper & Sztajn, 2008). Returning to the instructional triangle, in this presentation I examine what we have learned about instruction over the past 20 years, considering what we know today about teachers, students, curriculum, and the interaction between them when the goal is to promote learning—both in school contexts and in the context of teacher education. Specifically, I discuss the issue of equity in instruction, which is certainly the biggest challenge of our time for all educators whose work is based on the goal of promoting learning for all students,* regardless of characteristics such as race, ethnicity, gender, language, socioeconomic status.

Keywords: *instruction, equity, practices.*

1. North Carolina State University, US

Vou começar esta palestra pelo final. Moral da história: nos últimos 20 anos, aprendemos muito sobre instrução. Também aprendemos muito sobre pesquisa. Portanto, nossas pesquisas hoje nos permitem entender melhor os estudantes, professores e recursos disponíveis para o ensino e aprendizado da matemática. Mas temos um problema fundamental que ainda não resolvemos e que precisamos atacar com toda a força da nossa comunidade: a equidade, ou melhor, a falta de equidade na educação matemática. Com todos os avanços feitos, características demográficas não relacionadas à matemática, como raça, gênero, nível socioeconômico, língua, etnia, ainda preveem o desempenho dos estudantes em nossas escolas e ambientes de aprendizagem. Em um mundo cada vez mais diverso, salas de aula de matemática continuam separadas por características demográficas, e, por exemplo, aqui nos Estados Unidos, podemos determinar o nível de dificuldade de uma aula de matemática pela cor da pele e língua dos estudantes do curso.

Em um estudo recente, a UNESCO (2021) pediu a mais de 15.000 pessoas que selecionassem, de uma lista de 11 itens, os 4 principais desafios da humanidade para uma sociedade pacífica em 2030. A mudança climática emergiu como o principal desafio, escolhido por 67% dos participantes da pesquisa. Discriminação e desigualdade foi o terceiro item da lista com 43% de seleção e apenas 1% a menos que o segundo item mais selecionado: violência e conflito. Discriminação e desigualdade, no entanto, foi o segundo item mais selecionado entre mulheres e minorias, e 49% dos jovens com menos de 25 anos selecionaram esse item entre os 4 maiores desafios. Para solucionar essa questão, a educação foi listada como principal caminho. As 3 soluções mais frequentemente escolhidas em todo o mundo para o problema da discriminação e desigualdade foram: ensino sobre tolerância e direitos, garantia de acesso à educação de qualidade para todos e a promoção de respeito por todas as culturas e pela diversidade. Mas como pode a educação, e em particular a educação matemática, ajudar a resolver esse problema na próxima década?

Minha fala está certamente situada no contexto histórico e social dos Estados Unidos neste momento. Estamos vivendo ao mesmo tempo o crescimento da compreensão das questões de raça e identidade e o recrudescimento da discriminação e do racismo. A compreensão de como o racismo sistêmico impacta nossa sociedade vem junto com um forte movimento de resistência daqueles que acham que estão perdendo algo ou sendo desrespeitados pelo crescimento da conscientização — algo do qual já falava Paulo Freire (1968). Mas esse problema não é apenas um problema americano. Com o crescimento das migrações em todo o mundo e também dos questionamentos sobre as relações colonialistas que reorganizaram grupos e culturas, mesmo sociedades que até agora permaneciam menos diversas estão tendo que examinar a questão da diversidade e, com ela, a questão da discriminação. A tendência de um mundo cada vez mais conectado e diversificado é inexorável. E hoje também sabemos que grupos diversos são mais capazes de solucionar problemas, o que ressalta o valor e a importância da diversidade.

Diversidade é benefício e não problema. Então, como a educação pode ajudar a resolver a questão da desigualdade e, em particular, da desigualdade de aprendizagem entre os estudantes? E como nós, educadores matemáticos, vamos nos posicionar com relação a essa questão?
Em minha fala, coloco o foco na sala de aula e nas questões relacionadas com a instrução. Vou falar sobre estudantes, professores, recursos e suas interações. Também discuto algumas práticas que podem ajudar a promover a equidade. Enquanto falo, gostaria que vocês considerassem as questões da diversidade e equidade no contexto português, e também no brasileiro, para que possamos continuar a discussão considerando como as práticas propostas e as perguntas que aqui coloco se relacionam com o contexto de vocês. Para aprender com vocês, pergunto: quais as maiores desigualdades educacionais no contexto português e brasileiro, e como promover diversidade e equidade no ensino e aprendizagem da matemática em Portugal e no Brasil?

O triângulo instrucional: considerando as interações

Para melhorar o ensino de matemática, não basta considerar o professor ou os materiais didáticos. A instrução é composta das interações entre professores, estudantes e conteúdo ou materiais didáticos e recursos existentes na sala de aula. Essa ideia, proposta por Cohen e Ball (1999), foi inicialmente representada por um triângulo que ressalta as interações entre estudantes, professores e materiais: o triângulo instrucional. O objetivo era esclarecer que a busca de soluções para a qualidade do ensino precisava considerar não só o que estudantes, professores e materiais trazem para a sala de aula, mas também os modos nos quais estudantes, professores e materiais percebem ou são percebidos pelos outros e as formas como as relações na sala de aula permitem ou não construir novas ideias. Cohen e Ball também mencionaram a importância dos ambientes onde essas relações ocorrem, com atenção para as escolas, sistemas escolares, normas profissionais e parâmetros educacionais, além da formação profissional.
Expandindo a atenção aos ambientes nos quais a dinâmica instrucional ocorre, Cohen e Ball (2001) explicaram que tais ambientes oferecem tanto limites quanto oportunidades e incluem preocupações dos pais, direções estabelecidas pelo diretor da escola, currículos, avaliação, políticas educacionais e financiamento. Todos esses aspectos do ambiente são percebidos e utilizados por estudantes e professores em suas interações e, assim, eles impactam o processo de instrução. Essa importância do ambiente, uma ideia sugerida há 20 anos, foi representada em 2003 pelos elementos do triângulo instrucional dentro de círculos que representavam o ambiente (Cohen, Raudenbush & Ball, 2003). Mais tarde, Ball e Forzani (2007) conectaram o ambiente a cada um dos vértices do triângulo e sugeriram que, na prática, o professor precisa utilizar seus conhecimentos e técnicas profissionais para tornar as interações instrucionais produtivas para a aprendizagem dos estudantes dentro dos seus ambientes. Desse modo, ao longo dos anos, Ball e colegas aprimoraram a representação do triângulo instrucional

para esclarecer e ressaltar o papel do ambiente nas relações de ensino e aprendizagem. A ênfase no ambiente nessas relações foi importante para a matemática, porque ainda há muitos que acham possível centrar as discussões sobre a educação matemática apenas no conteúdo. A evolução do triângulo instrucional relembra-nos que toda aprendizagem se dá em um contexto que não pode ser ignorado. Esse contexto inclui todos os aspectos do sistema educacional dentro e fora da sala de aula. Ele também inclui o que está ocorrendo ao redor da sala de aula e as questões sociais emergentes. Em particular, o contexto do estudante, dentro e fora da sala de aula, é um componente central das dinâmicas instrucionais, e o professor que não entende ou atende a esse contexto não maximiza as oportunidades de aprendizagem para todos os estudantes. Então, por exemplo, este ano nos Estados Unidos, a morte de George Floyd e o impacto desse evento no sistema educacional e na vida dos estudantes, particularmente na dos estudantes pretos, não pode ser ignorado pelo professor — mesmo o professor de matemática.

Jacobs e Spangler (2017) propuseram que, de todas as interações em sala de aula representadas no triângulo instrucional, aquelas que se organizam em torno do pensamento matemático dos estudantes são fundamentais para a aprendizagem da matemática. Em meu trabalho, chamo essas interações de instrução baseada em trajetórias de aprendizagem (*learning trajectory based instruction*, LTBI) para ressaltar os grandes avanços feitos na compreensão do pensamento matemático dos estudantes e a necessidade de priorizarmos as trajetórias de aprendizagem como o centro da pesquisa sobre o ensino (Sztajn, Confrey, Wilson & Edington, 2012; Sztajn & Wilson, 2019).

Em sua revisão da literatura sobre a prática dos professores de matemática, Jacobs e Spangler (2017) sugeriram que as práticas de perceber o pensamento matemático dos estudantes e liderar discussões são centrais para interações que promovem aprendizagem. Em uma conceptualização ampla, a percepção do pensamento matemático dos estudantes inclui atenção, interpretação e decisão sobre o que fazer baseados no que os estudantes compartilham (Jacobs, Lamb, & Phillip, 2010). Jacobs e Spangler ressaltaram que a maior ou menor percepção com relação ao pensamento matemático dos estudantes está diretamente ligada à ação dos professores e é uma prática que pode ser aprendida e aprimorada com o tempo. Elas também notaram vários estudos conectando percepção e equidade. Por exemplo, além da atenção ao pensamento matemático dos estudantes, professores preocupados com equidade prestam atenção às dinâmicas de poder dentro da sala de aula, em quem está participando nas discussões, e em como professores e estudantes se posicionam com relação à matemática. Professores preocupados com a equidade estão atentos aos conhecimentos e experiências que estudantes trazem de suas casas, comunidades e culturas.

Com relação à prática de liderar discussões, Jacobs e Spangler (2017) ressaltaram que o modo como professores organizam as discussões em sala de aula influencia diretamente nas oportunidades de aprendizagem proporcionadas aos estudantes, e a participação em discussões produtivas pode ter resultados tanto cognitivos como afetivos. Elas sugerem que práticas como engajar o estudante com o pensamento matemático de seus colegas, questionar e oferecer suporte são centrais para as discussões. De fato, a ciência cognitiva também tem confirmado que o uso de perguntas explanatórias em discussões nas quais os estudantes explicam seus pensamentos e constroem sentido para o pensamento dos outros suportam a aprendizagem da matemática (Star & Vershaffel, 2017). Uma prática adicional listada por Jacobs e Spangler é fundamental para a equidade: posicionar todos os estudantes como matematicamente competentes. Atribuir competência de forma pública e intencional na sala de aula com ações tais como selecionar o momento certo para convidar estudantes com menor status acadêmico a compartilhar e justificar seu raciocínio matemático; ressaltar suas contribuições para a discussão e convidar outros estudantes a fazerem perguntas, alteram as relações de saber e poder na sala de aula, oferecendo oportunidades para aumentar a equidade.

Todas essas práticas de sala de aula viram parte do discurso matemático quando incorporadas às rotinas que guiam as interações entre estudantes, professores e materiais. Em nosso trabalho com professores, definimos discurso como os padrões usados para questionar, explicar, ouvir e usar diferentes modos de comunicação na sala de aula (Sztajn, Heck, & Malzahn, 2021). Vale notar que as discussões de sala de aula são apenas uma parte do discurso, o qual inclui outras formas de interação além daquela em grupo único e outros modos de comunicação além da fala. A ideia de padrões é importante nessa definição, porque práticas implementadas apenas de vez em quando não são incorporadas ao entendimento geral que professores e estudantes precisam desenvolver sobre como participar das interações que ocorrem durante as aulas de matemáticas. Em nosso trabalho, definimos 4 tipos de discurso de acordo com as 4 dimensões (questionar, explicar, ouvir e usar vários modos de comunicação). Esses quatro tipos de discurso põem em foco, respectivamente, as ações de corrigir, incluir, questionar e delegar responsabilidade aos estudantes. Em inglês, chamamos os quatro tipos de discurso de *correcting, eliciting, probing e responsive discourse.*

Em sala de aula, a escolha do discurso a ser implementado depende dos objetivos da aula. Por exemplo, usar interações rápidas centradas na correção pode ajudar a desenvolver fluência com fatos básicos e definições; mas não desenvolve compreensão. O professor questionando o estudante para que este explique seus próprios pensamentos pode desenvolver compreensão, mas não posiciona o estudante como responsável pelo discurso do grupo. E se apenas um pequeno grupo de estudantes domina o discurso da sala de aula de matemática, sem oportunidades para outros participarem e serem reconhecidos como parte da comunidade de aprendizagem matemática criada na sala de aula, o discurso não promove equidade.

Com relação à equidade, em nosso trabalho (Sztajn, Heck, Malzahn,

2021) prestamos atenção aos estudantes multilíngues e consideramos que, nas séries iniciais, todos os estudantes estão aprendendo a se comunicar matematicamente. Isso quer dizer que todos os estudantes das séries iniciais são comunicadores matemáticos emergentes. Sendo assim, os professores precisam ensinar explicitamente aos estudantes como participar de discussões que geram aprendizagem e oferecer estruturas de participação. Esse ensino explícito sobre como participar é importante para que todos possam participar competentemente. Atenção à língua e à cultura dos estudantes também é fundamental, assim como valorizar as contribuições positivas que todos os estudantes trazem. Além disso, é importante evitar o uso de linguagem que ressalta as deficiências e, ao invés disso, centralizar a atenção no que o estudante já sabe para poder claramente estabelecer o que ainda é preciso aprender. Descrições genéricas que caracterizam o estudante pela falta de conhecimentos não são produtivas, e é necessário usar linguagem precisa que descreve as ações matemáticas dos estudantes — daí a contribuição que as trajetórias de aprendizagem podem oferecer. Por exemplo, nas séries iniciais, é importante dizer "esta criança sabe a sequência dos nomes dos numerais, mas ainda não desenvolveu a cardinalidade" ao invés de dizer "esta criança não sabe contar." Dizer que a criança não sabe contar, apesar de correto, não proporciona ao professor o mesmo nível de clareza sobre o que o estudante sabe e o que precisa aprender. Esse tipo de declaração dificulta a ação do professor.

Também consideramos fundamental para a equidade que todos os estudantes tenham oportunidade de participar em todos os tipos de discurso. Os discursos centrados no questionamento e na responsabilidade dos estudantes são mais produtivos para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos matemáticos. Se alguns estudantes têm oportunidade de participar apenas em discursos que valorizam somente a correção, ou mesmo em discursos que incluem mais estudantes nas discussões mas não puxam pelo rigor, esses estudantes têm menos oportunidades de aprender matemática. Baseado no trabalho de Discroll, Heck e Malzhan (2012), nós usamos 3 princípios para guiar o trabalho com estudantes multilíngues. Primeiro, esses estudantes devem ser desafiados com tarefas de alta demanda cognitiva. Segundo, o professor precisa usar múltiplos modos de representação das ideias matemáticas como gestos, gráficos e desenhos. E terceiro, é preciso promover a linguagem acadêmica para que os estudantes multilíngues tenham acesso a ela. A linguagem acadêmica não substitui o uso da linguagem informal ou da língua materna dos estudantes como instrumentos de aprendizagem na sala de aula. No entanto, quando estudantes não são expostos à linguagem acadêmica, mais uma vez, suas oportunidades de aprendizagem ficam reduzidas.

O triângulo instrucional na formação do professor

Destacando a formação do professor, em 2008 propusemos o uso do triângulo instrucional para definir essa formação como as interações entre o formador do professor, os professores participantes e os materiais ou recursos utilizados na formação (Nipper & Sztajn, 2008). Essa formação pode estar centrada tanto no conteúdo matemático, como pode ter como foco a instrução em matemática, ou seja, interações entre professores, estudantes e materiais nos contextos das salas de aula. Trazendo a questão das interações para a formação de professores, apontamos para a importância de também considerarmos os discursos implementados em programas de formação. Estudos que analisam a participação de professores no discurso de formação têm mostrado que professores podem modificar suas crenças, conhecimentos e identidades em cursos de formação (Sztajn, Borko & Smith, 2017). A modificação da prática docente e seu impacto nos estudantes é uma questão mais complexa. Quero dar alguns exemplos dos meus grupos de pesquisa.

No projeto chamado *All Included in Mathematics* (AIM), nossos dados demonstraram que professores das séries iniciais, participando de um estudo quase experimental e posteriormente de um estudo aleatorizado, modificaram crenças e práticas com relação ao discurso matemático em suas salas. Nos dois estudos, as mudanças dos grupos que estavam participando do desenvolvimento profissional foram significativamente maiores do que a do grupo de controle em quesitos como o conhecimento matemático especializado do professor, a frequência com que o professor planeja sua aula com atenção ao discurso (além do conteúdo) e a percepção dos professores de que estavam preparados para liderar discussões. No estudo quase experimental, também houve diferenças significativas na qualidade das aulas observadas, na frequência da prática de usar métodos apresentados pelos estudantes como parte do discurso e na percepção da importância da discussão entre estudantes. Já no estudo aleatório, as diferenças encontradas centraram na frequência do uso das ideais compartilhadas pelos estudantes para a tomada de decisões pedagógicas (Sztajn, Heck, Malzhan, Alnizami, in preparation).

Duas ideias importantes sobre a formação do professor emergiram desses estudos. A primeira pode ser representada pelo conceito que Guskey (2020) denominou de “inversão da formação,” onde atuamos primeiro na modificação da prática e só depois das crenças. Nosso trabalho leva aos professores técnicas de sala de aula que podem ser imediatamente implementadas (Sztajn, Heck, & Malzhan, 2021). Na organização do curso de formação, nós primeiro discutimos a organização da aula, depois apresentamos as técnicas e, após a implementação dessas técnicas, retornamos à teoria para ajudar o professor a refletir sobre o porquê e o para quê das técnicas (Sztajn, Heck, Malzhan, & Dick, 2020). Ao mesmo tempo, a implementação dessas técnicas na sala de aula é feita de forma cuidadosa, que denominamos de implementação controlada. Então, a segunda ideia importante para a formação do professor é o nosso argumento de que, para professores que estão em sala de aula, a implementação controlada é um componente importante da formação (Sztajn, Dick, Alnizami, Heck & Malzhan, 2020). Esse componente deve ser adicionado a outros componentes da formação professional caracterizados por Grossman e colegas

(2009) como representações, decomposições e aproximações. Essas duas ideias mostram que nos cursos de formação dos professores precisamos considerar as formas como interagimos durante o programa de formação.

Prestar atenção ao discurso do professor durante a formação é uma forma de considerarmos as interações nesse contexto. Em nosso projeto sobre LTBI, analisamos o discurso dos professores durante nossos encontros e examinamos os fatores aos quais os professores atribuem o desempenho matemático de seus estudantes (Wilson, Sztajn, Edginton, Webb & Myers, 2017). Dos quatro fatores emergentes — idade/série, habilidade, esforço e sorte — os dois primeiros foram se modificando ao longo do programa de formação. O discurso que atribui desempenho a idade/série foi transformado durante o curso de formação e passou a incluir as trajetórias de aprendizagens para melhor caracterizar os estudantes. O discurso que atribui desempenho à habilidade foi alterado, mas não transformado. Esse discurso passou a usar as trajetórias de aprendizagens para justificar argumentos já existentes. Assim, a noção de que alguns estudantes podem aprender matemática e outros não continuou presente durante todo o curso de formação.

Como habilidade é considerado um fator fixo, a ideia de que alguns estudantes têm habilidade e outros não permite a justificação externa à sala de aula do porquê alguns aprendem e outros não. Martin (2009) mostrou como o discurso sobre habilidade perpetua uma hierarquia racial e a construção social de que estudantes pretos, latinos e nativos não são capazes de aprender matemática. Esse resultado levou-nos a criar estruturas mais explícitas para as discussões sobre o pensamento matemático dos estudantes dentro de nossos cursos de formação. Por exemplo, examinamos como identidade e poder — o eixo crítico da equidade (Gutierrez, 2007) — estavam presentes em nosso trabalho (Myers, Sztajn & Wilson, Edgington, 2015). Também criamos normas explícitas para a discussão sobre o pensamento dos estudantes, estabelecendo a necessidade de: (1) descrever as ações matemáticas dos estudantes; (2) usar evidências para justificar asserções sobre o que os estudantes sabem ou não; (3) desenvolver hipóteses sobre o pensamento matemático por trás do trabalho do estudante e (4) reconhecer quando asserções são especulações ou julgamentos (Edgington, Sztajn, Wilson, Myers & Webb, 2015). Uma nova implementação do programa, utilizando essas estruturas, mostrou que os professores começaram a perceber o conceito de habilidade como sendo menos fixo. Dessa forma, aprendemos que, com atenção explícita ao discurso e à equidade durante a formação do professor, as trajetórias de aprendizagem podem permitir que o professor considere a habilidade dos estudantes como um fator que pode ser alterado quando são dadas aos estudantes oportunidades para aprendizagem (Sztajn, Edginton, Wilson, Webb & Myers, 2019).

Essas experiências na formação do professor de matemática mostram que a atenção ao pensamento matemático dos estudantes como conceito central para as interações que ocorrem nesse contexto é necessária mas não suficiente para promover instrução em que, de fato, todos os estudantes têm oportunidades de aprender. Da mesma forma que a atenção ao pensamento matemático dos estudantes na sala de aula é necessária mas não suficiente para promover instrução que promove equidade. O conceito de equidade não pode estar apenas implícito na ideia de que todos os estudantes precisam de oportunidades para aprender. Esse conceito tem que ser ressaltado e explicitamente considerado quando planejamos e desenhamos interações com professores e também quando professores planejam e desenham suas interações com estudantes. Essa atenção explícita à equidade é, portanto, importante se a educação pretende ter um papel central na resolução do problema da discriminação e da desigualdade.

Promovendo equidade

Assim como aprendemos muito sobre instrução e suas dinâmicas nos últimos 20 anos, a pesquisa sobre práticas que promovem a equidade também avançou. Civil, Hunter e Crespo (2020) revisaram a literatura sobre a prática de professores comprometidos com a equidade. Elas organizaram os estudos em três grupos: inclusão, culturalmente sustentável e para a justiça social. Estudos centrados na inclusão consideram estratégias de ensino que incluem ou excluem estudantes de participarem, reconhecendo que, na sala de aula, vários fatores influenciam a participação dos estudantes. Estudos sobre práticas culturalmente sustentáveis continuam o trabalho das práticas culturalmente relevantes, que destacam o empoderamento de estudantes e seus grupos sociais. Nesse contexto, a construção de relações de confiança é essencial, tanto com estudantes como com pais e a comunidade. Nessas relações o poder é compartilhado na sala de aula e nas atividades matemáticas dos estudantes fora da escola, e os saberes matemáticos da comunidade são reconhecidos. Com um enquadramento mais sociopolítico do que sociocultural, o ensino da matemática para a justiça social propõe que professores precisam entender os contextos sociopolíticos de interesse de seus estudantes, contextos estes que podem ser estudados e analisados matematicamente. Civil e colegas observaram que o ensino da matemática para a justiça social é complexo e ainda pouco sabemos sobre como preparar professores para essa tarefa.

Em um material didático recente para o ensino da matemática voltado para a justiça social no ensino das séries 9-12 (Ensino Médio), Berry, Conway, Lawler e Staley (2020) sugerem que professores que aderem a essas práticas aprendem a facilitar conversas sobre tópicos controversos em suas aulas, ajudam os estudantes a verem como a matemática é relevante para suas vidas e atuam na resolução de desigualdades sociais via esforços liderados pelos próprios estudantes. Para os autores, justiça social inclui acesso, participação, empoderamento e direitos humanos para todas as pessoas e para cada pessoa. Eles propõem que o ensino da matemática para justiça social é construído a partir de movimentos como os padrões curriculares, instrução complexa, pedagogia culturalmente relevante e educação matemática crítica, tomando e aprimorando o que foi aprendido em cada um desses movimentos. Desse modo, esse tipo de ensino é fundamentado em conteúdo rigoroso ao mesmo tempo em que possui objetivos específicos com relação à justiça social, que os autores sugerem devem ser baseados em 4 áreas listadas pelo Southern Poverty Law Center: identidade, diversidade, justiça e ação (Teaching Tolerance, 2016). As aulas apresentadas no livro organizam-se em torno de tópicos como distribuição de riqueza, disparidades de salários, custos da globalização, cidadania e mudanças climáticas, entre outros.

Retornando à sala de aula, em uma análise de práticas nas quais a instrução estava orientada para o desenvolvimento conceitual dos estudantes, isto é, nas aulas pautadas por tarefas de alta demanda cognitiva e atenção ao pensamento do estudante no discurso matemático, Wilson e colegas (2019) compararam classes nas quais estudantes afro-americanos tiveram desempenho em testes estaduais acima do previsto com outras salas nas quais o desempenho foi abaixo do previsto. Elas selecionaram classes com pelo menos 25% dos estudantes identificados como afro-americanos e analisaram vídeos de duas (preferencialmente seguidas) aulas de matemática nos meses de janeiro, fevereiro e março. As pesquisadoras codificaram os vídeos com relação a sete práticas de sala de aula que, inicialmente, emergiram da literatura como práticas que promovem equidade. Todas essas práticas estavam, de fato, presentes com maior frequência nas salas nas quais o desempenho dos estudantes afro-americanos superou as expectativas. As práticas eram: explicitar expectativas matemáticas (além de sociais); apoiar os estudantes (*coaching*) social e matematicamente para alcançar as expectativas sem abaixar o nível de dificuldade das tarefas; atentar ao contexto local dos estudantes, conectando esse contexto com a matemática; atentar à linguagem (cultural e matemática); atribuir autoridade matemática aos estudantes e responsabilidade por sua aprendizagem; posicionar estudantes como competentes; atender a comunidade da sala de aula para promover um ambiente estimulante. Wilson (comunicação pessoal) está agora desenvolvendo instrumentos que poderão ser utilizados para avaliar salas de aula com relação a práticas equitativas.

Diferentes perspectivas sobre como pensar a equidade na educação matemática, exemplos de materiais didáticos que promovem justiça social e tipos de práticas docentes que demonstram impacto positivo no desempenho de estudantes de diferentes grupos sociais são alguns dos novos caminhos que podemos abraçar em nossa comunidade. Não é preciso que todos redirecionem suas pesquisas para tratarem da equidade; mas é totalmente necessário que dentro do que fazemos, cada um de nós faça da equidade uma questão explícita, para a qual dedicamos atenção, tempo e recursos.

Conclusão

Do mesmo modo que comecei, vou terminar esta palestra pelo final. A pesquisa em educação matemática fez muitos avanços nos últimos 20 anos. Hoje melhor entendemos os processos de ensino-aprendizagem, as práticas dos professores e a formação docente. Hoje sabemos que instrução é um processo dinâmico de interações entre estudantes, professores e materiais, como sugerido pelo triangulo instrucional. Mas tão importante quanto as interações, sabemos que essas interações devem ser consideradas junto com os ambientes nos quais elas ocorrem. E mais, também sabemos que certas práticas do professor e certos tipos de interação ajudam a promover equidade – tanto no contexto da sala de aula como no contexto da formação do professor. Mas um tema que se repete no que estamos aprendendo é a necessidade de atenção explícita à equidade e à implementação de instrução baseada em relações de confiança que levam em conta o contexto dos estudantes e proporcionam, para todos os estudantes, oportunidades de participação em experiências de aprendizagem com alta demanda cognitiva. Se queremos salas de aula na quais não podemos mais prever o desempenho dos estudantes dadas suas características demográficas como raça, gênero, nível socioeconômico, língua ou etnia, precisamos — todos e cada um de nós — voltar nossa atenção para a questão central do momento: equidade na educação. Acredito que só assim conseguiremos que a educação seja, de fato, um instrumento para solucionar o problema mundial da discriminação e desigualdade.

Então pergunto: quais as maiores desigualdades educacionais no contexto português e brasileiro, e como promover diversidade e equidade no ensino e aprendizagem da matemática em Portugal e no Brasil? E o que você vai fazer sobre isso?

Referências bibliográficas

Ball, D. L. & Forzani, F. M. (2007). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education 60* (5), 497-511.

Berry III, R. Q., Conway IV, B. M., Lawler, B. R., & Staley, J. W. (2020). *High school mathematics lessons to explore, understand and respond to social injustices.* Corwin Press.

Civil, M., Hunter, R. & Crespo, S. (2020). *Mathematics teachers committed to equity.* In D. Potari & O. Chapman (Eds.), International handbook of mathematics teacher education, Volume 1: *Knowledge, beliefs and identity in mathematics teaching and teaching development*. (Second Edition). Sense Publishers.

Cohen, D. K. & Ball, D. L. (1999). *Instruction, capacity, and improvement*. Consortium for Policy Research in Education Research Report Series RR-43.

Cohen, D. K. & Ball, D. L. (2001). Making change: Instruction and its improvement. *Kappan, 83* (1), 73-77.

Cohen, D., Raudenbush, S., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25* (2), 1–24.

Driscoll, M., Heck, D., & Malzahn K. (2012). Knowledge for teaching English language learners mathematics: A dilemma. In S. Celedón-Pattichis & N. G. Ramirez (Eds.), *Beyond good teaching: Advancing mathematics education for ELLs.* National Council of Teachers of Mathematics.

Edgington, C., Sztajn, P. Wilson, P. H., Myers, M., & Webb, J. (2015). Norms for discussing students' mathematics in professional development. *Journal of Mathematics Education Leadership, 16* (1), 12-18.

Freire, P. (1968). *Pedagogia do oprimido.* Paz e Terra.
Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111* (9), 2055–2100.
Guskey, T. R. (2020). Flip the script on change. *The Learning Professional, 41* (2), 18-22.
Jacobs, V. R. & Spangler, D. A. (2017). *Research on core practices in K-12 mathematics teaching.* In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 766-792). National Council of Teachers of Mathematics.
Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41* (2), 169–202.
Martin, D. B. (2009). Researching race in mathematics education. *Teacher College Record, 111* (2), 295-338.
Myers, M., Sztajn, P. Wilson, P. H., & Edgington, C. (2015). From implicit to explicit: Articulating equitable learning trajectory based instruction. *Journal of Urban Mathematics Education, 8* (2), 11-22.
Nipper, K. & Sztajn, P. (2008). Expanding the instructional triangle: Conceptualizing professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11* (4), 333-341.
Star, J. R. & Vershaffel, L. (2017). *Providing support for student learning: recommendations from cognitive Science for the teaching of mathematics.* In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 292-307). National Council of Teachers of Mathematics.
Sztajn, P. , Heck, D. , & Malzhan, K. (2021). *Project AIM Technical Report.*
Sztajn, P. & Wilson, P. H. (2019). *Learning trajectories for teachers: Designing professional development for mathematics instruction.*Teachers College Press
Sztajn, P. Edgington, C. Wilson, P. H., Webb, J., Myers, M. (2019). The learning trajectory based instruction project. In P. Sztajn & P. H. Wilson (Eds.), *Learning trajectories for teachers: Designing professional development for mathematics instruction* (pp.15-47). Teachers College Press.
Sztajn, P., Borko, H., & Smith, T. (2017). Research on mathematics professional development. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 793-823). National Council of Teachers of Mathematics.
Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*, 147-156.
Sztajn, P., Dick, L., Alnizami, R., Heck, D. & Malzahn, K. (2020). Controlled implementations: teaching practice to practicing mathematics teachers. In S. Linhares & O. Chapman (Eds.), International handbook of mathematics teacher education, Volume 2: Tools and processes in mathematics teacher education (Second Edition). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
Sztajn, P., Heck, D. & Malzhan, K. (2021). *Activating Math Talk: 11 purposeful techniques for your elementary classroom.* Corwin Press.
Sztajn, P., Heck, D. J., Malzahn, K. A., & Dick, L. K. (2020). Decomposing practice in teacher professional development: Examining sequences of learning activities. *Teaching and Teacher Education (91)*. doi. org/10.1016/j. tate.2020.103039

Teaching Tolerance (2016). Social justice standards.The teaching tolerance anti-bias framework. Available at https://www.learningforjustice.org/sites/default/files/2020-09/TT-Social-Justice-Standards-Anti-bias-framework-2020.pdf

UNESCO (2021). *The world in 2030: Public survey report.* ISBN:978-9-231-00439. Available at https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000375950.locale=en

Wilson, J., Nazemi, M., Jackson, K., and Wilhelm, A. G. (2019). Investigating teaching in conceptually oriented mathematic classrooms characterized by African-American student success. *Journal for Research in Mathematics Education, 50* (4), 363-400.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J., & Myers, M. (2017). Change in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal, 54* (3), 568-604.

Conferências com Discussão
Conferences with Discussion

XXXI SIEM
seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

A colaboração na formação de professores que ensinam matemática

Collaboration in the mathematics teacher education

Márcia Cyrino[1]

Resumo: A colaboração tem se destacado pelo seu potencial na formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, por promover processos de interação entre professores, futuros professores e formadores, e, por conseguinte, um ambiente de aprendizagem para todas as pessoas envolvidas. Nessa conferência, com base no nosso trabalho e de vários investigadores, pretendo apresentar o papel da colaboração em práticas gestadas e problematizadas em grupos colaborativos (em diferentes contextos), suas potencialidades e dificuldades na constituição e ressignificação da prática docente, para a construção de conhecimentos profissionais do professor, para a problematização de processos de ensino e de aprendizagem de matemática em sala de aula, dentre outros aspectos inerentes à essa prática, com vistas ao desenvolvimento profissional e a constituição da identidade profissional de professores que ensinam matemática.

Palavras-chave: Colaboração; Formação de Professores que ensinam Matemática; Aprendizagem Docente; Identidade Profissional.

Abstract: Collaboration has been highlighted for its potential in mathematics teacher education, promoting mutual commitment and interaction processes between participants and, consequently, teacher learning and the movement of the constitution of professional identity. In order to highlight the potential of collaboration, this text discusses constituent elements of collaborative groups in spaces for mathematics teacher education (characteristics of a collaborative group, themes that have become a focal point of discussions in these groups, contexts and actions that promote collaboration); and the main theoretical and methodological references that support investigations of these groups. Collaborative training spaces are helpful to encourage the construction of teachers' professional knowledge and problematize the teaching and learning processes of mathematics in the classroom, among other aspects inherent to this practice, with a view to teacher learning and the constitution of the professional identity.

1. Universidade Estadual de Londrina (UEL), marciacyrino@uel.br

Keywords: *Collaboration; Mathematics Teacher Education; Teacher learning; Professional Identity.*

Introdução

Nas últimas décadas estudos têm demostrado que os grupos colaborativos se apresentam como um contexto promissor para o desenvolvimento profissional de professores (Borko & Potari, 2020; Jaworski et al., 2017; Triantafillou et al., 2021).

No *survey* apresentado no International Congress on Mathematical Education - ICME 13 (Jaworski et al., 2017; Robutti et al., 2016), no grupo de discussão "Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups", foram revisados 316 estudos publicados entre 2005 e 2015, sobre professores de matemática trabalhando e aprendendo em colaboração. De acordo com os autores, na análise desses trabalhos foi possível identificar, dentre outros elementos: a natureza dos trabalhos colaborativos e como se relacionam com a situação, o contexto e a cultura dos grupos investigados; quem são as pessoas, como se envolvem no trabalho colaborativo, que papéis desempenham na promoção da aprendizagem para ensinar matemática, como se relacionam entre si e nas diferentes comunidades que atuam; que perspectivas metodológicas e teóricas são utilizadas para orientar e informar o trabalho e a aprendizagem nos espaços colaborativos; que aprendizagens podem ser observadas e como elas se associam com a colaboração. No entanto, segundo os autores, a maioria dos trabalhos analisados no survey não apresentou explicitamente uma perspectiva teórica sobre colaboração. No International Commission on Mathematical Instruction - ICMI Study 25, foi discutida a necessidade de, para elaborar uma base teórica para o desenvolvimento profissional de professores em grupos colaborativos, serem integrados outros elementos teóricos voltados à sala de aula e ao desenvolvimento profissional (Prediger, 2020).

O Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática – Gepefopem, que coordenamos, nos últimos 18 anos tem promovido e investigado ações de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática (PEM) em escolas públicas do estado do Paraná – Brasil e em instituições de ensino superior. Desde 2008, analisamos em que medida a formação de professores pode ser pensada de modo a: atender às necessidades educacionais de nosso momento histórico (respeitando as singularidades); compreender como os professores aprendem; identificar elementos do contexto de formação que podem promover o movimento de constituição da identidade profissional (IP) de seus participantes; produzir reflexões em torno dos conhecimentos e dos requisitos necessárias para o professor no exercício de sua atividade profissional. Para tanto, organizamos grupos de formação de professores, com atributos de gru-

pos de estudos colaborativos, dentre os quais alguns se constituíram como Comunidades de Prática – CoPs (Wenger, 1998).
Nos próximos dias, a Sisyphus – Revista de Educação (Universidade de Lisboa) publicará o número temático "A colaboração na formação de professores que ensinam matemática", com artigos que discutem o papel da colaboração em práticas geradas e problematizadas em grupos colaborativos, formados em diferentes contextos, como comunidades de prática, grupos de estudos, estágio curricular obrigatório, de iniciação à docência, de formação iniciação a distância (EaD), de docência compartilhada, híbridos que articulam a universidade e a escola, dentre outros espaços de formação de PEM, sustentados por diferentes aportes teóricos.
Com o objetivo de evidenciar potencialidades da colaboração para a aprendizagem docente e para o movimento de constituição da IP de PEM, no presente texto discutimos elementos constituintes de grupos colaborativos em espaços de formação de PEM (características de um grupo colaborativo, temáticas que se tornaram ponto de enfoque de discussões nesses grupos, contextos e ações que promovem a colaboração); e os principais referenciais teóricos e metodológicos que sustentam investigações desses grupos. Em vista disso, consideramos as investigações do Gepefopem e as publicações recentes a respeito dessa temática. Na próxima secção, antes de apresentar a referida discussão, descreveremos a nossa compreensão sobre aprendizagem docente e o movimento de constituição da IP de PEM.

Aprendizagem docente e o movimento de constituição da IP de PEM

Consideramos aprendizagem docente a partir da Teoria Social da Aprendizagem (Wenger, 1998). Nessa teoria, a aprendizagem é uma prática social, parte integral de nosso cotidiano, e o processo de negociação de significados é um mecanismo para que ela ocorra. Esse processo está presente tanto em atividades rotineiras, como trabalhar, brincar, se alimentar, quanto em atividades que nos preocupam ou nos desafiam. Inclui nossas relações sociais, já que o significado é histórico, dinâmico e contextual. Pode envolver a linguagem, contudo não está limitado a ela; pode envolver ou não uma conversa ou interação direta com outras pessoas. De acordo com Lerman (2001), as teorias (de aprendizagem) que lidam com a complexidade das práticas sociais mostram-se as mais apropriadas para investigar a aprendizagem docente.
No processo de negociar significados são constituídas trajetórias de aprendizagem. De acordo com Wenger (1998), aprender muda quem somos, muda nossas práticas, nossa capacidade de participar do mundo, em suma, transforma a nossa identidade. A identidade não deve ser entendida como uma característica predeterminada por nossa personalidade, mas como algo que é (re)negociado constantemente no curso de nossas vidas, está em constante movimento. A identidade é "formada e transformada continuamente em relação às formas pelas quais somos representados ou interpelados nos sistemas

culturais que nos rodeiam. [...] A identidade plenamente unificada, completa, segura e coerente é uma fantasia" (Hall, 2015, pp. 11-12).

Desse modo, o movimento de constituição da IP de PEM é um processo contínuo, complexo, dinâmico, temporal e experiencial (De Paula & Cyrino, 2020, 2021), e se dá a partir de um conjunto de crenças/concepções, que o (futuro) professor traz para o processo de formação, interconectadas ao seu autoconhecimento[1], às emoções e aos conhecimentos necessários para o exercício de sua profissão[2] , associados à autonomia (vulnerabilidade e sentido de agência) e ao compromisso político (Cyrino, 2016, 2018).

Investigar grupos colaborativos pode nos ajudar a compreender as particularidades IP de professores desta área específica do conhecimento – Matemática (Francis et al., 2018), uma vez que a IP desempenha um papel central na compreensão das práticas de ensino, na motivação para ensinar, no bem-estar pessoal e profissional, na eficácia do ensino, na tomada de decisão a respeito da carreira de professor, dentre outros aspectos, colocando-se como um desafio para a formação de professores.

Elementos constituintes de grupos colaborativos em espaços de formação de PEM

A formação de PEM com vistas ao desenvolvimento profissional é um fenômeno complexo que engloba diferentes variáveis e contextos. Compreender como o (futuro) professor aprende, como se dá o movimento de constituição de sua identidade profissional (IP) para que possa enfrentar os desafios educacionais, nomeadamente: os processos de ensino e de aprendizagem da matemática; a tensão entre o plano epistemológico e o plano cognitivo; a complexidade e a diversidade da sala de aula; a construção e a implementação de um currículo que atenda às demandas sociais e aos novos papéis atribuídos ao professor, dentre outros, são aspectos a serem levados em conta pelos organizadores dos programas de formação (Cyrino, 2016).

Como pontuam Jaworski e Huang (2014), o desenvolvimento profissional torna-se mais prevalente nos programas de formação em que a prática reflexiva, as comunidades de investigação e a colaboração entre professores, formadores e outros agentes educacionais são os principais objetivos.

Características de um grupo colaborativo

A colaboração nos espaços formativos envolve indivíduos engajados em atividades conjuntas, com um propósito comum, comprometidos com a investigação, com um diálogo crítico e com o apoio mútuo, de modo que possam interagir, abordar e partilhar questões que os desafiam profissionalmente e refletir sobre seu papel na escola e na sociedade (Jaworski et al., 2017).

Nesses espaços, a colaboração não é imposta, ela é construída, de forma inclusiva, em um ambiente de diálogo aberto no qual os indivíduos se sentem à vontade para compartilhar suas diferenças, rotinas, dúvidas, dificuldades, vulnerabilidades. Além da voluntariedade, a colaboração é influenciada por um objetivo/temática comum

1. Autoimagem, autoestima, motivação para o trabalho, reconhecimento das tarefas profissionais,
perspectivas futuras (Rodrigues & Cyrino, 2020).
2. Ball et al. (2008)

que imprime ao grupo uma identidade. Diferente da cooperação, na qual as relações de poder e os papéis dos participantes não são questionados, a colaboração abrange negociação de ações, de significados, ressignificações, marcadas por processos reflexivos que auxiliam os participantes na análise e na tomada de decisões. Contudo, nos processos de negociação, nem sempre as relações são harmoniosas, podem ser conflituosas. A colaboração não pressupõe homogeneidade, pode envolver momentos de tensão, conflito, desacordos, desafios que, por vezes, denotam mais compromisso mútuo do que uma posição de conformidade passiva.

A colaboração tem se destacado pelo seu potencial em promover processos de interação necessários para a constituição de um ambiente de aprendizagem docente e de constituição da IP.

Temáticas que se tornaram ponto de enfoque nos grupos colaborativos

De acordo com Jaworski et al. (2017), foi possível observar no survey duas grandes temáticas que se tornaram ponto de enfoque nos grupos colaborativos analisados: 1.º) estudos sobre conteúdos matemáticos, desenvolvimento de novos currículos, diferentes abordagens pedagógicas; e 2.º) estudos sobre a integração de novas ferramentas e recursos com o objetivo de: a) promover o desenvolvimento dos professores, tendo em conta, por exemplo, diferentes trajetórias de aprendizagem dos alunos, competências necessárias para promover a aprendizagem dos alunos; b) compreender como os recursos de ensino podem apoiar a aprendizagem dos alunos.

Em nossas investigações, as temáticas que têm estado em mira nos espaços formativos colaborativos também estão associadas: a conteúdos matemáticos e como ensiná-los (pensamento algébrico, raciocínio proporcional, educação estatística, frações, funções, teorema de Pitágoras, área e perímetro); à presença desses conteúdos no currículo; a abordagens metodológicas (Resolução de Problemas, Ensino Exploratório, *inquiry-based teaching*, Investigação Matemática; História na Educação Matemática); e ao uso de ferramentas e recursos de ensino (GeoGebra, Recursos Multimídia, Vídeos de aula).

Ainda, foi possível discutir com os professores em formação outras temáticas inerentes à prática profissional do PEM, nomeadamente: os níveis de demandas cognitivas de tarefas matemáticas, a importância de promover a comunicação matemática; os aspectos da gestão de uma aula; a natureza de tarefas cognitivamente desafiadoras; a importância do *feedback* do professor com base nas respostas dos alunos; o papel da promoção de interações dialógicas entre os alunos; as fases de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório; a importância do autoconhecimento do professor (autoimagem, autoestima, motivação para o trabalho, reconhecimento das tarefas profissionais, perspectivas futuras) e de seu compromisso político; os dilemas da profissão docente, dentre outras.

Os diferentes conhecimentos e as concepções dos participantes dos grupos a respeito das temáticas que se tornaram foco e as experiencias de cada um acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da

Matemática fomentaram as ações nos diferentes contextos de formação.

Contextos e ações que promovem a colaboração

Jaworski et al. (2017) indicam uma diversidade de agentes que desencadearam a constituição de grupos colaborativos, incluindo iniciativas determinadas ou apoiadas por ministérios e instituições nacionais /regionais, por investigadores e/ou por formadores, por escolas sem envolvimento de agentes externos.

A maioria de grupos investigados pelo Gepefopem foi formada por iniciativa de pesquisadores ou formadores, fomentados ou não por políticas públicas de formação de professores ou de investigação. Envolveram professores da Educação Básica, futuros professores, investigadores, formadores, coordenadores pedagógicos, diretores de escolas.

A constituição de grupos heterogêneos possibilitou uma multiplicidade de olhares e pontos de vista. A colaboração provém das interações estabelecidas a partir dos diversos conhecimentos e das experiências de cada participante. A forma como tais interações ocorrem são a base dos processos de ressignificação dos conteúdos matemáticos e das práticas docentes. O compartilhamento de repertórios e a negociação de significados de elementos estruturantes para a apropriação de aspectos teóricos do conhecimento profissional docente abarcaram principalmente práticas reflexivas e investigativas. As diversas situações de vulnerabilidade permitiram que os participantes dos grupos suspendessem temporariamente suas certezas e convicções e buscassem o sentido de agência, mediada pela interação entre a componente individual e as ferramentas e as estruturas do cenário social (Oliveira & Cyrino, 2011). Para tanto, fatores como respeito, confiança, desafio, solidariedade, apoio mútuo, afeto, equidade, negociação dos empreendimentos, dinâmicas e ações, valorização das singularidades e das práticas profissionais dos professores se mostraram férteis e essenciais às aprendizagens desses professores e ao cultivo e à manutenção desses grupos.

O maior potencial colaborativo está associado com a redução das relações de opressão e de poder. Quanto mais intensas as relações de confiança e respeito, mais eficientes os movimentos de produção de conhecimento. Soma-se a isso a satisfação de estar em um espaço com outros professores que comungam de objetivos e interesses comuns. O poder não é centralizado, mas mediado pelos interesses, pelos desejos e pelas necessidades do próprio grupo, de modo que é preciso respeitar seu processo de desenvolvimento natural.

As ações do formador são extremamente relevantes para a colaboração. Cyrino e Baldini (2017) relatam que a formadora, a fim de promover a formação dos participantes

> desenvolveu um conjunto de ações tais como: iniciar o trabalho com a proposição de uma tarefa; solicitar que os participantes do grupo também propusessem tarefas; deixar o grupo à vontade para escolher as ferramentas e as estratégias de

> resolução das tarefas; permitir que o grupo participasse da tomada de decisões; incentivar e legitimar a constituição de pequenos grupos heterogêneos (formados por professores e futuros professores); promover espaços de discussão coletiva e de sistematização dos conteúdos envolvidos nas discussões; fomentar a produção e a negociação de significados, a interação, a partilha de conhecimentos e o uso de diferentes tipos de registros; questionar os participantes [...] ao invés de oferecer a eles respostas prontas aos questionamentos que surgiram; e promover a produção e a negociação de significados. (pp. 43-44)

O formador, muitas vezes, detém um certo poder, assume o papel de *expert*, mas não em decorrência da função de coordenar o trabalho ou de ser o pesquisador (essas são questões de atribuição de responsabilidade). O que define o poder são a propriedade e a legitimidade, conquistadas por meio da participação nas práticas do grupo e da negociação de significados. Sendo assim, nem sempre a *expertise* estará com o formador, mas sim com alguém legitimado pelo grupo para desenvolver uma determinada ação.

Desse modo, em um grupo colaborativo, todos são, ao mesmo tempo, mestres e aprendizes, dependendo do conhecimento que está sendo negociado num dado momento. E isso implica em descentralização do poder, em razão das competências que os membros desenvolvem em sua trajetória de aprendizagem.

Referenciais teóricos e metodológicos utilizados para investigação dos espaços formativos colaborativos

Jaworski et al. (2017) observaram que muitos estudos não declararam explicitamente as perspectivas teóricas, ou seja, raramente teorizavam a colaboração. Dos que o fizeram, foi possível evidenciar quatro, quais sejam:

- Comunidades de Prática (Wenger, 1998) ou Comunidade de Investigação (p.e., Jaworski, 2006).
- Teoria da Atividade (p.e. Engeström,1999).
- Transposição Metadidática (Aldon et al., 2013) da Teoria Antropológica do didático de Chevallard.
- Teoria da Zona de Valsiner (de Vygotsky, por exemplo, Valsiner, 1997).

Considerando que as relações em trabalhos colaborativos também podem ser marcadas pela existência de conflitos, Santana e Barbosa (2016) investigaram tipos de conflitos entre/nos textos de professores de matemática e acadêmicos em um trabalho colaborativo.

Os autores compreendem “conflito como o embate entre os diferentes posicionamentos comunicados entre/nos textos que pertencem originalmente a diferentes práticas sociais” (p. 897). Assim, eles utilizaram a teoria de Bernstein (2000), por reconhecerem que o trabalho colaborativo pode ser visto como um empreendimento social, que envolve diferentes sujeitos e, como tal, é marcado por relações de poder.

Na maioria das investigações do Gepefopem foi utilizada a teoria das Comunidades de Prática, porque ela nos permite identificar trajetórias de aprendizagem por meio dos processos de negociação de significados, que supõe interação entre a participação e a reificação.

Entre as metodologias de pesquisa que têm como meta desenvolver a colaboração, destacamos as Comunidade de Investigação, os Estudos de Aula (*Lesson Study*) e a Análise Narrativa.

Os Estudos de Aula (*Lesson Study*) foram reconhecidos como atividade de colaboração de professores e investigadores, que abrange um ciclo de construir um plano de aula, ensinar/observar, discutir e refletir após a aula, para partilhar suas práticas (Isoda, 2020).

A análise narrativa é uma ferramenta para pesquisa e para a colaboração, ou seja, a narrativa pode ser considerada como:

> um método de pesquisa em que o processo e o produto envolvem histórias de experiências de professores e pesquisadores; uma ferramenta de coleta de dados sobre, por exemplo, conhecimentos, crenças, atitudes, histórias de vida e práticas dos professores; um objeto de análise no estudo do ensino; uma base ou ferramenta para o desenvolvimento profissional de professores ou para a formação de professores; uma base para o pensamento reflexivo
>
> (Chapman, 2008, p. 17).

De acordo com a autora, a narrativa como método de pesquisa tem recebido mais atenção nos estudos voltados à formação de professores de matemática do que a narrativa como ferramenta pedagógica. A narrativa tem sido utilizada como alternativa metodológica para estudar e compreender a aprendizagem de professores de matemática em comunidades colaborativas.

Potencialidade da colaboração para promoção da aprendizagem docente e constituição IP de PEM

A colaboração tem se apresentado como um campo fértil para a construção de conhecimentos profissionais do professor, para a problematização de processos de ensino e de aprendizagem de matemática em sala de aula, dentre outros aspectos inerentes a essa prática, com vistas à aprendizagem docente e à constituição da IP de PEM.

Nos grupos colaborativos, são criadas condições para serem estabelecidos as negociações de significados, a identificação de objetivos comuns e o respeito aos interesses específicos dos envolvidos ou das instituições como, por exemplo, da universidade com a escola. Ao trabalhar juntos os professores apresentam problemas, identificam divergências entre teorias e práticas, reconhecem vulnerabilidades, desafiam rotinas comuns, baseiam-se no conhecimento de outros para tornar visível muito do que é considerado nos processos de ensino e de aprendizagem, compartilham repertórios e constroem conhecimentos. A construção compartilhada de conhecimento favorece a autonomia dos participantes, pois viabiliza ir além do que seria possível, se estivessem trabalhando individualmente.

O trabalho em grupos colaborativos funciona como um convite à reflexão dos professores envolvidos. A ação de agenciar de forma mediada seus conhecimentos, crenças/compreensões e situações de vulnerabilidade, por meio da negociação de significados e de suas aprendizagens propicia as ações de questionar, (re)pensar e (trans)formar suas práticas educacionais e as de pesquisa vigentes. Alinhada a isso, a IP de PEM desempenha um importante papel na compreensão das práticas de ensino de PEM, na motivação para ensinar, na eficácia do ensino e na tomada de decisão na carreira.

O significado dos contextos (sala de aula, escola, cultural e político) no movimento de constituição da IP de PEM e dos modos como os professores em formação negociam e equilibram seu eu entre autoridade e vulnerabilidade, entre identidade narrativa e posicional, entre os objetivos e as necessidades do local de trabalho, dentre outros, requer a importância de capacitar a agência do professor (individual e coletiva) para que ele possa intensificar o movimento de constituição da sua IP de PEM com autonomia, motivação e consciência crítica.

A construção colaborativa de uma agência mediada é fundamental para que os professores tenham um ambiente seguro e o apoio de que precisam para se sentirem suficientemente capacitados para assumir riscos e praticar a vulnerabilidade – experiências essenciais para o desenvolvimento da identidade. Criar ambientes que amparem a agência e minimizem as tensões que os professores experimentam como resultado da sobreposição ou interseção de identidades sociais e sistemas relacionados à opressão, à dominação ou à discriminação, e das demandas do ensino focalizado na disciplina, são aspectos que devem ser considerados no movimento de constituição da IP de PEM.

Referências bibliográficas

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., & et al. (2013). The Meta-Didactical Transposition: a model for analysing teachers education programmes. In L. A. M. & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of PME 37* (vol. 1, pp. 97–124). PME.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? J*ournal of Teacher Education, 59* (5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identify: theory, research, critique*.Lanham: Rowman & Littlefield.

Borko, H., & Potari D. (2020). *Proceedings of the 25th ICMI Study Teachers of Mathematics working and learning* in Collaborative Groups. ICMI.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education (Vol 2): Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 15–38). Sense Publishers.

Cyrino, M. C. C. T. (2016). Mathematics teachers' professional identity development in communities of practice: Reifications of proportional reasoning teaching. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*, 165-187.

Cyrino, M. C. C. T. (2018). Prospective Mathematics Teachers' Professional Identity. In M. Strutchens, R. Huang, D. Potari, & L. Losano (Eds.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers*. ICME13 Mon ographs (pp. 269-285). Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91059-8_15

Cyrino, M. C. C. T, & Baldini, L. A. F. (2017). Ações da formadora e a dinâmica de uma comunidade de prática na constituição/ mobilização de TPACK. *Educação Matemática Pesquisa, 19*, 25-48. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p25-48

De Paula, E. F., & Cyrino, M. C. C. T. (2020). Aspectos a serem considerados em investigações a respeito do movimento de constituição da Identidade Profissional de professores que ensinam matemática*. Educação* (Santa Maria. Online), 45, 1-29. https://doi.org/10.5902/1984644434406

De Paula, E. F., & Cyrino, M. C. C. T. (2021). The Professional Identity in educators who teach mathematics: elements and actions to build a proposal for future research. *Pró-Posições* (Unicamp. On-line), *32,* 1-23. https://doi.org/10.1590/1980-6248-2018-0109EN

Engeström, Y. (1999). *Activity theory and individual and social transformation.* In Y. Engeström, R. Miettinen, & R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory (*pp. 19-38). Cambridge University Press.

Francis, D.C., Hong, J., Liu, J., & Eker, A. (2018). "I'm Not Just a Math Teacher": Understanding the development of elementary teachers' mathematics teacher identity. In P. A. Schutz, J. Hong, & D. C. Francis (Eds.), *Research on Teacher Identity: Mapping Challenges and Innovations* (pp. 133-144). Springer.

Hall, S. (2015). *A identidade cultural na pós-modernidade* (12a ed., T.T. da Silva, & G. L. Louro, Trads.). Lamparina.

Isoda, M. (2020). Producing theories for mathematics education through collaboration: A historical development of japanese lesson study. In H. Borko, & D. Potari (Eds.), Proceedings of the 25th ICMI *Study Teachers of Mathematics working and learning in Collaborative Groups* (pp. 2-14). ICMI.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9* (2), 187-211. https://doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z

Jaworski, B., & Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: Key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education, 46*, 173-188. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0574-2

Jaworski B. et al. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. In G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th Internation al Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (pp. 261-276.). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_17

Oliveira, H. M., & Cyrino, M. C. C. T. (2011). A formação inicial de professores de Matemática em Portugal e no Brasil: narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções,* 7, 104-130.

Prediger, S. (2020). *Content-Specific theory elements for explaining and enhancing teachers'professional growth in collaborative groups.* In H. Borko, & D. Potari (Eds.), *Proceedings of the 25th ICMI Study*

Teachers of Mathematics working and learning in Collaborative Groups (pp. 2-14). ICMI.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration *ZDM Mathe matics Education, 48*, 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Rodrigues, P., & Cyrino, M. C. C. T. (2020). Professional identity of preservice mathematics teachers: Aspects of the self-understanding mobilized in the Vaivém. *Zetetiké, 28,* 1-26. DOI: 10.20396/zet.v28i0.8654512

Santana, F. C. M., & Barbosa, J. C. (2016). Tipos de conflitos entre/nos textos de professores de matemática e acadêmicos em um trabalho colabo rativo. *Educação Matemática Pesquisa* (On-line), *18,* 895-921.

Triantafillou, C., Psycharis, G., Potari, D., Bakogianni, D., & Spiliotopoulou, V. (2021). Teacher educators' activity aiming to support inquiry through math ematics and science teacher collaboration. *International Journal of Science and Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s10763-021-10153-6

Valsiner, J. (1997). *Culture and the development of children's action: A theory of human development* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, meaning and identity.* Cambridge: University Press.

Potencialidades do humor gráfico no ensino e na aprendizagem da Matemática

Potencialities of graphic humour in teaching and learning of Mathematics

Luís Menezes[1], Pablo Flores [2]

Resumo: Tendo em conta que o ensino-aprendizagem da Matemática beneficia de se estabelecerem conexões com a realidade dos alunos e de se organizar em torno da resolução e discussão de tarefas matemáticas desafiantes e motivadoras, acreditamos que o humor sobre a Matemática, especialmente o gráfico, tem boas condições para cumprir estes dois aspetos. Assim, nesta conferência, propomo-nos discutir: o humor (em particular, o gráfico) e as suas funções sociais; o humor na educação e, em particular, na Matemática e nas aulas de Matemática; conceções e práticas de professores de Matemática sobre o uso de humor no ensino da disciplina; e, potencialidades de tarefas matemáticas que temos vindo a desenhar a partir de tiras e cartoons humorísticos sobre Matemática.

Palavras-chave: Matemática; Humor gráfico; Ensino-aprendizagem; Cognição; Emoção.

Abstract: Considering that the teaching-learning of Mathematics benefits from establishing connections with the students' reality and organizing itself around the resolution and discussion of challenging and motivating mathematical tasks, we believe that humour about Mathematics, especially graphic humour, has good conditions to fulfil these two aspects. Thus, in this conference, we propose to discuss: humour (in particular, graphic humour) and its social functions; humour in education and, in particular, in Mathematics and in Mathematics classes; conceptions and practices of Mathematics teachers on the use of humour in teaching the subject; and, potentialities of mathematical tasks that we have been drawing from strips and humorous cartoons about Mathematics.

Keywords: Mathematics; Graphic humour; Teaching and Learning; Cognition; Emotion.

1. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viseu (IPV), menezes@esev.ipv.pt
2. Faculdade de Ciências da Educação da Universidade de Granada (UGR), pflores@ugr.es)

O interesse no humor

Diversas circunstâncias influenciaram a nossa visão do humor como um recurso didático para as aulas de Matemática. Aspetos de natureza pessoal convergiram com aspetos de natureza académica no âmbito da Didática da Matemática.

A natureza das relações familiares (uma família numerosa, com pais com predisposição para o lúdico), num caso, e o interesse pela leitura de textos humorísticos de diversos tipos, no outro caso, fizeram-nos compreender que a comunicação bem-humorada promove emoções positivas que facilitam a partilha e o entendimento de ideias em todas as áreas da atividade humana e, portanto, também na escola e no ensino-aprendizagem da Matemática.

As tendências didáticas do final do século XX (Bishop, 1999; D'Ambrósio, 1980, 1996; Davis & Hersh, 1989; Skovsmose, 1994), enfatizaram a Matemática como um produto cultural, valorizando o seu papel social e salientando que todo o cidadão necessita de desenvolver um conjunto de competências matemáticas básicas.

Esta valorização social da Matemática, a par da massificação da educação em muitos países, fez com que a Matemática aparecesse cada vez mais em múltiplas manifestações culturais, entre elas o humor, os cartunes e a banda desenhada. Vários autores mostram a riqueza da linguagem gráfica, da banda desenhada e dos cartunes para comunicar ideias, nomeadamente as relativas à escola e ao ensino (Ayers & Tanner, 2013, Flores, 2003; Martin & Ford, 2018). A relevância social da Matemática, mas também a perceção pouco favorável que alguns têm desta disciplina (fruto do seu percurso escolar), têm sido um campo fértil para muitos autores gráficos, como, por exemplo, Quino, Bill Amend, Chris Browne e Ryan Kramer.

No campo educativo, têm-se também afirmado tendências cognitivistas, como as que estabelecem um paralelismo entre a abordagem piagetiana de rutura cognitiva, que envolve os mecanismos de acomodação e assimilação, que estão relacionadas com algumas teorias do humor (Martin, 2007; Martin & Ford, 2018). Todas essas perspetivas se conjugam para apoiar uma Didática da Matemática que estimula o uso de recursos imaginativos e desafiantes no ensino. O humor gráfico constitui um recurso visual e imaginativo que coloca os alunos perante situações inesperadas, para as quais é necessário pensar para encontrar o racional: a comunicação humorística, nomeadamente aquela que foca ideias matemáticas, coloca problemas aos alunos como potencial para os desenvolver matematicamente. Tudo isso nos levou a propor esta conferência sobre o uso do humor gráfico como recurso didático para o ensino da Matemática.

A experiência humorística

Todos temos a experiência do ato humorístico, seja na apreciação ou na produção do humor. Contudo, nem sempre refletimos sobre o que ele envolve. Por isso, consideramos importante colocar e discutir questões como as seguintes: Em que é que consiste o humor? A que corresponde o sentido de humor? Quais são os mecanismos do humor?

Que funções e que formas pode assumir o humor?
O humor é uma ação comunicativa intencional que envolve elementos cognitivos e afetivos, com o propósito de provocar o riso e a boa disposição (Adão, 2016; Banas et al., 2011; Martins, 2015; Martin & Ford, 2018; Meyer, 2015).
O sentido de humor é a capacidade de percecionar, produzir e apreciar o humor (Adão, 2016; Martin & Ford, 2018; Meyer, 2015). Esta capacidade tem uma natureza multidimensional, desenvolvendo-se ao longo da vida em resultado das nossas experiências pessoais e profissionais, sendo culturalmente situada (Adão, 2016; Martin & Ford, 2018).
Procurando compreender como opera o humor, têm sido desenvolvidas diversas teorias, provenientes de campos teóricos como, por exemplo, a Linguística, a Psicologia ou a Sociologia. De entre as teorias que apresentam mais trabalho, salientamos a da Incongruência, a da Libertação e a da Superioridade (Adão, 2016; Martins, 2015; Martin & Ford, 2018). Destas, pelo seu potencial no campo educativo, salientamos a teoria da Incongruência. Esta teoria explica o funcionamento do ato humorístico em três fases: primeira, o interlocutor é situado num determinado domínio de experiência que lhe é familiar; segunda, o interlocutor é confrontado com uma situação inesperada que é, de alguma maneira, incongruente com o domínio de experiência anterior; e terceira, o interlocutor resolve a incongruência e compreende a intenção engraçada do locutor (Adão, 2016). A figura 1 apresenta uma situação humorística gráfica que funciona de acordo com esta teoria da Incongruência:

Figura 1. Tira de Mafalda, da autoria de Quino

Nesta tira, na primeira vinheta, somos introduzidos num ambiente escolar: uma aula de Matemática. A fala da segunda vinheta é inesperada e aparentemente incongruente com a primeira. Se o leitor resolve esta incongruência e dá sentido às falas das vinhetas 2 e 3, o ato humorístico efetiva-se. Caso contrário, e para isso basta que o leitor não saiba o que é o Kremlin, a situação é só estranha e o humor não acontece. Neste mecanismo do humor, a situação inesperada é uma espécie de "rasteira" que é passada à nossa razão e a resolução da incongruência é o momento em que a razão está de novo no controlo e dá sentido a todo o quadro.
Quando pensamos nos motivos pelos quais se recorre ao humor emerge o fazer rir, o entreter e o bem-dispor as pessoas. Esta função primeira do humor, que é praticamente a única em contextos de espetáculos com comediantes, é depois sucedida de outras em contextos como,

por exemplo, hospitais, prisões, empresas e escolas. Na literatura, encontram-se identificadas diversas funções do humor. Buckman (1994) destaca três funções: ajudar a liberar tensões e disposições agressivas; facilitar o desenvolvimento do ego; e facilitar a comunicação entre as pessoas. Francia e Fernández (2009) identificam um leque muito alargado de funções do humor, a maioria de sinal positivo mas algumas com carga negativa: fisiológica, prazerosa, afetiva, social, intelectual, transformativa, pedagógica, terapêutica, defensiva e agressiva. A investigação revela outras funções do humor como a promoção publicitária de produtos, o uso terapêutico e o uso educacional (Dionigi & Canestrari, 2018; Laineste & Voolaid, 2016; Martin, 2007; Martin & Ford, 2018; Meyer, 2015). Flores (2003) destaca três funções do humor que estão relacionadas com o trabalho desenvolvido com professores: intelectual, afetiva e pedagógica. Nos nossos trabalhos mais recentes de estudo de conceções e práticas de professores sobre o humor no ensino, identificamos três funções: cognitiva, afetiva e comunicativa (Menezes et al., 2019).

O humor pode assumir diversas formas e tipos. Podemos considerar o humor verbal (oral e escrito), o humor gráfico e a conjugação de ambos. A tipologia do humor é muito extensa, podendo ser do tipo de anedotas, trocadilhos, ditos curiosos, cartunes e banda desenhada.

Humor com fins instrucionais

O estudo do humor em contextos educativos, em diversas disciplinas escolares, tem já alguma tradição, Banas e colegas (2011) fizeram uma extensa revisão da investigação neste campo nas quatro décadas anteriores. Os autores referem que grande parte dos estudos analisados é de natureza quantitativa com vertente experimental, sem muito detalhe sobre o que se passa em sala de aula. A meta-análise realizada por esta equipa permitiu-lhes chegar a diversas conclusões: “o uso do humor é um comportamento predominante na comunicação em ambientes pedagógicos e serve para diferentes propósitos” (Banas et al., 2011, p. 137); o humor manifesta resultados positivos na criação de ambientes que facilitam a aprendizagem, estando “relacionado positivamente com um ambiente de aprendizagem agradável” (Banas et al., 2011, p. 130); o humor aumenta a capacidade de concentração dos alunos; o humor ajuda a aprender conceitos que habitualmente produzem mais dificuldades nos alunos, pois “o uso de humor instrucional para aliviar a tensão pode ser especialmente útil para o ensino de tópicos que, em geral, são percebidos pelos alunos como provocadores de ansiedade” (Banas et al., 2011, p. 130); o uso do humor em situações de avaliação ajuda a diminuir o stress que muitas vezes está associado a estes momentos.

Bakar (2019) estudou as conceções de professores e de alunos relativas à adequação e à relevância do humor para ensinar e aprender. O estudo conclui, por um lado, que o humor adequado faz aumentar a credibilidade dos professores. Por outro lado, o humor é visto como relevante se está diretamente relacionado com os conteúdos de aprendizagem, estando habitualmente associado a situações engraçadas do quotidiano.

No domínio da educação matemática há também tradição no humor com propósitos instrucionais. Alguns autores abordam os aspetos emocionais que apoiam o uso de elementos anedóticos para ensinar temas matemáticos. Por exemplo, McLeod (1992) propõe anedotas sobre conceitos matemáticos para detetar e desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática. O uso de elementos evocativos na educação matemática é amplo. Paulos (1994) mostra uma relação entre o humor e a lógica do discurso quotidiano. No livro "Mathematics and humor", de 1980, reeditado em 2008, John Allen Paulos analisa as estruturas matemáticas de piadas, trocadilhos, paradoxos, enigmas e outras formas de humor, apresentando exemplos a partir de autores clássicos como Rabelais, Shakespeare e Lewis Carroll.

O estudo de Guitart (2012) foca o uso do humor no ensino da Estatística num curso superior. Para isso, realiza uma investigação-ação estudando o impacto na aprendizagem da Estatística em resultado da utilização de situações humorísticas no seu ensino. A autora observou reações atitudinais, conceptuais e procedimentais dos alunos ao usar o humor, analisando as respostas corporais e orais, para examinar as atitudes em relação ao humor. A observação das aulas foi complementada com entrevistas, para saber como cada um viveu a experiência humorística. Guitart (2012) conclui que alunos relaxados "produzem" soluções melhores e mais criativas para os problemas de Estatística, uma vez que são incentivados a tornar o raciocínio mais flexível, sem medo do ridículo. Destaca também que os alunos recordam as piadas que consideram engraçadas, lembrando também do conteúdo com o qual se relacionam. A autora reconhece ainda a importância de o humor ser relevante para a ocasião e o ambiente, especialmente quando tenta destacar determinados aspetos dos tópicos e reforçar ou introduzir um conceito.

No âmbito do projeto HUMAT – *Humour in Mathematics Teaching* – foram realizados diversos estudos focando o ensino com recurso ao humor. No estudo de Menezes et al (2020) procurou-se averiguar se professores portugueses e espanhóis que ensinam Matemática, em diversos níveis de ensino, apreciam o humor, que perspetiva têm dele e do seu valor educativo e se o utilizam no ensino. Procuram, ainda, averiguar se o nível de ensino em que os professores ensinam Matemática tem influência nos aspetos apontados anteriormente e se há diferenças significativas entre os professores portugueses e os espanhóis em relação a estes aspetos. Para isso, realizou-se um estudo de natureza quantitativa, com uma amostra de 1088 professores de Matemática (portugueses e espanhóis). Os resultados revelam que a maioria dos professores, de todos os níveis de ensino, reconhecem o significado de humor, consideram que têm sentido de humor, justificam o seu uso no ensino da Matemática e já o viram utilizar ou utilizam nas aulas, com o objetivo de criar bom ambiente de aprendizagem e de fazer pensar os alunos. O estudo revela diferenças entre os professores dos diversos níveis de ensino, indicando que existe maior predisposição dos professores dos anos iniciais, comparativamente com os demais, para valorizar e utilizar o humor no ensino. O estudo revela também diferenças

entre professores portugueses e espanhóis, sendo os portugueses a apresentarem uma média de concordância superior na generalidade dos itens.
Menezes (2021) desenvolveu um estudo que visa conhecer as conceções de futuros professores (FP), no início da sua formação, sobre o humor e o seu valor para ensinar Matemática. Foram estudados 30 FP através da aplicação de questionário de pergunta de resposta aberta e de entrevista. Os resultados revelam que os FP têm uma conceção do que é o humor e da sua relevância social, sentem que têm sentido de humor e apreciam-no nos outros. Consideram o ensino da Matemática compatível com o recurso ao humor, invocando razões de natureza cognitiva, emotiva e comunicativa, mas a maioria deles diz não ter tido professores de Matemática que o usassem.
O estudo de Menezes, Viseu e Flores (2019) foca as perspetivas de professores sobre o humor para ensinar Matemática. Em particular, procura averiguar se os professores reconhecem o valor educativo do humor no ensino e na aprendizagem da Matemática. Que funções associam ao humor instrucional e que conhecimento didático revelam na sua justificação? Para lhes responder, foi construído e aplicado um questionário com questões de resposta aberta e fechada. Os dados recolhidos junto de 601 professores de Matemática portugueses, de todos os níveis de ensino, revelam que os professores reconhecem o valor pedagógico do humor para ensinar Matemática e dizem usar, com regularidade, o humor para ensinar. Convidados a comentar uma tira humorística sobre Matemática, sublinham as suas potencialidades didáticas, destacando a sua função cognitiva, mas também a afetiva e a comunicativa. Na justificação das suas opções revelam conhecimento didático relativo à Matemática, combinado com o da prática letiva.
Sendo os manuais escolares um recurso muito utilizado pelos professores, particularmente pelos de Matemática, Menezes e colegas (2017) procuraram: (i) averiguar a utilização do humor em manuais escolares de Matemática; e (ii) descrever o humor utilizado em manuais, discutindo o seu enquadramento didático. Para isso, analisaram o conteúdo de quatro manuais escolares de Matemática portugueses (3) e espanhóis (1) (dos 4.º e 5.º anos de escolaridade) com larga disseminação nacional. Os resultados revelam que o humor, tanto no texto como na ilustração, não tem praticamente expressão nos manuais. Ainda assim, todos os manuais valorizam, ao nível da ilustração, situações de boa disposição, apresentando, recorrentemente pessoas a rir.

Humor gráfico no ensino e aprendizagem da Matemática

Como defendemos, o humor gráfico sobre a Matemática, que recorre de forma positiva à incongruência, à polissemia e ao ridículo tem boas condições para criar contextos para a aprendizagem da Matemática. Apresentamos de seguida, de forma breve, seis livros que apresentam propostas para a sala de aula de Matemática, na forma de tarefas matemáticas e de indicações metodológicas para o professor. Começamos por apresentar dois livros espanhóis nos quais participou Pablo Flores e colegas: “Humor gráfico en el aula de Matemáticas” e “Matematicamente competentes… para reír” (figura 2):

Figura 2. Livros sobre humor na Matemática (Flores, 2003; Flores & Moreno, 2011).

No livro “Humor gráfico en el aula de Matemáticas”, Flores (2003), na sequência de trabalhos anteriores (Flores, 1996, 1997, 1998), apresenta uma coleção de ilustrações de cariz humorístico que envolvem ideias matemáticas. A propósito delas tece considerações didáticas, dando sugestões de utilização em sala de aula.

No livro “Matematicamente competentes… para reír”, Flores e Moreno (2011) mostram, através de uma seleção de ilustrações humorísticas, o papel que a Matemática desempenha na nossa sociedade.

Nos dois livros da coleção “Cartoon Corner”, o NCTM (2007, 2013) apresenta um conjunto de tarefas matemáticas construídas a partir de tiras de banda desenhada alusivas à Matemática (figura 3). Para além disso, apresentam resoluções para algumas dessas tarefas.

Figura 3. Livros sobre humor na Matemática (NCTM, 2007, 2003).

No âmbito do projeto HUMAT, Menezes et al (2017, 2021) apresentam dois livros com tarefas matemáticas construídas a partir de tiras e cartunes que versam temas matemáticos (figura 4).

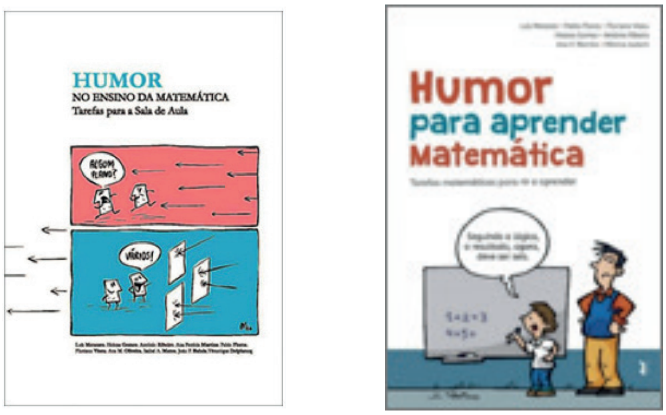


Figura 4. Livros sobre humor na Matemática
(Menezes et al., 2017; Menezes et al., 2921).

O livro “Humor no ensino da Matemática: Tarefas para a sala de aula” é dirigido a professores, apresentando para cada uma das tarefas matemáticas sugestões de exploração bem como extensões das tarefas. Já o livro “Humor para aprender Matemática: Tarefas para rir e aprender” é dirigido a alunos de diversas idades, alargando as tarefas do primeiro livro.

Considerações finais

Nesta conferência dirigida a professores de Matemática e a investigadores em Educação Matemática, com o título “Potencialidades do humor gráfico no ensino e na aprendizagem da Matemática” procurámos oferecer oportunidades para refletir sobre o humor no ensino-aprendizagem da Matemática. Apesar de ser um tema cujo trabalho em Educação Matemática remonta ao séc. XX, ele ainda não tem expressão muito significativa nas práticas de professores e na agenda de investigadores, tanto em Portugal como em Espanha. O humor, especialmente o verbal oral, é ainda olhado com alguma desconfiança por muitos professores por considerarem que isso requer um sentido de humor apurado para o usar e por pensarem que nem sempre as piadas saem bem.
O trabalho que temos vindo a desenvolver no campo do humor instrucional em Matemática, no projeto HUMAT, demarca-se do quadro anterior pautando-se por três características: (i) privilegiar o humor gráfico, que combina o texto e a imagem para abordar ideias matemáticas; (ii) envolver os alunos em atividade matemática relevante que resulta de tarefas matemáticas construídas a partir desse humor gráfico; e (iii) basear-se em propostas planeadas pelo professor, não ficando o humor dependente do improviso ou de algum tipo especial de sentido de humor por parte do professor.
Em síntese, o humor gráfico sobre ideias matemáticas é mais um recurso poderoso a que os professores podem lançar mão para levarem os alunos a aprenderem Matemática, combinando nesse processo emoção e cognição e, ao mesmo tempo, reconhecendo a relevância social da Matemática expressa nesse humor gráfico. À

investigação abrem-se grandes desafios no sentido de compreender como os professores e os futuros professores podem usar o humor para ensinar Matemática. De igual modo, precisamos de melhorar a nossa compreensão relativamente ao modo como o humor pode contribuir para a aprendizagem dos alunos e em que áreas da aprendizagem isso pode ser mais relevante. Em qualquer um dos casos, requerem-se estudos que detalhem os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática apoiados pelo recurso ao humor.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto Ref.ª UIDB/05507/2020. Agradecemos, adicionalmente, ao Centro de Estudos em Educação e Inovação (CI&DEI) e ao Politécnico de Viseu pelo apoio prestado.

Referências

Adão, T. (2016). *Os processos cognitivos subjacentes à apreciação do humor. Contributos para o professor/mediador de língua materna-português*. 269f. [Tese de doutoramento, Faculdade de Letras, Universidade do Porto].

Ayers, W., & Tanner, R.A. (2013). *Enseñar, un viaje en cómic.* Morata.

Bakar, F. (2019). Appropriate and relevant humour in the university classroom: insights from teachers and students. *The European Journal of Humour Research, 7* (4), 137–152.

Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings Four decades of research. *Communication Education, 60* (1), 115–144.

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Paidós.

Buckman, E.S. (1994). *The handbook of humor: Clinical applications in psychotherapy.* Krieger Publishing Company.

D'Ambrósio, U. (1980). Mathematics and society: Some historical considerations pedagogical implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *11* (4), 479-488.

D'Ambrósio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática.* Papirus Editora.

Davis, P., & Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática, MEC*, Labor.

Dionigi, A., & Canestrari, C. (2018). The role of laughter in cognitive-behavioral therapy: case studies. *Discourse Studies, 20,* (3), 323-339.

Flores, P. (1996). El chistes como contraste de representaciones en Educación Matemática. En Fuente, M. de la, y Torralbo, M. (Eds.). Actas de las *VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales".* Universidad de Córdoba.

Flores, P. (1997). La utilización del humor para facilitar la comunicación entre educadores matemáticos. *Educación Matemática*, *9* (3), 52-62.

Flores, P. (1998). Mafalda y las Matemáticas. En Muñoz, F.J., Cárdenas, D. y López, A.J. (Eds.), *VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales".* Jaén, Thales y Universidad de Jaén.

Flores, P. (1999). Empleo de metáforas en la formación de profesores de Matemáticas. *Educación Matemática 11* (1), 84-101.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de Matemáticas*. Arial.

Flores, P., & Moreno, A. J. (2011). *Matemáticamente competentes… para reír.* Graó.
Francia, A., & Fernández, J.D. (2009). *Educar con humor.* Aljibe.
Guitart, M. B. (2012). *Permitido reír... Estamos en clase. El humor como recurso didáctico en el aula de Estadística.* [Tese de doctoramiento, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, República Argentina].
Laineste, L., & Voolaid, P. (2016). Laughing across borders: Intertextuality of internet memes. *European Journal of Humour Research*, *4* (4), 26-49.
Martin, R. A. (2007). *La Psicología del humor.* Orion ediciones.
Martin, R. A., & Ford, T. (2018). *The psychology of humor: An integrative approach.* Elsevier Academic Press.
Martins, A. I. (2015). A seriedade do Humor ao longo dos séculos: uma retórica do poder político ou de um contra-poder?. *Revista Iberoamericana de Estudios de Desarrollo, 4* (1), 323-346.
McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575–596). Macmillan Publishing Co, Inc.
Menezes, L., Fernandes, A., Viseu, F., Ribeiro, A., & Flores, P. (2020). Perspetivas de professores de Matemática sobre o humor e o seu valor educacional. *Bolema, 34* (66), 332-353.
Menezes, L., Flores, P., Ribeiro, A., Oliveira, A. M., Delplancq, V., Gomes, H., Martins, A. P., Balula, J. P., Matos, I. A., & Viseu, F. (2017). El humor en libros de texto de matemáticas. in *Libro de Atas del VIII Congresso Ibero Americano de Educação Matemática*, Madrid, 279-285.
Menezes, L., Flores, P., Viseu, F., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., & Guitart, M. (2021). *Humour to learn Mathematics: Mathematical tasks to laugh and learn.* Edições Esgotadas.
Menezes, L., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., Flores, P., Viseu, F., Oliveira, A., Matos, I. A., Balula, J. P., & Delplancq, V. (2017). *Humor no ensino da Matemática: Tarefas para a sala de aula.* ESE -IPV.
Menezes, L., Viseu, F., & Flores, P. (2019). Olhares dos professores sobre o valor pedagógico de humor para ensinar Matemática. *XV Congreso Internacional Gallego-Portugués de Psicopedagogía,* A Coruña, 4-6 septiembre 2019.
Meyer, J. C. (2015). *Understanding Humor Through Communication: Why be Funny, Anyway?.* Lexington Books.
NCTM (2007) *Cartoon corner. Humor Based Mathematics Activities.* National Council of Teachers of Mathematics.
NCTM (2013) *Cartoon corner 2. Humor Based Mathematics Activities.* National Council of Teachers of Mathematics.
Paulos, J. A. (1980). *Mathematics and humor.* The University of Chicago Press.
Paulos, J. A. (1994). *Pienso, luego rio.* Cátedra.
Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. *Educational studies in mathematics, 27* (1), 35-57.

Desenvolver o raciocínio matemático a partir de estudos de aula

Developing mathematics reasoning from lesson studies

João Pedro da Ponte[1]

Resumo
O estudo de aula é um processo formativo que decorre num contexto colaborativo e que leva os professores a refletirem sobre a sua prática profissional. Trata-se de uma atividade que envolve o planeamento de uma aula, observação dessa aula e reflexão pós-aula. Nos estudos de aula que realizamos, um dos nossos objetivos é aprofundar a reflexão dos participantes sobre os processos de raciocínio dos seus alunos. Nesta conferência, apresento as possibilidades formativas dos estudos de aula no que se refere às aprendizagens profissionais dos professores relativas à prática letiva, na seleção de tarefas e na análise do raciocínio dos alunos. Para isso, apresento exemplos de estudos de aula realizados com professores do 1.º, 2.º e 3.º ciclo tanto em zonas rurais como em Lisboa e que mostram como os estudos de aula podem proporcionar um olhar atento sobre a natureza das tarefas a propor em sala de aula e levá-los a valorizar mais os processos de raciocínio dos seus alunos e a reconhecer melhor as suas capacidades. Estes exemplos ilustram também que os estudos de aula podem dar um contributo para o desenvolvimento do trabalho colaborativo entre professores e para valorização da reflexão.

Palavras-chave: Estudo de aula, Desenvolvimento profissional, Matemática, Raciocínio

Abstract
Lesson study is a formative process that takes place in a collaborative context and leads teachers to reflect on their professional practice. It is an activity that involves planning a lesson, observing that lesson, and after-lesson reflecting. In the lesson studies that we conduct, one of our objectives is to deepen the participants' reflection on the reasoning processes of their students and how to promote them in the classroom. In this conference, I present the formative possibilities of lesson studies with regard to the professional learning of teachers related to teaching

1. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

practice, in the selection of tasks and in the analysis of students' reasoning. To this end, I present examples of lesson studies conducted with teachers of the 1st and 2nd cycles of basic education (grades 1-6) that show how lesson studies can provide a close look at the nature of the tasks to be proposed in the classroom and lead teachers to value their students' reasoning processes more and to better recognize their abilities. Especial attention is given to key reasoning processes such as conjecting, generalising and justifying. These examples also illustrate that lesson studies can contribute to the development of collaborative work among teachers and to the appreciation of reflection.

Keywords: *Lesson Study , Professional development, Mathematics, Reasoning*

Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores de cunho colaborativo e centrado na prática letiva. É praticado no Japão (como *jugyokenkyuu*) desde o final do séc. XIX, tendo sido popularizado no início do séc. XXI nos EUA (como *lesson study*) e é atualmente usado em todo o mundo (Huang, Takahashi, & Ponte, 2019; Quaresma, Winsløw, Clivaz, Ponte, Ni Shuilleabhain & Takahashi, 2018). É um processo formativo informado pelas orientações curriculares e pelos resultados de investigações relativas a um dado tema dos currículos escolares. Pode dizer-se que é um processo formativo próximo de uma investigação sobre a própria prática profissional, envolvendo (i) a formulação de um objetivo de pesquisa, (ii) um trabalho preparatório que inclui uma revisão de literatura sobre o tema escolhido e conduz á planificação detalhada de uma aula, (iii) a realização da aula onde se põe em prática o plano delineado, (iv) a análise dos dados recolhidos, e (v) a divulgação dos resultados (Murata, 2011; Stigler & Hiebert, 1999). A sua caraterística fundamental é ser um processo centrado nas aprendizagens dos alunos, em todas as etapas deste processo, na formulação da questão orientadora, na preparação e observação na aula e na reflexão pós-aula. Nesta conferência, apresento as possibilidades formativas dos estudos de aula no que se refere às aprendizagens profissionais dos professores relativas à prática letiva, na seleção de tarefas e na análise do raciocínio dos alunos.

Na verdade, durante o trabalho nos estudos de aula, um aspeto que tem merecido especial atenção, são os processos de raciocínio dos alunos na resolução de tarefas (Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012). Damos particular atenção à formulação de conjeturas e à generalização (centrais no raciocínio indutivo e abdutivo) e à justificação (central no raciocínio dedutivo).

No trabalho que temos realizado com estudos de aula temos prosseguido principalmente duas questões de investigação: (i) Que aprendizagens profissionais dos professores se evidenciam num estudo de aula? e (ii) Quais os elementos fundamentais da dinâmica de um estudo de aula propiciador de aprendizagens profissionais? A partir de exemplos de situações vividas em estudos de aula, procuro apresentar elementos de resposta para estas questões.

A organização de um estudo de aula e a respetiva investigação

O estudo de aula desenvolve-se a partir de diversas sessões de trabalho. Uma estrutura comum que temos usado envolve 8 sessões (usualmente de 2 horas ou 2 horas e meia), organizadas do seguinte modo:

- Sessão 1 – apresentar e planear o estudo de aula;
- Sessões 2 a 6 – aprofundar o conhecimento do tópico e planear a aula;
- Sessão 7 – realizar e observar a aula de investigação;
- Sessão 8 – refletir sobre a aula;

Por vezes, realizamos ainda um conjunto de “sessões de seguimento” (Sessões 9 a 12) dedicadas a planear novas aulas e refletir sobre elas e, na última sessão (Sessão 12), fazemos ainda uma reflexão final sobre todo o trabalho realizado.

De modo a responder às nossas questões de investigação, realizamos um trabalho de recolha de dados envolvendo instrumentos tais como a elaboração de um diário de bordo; a gravação áudio das sessões e a gravação vídeo da aula de investigação, a recolha de reflexões escritas dos professores e entrevistas aos professores. Muitas vezes, dois elementos da nossa equipa intervêm no estudo de aula, um no papel de formador e outro no papel de investigador.

Conceito de ângulo

Num estudo de aula realizado com professores do 1.º ciclo, os participantes consideraram que os alunos do 4.º ano tinham grande dificuldade em entender o conceito de ângulo. Em consequência, planear uma aula de investigação em vista promover a aprendizagem deste conceito pelos alunos foi o grande objetivo deste estudo de aula. Analisados os documentos curriculares, em particular o programa de Matemática então em vigor (ME, 2007), o grupo de professores verificou que se tratava de levar os alunos a distinguir entre ângulos agudos, retos e obtusos. Passou-se então à fase de pesquisa de tarefas que pudessem ser propostas na aula e levar os alunos alcançar esse objetivo. Procurou-se em manuais e também na internet, tendo a escolha recaído na tarefa indicada na figura 1. Trata-se de uma tarefa de investigação sobre a construção de quadriláteros que os professores adaptaram tendo em conta as caraterísticas dos alunos. Esta tarefa envolve o trabalho com ângulos agudos, retos e obtusos, não de uma forma abstrata, mas inseridos em quadriláteros, um conceito que os alunos já conheciam de aulas anteriores.

De acordo com o que é habitual em aulas de natureza exploratória (Ponte, 2005), a tarefa começou por ser proposta aos alunos, sendo dadas algumas indicações necessárias sobre o modo como estes deveriam trabalhar. Seguiu-se um período de trabalho em pares, após o que se passou a uma discussão coletiva.

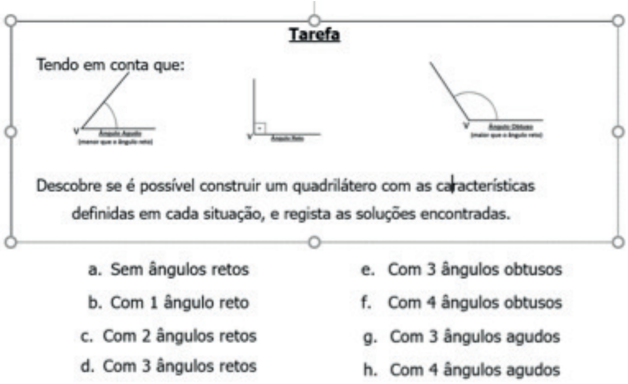


Figura 1 – Tarefa de investigação sobre a construção de quadrilateros.

Alguns alunos não conseguiram durante o período de trabalho autónomo responder a algumas das questões, mas todos conseguiram sucesso parcial respondendo corretamente pelo menos a algumas alíneas da tarefa. Diversos alunos verificaram que os casos (f) e (h) são impossíveis. Alguns alunos verificaram também que é possível construir um quadrilátero com 3 ângulos retos (e nesse caso o 4.º ângulo é também reto) e que nos outros casos de possibilidade é necessário associar ângulos agudos e obtusos (havendo várias maneiras de o conseguir). Analisando as dificuldades dos alunos, as professoras indicaram que estas foram maiores na construção de um quadrilátero com 3 ângulos retos e com 3 ângulos obtusos. Globalmente, os alunos mostraram compreender a distinção entre ângulos agudos, retos e obtusos, o que era o principal objetivo de aprendizagem da aula.

Encontrar a resposta para cada caso corresponde a fazer uma conjetura, um importante processo de raciocínio. Nos casos de possibilidade, basta indicar um exemplo para justificar a resposta. Por exemplo, para a questão (a) podemos apresentar um quadrilátero com ângulos de 100º, 80º, 100º e 80º. Para os casos de impossibilidade, a justificação completa depende do conhecimento da propriedade que a soma da medida dos ângulos de um quadrilátero é 360º, que ainda não é conhecida dos alunos da turma, só 5 sendo aprendida no 3.º ciclo. Mas alguns alunos apresentaram justificações parciais como “se um quadrilátero tem 3 ângulos obtusos, o 4.º ângulo vai ser necessariamente agudo”.

As professoras evidenciaram compreender a lógica do trabalho exploratório, propondo uma tarefa aos alunos a que estes procuraram responder usando os seus conhecimentos prévios, mostrando-se atentas às suas estratégias e dificuldades. Além disso, conduziram a comunicação na sala de aula de modo a que os alunos pudessem exprimir livremente o seu raciocínio, justificando as suas respostas. Particularmente rico foi o momento da discussão coletiva, em que se analisaram em detalhe as respostas a todas as questões da tarefa.

Números racionais

Num outro estudo de aula com professoras do 5.º ano, a formadora apresentou a tarefa indicada na figura 2. O objetivo era promover uma discussão sobre as possíveis dificuldades dos alunos na resolução desta tarefa.

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

Explica o teu raciocínio.

Figura 2 – Tarefa envolvendo a representação de números racionais

As professoras mostraram-se muito surpreendidas. Foi notório que não conheciam a tarefa e que habitualmente não propunham este tipo de tarefa aos seus alunos:

> **Maria:** Como é que abordavam isto? Isto é 3/4 e agora como é que lhes pediam 1/2? Como é que eles vão…? (pausa)
> **Tânia:** Primeiro tentar acrescentar…
> **Inês:** Divide-se esta parte…
> **Formadora:** Primeiro eles perceberem o que é que é então a…
> **Professoras:** [ao mesmo tempo] A unidade!
> **Tânia:** Que isto não é uma unidade.

A tarefa obrigou a professoras a pensar um pouco. Verificaram que a tarefa poderia ser resolvida em duas etapas, primeiro com a reconstrução da unidade a partir da parte que é dada (3/4) e depois, já com a unidade reconstruída, obter as diferentes partes pretendidas. As professoras consideraram que a tarefa era demasiado difícil para os seus alunos e que nenhum a conseguiria resolver. Indicaram de imediato o que seria, no seu entender, o erro mais comum dos seus alunos:

> **Maria:** Dividem logo em quatro.
> **Professoras:** Pois, exatamente!
> **Tânia:** E aí é porque ainda não sabem… Eles ainda não sabem a noção de… eles não têm a noção da fração como parte do todo.
> **Formadora:** É que muitas vezes eles trabalham ao contrário, ou seja, eles têm o todo e é para indicar uma parte, agora terem uma parte…

Apesar do seu ceticismo, desafiámos as professoras a propor a tarefa nas suas turmas. Foi com alguma surpresa que elas verificaram que diversos alunos conseguiram realizar tarefa com êxito. Isto foi o mote para uma discussão sobre as capacidades dos alunos, tendo-se concluído que estas capacidades são muitas vezes subestimadas. A partir daqui, passou a ser usual identificar aspetos em que os alunos revelavam conhecimentos e capacidades surpreendentes para as professoras:

> **Francisca:** … No exercício 4, eles conseguiram facilmente chegar a 1/4 do chocolate. Eu achei giríssimo, porque já sabem fazer a conta [4/4 – 3/4 = 1/4]. Não estava à espera.

Identificar generalizações e justificações

Uma outra situação que propusemos a este grupo de professoras do 5.º ano foi a análise de respostas dos alunos a outras tarefas. Um exemplo é indicado na figura 3.

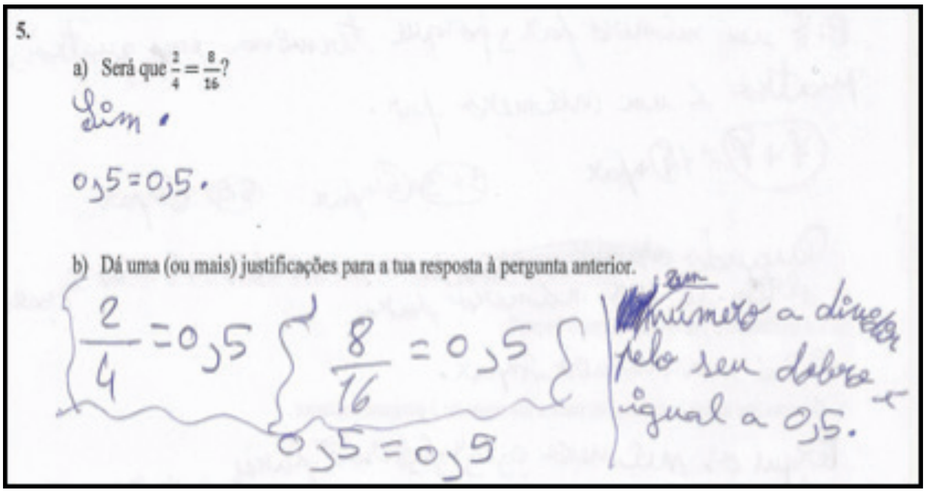


Figura 3 – Análise de respostas dos alunos

As professoras verificaram que na alínea a) os alunos não só responderam à questão como deram uma justificação. Na verdade, os alunos justificaram a sua resposta fazendo uma mudança de representação, da representação em fração para a representação em numeral decimal e usando o princípio da lógica que diz que se duas quantidades são iguais a uma terceira, são iguais entre si. Verificaram, ainda, que na alínea b), sem que isso lhes tenha sido pedido, os alunos ainda fizeram uma generalização:

> **Inês:** Isto aqui é uma justificação.
> …
> **Tânia:** Mas depois na outra já têm aqui uma generalizaçãozinha.
> …
> **Tânia:** Já não é para todos.
> **Formadora:** Exatamente.

Processo Formativo de um Estudo de Aula

Estes exemplos mostram como o estudo de aula é um processo formativo que cria boas oportunidades para o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores participantes. Num estudo de aula há diversas questões fundamentais da prática letiva que podem ser discutidas em detalhe: a inserção do tópico no currículo (articulação vertical e horizontal), as orientações curriculares, a articulação com tarefas anteriores, as capacidades/competências a desenvolver nos alunos, o diagnóstico das dificuldades dos alunos, as possíveis estratégias dos alunos, as ações do professor durante a aula, a avaliação das aprendizagens.

São diversas as aprendizagens profissionais dos professores que se salientam nos estudos de aula. Estes desenvolvem a sua capacidade de analisar dificuldades dos alunos e percebem a necessidade de propor tarefas que promovam a compreensão de aspetos importantes dos tópicos curriculares. Além disso, mostram ser capazes de identificar e valorizar aspetos interessantes do trabalho dos alunos, percebem como se pode analisar o raciocínio dos alunos e identificam oportunidades de conjeturar, generalizar e justificar e valorizam as discussões coletivas, para analisar na turma soluções erradas e tirar partido da comparação de diferentes resoluções.

Conclusão

Os estudos de aula que serviram de base ao trabalho descrito nesta conferência são realizados em contexto colaborativo, envolvendo todos os participantes – professores e formadores. Combinam momentos de trabalho estruturado e trabalho exploratório dos professores participantes, e conjugam o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos participantes. Favorecem a capacidade do professor aprender a partir da sua prática, em conjunto com os colegas e favorecem o desenvolvimento do conhecimento do professor (tanto matemático como didático). Em particular, mostraram ser um bom contexto para promover o desenvolvimento do conhecimento do professor sobre o raciocínio matemático dos alunos, com relevo para os processos fundamentais de conjeturar, generalizar e justificar, e o modo de promover estes processos de raciocínio na sala de aula.

Deste modo, como processo formativo, o estudo de aula tem potencialidades para promover o desenvolvimento profissional dos professores sobre questões relativas à aprendizagem dos alunos e ao seu ensino e favorecer o desenvolvimento de uma cultura profissional que valoriza a colaboração, a reflexão e a investigação sobre a prática, bem como para promover o desenvolvimento de práticas profissionais promotoras de uma aprendizagem mais efetiva conduzindo ao sucesso dos alunos.

Referências

Huang, R., Takahashi, A., & Ponte, J. P. (2019). Theory and practice of lesson study in mathematics around the world. In R. Huang, A. Takahashi & J. P. Ponte (Eds.), *Theory and practice of lesson study in mathematics* (pp. 3-10). Springer.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Ministério da Educação.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). Springer.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7* (2), 355-377.

Quaresma, M., Winsløw, C., Clivaz, S., Ponte, J. P., Ni Shuilleabhain, A., &

Takahashi, A. (Eds.) (2018), *Lesson study around the world: Theoretical and methodological issues.* Springer.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom,* NY.

Pensamento algébrico e desenvolvimento profissional de professores: explorando tarefas formativas com foco no raciocínio dos estudantes do ensino básico

Algebraic thinking and teacher professional development: exploring formative tasks with a focus on the reasoning of elementary school students

Alessandro Jacques Ribeiro[1]

Resumo: Promover a aprendizagem dos alunos certamente envolve aprimorar as práticas dos professores. Assim, no intuito de contribuir com a aprendizagem e o desenvolvimento profissional de professores, de modo que estes possam repensar sua prática letiva quando ensinam álgebra, temos realizado processos formativos, mediados por tarefas de aprendizagem profissional, que exploram o raciocínio dos estudantes quando eles resolvem problemas de natureza algébrica. Com isso, pretende-se nessa conferência apresentar resultados de investigações envolvendo professores e estudantes do ensino básico com foco no pensamento algébrico, nomeadamente no que diz respeito aos diferentes significados do sinal de igualdade e ao pensamento funcional. As experiências realizadas têm nos mostrado que, o trabalho coletivo dos professores em espaços formativos, nos quais eles utilizam-se de tarefas de aprendizagem profissional que contemplam o raciocínio dos estudantes e, ao mesmo tempo, vivenciam discussões coletivas com seus pares, contribuem para que esses professores ampliem seus conhecimentos matemáticos e didáticos para o ensino de álgebra e repensem sua própria prática letiva.

Palavras-chave: Aprendizagem do professor; Pensamento Algébrico; Prática Letiva.

Abstract: *Promoting student learning certainly involves improving teacher practices. Thus, in order to contribute to the learning and professional development of teachers, so that they can rethink their teaching practice when teaching algebra, we have carried out formative processes, mediated by professional learning tasks, that explore students' reasoning when they solve algebraic problems. Thus, it is intended in this conference*

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil, alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

to present research results involving teachers and students of basic education with a focus on algebraic thinking, namely regarding the different meanings of the equal sign and functional thinking. he experiences carried out have shown us that the collective work of teachers in training spaces, in which they use professional learning tasks that contemplate the students' reasoning and, at the same time, experience collective discussions with their peers, contribute to these teachers expand their mathematical and didactic knowledge to teach algebra and rethink their own teaching practice.

Keywords: Teacher learning; Algebraic thinking; Teaching practice.

O principal objetivo traçado para esta conferência é colocar em discussão resultados de pesquisas desenvolvidas no Brasil (e.g. Alves, Aguiar, & Ribeiro, 2018; Elias, Ribeiro, & Savioli, 2020; Ferreira, Ribeiro, M., & Ribeiro, A., 2017; Lautenschlager & Ribeiro, 2017; Pazuch & Ribeiro, 2017; Ribeiro, Aguiar & Pazuch, 2018), as quais tem apontado para as especificidades dos conhecimentos e das práticas dos professores que ensinam matemática, da escola básica à universidade, no que tange ao ensino de álgebra.

Por mais que se tenha dado grande destaque à formação de professores que ensinam matemática nas últimas décadas (Fiorentini, Passos, & Lima, 2016; Gellert, Hernandéz & Chapman, 2013; Ponte, 2014; Stahnke, Schueler, & Roesken-Winter, 2016), nota-se ainda uma demanda por pesquisas que priorizem a prática do professor como elemento fundante e como ponto de partida para a compreensão do que esse professor conhece, de como ele conhece e de para que ele conhece (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Lampert, 2010; Ponte & Chapman, 2008). Particularizando-se a problemática acerca da formação, inicial e continua, de professores que ensinam matemática, reconhecemos a importância de se desenvolver (novas) investigações que se proponham a desvelar qual é e como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores (Opfer & Pedder, 2011; Webster-Wright, 2009) para o ensino de Álgebra na escola básica (Mc Crory et al., 2012). Um dos elementos centrais investigados em nossas pesquisas fazem referência aos conhecimentos matemáticos e didáticos (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Ponte, 1999) desses professores que ensinam matemática.

A preocupação que nos leva a envidar esforços em nossos estudos emergem de resultados apontados por pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra, resultados estes que demonstram o insucesso dos estudantes na aprendizagem deste tema (Cyrino & Oliveira, 2011; Dorigo & Ribeiro, 2010; Kaput, 2008; Matos & Ponte, 2009; Stephens & Ribeiro, 2012), ao mesmo tempo que documentam as dificuldades encontradas pelos professores no ensino de álgebra em diferentes níveis escolares (Barbosa & Ribeiro, 2013; Doerr, 2004; Mccrory et al., 2012; Pazuch & Ribeiro, 2017; Ponte & Branco, 2013; Ribeiro, 2012; Ribeiro & Cury, 2015; Ribeiro & Oliveira, 2015; Ribeiro & Ponte, 2019; Wasserman, 2015).

Com isso, a proposta de se repensar a formação continuada de professores que ensinam matemática e que continuam a aprender no exercício de suas práticas é um vasto campo de pesquisa (Webster-Wright, 2009; Opfer & Pedder, 2011; Serrazina, 2013), o que nos remete ao principal foco de nossas investigações, quer seja, a aprendizagem profissional de professores. Tal temática tem sido estudada, discutida e investigada há mais de duas décadas (Opfer & Pedder, 2011) e, dentre os resultados de estudos sobre a temática no campo da Educação Matemática, emergiu uma perspetiva de aprendizagem profissional de professores fortemente ancorada na prática da sala de aula (Ball & Cohen, 1999; Lampert, 2010; Ponte & Chapman, 2008; Smith, 2001) e facilitadora de uma “aprendizagem profissional autêntica” (Webster-Wright, 2009).

Em seu estudo, Webster-Wright (2009) destaca que a formação inicial na universidade é apenas a primeira fase do processo de aprendizagem da vida profissional de muitos trabalhadores, como é o caso dos professores, uma vez que a eficácia dessa aprendizagem ocorre ao longo de muitos anos e no contexto da prática profissional. Assim, ao se adotar uma visão holística sobre a aprendizagem profissional do professor (Opfer & Pedder, 2011), faz-se necessário a compreensão da aprendizagem profissional docente como um sistema complexo e que não se desenvolve de modo sustentável por eventos episódicos. Mas, como se possibilitar uma aprendizagem profissional do professor que, ao mesmo tempo tenha início na universidade, considere a prática da sala de aula, e seja desenvolvida (e acompanhada) em sua vida profissional futura?

Nesse sentido, buscamos debruçar nossas atenções para a importância de elaborar e desenvolver oportunidades de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática dos professores, de modo a proporcionar aprendizagem profissional aos docentes ao longo de suas carreiras (Loucks-Horsley, 1997). A partir de estudos anteriores (como Ribeiro & Ponte, 2019), adotamos um entendimento que as oportunidades de aprendizagem profissional (OAP) considerem, de forma articulada e coordenada, o papel das tarefas de aprendizagem profissional, a importância das interações discursivas para o fomento da aprendizagem profissional e, ainda, o papel e as ações do formador, principal responsável por conceber e elaborar processos formativos que tenha como objetivo oportunizar momentos de aprendizagem aos professores. Vale destacar que, em nossas investigações adotamos um entendimento de que a aprendizagem do professor se situa na prática diária, incluindo aí não apenas os momentos de sala de aula, mas também planeamento, avaliação, colaboração com colegas, entre outros (Davis & Krajcik, 2005); e que a aprendizagem do professor está distribuída entre indivíduos, bem como em artefactos, como o caso de tarefas que são preparadas para sua formação (Putnam & Borko, 2000).

Tomando-se tais princípios, em Ribeiro e Ponte (2020) apresentemos um modelo teórico que estamos a desenvolver, o qual visa dar apoio para (i) organizar o design de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) gerar oportunidades para os professores aprenderem durante processos formativos que considerem os três domínios que compõem o modelo: (a) Papel e Ações do Formador (PAF), (b) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), (c) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP).

O modelo *"Oportunidades de Aprendizagem do Professor"* (modelo que denominamos PLOT[1]), tem uma estrutura que visa romper com uma lógica linear e compartimentalizada de se conceber os processos de formação que objetivam propiciar aprendizagem ao professor (Goldsmith, Doerr, & Lewis, 2014), adotando-se então, uma perspectiva interativa e interconectada que considera os três domínios em conjunto, contribuindo assim, para se gerar oportunidades de aprendizagem ao professor. Com isso, ao considerar, de maneira interativa e interconectada em um único sistema, os três diferentes domínios que compõem o modelo PLOT (Figura 1), busca-se articular estes três domínios em um único sistema, gerando assim, uma ferramenta teórico-metodológica que permite organizar e concretizar processos formativos que fomentem oportunidades para a aprendizagem de professores que ensinam matemática.

A literatura sobre a pesquisa em formação de professores de maneira geral, e na área da Educação Matemática de maneira específica, demonstra que a comunidade de pesquisadores já vem estudando os três domínios que compõem o modelo PLOT, porém, sem articulação de uns com os outros. Por exemplo, o papel e as ações do formador (PAF) vem sendo estudado por Remillard e Geist (2002) e Bruce, Esmonde, Dookie e Beatty (2010). As tarefas de aprendizagem profissional (TAP) são consideradas nos estudos de Ball e Cohen (1999), de Smith (2001) e de Swan (2007). E, no que tange às interações discursivas entre os participantes (IDP), tem-se os trabalhos de Ponte (2017), de Craig e Morgan (2015) e de Nemirovsky, Dimattia, Ribeiro e Lara-Meloy (2005).

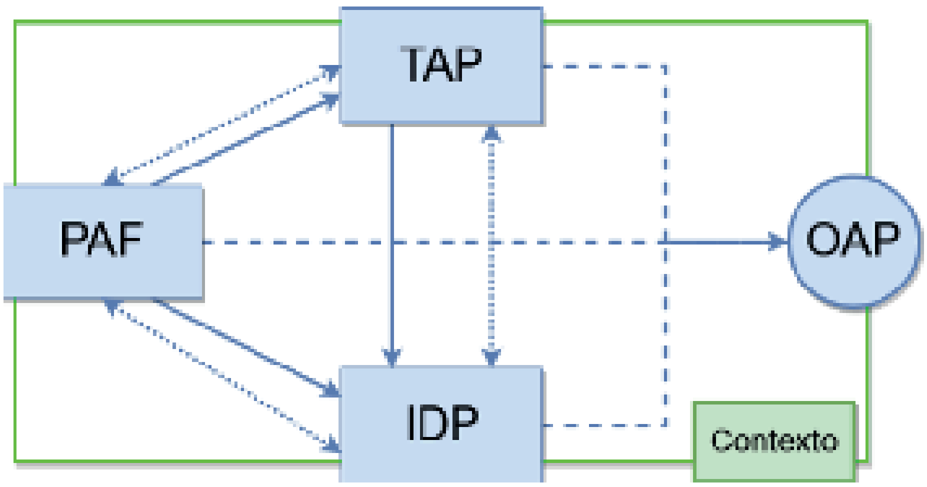


Figura 1. Modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020, p. 4)

1. Optamos por manter o acrônimo PLOT da designação em inglês (Professional Learning Opportunities for Teachers) por ter sido assim apresentado pela primeira vez, no artigo Ribeiro e Ponte (2020), e por entendemos que a sonoridade da pronúncia, mesmo em português, nos parece agradável.

Levando-se em conta que nossos estudos focam os processos de ensino e aprendizagem de álgebra nos diferentes níveis de ensino, entende-se que seja necessário apresentar o que entendemos por álgebra e pensamento algébrico, e como tais temáticas vem sendo abordada em nossas investigações.

O pensamento algébrico pode ser visto como um meio de humanizar a álgebra, aproximando quem está aprendendo, em especial nos primeiros anos, de uma "teoria" que foi, durante muito tempo, intocável (Kaput, 2008). Quando nos referimos à álgebra, de maneira geral, normalmente a relacionamos ao uso de símbolos para a aprendizagem de cálculos. No entanto, quando falamos em álgebra nos anos iniciais, por exemplo, podemos pensar a levar os estudantes – e mesmo os professores – a vê-la como um modo de pensar fortemente ancorado em experiências que, por um lado envolvem as ações de conjeturar, generalizar e justificar, e por outro, valorize uma variedade de representações e linguagens (Kieran, 2004). Porém, para rompermos um discurso que reconhece a álgebra como "um amontoado de letras e números", temos que apresentá-la como uma área que nasce do pensamento aritmético (Kaput, 2008; Nacarato & Custódio, 2018, Ferreira, Ribeiro & Ponte, 2021). Um dos maiores desafios para o professor na sala de aula, fato documentado pelas pesquisas, é a transição entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico. Portanto, é preciso reforçar que sem uma base sólida de conhecimentos aritméticos dificilmente o aluno, ou mesmo o professor, conseguirá desenvolver um pensamento algébrico robusto (Sun, Xin & Huang, 2019).

Nessa vertente, a literatura nos apresenta, sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, diversos estudos que trazem o foco para o trabalho com a aritmética (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018), com pensamento funcional e simbolismo algébrico (Cañadas, Brizuela, & Blanton, 2016; Cañadas, Molina, & Del Rio, 2018), os números racionais (Moriel Junior, Wielewski, & Carrillo, 2019), os diferentes significados do sinal de igualdade (Barboza, Ribeiro, & Pazuch, 2020), além de apresentar pesquisas voltadas ao pensamento algébrico de forma mais geral (Franke & Carpenter; Battey, 2008; Hohensee, 2017). A transição entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico também pode ser iniciada pelo trabalho com variáveis, ainda nos anos iniciais. Segundo Blanton et al. (2017), o problema no desenvolvimento do pensamento algébrico não está centrado nas crianças, mas na falta de oportunidades que elas possuem para exercitar trabalhos com as variáveis. Nesse mesmo sentido, Carraher e Schliemann (2015) apresentam quatro ideias poderosas para o ensino de álgebra, e uma delas diz respeito ao papel que as funções possuem na união entre a aritmética, a álgebra e a geometria, reforçando, assim, a necessidade de estudos que visem à transição entre os blocos de aritmética e álgebra. Isso significa, conforme reforça Kaput (2008), buscar elementos de aritmética para integrar à álgebra desde os primeiros anos de escolarização. Sun, Xin e Huang (2019) também destacam diversos tópicos para pesquisas futuras e, dentre eles, reforçam a necessidade de uma teoria da educação matemática para a integridade da aritmética dos números inteiros e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ainda no campo da álgebra e seu ensino nos primeiros anos de escolaridade, destaca-se o papel do estudo do pensamento funcional, discussões estas que precisam ser contempladas na formação inicial de professores, como bem reforça o estudo de Ponte e Branco (2013). Os autores concluem, dentre outros resultados, “que o modo de trabalho exploratório tendo por base situações matemáticas e situações reais da sala de aula, com produções escritas dos alunos e registros em vídeo” (p.135) ocasionaram oportunidades para futuros professores discutirem a álgebra e seu ensino nos primeiros anos. Não obstante, reforçamos a necessidade de os formadores de professores dos anos iniciais oferecerem oportunidades de aprendizagem contínuas ligadas às práticas de ensino, visto que os formadores devem projetar um espaço onde os futuros professores possuam acesso ao pensamento dos alunos, por meio protocolos reais das salas de aulas e vídeos de aulas (Ribeiro, Aguiar, Trevisan, & Elias, 2021), visando-se assim aprendizagens e desenvolvimento profissional desses futuros professores (Ponte & Branco, 2013; Franke, Carpenter, & Battey, 2008).

O contexto no qual nossas pesquisas se desenvolvem incluem, normalmente, processos formativos realizados ao longo de 12-15 encontros semanais de 4 horas, formações essas que tem por objetivo geral desenvolver e ampliar conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores participantes acerca da álgebra e seu ensino na escola básica. Os encontros formativos são dinamizados por formadores e investigadores pertencentes a nosso grupo de pesquisa no Brasil e são organizados em momentos de trabalho (i) individual, (ii) em pequenos grupos, e (iii) momentos de discussões coletivas. A maior parte das atividades são realizadas na universidade, mas sempre contamos também com encontros realizados em escolas de ensino básico parceiras. As sessões de trabalho contemplam momentos de estudos teóricos (entre 8 e 12 horas) e momentos de trabalho *hands on*, os quais são mediados por TAP elaboradas pelos dinamizadores dos encontros. Uma vez que a prática letiva é problematizada em nossas investigações, os processos formativos contemplam TAPs que formam um ciclo interativo de planejamento, desenvolvimento e reflexão de aulas elaboradas coletivamente pelo grupo de professores – Ciclo PDR (Trevisan, Ribeiro, & Ponte, 2020). As três TAP que compõem o ciclo PDR buscam promover discussões matemáticas e didáticas a respeito dos temas matemáticos focos de cada processo formativo e, geralmente, possuem o seguinte formato: 3.ª TAP: Preparação em pequenos grupos de planos de aula destinados à anos escolares específicos; 4.ª TAP: Desenvolvimento das aulas selecionadas, por um dos professores participantes da elaboração da aula; e 5.ª TAP: Reflexão coletiva, mediada por registros de prática (Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014) produzidos na aula realizada, focando o papel e as ações do professor. Nessa conferência será dada especial atenção a episódios advindos da realização de 5ªs TAP de 3 aulas que foram elaboradas e desenvolvidas alguns processos formativos realizados pelo grupo.

Os participantes de nossos estudos são professores de matemática da escola básica atuantes na região metropolitana da cidade de São Paulo, Brasil, sejam os que já estão atuando em salas de aula, como aqueles que se encontram em formação inicial. Para a realização das TAP, os professores são divididos em grupos (com 4 a 6 participantes), cuja organização é feita pelos formadores de modo que, em todos os grupos, sempre haja (i) professores com e sem experiência em sala de aula e (ii) professores formados e em formação inicial. Com a formação desses grupos pretende-se propiciar a troca de experiências entre professores com vivências distintas em sala de aula.

Temos adotado em nossas investigações uma abordagem de pesquisa qualitativa (Erickson, 1986), sob o paradigma interpretativo (Crotty, 1998), e utilizando-se de *Design-Based Research* (Cobb et al. 2003; Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016), sendo os dados recolhidos por meio de (i) registros escritos das discussões dos pequenos grupos de professores (designados por “protocolos”); (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos; e (iii) vídeos das discussões coletivas. As gravações em áudio e vídeo são analisadas pelos investigadores em sua íntegra, articulando-se com os protocolos produzidos pelos professores, de modo que se permita preparar a terceira etapa do Ciclo PDR – 5ª TAP.

Para a análise dos dados buscamos nos assentar em discussões que ocorreram, principalmente nas 5.ª TAP realizadas após a realização das aulas que foram elaboradas e desenvolvidas durante o Ciclo PDR realizado no processo formativo. Vale ressaltar que as 5.ª TAP são elaboradas a partir dos registros de prática produzidos nas 4.ª TAP. Nessa conferência serão apresentados dados advindos de processos formativos envolvendo (i) os diferentes significados do sinal de igualdade e (ii) o desenvolvimento do pensamento funcional a partir do trabalho com padrões, regularidades e generalizações.

Por fim, a partir dos resultados a serem discutidos e debatidos na conferencia realizada, bem como tomando-se como referência outros estudos desenvolvidos pelo grupo, podemos afirmar que os processos formativos realizados a partir da utilização do modelo PLOT tem se mostrado como um caminho profícuo para uma proposta de formação inicial e continua de professores que ensinam matemática nos diferentes níveis de ensino, que permite e favorece a mobilização, ampliação e construção de conhecimentos matemáticos e didáticos para ensinar na escola básica, nomeadamente no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra.

Temos observado que o modelo PLOT possibilita identificar e compreender se e como ocorrerem oportunidades de aprendizagem profissional aos professores participantes dos processos formativos, em especial pela forma como o modelo é mobilizado e contemplado durante todas as fases de sua operacionalização (como indicado na Figura 1). Especificamente consideramos que o modelo PLOT parece atender à “necessidade de desenvolver estruturas compartilhadas para o estudo da aprendizagem dos professores” (Goldsmith, Doerr, & Lewis, 2014, p. 23). Naturalmente, a consolidação de um modelo teórico-metodológico requer novos estudos e é isso que o grupo vem buscando desenvolver, no sentido de se perceber como o modelo PLOT pode ser usado, por exemplo, com diferentes conteúdos matemáticos e em outras disciplinas escolares (por exemplo, disciplinas na área das ciências). Isso tem por intuito refinar a estrutura do modelo teórico, bem como possibilitar novos encaminhamentos uma abordagem mais ampla e longitudinal.

Referências bibliográficas

Alves, K. A., Aguiar, M., & Ribeiro, A. J. (2018). As dimensões do conhecimento do professor que ensina matemática: o knowledge quartet como ferramenta de análise da prática docente. *Acta Scientiae– ULBRA, Canoas, 20,* 22-42.

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies, 62* (3), 317-335.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). Jossey Bass.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Barbosa, Y. O. & Ribeiro, A. J. (2013). Multisignificados de equação: Uma investigação acerca das concepções de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 15,* 379-398.

Barboza, L. C. S., Ribeiro, A. J., & Pazuch, V. (2020). *Primary school teacher's professional learning: exploring different meanings of the equal signal.* Acta Scientiae, v. 22, n. 4.

Blanton, M., Brizuela, B.M., Gardiner, A.M., A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educ Stud Math 95*, 181–202.

Bruce, C. D., Esmonde, I., Ross, J., Dookie, L., & Beatty, R. (2010). The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. *Teaching and Teacher Education, 26*, 1598-1608.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). *Powerful ideas in elementary school mathematics.* In: English, L. D., & Kirshner, D. (Eds.). Hand book of international research in mathematics education. 3rd ed. (191-218) Taylor & Francis,.

Cañadas, M. C., Brizuela, B., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Be havior*, *41,* 87-113.

Cañadas, M. C., Molina, M., & Del Rio, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 98* (1) pp. 19-37.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Shaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (481-503). Routledge.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and

practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education, 24* (1), 249-305.
Craig, T., & Morgan, C. (2015). Language and communication in mathematics education. In S. J. Cho (Ed.), The Proceedings of the 12th *International Congress on Mathematical Education,* 529-533. DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_53
Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: meaning and perspective in the research process.* Sage.
Cyrino, M. & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema, 24* (38), 97-126.
Davis, E. A. & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher, 34* (3), 3–14.
Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Ed.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). Kluwer.
Dorigo, M. & Ribeiro, A. J. (2010). Significados de equação: um estudo realizado com alunos do Ensino Médio. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 3,* 154-182.
Elias, H. R., Ribeiro, A. J., & Savioli, A. M. P. D. (2020). Epistemological Matrix of Rational Number: a Look at the Different Meanings of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education.* DOI: 10.1007/s10763-019-09965-4
Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In: Wittrock, M. C. (Org.). *Handbook of research on teaching.* MacMillan, 119-161.
Ferreira, M. C. N., Ribeiro, C. M., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké (on line*), 25, 494-511.
Ferreira, M. C. N., Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2021). Prática profissional de professores dos anos iniciais e o pensamento algébrico: contribuições a partir de uma formação continuada. *Educação Matemática Pesquisa, 23*, 171-200.
Fiorentini, D., Passos, C. L. B., & Lima, R. C. R. (Org.). (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: Período 2001 a 2012.* 1. ed. Campinas: FE-Unicamp, 1, 488.
Franke, M., Carpenter, T., & Battey, D. (2008). *Content matters: Algebraic reasoning in teacher professional development.* In: Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). Algebra in the early grades. Routledge,333-359.
Gellert, U., Hernandéz, R. B., & Chapman, O. (2013). *Research methods in mathematics teacher education.* In: Clements, M. A. et al. (Ed.). Third international handbook of mathematics education. 327-360. Springer.
Goldsmith, L. T., Doerr, H. M., & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17,* 5–36.
Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké, Campinas, 26*, pp. 354-374.
Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 20, (3, 231-257).
Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8* (1), pp. 139-151.
Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, *61* (1-2) 21–34
Lautenschlager, E. & Ribeiro, A. J. (2017). Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios. *Educação Matemática Pesquisa, 19,* 237-263.
Loucks-Horsley, S. (1997). Teacher change, staff development, and systemic change: Reflections from the eye of the paradigm. In S. N. Friel & G.W. Bright (Eds.), *Reflecting on our work: NSF teacher enhancement in K-6 mathematics* (pp. 133–150). University Press of America.
Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics.* Corwin Press.
Matos, A. S. & Ponte, J. P. (2009). Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), Itália, Supplemento n.2* al n. 19.
McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43* (5), 584-615.
Moriel Junior, J. G., Wielewski, G. D., & Carrillo, J. (2019). Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações. *Bolema*, 33, (65), 988-1026.
Nacarato, A. M., & Custódio, I. A. (Org) (2018). *O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática.* SBEM.
Nemirovsky, R., Dimattia, C., Ribeiro, B., & Lara-Meloy, T. (2005). Talking about teachers episodes. *J Math Teacher Educ, 8,* 363-392.
Opfer, V. D. & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research, 81* (3), 376-407.
Pazuch, V. & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa, 19,* 465-496.
Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (59-72), SPCE.
Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: Ponte, J. P. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de matemática.* IE/UL, 343-358.
Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino aprendizagem em Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (33-56). APM.
Ponte, J. P. & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista, 50,* 135-155.
Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para com- preender e melhorar as práticas educativas*. Quadrante, 25* (2), 77-98.
Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: English, L. D. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed. 225-263). Routledge.
Putnam, R. & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational*

Researcher, 29 (1), 4–15.

Remillard, J. T. & Geist, K. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* p. 7-34.

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema, 26* (42), 535-557.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., & Pazuch, V. (2018). O uso de vídeos em um processo formativo sobre o ensino de álgebra. In: Silva, R. S. R. (Org.). *Processos formativos em educação matemática: perspectivas filosóficas e pragmáticas.* Fi.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L., & Elias, H. Rizek. (2021). How Teachers Deal with Students Mathematical Reasoning When Promoting Whole-Class Discussion During the Teaching of Algebra. In: Alina Galvão Spinillo, A. G., Lautert, S. L., &, R E. S. R. (Org.). *Mathematical Reasoning of Children and Adults.* 1aed. Springer International Publishing, 2021, (239-264).

Ribeiro, A. J. & Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, A. J. & Oliveira, F. A. P. V. S. (2015). Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. *Zetetiké, 23* (44), 311-327.

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae* (ULBRA), *21,* 49-74.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. da. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetike, 28*, e020027. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072

Serrazina, M. L. (2013). *O* Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. *Da investigação às práticas, 3* (2), 75-97.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* NCTM.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesk-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM, 48* (1), 1-27.

Stephens, M. & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *RELIME, 15*, 307-401.

Sun, X. H., Xin, Y. P., & Huang, R. (2019). Uma pesquisa complementar sobre o estado atual de ensino e aprendizagem da aritmética de números inteiros e conexões com o conteúdo matemático posterior. *ZDM Mathematics Education, 51*, 1-12.

Swan, M. (2007). The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 217-237.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. D. (2020). Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15* (2), em 0563. https://doi.org/10.29333/iejme/6256

Wasserman, N. H. (2015). Unpacking teachers' moves in the classroom: navigating micro-and macro-levels of mathematical complexity.

Educational Studies in Mathematics, 90, 75-93.

Webster-Wright, A. (2009). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research, 79,* 702-739. https://doi.org/10.3102/0034654308330970

Simpósio de Comunicações 1
Communication Symposiums 1

Ensino da divisão na educação primária: uma experiência com professores pedagogos

The teaching of division in primary education: an experience with polyvalent teachers

Carlos Mometti[1]

Resumo: O presente trabalho possui por objetivo apresentar uma experiência vivenciada durante um curso de formação continuada com professores pedagogos do Brasil que atuam nos primeiros anos da educação primária. A referida experiência foi vivenciada durante uma aula de técnicas de ensino de divisão, a qual foi gravada e, posteriormente, transcrita para constituir nossa fonte de informação. Além disso, de modo a transformarmos a informação obtida em dado de análise e posterior reflexão, utilizamo-nos das observações registradas no diário de campo do pesquisador-formador, as quais serviram de base para escolha dos trechos neste artigo apresentados. Como metodologia de análise para reconstituir esta experiência e, assim promovermos um movimento reflexivo, utilizamo-nos da hermenêutica-fenomenológica, por meio do processo alético. Assim, a partir de momentos vivenciados e corroborados com observações do caderno de campo, os trechos foram evidenciados e foi-nos possível desenvolver um processo alético, isto é, o ciclo de reconstituição do parte-todo do momento vivido. Como reflexões principais, destacamos o não reconhecimento por parte dos professores analisados da divisão como conceito e procedimento, além de dificuldades inerentes ao emprego de metodologias específicas para o ensino da divisão.

Palavras-chave: Divisão, Técnicas de Ensino, Educação Primária, Educação Matemática.

Abstract: *This article aims to present an experience lived during a training course for in-service teachers with polyvalent teachers from Brazil who work in the first years of primary education. This experience was lived during a class of teaching technique of the division, which was recorded and later transcribed to constitute our source of information. In addition, in order to transform the information obtained into data for analysis and subsequent XXXI SIEM 2 reflection, we used the observations recorded in the researcher's diary, which served as a*

1. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, carlosmometti@usp.br

basis for choosing the excerpts in this article presented. As an analytical methodology to reconstitute this experience and, thus promoting a reflective movement, we use hermeneutics-phenomenology, through the aletic process. Thus, from moments experienced and corroborated with observations from the researcher's diary, the excerpts were highlighted and it was possible for us to develop an allergic process, that is, the cycle of reconstitution of the whole-part of the lived moment. As main reflections, we highlight the lack of recognition on the part of the teachers analyzed in the division as a concept and procedure, in addition to difficulties inherent to the use of specific methodologies for teaching the division.

Keywords: *Division, Teaching techniques, Primary Education, Math Education.*

Considerações iniciais

Discutir sobre aspectos relacionados ao ensino da Matemática, na contemporaneidade, faz-se necessário e urgente, uma vez que as evoluções tecnológicas têm mostrado cada vez mais o uso de linguagens específicas, quando não puramente matemáticas. Mas, não seria apenas acerca do letramento matemático que nossa preocupação, tanto da parte da pesquisa em Educação Matemática quanto do seu ensino nos diferentes níveis, deve se ater, como também dos modos como esta linguagem será ensinada e dos recursos e processos por meio dos quais dar-se-á tamanha empresa.

Neste sentido, o ensino da Matemática na educação básica tem assumido lugar relevante nas discussões educacionais, seja na América do Sul como na Europa, contextos nos quais temos presenciado intensamente as mudanças e os principais temas por meio de congressos e da literatura pertinente. Ademais, cabe-nos dizer que compartilhar saberes oriundos da experiência, bem como aqueles oriundos do contexto científico acadêmico traz excelentes aportes teórico-metodológicos que versa para uma prática pedagógica cada vez mais eficiente, colocando nosso aluno como centro do processo e agente último da finalidade do ato de ensinar (De La Puente, 1978).

Considerando este espaço como contexto de troca e compartilhamento de saberes, o presente trabalho tem por objetivo apresentar pontos para reflexões acerca de uma experiência vivenciada durante um curso de formação continuada com professores pedagogos do Brasil. Tal momento específico foi vivenciado durante a realização de uma aula sobre técnicas de ensino da divisão nos primeiros anos da educação primária e nos trouxe, segundo a metodologia hermenêutica-fenomenológica discutida por Alvesson e Sköldeberg (2009), importantes reflexões acerca do

ensino da divisão.
Outros sim, cabe-nos salientar que o presente trabalho é um recorte da pesquisa Educação Matemática nos Anos Iniciais: aspectos metodológicos do ensinar, desenvolvida na Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, em parceria com a Universidade de Concórdia (Canadá), e se encontra em andamento. Desta forma, enfatizamos a natureza do presente trabalho de relatar uma experiência vivenciada a partir da formação realizada com os professores pedagogos.

Aportes teóricos

A Matemática na Educação Primária[1] brasileira

O ensino da Matemática no Brasil sofreu inúmeras transformações no decorrer das últimas duas décadas. Tal fato deve-se, essencialmente, às novas exigências previstas pelas regulamentações do ensino brasileiro no que se refere à educação básica. Assim, segundo a Lei n° 9.394 de 23 de dezembro de 1996, conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996), o chamado ensino primário - no Brasil nomeado por Ensino Fundamental - ganha padrinho e, seu financiamento e regulação ficam a cargo dos municípios de cada estado federativo. Isso significa que a partir da regulamentação estabelecida pela referida lei, a educação básica de nível fundamental tem como responsável as prefeituras de cada município. Dessa forma, o governo central distribui os recursos para cada município e este, por sua vez, os emprega de modo a contemplar as políticas educacionais locais.
Contudo, destacam-se aqui alguns pontos de relevância no que diz respeito à educação primária brasileira: (i) os recursos financeiros disponibilizados devem suprir as necessidades de natureza educacional, tais como deslocamento dos alunos até às escolas, compra de materiais de consumo, materiais didáticos e formação dos professores, (ii) como a responsabilidade para o gerenciamento destes recursos está com cada município, o risco de não se ofertar cursos de formação continuada para professores passa a ser alto, (iii) cada município pode ter o seu próprio currículo, seguindo as normativas orientadas pela já promulgada Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), a qual traz todas as habilidades necessárias para cada nível de ensino da educação básica que deverão ser trabalhadas e desenvolvidas por cada componente curricular.
É neste contexto que o conteúdo curricular de Matemática sofreu algumas modificações, conforme citado. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) os conteúdos de Matemática na educação primária são distribuídos em cinco unidades temáticas, as quais são: (i) Números, (ii) Álgebra, (iii) Geometria, (iv) Grandezas e Medidas e (v) Probabilidade e Estatística. A primeira unidade temática trata, essencialmente, das propriedades dos conjuntos numéricos, bem como do tratamento do Sistema de Numeração Decimal distribuído por níveis. Assim, uma criança que inicia sua educação primária aos seis anos de idade (no 1° ano do ensino primário) aprenderá, por exemplo, a reconhecer os números naturais de apenas uma ordem (unidades),

1. Os termos Educação Primária são entendidos, no Brasil, por Ensino Fundamental. Este, por sua vez, é dividido segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) em dois ciclos: anos iniciais e anos finais. Para tanto, neste trabalho utilizaremos os termos Educação Primária para referenciarmos o Ensino Fundamental na etapa dos anos iniciais.

além de trabalhar a *noção de correspondência.*
Já a unidade temática (ii) trabalha, na educação primária, as propriedades da igualdade respaldadas sob as noções de *agrupamento* e *recorrência*. A unidade (iii) distribui-se, entre os nove anos que compõem a educação primária, em estudos de geometria plana e espacial. A unidade (iv) aborda aspectos de métrica e suas construções, destacando as unidades-padrão e seu reconhecimento em situações-problema do cotidiano. Finalmente, a unidade temática (v) traz aspectos relacionados a uma coleção de dados, o tratamento destes por meio de gráficos simples como barras e setores, além de problemas envolvendo o princípio fundamental da contagem e elementos de probabilidade.
Assim sendo, tais unidades temáticas são formadas por habilidades, seguindo a orientação teórica de Perrenoud (1997), desenvolvendo-se em torno da noção de competência. Isso significa que ao final da educação primária todo aluno e toda aluna devem ter consolidadas em sua aprendizagem competências específicas para cada área curricular.
Neste sentido, a necessidade de se pensar em novas formas metodológicas para o ensino da Matemática na educação primária é emergente e, sobretudo, urgente, uma vez que novos currículos locais e regionais se encontram em elaboração, além de mudanças nos próprios materiais didáticos. Além disso, cabe destacar que o profissional responsável por desenvolver as atividades de ensino nos primeiros cinco anos da educação primária brasileira não é o especialista licenciado em Matemática, mas o profissional formado em Pedagogia. De acordo com pesquisas que desenvolvemos nos últimos dois anos Mometti (2019, 2020a, 2020b), notam-se inúmeras dificuldades destes profissionais no que diz respeito aos conteúdos específicos da Matemática. Do mesmo modo, autores como Julio e Silva (2018), Oliveira e Oliveira (2013) e Ortega e Santos (2018) também evidenciam a relação existente entre as dificuldades na área da Matemática e a escolha do curso de Pedagogia.
Tais dificuldades podem ser resumidas em (i) dificuldades na compreensão dos conteúdos básicos da Matemática, (ii) dificuldades na diferenciação entre conceito e procedimento, (iii) não compreensão da utilização da linguagem matemática na resolução de problemas e situações e (iv) sentimento de desgosto ou não atratividade no que diz respeito aos conteúdos matemáticos segundo Julio e Silva (2018), Ortega e Santos (2018).
Dessa forma, se a educação primária é a base para a construção dos conhecimentos matemáticos elementares necessários para o desenvolvimento do aluno ao longo de sua formação, há que se considerar, complementarmente, os aspectos relacionados à formação do professor, seja ela inicial e/ou continuada. No Brasil, esse profissional que atua na educação primária dos primeiros anos e desenvolve seu trabalho pedagógico em todas as áreas de conhecimento é referenciado como professor polivalente. Tal referenciação diz respeito, justamente, pelo caráter multifacetado que esse professor possui, distribuindo sua atenção entre todas as áreas do conhecimento e suas respectivas metodologias de ensino.

A divisão como conceito e como procedimento

A divisão é uma das operações matemáticas que mais evidenciam dificuldades dos alunos da educação primária no Brasil. Tal fato se deve, num primeiro momento, devido à confusão causada pelos próprios professores durante seu ensino, pois ora consideram-na como conceito e ora como *procedimento*. Neste ponto, ademais, podemos encontrar uma discussão epistemológica acerca da *divisão*.

Inicialmente, a *divisão* como conceito é entendida como a distribuição em partes *igualitárias* entre elementos respectivos de um dado conjunto. Dessa forma, quando queremos dividir, por exemplo, oito cocos para quatro pessoas em uma praia, temos que distribuir igualmente os cocos para todas estas pessoas até que os mesmos se esgotem, e não as pessoas. Já quanto a compreensão da divisão como *procedimento*, podemos aludir ao *como* iremos distribuir esses cocos para as quatro pessoas da praia.

Neste ponto, não nos referimos mais à quantidade de cocos existentes, mas sim aos meios através dos quais tais cocos serão distribuídos. Assim, podemos dizer que uma coisa é saber que a divisão é o ato de distribuir coisas em parcelas, pacotes, grupos iguais para uma segunda quantidade, e outra é utilizar-se dos procedimentos da linguagem lógico-matemática para tal.

Assim, para trabalhar a divisão nos primeiros anos da educação primária temos que ter em mente estas duas categorizações: *conceito e procedimento.* Seguindo a perspectiva de Coll et al, (1992) teríamos que o primeiro trata de um *conteúdo conceitual*, isto é, no nível epistêmico. Deste modo, trabalhamos o reconhecimento e a extensão para correspondência entre elementos de um mesmo conjunto ou de conjuntos distintos, por exemplo.

Já o segundo bebe na fonte do *conteúdo procedimental*, uma vez que precisamos dos conteúdos conceituais da linguagem matemática embebida no reconhecimento de grandezas e valores para correspondência. O que observamos, na maioria dos professores polivalentes que acompanhamos na sala de aula em outros estudos Mometti (2019, 2020a, 2020b) é o trabalho pautado apenas nos conteúdos conceituais, ensinando-os como procedimentos. Por isso, geralmente somos questionados durante as formações de professores da educação primária acerca do seguinte: *o que devo ensinar primeiro na divisão? A forma mais rápida, fazendo de cabeça, ou a forma mais demorada, fazendo no papel?* Este questionamento leva-nos a perceber que *o fazer de cabeça* (alusão à memorização) é nada mais do que aplicar diretamente o conceito já incorporado, pulando a etapa do procedimento detalhado e configurado na forma de linguagem matemática. Já o segundo questionamento, sobre *o fazendo no papel,* alude exclusivamente ao procedimento em si.

A divisão, na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) é ensinada a partir do 4° ano da educação primária, ou seja, para crianças com idades entre 8 e 9 anos. Além disso, para se chegar à divisão, esta criança precisou passar pelos seguintes conteúdos matemáticos[2] : (i) correspondência, (ii) agrupamento, (iii) recorrência,

2. Não é objetivo deste trabalho defender, ou não, a ideia de um currículo propedêutico e a noção de prérequisito para se aprender a Matemática. Apenas queremos sinalizar a necessidade do uso de outros conhecimentos matemáticos para se chegar à aprendizagem da divisão.

(iv) soma de parcelas iguais e (v) multiplicação com dois algarismos. Desta forma, a ausência de qualquer um dos conhecimentos acima citados trará, de certo modo, algum impacto na aprendizagem da divisão. Finalmente, cabe ressaltar que as duas concepções não são excludentes, mas sim complementares entre si.

Enquadramento metodológico

Contexto da experiência em pauta

O presente trabalho discorre sobre uma experiência específica vivenciada durante um curso de formação continuada com cento e cinquenta e cinco professores polivalentes (pedagogos) do Brasil, durante o segundo semestre do ano de 2020. Este curso foi desenvolvido na modalidade remota pelo período de quatro meses, totalizando uma carga horária de sessenta horas.

Cabe destacar que o referido curso constituiu uma das atividades previstas no cronograma da pesquisa *Educação Matemática nos Anos Iniciais: aspectos metodológicos do ensinar*[3], desenvolvida na Universidade de São Paulo (Brasil) em parceria com a Universidade de Concórdia (Canadá). Este projeto possui por objetivo geral investigar os aspectos socioculturais que influenciam a prática pedagógica dos professores polivalentes dos anos iniciais, no que tange ao ensino da Matemática.

Além disso, suas metas específicas são: (i) investigar as principais formas metodológicas que os professores polivalentes utilizam para ensinar Matemática nos primeiros anos da educação primária, (ii) buscar os operadores culturais que influenciam a escolha metodológica dos polivalentes no ensino da Matemática, (iii) os conceitos matemáticos de maior dificuldade para o trabalho pedagógico e, finalmente, (iv) desenvolver cursos de formação continuada, bem como materiais de apoio à prática docente no que se refere ao ensino da Matemática na educação primária.

Fontes de informação para reflexão crítica

O curso de formação continuada supramencionado caracterizou-se como a fonte de informação essencial do presente relato, principalmente, no que se refere às aulas remotas realizadas com os professores participantes. Para este trabalho, especificamente, utilizamo-nos de uma aula remota desenvolvida sobre o tema Técnicas de Divisão. Esta aula foi gravada mediante autorização prévia dos professores participantes respeitando o estabelecido pelas resoluções normativas n° 466 de 12 de dezembro de 2012 (BRASIL, 2012) e a de n° 510 de 7 de abril de 2016 (BRASIL, 2016), de modo a obtermos informações audiovisuais para transformação em dados de análise.

Além desta gravação da aula, utilizamo-nos das anotações realizadas pelo pesquisador no diário de campo, caracterizando elementos essenciais da pesquisa naturalizada, na qual o pesquisador também é sujeito participante da experiência vivenciada.

3. Esta pesquisa desenvolve-se a nível de projeto de aprofundamento e possui apoio da empresa parceira Mentes Notáveis, São Paulo, Brasil.

Procedimentos para tratamento dos dados transformados

A partir da informação coletada sob a forma audiovisual, foi realizado o procedimento de transcrição *ipsis litteris* da aula pelo pesquisador. Deste modo, foram transformados em dados de análise todos os pontos da discussão que corroboraram com as anotações das observações realizadas no diário de campo, caracterizando um primeiro cruzamento *heurístico* entre o observado e o vivenciado. No total foram transcritos noventa e três minutos de fala, as quais foram indicadas pela simbologia [P] aludindo ao pesquisador-formador, [A1] professor participante 1, [A2] professor participante 2 e [A3] professor participante 3.

No que se refere ao tratamento destes pontos selecionados por meio do cruzamento entre o diário de campo e o coletado pela transcrição *ipsis litteris*, foi utilizada a metodologia hermenêutica-fenomenológica, a qual constitui-se como um procedimento de análise a partir da reconstrução em pequenas partes de momentos vivenciados segundo Alvesson e Sköldeberg (2009). Dessa forma, todo momento é formado por pequenas partes, às quais constitui o todo hermenêutico. Ao analisarmos cada parte isoladamente, retornando constantemente ao todo, como num ciclo fechado, teremos um movimento reflexivo constitutivo, chamado pelos autores de *processo alético*. Tal abordagem metodológica caracteriza-se no campo da pesquisa educacional como metodologia reflexiva.

Análise da prática

Conforme mencionado anteriormente, utilizamos como pontos de reflexão para a prática desenvolvida os momentos destacados da transcrição audiovisual da aula sobre *Técnicas de Divisão*, aliado a observações registradas no diário de campo do pesquisador/formador. Inicialmente, cabe destacar que a análise aqui apresentada seguirá a linha cronológica dos pontos tratados durante a aula ministrada para os professores polivalentes participantes, apenas com o intuito de localizarmos nossas reflexões com os pontos discutidos pelos próprios professores participantes.

Desse modo, o tema escolhido para a aula tratava, conforme já mencionado, sobre *Técnicas de Divisão*. Assim, a aula foi iniciada com uma pergunta aberta on-line, no formato de uma nuvem virtual[4] , para todos os sessenta e cinco participantes, acerca do que entendiam por divisão e de quais palavras estavam associadas, diretamente, a este conteúdo. Notadamente, o que mais apareceu - tomando o centro da nuvem virtual - foi a palavra *distribuição*, seguida das palavras multiplicação, inverso, resto e *números inteiros.*

A partir das respostas visualizadas pela nuvem virtual, o professor-formador iniciou um debate acerca da relação direta entre as noções de *distribuição e divisão*. O objetivo deste primeiro momento foi o de promover um *brainstorming* entre os conteúdos sobre divisão que os professores participantes sabiam e conheciam. Após o primeiro questionamento acerca da relação entre as palavras citadas, a professora [A1] comentou o seguinte:

4. A nuvem virtual é um recurso digital no qual o professor pode lançar uma pergunta e os alunos participantes registrarem respostas e/ou palavras isoladas acerca do que lhes foi perguntado. Tal recurso pode ser encontrado no seguinte endereço https://www.mentimeter.com/ e possui uso básico gratuito.

> *"Quando dividimos alguma coisa queremos distribuir, então no exemplo que sempre uso em sala de aula trago a comida, porque isso ajuda muito no entendimento do aluno"*. [A1]

Nota-se neste primeiro trecho destacado pela professora [A1] a relação direta entre quantidades utilizadas no cotidiano de seu aluno e a noção de divisão citada como *conceito*. Assim, uma vez que o objetivo da aula era o de trabalhar as técnicas de divisão, pode-se perceber que, inicialmente, a professora citada compreende a divisão como conceito e não como *procedimento*. Num segundo momento, a professora [A2] intervém na fala da professora [A1] enfatizando:

> *"Dou aula no quarto ano e entramos agora na divisão. Isso é claramente muito complicado para os alunos, pois a apostila já iniciou com o método longo de dividir e muitos nem sabiam ainda multiplicar". [A2]*

Já no trecho destacado da professora [A2] percebemos uma preocupação com relação à divisão como *procedimento*, uma vez que destaca *o como* tal processo foi abordado pela apostila. Além disso, ao enfatizar que muitos de seus alunos não sabiam, ainda, multiplicar nos dá a entender que ela, enquanto docente, tem estabelecida uma sequência de trabalho dos conteúdos, uma vez que coteja com o citado anteriormente neste trabalho acerca dos conhecimentos necessários para se aprender a divisão.
No segundo momento da aula, demos ênfase na técnica abordada para se ensinar a divisão, deixando evidente que antes de se chegar a esse processo o aluno deveria passar pelos conhecimentos destacados na figura 1.

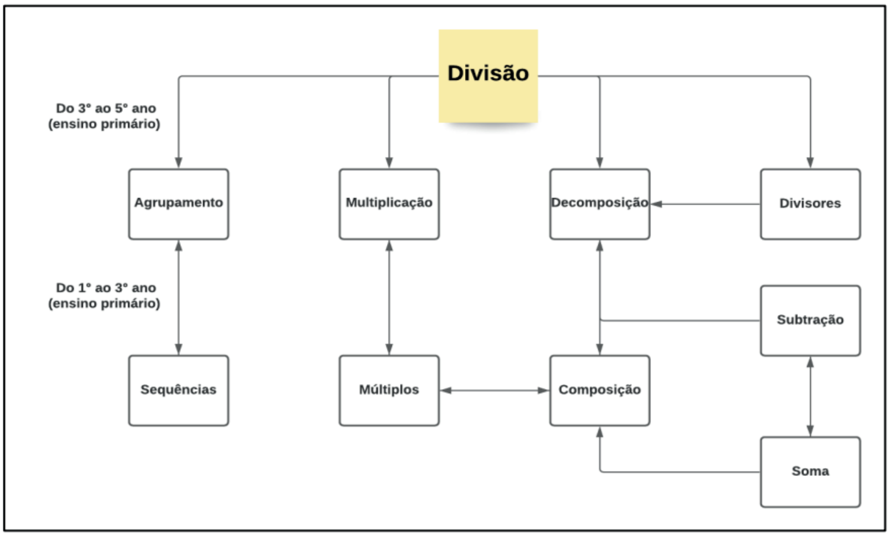


Figura 1. Conhecimentos necessários que antecedem o ensino da divisão.
Fonte: sistematizado

Na figura 1 acima, nota-se a presença de oito conteúdos matemáticos até chegar ao ensino da divisão.

Neste momento, a professora [A3] pediu a palavra e expressou o seguinte:

> *"Eu ensino a divisão com a tabuada do lado, assim quero que meu aluno memorize a tabuada até o dez para facilitar na hora do cálculo. Não sei se teria tempo de seguir com todos esses passos que você [o formador] falou (...)". [A3]*

A fala da professora [A3] apresenta-nos, claramente, uma preocupação puramente tecnicista do ensino da Matemática, destacando apenas o cálculo e o acertar qual é o valor procurado, deixando de lado o fazer sentido para o aluno, conforme nos indica Brousseau (2008). Desta forma, ao enfatizar em seu discurso que ensina a *divisão com a tabuada do lado,* deixa transparecer que o importante para o ensino da divisão é memorizar a tabuada, os produtos entre números. Ademais, conforme nos apresenta a figura 1, a sequência proposta de conhecimentos necessários para se trabalhar a divisão prevê, essencialmente, o trabalho com *múltiplos e divisores*. Então, a tabuada seria uma ferramenta de suporte para o desenvolvimento destes conteúdos e, não o fim em si mesmo para o ensino da divisão.

Outro ponto que cabe destacar e, que se soma ao exposto até aqui, é o fato de que o ensino da Matemática nos primeiros anos da educação primária no Brasil possui, historicamente, um direcionamento para o trabalho das quatro operações da aritmética, o estudo de perímetros, áreas e volumes em geometria e a determinação de sequências simples na álgebra. Para além disso, encontramos dificuldades por parte dos professores em desenvolver os conteúdos mais aprofundados ou, de certo modo, de dar sentido ao que se está estudando naquele ano/período da escolaridade. Tal fato pode ser cotejado com a fala da professora [A3], a qual tratando ainda sobre os conteúdos necessários que antecedem o ensino da divisão, nos diz:

> *"Quando eu estava no magistério[5] , as únicas coisas que aprendi foi como ensinar as quatro operações e algumas coisas de geometria. Agora, mesmo depois de ter feito Pedagogia, ainda tenho muita dificuldade em compreender o modo como se trabalha o pensamento matemático do aluno de hoje". [A3]*

Na fala destacada pela professora [A3] podemos observar a presença de elementos culturais que configuram a chamada *tradicionalidade do ensino*[6], uma vez que aprendi isso então ensinarei assim. Além do mais, a mesma professora manifesta o reconhecimento de possuir dificuldades tanto na apropriação de conteúdos matemáticos, quanto da transposição destes num *saber ensinado* para seus alunos, se seguirmos a interpretação proposta por Chevallard (1991).

5. No Brasil, até 1996, a exigência legal mínima para que um professor pudesse atuar na educação primária era o curso chamado Normal Superior, ou como também pode ser encontrado na literatura, o curso de Magistério. Contudo, após a promulgação da Lei 9.395/96, passou-se a exigir que todos os professores atuantes na educação básica tivessem, no mínimo, a titulação de Licenciatura.

6. No sentido cultural empregue por Benedict (2013), a qual prevê que uma tradição se fundamenta numa sociedade a partir do rearranjo contínuo de determinados comportamentos.

Uma última reflexão oriunda da fala citada pela professora é o fato de confundir *o pensamento matemático do aluno* com *a metodologia mais adequada* para sua aprendizagem. Pois, o primeiro é característico do aluno, mediante o modo como o saber a ensinar transpõe o saber sábio, ainda sob a perspectiva de Chevallard (1991). Já o segundo, por sua vez, trata-se especificamente dos procedimentos por meio dos quais esse saber sábio se deslocará para o saber ensinado, isto é, de *método*. Por tal motivo acreditamos que investigar as formas como os professores polivalentes concebem a noção de método de ensino e os meios por meio dos quais pensam empregá-los ajudar-nos-ia a constituir melhores condições para a aprendizagem da Matemática na educação primária.
No terceiro momento da aula foram apresentadas para os professores participantes as técnicas sugeridas para o ensino da divisão. A figura 2 traz, de modo resumido, tais técnicas.

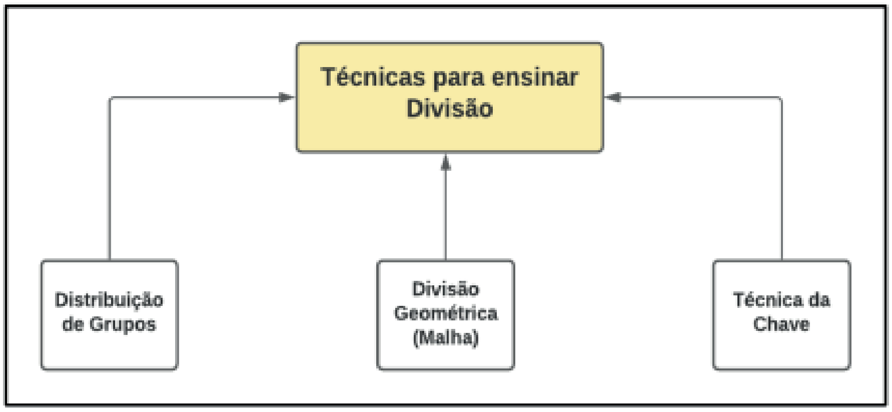


Figura 2. Técnicas apresentadas aos professores durante a aula.
Fonte: sistematizado pelo autor.

A primeira técnica tratada, *Distribuição de Grupos*, trouxe para a discussão a possibilidade de se ensinar a divisão por meio da reorganização de quantidades em grupos, partindo de números/quantidades pequenas para valores maiores. Esta técnica é a mais simples e permite ao aluno contextualizá-la com sua realidade, utilizando-se de objetos e/ou alimentos que fazem parte do seu cotidiano. As recomendações sugeridas para os professores durante a aula sobre esta técnica foram: (i) aumentar os grupos e as quantidades por níveis, (ii) utilizar apenas números inteiros positivos, (iii) trabalhar com possibilidades de divisão exata e (iv) evitar divisão de coisas impossíveis, tais como um brinquedo para duas crianças etc.
A segunda técnica apresentada, *Divisão Geométrica* (na malha), foi a que mais causou discussão durante a exposição. Tal fato deveu-se, essencialmente, porque a malha quadriculada é recorrentemente evitada no ensino de Matemática nos primeiros anos. Basicamente, o trabalho com áreas foi apresentado por alguns professores como possível, apenas, nos conteúdos de Geometria. Isso fica evidente com a fala da professora [A2]:

> *“Olha professor eu até acho legal usar a malha e tal, mas isso eu utilizo na Geometria, quando trabalho áreas de triângulos. Agora, na divisão, não sei se ficaria claro pro aluno”. [A2]*

Em observações realizadas durante o curso de formação foi constatado que o uso da malha quadriculada para se trabalhar conteúdos diversos da Matemática, no universo de professores participantes, era realmente raro. Tal fato levou-nos a propor uma questão para investigação como desdobramento destas observações. Entretanto, ao apresentarmos a técnica referida salientamos a necessidade de se utilizar áreas exatas, como de quadrados. Posteriormente, que fizessem uso da questão Quantos grupos de X quadrados menores podemos formar? Como norteadora às atividades subsequentes. Pois, na medida em que trabalhamos o visual aliado ao operacional, a criança dá sentido ao conhecimento matemático que está construindo. A Geometria deve fazer parte dos estudos numéricos, e vice-versa.
Finalmente, sobre a Técnica da Chave, apresentamos o procedimento destacado pela figura 3.

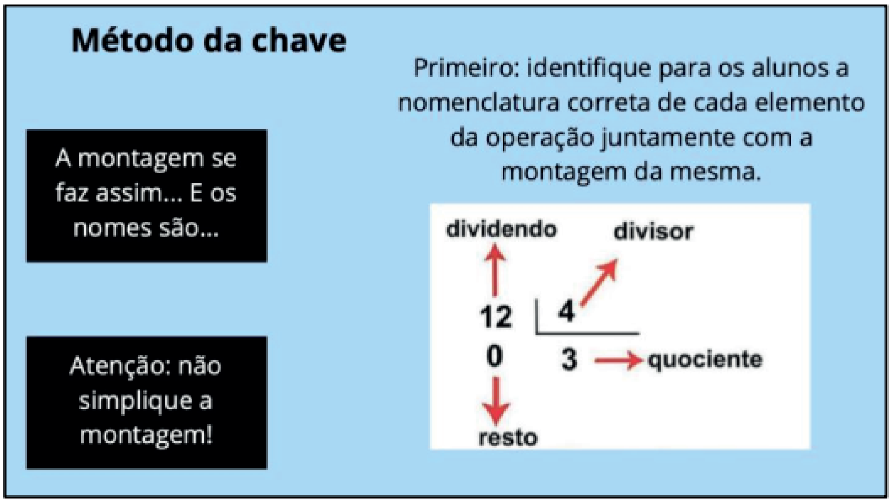


Figura 3. Técnica da Chave apresentada aos professores durante a aula.
Fonte: sistematizado pelo autor.

Conforme destaca a figura 3, inicialmente, foi recomendado para os professores participantes iniciarem pela nomenclatura, dando sentido às coisas que os alunos iriam encontrar. Este ponto coaduna com o proposto por Brousseau (2008) acerca da díade forma/sentido e da construção dos significados matemáticos construídos pelos alunos. Uma vez que a linguagem está clara, os caminhos para se trabalhar a aprendizagem acerca daquele conteúdo específico estarão sobremaneira abertos. Num segundo momento, foi salientado que para o início da utilização da *Técnica das Chaves*, muitas vezes chamado de *Método das Chaves* ou *Forma Longa*, que a simplificação da montagem não seria adequada, uma vez que configura um *pular etapas* e, assim, dificultaria a

construção de sentidos sobre a forma estudada pelo aluno.
Assim sendo, a aula foi finalizada com uma breve explicação de cada uma das técnicas vistas, dando destaque para a necessidade de atenção por parte do professor dos conhecimentos necessários previstos e apresentados neste trabalho pela figura 1.

Considerações finais

Buscamos com este trabalho apresentar uma experiência vivenciada com professores pedagogos do Brasil durante um curso de formação continuada específico para Educação Matemática. Como fonte de informações selecionamos uma aula desenvolvida durante o curso, sobre técnicas de divisão, e as observações destacadas no diário do campo do pesquisador-formador. Desta forma, por meio da transcrição *ipsis litteris* do audiovisual gravado, cotejado com anotações do diário de campo, foi-nos possível selecionar alguns trechos nos quais desenvolvemos algumas reflexões sobre a prática vivenciada, utilizando-nos do ciclo hermenêutico destacado por Alvesson e Sköldeberg (2009). Dos pontos destacados, realizamos o processo alético acerca das partes em interação com o todo, levando-nos às análises apresentadas na seção anterior do trabalho em pauta.
Ademais, pudemos observar que durante a apresentação dos conhecimentos iniciais necessários para a aprendizagem da divisão por alunos dos primeiros anos da educação primária algumas professoras manifestaram suas posições mediante o entendimento da divisão, tanto como conceito quando procedimento. Assim, após as discussões, puderam compreender que não se tratava de estabelecermos pré-requisitos para que o aluno aprenda divisão, mas sim de saber quais são os conhecimentos necessários para que aquela seja efetivamente aprendida.
Num segundo momento pudemos observar que os aspectos culturais decorrentes da tradicionalidade da prática de ensino vivenciada foram manifestados mediante a apresentação das técnicas de ensino da divisão sugeridas para o referido curso de formação. Deste modo, por meio dos trechos selecionados e apresentados, observamos que o ensino da divisão estava totalmente ligado ao procedimento em si e, intimamente relacionado ao memorizar a *tabuada*.
Posteriormente às apresentações das técnicas propriamente ditas, pudemos constatar que houve compreensão por parte das professoras participantes daquela aula específica uma vez que manifestaram que foi *uma surpresa saber* [professora A1] que para ensinar uma das quatro operações básicas da Matemática seria necessário trabalhar conhecimentos outros que, muitas vezes, são esquecidos ou deixados de lado durante o processo de ensino.
Finalmente, como desdobramento do presente relato ficamos com alguns questionamentos acerca do que os professores polivalentes estudados compreendem por pensamento e forma, no que diz respeito ao conteúdo ensinado/aprendido, e quais os aspectos que influenciam a não utilização da malha quadriculada para o ensino da Matemática. Tais questionamentos integrarão o projeto de pesquisa citado, do qual este trabalho é apenas um recorte, e buscará contribuir tanto para a

evolução do ensino da Matemática na educação básica quanto na geração de conhecimento para a área de pesquisa em Educação Matemática.

Referências bibliográficas

Alvesson, M & Sköldberg, K. (2009). *Reflexive Methodology: new vistas for qualitative research.* Sage Publications.

Benedict, R. (2013). *Padrões de Cultura.* Trad. Ricardo Rosenbusch.Editora Vozes, Brasil. (1996). Lei n° 9.354 de 20 de dezembro de 1996. Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 20 abr 2021. Brasil. (2012). Ministério da Saúde do

Brasil. Conselho Nacional de Saúde. Resolução n° 466 de 12 de dezembro de 2012 / Disponível em https://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/cns/2013/res0466_12_12_2012.html. Acesso em: 20 abr 2021.

Brasil. (2016). Ministério da Saúde do Brasil. Conselho Nacional de Saúde. Resolução n° 510 de 7 de abril de 2016. Disponível em https://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/cns/2016/res0510_07_04_2016.html. Acesso em: 20 abr 2021. Brasil. (2018). Ministério da Educação do Brasil / Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase. Acesso em: 20 abr 2021.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Trad. Camila Bógea. Editora Ática.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble. La Pensee Sauvage Éditions.

Coll, C et all. (1992). *Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimentos y actitudes*. Aula XXI. Santillana.

De La Puente, M. (1978). *O ensino centrado no estudante.* Cortez & Moraes LTDA.

Julio, R., & Silva, G. H. G. S. (2018). Compreendendo a formação matemática de futuros pedagogos por meio de narrativas. *Bolema, 62* (32), 1012-1029.

Mometti, C. (2019). Construindo experiências em um curso de formação de professores dos anos iniciais: o ensino da Matemática em foco. *Anais do I Congresso Internacional Educat*, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. 282-291.

Mometti, C. (2020a). Experiência de formação continuada para polivalentes: o sistema de numeração decimal na prática pedagógica. *Anais do XIV Encontro Paulista de Educação Matemática.* São Paulo, Brasil. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1EeTFJIySPBODpZoYDH1pOC07iyYuGu9X/vie w. Acesso em: 18 abr 2021.

Mometti, C. (2020b). A escola digital: repensando a prática pedagógica na Educação Matemática. *Anais do VIII Encontro Brasiliense de Educação Matemática*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Brasília, Brasil. Disponível em https://www.even3.com.br/anais/viiiebrem/. Acesso em: 18 abr 2021.

Ortega, E. M, & Santos, V. M. (2018). A relação dos alunos do curso de pedagogia com o conhecimento matemático e seu ensino: um estudo longitudinal. *Revista Holos, 32* (2), 207-224.

Perrenoud, P. (1997). *Construire des competences des l'école. Pratiques et enjeux pedagogiques.* Paris. ESF

O conhecimento de futuras professoras de 2.º ciclo sobre o pensamento matemático dos alunos numa proposta de trabalho interdisciplinar com as ciências

Knowledge of preservice teachers from grades 5-6 about students' thinking in mathematics in an interdisciplinary work proposal with sciences

Neusa Branco[1], Bento Cavadas[2]

Resumo: Esta comunicação centra-se no estudo do conhecimento de futuras professoras de Matemática e Ciências Naturais do 2.º ciclo sobre o pensamento dos alunos em matemática no âmbito da concretização de uma proposta de trabalho interdisciplinar, designada Abelhas STEM. Participam no estudo quatro futuras professoras que adaptaram, planificaram e concretizaram essa proposta de trabalho durante o seu estágio com alunos de 6.º ano. Os dados foram recolhidos por meio de notas de campo de observações das aulas lecionadas pelas professoras estagiárias, planificações e reflexões escritas das professoras estagiárias sobre a sua prática. Os resultados evidenciam que a proposta de trabalho interdisciplinar constituiu um contexto favorável para as futuras professoras expressarem o conhecimento sobre o pensamento dos alunos em matemática. As professoras estagiárias evidenciam estar atentas ao pensamento dos alunos antecipando erros e dificuldades na resolução das tarefas e considerando os conhecimentos prévios dos alunos. Usam estratégias diversificadas para envolver os alunos na aprendizagem e promover o seu pensamento. Destaca-se que as professoras estagiárias evidenciam componentes específicas do conhecimento sobre o pensamento dos alunos que decorrem da proposta interdisciplinar, expressando conexões entre as ideias matemáticas e o contexto das ciências.

Palavras-chave: ciências; conhecimento sobre o pensamento do aluno; formação inicial de professores, interdisciplinaridade; matemática.

Abstract: *The focus of the communication is the study of mathematics and science (5th and 6th grades) preservice teachers' knowledge of stu-*

1. Instituto Politécnico de Santarém, Escola Superior de Educação, Portugal; Pólo Literacia Digital e Inclusão Social do CIAC, Portugal,
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt
2. Instituto Politécnico de Santarém, Escola Superior de Educação, Portugal; Universidade Lusófona, CeiED, Portugal,
bento.cavadas@ese.ipsantarem.pt

dents thinking in the context of an implementation of an interdisciplinary proposal - STEM Bees. The participants are four preservice teachers who adapted, planed and implemented the work proposal during their internship with 6th grade students. The data collection methods were field notes of observations of lessons taught by the preservice teachers and the preservice teachers lesson plans and written reflections about the practice. The results show that the interdisciplinary work proposal was a pertinent context for the preservice teachers express the knowledge about students' thinking in mathematics. Preservice teachers gave attention to the students' thinking, anticipating errors and difficulties in solving tasks and considering the students previous knowledge. Diversified strategies for involving students in learning and promoting their mathematical thinking were used. The preservice teachers expressed components of knowledge about students' thinking that arise specifically from the interdisciplinary proposal, expressing connections between mathematical ideas and the context of science.

Keywords: *science; knowledge about students' thinking; preservice teacher education, interdisciplinarity; mathematics.*

Introdução

As orientações curriculares preconizadas pelo Decreto-Lei n.º 55/2018 reforçam a importância do trabalho interdisciplinar. No entanto, existem dificuldades na sua concretização que podem estar relacionadas com o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático dos professores, em particular relativamente às disciplinas das quais não são especialistas (Koirala & Bowman, 2003). Uma forma de obviar essas dificuldades e de promover a integração é identificar propostas de trabalho comuns que vão ao encontro dos objetivos de aprendizagens das duas áreas, as quais podem ser concretizadas em sala de aula através de um trabalho colaborativo entre os professores de Matemática e de Ciências (Cavadas & Mestrinho, 2019). Estas duas áreas, particularmente no 2.º ciclo, são bastante propícias ao estabelecimento de ligações entre si porque, entre outros aspetos, podem ser lecionadas pelo mesmo professor.

Este trabalho tem como principal objetivo identificar o conhecimento didático de futuras professoras de 2.º ciclo no que respeita ao pensamento dos alunos em matemática num contexto interdisciplinar envolvendo as disciplinas de Matemática e Ciências Naturais. Neste sentido, aborda a seguinte questão de investigação: Que aspetos do conhecimento sobre o pensamento dos alunos em matemática evidenciam futuras professoras no contexto da implementação de uma proposta de trabalho interdisciplinar com as ciências, para alunos do 6.º ano?

Conhecimento didático dos professores de matemática

O conhecimento aprofundado do conteúdo matemático é indispensável para qualquer professor de matemática (Ponte, 2012) e deve ser reforçado na sua formação inicial. Contudo, a formação inicial também deve contribuir para o desenvolvimento do conhecimento didático dos futuros professores de matemática e ciências do 2.º ciclo através das experiências que proporciona nas diversas unidades curriculares e da articulação com a prática.

É na prática, com a experiência em contexto escolar, que o conhecimento didático do professor se desenvolve em maior profundidade através da integração e reelaboração de conhecimentos sobre o processo educativo. O conhecimento da prática letiva é, pois, a componente central do conhecimento didático do professor, que integra também o conhecimento da matemática, o conhecimento do currículo e o conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem (Ponte, 2012). Quanto a esta última dimensão do conhecimento didático do professor, o conhecimento sobre o modo como os alunos aprendem (Ponte & Oliveira, 2002) e o conhecimento de dificuldades e erros apresentados pelos alunos e de estratégias para estes os ultrapassarem (Ponte & Oliveira, 2002; Kilic, 2010; Ma'rufi et al., 2018) deve ser contemplado na sua formação. O conhecimento do professor sobre o pensamento do aluno em matemática (An et al., 2004), sendo o foco deste trabalho, é a temática desenvolvida em seguida.

Conhecimento sobre o pensamento do aluno em matemática

Analisar de modo aprofundado o conhecimento sobre o pensamento dos alunos é bastante relevante para a educação matemática e para a prática dos professores de matemática (Celik & Güzel, 2017). De facto, é importante que os professores conheçam resultados de investigação sobre o pensamento dos alunos pois permite-lhes compreender de modo mais detalhado o desempenho destes (Carpenter et al., 1989) e, consequentemente, os aspetos a integrar na sua prática (An et al., 2004; Carpenter et al., 1989). Ainda que existam diferentes aspetos associados ao conhecimento sobre o pensamento do aluno, o presente trabalho tem por base uma adaptação das quatro dimensões e das suas componentes essenciais apresentadas por An et al. (2004) (ver Tabela 2).

As componentes do conhecimento sobre o pensamento dos alunos devem ser um elemento importante a considerar pelos professores de matemática no momento de planificação (An et al., 2004; Celik & Güzel, 2017). Estes devem ter presentes essas componentes e desenvolver um conhecimento aprofundado sobre elas, considerando-as nos planos de aulas. Por exemplo, os futuros professores devem envolver os alunos em atividades focadas para a promoção do seu pensamento matemático, equilibrando o uso de materiais manipuláveis e o desenvolvimento de procedimentos (An et al., 2004). A seleção de tarefas e a prática do professor na dinamização dessas tarefas devem possibilitar aos alunos a compreensão de conceitos e procedimentos, o uso de diferentes representações e o estabelecimento de conexões dentro da matemática e com outras áreas (Ponte, 2005). O ensino da matemática também deve promover a construção de ideias matemáticas nos alunos, articulando os seus conhecimentos prévios e a representação das ideias por modelos concretos com novos conhecimentos, bem como apoiar os alunos na clarificação dos seus erros por meio do questionamento ou de novas tarefas (An et al., 2004). As tarefas devem, por isso, ser criteriosamente selecionadas pelo professor para proporcionarem um percurso de aprendizagem coerente e promoverem a compreensão das ideias fundamentais pelos alunos em matemática (Ponte, 2005). Um conhecimento aprofundado do professor sobre o pensamento dos alunos tem também influência no sucesso da concretização dos objetivos de aprendizagem (Speer & Wadner, 2009).

Um aspeto do conhecimento do pensamento do aluno que tem sido foco de diversas investigações é o conhecimento sobre os seus erros matemáticos e as razões que causam essas dificuldades (Johnson, 2017; Kilic, 2010). Por essa razão, Ma'rufi et al. (2018) alertam que o professor deve ter conhecimento dos erros dos alunos relativamente ao conteúdo a ensinar para que na sua prática possa adotar a abordagem mais apropriada. Além disso, deve saber quais podem ser os conceitos matemáticos de mais difícil compreensão pelos alunos (Kilic, 2010).

Algumas investigações mostram que os futuros professores têm dificuldade em identificar erros dos alunos e em ajudá-los a ultrapassar ou a reduzir os seus erros (p.e. Kilic, 2010; Lo, 2020; Ma'rufi et al., 2018). Em ciências, o estudo realizado por Gomez-Zwiep (2008) também mostra que, embora os professores de ciências do ensino básico tenham consciência das conceções erradas dos alunos, muitas vezes não compreendem como se desenvolvem e qual é o seu impacto no seu processo de ensino. Quanto à matemática, no estudo realizado por Lo (2020) foi reduzido o número de futuros professores que demonstrou um conhecimento sólido dos erros dos alunos, evidenciando um escasso conhecimento conceptual para identificar e fundamentar os erros. Também Kilic (2010) identifica no seu estudo um conhecimento dos futuros professores essencialmente processual e uma dificuldade em fazer a transposição didática do que aprenderam durante o curso e das suas experiências de ensino para tarefas específicas sobre as dificuldades e erros dos alunos em matemática. Paralelamente, os resultados obtidos por Ma'rufi et al. (2018) mostram uma escassa capacidade dos professores em lidar com as dificuldades ou os erros dos alunos em matemática, adotando como estratégia explicar novamente o conceito ou resolver o procedimento não compreendido.

Como modo de ultrapassar as dificuldades dos futuros professores quanto à análise de erros dos alunos, Lo (2020) sugere que estes desenvolvam uma compreensão profunda do conteúdo e que reflitam mais antes e depois da sua prática de ensino em contexto de estágio.

Metodologia de investigação

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa com design de estudo de caso (ver Figura 1). O caso é o grupo de quatro professoras estagiárias (PE) que frequentaram o 2.º ano do Mestrado em

Ensino do 1.º ciclo e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo na Escola Superior de Educação de Santarém. O estágio foi realizado em duas escolas (Escola A e Escola B) em pares (PEA1 e PEA2; PEB1 e PEB2), e supervisionado pelos professores cooperantes dessas escolas e dois professores da instituição de ensino superior de formação de professores, sendo uma professora de Didática da Matemática e um professor de Didática das Ciências. Ainda que envolvendo escolas e turmas distintas, todo o percurso formativo foi vivenciado de modo colaborativo pelas professoras estagiárias, participando em sessões de planificação ou de reflexão conjuntas, lecionando ou observando as aulas entre si, pelo que constituem um único caso.

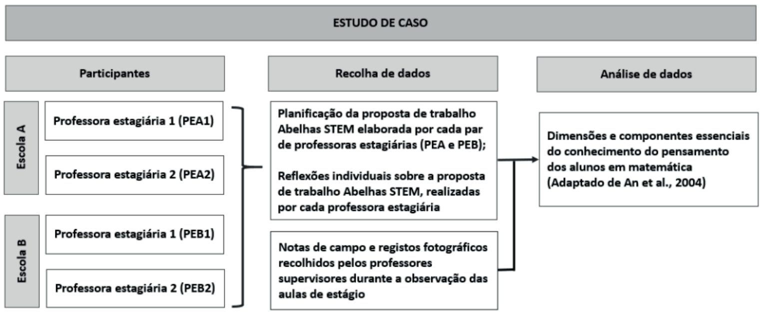


Figura 1. Design da investigação

Nas unidades curriculares de Didática da Matemática e de Didática das Ciências Físicas e Naturais do 2.º ano do curso de mestrado, as quatro participantes realizaram a proposta de trabalho Abelhas STEM. Partindo das experiências que vivenciaram nessa proposta, as professoras estagiárias selecionaram e adaptaram tarefas e recursos digitais e manipuláveis, tendo em conta os objetivos de aprendizagem da Matemática e das Ciências Naturais do 2.º ciclo. Este estudo centra-se no conhecimento didático em matemática das quatro professoras estagiárias a partir da planificação e da concretização da proposta de trabalho interdisciplinar Abelhas STEM com alunos de 6.º ano bem como da reflexão sobre a sua prática.

Proposta de trabalho interdisciplinar

A proposta de trabalho Abelhas STEM apresentada nesta secção é a adaptada e levada à prática pelas professoras estagiárias. A proposta enquadra-se no Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 15 – Proteger a vida terrestre (UNESCO, 2017) e possui um enfoque na proteção da biodiversidade. Foram selecionadas as abelhas pelo seu inquestionável papel na sustentabilidade dos ecossistemas. A proposta de trabalho explora as razões da forma hexagonal dos alvéolos que constituem os favos e outros aspetos relacionados com anatomia e comportamento social das abelhas, em interdisciplinaridade entre a Matemática (Mat.) e as Ciências Naturais (CN). Esta proposta de trabalho colocou os alunos perante um problema desafiante que visa o uso de modelos, de recursos manipuláveis e digitais para justificar a eficiência da estrutura do alvéolo e da sua organização em favos, como mostra a figura 2.

Figura 2. Favo.

A tabela 1 resume a sequência didática da proposta de trabalho, estruturada em várias tarefas, organizadas num guião para os alunos, envolvendo duas aulas de CN e três aulas de Mat., com duração de 50 minutos cada.

Tabela 1

Sequência didática da proposta de trabalho Abelhas STEM

Tarefas	Momentos
CN | Tarefa 1: Explorar as abelhas e o ambiente	Visualização e discussão de um vídeo da UNESCO sobre o desenvolvimento sustentável.
CN | Tarefa 2: Conhecer as abelhas! – Parte 1	Registo das conceções prévias sobre as abelhas e das suas funções na natureza. Estudo das características anatómicas das abelhas, dos diferentes papéis que desempenham e das suas principais funções nos ecossistemas.
CN | Tarefa 3: Explicar a polinização	Visualização e discussão de um vídeo sobre o papel das abelhas na manutenção da biodiversidade.
CN | Tarefa 4: Conhecer as abelhas! - Parte 2	Reflexão e registo das características anatómicas das abelhas, dos diferentes papéis que desempenham e das suas principais funções nos ecossistemas; Comparação entre esse registo e o registo realizado na tarefa 2.
Mat. | Tarefa 5: Explorar a forma dos alvéolos e explicar a pavimentação	Formulação e teste de hipóteses sobre a forma da base ideal dos alvéolos, sabendo à partida que têm a forma de polígonos regulares e têm de se justapor no plano.
Mat. | Tarefa 6: Investigar a forma dos alvéolos	Comparação do perímetro e da área de polígonos regulares que pavimentam o plano, de modo a identificar o polígono mais eficaz, sabendo que para a produção da cera, as abelhas gastam muita energia e, consequentemente, consomem mel.
Mat. | Tarefa 7: Discutir resultados	Análise de vantagens da forma hexagonal dos alvéolos, com a exploração da disposição dos hexágonos regulares, em papel isométrico.

Recolha e análise de dados

A recolha de dados foi realizada através: i) de notas de campo e registos fotográficos recolhidos pelos professores supervisores durante a observação das aulas das PE; ii) da planificação da proposta de trabalho elaborada por cada par de professoras estagiárias (PEA e PEB); iii) reflexões individuais escritas das professoras estagiárias sobre a proposta de trabalho Abelhas STEM. A análise de conteúdo dos dados visou enquadrá-los nas dimensões e componentes apresentados por An et al. (2004) (ver Tabela 2) para identificar que aspetos evidenciam as professoras estagiárias do conhecimento didático sobre o pensamento dos alunos em matemática. Contudo, tendo em conta que o quadro de análise original proposto por An et al. (2004) estava principalmente associado a propostas de trabalho com frações e dada a natureza interdisciplinar da presente proposta de trabalho, emergiram aspetos específicos da análise interpretativa dos dados que foram integrados na proposta original. A alteração da designação das dimensões e as novas componentes estão destacadas a negrito na tabela 2.

Tabela 2

Dimensões e componentes essenciais do conhecimento dos professores sobre o pensamento dos alunos em matemática para a proposta de trabalho Abelhas STEM (Adaptado de An et al., 2004)

Dimensões	**Componentes essenciais**
Antecipar dificuldades e abordar os erros dos alunos	**1. Antecipar dificuldades dos alunos** 2. Identificar os erros dos alunos 3. Usar questões ou tarefas para corrigir esses erros 4. Usar regras e procedimentos 5. Desenhar imagens ou tabelas 6. Estabelecer conexões com modelos concretos
Envolver os alunos na aprendizagem da matemática	1. Atividade manipulável 2. Estabelecer conexões com modelos concretos 3. Usar uma única representação 4. Usar mais do que uma representação **5. Dar exemplos articulados com o contexto de outras áreas do saber** 6. Conexão com conhecimentos prévios
Promover a aprendizagem a partir do conhecimento dos alunos em matemática	1. Estabelecer conexões com conhecimentos prévios 2. Usar conceitos ou definições 3. Estabelecer conexões com modelos concretos Usar regras e procedimentos
Promover o pensamento dos alunos sobre matemática	1. Proporcionar atividades para focar o pensamento dos alunos 2. Usar questões ou tarefas para ajudar os alunos a progredir nas suas ideias **3. Fomentar a formulação e o teste de conjeturas** 4. Usar estimativas **5. Recorrer a representações para sustentar conclusões** 6. Proporcionar oportunidades para o aluno pensar e responder **com recurso a diferentes representações e estratégias** **7. Estabelecer conexões entre ideias de matemática e de outras áreas do saber**

Apresentação de resultados

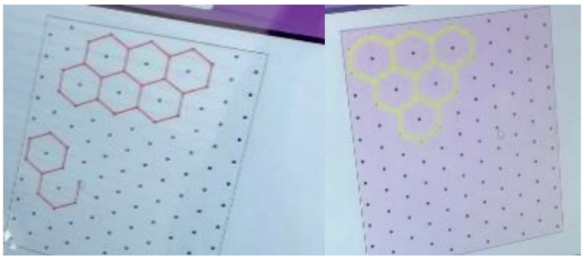
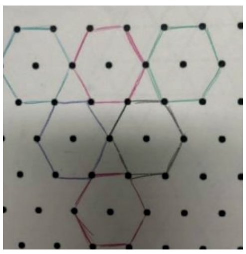
Os resultados do conhecimento sobre o pensamento dos alunos em matemática expressado pelas professoras estagiárias emergem da planificação, concretização e reflexão sobre a proposta de trabalho interdisciplinar Abelhas STEM. Os exemplos apresentados de seguida são respeitantes às diversas tarefas e procuram não repetir ideias em cada componente, ainda que possam ter surgido ideias semelhantes em mais do que uma professora estagiária. A negrito destacam-se as ideias principais representativas de cada componente.

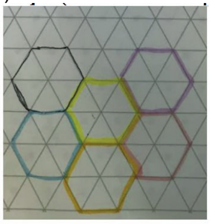
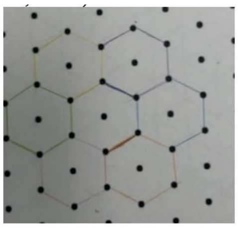
Antecipar dificuldades e abordar os erros dos alunos

As professoras estagiárias antecipam dificuldades, identificam erros em matemática e definem ou aplicam estratégias para apoiar os alunos quando os manifestaram (ver Tabela 3).

Tabela 3

Exemplos da dimensão “Antecipar dificuldades e abordar os erros dos alunos”

Componentes essenciais	**Exemplos**
Antecipar dificuldades dos alunos	“Uma das dificuldades que os alunos podem apresentar é na **identificação da fórmula da área que corresponde a cada um desses polígonos**.” (Plano de Aula, PEB) “**Os alunos podem ter dificuldade em encontrar a solução que corresponde ao solicitado** [Tarefa 7]. Contudo, eles não devem desistir, devem ser persistentes e apelar à sua capacidade de visualização e de estratégia. Podem começar por surgir algumas soluções como as seguintes [Figura 3]:” (Plano de Aula PEB)  Figura 3. Antecipação de resoluções na Tarefa 7 (Fotografias integrada no Plano de Aula das PEB).
Conhecer os erros dos alunos	“Durante a exploração do modelo de pavimentação, foram **representadas algumas disposições que não servem para pavimentar** [Figura 4]” (Reflexão Individual, PEA1)  Figura 4. Solução errada de um aluno na Tarefa 7 (Figura integrada na Reflexão individual de PEA1).

Usar questões ou tarefas para corrigir esses erros	“Em soluções muito próximas [Figura 5] da que se pretendia que os alunos descobrissem [Figura 6], questionavam os alunos se conseguiriam fazer alguma alteração para obterem uma superfície de hexágonos com uma área superior a 6 [usando apenas 6 elásticos].” (Notas de Campo, Tarefa 7, PEA)   Figura 5. Solução de um aluno próxima da pretendida na Tarefa 7 (Fotografia recolhida na aula de Mat., PEA). Figura 6. Solução final de um aluno na Tarefa 7 (Fotografia recolhida na aula de Mat., PEA).
Usar regras e procedimentos	“**Na escolha da fórmula da área dos polígonos, existiram grupos que não souberam responder de forma correta.** Assim, quando me apercebi que todos os grupos tinham concluído esta tarefa realizei a correção oral no quadro.” (Reflexão Individual, PEB2)
Estabelecer conexões com modelos concretos	“**Na sequência das dificuldades sobre descobrir que forma regular poderia ter a base aberta dos alvéolos, a professora estagiária exemplifica com *polydrons*** e esclarece que «as disposições dos polígonos têm de ser apenas com polígonos iguais»; «não são permitidas disposições no espaço, apenas no plano»; e «ao se dispor os polígonos, não podemos ter espaços vazios entre eles».” (Notas de Campo, Tarefa 5, PEA)

Envolver os alunos na aprendizagem da matemática

O conhecimento das professoras estagiárias evidencia-se nas suas reflexões relativamente a algumas das componentes do envolvimento dos alunos na aprendizagem da Matemática mais significativas nesta proposta de trabalho (ver Tabela 4).

Tabela 4.
Exemplos da dimensão “Envolver os alunos na aprendizagem da matemática”

Componentes essenciais	**Exemplos**
Atividade manipulável	“**Os alunos estavam interessados nesta atividade pois perceberam**, quando entraram na sala de aula, **que iam trabalhar com materiais que não é frequente usarem no dia-a-dia**” (Reflexão individual, PEB2)

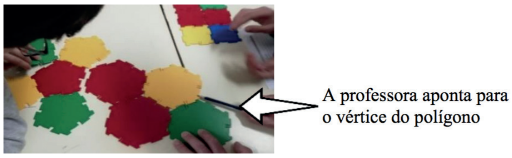
Estabelecer conexões com modelos concretos	Foi solicitado aos alunos que "**Explorem o material didático [*polydrons*], de forma a entender que polígonos regulares permitem elaborar pavimentações**" (Reflexão individual, PEB1)
Usar mais do que uma representação	"Teriam de descobrir que com seis hexágonos pode-se construir sete, em que o sétimo hexágono é constituído pelos lados dos demais . . . **[Além do papel isométrico] Esta exploração foi apoiada pelas novas tecnologias, mais concretamente o GeoBoard.** Nesta aula, verificou-se um entusiasmo fora do normal, alicerçado por uma dinâmica desafiadora. (Reflexão Individual, PEB1)
Dar exemplos articulados com o contexto de outras áreas do saber	"**As estagiárias foram fazendo a analogia dos hexágonos com os favos de mel**, mostrando a poupança de energia por parte das abelhas." (Reflexão Individual, PEB1)

Promover a aprendizagem a partir do conhecimento dos alunos em matemática

A tabela 5 apresenta exemplos do conhecimento das futuras professoras sobre a promoção da aprendizagem a partir do conhecimento dos alunos em matemática.

Tabela 5.
Exemplos da dimensão "Promover a aprendizagem a partir do conhecimento dos alunos em matemática"

Componentes essenciais	**Exemplos**
Estabelecer conexões com conhecimentos prévios	Para pavimentar com polígonos regulares, os alunos: "Devem procurar, **recorrendo aos seus conhecimentos prévios de matemática** relativos às amplitudes dos ângulos internos dos polígonos, verificar que esse valor tem de ser divisor de 360 (amplitude de um ângulo giro), ou seja, a soma dos ângulos internos em torno de um ponto tem de ser um ângulo giro." (Plano de Aula, PEB)
Usar conceitos ou definições	"Facilmente se percebeu que o pentágono não serviu para pavimentar, no entanto surgiram dificuldades na justificação desse facto. Contando com a ajuda da professora estagiária, foram dadas pistas relativas à amplitude dos ângulos internos dos vários polígonos e como isso afetaria o ângulo formado no vértice comum, **tendo em conta a soma dos mesmos ter de ser 360º**." (Reflexão individual, PEA1)
Estabelecer conexões com modelos concretos	"Recorrem ao **conhecimento dos alunos sobre ângulos internos dos polígonos e ao material manipulável** [Figura 7] para apoiar os alunos a justificar os resultados obtidos." (Notas de Campo, Tarefa 5, PEA)

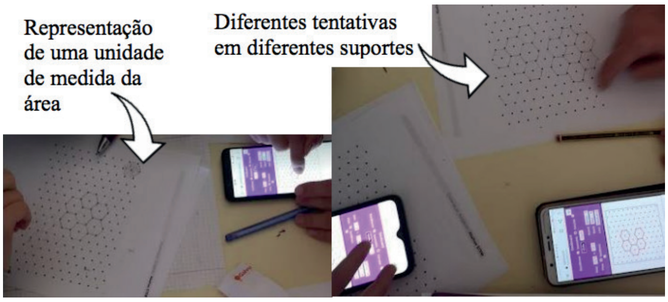
	 Figura 7. Material manipulável usado na tarefa 5 (Fotografia recolhida na aula de Mat., PEA).
Usar regras e procedimentos	“. . . tinham que **relembrar as fórmulas para determinar as áreas de um triângulo, de um quadrado e de um hexágono regular.**” (Reflexão Individual, PEB1)

Promover o pensamento dos alunos sobre matemática

A tabela 6 apresenta exemplos de práticas das professoras estagiárias nas diversas componentes relativas à promoção do pensamentodos alunos sobre matemática.

Tabela 6.
Exemplos da dimensão “Promover o pensamento dos alunos sobre matemática”

Componentes essenciais	**Exemplos**
Proporcionar atividades para focar o pensamento dos alunos	“**Com recurso a *polydrons*, os alunos procederam à simulação de diversas hipóteses possíveis para formar a base dos alvéolos**, sabendo-se, à partida, que as mesmas seriam compostas por polígonos regulares e teriam de se justapor . . . **Só as formas que fossem capazes de se ligar, sem que sobrassem espaços vazios, poderiam servir de base dos alvéolos.**” (Reflexão individual, PEA1)
Usar questões ou tarefas para ajudar os alunos a progredir nas suas ideias	“**[Os alunos foram] questionados novamente:** “então e o que é que permite que a soma dos ângulos que estão em torno desse ponto seja de 360º?” **Com estas questões os estudantes começaram a organizar as ideias**, compreendendo que a amplitude do ângulo interno do polígono, que está em torno do ponto, tem de ser múltipla de 360º.” (Reflexão Individual, PEA2)
Fomentar a formulação e o teste de conjeturas	“Durante a fase *Investigar a forma dos alvéolos*, a maioria dos alunos afirmou, sem hesitar, que seria o hexágono, por terem, na sua memória visual, uma imagem de um favo de mel. Ainda assim, reforçou-se a ideia e **a importância de se verificar/sustentar essa ideia com recurso ao cálculo da área para se perceber a pertinência dessa forma.**” (Reflexão Individual, PEA1)
Recorrer a representações para sustentar conclusões	“**O recurso ao material manipulável revelou-se adequado e imprescindível para os alunos terem a perceção visual dos polígonos regulares capazes e não capazes de pavimentar**.” (Reflexão individual, PEA1)

Proporcionar oportunidades para o aluno pensar e responder com recurso a diferentes reprsentações e estratégias	“Alguns grupos afirmavam que área seria sempre de 6 cm^2, mas, **à medida que iam experimentado** [Figura 8] **e com algumas dicas** . . . os alunos aproximavam-se cada vez mais da solução pretendida.” (Reflexão individual, PEB2)  Figura 8. Representações dos alunos na Tarefa 7 (Fotografias recolhidas na aula de Mat., PEB).
Estabelecer conexões entre ideias de matemática e de outras áreas do saber	“A terceira aula tinha o intuito dos alunos chegarem à conclusão que, **dos polígonos que pavimentam o plano, tendo todos o mesmo perímetro, o hexágono é o polígono que apresenta maior área e, desta forma, é mais rentável para as abelhas, pois com a mesma quantidade de cera constroem alvéolos com a maior capacidade possível.**” (Reflexão individual, PEB1)

Discussão e implicações para a formação inicial de professores

Os resultados que emergem da planificação e concretização da proposta de trabalho Abelhas STEM com alunos do 6.º ano e da reflexão sobre a prática mostram que são contempladas as quatro dimensões do pensamento dos alunos em matemática no trabalho realizado pelas professoras, emergindo algumas componentes específicas do conhecimento sobre o pensamento dos alunos que acrescem às apresentadas por An et al. (2004).

Antecipar as dificuldades dos alunos é um elemento que se acrescenta à segunda dimensão proposta por An et al. (2014), por se verificar que algumas professoras estagiárias, no plano de aula, antecipam eventuais dificuldades dos alunos e propõem algumas soluções para as ultrapassar, um aspeto importante da formação inicial de professores, tal como sugerido por An et al. (2004) e Çelik e Güzel (2017). Por essa razão, sugere-se que os professores em formação identifiquem essas dificuldades e erros em matemática, reflitam sobre estratégias para os alunos os superarem, nomeadamente com recurso a representações, clarificação de estratégias e condições dadas e conexões com modelos concretos, como acontece com os alvéolos. Adicionalmente, deve ser reforçado aos professores em formação que, tal como An et al. (2004) sugerem, durante a prática letiva devem prestar atenção a esses erros e dificuldades manifestadas pelos alunos, ajudando a ultrapassá-las por meio do questionamento ou de novas tarefas.

Os resultados da dimensão “Envolver os alunos na aprendizagem da matemática" mostram que as professoras estagiárias fomentam o interesse e a persistência no âmbito da resolução das tarefas interdisciplinares com o recurso a materiais manipuláveis, recursos digitais e diferentes tipos de representações, bem como evidenciando a articulação entre a matemática e o contexto das ciências. De facto, sugere-se que, entre outros aspetos, as estratégias para fomentar a persistência e o interesse pela matemática seja discutido na formação inicial, podendo o contexto interdisciplinar entre a matemática e as ciências surgir como promotor do envolvimento dos alunos em tarefas matemáticas desafiantes.

Na dimensão "Promover a aprendizagem a partir do conhecimento dos alunos em matemática", o contexto interdisciplinar criado pelas professoras estagiárias proporciona a mobilização de conhecimentos prévios em matemática e ciências pelos alunos do 6.º ano. No caso da matemática, os alunos mobilizam os seus conhecimentos sobre as amplitudes dos ângulos internos dos polígonos e pavimentação, anteriormente abordados. Através do contexto da vida das abelhas, as professoras estagiárias proporcionam momentos de aprendizagem em que os alunos reconhecem a presença da matemática na forma dos alvéolos e estabelecem conexões com esses conhecimentos prévios. A mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos pode constituir um ponto de partida nas abordagens interdisciplinares, aspeto que pode ser foco de exploração na formação inicial de professores.

A dimensão "Promover o pensamento dos alunos sobre matemática" é expressa pelas professoras estagiárias através das tarefas que propõem e do questionamento aos alunos durante a prática letiva, criando desafios cognitivos adequados e oportunidades de aceder ao seu pensamento. Nesta dimensão e no âmbito do contexto proposto, acrescentam-se duas componentes, uma relativa à formulação e ao teste de conjeturas e outra quanto ao estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas e de ciências. No que diz respeito à formulação e ao teste de conjeturas, as professoras estagiárias identificam a oportunidade de os alunos compararem o perímetro e a área de polígonos regulares que pavimentam o plano, e modo a testar a conjetura de que o hexágono será a forma mais pertinente para a base do alvéolo, tendo em conta o contexto das abelhas. Nesse momento, as professoras estagiárias dão aos alunos oportunidade para desenvolverem a sua atividade e ajudam-nos a progredir nas suas ideias matemáticas, focando o contexto das ciências. Na formação inicial, os futuros professores devem ser sensibilizados para a importância de não resolverem os problemas pelos alunos e de lhes proporcionarem situações de desafio cognitivo elevado, dando-lhes espaço para pensar e responder e apoiando-os com a colocação de questões. No caso de realizarem propostas de trabalho interdisciplinares com as ciências, devem ser alertados para o pensamento em matemática dos alunos dever fazer as devidas conexões com o contexto das ciências que está a ser explorado.

Conclusão

Os resultados da investigação mostram que a criação e implementação da proposta de trabalho interdisciplinar Abelhas STEM, com alunos do

6.º ano, constituiu um contexto no qual as professoras estagiárias expressaram várias dimensões e componentes do conhecimento sobre o pensamento dos alunos em matemática, apresentadas por An et al. (2014). Por outro lado, o contexto interdisciplinar da proposta de trabalho fez com que as professoras expressassem outras componentes, como por exemplo, dar exemplos articulados com o contexto de outras áreas do saber, na dimensão relacionada com o envolvimento dos alunos na aprendizagem da matemática, e estabelecer conexões entre ideias de matemática e de outras áreas do saber, na dimensão associada à promoção do pensamento dos alunos sobre matemática.

Portanto, os resultados deste trabalho sugerem que, na formação inicial de professores, os contextos interdisciplinares entre a matemática e as ciências podem ser úteis para os futuros professores mobilizarem diversas dimensões e componentes do conhecimento sobre o pensamento dos alunos em matemática (como as identificadas por An et al., 2014), emergindo aspetos específicos que resultam das conexões com as ciências.

Referências bibliográficas

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7* (2), 145-172. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000021943.35739.1c

Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., Chiang, C-P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26* (4), 499-531. https://doi.org/10.3102/00028312026004499

Cavadas, B., & Mestrinho, N. (2019). Rede Curricular Interdisciplinar: uma proposta para a integração entre a matemática e as ciências. *Educação e Matemática, 154*, 2-8. XXXI SIEM 15

Çelik, A.Ö., & Güzel, E.B. (2017). Mathematics teachers' knowledge of student thinking and its evidences in their instruction. *Journal on Mathematics Education, 8* (2), 199-210. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1150224.pdf

Gomez-Zwiep, S. (2008). Elementary teachers' understanding of students' science misconceptions: Implications for practice and teacher education. *Journal of Science Teacher Education, 19* (5), 437-454. DOI: 10.1007/s10972-008-9102-y. https://doi.org/10.1007/s10972-008-9102-y

Johnson, J. (2017). Comparing the major definitions of mathematics pedagogical content knowledge. *JMETC, 8*, 19-28. https://doi.org/10.7916/jmetc.v8i1.802

Kilic, H. (2010). The nature of preservice mathematics teachers' knowledge of students. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 9,* 1096–1100. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.292

Koirala, H.P., & Bowman, J.K. (2003). Preparing middle level preservice teachers to integrate mathematics and science: Problems and possibilities. *School Science and Mathematics, 103* (3), 145-154. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2003.tb18231.x

Lo, W.Y. (2020). Unpacking mathematics pedagogical content knowledge for elementary number theory: The case of arithmetic word problems. *Mathematics, 8* (1750). https://doi.org/10.3390/math8101750 Ma'rufi, Budayasa, I.K., & Juniati, D. (2018). Pedagogical Content Knowledge: Teacher's knowledge of students in learning mathematics on limit of function subject. *Journal of Physics: Conference Series, 954*, 012002. Doi:10.1088/1742-6596/954/1/012002.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (11-34). APM.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (83-98). Graó.

Ponte, J.P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11* (2), 145-163. http://hdl.handle.net/10451/3167

Steele, M.D., & Rogers, K.C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: The case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15* (2), 159-180. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9204-5

UNESCO (2017). *Education for Sustainable Development Goals. Learning objectives.* UNESCO.

Formação de professores da educação infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino de geometria: contribuições ao debate

Training of early childhood teachers and early years of elementary school for teaching geometry: contributions to the debate

Leila Pessôa Da Costa[1], Sandra Regina D'Antonio Verrengia[2] e Regina Maria Pavanello[3]

Resumo: Este trabalho resulta de pesquisas desenvolvidas pelo GEPEME - Grupo de Estudos e Pesquisa em Matemática Escolar da Universidade Estadual de Maringá sobre o ensino da Geometria na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental motivadas pelo reconhecimento da falta de preparo de professores com relação aos conceitos e habilidades a serem desenvolvidas pelas crianças no ambiente escolar nessas fases do ensino, o que pode trazer sérios prejuízos à sua formação. Considerando a necessidades. crianças desses níveis de ensino dde se apropriar, gradativamente, de aspectos relacionados à Geometria, a partir de elaborações que partem do real e tático (espaço perceptivo) para, com o auxílio do professor, tornaram-se independentes dos objetos e desenhos (representação), realizamos uma pesquisa a partir dessa perspectiva e perspectiva e pautadas em princípios da Engenharia Didática, na teoria dos Van Hiele e na perspectiva freireana da construção do conhecimento em uma relação dialógica entre os envolvidos no processo educativo. Constatamos que a teoria adotada não considera a faixa etária constituida pela Educação Infantil, sendo necessário ampliá-la, e que a metodologia adotada foi significativa, não só para as "realizações didáticas" como também para a formação na docência por instituir os professores como sujeitos de seu processo de aprendizagem e desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: Educação Básica; Ensino de Matemática; Geometria; Engenharia Didática; Dialogicidade.

1. Universidade Estadual de Maringá, lpcosta@uem.br
2. Universidade Estadual de Maringá, srdantonio@uem.br
3. Universidade do Estado do Paraná, reginapavanello@hotmail.br

Abstract: *This work results from researches developed by GEPEME - Group of Studies and Research in School Mathematics of the State University of Maringá - on the teaching of Geometry in Early Childhood Education and Early Years of Elementary Education. Motivated were by the recognition of teacher's lack of preparation in relation to concepts and skills to be developed by children in the school environment at these stages of teaching they could bring serious damage to their training. The children who were in these levels of education would have to gradually take ownership of aspects related to Geometry based on elaborations that start from the real and tactical (perceptive space) and with the help of the teacher, to became independent from objects and drawings (representation). Therefore, we conducted a research from this perspective as well as guided by principles of Didactic Engineering, the Van Hiele theory and Freirean perspective of the construction of knowledge in a dialogical relationship between those involved in the educational process. As we found that the Van Hiele theory adopted did not consider the age group constituted by Early Childhood Education, we had to expand it. As for the adopted methodology, we found it was significant, not only for the "didactic achievements" but also for the training in teaching as long as it instituted teachers as subjects of their learning process and professional development.*

Keywords: *Basic education; Mathematics teaching; Geometry; Didactic Engineering; Dialogicity.*

Introdução

A história do ensino da Matemática no Brasil tem mostrado que tanto do ponto de vista do ensino como da aprendizagem o eixo da geometria tem sido um dos mais afetados.

Pesquisas como a de Perez (1991), Pavanelo (1993), Nacarato (2002), entre outras, já mostravam a quase ausência de um ensino mais estruturado a respeito da Geometria pelo professor em sala de aula o que consequentemente tem prejudicado a aprendizagem dos alunos, como pode ser observado por Silva, Victer e Novikoff (2011) ao analisarem os resultados de um simulado da Prova Brasil, realizado por estudantes da rede pública municipal de Duque de Caxias, no Estado do Rio de Janeiro:

> A análise dos resultados mostrou claramente a dificuldade dos alunos com questões relativas à geometria. A ausência de visão espacial, de conceitos e propriedades elementares ficou evidenciada através dos resultados obtidos pela pesquisa. O baixo rendimento mostrado pelos alunos no simulado reforça

> todas as teses que relacionam a geometria como o ramo da Matemática que apresenta o maior déficit de aprendizado entre os alunos (Silva, Victer & Novikoff, 2011, p. 26).

Mas quais seriam as causas dessa ausência? De acordo com Lorenzato (1995, p. 3) haveria inúmeras razões para que tal fato ocorresse, porém dentre elas duas se destacam: a primeira das quais diz respeito à falta de conhecimento matemático dos professores com relação à Geometria o que culmina no dilema entre tentar ensinar conceitos geométricos sem conhecê-los ou então não ensiná-los devido a sua formação deficitária. A segunda deve-se à exagerada importância dada ao livro didático que tem procurado apoiar a prática docente desses profissionais apresentando uma carga horária de trabalho que nem sempre possibilita a preparação de suas aulas ou aprofundamento do conteúdo a ser ensinado. Nesse material didático, em geral, os conceitos geométricos são apresentados de forma reducionista, como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligadas de qualquer relação com sua natureza histórica, social ou lógica.

Por certo o ensino de geometria, tal como outros eixos da Matemática, deve ser explorado e desenvolvido desde cedo e, no caso específico da geometria, deve ocorrer a partir de explorações intuitivas que possibilitem às crianças explorar o espaço que as cerca para apreender paulatinamente conceitos indispensáveis a uma posterior sistematização com vistas à construção formal e de generalizações que irão ocorrer para além da Educação Básica (EB).

Para tanto, se faz necessário que os professores conheçam, não só os conteúdos desse eixo, mas também a forma de conduzir o ensino de modo a promover a aprendizagem. E foi pensando nesta questão que o Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Escolar (GEPEME/UEM) desenvolveu uma pesquisa, abarcando esses dois aspectos, que ora passamos a relatar.

Da Matemática e do eixo da geometria

O eixo da Geometria na Educação Infantil (EI) e nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF) está centrado na exploração e no estudo dos objetos no espaço. Espaço esse que, inicialmente se apresenta para a criança de forma prática a partir dos sentidos e movimentos (espaço – perceptivo) tornando-se representativa à medida que os estímulos e intervenções que ocorrem no ambiente escolar lhes possibilitem, por meio da ação e da experimentação sobre os objetos, a percepção de características e relações geométricas, a descrição e explicação do que se passa nesse espaço, e a partir daí darem voz às suas conjecturas, observações, bem como, às representações mentais que construíram – verbalização de suas ideias.

No entanto, para que tais representações mentais sejam construídas pelas crianças faz-se necessário o auxílio e a intervenção do professor(a). O que exige do docente o domínio de conhecimentos importantes caracterizados por Shulman (1986) como: a) o conhecimento do conteúdo; b) o conheci-

mento curricular e c) o conhecimento pedagógico do conteúdo.
Pensando-se especificamente no ensino das relações geométricas espaciais, o conhecimento do conteúdo a ser ensinado deve ir além dos aspectos formais apresentados nos livros didáticos (características dos sólidos, semelhanças e diferenças, partes que o compõem), exigindo do professor a compreensão de regularidades, propriedades, implicações e o uso correto da linguagem matemática, e ainda o "como" e "por que" os conceitos relacionados à geometria se constituíram histórica e cientificamente, a relação de tais conceitos com o mundo real e as necessidades humanas.
Quanto ao conhecimento curricular faz-se necessário que o professor tenha clareza dos conhecimentos que os alunos possuem a respeito da geometria, do nível de desenvolvimento em que eles se encontram, o que facilita ou dificulta a aprendizagem de determinados tópicos, bem como as concepções, as crenças e os conceitos de senso comum para, dessa forma poder organizar o ensino e promover a aprendizagem.
No eixo da geometria, a teoria dos Van Hiele para o pensamento em Geometria baseado nas dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda, sugerem uma progressão de aprendizagem que paulatinamente aprofunda e amplia os seus conhecimentos em função de seu amadurecimento, tanto biológico como intelectual, à medida que vivenciam atividades adequadamente propostas e com intervenções qualificadas por parte do professor.
A teoria apresenta cinco níveis que descrevem como pensamos e os tipos de ideias geométricas que estão subjacentes a eles, enumeradas de 0 a 4 ou de 1 a 5. Van De Walle (2009) explicita que uma diferença significativa de um nível para outro são os objetos de pensamento – sobre os quais somos capazes de pensar [operar] geometricamente.
A consideração desses auxiliam não só a proposição de tarefas para o ensino, mas também para a avaliação da apropriação de conceitos geométricos pelos alunos e sugerem possíveis encaminhamentos metodológicos como sugeridos por Van De Walle (2009).
Além desse conhecimento acerca da evolução dos conceitos geométricos, se torna necessário considerar o que as orientações curriculares do Brasil estabelecidas em 2017, com a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e suas adaptações efetivadas pelos Estados e Municípios, para que o docente possa aprofundar e selecionar estratégias pedagógicas adequadas ao nível de desenvolvimento dos alunos.
Na BNCC (Brasil, 2017), a geometria é uma das unidades temáticas que:

> [...] envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convin-

> centes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (Brasil, 2017, p. 271).

No referido documento ressalta-se ser esperado, em relação a aprendizagem das crianças, nesse nível de ensino:

> [...] identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, *tablets* ou *smartphones*), croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica. (Brasil, 2007, p. 271).

Na EI a Matemática está subjacente aos campos de experiências, que "[...] têm como eixos estruturantes as interações e a brincadeira, assegurando-lhes [às crianças] os direitos de conviver, brincar, participar, explorar, expressar-se e conhecer-se" (Brasil, 2017, p. 40). O campo de experiência que aborda mais explicitamente essa área do conhecimento é o denominado de Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações:

> [...] Além disso, nessas experiências e em muitas outras, as crianças também se deparam, frequentemente, com conhecimentos matemáticos (contagem, ordenação, relações entre quantidades, dimensões, medidas, comparação de pesos e de comprimentos, avaliação de distâncias, reconhecimento de formas geométricas, conhecimento e reconhecimento de numerais cardinais e ordinais etc.) que igualmente aguçam a curiosidade (Brasil, 2017, p. 43).

Contudo, como abordaremos mais adiante, consideramos que nessa faixa etária, que o campo de experiência denominado Corpo, gestos e movimento, que tem como foco "explorar e vivenciar um amplo repertório de movimentos, gestos, olhares, sons e mímicas com o corpo, para descobrir variados modos de ocupação e uso do espaço com o corpo" (Brasil, 2017, p. 41), e, constitui o eixo no qual se inicia o ensino da geometria.

Assim, pensando nesses conhecimentos e nas habilidades que necessitam ser desenvolvidas com as crianças da EI e EF com relação à Geometria, foi que as pesquisadoras, integrantes do GEPEME/UEM propuseram uma pesquisa a partir da qual se pudesse investigar as possibilidades de um processo de formação continuada de professores desses níveis de ensino.

Os temas relativos ao eixo da geometria, consideraram o que está posto por Van de Walle (2009): formas e propriedades; transformação; localização e visualização.

Contudo, tendo em vista que o ensino da geometria deve começar desde o início da escolarização, sentimos a necessidade de explorarmos o que a BNCC estabeleceu como campo de experiência de Corpo, gestos e movimento e então percebemos haver um nível anterior ao do pré-reconhecimento, que chamamos de nível 00, ou nível das experiências geométricas, no qual a criança reconhece aos poucos seu corpo e, a partir desse reconhecimento, passa a diferenciar outros corpos, a estabelecer relações topológicas elementares de localização (longe/perto), sentido (frente/atrás), direção (esquerda/direita); comprimento (maior/menor), semelhança (igual/diferente), etc., mediante as relações que estabelece com os objetos e o meio a sua volta, pois desde cedo os conceitos, bem como o raciocínio espacial, são desenvolvidos a partir das experiências geométricas.

Sobre as capacidades espaciais, Matos e Gordo (1993) consideram a visualização espacial como um conjunto de sete capacidades: coordenação visual motora; memória visual; percepção figura-fundo; constância perceptual; percepção da posição no espaço; percepção das relações espaciais e discriminação espacial.

Assim, considerar a aprendizagem de temas matemáticos, inclusive a geometria na Educação Infantil, requer observar que a construção dos conhecimentos emerge das experiências e práticas das crianças sobre si, os objetos e o meio que as cerca e, em consequência disso, a importância, para as pesquisadoras, no nível que denominamos de 00.

Da Engenharia Didática na pesquisa realizada

Realizada em dois centros de EI e em uma escola dos anos iniciais do EF de um município da região noroeste do Estado do Paraná e contou com a participação de 21 educadoras e professoras. Neste artigo, denominamos de educadores os profissionais que atendem a EI e de professores àqueles que atuam nos anos iniciais do EF.

Metodologicamente, a pesquisa de natureza qualitativa, se apoiou em alguns dos pressupostos da Engenharia Didática (Almouloud, 2007) já apresentados por Pavanello e Da Costa (2019), que se baseiam na "realização, observação e análise das sessões de ensino" e tem sua validação na "comparação entre análise a priori e análise a posteriori [...] sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste" (Almouloud, 2007, p. 171), cuja atenção está voltada para "os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito" (Almouloud, 2007, p. 171).

Iniciamos pela análise preliminar da literatura sobre o desenvolvimento das capacidades espaciais em Geometria a fim de identificar quais delas poderiam ser exploradas em tarefas com as turmas selecionadas a partir de tarefas previamente elaboradas que foram discutidas com as professoras e educadoras a fim de verificarmos também o conhecimento que tinham sobre o conteúdo nelas abordado e a necessidade de aprofundá-los com elas.

Definidos, explicitados e estudados os conteúdos e procedimentos metodológicos das tarefas, estas foram desenvolvidas pelas docentes e acompanhadas pelas pesquisadoras, que registraram em vídeo e fotos os momentos dessa aplicação. Utilizamos posteriormente esse material para análise das pesquisadoras sobre o processo, mas também como material de reflexão e aprofundamento de elementos que foram observados, em especial, sobre o conhecimento matemático explorados e os aspectos metodológicos empreendidos.

Foram consideradas como variáveis nesse estudo: os diferentes sujeitos da pesquisa e seus conhecimentos sobre o objeto de ensino, a disposição das professoras e educadoras em participarem da pesquisa, a disponibilidade de material para desenvolvimento da tarefa, o tempo destinado ao desenvolvimento desta e a faixa etária em que atuam.

Esses dados subsidiaram a reestruturação e reaplicação, se necessário, das tarefas inicialmente propostas com vistas as adequações para a promoção da aprendizagem. As propostas e seu desenvolvimento, foram também apresentadas, analisadas e discutidas com outros profissionais atuantes nessas etapas de ensino em eventos da área da Educação Matemática, dos quais as pesquisadoras participaram.

No final do processo o material coletado foi reunido e organizado inicialmente em uma publicação intitulada: A geometria na educação infantil: O que? Por que? Como?. As tarefas do EF foram, até o momento, apresentadas em artigos científicos publicados em anais de eventos e capítulos de livro.

Resguardadas essas características, implementamos os procedimentos integrando os professores no processo de elaboração e discussão das tarefas realizadas, pautada na pedagogia dialógica (Freire, 1986), para a qual a construção do conhecimento se dá numa relação dialógica entre os envolvidos no processo educativo, mediados pelo conhecimento de mundo.

Nesse percurso, consideramos o conhecimento do objeto a ser estudado; as possibilidades metodológicas para seu desenvolvimento e, ainda, os obstáculos para a apreensão desses conteúdos - tanto pelas professoras, como educadoras e pesquisadoras, mas também pelos alunos - dadas as concepções pré-existentes dos sujeitos envolvidos.

Alguns desses aspectos já fazem parte da metodologia que nos apoiamos, como por exemplo: as análises preliminares ou prévias, análise a priori e a construção das tarefas didáticas, a experimentação e ainda, a análise a posteriori e validação o que consideramos uma possibilidade para a formação na docência[1], que ora passamos a descrever.

Dos aspectos referentes à Engenharia Didática, a análise prévia que é o estudo da organização matemática como observado por Almouloud

1. Distinguimos a formação na docência como o processo formativo que ocorre no decorrer da atuação profissional e a formação da docência, o processo acadêmico que habilita os profissionais para a docência.

(2007, p. 172-174), se deu a partir de pesquisas realizadas anteriormente pelo grupo que evidenciaram não só as dificuldades de professoras e educadoras em relação a esse saber, mas também sua constituição como saber escolar e o seu desenvolvimento no ensino. Observou-se haver atualmente para essa faixa etária poucas indicações metodológicas ou de materiais didáticos relativos às capacidades espaciais, inclusive o fato de que, em documentos e textos, esse conteúdo ser indicado para crianças a partir de 2 ou 3 anos, não havendo referência a um nível anterior (0 a 1 ano). Outro aspecto significativo foi haver ainda poucas pesquisas sobre o ensino da geometria na Educação Infantil (Aguiar, 2017; Schaida; Palma, 2013).

A análise das propostas curriculares, evidenciou os saberes matemáticos e em especial, os conteúdos geométricos indicados para as turmas e classes com as quais trabalhamos. Quanto aos saberes do professor, foram considerados: os conhecimentos inerentes ao ensino da geometria relativos às capacidades espaciais; as dificuldades para o ensino desse conteúdo; o conhecimento sobre o desenvolvimento dos alunos e as possibilidades para o desenvolvimento e/ou necessidades de aprendizagem, a partir das entrevistas e discussões sobre o conteúdo selecionado para a elaboração das tarefas. Consideramos ainda as possibilidades e as necessidades para a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento geométrico na criança, como posto por Piaget e Inhelder (1993) no aspectos relacionado aos saberes dos alunos.

Para o embasamento teórico dos conceitos geométricos e das capacidades espaciais, consideramos a teoria dos Van Hiele e os aspectos evidenciados por Matos e Gordo (1993), já apontados anteriormente.

Tivemos ainda como pressuposto que a promoção da aprendizagem de temas matemáticos, inclusive a geometria, na EI e anos iniciais do EF, requer observar que a construção dos conhecimentos emerge das experiências e práticas das crianças sobre si, os objetos e o meio que as cerca e consideramos para a pesquisa investigar: i) como as professoras e educadoras concebem o desenvolvimento das capacidades espaciais na etapa de ensino que atuam; ii) a contribuição das tarefas para a formação e o desenvolvimento destas capacidades no nível de ensino em que atuam; iii) as possibilidades e limites da ação docente considerando seu conhecimento do conteúdo a ser desenvolvido, dos sujeitos que aprendem, dos processos metodológicos empreendidos e sua implicação para a formação na docência; iv) a proposição de material didático que evidencie o conhecimento envolvido na tarefa, os conhecimentos prévios necessários ao aluno, a organização para o desenvolvimento da tarefa em função dos objetivos propostos e outras possibilidades para a exploração do conhecimento matemático em questão.

A análise da organização didática do objeto matemático escolhido e as concepções de alunos a respeito dos saberes em jogo, ocorreram a partir dos documentos e da produção dos autores já citados. As concepções das professoras e educadoras foram consideradas não apenas na entrevista inicial, mas também nas observações dos pesquisadores na realização da tarefa.

A apresentação do projeto de pesquisa às professoras e educadoras; os dados obtidos nas entrevistas individuais feitas com elas sobre o ensino da geometria que desenvolviam; os tópicos a serem abordados nas tarefas, selecionados por elas a partir de material por nós elaborado e previsto no planejamento escolar e em suas dificuldades em desenvolverem determinados tópicos, foram etapas relacionadas à construção das situações e análise a priori.
Na apresentação da tarefa aos profissionais, foram discutidos quais seriam os conhecimentos prévios necessários ao seu desenvolvimento, a ação do aluno, o espaço no qual ela seria desenvolvida, os materiais necessários e a reflexão dos alunos sobre a tarefa. Esses elementos consideraram tanto a análise matemática (do conteúdo envolvido na tarefa), como a didático-metodológica: a pertinência ou não da tarefa, as variáveis envolvidas e a previsão das possíveis dificuldades para a sua realização. A proposição considerou ainda que a problematização pudesse estar vinculada não só em como a tarefa foi apresentada, mas em ser ela uma proposição que desafiasse os conhecimentos da criança e que servisse como instrumento de aprendizagem.
Posteriormente à aplicação da tarefa, as pesquisadoras discutiram com as profissionais os resultados da aplicação enfocando as dificuldades relativas ao conhecimento matemático, aos procedimentos metodológicos e à adequação aos alunos, cujos dados, aliados às observações feitas pelas pesquisadoras no decorrer do trabalho e da análise dos vídeos realizados durante a aplicação das tarefas e dos estudos realizados à priori, possibilitaram a avaliação do trabalho (Almouloud, 2007, p. 177-178).
Destes procedimentos, foi possível a reelaboração das tarefas pelos pesquisadores e sua reapresentação às professoras e educadoras, momento em que se discutiu sua adequação às crianças, os resultados obtidos, a necessidade ou não para proporcionar aos alunos e as professoras, educadoras e pesquisadoras uma aprendizagem mais abrangente dos temas abordados e a possível necessidade de complementação dos estudos.
A validação do trabalho realizado e do material produzido foram também submetidos à discussão com outros pesquisadores, professores e educadores presentes em eventos científicos.

Algumas considerações

A pesquisa nos permitiu evidenciar que o desenvolvimento das capacidades espaciais inicia-se antes mesmo da vinda da criança ao mundo e o quanto elas são importantes para o desenvolvimento infantil e, de modo geral, para o ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos que serão explorados ao longo da Educação Básica, reforçando desta forma, sua importância no que denominamos de nível 00 aos níveis já propostos pelos Van Hiele.
Contudo, devemos ter claro que a proposição de tarefas deve instigar os alunos a construírem conhecimentos a partir das experiências e práticas sobre si mesmos, sobre os objetos e sobre o meio que os cerca, como os que foram propostos nas tarefas.

A metodologia baseada nos requisitos da Engenharia Didática foram importantes para a construção e a análise das tarefas, para a ampliação do conhecimento das professoras e educadoras sobre cada tema específico e a compreensão de sua importância para o desenvolvimento dessa faixa etária. Além disso, as professoras, educadoras e as pesquisadoras vivenciaram novas experiências em uma prática que coloca a criança no centro do processo de aprendizagem estabelecendo uma conexão entre seu corpo e o conceito geométrico desenvolvendo habilidades e conhecimentos adequados à sua idade.

Nessa perspectiva, a metodologia adotada, enquanto possibilidade para a formação na docência dos profissionais que dela participaram, foi profícua, seja por se sentiram parte integrante do processo, por opinarem sobre os temas trabalhados, na proposição das tarefas, por analisarem sua aplicação e resultados e, ainda, por participarem da elaboração final do material quando de sua validação. E ainda instituiu os professores como sujeitos de seu processo de aprendizagem, articulando teoria e prática, podendo vislumbrar outras possibilidades para a exploração do conhecimento matemático e seu desenvolvimento profissional, o que consideramos aspectos relevantes para a validação do processo empreendido.

Garantiu-se ainda, a interlocução entre pesquisador-professor, professor aluno e pesquisador – aluno, de modo que todos os participantes da pesquisa se sentiram parte integrante dela, tendo o diálogo como fio condutor e assim pensar em como aproximar a teoria da prática, a reflexão à ação e valorizar as diferentes formas de pensar sobre esse conhecimento, movimentos estes permeados pelas interações e o diálogo como elementos fundamentais.

Para uma mudança profunda no ensino proporcionado pelas professoras e educadoras e para o aprofundamento teórico destas em relação aos conhecimentos matemáticos abordados, se faz necessário tempo para que reflitam sobre todos os aspectos que envolvem a proposição de tarefas (os saberes do conteúdo, os saberes didáticos e os saberes dos alunos), bem como contar com apoio, como o dado pelas pesquisadoras, que lhes permita consolidar as aprendizagens, fatos esses que se solidificam ao longo da docência.

Referências bibliográficas

Aguiar, C. de A. (2017). Matemática e educação infantil levantamento de teses e dissertações defendidas entre 2012 a 2017. *Anais do 25º SEMIEDU: Educação, Diversidades Culturais, Sujeitos e Saberes*, Cuiabá, MT, Brasil.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Ed. UFPR. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (2017). *Base Nacional Comum Curricular.* MEC/SEB.

Lorenzato, S. (1995). Por que ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista 3* (4), SBEM, v. 3, n. 4, 1-64.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização Espacial: algumas atividades. *Educação e Matemática 26*, 13-17.

Mendes, M. F.; Delgado, C. C. (2008). *Geometria: textos de apoio para educadores de infância.* Ministério da Educação de Portugal.

Nacarato, A. M. (2002) A geometria no ensino fundamental: fundamentos e perspectivas de incorporação no currículo das séries iniciais. In Sisto, F. F., Dobránszky, E. A. e Monteiro, A. (Org.). *Cotidiano Escolar: questões de leitura, matemática e aprendizagem* (pp. 84 – 99). Vozes.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké 1* (1), 7-17.

Pavanello, R. M. & Da Costa; L. P. (2019). Formação de professores/educadores para o ensino e a aprendizagem das capacidades espaciais na educação infantil. *Educ. Matem. Pesq., v.21* (5), 205-216.

Perez, G. (1995). A realidade sobre o ensino da geometria no 1º e 2º graus, no Estado de São Paulo. *Educação Matemática em Revista 4*, 54 – 62.

Piaget, J & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança.* Artes Médicas.

Schaida, L. F. F. S. & Palma, R. C. D. (2013, julho). Matemática e educação infantil: mapeamento das dissertações e teses defendidas no Brasil no período de 2007 a 2011. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* Curitiba, PR, Brasil, 18.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (4), 4-14.

Silva, L. C. M da.; Victer, E. das F.; Novikoff, C. (2011). Análise do rendimento escolar de turmas do 9º ano no simulado de Matemática da Prova Brasil: um estudo exploratório na rede pública municipal de Duque de Caxias/RJ. *Revista Práxis, 3* (6), 19-28.

Van De Walle, J. (2009, 6ª edição). *A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* Artmed.

CARTAZ | Conhecimento Interpretativo do professor no âmbito da divisão de frações a partir de uma Tarefa para a Formação

POSTER | *Teachers' Interpretive Knowledge in the scope of Fraction Division from a Task for teacher education*

Gabriela Gibim[1], Carla Alves[2], Miguel Ribeiro[3]

Resumo: As frações e a divisão são tópicos transversais a várias etapas educativas e uma fonte de dificuldades para o entendimento matemático dos alunos. Para desenvolver esse entendimento matemático o conhecimento do professor assume um papel preponderante. Neste artigo, a partir de uma Tarefa para a Formação (TpF) discutimos as produções de alunos incluídas na TpF que buscam contribuir para aceder (e desenvolver) o Conhecimento Interpretativo dos resolutores.

Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo; Divisão de Frações; Tarefas para a Formação.

Abstract: *Fractions and division are topics we have to deal with in different educational stages and in which students' reveal difficulties in understanding. For developing such mathematical understanding teachers' knowledge assumes a crucial role. In this article, based on a Task for teacher education (TpF), we discuss students' productions included in the TpF that aim to contribute to access (and to develop) the Interpretive knowledge of the solvers.*

Keywords: *Interpretative Knowledge; Fraction division; Task for teacher education.*

1. Universidade Estadual de Campinas, gabi.gibim@gmail.com
2. Universidade Estadual de Campinas, carla0934@gmail.com
3. Universidade Estadual de Campinas, cmribas78@gmail.com

Introdução

O conhecimento do professor é especializado para a sua atuação docente e uma das dimensões dessa especialização é a atribuição de significado aos raciocínios e produções dos alunos. Essa especialização é assumida aqui na perspetiva do Conhecimento Interpretativo – CI (Ribeiro, et al., 2013) e focamos a divisão de frações por estas serem um dos tópicos em que alunos e professores revelam dificuldades (Tirosh, 2000).

Neste texto discutimos uma Tarefa para a Formação – TpF (Ribeiro, et al., 2021) desenhada e associada a uma investigação com a questão: Quais as potencialidades e limitações das TpF que buscam aceder e desenvolver o CI de (futuros) professores para atribuírem significado a produções de alunos que envolvem raciocínios não standard no âmbito da divisão de frações? Focamos a conceitualização de uma TpF pois essa é uma das dimensões centrais para a discussão em torno do desenvolvimento do CI em contextos formativos e, nesse sentido, apresentamos e discutimos as produções incluídas na tarefa por serem elementos fulcrais para as discussões e coleta de informações para a pesquisa.

O Conhecimento Interpretativo e a Tarefa para a Formação no âmbito da divisão

A divisão envolvendo frações é um dos tópicos problemáticos no ensino e na aprendizagem – até os procedimentos – e com frequência os professores não sabem explicar por que o algoritmo funciona (e.g., Tirosh, 2000). Conhecer e entender os porquês matemáticos associados a cada um dos tópicos – em particular nos algoritmos em cada tópico – deverá formar parte do conhecimento matemático que nos cumpre enquanto professores. Esse conhecimento matemático que possibilita ter como ponto de partida raciocínios, argumentos e produções dos alunos, independentemente de serem consideradas incorretas ou não-convencionais, e fornecer um *feedback* construtivo é denominado de Conhecimento Interpretativo (Di Martino, et al., 2020).

Aceder e desenvolver esse Conhecimento Interpretativo associa-se a um contexto formativo e investigativo de natureza específica onde a conceitualização e implementação das denominadas Tarefas para a Formação fazem simultaneamente parte da componente teórica e metodológica – diferenciando os focos formativos e investigativos em um mesmo contexto. Discutimos aqui um exemplo de uma parte de uma dessas TpF focando a estrutura da tarefa e os motivos que levam a inclusão de determinadas produções de alunos. O ponto de partida é um problema para os alunos solicita resolver e explicar os raciocínios associado a resolver $\frac{12}{15} : \frac{3}{5}$, e a questão para o professor – associada a questão de investigação – demanda atribuir significado a diferentes raciocínios que permitem obter a resposta numérica correta.

A professora Gabriela implementou esta mesma tarefa nas suas turmas de 7.º ano e algumas das produções dos alunos são distintas daquelas que ela tinha antecipado.

$$\textit{Luis: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\textit{Rafael: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12 : 3}{15 : 5} = \frac{4}{3}$$

$$\textit{Mônica: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12}{15} : \frac{9}{15} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Qual o raciocinio efetuado por cada um dos alunos? Pode ser aceito como matematicamente adequado? Pode ser generalizável? Justifique.

Figura 1. Produções de três alunos para $\frac{12}{15} : \frac{3}{5}$

A seleção de que produções incluir na TpF é uma discussão central para as potencialidades e limitações da tarefa, pois é a partir da atribuição de significado a cada uma delas que podemos aceder ao conhecimento do professor e aos processos que levam, ou não ao seu desenvolvimento e posterior impacto na prática. Cada uma destas que se inclui permite discutir diferentes dimensões do conhecimento do professor.

A produção de Luís associa-se ao algoritmo "Inverte e Multiplica" e é tipicamente aquele ensinado aos alunos. A atribuição de significado exige entender as conexões entre os fenómenos da divisão e da medida: entender que $\frac{4}{3}$ corresponde à quantidade de vezes que $\frac{3}{5}$ cabe em $\frac{12}{15}$. Já a produção de Rafael vincula-se a um raciocínio que, frequentemente, é considerado inadequado; está associado ao algoritmo "Dividir Numerador e Denominadores entre si" que consiste em dividir entre si os numeradores e os denominadores. A produção de Mônica possibilita discutir um algoritmo que envolve o conceito de frações equivalentes e pode ser denominado de algoritmo de "Igualar os Denominadores" que tem correspondência com "quantas vezes a quantidade $\frac{3}{5}$ tem de ser utilizada para medir a quantidade $\frac{12}{15}$". A solução 4/3 deve ser entendida a partir da compreensão do que significa $1\frac{1}{3}$ assumindo a fração o sentido de operador.

Algumas considerações finais

É o Conhecimento Interpretativo do professor que permite assumir como ponto de partida efetivo para as discussões matemáticas o que os alunos já conhecem e como o conhecem. Esse conhecimento é algo que não se desenvolve pela prática de sala de aula (Ribeiro, Mellone, & Jakobsen, 2013) e, portanto, para entender a sua natureza e conteúdo, e promover o seu desenvolvimento, torna-se essencial conceitualizar

Tarefas para a Formação onde se considere, de forma imbricada, a investigação e a formação.

Referências bibliográficas

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). *Interpretative Knowledge.* In S. Lerman (Orgs.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 1–5). Springer International Publishing.

Ribeiro, M., Mellone, M. & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. *Atas do PME 37*, v. 4, p. 89–96.

Ribeiro, M., Gibim, G. & Alves, C. (2021). A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática, 14*, (34) 1-24.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (1), 5–25.

Simpósio de Comunicações 2
Communication Symposiums 2

XXXI SIEM
seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

Aprofundamento de conhecimentos sobre adição e subtração através do Tabuleiro Decimal

Deepening of knowledge about addition and subtraction through the Decimal Board

Rita Neves Rodrigues[1], Fernando Martins[2], Cecília Costa[3]

Resumo: Este artigo tem como objetivo analisar o impacto do uso do material manipulável estruturado Tabuleiro Decimal no ensino da Matemática, numa turma do 1.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB). Este estudo insere-se numa investigação mais alargada, desenvolvida no âmbito do relatório final do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB, de caracter qualitativa, índole interpretativa e com um design de investigação-ação. Os dados foram recolhidos através da observação participante, de notas de campo, de documentos produzidos pelos alunos e de registos áudio e fotográficos, sendo estes posteriormente utilizados para a construção de Narrações Multimodais. Os resultados deste estudo evidenciam que o uso do Tabuleiro Decimal promoveu a compreensão dos alunos acerca dos sentidos das operações aritméticas adição e subtração e dos princípios do sistema de numeração decimal.

Palavras-chave: Tabuleiro Decimal; Sentidos da adição; Sentidos da subtração; Princípios do Sistema de Numeração Decimal.

Abstract: *This paper aims to analyse the impact of the use of the structured manipulative material Decimal Board in teaching Mathematics in a 1st year class of the 1st cycle of basic education (CEB). This study is part of a larger research project, developed as part of the final report of the Master's Degree in Teaching Primary School and Mathematics and Natural Sciences of 2nd CEB. The study is of qualitative and interpretative nature and with action-research design. Data were collected through participant observation, field notes, documents produced by the students and audio and photographic records, which were later used for the construction of Multimodal Narrations. The results of this study show that the use of the Decimal Board promoted students' understanding of the meanings of the arithmetic operations addition and subtraction and the principles of the decimal numbering system.*

1. Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, Portugal, ritanevesrodrigues@hotmail.com
2. Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, UNICID, Portugal
Instituto de Telecomunicações, Delegação da Covilhã, Portugal, fmlmartins@esec.pt
3. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, ECT, Portugal
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Portugal, mcosta@utad.pt

Keywords: *Decimal Board; Addition meanings; Subtraction meanings; Principles of decimal number system.*

Introdução

A utilização de materiais manipuláveis no ensino é apontada por diversos autores como a estratégia que melhor resultado produz junto dos alunos de faixas etárias mais baixas (Aires & Almeida, 2019; Correia, 2018; Mauhibah & Karso, 2020), ao contribuir para a representação concreta de conceitos matemáticos, que se sabe serem abstratos. Tal como é preconizado no documento Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), a aprendizagem dos conteúdos de matemática deve iniciar-se de um modo concreto para, gradualmente, se passar ao abstrato (Correia, 2018; Pratas et al., 2016). O recurso a materiais manipuláveis possibilita a representação e a concretização dos conteúdos mais abstratos da matemática, permitindo que os alunos manipulem e compreendam cada processo (Aires & Almeida, 2019; Ponte & Serrazina, 2000). Deste modo, a prática letiva com recurso a artefactos promove nos alunos o desenvolvimento de representações ativas, construindo conceitos e aprendizagens com significado para os alunos (Mauhibah & Karso, 2020). Os artefactos despertam ainda curiosidade e interesse nos alunos, estimulando-os e cativando-os para a aprendizagem da matemática (Soares & Catarino, 2018).

Neste artigo pretendemos analisar a prática implementada com recurso ao material manipulável Tabuleiro Decimal (TD), numa turma de alunos do 1.º ano do 1.º CEB, que demonstravam dificuldades nos sentidos das operações adição e subtração e nos princípios do sistema de numeração decimal. Assim, pretende-se responder à questão de investigação: de que modo o uso do Tabuleiro Decimal influenciou a compreensão dos alunos acerca dos sentidos das operações aritméticas adição e subtração e dos princípios do sistema de numeração decimal?

Contextualização teórica

Os artefactos conferem uma representação concreta de conteúdos mais abstratos da matemática, que usualmente são de difícil compreensão para alunos de faixas etárias mais baixas (Cavalgante et al., 2020). A utilização destes materiais aquando da resolução de situações problemáticas, vai conferir autonomia e confiança aos alunos para desenvolverem os seus próprios procedimentos passando, só depois, à representação simbólica das operações (Ponte & Serrazina, 2000; Soares & Catarino, 2018). O recurso a materiais manipuláveis vai permitir que os alunos se envolvam na sua própria aprendizagem, ficando mais motivados e interessados no processo de ensino e de

aprendizagem (Aires & Almeida, 2019).
As dificuldades sentidas pelos alunos acerca dos princípios do sistema de numeração decimal podem ser justificadas pelo carácter abstrato deste conteúdo (Moura & Oliveira, 2020). A ausência de compreensão dos princípios do sistema de numeração decimal leva, muitas das vezes, ao uso de mnemónicas por alunos e professores, originando a utilização das mesmas e de processos mecanizados, isentos de compreensão (Faria & Maltempi, 2020; Silva & Freitas, 2019). Deste modo, o recurso a artefactos permite que os alunos visualizem e manipulem estes conteúdos de um modo concreto, colmatando as dificuldades associadas ao seu carácter abstrato (Clements & Samara, 2009).
O processo de ensino e de aprendizagem dos sentidos das operações adição e subtração é habitualmente iniciado pela resolução de situações problemáticas, que deverão envolver realidades familiares aos alunos (Mauhibah & Karso, 2020; Rodrigues et al., 2021). Assim, torna-se essencial que a resolução deste tipo de tarefas integre estratégias que promovam a partilha, a comunicação e consequente reflexão entre os alunos, permitindo-lhes evoluir na sua compreensão e adquirir aprendizagens ativas e efetivas (Costa et al., 2020; Rocha & Farias, 2020). A utilização de artefactos vai possibilitar esta partilha entre os pares de trabalho, através de práticas colaborativas (Attard & Holmes, 2020), e impulsionar a "discussão das propostas entre os alunos, promovendo a aprendizagem através da cooperação" (Rodrigues, 2021, p. 103).

Metodologia

Descrição da metodologia de investigação
O presente artigo resulta de um estudo mais alargado de natureza qualitativa, de índole interpretativa e com um design de investigação-ação, elaborado no âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB (Rodrigues, 2021). Este estudo desenvolveu-se no contexto natural dos participantes onde o investigador foi o principal agente de recolha de dados, seguindo os princípios de um estudo de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 2013). Durante todo o estudo procurou-se interpretar e compreender as ações dos alunos, desenvolvendo-se uma investigação de índole interpretativa. A cada sessão realizada seguia-se uma reflexão, tendo em vista o aperfeiçoamento da intervenção e a produção de melhores resultados nos participantes, respeitando as características de uma investigação-ação.

Contexto do estudo
O estudo realizou-se em contexto formal, numa escola do centro de Coimbra, junto de uma turma com 25 alunos do 1.º ano do 1.º CEB. Na fase anterior ao estudo mais alargado os participantes demonstravam ausência de compreensão dos sentidos das operações adição e subtração e dos princípios do sistema de numeração decimal. Estes não se mostraram aptos a reconhecer o sentido da operação aritmética presente numa dada situação problemática, sendo que recorrentemente não optavam pela operação aritmética adequada à resolução da tarefa. Ao nível dos princípios de numeração decimal, os alunos demonstra-

vam ausência de compreensão da necessidade de compor unidades numa unidade de ordem superior ou decompor uma unidade em unidades de ordem inferior.

Design do estudo

Esta investigação iniciou-se com uma sessão de exploração, onde os alunos contactaram pela primeira vez com o TD e tiveram oportunidade de o explorar, e às suas peças (Figura 1), e de resolver operações de adição e subtração. Cada par tinha à sua disposição um TD. Este material foi construído com o objetivo de auxiliar a resolução de situações problemáticas, representando concretamente os princípios do sistema de numeração decimal e tendo em vista a promoção de aprendizagens significativas (Rodrigues et al., 2020; 2021). Assim, a cada TD correspondem dois sacos, um com 10 barras (dezenas) e 100 cubinhos (unidades) azuis e o outro com 10 barras (dezenas) e 100 cubinhos (unidades) vermelhos. Este material foi construído segundo os princípios do Material Multibásico (Rodrigues et al., 2020), tendo a particularidade de ter um "tabuleiro" dividido em duas colunas que permitem a representação da ordem das dezenas e da das unidades e em duas linhas de modo a poder representar-se, separadamente, as quantidades a operar aquando da representação vertical das operações aritméticas de adição ou subtração.
Em todas as sessões os grupos de trabalho tinham à sua disposição o TD e as respetivas peças, lápis de carvão, borracha e lápis de cor azul e vermelha e as folhas de exploração, que eram discutidas em conjunto pelos elementos do grupo, mas preenchidas individualmente.
Na sessão de exploração os alunos reconheceram que as barras representavam as dezenas e os cubinhos as unidades e compreenderam a necessidade de existirem as peças de cor vermelha de modo a distinguir a segunda parcela da subtração.

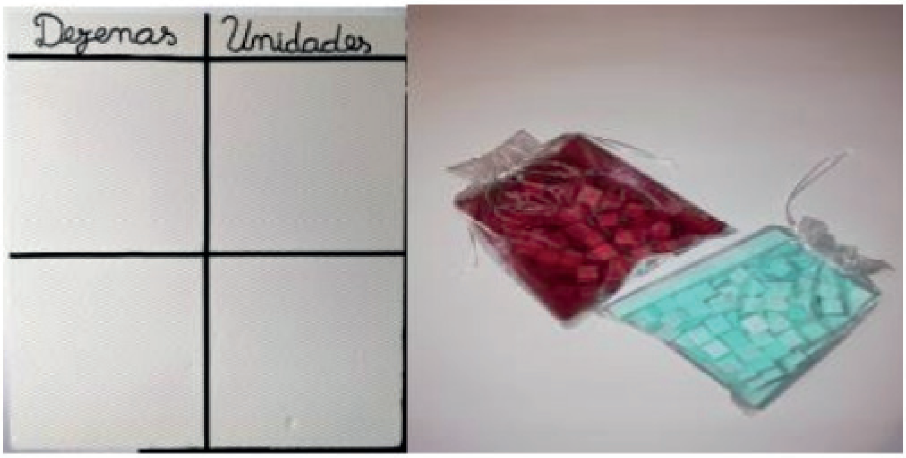


Figura 1: Tabuleiro Decimal e os respetivos sacos.

Posteriormente à sessão de exploração, desenvolveram-se cinco sessões, cada uma destinada a um dos sentidos da adição e subtração, que decorreram de modo semelhante ao longo de duas semanas. Em cada uma os alunos trabalharam em pares e resolveram duas situações problemáticas envolvendo cada um dos sentidos das operações, com recurso ao TD (Rodrigues, 2021). Todos os grupos resolveram as tarefas do mesmo modo, seguindo os mesmos procedimentos e apresentando respostas semelhantes, (ver a secção Apresentação de Resultados), iniciaram assim cada tarefa pela resolução no TD e, posteriormente, nas folhas de exploração. Depois de cada tarefa resolvida, a PE elaborava no quadro de giz uma representação do TD e dos passos necessários para resolver as tarefas (Figura 2), mediante as indicações dadas pelos alunos.

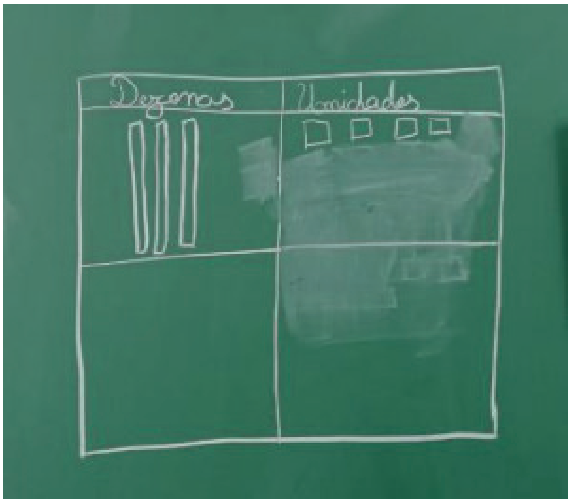


Figura 2: Exemplo da representação do TD no quadro de giz elaborado pela PE.

Recolha e análise de dados

Os dados da investigação foram recolhidos através da observação participante, da redação de notas de campo, de registos áudios e fotográficos e dos documentos produzidos pelos alunos. Todos os dados recolhidos foram usados para construir narrações multimodais (NM) (Lopes et al., 2018), resultando deste estudo, um conjunto de 5 narrações multimodais (c.f. Apêndices 17 a 21 em Rodrigues, 2021, pp. 192-257). As NM constituem-se como instrumentos para efetuar a análise dos dados de forma sistemática. Aquando da manipulação do TD, os alunos utilizaram representações ativas (Bruner, 1999, referido em Santos, 2015), já no preenchimento das folhas de exploração, os alunos elaboraram representações visuais (figuras e esquemas), representações simbólicas (símbolos numéricos) e representações verbais (linguagem natural) (Montenegro et al., 2017).

Apresentação de resultados

A apresentação dos resultados desta investigação e a sua discussão serão apresentadas pela ordem cronológica em que decorreram. Assim, serão apresentadas cinco subsecções, uma para cada sentido da adição (juntar e acrescentar) e da subtração (comparar, completar e retirar) (Ponte & Serrazina, 2000).

Sentido de juntar da adição
Na sessão sobre o sentido de juntar da adição foi pedido que os alunos resolvessem a situação problemática apresentada na Figura 3.

Na sala de aula da Cátia existem 39 livros de Matemática e 24 livros de português. Quantos livros existem nesta sala?

Figura 3: Enunciado da tarefa com sentido de juntar.

Como surgiram algumas dúvidas, a professora estagiária (PE) optou por iniciar um diálogo com toda a turma (Excerto NM 1).

PE: E agora, como é que nos podemos saber quantos livros há ao todo? Fazemos uma… Diz Aluno E!

Aluno E: Juntamos o três com o dois e o quatro com o nove!

PE: Ou seja, fazemos uma adição ou uma subtração?

Todos juntos: Adição!

Excerto NM 1: Diálogo com os alunos sobre a operação a utilizar (c.f. Rodrigues, 2021, p. 205).

Seguidamente, os alunos começaram por representar as duas quantidades da tarefa no TD, desenvolvendo representações ativas (Figura 4).

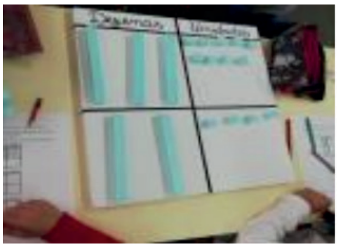


Figura 4: Exemplo da representação das quantidades iniciais no TD de um dos grupos.

Através de representações visuais e simbólicas, idênticas às usadas pela PE em explicações prévias, os alunos representaram a adição da segunda quantidade com a primeira (Figura 5).

Figura 5: Exemplo da representação da adição das quantidades na folha de exploração de um dos grupos.

Reconhecendo que constavam mais do que 10 unidades na ordem das unidades, os alunos efetuaram a composição de unidades numa unidade de ordem superior (Figura 6).

Figura 6: Exemplo da representação da composição de dez cubinhos numa barra no TD de um do grupos.

Depois de efetuada a composição, os alunos obtiveram a solução da adição no TD (Figura 7).

Figura 7: Exemplo da representação da solução da adição no TD de um dos grupos.

Por último, elaboraram uma resposta para a situação problemática (Figura 8).

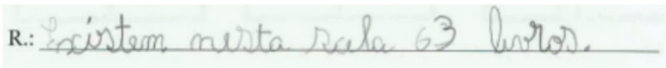


Figura 8: Exemplo de uma resposta escrita na folha de exploração.

Sentido de acrescentar da adição

Na sessão sobre o sentido de acrescentar da adição foi pedido que os alunos resolvessem a situação problemática apresentada na Figura 9.

Na festa de aniversário da Francisca estavam 34 crianças. Passado um bocado chegaram 28 crianças. Quantas crianças foram ao todo à festa de aniversário da Francisca?

Figura 9: Enunciado da tarefa com sentido de acrescentar. A PE começou por ler o enunciado da tarefa para toda a turma.

De seguida, questionou os alunos acerca de qual seria a quantidade inicial da operação. Dois alunos respondem corretamente “34” e todos começam por representar no TD a quantidade inicial da adição (Figura 10).

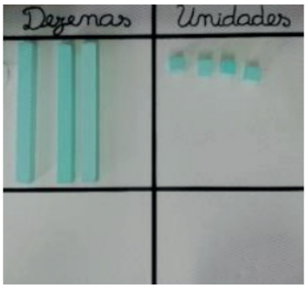


Figura 10: Exemplo da representação da quantidade inicial no TD de um dos grupos.

De seguida, todos os alunos representam esta quantidade na sua folha de exploração, através de representações visuais (Figura 11).

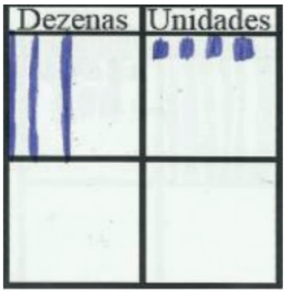


Figura 11: Exemplo da representação da quantidade inicial na folha de exploração de um dos alunos.

Depois de efetuadas estas representações, a PE questiona toda a turma qual seria a quantidade acrescentada e onde seria representada, ao que um aluno responde corretamente (Excerto NM 2).

PE: Muito bem, acrescentar vinte e oito, então, só mais uma questão, se vamos acrescentar estes vinte e oito à quantidade inicial, onde é que vamos representar estes vinte e oito?

Aluno C: No segundo quadrado, e vamos por o vinte e oito… as duas uni… as duas dezenas no quadrado das dezenas, com as três dezenas no segundo quadrado (o quadrado das dezenas na primeira parcela) e as oito "juntadas" com as quatro!

Excerto NM 2: Diálogo com os alunos sobre as quantidades da adição (c.f. Rodrigues, 2021, p. 215)

Deste modo, todos os alunos acrescentam a segunda quantidade à primeira, no TD, desenvolvendo representações ativas (Figura 12).

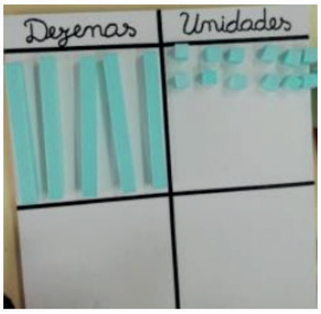


Figura 12: Exemplo da representação da adição das duas quantidades no TD de um dos grupos.

Dada a quantidade de unidades presentes na ordem das unidades, um aluno coloca uma questão à PE (Excerto NM 3), que responde para toda a turma.

Aluno J: Podemos ter doze unidades?

PE: Será que nós podemos ter doze unidades aqui nesta coluna? - referindo-me à coluna das unidades-… Aluno E... Ah, Aluno I...

Aluno I: Não!

PE: Então o que é que nós fazemos?

Aluno K: Eu quero dizer! Eu sei dizer!

Aluno I: Nós temos de tirar dez cubinhos!

PE: Temos de tirar dez cubinhos e fazer o quê a esses dez cubinhos?

Aluno I: Formar uma barra!

Excerto NM 3: Diálogo com os alunos sobre a necessidade de compor unidades numa unidade de ordem superior (c.f. Rodrigues, 2021, p. 216)

Depois deste diálogo, todos os alunos efetuaram a composição de unidades numa unidade de ordem superior, moveram a dezena resultante desta composição para a ordem das dezenas, e apresentaram estes passos na folha de exploração através de representações visuais (Figura 13).

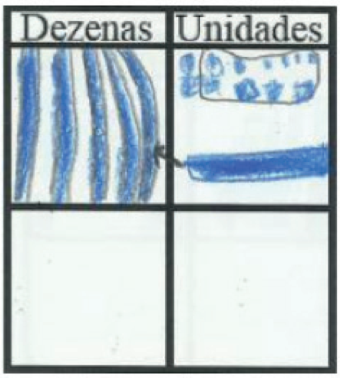


Figura 13: Exemplo da representação da composição dos dez cubinhos numa barra e movimento da mesma para a coluna das dezenas efetuada por um dos alunos.

Com este passo concluído, todos os alunos obtiveram a solução da adição no TD (Figura 14 (a)) e representaram esta solução na folha de exploração (Figura 14 (b)).

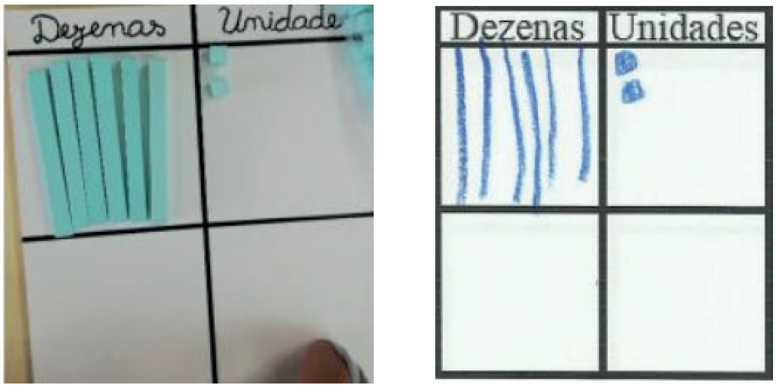


Figura 14: a) Exemplo da representação da solução da adição no TD de um dos grupos; b) Exemplo da representação da solução da adição na folha de exploração de um dos alunos.

Para terminar, todos os alunos elaboraram uma resposta para a situação problemática, nas suas folhas de exploração (Figura 15).

R.: Foram 62 crianças à festa da Francisca.

Figura 15: Exemplo de uma resposta escrita na folha de exploração.

Sentido de comparar da subtração

Para a sessão sobre o sentido de comparar da subtração foi pedido que os alunos resolvessem a situação problemática apresentada na Figura 16.

A Ana foi à papelaria comprar dois livros. O livro de contos de fada custava 47 euros e o de banda desenhada custava 23 euros. Quanto é que o livro de contos de fada custava a mais que o de banda desenhada?

Figura 16: Enunciado da tarefa com sentido de comparar.

Depois de lido o enunciado para toda a turma, a PE deslocou-se pelos grupos de trabalho e solicitou que os alunos lhe explicassem como estavam a pensar resolver a tarefa. Um dos grupos já tinha representado as duas quantidades no TD (Figura 17 (a)) e na folha de exploração (Figura 17 (b)), de modo idêntico ao efetuado pela PE em explicações anteriores.

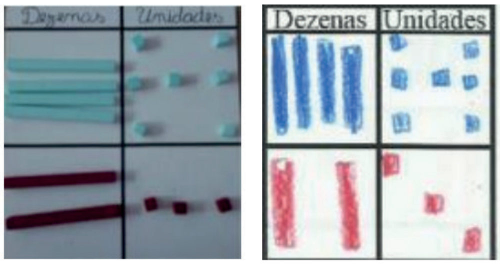


Figura 17: a) Exemplo da representação das quantidades iniciais no TD de um dos grupos; b) Exemplo da representação das quantidades iniciais na folha de exploração de um dos alunos.

A PE verificou as representações deste grupo e colocou algumas questões (Excerto NM 4).

> **PE:** Primeiro o que é que queríamos saber?
>
> **Aluno O:** Ah… Quantos a mais é que… o livro de contos de fadas tinha…
>
> **PE:** Não, quanto é que ele custava a mais certo?
>
> **Aluno O:** Sim!
>
> **PE:** Okey, e então?
>
> **Aluno E:** Custava 24…
>
> **PE:** Okey por que fizeste o que?… como é que fizeste a conta?
>
> **Aluno O:** Então fiz ah… quarenta e sete depois fiz 23 pus isto, tirei... e depois era… vi que era 24! (referindo-se a colocar e a retirar as barras e os cubinhos no TD)
>
> **PE:** Muito bem!

Excerto NM 4: Diálogo com um grupo de alunos sobre a resolução efetuada no TD (c.f. Rodrigues, 2021, p. 227).

De modo a representar a subtração das quantidades indicada no diálogo anterior, todos os alunos apresentaram representações visuais nas suas folhas de exploração (Figura 18 (a)), recorrendo ao mesmo tipo de representações para apresentar a solução da subtração (Figura 18 (b)).

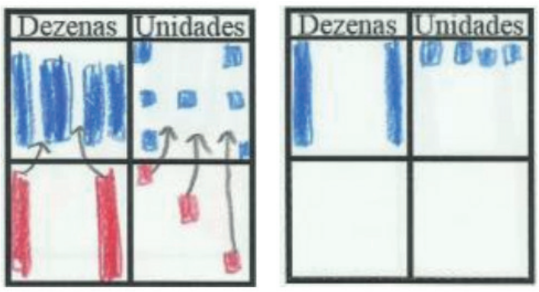


Figura 18: a) Exemplo da representação da subtração das quantidades na folha de exploração de um dos alunos; b) Exemplo da representação da solução da subtração na folha de exploração de um dos alunos.

Para terminar, cada aluno da turma elaborou uma resposta para a situação problemática na sua folha de exploração (Figura 19).

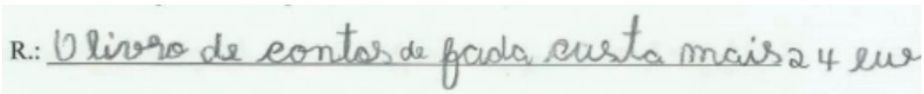

R.: O livro de contos de fada custa mais 24 eu

Figura 19: Exemplo de uma resposta escrita na folha de exploração.

Sentido de completar da subtração Para a sessão sobre o sentido de completar da subtração foi pedido que os alunos resolvessem a situação problemática apresentada na Figura 20.

> A Inês quer comprar um puzzle que custava 47 euros. No seu mealheiro já tem 25 euros. Quanto dinheiro é que a Inês ainda tem de juntar para comprar o puzzle?

Figura 20: Enunciado da tarefa com sentido de completar.

A PE começou por ler o enunciado e fazer algumas questões para toda a turma sobre a resolução da situação problemática (Excerto NM 5).

PE: Se ela quer comprar um puzzle que custa quarenta e sete e já tem vinte e cinco, como é que nós sabemos o que é que falta?... Vamos pensar nisso… Ela quer ter quarenta e sete e já tem vinte e cinco, como é que ela pode… o que é que ela pode juntar para chegar aos quarenta e sete? Como é que ela pode fazer? Aluno A: Pode tirar… Pode tirar vinte e cinco a quarenta e sete!

Excerto NM 5: Diálogo com os alunos sobre a resolução da situação problemática (c.f. Rodrigues, 2021, pp. 234-235).

Seguidamente, cada grupo de trabalho inicia as suas resoluções. A PE desloca-se pela sala, verificando as propostas de resolução. Um dos grupos já tinha representado as duas quantidades da subtração no TD (Figura 21 (a)) e na folha de exploração (Figura 21 (b)).

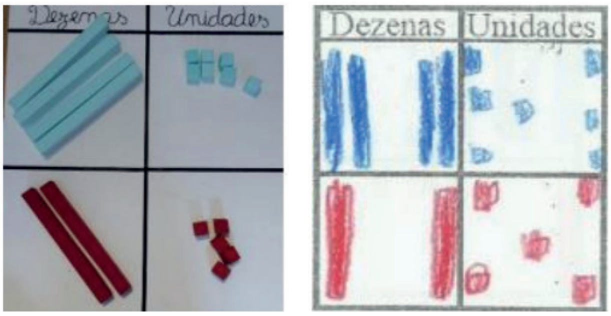


Figura 21: a) Exemplo da representação das quantidades iniciais no TD de um dos grupos; b) Exemplo da representação das quantidades iniciais na folha de exploração de um dos alunos.

Deste modo, a professora inicia um diálogo com os alunos deste grupo com o objetivo de compreender a sua resolução e a interação entre os elementos do grupo (Excerto NM 6).

Aluno K: … O Aluno J ia pôr uma barra azul por isso eu disse lhe que isso estava errado por isso pus as vermelhas…

PE: E porquê?

Aluno K: Porque é de subtrair!

PE: Mas porquê?

Aluno K: Porque vamos tirar vinte e cinco a quarenta e sete para saber quanto… quantos euros é que faltam à…

PE: …à Inês…

Aluno K: … à Inês para… para conseguir comprar o puzzle…

Excerto NM 6: Explicação de um grupo de alunos acerca da resolução da situação problemática (c.f. Rodrigues, 2021, p. 235).

Todos os alunos continuam a sua resolução, efetuando a subtração das duas quantidades (Figura 22 (a)) e encontrando a solução da subtração (Figura 22 (b)), utilizando representações visuais para apresentar estes passos na folha de exploração.

Figura 22: a) Exemplo da representação da subtração das quantidades na folha de exploração de um dos alunos; b) Exemplo da representação da solução da subtração na folha de exploração de um dos alunos.

Para terminar, todos os alunos elaboraram uma resposta para a situação problemática (Figura 23).

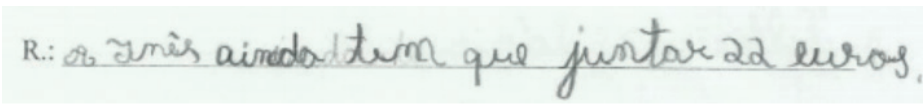


Figura 23: Exemplo de uma resposta escrita na folha de exploração.

Sentido de retirar da subtração

Para a sessão sobre o sentido de retirar da subtração foi pedido que os alunos resolvessem a situação problemática apresentada na Figura 24.

A professora Helena tinha 46 folhas pautadas na sua secretária. Durante a aula de português os alunos usaram 28 dessas folhas. Quantas folhas sobraram?

Figura 24: Enunciado da tarefa com sentido de retirar.

Posteriormente à leitura do enunciado, a PE desloca-se pela sala e verifica as propostas de resolução dos alunos, iniciando um diálogo com o grupo constituído pelo aluno C e D (Excerto NM 7).

Aluno C: Tenho uma primeira… tenho… quarenta e seis… quarenta… quarenta e seis…

PE: Sim, quarenta e seis quê?... Folhas…

Aluno C: Sim, folhas que a professora tinha!

PE: Sim!

Aluno C: E os alunos na aula de português usaram vinte e oito. Eu vou tirar… eu fiz… tirei duas barras com duas barras azuis…

Excerto NM 7: Explicação de um grupo de alunos acerca da resolução da situação problemática (c.f. Rodrigues, 2021, p. 254).

Deste modo, todos os alunos representaram as duas quantidades no TD (Figura 25 (a)) e, posteriormente, na folha de exploração (Figura 25 (b)).

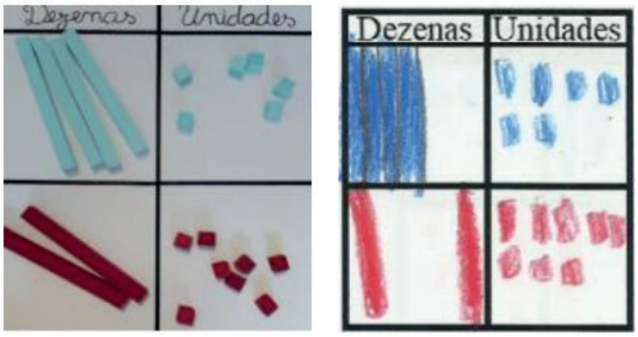


Figura 25: a) Exemplo da representação das quantidades iniciais no TD de um dos grupos; b) Exemplo da representação das quantidades iniciais na folha de exploração de um dos alunos.

Depois de retirarem as unidades do subtrativo às do aditivo, reconheceram que tinham de decompor uma unidade em unidades de ordem inferior (Excerto NM 8).

Aluno C: E depois vi que sobraram mais dois, só que como não tinha mais unidades, transformei uma barra em dez cubinhos!

PE: Muito bem, vou tirar para aqui – referindo-se a auxiliar o aluno a retirar os cubinhos de cima do TD para a mesa.

Aluno C: Em dez cubinhos…

PE: Deixa aqui (em cima da mesa).

Aluno C: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, em dez cubinhos! E tirei os dois cubinhos com… tirei os dois cubinhos…

PE: Que faltavam tirar, não é?

Aluno C: Sim, e depois fiquei a saber que o resultado era dezoito!

PE: E isso significa o quê? O resultado?

Aluno C: É quantas folhas sobraram!

PE: Muito bem!

Excerto NM 8: Explicação de um grupo de alunos acerca da necessidade de decompor uma unidade em unidades de ordem inferior (c.f. Rodrigues, 2021, pp. 254-255).

De modo a representar a subtração das quantidades, todos os alunos apresentaram representações visuais nas suas folhas de exploração. Apresentaram primeiramente a subtração inicial (Figura 26 (a)) e, posteriormente, a subtração dos restantes cubinhos, depois de efetuada a decomposição em unidades de ordem inferior (Figura 26 (b)).

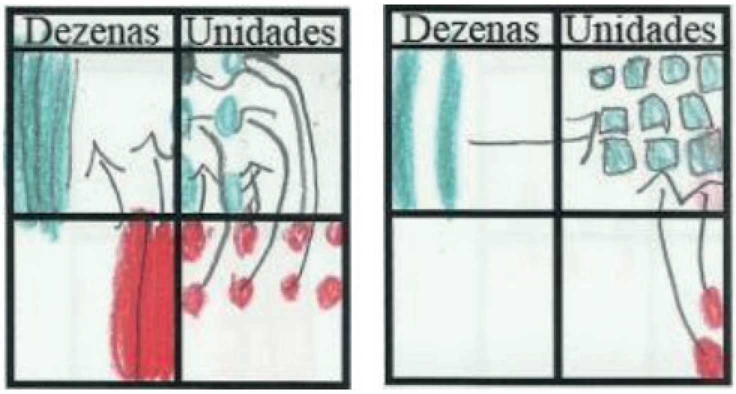


Figura 26: a) Exemplo da representação da subtração das duas quantidades na folha de exploração de um dos alunos; b) Exemplo da representação da subtração das duas quantidades na folha de exploração de um dos alunos (depois de efetuada a decomposição de uma barra em cubinhos).

Assim, todos os alunos encontraram a solução da subtração no TD (Figura 27 (a)), utilizando representações visuais para a apresentar na folha de exploração (Figura 27 (b)).

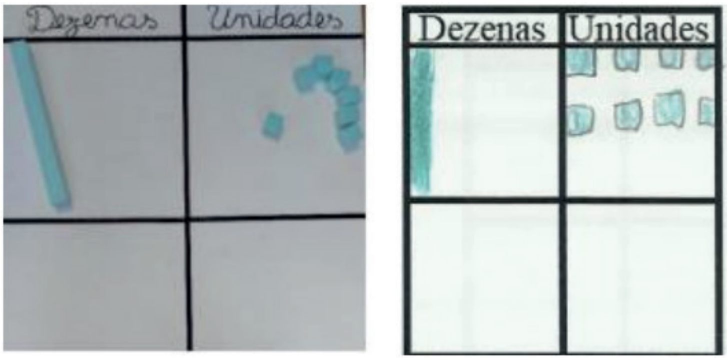


Figura 27: a) Exemplo da representação da solução da subtração no TD de um dos grupos; b) Exemplo da representação da solução da subtração na folha de exploração de um dos alunos.

Para terminar, cada aluno elaborou uma resposta para a situação problemática na folha de exploração (Figura 28).

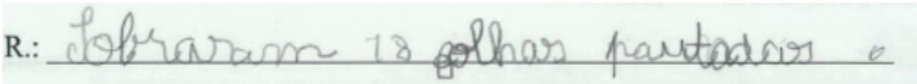


Figura 28: Exemplo de uma resposta escrita na folha de exploração.

Discussão de resultados

Os resultados apresentados corroboram o estudo de Soares e Catarino (2018) na medida em que, em todas as sessões do estudo, os alunos puderam criar os seus próprios procedimentos, discutir e resolver as tarefas apresentadas de forma autónoma, como se verifica nos excertos apresentados. Através do diálogo resultante da manipulação do Tabuleiro Decimal, torna-se percetível o entendimento dos alunos acerca da necessidade de compor unidades numa unidade de ordem superior e decompor uma unidade em unidades de ordem inferior, conteúdos que comummente geram dificuldades nos alunos devido ao seu caracter abstrato (Clements & Samara, 2009). Num dos excertos apresentados na sessão de completar, é ainda possível verificar a cooperação que existiu entre os pares tendo em vista o sucesso na resolução das tarefas, não só nesta, mas em todas as sessões, tal como referido em Attard e Holmes (2020), Costa et al. (2020) e Rocha e Farias (2020). Os resultados deste estudo tornam evidente que o uso de artefactos em sala de aula envolveu os alunos na aprendizagem destes conteúdos matemáticos (Aires & Almeida, 2019) e contribuiu para o sucesso da mesma. Ao longo deste estudo, as características do Tabuleiro Decimal (descritas na secção de metodologia), nomeadamente a existência de duas colunas, representando as ordens das dezenas e das unidades, e de duas linhas, representando as parcelas da adição e o aditivo e subtrativo da subtração, permitiram aos alunos manusear conceptualmente, mobilizando o conhecimento e compreendendo os propósitos das suas ações.

Conclusões

Considerando a questão de investigação que norteou este estudo, conclui-se que o uso do Tabuleiro Decimal potenciou a compreensão dos alunos acerca dos sentidos das operações aritméticas adição e subtração e dos princípios do sistema de numeração decimal. Através dos resultados apresentados verifica-se que a utilização deste artefacto específico permitiu a concretização dos princípios do sistema de numeração decimal, que pelo seu carácter abstrato, por vezes são de difícil compreensão para os alunos. O recurso a este material, bem como, o ambiente de aprendizagem colaborativa proporcionado permitiu que os alunos se envolvessem na sua própria aprendizagem, cooperando entre si e alcançando o sucesso na resolução das tarefas propostas. Com as situações de aprendizagem apoiadas na utilização do Tabuleiro Decimal implementadas, os alunos evoluíram na aptidão de resolver situações problemáticas envolvendo os diversos sentidos, tanto da operação adição como da subtração.

Agradecimentos

Ao Instituto de Telecomunicações que financiou parcialmente este trabalho pela FCT/MCTES através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado por fundos comunitários no âmbito do projeto UIDB/50008/2020. Este trabalho foi realizado no NIEFI - PEAPEA do IPC - ESEC, Bolsa BIC, IPC-ESE/NIEFI/PEAPEA-Grant 1-2020.

Referências bibliográficas

Aires, A., & Almeida, F. (2019). Materiais didáticos na educação pré-escolar: tarefas para trabalhar a matemática. In M. Pires, C. Mesquita, R. Lopes, E. Silva, G. Santos, R. Patrício, & L. Castanheira (Eds.), IV Encontro Internacional de Formação na Docência (pp. 336-347). Instituto Politécnico de Bragança.

Attard, C., & Holmes, K. (2020). "It gives you that sense of hope": An exploration of technology use to mediate student engagement with mathematics. *Heliyon, 6* (1), 1-12.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto Editora.

Cavalgante, M., Lúcio, I., Vieira, A., Bittencourt, I., Vieira, D., Barbosa, L., Caldas M., & Davino, C. (2020). Estimulação cognitiva e aprendizagem infantil: revisão de literatura. *Brazilian Journal of Development, 6* (6), 41981-41990.

Clements, D., & Samara, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math.* Routledge.

Correia, J. (2018). Labmath: "Hands-on activities" Mãos à obra!. In A. Rodrigues, A. Barbosa, A. Santiago, A. Domingos, C. Carvalho, C. Ventura, C. Costa, H. Rocha, J. Matos, L. Serrazina, M. Almeida, R. Teixeira, R. Carvalho, R. Machado, & S. Carreira (Eds.), *Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 203- 204).ESE do Instituto Politécnico de Coimbra.

Costa, S., Duque, I., & Martins, F. (2020). Reciclagem e literacia estatística: uma prática interdisciplinar. *APEduC Revista, 1* (1), 129-141.

Faria, R., & Maltempi, M. (2020). Raciocínio proporcional na matemática escolar. *Revista Educação em Questão, 58* (57), 1-18.

Lopes, J., Viegas, C., & Pinto, A. (2018). *Melhorar práticas de ensino de ciências e tecnologia – Registar e investigar com narrações multimodais.* Edições Sílabo.

Mauhibah, R., & Karso, K. (2020). Student Difficulties in Addition and Subtraction of Two Digit Numbers. *International Conference on Elementary Education, 2* (1), 618-623.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática: Ensino Básico.* MEC.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017). Transformações de representações visuais de múltiplos e divisores de um número. *Comunicações Piracicaba, 24* (1), 55-68.

Moura, J., & Oliveira, I. (2020). O ensino da adição e subtração no ensino fundamental com o auxílio do material dourado. *Revista Multidebates, 4* (5), 95-108.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo.* Universidade Aberta.

Pratas, R., Rato, V., & Martins, F. (2016). Modelação Matemática como prática de sala de aula: o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição. In A. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Encontro de Investigação em Educação Matemática* (35-48). Universidade de Évora.

Rocha, C., & Farias, S. (2020). Metodologias ativas de aprendizagem possíveis ao ensino de ciências e matemática. *Revista REAMEC, 8* (2), 69-87.

Rodrigues, R. (2021). *O uso do Tabuleiro Decimal na compreensão dos princípios do sistema de numeração decimal e dos sentidos das operações.* (Relatório Final do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB, ESEC, Instituto Politécnico de Coimbra). https://www.researchgate.net/publication/349028712_O_uso_do_Tabuleiro_Dec imal_na_ compreensao_ dos_principios_do_sistema_de_numeracao_decimal_e_dos_sentidos_das_opera coes

Rodrigues, R. N., Rato, V., & Martins, F. (2020). Materiais Manipuláveis na aprendizagem da matemática: uso do Tabuleiro Decimal na compreensão dos sentidos da adição. *Indagatio Didactica, 12* (3), 495-517.

Rodrigues, R. N., Rato, V., & Martins, F. (2021). Tabuleiro Decimal e a resolução de situações problemáticas envolvendo as operações aritméticas adição e subtração. *APEduC Revista, 2* (1), 33-45.

Santos, L. (2015). Representações Matemáticas. In L. Santos, M. Pires, R. Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, & T. Pimentel (Eds.), *Encontro de Investigação em Educação Matemática* (3-5). SPIEM.

Silva, T., & Freitas, J. (2019). Utilização de um jogo de tiro ao alvo para evidenciar conceitos e propriedades do sistema de numeração decimal mobilizados por alunos da escola elementar. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 8* (16), 248-270.

Soares, J., & Catarino, P. (2018). Utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem de conceitos matemáticos nos primeiros anos. In R. Lopes, M. Pires, L. Castanheira, E. Silva, G. Santos, C. Mesquita, & P. Vaz (Eds.), *III Encontro Internacional de Formação na Docência* (540-550). Instituto Politécnico de Bragança.

Conhecimento didático em Matemática de uma educadora estagiária num contexto em Educação Pré-Escolar

Didactic knowledge in Mathematics of a trainee educator in a context in Pre-School Education

Rita Engenheiro Rodrigues[1], Catarina Cruz[2], Fernando Martins[3], Rita Neves Rodrigues[4]

Resumo: A curiosidade natural das crianças e o desejo de explorar e aprender são premissas que favorecem a aprendizagem. O educador assume um papel de relevo no desenvolvimento destas aptidões e conhecimentos por parte das crianças, ajustando as suas práticas e aprofundando o seu conhecimento profissional, nomeadamente o seu conhecimento didático. Este conhecimento desenvolve-se continuamente, sendo a reflexão sobre a prática educativa fundamental nessa aprendizagem. Este estudo integra uma investigação mais ampla, na qual se pretende analisar o conhecimento didático, no domínio da Matemática, de uma educadora estagiária (EE) num momento desenvolvido com um grupo de crianças da Educação Pré-Escolar, que teve como questão orientadora: que conhecimento didático mobilizou a EE num contexto envolvendo aprendizagens matemáticas? Nesta comunicação, apenas será analisado o domínio do conhecimento didático "Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens". De acordo com os resultados, parece ser nas variáveis de análise "Reconhece conceitos matemáticos na interação entre/com as crianças" e "Mobiliza conhecimento resultante da interação do conhecimento do conteúdo, das ações das crianças e do contexto" que a EE evidencia maior fragilidade.

Palavras-chave: Conhecimento Didático; Matemática; Educação Pré-Escolar; Jogo.

Abstract: *Children's natural curiosity and their desire to explore and learn, are premises that favor learning. The educator assumes an important role in the development of knowledge of children, adjusting his practices and deepening his professional knowledge, namely didactic knowledge. This knowledge is continually developed, being the educational practice, as well as the reflection on it, fundamental in this learning. This study is a part of a broader investigation that intends to analyze the didactic knowledge, in the field of Mathematics, of a trainee educator, at*

1. Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, engenheirorita@hotmail.com
2. Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, Linha Temática Geometrix (CIDMA), cmcruz@esec.pt
3. Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, UNICID; Instituto de Telecomunicações, Delegação da Covilhã, fmlmartins@esec.pt
4. Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, Portugal, ritanevesrodrigues@hotmail.com

a session developed with a group of children from Pre-School Education, which has as a guiding question: what didactic knowledge did the trainee educator mobilize in a context involving mathematical learning? In this communication, only will be analysed the domain "Mathematics knowledge for the promotion of learning". From the results, it seems to be in the variables "Recognises mathematical concepts in the interaction between/with children" and "Mobilizes knowledge resulting from the interaction of knowledge of the content, the actions of children and the context" that the trainee educator shows the greatest fragility.

Keywords: *Didactic Knowledge; Mathematics; Pre-School Education; Game.*

Introdução

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (2016), designadas pela sigla OCEPE, referem que desde cedo as crianças desenvolvem noções matemáticas e que "os conceitos matemáticos adquiridos nos primeiros anos vão influenciar positivamente as aprendizagens posteriores" (p.74). Assim, o educador deve promover aprendizagens, garantindo a igualdade de oportunidades. A inclusão de todas as crianças "implica a adoção de práticas pedagógicas diferenciadas, que respondam às características individuais de cada uma e atendam às suas diferenças, apoiando as suas aprendizagens e progressos" (p.10). Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (2007), designado pela sigla NCTM, cabe ao educador "estimular o desenvolvimento matemático das crianças, proporcionando-lhes um ambiente rico em linguagem onde o pensamento é encorajado, onde a originalidade é valorizada e as explorações apoiadas" (p.84). Consequentemente, é imprescindível que o educador seja portador de um conhecimento sólido para que consiga adaptar as situações de aprendizagem e diferenciar as suas planificações de acordo com o grupo de crianças (Ribeiro, 2012). Os profissionais de educação devem ser qualificados de competências, capacidades e conhecimento profissional orientados para a sua prática pedagógica.

No domínio da educação matemática, Ponte (2012) defende quatro dimensões do conhecimento didático do educador ou professor: *conhecimento* da Matemática para o ensino; *conhecimento do currículo; conhecimento dos alunos e do processo de aprendizagem; conhecimento da prática educativa.*

A prática educativa e a reflexão sobre esta contribuem para o desenvolvimento do conhecimento didático podendo alterar conceções sobre o que é ensinar Matemática e a própria relação do professor com a Matemática (Thompson, 1992, citado em Oliveira & Serrazina, 2002). Segundo Wilson et al. (1987), refletir é o processo de aprender a partir da experiência, é o processo que o professor faz quando vê o ensino e a aprendizagem que ocorreu, a reconstrói, repõe ou retoma acontecimentos, as emoções e as realizações (Citado em Serrazina, 2000). Assim, a reflexão pode influenciar a atitude do educador ou professor e, consequentemente, as aprendizagens por parte das crianças (Fernandes, 2019).

Num Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB, uma EE acompanhou um grupo de crianças em Educação Pré-Escolar, tendo constatado, por observação e interação com as mesmas, que revelavam pouco interesse e dificuldades de concentração em atividades que envolviam conceitos matemáticos. Nesse sentido, foi desenvolvido com o grupo de crianças com idades compreendidas entre os 3 e os 6 anos de idade, um jogo de tabuleiro, criado pela EE, envolvendo a promoção de aprendizagens matemáticas. Esta comunicação integra uma investigação mais ampla que teve como objetivo analisar e refletir sobre os vários domínios do conhecimento didático matemático, definido por Ponte (2012), mobilizados pela EE na implementação do jogo. Este artigo incide apenas na análise de um dos domínios do conhecimento didático, *Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens* (Ponte, 2012), através de uma NM.

Fundamentação teórica

Matemática na Educação Pré-Escolar

Desde muito cedo que as crianças desenvolvem capacidades que favorecem o raciocínio matemático, neste sentido a Educação Pré-Escolar deve apoiar e estimular essa aptidão natural. “As crianças pequenas possuem um conhecimento informal de Matemática que é surpreendentemente amplo, complexo e sofisticado” (Baroody, 2004; Clements, Swaminatha, Hannibal & Sarama, 1999; Fuson, 2004; Geary, 1994; Ginsburg, 1977; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Piaget & Inhelder, 1967; Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960; Steffe, 2004; citado em Clements & Sarama, 2007, p. 462). Na Educação Pré-Escolar, a exploração de conteúdos matemáticos é, por vezes, limitada, sendo sobretudo abordados pequenos números e formas geométricas simples (Ertle et al., 2008), embora as OCEPE (2016) refiram no domínio da Matemática: *Números e Operações; Organização e Tratamento de Dados; Geometria e Medida; Interesse e Curiosidade pela Matemática.*

As aprendizagens matemáticas em Educação Pré-Escolar devem dissociar-se de um ambiente instrucional e académico, mas antes emergir de situações do quotidiano e do interesse das crianças. Há muito tempo que o recurso aos jogos como um meio de desenvolver conceitos e capacidades matemáticas, tem sido enfatizado por educadores e investigadores (Baroody, Clements & Sarama, 2019).

As crianças gostam de jogar, os jogos motivam-nas e suscitam-lhes aprendizagens ativas. Por exemplo, muitos jogos de tabuleiro requerem competências matemáticas, nomeadamente associadas aos números e operações aritméticas (Stebler, Vogt & Houser, 2013). Clements e Sarama (2009) distinguem *Jogo Sensoriomotor de Jogo Simbólico*, envolvendo este último os tipos: *Construtivo, Dramático e Governado por Regras.*

No contexto de Educação Pré-Escolar, a comunicação assume um papel fulcral, desenvolvendo-se de diferentes modos, oralmente, por desenhos, por manipulação de objetos, por expressão corporal, por símbolos, por escrito, entre outros. A comunicação de ideias recorrendo a diferentes representações, como as ativas, icónicas e simbólicas (Bruner, 1999), são também um importante meio de registo e comunicação de ideias, estratégias e raciocínios, como tal, os educadores devem propor experiências que permitam diversos tipos de comunicação (Castro & Rodrigues, 2008; NCTM, 2007).

Segundo o NCTM (2007), de acordo com o nível de desenvolvimento das crianças, "Os professores deverão proceder à introdução de vocabulário específico e adequado." (p.151). A comunicação sustentada no questionamento promove aprendizagens, por exemplo, Johnson (1982) e Reinhart (2000), defendem que "(…) para a promoção de uma aprendizagem significativa é mais proveitoso fazer perguntas, ou devolver boas perguntas a um aluno, que dar-lhes prontamente respostas." (Citado em Boavida et al., 2008, p. 66).

Conhecimento didático dos educadores em Matemática

A aprendizagem por crianças pequenas não depende apenas da sua aptidão ou capacidades inatas, mas também do conhecimento dos educadores. Para que o desenvolvimento de conceitos matemáticos seja significativo, é importante que o educador seja dotado de conhecimento sobre: a matemática; a progressão das aprendizagens; a interpretação das ações e pensamentos das crianças; as propostas intencionais de atividades ou tarefas, progressivamente mais complexas; a contextualização das aprendizagens (OCEPE, 2016).

Quando os educadores compreendem as progressões do desenvolvimento para cada domínio ou tópico matemático, constroem caminhos de evolução, isto é, "trajetórias de aprendizagem", que envolvem: um objetivo matemático; um caminho de desenvolvimento ao longo do qual as crianças progridem para atingir esse objetivo; um conjunto de atividades instrucionais, ou tarefas, ligadas com cada um dos níveis de pensamento desse caminho que ajudam as crianças a desenvolver elevados níveis de raciocínio (Clements & Sarama, 2014). Clements e Sarama (2014) no seu livro *"Learning and teaching early math: the learning trajectories approach"* apresentam trajetórias de aprendizagem para vários domínios matemáticos.

Normalmente os educadores da primeira infância privilegiam, por exemplo, a leitura, vendo a Matemática, ou as Ciências, como assuntos difíceis de desenvolver, sentindo-se incapazes de o fazer (Ertle et al., 2008). Com um desenvolvimento profissional adequado as crenças e práticas dos educadores em relação à Educação Matemática podem mudar, aumentando a sua compreensão e confiança (Ertle et al., 2008). O desenvolvimento profissional deve ser abrangente, contínuo, intencional, reflexivo, orientado para os objetivos, consciente do conhecimento do conteúdo, do desenvolvimento da criança e das estratégias pedagógicas (Baroody, Clements & Sarama, 2019).

Nas últimas décadas, a necessidade de apoiar o conhecimento profissional dos educadores, nomeadamente no domínio da Matemática, tem-se revelado profícuo na promoção de aprendizagens nas crianças, bem como na organização e gestão de condições ideais (Martins et al., 2017). O conhecimento profissional é orientado para a prática profissional, no qual pode ser considerada a visão pessoal do educador (Ponte, 2012). Para conduzir discussões entre as crianças, o educador, ou professor, necessita de se apoiar no seu conhecimento e, para tal, deve reconhecer a existência de um saber específico para ensinar (Shulman, 1986). Ponte (2012) associa o conhecimento profissional à prática letiva, denominando-o por *conhecimento didático, e identifica quatro domínios: conhecimento da Matemática para o ensino (enquanto disciplina escolar); conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem; conhecimento do currículo; conhecimento da prática letiva.* O estudo que aqui se apresenta é influenciado pela definição de conhecimento didático de Ponte (2012), embora adaptado ao contexto de Educação Pré-Escolar. Assim, são considerados os domínios: *conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens* (em vez de "conhecimento da Matemática para o ensino"); *conhecimento da criança e dos seus processos de aprendizagem* (em vez de "conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem"); *conhecimento do currículo* (mantendo-se a mesma designação); *conhecimento da prática educativa* (em vez de "conhecimento da prática letiva"), cuja definição é apresentada, respetivamente no Quadro 1.

Quadro 1

Domínios do conhecimento didático (Quaresma, 2018).

Domínios do conhecimento didático	Breve definição
Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens	Inclui o conhecimento da Matemática "pura", mas também a interpretação dos conceitos matemáticos e do significado que lhes é atribuído.
Conhecimento da criança e dos seus processos de aprendizagem	Incide nas teorias, implícitas ou explícitas, que o educador tem sobre as crianças, isto é, o conhecimento destas enquanto pessoas, sobre o que as motiva, como se envolvem ou reagem em determinadas situações.
Conhecimento do currículo	Remete para o conhecimento dos objetivos da Matemática, presentes nas orientações curriculares, e na sua articulação vertical e horizontal, bem como para o conhecimento dos materiais e formas de avaliação a utilizar.
Conhecimento da prática educativa	Está associado ao conhecimento do processo de promoção de aprendizagem, envolvendo a planificação, o desenvolvimento de atividades, a condução dessas atividades e a avaliação de todo este processo

O conhecimento didático do educador começa a desenvolver-se na sua formação inicial, sendo posteriormente aperfeiçoado pelas suas vivências profissionais e pessoais. Este conhecimento não se dissocia da prática educativa, uma vez que há uma influência mútua no sentido em que as análises, técnicas e abordagens são selecionadas de acordo com o contexto de atuação (Rodrigues & Ponte, 2020). A articulação entre conhecimento teórico, experiência e reflexão dota o conhecimento didático de uma natureza dinâmica, fortalecida com a prática e com a relação que o educador estabelece entre diferentes conhecimentos ao trabalhar conteúdo matemático, com o objetivo de o tornar compreensível para as crianças (Viseu, 2008).

A reflexão sobre a prática educativa pode fornecer ao educador informação autêntica sobre a sua ação, as razões para a ação e as consequências dessa ação (Oliveira & Serrazina, 2002). Schön (1992) parte do pressuposto de um profissional reflexivo pautado na premissa de aprender fazendo, entendendo "professor reflexivo" como profissional da educação que observa, analisa e reflete sobre a sua prática pedagógica, tendo em vista o aperfeiçoamento da sua atividade docente (Shigunov & Fortunato, 2017). Para Silva et al. (2019), a reflexão inicia-se a partir do confronto da teoria com a prática. É essencial que o educador recorra à informação que lhe é acessível para repensar os seus próprios pontos de vista, modos de pensar e conceções cognitivas e epistemológicas, de forma a conseguir alterar positivamente as práticas pedagógicas (Pedrosa et al., 2018).

Segundo Alarcão (1996), uma das estratégias que facilita a reflexão é a escrita de narrativas, ao contar ou descrever a sua história, ou a história das suas experiências, o professor toma consciência de muitos aspetos que até então poderiam estar "escondidos". As NM são ferramentas com grande potencial para a reflexão sobre a prática educativa, pois descrevem detalhadamente determinado acontecimento. De acordo com Lopes e Cravino (2017), uma NM é "uma descrição cronológica, autocontida e multimodal do que professor e alunos fazem e dizem num dado contexto de ensino, agregando e transformando todos os dados recolhidos (…) seguindo um protocolo previamente definido e publicado" (p.5). Por outras palavras, uma NM é um documento autónomo, claro e conciso que inclui a transcrição rigorosa de excertos dos dados recolhidos, bem como a narração de todas as intervenções dos elementos participantes (intenções, decisões, atitudes, silêncios ou gestos), sendo esta ferramenta facilitadora da reflexão/ formação dos educadores professores.

Opções metodológicas

Descrição da metodologia de investigação

O presente artigo é parte de uma investigação mais alargada, desenvolvida em contexto de Educação Pré-escolar, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB. O estudo apresentado tem por base os pressupostos de uma investigação qualitativa, de índole interpretativo (Bogdan & Biklen, 2013) e design de estudo de caso (Sousa & Batista, 2011). Nesta investigação é realizada uma abordagem qualitativa sustentada na descrição do momento sobre o qual incidiu o estudo, realizada através da construção de uma NM com base nos registos recolhidos. A análise incidiu no domínio *Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens* do conhecimento didático da EE

naquele momento desenvolvido com as crianças.
O estudo é de índole interpretativo, não utiliza instrumentos experimentais e privilegia a análise de caso (Sousa & Batista, 2011). Uma vez que a investigação incide numa sessão desenvolvida pela EE com o grupo de crianças no seu contexto natural (jardim de infância), sobre a qual a EE reflete e investiga a sua própria ação, esta investigação apresenta um design de estudo de caso, na qual a componente reflexiva tem um papel fulcral em todas as fases do estudo.

Contexto do estudo
Fizeram parte do estudo dezoito crianças em Educação Pré-Escolar, com idades compreendidas entre os 3 e os 6 anos, revelando uma acentuada discrepância no desenvolvimento cognitivo, nomeadamente entre as crianças de 3 anos e as restantes.
A sessão sobre a qual incidiu o estudo consistiu na dinamização de um jogo de tabuleiro, sob o tema “Os animais aquáticos”, que havia sido trabalhado com as crianças anteriormente. O jogo foi criado pela EE e integrava desafios envolvendo conceitos matemáticos, nomeadamente números, operações aritméticas e orientação espacial. O tabuleiro do jogo (Figura 1), de grandes dimensões, foi criado com o intuito das crianças serem os peões e de facilitar o acompanhamento do jogo por todo o grupo. As crianças foram organizadas por quatro equipas consideradas mistas no que diz respeito à idade, à Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky, 1980) e ao género.

Figura 1. Tabuleiro do jogo.

Numa fase inicial, as crianças avançaram sobre o tabuleiro de acordo com o número de pintas resultantes do lançamento de um só dado. Numa fase posterior, as crianças avançaram mediante a soma dos números de pintas resultantes do lançamento de dois dados, perspetivando-se nesta fase uma progressão na dificuldade do desafio. A heterogeneidade do grupo quanto ao desenvolvimento cognitivo foi considerada, sendo os desafios diferenciados por grau de dificuldade, de acordo com as idades. A diferenciação do grau dos desafios sustentou-se nas trajetórias de aprendizagem de Clements e Sarama (2014).

Design do estudo
A presente investigação decorreu de um momento desenvolvido com as crianças, no seu contexto natural, no qual foi dinamizado um jogo que teve como intenção promover aprendizagens matemáticas. A EE reflete e investiga a sua própria ação no momento desenvolvido com o intuito de analisar o seu conhecimento didático na dimensão Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens (Ponte, 2012).
O processo de investigação sobre a própria prática teve início com a definição da problemática e estruturação do estudo em três momentos fundamentais: a recolha de dados, a organização e análise dos mesmos e, por último, a sua discussão e avaliação.

Recolha e análise de dados
Os dados resultantes foram recolhidos através da observação participante da EE, notas de campo, registo de áudio e registo fotográfico. Foi respeitado o dever ético e de confidencialidade, tendo sido mantido o anonimato das crianças envolvidas na investigação.
O cruzamento de informação, através da triangulação dos dados recolhidos por forma a garantir a validade dos mesmos, permitiu a descrição cronológica da intervenção, através da construção de uma NM, seguindo os pressupostos do protocolo descrito em Lopes et al. (2018).
Para analisar o conhecimento didático da Matemática mobilizado pela EE, durante a sessão, com a intenção de promover aprendizagens matemáticas, foi construída uma matriz de análise, constituída por categorias referentes às dimensões do conhecimento didático, do modelo conceptual do conhecimento profissional de Ponte (2012), adaptado ao contexto da Educação Pré-Escolar. Para cada domínio foram apresentadas variáveis de análise e a respetiva definição influenciadas por Lopes et al. (2018) e Ponte (2012). O Quadro 1 descreve as variáveis de análise referentes ao domínio abordado neste estudo e respetiva definição, quanto aos restantes domínios, que não são objeto de estudo neste trabalho, foram consideradas as variáveis: *Conhecimento do currículo* (adequa os conteúdos matemáticos abordados ao currículo; utiliza recursos didáticos adequados; integra diferentes áreas do conhecimento); *Conhecimento das crianças e da aprendizagem* (adequa as tarefas ao nível etário e às aprendizagens das crianças; revela conhecimento da progressão no desenvolvimento dos conceitos matemáticos envolvidos; compreende as respostas das crianças e eventuais erros); *Conhecimento da prática educativa* (gere a tarefa; dá autonomia; dá informação; monitoriza as ações e as aprendizagens das crianças; solicita esclarecimentos; devolve a questão às crianças; expõe para o grande grupo; sintetiza; ignora epistemicamente; incentiva as crianças; promove a comunicação entre as crianças; promove a comunicação matemática).

Apresentação e discussão de resultados

Os resultados centram-se no domínio Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens mobilizado pela EE e cujas unidades/ variáveis de análise se encontram descritas e definidas no Quadro 2.

Quadro 2

Unidades/ variáveis de análise do domínio *Conhecimento de Matemática para a promoção de aprendizagens*

Domínio	Unidades/Variáveis de análise	Breve definição
Conhecimento de Matemática para a promoção de aprendizagens	Utiliza com rigor vocabulário específico	O educador utiliza terminologia matemática adequada.
	Utiliza com rigor os conceitos matemáticos envolvidos .	O educador emprega, com rigor, conceitos matemáticos na mobilização de conhecimentos.
	Reconhece conceitos matemáticos na interação entre/com as crianças .	O educador identifica a emergência de conceitos matemáticos nas ações das crianças.
	Mobiliza conhecimento resultante da interação do conhecimento do conteúdo, das ações das crianças e do contexto.	O educador, apoiado no contexto e nas ações das crianças, bem como no seu conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos, promove momentos de consolidação ou de desenvolvimento de novas aprendizagens.

A apresentação e análise dos dados está sustentada na identificação de unidades/variáveis de análise do Quadro 2, apresentando para cada uma evidências presentes na NM, acompanhadas da respetiva fundamentação. Os quadros que se seguem resultam do cruzamento entre os descritores do Quadro 2 e as informações presentes na NM. Note-se que as crianças são designadas por CM (no caso do sexo masculino) e por CF (no caso do sexo feminino), distinguindo-se com recurso a algarismos.

No Quadro 3 são apresentadas evidências da variável “Utiliza com rigor vocabulário específico”.

Quadro 3

Evidências da variável de análise “Utiliza com rigor vocabulário específico”.

Evidências	Fundamentação
Uma criança de cinco anos retirou a seguinte carta com um desafio:  **EE: "**Isto diz assim: salta como um golfinho tantas vezes quanto o **número** na carta. Que **número** está na carta?"	Designa a quantidade representada na carta por "número".
A EE leu o seguinte desafio para um menino de três anos de uma equipa. **EE: "**CM2, levanta tantos dedos quanto o **número** de elementos da tua equipa."	Emprega o termo "número" para designar o cardinal de um conjunto.
Um peão de uma equipa encontrava-se na casa assinalada com uma seta na figura abaixo. Perante a necessidade de escolher um de dois possíveis percursos, a EE questiona a criança de 3 anos quanto ao percurso pelo qual seguirá.	Refere o termo "distância" como uma característica mensurável do percurso.
 **EE: "**Quatro. E agora tens de ir para onde? Para ali ou para aqui? Olha vê a **distância**."	
Perante dificuldades evidenciadas por algumas crianças na contagem do número de casas a avançar, a EE conta oralmente. **EE: "1…2…3…4…**E agora espera, espera no quatro. Agora, o CM1 quer ir para aqui ou para aqui?" (...) **EE: "**Então vá.**1… 2… 3… 4… 5… 6…**"	Verbaliza oralmente, e sequencialmente, as palavras que identificam os primeiros números naturais.
Ao ser confrontada com a escolha de um de dois percursos, encontrando-se a criança posicionada de modo a que um dos percursos se encontrava à sua direita e o outro à sua esquerda, a EE questiona: **EE: "**Então? Ele vai para a **esquerda** ou para a **direita**? **Esquerda** ou **direita**?"	Usa os termos "esquerda" e "direita" para orientar e localizar espacialmente os percursos tendo como referência a criança.
A EE lê um desafio para uma criança de 6 anos: **EE:** "Tens que dar nove saltos com o **pé esquerdo** e cinco saltos com o **pé direito**."	Usa os termos "esquerdo" e "direito" para identificar o respetivo pé.
Referindo-se ao número de casas que uma das crianças teria que avançar: **EE: "**Ah! CF5, 6 casas para a **frente**."	Orienta a criança usando vocabulário de orientação espacial.

O Quadro 3, evidencia o recurso a vocabulário específico e adequado relacionado com números, contagem e orientação espacial, por parte da EE. A seguir, apresentam-se evidências relativas à variável "Utiliza com rigor os conceitos matemáticos envolvidos".

Quadro 4

Evidências da variável de análise "Utiliza com rigor os conceitos matemáticos envolvidos".

Evidências	Fundamentação
A EE questiona uma criança de cinco anos quanto a um desafio colocado: **EE:** "Então quantas vezes é que tens que saltar como um golfinho?" **CF3:** "Zero." **EE:** "Muito bem! Ou seja…" **CF3:** "Nenhuma." **EE:** "Nenhuma!"	Associa o número zero à palavra "nenhuma", de acordo com o contexto.
Na escolha de um dos percursos possíveis do tabuleiro, a EE questiona: **EE: "**Quatro. E agora tens de ir para onde? Para ali ou para aqui? Olha vê a **distância**."	Utiliza o conceito de distância como uma grandeza associada ao percurso a percorrer, sendo medida a partir da contagem do número de casas a percorrer até chegar a um dado ponto.
A EE questiona as crianças quanto aos percursos possíveis: **EE:** "Então? Ele vai para a **esquerda** ou para a **direita**? **Esquerda** ou **direita**? Tu…" (Apontando para um dos elementos da equipa do CM1). **Educadora cooperante: "Esquerda** ou **direita**? Grupo?" **CM2:** "Esquerda." **EE:** "Tu… **esquerda** ou **direita**?" (Apontando para um dos elementos da equipa do CM1). **CM3:** "Direita." **EE:** "Tu… **esquerda** ou **direita**?" (Apontando para outro elemento da equipa do CM1) **CF1: "**Direita." **EE:** "E tu CM1? Para aqui ou para aqui?"	Associa aos possíveis percursos os termos de orientação espacial "esquerda" e "direita", tomando a criança que desempenha o papel de peão como ponto de referência. Questiona os restantes colegas de grupo, desafiando-os a identificar cada uma das opções a partir de um sistema de referência externa, isto é, identificando a esquerda e direita do peão.
Perante a auscultação da opinião dos elementos de uma equipa quanto ao percurso a seguir, a EE refere: **EE:** "Para aqui. Está **empatado.**"	Emprega o termo "empatado" para referir que os dois percursos tiveram o mesmo número de preferências.
Depois de lançar o dado, uma das crianças ia pegar uma carta cuja cor não correspondia à cor da casa onde se encontrava o peão da equipa (havia crianças no grupo que ainda não estavam familiarizadas com todas as cores) e a EE interveio: **EE:** "Não! De que cor é a carta? Tem que ser da **mesma** cor que a casa em que está o elemento da tua equipa."	Promove a correspondência entre objetos considerando um atributo em comum, a cor.

Ao auscultar a opinião dos elementos de uma equipa, a EE questiona: **EE:** "A equipa concorda que ela vá pelo **mesmo** caminho que os outros?"	Embora o caminho tenha sido percorrido em momentos diferentes, por crianças diferentes e num número de casas diferente, reforça que se trata do mesmo caminho.
A EE lê um desafio para uma criança de 6 anos: **EE:** "Tens que dar nove saltos com o pé **esquerdo** e cinco saltos com o pé **direito**."	Indica à criança o que terá de fazer combinando duas informações, uma relativa à quantidade de saltos e outra relativa à identificação do pé que dará o correspondente número de saltos, recorrendo a vocabulário de orientação espacial.
Depois da EE ler um desafio para uma criança de 6 anos, continua a questioná-la: **EE:** "Tens que dar nove saltos com o pé **esquerdo** e cinco saltos com o pé **direito**." **EE:** "E quantos saltos é que deste ao **todo**?"	Associa a expressão "ao todo" à soma dos números envolvidos.
Perante dificuldades evidenciadas pelas crianças na contagem: **EE:** "Não. **1, 2, 3** (a apontar para cada uma das pintas do dado) e agora a seguir ao três (a apontar para a próxima pinta)?" (...) **EE:** "(...) Então vá. **1...2...3...4...5...6...**"	Procede à contagem oral com a criança, estabelecendo uma correspondência um a um entre as palavras que designam números e as pintas dos dados. Enfatiza a ordem das palavras que representam números. Conta oralmente promovendo a memorização da sequência das palavras.
Coloca um desafio a um dos elementos de uma equipa: **EE:** "Então vá, tira a azul. Só que agora a azul é para os de seis anos e a tua equipa não tem nenhum de seis anos, portanto vamos ver se tu consegues responder. **Conta do número 12 ao número 20.**" **CF3:** "Hmmm,1..." (Sussurrando) **Educadora estagiária:** "Para a frente... do 12 até ao 20...12..."	Promove a contagem a partir de um dado número.
A EE questiona uma das crianças quanto à sua posição no tabuleiro relativamente a uma outra criança que também se encontrava sobre o mesmo: **EE**: "(…) És tu que estás à **frente**?"	Questiona a criança quanto à sua posição no espaço incitando o pensamento espacial e induzindo-a a articular dois sistemas de referência, um sistema de autorreferência (quando analisa se o colega está à sua frente) e um sistema de referência externa (quando verifica se está à frente do colega, sendo o colega o ponto de referência).

A EE mobilizou conhecimentos relacionados com os números, contagem, operações aritméticas, orientação espacial e medida. Os conceitos matemáticos envolvidos foram utilizados de acordo com a faixa etária e desenvolvimento cognitivo das crianças, sem descurar o seu rigor.

No Quadro 5, são apresentadas evidências da variável "Reconhece conceitos matemáticos na interação entre/com as crianças".

Quadro 5

Evidências da variável de análise "Reconhece conceitos matemáticos na interação entre/com as crianças”.

Evidências	Fundamentação
Enquanto uma das crianças avança no tabuleiro, outra sugere: **CM3:** Oh CM6 passa à frente da CF5. (A CF5, peão de outra equipa, encontrava-se numa das casas do percurso do CM6.)	A criança dá indicações ao colega usando vocabulário de orientação espacial.
Perante um desafio dirigido a uma criança de seis anos: **EE:** “Ok. Isto é para um menino de seis anos. Quem tem seis anos?” (**O CM3 levantou o braço**.)	A criança identifica-se instantaneamente como tendo seis anos de idade.
Após o lançamento do dado: **EE:** “Quantas casas é que...Quem é que é?” **CM3:** “A CF5.” **EE:** “A CF5 tem que andar?” **CM7:** “**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10**.” – disse a contar de cor, sem associar as palavras às pintas representadas no dado (tratando-se apenas de seis pintas).	A criança conta oralmente até dez mas não estabelece uma correspondência entre as palavras da contagem e as pintas do dado.
A EE coloca um desafio a uma criança de três anos: **EE:** “CM7 quantos olhos tens?” (...) **CM7:** “1...2...” **EE:** “Dois! Muito bem!” **CM5:** “Não, **tem quatro.”** **Educadora cooperante**: “Tem quatro?” **EE:** “O CM7 tem quatro olhos?” **Educadora cooperante:** “O CM7 tem quatro olhos?” **CM7:** “Não, não...” **CM3:** “Isso são os **anos**!”	Inicialmente, a criança CM5 confunde a pergunta colocada pela EE dizendo que tem quatro olhos. A criança CM3 associa a resposta “quatro” à idade de CM7 e não ao número de olhos.
Numa segunda fase do jogo foi acrescentado algum grau de dificuldade, tendo que lançar por cada jogada dois dados em simultâneo, cuja soma das pintas das faces dos dados corresponde ao número de casas que o peão terá que avançar: **EE:** “Agora tem que ser os dois juntos. Assim...quantas casas é que a CF5 tem que andar?” **CM7:** “**Cinco, um**.” (O CM7, de 3 anos, tenta responder, referindo o número de pintas de cada face.) **CM8:** “**Seis.”** (O CM8 tem 4 anos.)	A criança CM7 identifica o número de pintas nas faces voltadas para cima mas não procede à adição. A criança CM8 ajuda-a dizendo corretamente o valor da soma.

No decorrer do jogo, as crianças evidenciaram conhecimento de conceitos matemáticos de uma forma subtil, adequada à sua faixa etária. As evidências apresentadas no Quadro 5, descrevem situações nas quais emergiram conceitos matemáticos nas interações entre as crianças, mas também em interações entre as crianças e a EE. Os conceitos identificados estão relacionados com números, contagem, operações aritméticas e orientação espacial. No Quadro 6 é analisada a variável

"Mobiliza conhecimento resultante da interação do conhecimento do conteúdo, das ações das crianças e do contexto".

Quadro 6
Evidências da variável de análise "Mobiliza conhecimento resultante da interação do conhecimento do conteúdo, das ações das crianças e do contexto".

Evidências	Fundamentação
EE: "Então quantas vezes é que tens que saltar como um golfinho?" **CF3:** "Zero." **EE:** "Muito bem! Ou seja…" **CF3:** "Nenhuma." **EE:** "Nenhuma!"	No seguimento da resposta dada pela criança, reforça o significado de "zero" associando-o à ideia de "nenhuma".
EE: "Tens que dar nove saltos com o pé esquerdo e cinco saltos com o pé direito." **CM3:** "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9! (Enquanto salta com o pé esquerdo.) 1, 2, 3, 4, 5! (Enquanto salta com o pé direito.)" **EE:** "E quantos saltos deste ao todo?" **CM3:** 9 e 5. (...) **Educadora cooperante:** Então e isso é quanto? 9 mais 5? (...) **CM3:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14….14!	Na sequência de um desafio colocado à criança, questiona-a quanto à totalidade de saltos que tinha dado, incentivando-a a realizar uma adição.
Após o lançamento do dado, a EE questiona as crianças quanto ao número de casas a percorrer: **EE:** "A CF5 tem que andar?" **CM7:** "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10." – disse a contar de cor, sem associar as palavras da contagem às pintas representadas no dado, que eram seis. **EE:** "Olha conta aqui." (Apontando para cada uma das pintas, no sentido de auxiliar a correspondência entre as palavras da contagem e as pintas da face do dado.)	Perante uma resposta incorreta da criança, reforça a contagem oral articulada com a correspondência um a um entre as palavras dos números e as pintas, fazendo com que a criança compreendesse que o último número proferido representa todo o grupo e não apenas o último elemento (princípio da cardinalidade).

Conclusões

Neste estudo é analisado o domínio do conhecimento didático Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens de uma EE. A análise incidiu no relato, com recurso às NM, da ação da EE na implementação de um jogo com crianças da Educação Pré-Escolar envolvendo a promoção de aprendizagens matemáticas. Foi objetivo deste estudo refletir sobre o conhecimento didático mobilizado pela EE no âmbito da promoção de aprendizagens matemáticas. O recurso às NM como ferramenta de registo do momento realizado foi fulcral, permitindo à EE fazer uma análise inicial sobre a sua prática naquele contexto, como foi também fundamental numa reflexão mais aprofundada sustentada nas variáveis de análise em estudo.
De acordo com a análise dos resultados apresentados, parece ser nas variáveis de análise "Reconhece conceitos matemáticos na interação entre/com as crianças" e "Mobiliza conhecimento resultante da interação do conhecimento do conteúdo, das ações das crianças e do contexto" que existe um menor número de evidências, parecendo revelar

algumas fragilidades da EE nestas variáveis. Entre as quatro variáveis definidas no domínio do conhecimento em análise, estas são as que estão mais dependentes da interação com/entre crianças, isto é, mais dependentes do conhecimento resultante da prática educativa. Encontrando-se a EE a principiar a sua formação complementada com a prática educativa, poderá eventualmente ser esta uma das razões para os resultados referidos.

Os resultados apresentados apontam que a EE recorreu a vocabulário específico e adequado dos domínios Números e Operações e Geometria e Medida, bem como mobilizou conhecimentos dos conteúdos que pretendia trabalhar, de acordo com a faixa etária das crianças. As interações com/entre as crianças permitiram à EE, por um lado, perceber dificuldades que estas evidenciavam, reforçando nesses casos os conceitos envolvidos e, por outro, promover aprendizagens. Esta investigação permitiu que a EE refletisse sobre a sua prática e se confrontasse com as suas fragilidades, contribuindo para ampliar o seu conhecimento didático no domínio Conhecimento da Matemática para a promoção de aprendizagens.

Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: Programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Ministério da Educação – Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação* (12.ª ed.). Porto Editora.

Bruner, J. (1999). Para uma teoria da educação. Relógio D'Água.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido e número e organização de dados: Textos de apoio para Educadores de Infância.* Ministério da Educação – Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Clements, D., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461-555). Information Age Publishing.

Clements, D., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach* (2nd ed.) .Routledge.

Ertle, B., Ginsburg, H., Cordero, M., Curran, T., Manlapig, L., & Morgenlander, M. (2008). The essence of early childwood mathematics education and the professional development needed to support it. In A. Dowker (Ed.), *Mathematical difficulties: Psychology, neuroscience and interventions* (59-83). Elsevier.

Fernandes, C. S. M. (2019). *Conhecimento estatístico para ensinar de uma professora estagiária a partir da análise das suas práticas relacionadas com a promoção da literacia estatística.* (Dissertação de Mestrado, ESEC, Coimbra, Portugal).

Lopes, J., Viegas, C., & Pinto, A. (2018). *Melhorar Práticas de Ensino de Ciências e Tecnologia: Registar e Investigar com Narrações Multimodais.* Edições Sílabo.

Martins, F., Duque, I., Pinho, L., Coelho, A., & Vale, V. (2017). *Educação Pré-Escolar e Literacia Estatística – A Criança como Investigadora.*

Psicosoma.
Ministério da Educação (2016). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar.* MEC.
NCTM (2007). *Princípios e Normas para a matemática escolar.* APM.
Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In APMGTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (29-42). APM.
Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (83-98). Graó.
Quaresma, M. (2018). *O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática: duas experiências do ensino básico.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal).
Ribeiro, A. J. (2012). Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26* (42B), 535-558.
Serrazina, L. (2000). Desenvolvimento profissional de professores: contributos para reflexão. *Da Investigação às Práticas - Estudos de Natureza Educacional 2000*, Vol I, 125-141.
Shigunov, A. (2017). *20 anos sem Donald Schön: o que aconteceu com o professor reflexivo?* In A. Shigunov & I. Fortunato (Org.). Edições Hipótese.
Sousa, M., & Batista, C. (2011). *Como fazer Investigação, Dissertações, Teses e Relatórios.* Lidel. Viseu, F. (2008). *A formação do professor de matemática, apoiada por um dispositivo de interação virtual no estágio pedagógico.* (Tese de Doutoramento, FCUL, Lisboa, Portugal)
Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.° ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17* (3), 347-374.
Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in Society: The development of higher psychological process.* Harvard University Press.

Método de Singapura: O Colori na Aprendizagem da Adição

Singapore Method: The Colori in the learning of addition

Catarina Silva[1], Dárida Fernandes[2], Inês Varela[3], Sofia Gomes[4]

Resumo: Um dos objetivos do “Método de Singapura” é basear a aprendizagem matemática na resolução de problemas, tornando os alunos confiantes, autónomos, reflexivos e inovadores na construção do conhecimento, num ambiente de equipa que desenvolvam a cooperação e o poder de argumentação. Neste contexto de pesquisa, este projeto de investigação teve por base a questão problema: “Qual o impacto do “Método de Singapura” na motivação, interesse e envolvimento dos alunos na aprendizagem contextualizada da adição?”. Definiram-se ainda os seguintes objetivos: a) aprofundar o conhecimento do “Método de Singapura”, numa perspetiva contextualizada do conhecimento; b) analisar a motivação, o interesse e o envolvimento dos alunos na aprendizagem da adição, no 1.º ano de escolaridade. A recolha e a análise de dados seguiram uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa de cariz exploratório, num contexto educativo, sendo apresentados e analisados os resultados ao longo do estudo. A implementação das tarefas demonstrou o interesse das crianças nas atividades e as suas tentativas de diversificar estratégias de resolução. O facto de os intervenientes não contactarem diariamente com o “Método de Singapura” e não utilizarem estratégias habitualmente exploradas nesta abordagem, não limitou a investigação, uma vez que estes conheciam diversos métodos de resolução e demonstraram entusiamo em aplicá-los.

Palavras-chave: “Método de Singapura”; Resolução de problemas; Adição; Estratégias diferenciadas.

Abstract: *One of the objectives of the “Singapore Method” is to base mathematical learning on problem solving, making students who are confident, independent, reflective and innovative. On the other hand, it is also intended for students develop their communication skills and cooperation. The current investigation presents the following question “What kind of impact does the Singapore Method have in students regarding their motivation, interest and engagement when it comes to learning the addition approach?”. Hence, one can define the main goals of this study as: a) deepen the knowledge of the “Singapore Method”, in*

1. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, 3200033@ese.ipp.pt
2. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, daridaf@ese.ipp.pt
3. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, 3200039@ese.ipp.pt
4. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, 3170371@ese.ipp.pt

a contextualized perspective of knowledge; b) analyse the motivation, interest and engagement of first grade students in the learning of addition, based on the method for differentiated development strategies in problem solving. The data selected on the implementation is done thru a qualitative and interpretative method of an exploratory nature. The implementation of these tasks has showed children's enthusiasm and interest in these activities and also their attempt of different strategies when it comes to problem solving. The fact that the children in the investigation did not have often contact with the Singapore Method, didn't limited the study, since some strategies that are usually used were explored with enthusiasm.

Keywords: *"Singapore Method"; Problem solving; Addition; Differentiated strategies*

Introdução

Com base numa pesquisa prévia de diferentes metodologias no processo de aprendizagem e ensino da Matemática, foi selecionado o "Método de Singapura", dado ser uma abordagem cada vez mais utilizada nas escolas, em todo o mundo, e porque tem sido, recentemente, bastante reconhecida e estudada por vários investigadores. Além disso, Singapura ocupa os lugares cimeiros nos programas internacionais: PISA (Programme for International Student Assessment) e TIMSS (T*rends in International Mathematics and Science Study*) (Kaur, 2014).

De acordo com Dinis et al. (2019), o "Método de Singapura" guia-se pela máxima "Thinking School, Learning Nation" que, traduzido para português, significa "Escola que pensa, Nação que aprende". Deste modo, o método apresenta como principal objetivo criar uma geração de alunos confiantes, autónomos, reflexivos e inovadores, que demonstrem interesse nas suas aprendizagens e que contribuam para o contínuo crescimento e desenvolvimento de Singapura.

Ainda segundo os autores, uma análise pormenorizada ao "Método de Singapura" aponta para o construtivismo presente no mesmo, a ideia de que o professor deve assumir um papel de mediador das aprendizagens, não ocupando uma posição central de poder na sala de aula, e a necessidade de as aprendizagens serem realizadas através da exploração e manipulação de material concreto (Dinis et al., 2019).

Assim, a problemática do presente estudo de caso foi baseada no levantamento da seguinte questão: Qual o impacto do "Método de Singapura" na motivação, interesse e envolvimento dos alunos na aprendizagem contextualizada da adição, no 1.º ano de escolaridade?"

Neste sentido, os objetivos que se pretendem atingir no decorrer do estudo são: a) aprofundar o conhecimento do *"Método de Singapura", numa perspetiva contextualizada do conhecimento; e b) analisar a* *motivação, o interesse e o envolvimento dos alunos na aprendizagem da adição, no 1.º ano de escolaridade, tendo por base o método, no que concerne às estratégias diferenciadas de desenvolvimento na resolução de problemas.*

De modo a dar resposta à questão-problema e aos objetivos propostos, foram desenvolvidas uma síntese teórica sobre o tema e uma proposta de problemas, direcionada para uma turma de vinte crianças, do 1.º ano de escolaridade. Devido à situação atual de pandemia, o contexto educativo teve de ser alterado, mas não impediu de ser realizado o presente estudo.

Fundamentação Teórica

Princípios e História do Método de Singapura

O "Método de Singapura" ou, para alguns autores, a abordagem de ensino da Matemática em Singapura, surgiu em 1982. Este método emergiu da vontade do governo de Singapura criar um currículo próprio para o ensino dos seus alunos, tornando o sistema educacional do país mais rico e flexível.

O modelo em questão centra-se no desenvolvimento da curiosidade da criança e no gosto pela exploração, sendo que os professores desempenham apenas um papel de facilitadores da aprendizagem dos alunos, utilizando sempre materiais didáticos como auxiliadores do ensino.

A Matemática em Singapura recorre, aplica e implementa a abordagem didática "CPA" (*Concret - Pictorial - Abstract*). Esta é constituída por três fases inspiradas na obra de Jerome Bruner, que defendia que a aprendizagem de cada indivíduo é um processo ativo, caracterizado pelo domínio progressivo da representação do conhecimento, a partir de três sistemas paralelos de processamento da informação: ativo, icónico e simbólico que, os autores do "Método de Singapura", renomearam para concreto, pictórico e abstrato (Dinis et al., 2019). Deste modo, a abordagem inicia-se com a manipulação de materiais concretos, de seguida a representação pictórica, iconográfica ou esquemática e por último a representação simbólica.

Na mesma ótica, Ban Har (2017, citado por Fernandes, 2017a) afirma que, através desta prática pedagógica, pretende-se, principalmente, desenvolver o raciocínio e as potencialidades do cérebro da criança, como a flexibilidade mental, a formação concetual e a capacidade de resolução de problemas e de abstração, de forma equilibrada, global e particular.

Organização no Método de Singapura

Fernandes (2017b) afirma que a aula de Matemática de Singapura tem uma dinâmica própria, ou seja, há uma rotina que deve ser trabalhada desde cedo com as crianças. Deste modo, para a autora, a aula de Matemática de Singapura divide-se em seis momentos: i) a exploração do problema; ii) a discussão em grande grupo; iii) a construção do jornal; iv) a revisão do que foi escrito no jornal; v) a escrita de ideias e prática guiada; e vi) a prática autónoma. Todas as etapas descritas anteriormente vão ser explicitadas na metodologia.

Resolução de Problemas

Segundo o "Método de Singapura", os alunos devem ser encorajados a refletir sobre aquilo que pensam, como comunicam e como resolvem os problemas, desenvolvendo várias competências. Além disso, também devem ser incentivados a ter um pensamento flexível e a analisar várias situações e problemas matemáticos, promovendo a capacidade de reconhecer e aplicar a Matemática noutras disciplinas e no quotidiano (Fernandes, 2017a).

Nos manuais de Singapura, a resolução de problemas apresenta-se como um elemento central para a aprendizagem de cada competência e para a discussão e aquisição de novos conceitos. Os problemas são consistentes e coerentes, de forma a fazer sentido para os alunos, e ao mesmo tempo heurísticos, isto é, "menos rotineiros" e de exploração, que englobem a utilização de diversas estratégias, prescindindo da aplicação de estratégias mecânicas e rápidas, assim como a utilização do algoritmo (Dinis, et. al; Fernandes, 2017a).

As estratégias utilizadas na resolução de problemas são diversificadas, sendo que o Método de Singapura foca em algumas de particular relevância: o *Number Bond, o Basic Fact Family/ Fact Family Numbers* e o Modelo de Barras (Fernandes, 2017b).

De acordo com Fernandes (2017a), os professores devem valorizar as diferentes estratégias utilizadas pelas crianças. Além disso, estes devem observar e avaliar os comentários e registos das crianças e questionar acerca do seu pensamento e raciocínio, de modo a desenvolver processos de metacognição.

Relativamente à adição, a mesma autora afirma que a introdução deste conceito deve ser desenvolvida através da resolução de um problema do quotidiano do aluno. De modo a desenvolver e aperfeiçoar o conhecimento deste conteúdo, a criança deve ser motivada a utilizar diferentes estratégias e processos, o que também permite que esta consiga optar pelo método mais adequado em cada situação (Fernandes, 2017b).

Metodologia

Opções Metodológicas

O presente artigo caracteriza-se como um estudo de caso, de tipo pilotagem e a sua implementação será analisada e discutida através de um método de recolha de dados de natureza qualitativa e interpretativa de cariz exploratório.

A proposta de problemas prevista no presente estudo de caso foi idealizada para uma turma de 1.º ano com vinte alunos. Contudo, dada à situação atual de pandemia, só foi possível implementar com um grupo de quatro crianças (Criança 1 – C1; Criança 2 – C2; Criança 3 – C3; Criança 4 – C4), com a orientação de uma investigadora da equipa. Estes alunos estão integrados numa turma mista e inscritos no 1.º ano de escolaridade. Duas crianças pertencem ao sexo feminino (C1 e C3) e duas ao sexo masculino (C2 e C4), sendo que apenas uma tem sete anos (C2) e as restantes têm seis. Todas demonstram interesse e curiosidade em aprender, embora uma delas (C3) revele dificuldades no domínio da Matemática.

Importa salientar que a professora titular de turma já tinha abordado o conceito de adição, os alunos já sabiam aplicar o algoritmo e utilizar outras estratégias. Além disso, a mesma revelou ser uma peça fundamental para as crianças se sentirem mais confortáveis, seguras e motivadas nos momentos de aprendizagem.
Dado que a escola não possuía uma horta, o grupo não procedeu à colheita das cenouras. Contudo, foram disponibilizados quatro cestos, os dois primeiros com dez cenouras cada, o terceiro com duas e o último com quatro. É importante referir que, antes dos alunos procederam à resolução da questão-problema inicial, alguns realizaram a contagem do total de cenouras, através da observação dos cestos.
Além disso, não foi possível realizar os momentos de construção e revisão do jornal, dado que o tempo de implementação era limitado e, por isso, selecionou-se as etapas mais pertinentes para a problemática do estudo.
Com base no documento orientador *Programas e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, no 1.º ano, os conteúdos relativos à adição que se pretendem mobilizar com a implementação da sequência didática são: adições cuja soma seja inferior a 100 por métodos informais; os símbolos “+” e “=”; e problemas de um passo envolvendo situações de juntar e acrescentar (Bivar et al., 2013).
Relativamente aos objetivos que se pretendem atingir, estes têm como base o documento orientador Aprendizagens Essenciais do 1.º Ciclo do Ensino Básico, do 1.º ano, e são os seguintes: reconhecer e memorizar factos básicos da adição; calcular com números inteiros não negativos, através da utilização de diferentes estratégias que mobilizem relações numéricas e propriedades das operações; e reconhecer e utilizar diferentes representações do mesmo número e relacioná-las (República Portuguesa, 2018).

Plano de Ação
Com base em tudo que foi referido anteriormente, o presente plano de ação é estruturado conforme os diferentes momentos de uma aula do “Método de Singapura”. Considerouse, também, pertinente, acrescentar um momento de Registo Final, para que os alunos tivessem a oportunidade de refletir sobre o seu processo de aprendizagem.

1. Exploração do Problema (45 minutos): A aula de Matemática inicia-se com um momento de carpet time, isto é, com a apresentação e exploração do problema, onde as crianças estão sentadas em roda, no tapete.

Problema: A Horta do Colori

Para termos uma alimentação saudável, há muitos, muitos anos que o nosso amigo Colori queria ajudar-nos a plantar vegetais na horta da escola.

Para concretizar o seu desejo, o Colori meteu mãos à obra. Vamos ver a horta do Colori?

Obs.: se houver uma horta na Escola, o Professor pode apresentar este problema na horta.

Em dezembro, o Colori semeou algumas cenouras. Está na altura de as colhermos. Vamos a isso?

O professor desafia os alunos a colherem todas as cenouras que estão prontas a consumir e a colocarem-nas dentro de quatros cestos.

Obs.: O professor pode apresentar a situação em concreto ou com imagens. Para o presente plano de ação, considerou-se que a distribuição das cenouras nos cestos seria como na Figura 3.

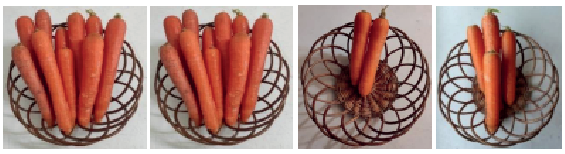


Figura 3. Exemplo da distribuição das cenouras, após a colheita.

Já na sala de aula, os alunos são divididos em grupos de quatro elementos e cada um deve sentar-se numa mesa de trabalho. Posteriormente, o docente coloca a seguinte questão-problema: "Quantas cenouras temos nos quatro cestos, no total?". Seguidamente, sugere que, em pequenos grupos e durante cerca de 20 minutos, discutam e apresentem pelo menos duas estratégias de resolução.

Obs.: O professor disponibiliza os cestos, as cenouras, as barras de *Cuisenaire*, o MAB (material multibásico), as folhas A4 e o material de escrita para a resolução do problema.

2. Discussão em grande grupo (10 minutos):
Assim que os alunos terminarem a resolução da tarefa, o professor incentiva os grupos a realizarem, à vez, uma apresentação e registo no quadro das diferentes estratégias concretizadas (desenho/esquema, number bond, algoritmo da adição, cálculo mental, entre outros). Se os alunos conseguirem reunir pelo menos três estratégias, estão perante um *Clever Day* (Motivação adicional para as crianças: *hoje fomos inteligentes!*)

• **Exemplos de estratégias de resolução:**

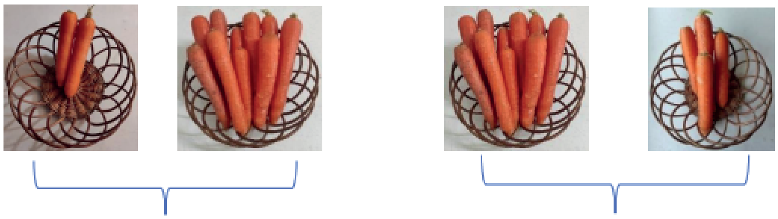
Estratégia 1 - contar a partir de 22.

20	21	22	23	24	25	26	27	28

22+4=26

Obs.: A criança poderá iniciar a contagem a partir do 22, através da leitura visual sequencial de 10+10+2.

Estratégia 2 – adicionar unidades.

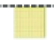


2 dezenas

6 unidades

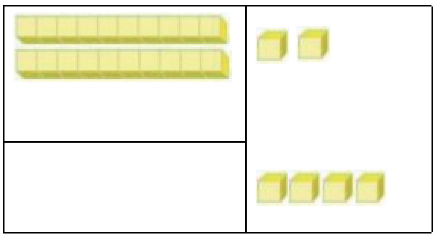
20+6=26

Obs.: A criança poderá reconhecer, primeiramente, as dezenas (10+10), e depois as unidades (2+4).

Estratégia 3 – usar  para adicionar (Método das Somas Parciais).

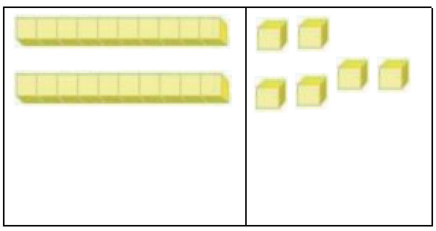
Passo 1: adicionar as unidades.

2 unidades + 4 unidades = 6 unidades



	Dezenas	Unidades
	2	2
+		4
		6

Passo 2: adicionar as dezenas.



	Dezenas	Unidades
	2	2
+		4
	2	6

22 + 4 = 26

Obs.: Neste caso, há a substituição de um material concreto (as cenouras) para um material estruturante (o MAB), uma vez que este poderá ajudar a criança a resolver o problema.

3. Construção do Jornal (15 minutos):
Na última etapa desta sessão, o professor disponibiliza uma cartolina e propõe que, em grande grupo, registem as estratégias desenvolvidas pela turma, com base na discussão realizada anteriormente. Este momento promove uma reflexão sobre aquilo que foi elaborado e uma esquematização dos conhecimentos adquiridos. No final, o professor sugere que a turma escolha um título para a aula, de forma a atribuírem significado ao que realizaram.

4. Revisão do que foi escrito no Jornal (10 minutos):
Seguidamente, o docente promove uma discussão sobre as diferentes estratégias exploradas, de modo a proporcionar uma reflexão mais profunda daquilo que foi realizado e uma melhor estruturação da temática.

5. Escrita de ideias e prática guiada (10 minutos):
O professor seleciona um conjunto de tarefas para as crianças resolverem, sendo que este adota um papel de orientador e auxilia os alunos sempre que necessário.

• Tarefas de Prática Orientada (PO)

Tarefa 1 (PO): Salada Russa

Na horta da escola estão plantadas 3 , 4  e 5 . Passados alguns dias cresceram mais 5  e 3 . Quantos vegetais estão plantamos ao todo, na horta da escola? Assinala a expressão que representa o total de vegetais.

3+4+5+5+3=18 ☐

3+4+5+5+3=20 ☐

3+4+6+5+3=21 ☐

Tarefas 2 (PO): Os cozinhados do Colori

Para o almoço, o  vai cozinhar uma  e um  com as  da horta. Para fazer a , ele precisa de 4  e para o  precisa de 2 .

Quantas  precisa o  para fazer a  e o  ?

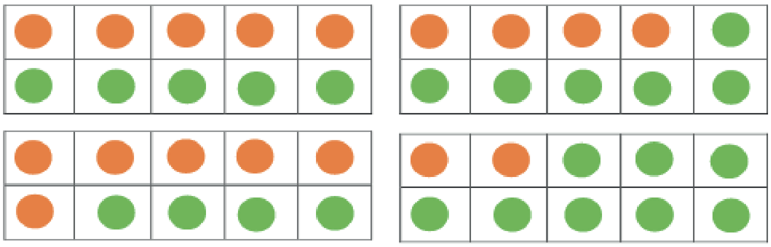
Tarefas 3 (PO): Moldura dos Vegetais

Na horta da escola estão plantados 10 vegetais. Alguns desses vegetais são cenouras e outros são pepinos. Quantas cenouras há? E pepinos? Recorre à Moldura do 10 e mostra pelo menos quatro hipóteses.

Exemplos de resposta:

→ cenouras

→ pepinos



6. Prática autónoma (10 minutos):
Após terem terminado as tarefas orientadas pelo professor, os alunos devem resolver, de forma autónoma, um conjunto de desafios.

- **Tarefas Autónomas (TA)**

Tarefa 1 (TA): Os tomates do Colori

O Colori colheu 11 tomates cereja e 7 tomates italianos da horta da escola. Quantos tomates colheu ao todo? Explica a estratégia que utilizaste.

☐ 12

☐ 16

☐ 18

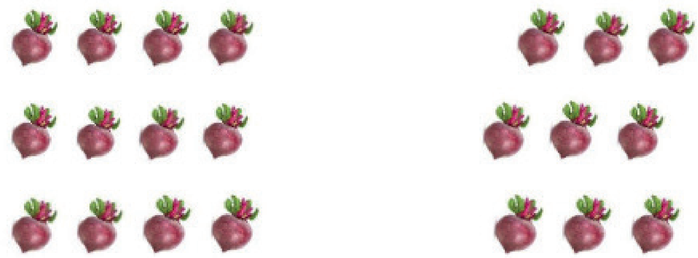
Tarefa 2 (TA): Os Vegetais!

Observa a seguinte imagem. Quantos vegetais estão plantados na horta? Apresenta pelo menos duas estratégias de resolução.

R.: Na horta estão plantados ____ vegetais.

Tarefa 3 (TA): Batatas roxas?

A turma do 3.º ano colheu 12 beterrabas e a turma do 4.º ano colheu 9 beterrabas da horta. Quantas beterrabas colheram ao todo?



Turma do 3.º ano → 12 beterrabas

Turma do 4.º ano → 9 beterrabas

Total: _____ beterrabas

Tarefa 4 (TA): Descobre e conta-nos!

Com base na expressão seguinte, cria um problema:

$$4+5=9$$

7. Registo final (10 minutos):

Para finalizar a sessão, as crianças devem dar a sua opinião relativamente ao percurso de aprendizagem, preenchendo uma grelha de autoavaliação, como a que se sugere:

Autoavaliação:

1. Hoje, aprendi a…

○ resolver problemas

○ adicionar

○ interpretar as imagens

○ saber o que é uma horta

○ trabalhar em grupo

Outra coisa que aprendi: _______________

2. O que mais gostei de aprender foi___________________________________
____

3. O que menos gostei de aprender foi___________________________________
____

4. Tive mais dificuldades em aprender______________________________
____

5. Tive menos dificuldades em aprender______________________________
____

6. Gostava de ter aprendido_____________________________
____

Pinta as estrelinhas conforme o teu nível de desempenho nas tarefas:

☆☆☆☆☆

Apresentação e Análise dos Resultados

No momento de apresentação do problema (*carpet time*), uma vez que a escola não possuía uma horta, o conto da história foi adaptado (Apêndice 1). O grupo colocou várias questões e teceu diversos comentários, demonstrando bastante interesse na história, particularmente na personagem do Colori. Os alunos preferiram resolver a questão de forma individual e obtiveram resultados corretos, apesar de terem adotado estratégias de resolução diferentes.

A C1 recorreu a dois tipos de representação (Figura 4). Primeiro realizou uma representação iconográfica, utilizando uma linha vertical para simbolizar cada cenoura. Seguidamente, usou uma representação simbólica, auxiliando-se de um esquema, apresentando as diferentes parcelas e somas através dos numerais. Inicialmente, a criança adicionou as dezenas e só depois as unidades, obtendo um resultado correto à questão.

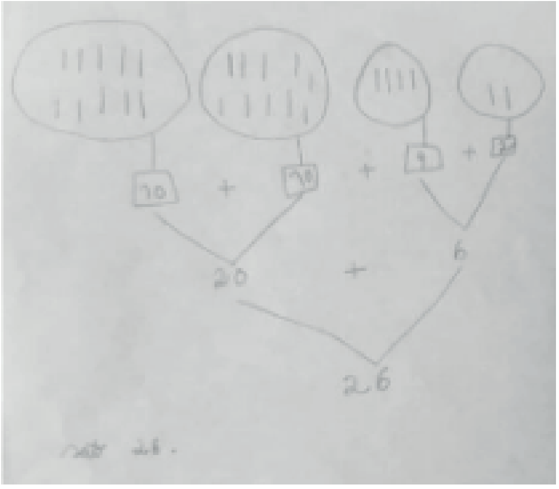


Figura 4. Resposta à questão-problema – registo da C1.

Também é importante referir que a criança, durante o processo de resolução, alterou a posição de um dos cestos, não seguindo a ordem estabelecida na apresentação dos mesmos. Assim, podemos concluir que a criança utiliza as propriedades comutativa e associativa da adição, mesmo sem as reconhecer.

A C2 utilizou, como recurso, o material de Cuisenaire, representando-o na folha. Contudo, em vez de desenhar os cubinhos, utilizou uma barra para representar cada parcela e assumiu que as parcelas das dezenas tinham a mesma cor e que as outras tinham cores distintas, uma vez que representavam quantidades diferentes (Figura 5). Neste registo, o aluno desenha uma barra e simboliza-a, incorretamente, com o algarismo 6, contudo, compreende-se que, provavelmente, adicionou mentalmente as parcelas 4 mais 2 e registou a soma obtida. Por fim, também recorreu a uma representação simbólica para proceder à operação (adicionando, em primeiro lugar as dezenas e, depois, as unidades), mas tendo sempre em conta o esquema realizado anteriormente, ou seja, a criança não deteta o erro que cometeu.

Com base na observação direta e nos diversos diálogos realizados entre a investigadora e a criança, foi possível verificar que este detetou o erro, uma vez que realizou a contagem das cenouras, antes de proceder ao registo.

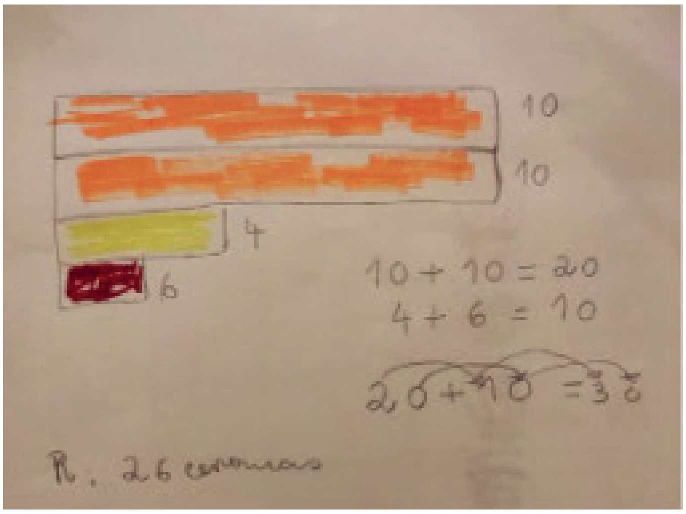


Figura 5. Resposta à questão-problema – registo da C2.

Relativamente à C3, esta realizou uma representação iconográfica, desenhando um quadriculado, onde fez corresponder a cada quadrícula uma cenoura. Utilizou, também, quatro cores diferentes para registar a quantidade de cenouras presentes em cada cesto que observou. Após a contagem das quadrículas coloridas, o aluno representou, simbolicamente, o resultado obtido (Figura 6).

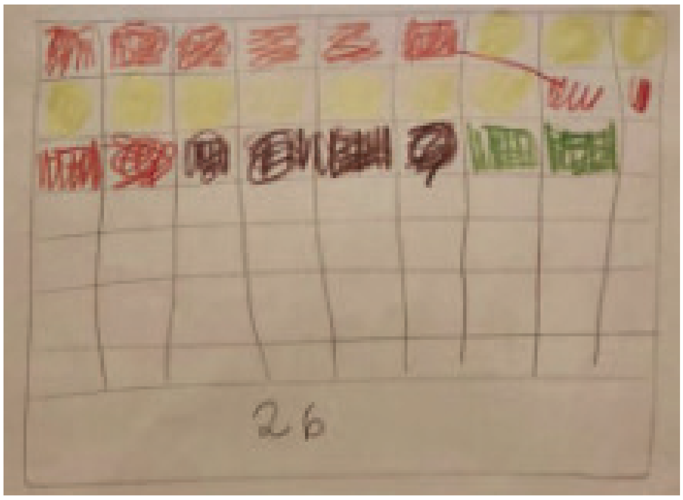


Figura 6. Resposta à questão-problema – registo da C3.

A C4, tal como a C1, recorreu a dois tipos de representações (Figura 7). Inicialmente, realizou uma representação iconográfica, uma vez que que utilizou uma linha vertical para simbolizar cada cenoura. Em segundo lugar, utilizou uma representação simbólica, auxiliando-se de um esquema. Nesse esboço, recorreu à decomposição das parcelas, de forma a obter, se possível, meias dúzias. Eventualmente, o aluno compreendeu que a sua solução estava incorreta, pois o valor não correspondia à quantidade de cenouras que tinha observado nos cestos.

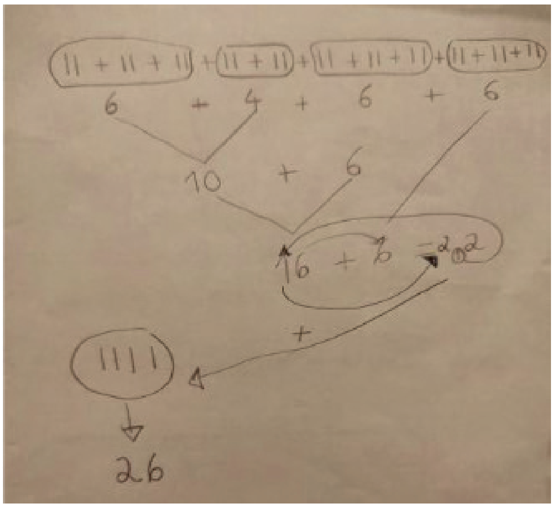
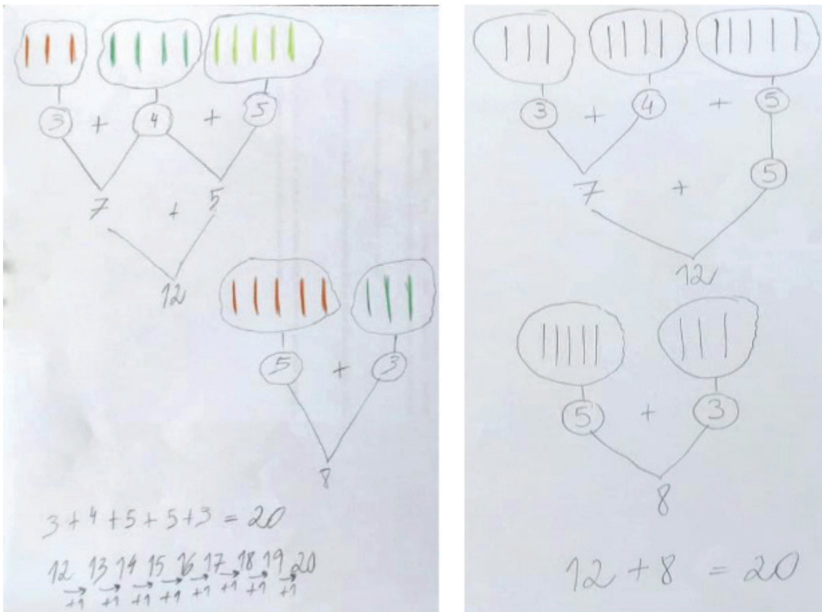


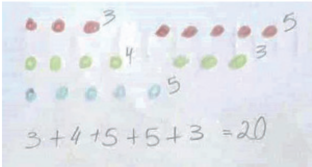
Figura 7. Resposta à questão-problema – registo da C4.

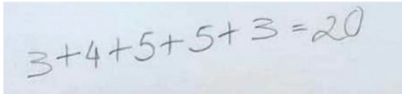
Após a partilha das estratégias realizadas por cada aluno, referiu-se que tinham conseguido chegar ao Clever Day. Uma vez que as crianças não contactavam com expressão, foi explicada em que consistia e o grupo reagiu de forma entusiasta à mesma, batendo palmas. Em relação às tarefas orientadas, mais concretamente no que diz respeito à Tarefa 1 (TO), o grupo resolveu-o de forma individual e todas as crianças selecionaram a opção correta, revelando não ter dificuldade. No entanto, utilizaram estratégias diferentes. A C1 e a C4 recorreram a uma estratégia semelhante à anterior: esquemas (Figuras 8 e 9).



Figuras 8 e 9. Resposta à Tarefa 1 (TO) - registos da C1 e da C4, respetivamente.

A C2 recorreu ao cálculo mental e, no fim, registou, simbolicamente, a operação aritmética da adição e a soma obtida. A C3 utilizou novamente as mesmas estratégias, apesar de as ter representado de forma diferente.



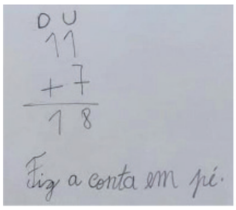


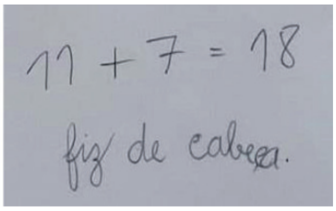
Figuras 10 e 11. Resposta à Tarefa 1 (TO) – registos da C2 e C3, respetivamente.

No que diz respeito à Tarefa 2 (TO), o grupo decidiu realizá-lo em conjunto e, para isso, utilizaram as cenouras disponibilizadas. De seguida, realizaram a contagem de forma oral, chegando, facilmente, à resposta correta.

Relativamente à Tarefa 3 (TO), foi disponibilizada uma caixa de dez ovos e várias bolinhas vermelhas e verdes, dado que eram materiais que o grupo já tinha contactado anteriormente. Mais uma vez, realizaram a atividade em grupo, cooperando e ajudando-se uns aos outros.

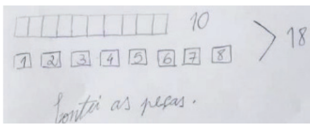
Relativamente às tarefas autónomas (TA), as Tarefas 1 (TA), 2 (TA) e 3 (TA), foram realizadas de forma individual, exceto a Tarefa 4 (TA), que, devido ao facto de apresentar um grau de complexidade mais elevado, a pedido das crianças, foi realizado em conjunto com a orientação da investigadora. Na Tarefa 1 (TA), todas as crianças selecionaram a opção correta, embora tenham apresentado estratégias diferentes. A C1 resolveu o problema através do algoritmo da adição (Figura 12), já a C2, mais uma vez, utilizou o cálculo mental e registou a operação efetuada (Figura 13).





Figuras 12 e 13. Resposta à Tarefa 1 (TA) - registos da C1 e da C2, respetivamente.

A C3 recorre, novamente, à representação pictográfica e, após a contagem, procede à representação simbólica (Figura 14). A C4 utilizou, como recurso, o MAB, e, para elaborar o registo, desenha a barra e os cubinhos usados (Figura 15).



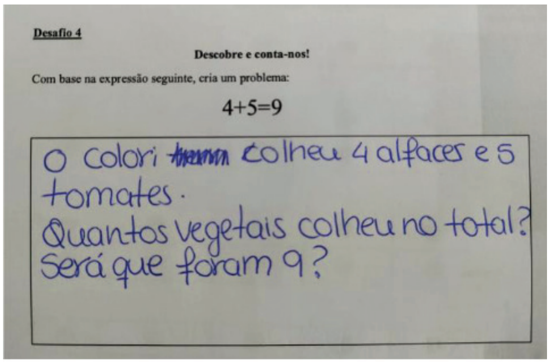
Figuras 14 e 15. Resposta à Tarefa 1 (TA) - registos da C3 e da C4, respetivamente.

Para proceder à contagem, associa o algarismo 10 à barra desenhada e, para cada cubinho, fez corresponder um numeral. Importa referir que todas as crianças obtiveram a resposta correta e explicitaram as estratégias utilizadas.

Em relação à Tarefa 2 (TA), todas as crianças procederam à contagem dos elementos da imagem. Porém, metade das crianças não obteve o resultado esperado, porque não contaram um elemento que não estava tão visível na imagem, tendo indicado 10 ou 11 vegetais, como era esperado inicialmente pela equipa. De facto, esta imagem foi intencional para perceber a capacidade de observação da criança na resolução do problema.

Relativamente à Tarefa 3 (TA), todas as crianças conseguiram, facilmente, obter o resultado correto, e para isso, procederam à contagem das beterrabas presentes na imagem disponibilizada, indicando o total de 21 beterrabas.

No que diz respeito à última tarefa (Tarefa 4 – TA), os alunos responderam oralmente à questão, sendo que a investigadora registou a sugestão do grupo (Figura 16). Dado o entusiasmo dos alunos pela personagem da história lida no início da sessão, estes criaram um problema utilizando o Colori. No final da resolução, a professora titular de turma comentou que seria interessante colocar um espaço em branco numa das parcelas ou no resultado, de forma que os alunos também sejam desafiados a pensar numa forma de completarem a expressão.


Desafio 4

Descobre e conta-nos!

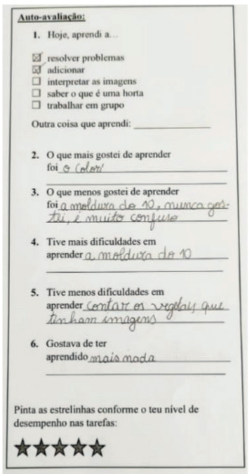
Com base na expressão seguinte, cria um problema:

4+5=9

O Colori colheu 4 alfaces e 5 tomates.
Quantos vegetais colheu no total?
Será que foram 9?

Figura 16. Resposta à Tarefa 4 (TA).

Em relação ao *feedback* da turma e às respostas dos alunos à grelha, as respostas foram positivas. Relativamente à primeira questão, todas as crianças consideraram que tinham aprendido a resolver problemas e a adicionar. Neste contexto, um dos elementos referiu que também aprendeu a interpretar imagens e a "história do Colori" (Figura 19).


Auto-avaliação:

1. Hoje, aprendi a…

☒ resolver problemas
☒ adicionar
☐ interpretar as imagens
☐ saber o que é uma horta
☐ trabalhar em grupo

Outra coisa que aprendi: ____________

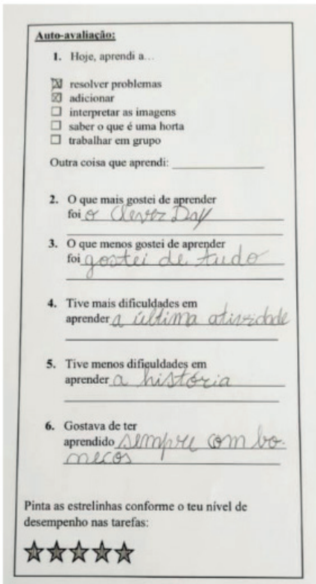
2. O que mais gostei de aprender foi o Colori
3. O que menos gostei de aprender foi a moldura do 10, nunca gostei, é muito confuso
4. Tive mais dificuldades em aprender a moldura do 10
5. Tive menos dificuldades em aprender contar os vegetais que tinham imagens
6. Gostava de ter aprendido mais moda

Pinta as estrelinhas conforme o teu nível de desempenho nas tarefas:

★★★★★

Figura 17. Registo da C1 – resposta à grelha de Autoavaliação.

No que diz respeito ao que mais gostaram de aprender (pergunta 2), todos os alunos apresentaram respostas diferentes: a C1 referiu que gostou de “aprender” o Colori (Figura 17), a C2 afirmou que tinha gostado do *Clever Day* (Figura 18), a C3 gostou de ter aprendido as formas de resolução dos problemas dos colegas (Figura 18), e, por fim, a última criança disse que tinha gostado de tudo (Figura 19). Outro aspeto que importa referir prende-se com as dificuldades que os alunos sentiram durante a sessão, uma vez que a maioria afirmou que foi na resolução da Tarefa 4 (TA). Salientamos, ainda, o facto de a C2 ter afirmado que gostaria de ter aprendido “sempre com bonecos” (Figura 18). Por sua vez, no nível de desempenho, todas as crianças coloriram as cinco estrelas, ou seja, todas consideram que se esforçaram para resolver as propostas.


Auto-avaliação:

1. Hoje, aprendi a…

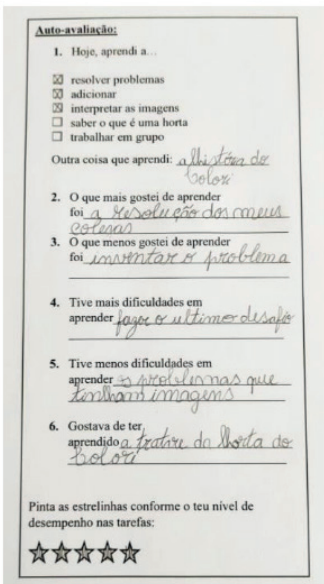
☒ resolver problemas
☒ adicionar
☐ interpretar as imagens
☐ saber o que é uma horta
☐ trabalhar em grupo

Outra coisa que aprendi: ____________

2. O que mais gostei de aprender foi o Clever Day
3. O que menos gostei de aprender foi gostei de tudo
4. Tive mais dificuldades em aprender a última atividade
5. Tive menos dificuldades em aprender a história
6. Gostava de ter aprendido sempre com bonecos

Pinta as estrelinhas conforme o teu nível de desempenho nas tarefas:

★★★★★


Auto-avaliação:

1. Hoje, aprendi a…

☒ resolver problemas
☒ adicionar
☒ interpretar as imagens
☐ saber o que é uma horta
☐ trabalhar em grupo

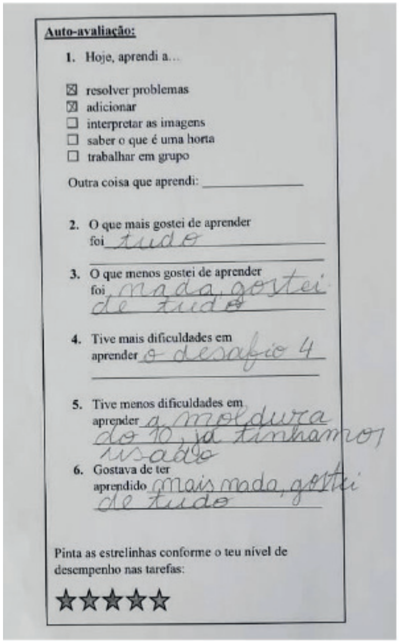
Outra coisa que aprendi: a história do Colori

2. O que mais gostei de aprender foi a resolução dos meus colegas
3. O que menos gostei de aprender foi inventar o problema
4. Tive mais dificuldades em aprender fazer o último desafio
5. Tive menos dificuldades em aprender os problemas que tinham imagens
6. Gostava de ter aprendido a tratar da horta do Colori

Pinta as estrelinhas conforme o teu nível de desempenho nas tarefas:

★★★★★

Figuras 18 e 19. Resposta à grelha de Autoavaliação - registos da C2 e C3, respetivamente.



Auto-avaliação:

1. Hoje, aprendi a…

☒ resolver problemas
☒ adicionar
☐ interpretar as imagens
☐ saber o que é uma horta
☐ trabalhar em grupo

Outra coisa que aprendi: ______________

2. O que mais gostei de aprender foi tudo

3. O que menos gostei de aprender foi nada, gostei de tudo

4. Tive mais dificuldades em aprender o desafio 4

5. Tive menos dificuldades em aprender a moldura do 10, já tinhamos usado

6. Gostava de ter aprendido mais nada, gostei de tudo

Pinta as estrelinhas conforme o teu nível de desempenho nas tarefas:

☆☆☆☆☆

Figura 20. Registo da C4 – resposta à grelha de Autoavaliação.

Considerações Finais

Através da pesquisa bibliográfica e da análise dos dados recolhidos, é possível afirmar que o estudo desenvolvido responde à questão de investigação. Com a análise documental, conclui-se que o "Método de Singapura" se centra no desenvolvimento da curiosidade da criança e no gosto pela exploração, utilizando sempre materiais didáticos. Neste estudo, foi possível verificar que o grupo teve interesse pela história ouvida e resolveu, com entusiasmo, as tarefas propostas. Como as crianças já detinham conhecimentos prévios em relação à adição, não revelaram dificuldades em resolver os problemas da sequência didática, concretizando-os de forma individual e autónoma. Apesar de terem revelado essa facilidade, os alunos optaram por explorar diferentes estratégias e recorreram a diversos materiais, sendo considerada, pela professora titular de turma, uma abordagem muito positiva. De facto, as crianças ao comunicarem e aprenderem várias estratégias de cálculo, utilizaram diferentes representações, o que foi muito significativo na aprendizagem da linguagem matemática. Neste sentido, as crianças tiveram oportunidade de utilizar diferentes materiais, usando métodos mais concretos, elaborando esquemas e representações iconográficas, explorando estratégias de forma gradual, das mais simples para as mais complexas, aspeto relevante do "Método de Singapura". Este tipo de abordagem fomentou o desenvolvimento do cálculo mental das crianças e um maior interesse em resolver problemas contextualizados e significativos. Neste contexto pedagógico, houve a oportunidade de as crianças alargarem os seus conhecimentos acerca da adição, designadamente na aprendizagem do conceito de Number Bond e do Algoritmo das Somas Parciais do "Método de Singapura".

O momento de partilha e discussão de estratégias revelou-se uma componente essencial da sessão, na medida em que as crianças puderam

comunicar e expressar as suas ideias e raciocínio, aumentando a sua motivação e o envolvimento na tarefa. Numa destas etapas surgiu o *Clever Day*, que constituiu uma motivação adicional para o grupo.
Por fim, é possível concluir que o impacto do "Método de Singapura" na motivação, interesse e envolvimento dos alunos na aprendizagem da adição, é positivo, pois o grupo demonstrou bastante entusiasmo e empenho ao longo de toda a sessão. Contudo, considera-se que o processo de implementação deveria ter incluído outros grupos de crianças de diferentes contextos, de forma a garantir uma maior heterogeneidade de informação e um conhecimento mais aprofundado.

Referências bibliográficas

Abreu, J. (2017). *Construção e Gestão de Materiais Pedagógicos no Ensino da Matemática: uma adaptação do Método de Singapura no contexto da Educação Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico.* [Relatório de Estágio, Universidade dos Açores]. Repositório Institucional da Universidade dos Açores. https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/4645/1/ DissertMestradoJoaoCristianoFigueiraAbreu2018.pdf

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Ministério da Educação | Direção-Geral da Educação.

Dinis, R., Teixeira, R., Pacheco, S. (2019). Os Princípios Orientadores de Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino. *Jornal das Primeiras Matemáticas, 13*, 5-36. https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/5405/3/Pacheco_ Singapura_5_36%2813_ 2019%29_high.pdf

Fernandes, D. (2017a). Sendas de Sucesso com o "método de Singapura" – Parte 1/3. *Ozarfaxinars, 70*. https://www.cfaemato sinhos.eu/Ed_ozarfaxinars_n70.htm#assumido

Fernandes, D. (2017b). Sendas de Sucesso com o "método de Singapura" – Parte 2/3. *Ozarfaxinars, 71*. https://www.cfaemato sinhos.eu/Ed_ozarfaxinars_n71.htm

Kaur, B. (2014). *Mathematics Education in Singapore – An Insider's Perspective. IndoMSJME, 5*(1), 1-16. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1079596.pdf

República Portuguesa (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: 1.º ano, 1.º Ciclo do Ensino Básico.* Ministério da Educação | Direção-Geral da Educação

Apêndices

Apêndice 1 – História adaptada

Há muitos, muitos anos que o Colori queria plantar vegetais na sua horta, para ter uma alimentação saudável. Para concretizar o seu desejo, o Colori meteu mãos à obra e, em dezembro, semeou algumas cenouras. Ontem, o Colori colheu as cenouras. Querem ver as cenouras do Colori?

CARTAZ | Narrativas infantis na aprendizagem matemática nos primeiros anos: Experiência de uma professora estagiária

POSTER | *Children's literature on early mathematics learning: An experience of a preservice teacher*

Sofia Rebelo[1], Susana Colaço[2], Neusa Branco[3]

Resumo: As narrativas infantis são um recurso no ensino-aprendizagem da língua, podendo também ser usadas para proporcionar aprendizagens em matemática. Este estudo centra-se na experiência de uma professora estagiária no âmbito do mestrado em educação pré-escolar e ensino do 1.º ciclo do ensino básico (CEB), baseada na reflexão sobre a prática e na investigação sobre potencialidades do uso das narrativas infantis na aprendizagem da Matemática durante a experiência de ensino concretizada no estágio do 1.º CEB. Os resultados evidenciam que as narrativas infantis são um recurso bastante versátil e que podem ser utilizadas com diferentes intencionalidades pedagógicas e com o propósito de abordar conteúdos matemáticos diversificados.

Palavras-chave: narrativas infantis; transversalidade; ensino da Matemática.

Abstract: *Children's narratives are a resource in language teaching and learning and can also be used to provide learning in mathematics. This study focuses on the experience of a preservice teacher as part of her master's degree in pre-school and primary school education, based on reflection on practice and research into the potential of the use of children's narratives in the learning of mathematics during pedagogical practice in kindergarten and primary school. The results show that children's narratives are a very versatile resource and that they can be used with different educational purposes and with the aim of approaching diversified mathematical contents.*

Keywords: *children's narratives; transversality; teaching mathematics.*

1. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém, sofia.valenterebelo@gmail.com
2. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém e Pólo Literacia Digital e Inclusão Social do Centro de Investigação em Artes e Comunicação, susana.colaco@ese.ipsantarem.pt
3. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém e Pólo Literacia Digital e Inclusão Social do Centro de Investigação em Artes e Comunicação, neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

Introdução

Ler e ouvir narrativas infantis constitui um excelente recurso para promover nas crianças aprendizagens e conhecimentos integrados. O presente estudo foi realizado no âmbito da Prática do Ensino Supervisionada (PES) do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º CEB, com foco no estabelecimento e exploração da relação entre o ensino-aprendizagem da Matemática e de Português com recurso às narrativas infantis, de modo a potenciar aprendizagens matemáticas. Assim, visa analisar contributos da leitura de narrativas infantis na aprendizagem da Matemática no jardim de infância e no 1.º CEB.

Ensino-aprendizagem da Matemática recorrendo a narrativas infantis

Furner (2018) destaca o papel da utilização de histórias com um propósito matemático, nomeadamente para introduzir, ensinar, reforçar e fazer conexões. O autor destaca que o uso da literatura infantil pode contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos, uma vez que as histórias podem dar sentido e tornar relevantes para os alunos as ideias matemáticas envolvidas, fomentando a compreensão da matemática. Os conteúdos matemáticos presentes na narrativa infantil são apresentados de diferentes formas e podem ser de três tipos Martson (2014, citado por Mendes & Costa, 2018): i) conteúdo percecionado: narrativas através das quais se pode perceber a ocorrência não intencional de conteúdos matemáticos, mas de apenas objetivos literários; ii) conteúdo explícito: narrativas com referência explícita a conteúdos matemáticos; iii) conteúdo incorporado: narrativas com uma finalidade literária, mas que incluem intencionalmente, conteúdos matemáticos.

Van den Heuvel-Panhuizen e Elia (2012) apresentam quatro critérios para a seleção de narrativas infantis no ensino da Matemática: i) relevância da Matemática; ii) tipos de conexão iii) adequação e adaptabilidade ao aluno e iv) o poder de promover vários processos matemáticos e envolver os alunos. As autoras centram a sua análise no modo de proporcionar um conteúdo matemático e no modo de apresentação do conteúdo matemático, centrando-se este estudo no primeiro tópico.

Metodologia de investigação

O estudo decorre na prática pedagógica de jardim de infância e de 1.º CEB, organizado como apresenta a figura 1. A seleção das narrativas teve por base os três tipos de apresentação de conteúdo referidos por Martson (2014, citado por Mendes & Costa, 2018).

Figura 1 – Organização da prática pedagógica com narrativas infantis.

Os dados foram recolhidos por observação participante da professora estagiária e registo em grelhas de avaliação de desempenho das tarefas realizadas em cada episódio de ensino, as produções dos alunos e registos fotográficos. Os dados foram organizados e analisados considerando os *frameworks* de Martson (2014) e Van den Heuvel-Panhuizen e Elia (2012) relativamente as características das narrativas infantis para a aprendizagem de matemática e o contributo do trabalho realizado para o conteúdo matemático.

Apresentação e discussão dos resultados

Narrativa com conteúdo percecionado.

No jardim de infância foi trabalhada a narrativa “O monstro das cores” (Llenas, 2017), envolvendo conceitos relacionados com a classificação e teoria de conjuntos. Todas as crianças conseguiram formar conjuntos segundo o critério da cor e do tamanho (Figura 2), mas numa situação que envolve a construção do diagrama de Venn (Figura 3) algumas manifestaram dificuldade em se exprimirem e justificar os seus raciocínios matemáticos.

Figura 2. O Monstro das Cores, Classificação por cores.

Figura 3. O Monstro das Cores, Diagrama de Venn

Narrativa com conteúdo incorporado.

Uma das situações do 1.º CEB teve como ponto de partida a narrativa Pequeno livro do tempo (Ramos, 2015).

Foram propostas tarefas à turma com o intuito de abordar a grandeza tempo e a hora como unidade de medida do tempo. Os alunos dispunham de material manipulável (pratos de plástico) que poderiam utilizar para apoiar a representação da quantidade de tempo indicada, estabelecendo a relação entre uma unidade de medida de tempo, uma hora, e o objeto que representava uma unidade, um prato, que poderiam dividir em partes iguais. Por exemplo, o aluno B fez três representações icónicas diferentes e utiliza a representação na forma de fração para representar a quantidade de tempo 1 hora e 15 minutos, apresentando a fração unitária 1/4 e também a fração imprópria 5/4, dando sentido ao numerador e ao denominador por meio deste contexto (Figura 4).

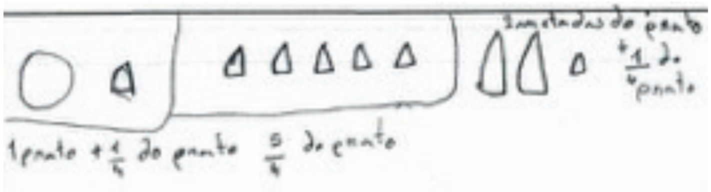


Figura 4. Representação de 1 hora e 15 minutos, Aluno B.

Conclusão

Este estudo evidencia que as narrativas infantis são um recurso bastante versátil e que podem ser utilizadas com diferentes intencionalidades pedagógicas e com o propósito de abordar conteúdos matemáticos. As situações propostas fazem emergir a articulação com processos matemáticos, nomeadamente com a utilização de vocabulário e representações específicos da matemática. As narrativas infantis proporcionaram oportunidades para a aprendizagem da matemática, contribuindo para que os alunos dessem sentido a conceitos e procedimentos envolvidos e a diferentes representações matemáticas, bem como a estabelecer relações entre elas.

Referências bibliográficas

Furner, J. (2018). Using Children's Literature to Teach Mathematics: An Effective Vehicle in a STEM World. *European Journal of STEM Education, 3* (3), 14.

Llenas, A. (2017). *O monstro das cores.* (P. R. House, Trad.) Lisboa: Nuvem de Letras.

Mendes, F., & Costa, A. L. (2018). Para uma bibliografia comentada de livros infantis "com Matemática". *Educação e Matemática, 147*, 3-8.

Ramos, S. (2015). *Pequeno livro do tempo.* Edições Afrontamento.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2012). Developing a framework for the evaluation of picturebooks that support kindergartners' learning of mathematics, *Research in Mathematics Education, 14* (1), 17-47. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2012.657437.

Simpósio de Comunicações 3
Communication Symposiums 3

XXXI SIEM
seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

Processos de raciocínio matemático de estudantes de cálculo diferencial e integral em uma tarefa exploratória

Mathematical reasoning processes of differential and integral calculus students in an exploratory task

Mariana V. Negrini[1] , André L. Trevisan[2] , Eliane M. de O. Araman[3].

Resumo: Assumindo as potencialidades do trabalho com tarefas exploratórias na promoção de diferentes processos de raciocínio, nosso objetivo neste artigo é analisar tais processos, a partir do trabalho de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa é qualitativa, de cunho interpretativo, e dados recolhidos para análise são compostos por (i) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes e (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos. Os resultados obtidos evidenciaram, ao longo dos três trechos de discussão, um movimento cíclico, com avanços e recuos, de raciocinar sobre relações matemáticas e desenvolver afirmações (conjecturar), buscando reconhecer e explicar a validade (ou não) dessas afirmações (justificar). Em alguns momentos, culminou com o estender, para situações mais gerais, as regularidades observadas em casos particulares (generalizar).

Palavras-chave: Ensino de cálculo; raciocínio matemático; tarefas exploratórias.

Abstract: *Assuming the potential of working with exploratory tasks in promoting different reasoning processes, our objective in this article is to analyze such processes, from the work of students of Differential and Integral Calculus. The research is qualitative, of an interpretative nature, and data collected for analysis are composed of (i) protocols containing written records of the discussions of the small groups of students and (ii) audios of the discussions in the small groups. The results obtained showed, over the three stretches of discussion, a cyclical movement, with advances and setbacks, of reasoning about mathematical relations and developing statements (conjecture), seeking to recognize and explain the validity (or not) of these statements (explain). In some moments, it culminated in extending, to more general situations, the regularities observed in particular cases (generalizing).*

1. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, mariana.negrini@escola.pr.gov.br
2. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, andrelt@utfpr.edu.br
3. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, eliane.araman@gmail.com

Keywords: *Teaching of calculus; mathematical reasoning; exploratory tasks.*

Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma parte integrante essencial do núcleo básico de cursos de Ciências Exatas no Brasil, em especial das Engenharias, e deve contribuir para o desenvolvimento de processos de raciocínio necessários à formulação e solução de problemas de diversas áreas, à análise e compreensão de fenômenos e sua validação por experimentação e à comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica (Brasil, 2019). Constitui-se como uma importante ferramenta capaz de desenvolver critérios essenciais para a interpretação e resolução de problemas do cotidiano profissional (Guimarães, 2019). Entretanto, além da defasagem no conhecimento matemático prévio dos estudantes, a estrutura didático-pedagógica dos cursos de Engenharia, na qual prevalece ainda uma metodologia de ensino tradicional que prioriza aulas expositivas e centradas no professor (Cabral, 2015), contribuem para a reprovação na disciplina de CDI e a evasão no curso (Zarpelon, Resende & Reis, 2017). Pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da Matemática (com resultados que podem contribuir para reverter o quadro mencionado acima) apontam que abordagens de ensino promissoras são aquelas em que os estudantes trabalham de forma colaborativa, envolvendo-se em discussões matemáticas (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018), resolvendo tarefas de natureza exploratória (Ponte, 2005), contribuindo assim para o desenvolvimento de seu raciocínio. Em especial, no contexto de CDI destacamos os trabalhos de Couto, Fonseca e Trevisan (2017), Gomes e Stahl (2020) e Trevisan e Mendes (2018), que investigam possibilidades envolvendo tais abordagens em aulas de CDI.

Com objetivo de incorporar em aulas de CDI elementos que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio, Trevisan e Mendes (2018) propõem momentos de resolução de tarefas de natureza exploratória, em aulas de cursos de Engenharia na instituição de Ensino Superior ao qual os autores deste trabalho estão vinculados. Tais tarefas, inspiradas na conceitualização de Ponte (2005), são de natureza aberta, grau de desafio mediano e possibilidade dos estudantes mobilizarem conhecimentos intuitivos. Para um melhor entendimento dos processos de raciocínio dos estudantes (Jeannotte & Kieran, 2017 ; Lannin, Ellis, & Elliot, 2011), nesses momentos, nosso objetivo neste artigo é analisar tais processos, a partir do trabalho de estudantes de CDI em uma tarefa de natureza exploratória. Trata-se de um recorte de uma pesquisa mais ampla, envolvendo outras tarefas aplicadas ao longo da disciplina de CDI.

Para tal, baseamo-nos na caracterização do raciocínio matemático, centrando a nossa atenção na elaboração de conjecturas, na generalização e na justificação como principais características do seu aspecto processual. Apresentamos o contexto em que o estudo foi realizado e os procedimentos metodológicos assumidos na pesquisa. Por fim, analisamos e discutimos os dados a partir do quadro teórico proposto.

Raciocínio Matemático

Há diferentes perspectivas teóricas assumidas a respeito do tema raciocínio. Assumimos, neste trabalho, com base na revisão de literatura detalhada por Araman, Serrazina e Ponte (2019), que o raciocínio matemático é processo dinâmico de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos.

Os processos associados ao raciocínio matemático, para Jeannotte e Kieran (2017), envolvem três ações principais: (i) buscar por semelhanças ou diferenças, que inclui generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação e classificação; (ii) validação, ou seja, processos de justificação e prova; e (iii) exemplificação, que apoia as duas anteriores. Conjeturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático, segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), sendo assim foco de aprofundamento neste artigo.

Conjecturar, para Jeannote e Kieran (2017), é um processo cíclico de: (i) enunciar uma conjectura; (ii) verificar se ela cobre todos os casos e exemplos; (iii) tentar refutar; e (iv) encontrar um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira ou tentar modificá-la. A formulação de conjecturas de natureza mais geral, por sua vez, relaciona-se com o processo de generalizar (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020).

Mata-Pereira e Ponte (2017) entendem que generalizar envolve reconhecer que uma propriedade válida para certo conjunto de objetos continua sendo válida para uma variedade mais ampla de objetos. Para os autores, as generalizações são conjecturas com características próprias. Na ciência, a generalização, enquanto processo de raciocínio, tem papel fundamental, pois é vista como base para a construção matemática.

Por fim, "justificar é um processo social e pode assumir dois formatos: (i) justificar a conjectura que surgiu no processo e (2) relatar a validade que altera o valor epistêmico" (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 12). Assim, o processo de justificar solicita que o aluno não apenas mostre que uma afirmação é verdadeira, mas que forneça razões pelas quais ela é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis. O processo de justificar possibilita que os alunos "não apenas desenvolvem suas habilidades de raciocínio, mas também seu entendimento conceitual" (Morais, Serrazina & Ponte, 2018, p. 556).

São recentes os trabalhos que abordam a questão do raciocínio matemático e seus processos no contexto do CDI. Trevisan et al. (2019), por exemplo, destacaram o potencial do trabalho com tarefas exploratórias no desenvolvimento de competências e habilidades de raciocínio, requeridos à formação do futuro engenheiro. Já Trevisan e Araman (2021) destacaram, no trabalho com tarefas dessa natureza, a construção, pelos estudantes, de conjecturas apoiadas em conhecimentos matemáticos que já possuíam, na percepção de relações presentes na tarefa ou, ainda, no senso comum. Os autores discutiram também a busca por motivos para validação ou refutação dessas conjecturas, momento no qual os estudantes resgataram conhecimentos que já possuíam, ou construíram novos conhecimentos matemáticos, com a elaboração de novas conjecturas ou aprimoramento de uma já elaborada, novas investigações e tentativas de justificar.

Procedimentos Metodológicos

Contexto do estudo e os participantes da pesquisa

Os participantes foram estudantes de um curso superior de Engenharia de uma Universidade Federal do estado do Paraná, Brasil, que cursaram a disciplina de CDI 1 (sob responsabilidade do segundo autor) no 1º semestre de 2019. Essa disciplina, com uma carga de 90 horas-aula, contemplou o estudo de funções, limites, derivadas e integrais de funções reais, de uma variável real, e foi organizada em uma estrutura curricular "não usual" (Trevisan & Mendes, 2017) com conteúdos apresentados ao longo do semestre letivo em formato de espiral.

Em geral, 25 horas do curso (cerca de 10 encontros de 3 horas-aula de 50 minutos) foram dedicadas ao trabalho com tarefas que antecederam o estudo "formal" dos conceitos de limites, derivadas e integrais de funções reais de uma variável real. Para o desenvolvimento dessas tarefas, os estudantes estavam organizados em grupos de 3 a 4 integrantes, que trabalharam de forma autônoma e colaborativa, com algumas intervenções pontuais do professor à medida que acompanhava o trabalho. Neste artigo analisamos um desses grupos, no trabalho com uma dessas tarefas, enunciada abaixo.

Tarefa. *Um tanque contém 5000 litros de água pura. Uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água é bombeada para o tanque a cada minuto. Investigue como se comporta a concentração da água no tanque para valores de tempo "muito grandes".*

Método de pesquisa, recolha e organização de dados

O estudo que deu origem a este artigo foi desenhado como uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), cuja preocupação incide mais no processo (no caso, nos processos de raciocínio matemático mobilizados durante a resolução da tarefa) do que no produto (sua produção apresentada ao final do trabalho).

Os dados recolhidos para análise são compostos por (i) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes e (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos. As gravações em áudio foram transcritas na íntegra (como parte do trabalho de dissertação da primeira autora), em articulação com os protocolos produzidos, propiciando assim, a organização e a análise dos dados.

De posse da transcrição das discussões ocorridas na plenária, baseamo-nos nas etapas presentes no modelo de Powell, Francisco e Maher (2004), inicialmente ouvindo-os integralmente; em seguida, identificando momentos significativos e transcrevendo-os, para depois analisá-los. Resultados Para análise da discussão ocorrida, foram separados três trechos que trazem as transcrições e descrições acerca do que ocorreu no desenvolvimento da tarefa realizada por um grupo formado por três alunos aqui denominados M, C e J. Entre chaves, está o número do trecho e o número de cada fala como por exemplo [1.5] que é [trecho 1, fala número 5].

Trecho 1
[1.1] M: Vocês não sabem Química? Acho que tem que saber Química. [silêncio] [
1.2] C: Primeira coisa que dá para afirmar é que, quanto maior o tempo, maior vai ser a concentração, ou não.
[1.3] M: Não é. Tipo, o que tá adicionando é 25 litros, [e] 750 gramas [de sal]. Dá 30 gramas por litro, tipo tende a ser isso a longo prazo mas nunca vai chegar.
[1.4] J: Isso sempre vai ser constante, só que a diferença vai ser o que vai adicionar, no caso.
[1.5] C: Essas 30 gramas por litro sempre vai ser constante?
[1.6] J: É, o que vai alterar é a concentração dos 5 mil litros. Porque vai aumentando, vai ser 5025 litros e assim por diante a cada minuto.
[1.7] M: Sim. Tipo fazendo o primeiro minuto.
[1.8] C: Ah. O tanque já tem o 5mil litros, ele não está vazio. [silêncio] **[1.9] M:** Com um minuto dá 0,14 gramas por litro, daí vai aumentando né.
[1.10] C: Na concentração de 5025 litros?
[1.11] M: Isso, daí vai aumentando né.
[1.12] C: E em 5050, o que acontece?
[1.13] M: Dai vai ter 1500 né?
[1.14] J: 1500 o quê?
[1.15] M: de sal.
[1.16] J: 1500 gramas para 5050 litros.
[1.17] M: É, dobrou praticamente [o grupo registra, em uma tabela, o valor 0,29].
[1.18] J: Só que, no caso, ele quer para quantidades muito grandes.
[1.19] M: Sim, dá para gente fazer.
[1.20] C: Coloca aí para 30 minutos.
[1.21] M: 30 minutos? Tá.
[1.22] C: Dá para fazer 30 vezes 25, mais os 750.
[1.23] M: Tá. Fazer 30 vezes 25, mais 750.
[1.24] C: 39?
[1.25] M: Não. É 3,9.
[1.26] C: Ele vai aumentando né, até o infinito.
[1.27] J: Não.
[1.28] M: Até o trinta né?
[1.29] J: Na verdade ele nunca vai chegar ao trinta.
[1.30] C: Trinta é o limite, né?
[1.31] M: Sim. Vocês querem fazer com valor maior, tipo 100?

Neste primeiro trecho, observamos que os estudantes elaboram algumas conjecturas acerca do comportamento da concentração da mistura de água e sal, como uma função do tempo. Inicialmente, em [1.2], o estudante C tem dúvidas se essa concentração aumenta ou não com o tempo. O estudante M, então sugere que a ela será 30 g/L a longo prazo, mas esse valor nunca vai ser alcançado [1.3]. Reconhecemos a partir dessa fala, a formulação de conjectura plausível (cujo valor foi obtido, possivelmente, da divisão de 750 por 25). Entretanto, o grupo não avança nessa direção, pois parece considerar a água pura, e a mistura de água e sal como "coisas diferentes".

A partir de [1.6], o grupo passa então a investigar efetivamente o que ocorre com a concentração à medida que a mistura de água e sal é bombeada para o tanque, que já continha água pura. Na sequência da discussão [1.9 a 1.16], os estudantes calculam os valores de concentração para valores de tempo correspondentes a 1 e 2 minutos. Por meio desse raciocínio, o grupo poderia obter uma generalização para o cálculo da concentração como função do tempo; porém, essa ideia não foi explicitada ou justificada nessa etapa da discussão. Os valores obtidos da divisão da quantidade de sal (750 vezes o tempo), pela quantidade de água (25 vezes o tempo, mais 5000) foram simplesmente "aceitos" como corretos pelo grupo, sem passar por algum processo de validação.

Dos valores obtidos, tem-se a formulação de duas novas conjecturas: (i) o valor da concentração está aumentando [1.9 e 1.11], e (ii) o valor da concentração praticamente dobrou [1.17]. Essa segunda conjectura, em princípio, parece ser abandonada; já a primeira procura ser validada na continuidade da discussão [1.18 a 1.25], por meio do cálculo do valor da concentração no tempo 30 minutos.

Em [1.26] o estudante C reforça a conjectura (ii), alegando que a concentração "vai aumentando né, até o infinito". Mas, logo a seguir [1.27], o estudante J invalida essa conjectura, formulando uma nova [1.29]: a concentração nunca vai chegar ao 30. No intuito de validá-la, M propõe realizar o cálculo da concentração no instante t = 100.

Techo 2
[2.32] C: Vocês conseguem montar uma função com essas informações?
[2.33] J: Eu acho que dá para montar sim.
[2.34] C: 5000 + 25x.
[2.33] J: No caso, eu acho mais fácil montar com o 0,3.
[2.34] C: 0,3... 0,3x ... Tipo, o x vai ser a cada 50.
[2.35] J: Não... O 50 entre parênteses [o grupo está tentando registrar uma fórmula]
[2.36] C: Porque é limite de x tendendo a 30 gramas por litro, mas se a gente montar uma função já dá mais certo. [silêncio]
[2.37] C: As variáveis serão os minutos.
[2.38] J: Pode ser 25 vezes 750... Não! E 25 / 750 x + 5000?
[2.39] C: Não.
[2.40] J: Mas, e se colocar 0,3?
[2.41] M: É que o x tem que ser minuto né.
[2.42] J: é eu acho que vai ser 25 x 750(x + 5000). [silêncio]
[2.43] J: Ah não! Não tem na a ver. Deve ser alguma coisa parecida com isso, mas não sei o que está errado.
[2.44] M: O que você falou [dirigindo-se ao estudante C].

[2.45] C: Vai dar um valor muito grande, eu acho.
[2.46] J: Não, não tem nada a ver o que eu disse.
[2.47] M: E se fizer 25*x* dividido por 750*x*.
[2.48] J: Não, acho que 25*x* / 750+5000 , porque 750 é constante.
[2.49] M: Mas tipo, se eu for jogar 100 minutos, vai ser 750 vezes 100 também.
[2.50] J: Você não pode colocar o *x* aqui, acho que assim mais 5000 [apontando para a fórmula].
[2.51] M: Mas, no minuto 2 não tinha 750. Tinha 1500, né.
[2.52] J: Deu o mesmo resultado que o meu. E se multiplicar o *x* por 25 dividido por 750?

Nesse segundo trecho, o foco da discussão do grupo é obter uma representação algébrica para a concentração da mistura como uma função do tempo. Embora, já no trecho anterior o grupo tenha iniciado a observação de valores particulares da concentração, calculados para instantes de tempo iguais a 1, 2 e 30 minutos, novas conjeturas passam a ser elaboradas e testadas. Embora, inicialmente, o estudante C tenha sugerido [2.34] a expressão 5000 + 25*x* (e que representa uma generalização para quantidade de água no tanque como função do tempo), ela foi desconsidera na continuidade da discussão. Entre [2.33] e [2.36], os estudantes J e C elaboram uma nova conjectura, a de que a concentração aumenta 0,3 g/L a cada 50 litros de água bombeados para o tanque. Possivelmente, esse valor é oriundo de um cálculo realizado anteriormente (trecho [1.17]), mas essa conjectura é abandonada pela dificuldade em expressá-la algebricamente, considerando a variável como o tempo medido em minutos [2.37].
Por sua vez, o estudante J explicita novas conjecturas, [2.38] e [2.42], na qual procura relacionar, aparentemente de forma arbitrária, os valores presentes no enunciado da tarefa (25, 750 e 5000). Tais hipóteses são refutadas pelo próprio estudante [2.43], sem alguma justificativa mais elaborada, mas também por C, em [2.45], pelo fato das fórmulas sugeridas levarem a valores de concentração "muito grandes" (ou seja, cuja ordem de grandeza não condiz com valores obtidos anteriormente). Uma nova tentativa de obter a representação algébrica parte então da fala de M, em [2.47]. A conjectura inicial de que "E se fizer 25*x* dividido por 750*x*" é reformulada por J, em [2.48], mas a hipótese de que "750 é constante" é refutada por M em [2.49], sob o argumento de que esse valor precisa ser multiplicado pelo tempo. O estudante J parece não reconhecer a possibilidade de que a variável *x* seja utilizada tanto no numerador quanto no denominador da expressão procurada, o que novamente a sugerir "multiplicar o *x* por 25 dividido por 750", conjectura essa que já havia sido formulada anteriormente [2.38], e ele mesmo havia refutado.

Trecho 3
[3.53] Professor: O que vocês pensaram aqui?
[3.54] C: A gente tá chegando na conclusão que sempre vai aumentar e os 5000 vai ficando, e a gente tá tentando buscar uma função, porque a gente acha que o limite de *x* é 30.
[3.55] Professor: E de onde vocês tiraram esse 30?

[3.56] M: Porque é a concentração.
[3.57] J: A concentração máxima de sal por litro, no minuto.
[3.58] Professor: E o que vocês estão tentando achar nesse momento?
[3.59] C: A gente está tentando achar uma função.
[3.60] Professor: Vocês já acharam, só não reconheceram no papel de vocês.
[3.61] C: Tá, vamos fazer esse processo aqui de novo... 5000 litros.
[3.62] M: Tá, aqui é minuto 0 né?
[3.63] J: Será que vai usar 30 gramas por litros de concentração?
[3.64] C: Esse valor aqui ele vai variar, os 5000 litros é constante.
[3.65] M: É, o 5000 tem que ter na função.
[3.66] J: E se fosse o 25 dividido por 750 vezes 0,3*x*.
[3.67] C: Pensa bem, sempre tá aumentando 25 de um para outro.
[3.68] J: Certo.
[3.69] C: Então vai ser 5000 mais 25, esse 25 tenho quase certeza que ele existe, vezes o tempo. Não! Calma.
[3.70] J: Acho que vai ser assim, 5000+(25/750) vezes 0,3*x*, por que é concentração?
[3.71] M: Não! A concentração não vai mudar.
[3.72] C: 25 vezes o tempo: $x = 1$, temos 5025. Beleza. Isso a gente achou, agora a gente tem que achar uma formula para aplicar na concentração. Será que eu divido alguma coisa?
[3.73] J: Mais 750*x*?
[3.74] C: Agora como que a gente achou essa concentração. Essa concentração de 30 gramas por litro?
[3.75] J: E se colocar mais 750*x*? Não dá certo?
[3.76] C: não, vai ficar um número muito grande daí.
[3.77] J: ou dividir tudo por 750*x*?
[3.78] C: também não.
[3.79] J: não dá também.
[3.80] C: Quer ver 5000+25/750, não! Não é. Pensa 30 gramas por litro, isso aqui é a quantidade de água... será que é tudo isso? 5000+25, vezes 0,3.
[3.81] J: Acho que alguma hora a gente vai ter que dividir na função. Agora pelo o quê?
[3.82] M: Porque, aqui a gente tá dividindo, né? Então eu acho que na função vai ter que dividir.
[3.83] J: Como que chegou no limite?
[3.84] C: A gente pegou 5025, e o que a gente fez? No minuto 1 a gente tem 5025 litros.
[3.85] M: A gente tá dividindo gramas por litro, então a gente tem que trocar aqui [apontando para fórmula]. O 750*x* pra cá, é só trocar aqui, olha. Eu acho que só inverter já vai dar. [silêncio]
[3.86] C: É exatamente isso cara.
[3.87] M: Só que eu não sei se está certo expressar assim.
[3.88] C: Ta certinho, 750*x* dividido por 25*x* + 5000. Vai fazendo a prova real ai, conforme for fazendo a prova real você vai encontrando os valores.
[3.89] J: É porque depois que você divide aqui, você comprova que a concentração é 0,3, então você acha o limite.
[3.90] M: É, deu certo a prova real.

Em parte desse trecho, houve intervenção do professor que, inicialmente, pediu que os integrantes do grupo explicassem como pensaram [3.53]. O estudante C então apresenta como conjectura que “[a concentração] sempre vai aumentar e os 5000 vai ficando”, porém não a justifica, e informa que o grupo está “tentando buscar uma função” (na verdade, expressá-la algebricamente).

A seguir, o professor pediu que justificassem como obtiveram o valor 30 [3.55], porém sem sucesso. Por fim, informa que eles já haviam encontrado uma “função”, porém não a estava reconhecendo em suas anotações [3.60], referindo-se ao fato de que o grupo tinha sido capaz de calcular valores particulares da concentração (como mostrado na tabela apresentada ao lado esquerdo da Figura 2, resolução feita até aquele momento), mas não sabia expressar essa generalização de forma algébrica.

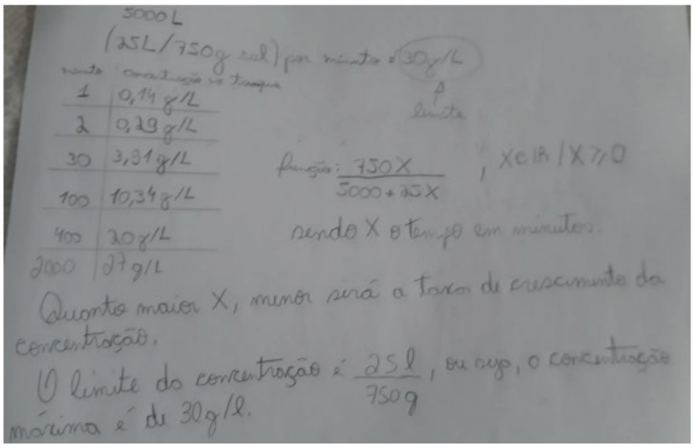


Figura 2. Resolução da tarefa realizada pelos estudantes M, J e C.

Após a saída do professor, o grupo volta por buscar uma expressão algébrica para função que representa seu raciocínio. Se, por um lado, o estudante J apresenta alguns conjecturas aparentemente aleatórias, tentando encontrar uma fórmula “que dê certo”, o estudante C sugere refazer os cálculos, para valores particulares de tempo, buscando reconhecer algum tipo de padrão.

Ao longo de parte da discussão, o grupo assume como válida a conjectura de que a concentração, a longo prazo, aproxima-se do valor 30 g/L [3.80], e tenta incorporar esse valor em sua expressão algébrica. São capazes de representar, de forma independente, como funções do tempo, tanto a quantidade de sal (750 vezes o tempo) quanto a quantidade de água (25 vezes o tempo, mais 5000). Em [3.81] explicitam a conjectura de que, para expressar algebricamente a generalização encontrada a partir de valores numéricos, será necessário realizar uma divisão. Novos ajustes são realizados na fórmula até que, nas falas [3.88] a [3.90], os estudantes terminam por justificá-la, lançando mão de um procedimento que denominam “prova real” (no caso, confrontando valores de concentração, calculados pela fórmula, com aqueles que registrados na tabela).

Discussão dos dados e conclusão

O objetivo desse artigo foi analisar processos de raciocínio matemático de estudantes no contexto de uma aula de CDI, na discussão de uma tarefa exploratória, com foco nas categorias conjecturar, justificar e generalizar.
No início do primeiro trecho, observa-se que um dos estudantes começa por apresentar uma conjectura e o grupo tenta justificá-la calculando a concentração para valores particulares de tempo. Finalizando esse trecho 1, o estudante C conjectura, a partir da observação desses valores, que a concentração vai aumentando "até o infinito", mas o estudante J invalida essa conjectura, formulando uma nova: a concentração nunca vai chegar ao 30.
No segundo trecho, vemos um movimento de formulação e reformulação de conjecturas na tentativa feita pelo grupo, de expressar algebricamente a concentração como função do tempo. Entretanto, não há uma preocupação do grupo, nesse trecho da discussão, em justificar suas conjecturas. Em alguns momentos, evidencia-se, em especial nas falas do estudante J, uma tentativa em elaborar uma fórmula "que dê certo", mas que desconsidera resultados obtidos.
No último trecho, o professor se faz presente nos diálogos incentivando os estudantes a sintetizar e justificar as conjecturas elaboradas até aquele momento. Espera-se que, no Ensino Superior, a capacidade de justificar esteja mais amadurecida e que a justificação de conclusões permita ao aluno esclarecer seu raciocínio. Entretanto, isso ainda não estava explícito no momento de intervenção do professor. A partir da fala de que "vocês já acharam [uma função], só não reconheceram no papel de vocês", os estudantes passam a retomar e, em alguns casos, reformular conjecturas anteriores buscando uma expressão algébrica que generalize o que haviam percebido.
O processo de generalização aqui evidenciado teve como finalidade chegar a conclusões válidas estabelecendo uma relação, aplicando em diferentes objetos matemáticos e transferindo essa relação para um conjunto maior (Jeannotte & Kieran, 2017; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). No caso, ao final da discussão, o grupo obteve, com sucesso, e foi capaz de validar uma expressão algébrica para a função que relaciona a concentração e o tempo.
Percebe-se, ao longo dos três trechos de discussão, um movimento cíclico (Jeannotte & Kieran, 2017), com avanços e recuos, de raciocinar sobre relações matemáticas e desenvolver afirmações (conjecturar), buscando reconhecer e explicar a validade (ou não) dessas afirmações (justificar). Em alguns momentos, culminou com a estender, para situações mais gerais, de regularidades observadas em casos particulares (generalizar) – como, por exemplo, a variação da quantidade de água e da quantidade de sal, como funções do tempo e, de forma mais geral, a concentração, mostrando assim um compreensão conceitual (Morais, Serrazina & Ponte, 2018).
Salientamos também a impôrtancia da tarefa proposta e suas potencialidades com relação a esses processos (Trevisan & Araman, 2021), destacando que este artigo traz recortes de um trabalho mais amplo, desenvolvido ao longo de um semestre. Destacamos a importância de

proporcionar a estudantes de CDI momentos de discussões como ocorridas no contexto deste trabalho (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018), propiciando aos envolvidos o aprimorameno de formas de comunicação eficazes, em suas modalidades oral, escrita e gráfica (Brasil, 2019; Gomes & Stahl, 2020), possibilitando a mobilização de processos de raciocínio que culminam no desenvolvimento de habilidades necessárias à implantação de soluções de Engenharia.

Referências bibliográficas

Araman, E. M. O., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2019) "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa,* 21 (2), 466-490.

Brasil. (2019) Ministério da Educação. Resolução no 2, de 24 de abril de 2019. *Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, Brasília*, Brasil. Edição 89. Seção 1, p. 43.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Alegre: Porto Editora. Cabral, T. C. B. (2015). Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. *Perspectivas da Educação Matemática,* 8, 208-245.

Couto, A., Fonseca, M., & Trevisan, A. (2017). Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à Insubordinação Criativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 8* (4), 50-61.

Gomes, D., & Stahl, N. (2020). A Resolução de Problemas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia: uma experiência. *Revista Thema, 17* (2), 294-308.

Guimarães, G. (2019). Novas tendências de aprendizagem em engenharia: O aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de cálculo diferencial e integral. *Revista De Ensino De Engenharia, 38* (1).

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96* (1), 1-16.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics,* 96(2), 169-186.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema, 32* (62), 781-801.

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante, 27* (1), 25-45.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *In:* GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156,*

7-11.
Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema, 17* (21), 81-140.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. *Bolema, 12* (61), 398-418.

Santos, A. R., & Bianchini, W. (2002) *Aprendendo Cálculo com Maple: Cálculo de uma variável.* 1. ed. Rio de Janeiro - RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2017) Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo Integral. *Educação Matemática Pesquisa, 19* (3), 353-373.

Trevisan; A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia, 11* (1), 209-227.

Zarpelon, E., Martins de Resende, L. & Reis, E. (2017). Análise do desempenho de alunos ingressantes de engenharia na disciplina de cálculo diferencial e integral I. *Interfaces da Educação, 8* (22), 303-335.

Desenvolvimento profissional para a integração da tecnologia no ensino da Matemática: em busca de teorias pragmáticas

Professional development for the integration of technology in the teaching of Mathematics: in search of pragmatic theories

Helena Rocha[1], Eleonora Faggiano[2], Ana Isabel Sacristán[3], Marisol Santacruz Rodriguez[4]

Resumo: Este artigo apresenta parte de um estudo que visou tornar mais explícitas as teorias pragmáticas que informam a conceção de programas de desenvolvimento profissional com ênfase na integração das tecnologias digitais nas práticas de professores de matemática. A análise efetuada teve por base um conjunto de projetos considerados representativos e implementados em quatro países – Colombia, Itália, México e Portugal. A partir desta análise identificamos elementos relevantes (por exemplo, semelhanças e diferenças, barreiras e oportunidades) e desenvolvemos recomendações a ter em conta em futuras elaborações de programas de desenvolvimento profissional. No decurso deste processo identificámos um conjunto de aspetos e sub-aspetos, bem como várias interconexões entre estes, que emergiram em relação a cinco temas principais e permitiram revelar as nossas teorias pragmáticas. Este trabalho oferece assim uma estrutura base para apoiar programas futuros de desenvolvimento profissional de professores de matemática relativamente ao uso da tecnologia digital.

Palavras-chave: desenvolvimento profissional; educação matemática; uso da tecnologia; teoria.

Abstract: This paper presents part of a study that aimed to make more explicit the pragmatic theories that inform the design of professional development programs with an emphasis on the integration of digital technologies in the practices of mathematics teachers. The analysis carried out was based on a set of projects considered representative and implemented in four countries – Colombia, Italy, Mexico, and Portugal. Based

1. CICS.NOVA, Universidade NOVA de Lisboa – Portugal, hcr@fct.unl.pt
2. Università di Bari Aldo Moro – Itália, eleonora.faggiano@uniba.it
3. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) – México, asacrist@cinvestav.mx
4. Universidad del Valle – Colombia, marisol.santacruz@correounivalle.edu.co
*Todas as autoras contribuíram igualmente para este trabalho

on this analysis, we identify relevant elements (e.g., similarities and differences, barriers and opportunities) and develop recommendations to be taken into account in the design of future professional development programs. In this process, we identified a set of aspects and sub-aspects, as well as several interconnections between them, which emerged in relation to five main themes and allowed us to reveal our pragmatic theories. Thus, this work provides a framework to support the design of future projects for the professional development of mathematics teachers regarding the use of digital technology.

Keywords: *profissional development; mathematics education; using technology; theory.*

Introdução

É amplamente reconhecida a relevância do professor para o processo de ensino aprendizagem, bem como a importância do seu desenvolvimento profissional. Esta importância é igualmente reconhecida relativamente ao uso que o professor faz das tecnologias digitais (Rocha, 2020). E se é verdade que muita atenção tem sido dada ao uso que os professores fazem destas tecnologias e ao conhecimento e às práticas associadas a esse uso, é igualmente verdade que a mesma atenção não tem sido dada aos programas de desenvolvimento profissional nem às características de um programa que promova uma integração bem sucedida (Rocha & Palha, 2021).

Com este estudo pretendemos tornar explícitas as teorias na base de programas de desenvolvimento profissional do professor de Matemática visando a integração de tecnologias digitais na sua prática letiva no âmbito do ensino, da aprendizagem e da avaliação. A estas teorias, que efetivamente estão na base dos programas de desenvolvimento profissional, chamaremos de *teorias pragmáticas.*

Atualmente não existe uma teoria global e abrangente de suporte ao design de programas de desenvolvimento profissional (Clark-Wilson & Hoyles, 2019). Existem diversos estudos com contributos importantes e que disponibilizam um significativo leque de conhecimentos (por exemplo, Cusi et al., 2020; Kennedy, 2016; Powell & Bodur, 2019; Rocha & Palha, 2021), mas falta uma conexão entre estes, que lhes permita dar a forma de uma teoria unificadora que possa nortear a conceção de futuros programas de desenvolvimento profissional. Neste estudo centramo-nos na análise de um conjunto de iniciativas de desenvolvimento profissional, fundamentalmente de larga escala, implementadas nos nossos países. A partir desta análise procuramos contribuir para o desenvolvimento de um quadro teórico abrangente, identificando os aspetos mais pertinentes, tal como ilustrado pelos exemplos considerados. Esses exemplos consistem em dois ou três projetos implementados em cada um dos nossos países: Colômbia, Itália, México e Portugal. A intenção do nosso estudo é desenvolver o que designamos de teoria pragmática, que esperamos que possa constituir um contributo para estruturar os programas de desenvolvimento profissional, preparando os professores de Matemática para as tecnologias digitais e promovendo a efetiva integração destas.

Os projetos

Como base para a nossa análise escolhemos um conjunto de projetos que considerámos significativo pela importância que tiveram em cada um dos países, seja pela dimensão que assumiram, seja pelo *design* ou pelo impacto que tiveram.
Relativamente à Colômbia, selecionamos três projetos nacionais de desenvolvimento profissional com objetivos variados: o INTC – *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica y Media de Colombia* (1998-2004), o CIER – *Centros de Innovación Educativa Regional* (2013-2015) e o CPE – *Computadores para Educar* (iniciado em 2014 e ainda em curso). O INTC procurou integrar o uso das tecnologias digitais nas aulas de matemática do ensino secundário. O CIER teve como foco diversificar os usos criativos das tecnologias digitais no ensino nas escolas (incluindo matemática) e apoiar as capacidades tecnológicas de cada região do país. O CPE pretendeu fornecer ferramentas tecnológicas, capacitação e apoio às comunidades educacionais, de forma ambientalmente consciente, por meio do reaproveitamento de equipamentos descartados de outros setores.
Pela Itália, escolhemos o projeto m@t.abel (2005-2012), lançado e apoiado pelo Ministério da Educação italiano e desenvolvido em colaboração com investigadores universitários. Este projeto consolidou várias comunidades de prática, com uma mistura entre atividade de formação de professores e experimentação em sala de aula, visando oferecer infraestruturas (uma plataforma online e materiais de apoio) e suporte tutorial especializado. Com base na experiência do m@t.abel, um outro projeto (online), DiFiMa – *Didattica della Fisica e della Matematica* (iniciado em 2008 e ainda em curso), foi implementado na Universidade de Turin, com o objetivo de envolver professores de matemática e física em todo o país, através do uso de uma plataforma online. Esta plataforma é usada para formar professores voluntários, que posteriormente disponibilizam apoio tutorial a colegas locais, permitindo alcançar uma escala de dimensão nacional. Deste programa de desenvolvimento profissional fazem parte materiais didáticos com orientações e suporte a distância e, mais recentemente, alguns *Massive Open Online Courses* (MOOCs), tal como conceptualizados por Aldon *et al*. (2019).
Relativamente ao México, escolhemos dois projetos implementados a nível nacional e um outro implementado a nível local que decorreram no início do séc. XXI e foram significativos pelo seu impacto. O projeto

EMAT – *Enseñanza de la Ciencia y las Matemáticas com Tecnologia* (1998-2007), com ênfase no 3.º ciclo, foi um dos projetos nacionais. O outro, foi o projeto Enciclomedia (2002-2007), com foco nos anos iniciais da escolaridade. O projeto local, aqui designado por M.Ed. (2005-2009), consistiu num mestrado de desenvolvimento profissional implementado por uma universidade. Qualquer dos projetos nacionais visava a integração da tecnologia nas escolas e incluía o acompanhamento da formação de professores; no entanto, as suas conceções e designs eram radicalmente diferentes. O projeto EMAT foi cuidadosamente concebido por investigadores e pressupunha uma integração gradual e progressiva (Sacristán & Rojano, 2009). Já o projeto Enciclomedia decorreu de uma decisão política visando a conceção de livros digitais acompanhados por aplicativos interativos. O programa M.Ed. envolveu cerca de 100 professores em exercício e foi implementado a pedido do governo de um estado (Sacristán, Sandoval, & Gil, 2011). Uma descrição mais detalhada destes projetos encontra-se disponível em Trouche et al. (2012).

Quanto a Portugal, selecionámos três projetos de desenvolvimento profissional com impacto significativo nas escolas portuguesas:
o projeto MINERVA – *Meios INformáticos no Ensino: Racionalização, Valorização, Atualização* (1985-1994), o PA – Programa de Acompanhamento da implementação do novo programa de Matemática do ensino secundário (1998-2001) e o PM – Plano da Matemática (2006-2012). O projeto MINERVA foi o primeiro grande projeto português com foco na tecnologia, e com o objetivo de integrar a tecnologia no ensino e na aprendizagem de todas as disciplinas e em todos os níveis de escolaridade (Ponte, 1994). O PA pretendeu promover as discussões dos professores sobre as suas práticas, abordando nomeadamente o papel dos alunos e a utilização de novos materiais e recursos, onde a tecnologia era um elemento importante (Teixeira, 2004). O PM era um programa nacional com inscrição voluntária de professores, com o objetivo de melhorar os resultados dos alunos com base numa mudança na prática dos professores, onde a tecnologia geralmente era um elemento importante. A característica específica do PM foi o reconhecimento do papel dos professores, cabendo a eles a criação de pequenas comunidades de prática e a decisão sobre o enfoque específico de cada uma dessas comunidades (GTM, 2019).

Temas e aspetos sugeridos pela análise dos projetos – um breve olhar

A análise dos projetos partiu do trabalho de Tondeur *et al.* (2012). Os autores focam-se na preparação de professores para integrar tecnologias nas suas aulas, identificando temas e condições determinantes a partir de uma revisão de literatura sistemática. Paralelamente considerámos aspetos ao nível do conhecimento profissional do professor. Assim, apoiámo-nos em domínios do modelo do *Conhecimento para Ensinar Matemática* (MKT) de Ball, Thames e Phelps (2008) para analisar, por exemplo, questões ligadas ao currículo e aos programas; e apoiámo-nos em domínios do modelo do *Conhecimento Pedagógico da Tecnologia para a Matemática* (MPTK), desenvolvido por Thomas e

Hong (2013) e adaptado para o caso específico da Matemática por Clark-Wilson e Hoyles (2019), para analisar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para a integração da tecnologia promovido pelo programa de desenvolvimento profissional.
Assumindo como base as referências teóricas indicadas, começámos por uma análise feita por cada uma das autoras aos projetos do seu país, passando depois a uma análise e discussão conjunta a partir da qual definimos os temas, aspetos e sub-aspetos que constituem o principal resultado deste trabalho.
Aqui ilustramos o trabalho realizado tendo por base apenas um dos projetos portugueses considerados – o PM. Focaremos a nossa atenção nos temas e abordaremos apenas alguns dos aspetos e sub-aspetos mais diretamente evidenciados por esse projeto. Uma descrição de todos os aspetos e sub-aspetos, bem como a análise a todos os projetos considerados, poderá ser consultada em Faggiano et al. (2021).
Consideramos cinco temas – visão/objetivos e políticas; foco; estratégias e métodos; limitações ou potencialidades e incentivos; avaliação do impacto. De seguida descrevemos sinteticamente cada um destes temas, comentando simultaneamente alguns dos aspetos e sub-aspetos identificados na sequência da análise do projeto PM.

Visão/objetivos e políticas
Este tema centra-se na visão, nos objetivos e nas decisões políticas que norteiam o programa de desenvolvimento profissional, assim como na escala de implementação (por exemplo, a nível nacional ou a nível local).
O projeto PM pretendia contribuir para a promoção do sucesso escolar dos alunos, tendo implícita a intenção de aprofundar o conhecimento profissional dos professores e contribuir para uma mudança de práticas. A implementação deste projeto decorreu a nível nacional, no entanto o envolvimento dos professores era voluntário, tendo ainda a este nível algumas características particulares, como teremos ocasião de ver mais adiante, e que decorrem de contributos provenientes da investigação realizada.

Foco
O foco do programa de desenvolvimento profissional inclui elementos como a sua especificidade disciplinar (por exemplo, se é específico da Matemática, se é geral abrangendo todas as áreas disciplinares, ou se aborda a tecnologia em geral) e a quem é atribuída a decisão relativamente à escolha do foco.
O projeto PM tinha um foco exclusivo na Matemática. Este era um projeto onde o foco não estava necessariamente na tecnologia, se bem que em muitas das circunstâncias a tecnologia se constituiu como um elemento importante do trabalho realizado. Nessas ocasiões, a tecnologia foi sempre considerada pelo contributo que podia trazer à Matemática, e nunca encarada por si só. Ou seja, não se tratava de proporcionar o conhecimento da tecnologia, mas de desenvolver conhecimento que permitisse trazer a tecnologia para dentro da sala de aula de forma a

que pudesse constituir-se como um contributo para a aprendizagem matemática. Contudo, o aspeto mais marcante deste projeto prendia-se com a escolha do foco, que neste caso era deixada aos professores. Eram estes que se organizavam e, em conjunto, definiam o foco do seu trabalho, estruturando e identificando também o apoio de que sentiam necessitar para prosseguir a abordagem que pretendiam.

Estratégias e métodos

Este tema centra-se nas estratégias e métodos de, e para, desenvolvimento profissional e nas opções que os afetam.

O PM consistiu num programa de desenvolvimento profissional implementado exclusivamente de forma presencial e envolvendo professores em exercício de funções, que voluntariamente se envolviam no programa. A implementação em sala de aula, bem como a reflexão em torno dessa prática, frequentemente com uma vertente de integração entre teoria e prática, eram centrais neste programa. A criação de comunidades de prática, ou de grupos de professores que se apoiam mutuamente, era outro dos aspetos que caracterizava este programa. Igualmente importante era o papel assumido por cada professor, que de alguma forma se tornava formador de cada um dos seus colegas, e que se articulava com um outro aspeto, igualmente marcante neste programa, relativo à partilha de experiências e da reflexão sobre a própria prática e sobre as práticas dos pares.

Limitações ou potencialidades e incentivos

As limitações ou potencialidades e incentivos prendem-se com os fatores que restringem ou facilitam a participação em um programa de desenvolvimento profissional e/ou integração da tecnologia.

O *design* do PM como programa de desenvolvimento profissional tinha presente a intenção de limitar alguns dos constrangimentos por vezes apontados pelos professores como dificultando o seu envolvimento e potenciar circunstâncias que pudessem ter uma influência positiva. Assim, os professores envolvidos dispunham de um período de tempo que fazia parte integral do seu horário de trabalho semanal para se envolverem no programa. Esse período de tempo estava ainda articulado com o dos colegas da escola que também faziam parte do programa, para que existissem condições efetivas para o trabalho colaborativo. Estavam ainda asseguradas as condições materiais, nomeadamente de acesso à tecnologia, para que fosse possível o trabalho efetivo em sala de aula com os alunos. Paralelamente, o programa tinha por base um projeto concebido pelos próprios professores envolvidos, procurando assim contribuir para a relevância do programa de desenvolvimento profissional para aqueles professores em concreto e para a adequação ao contexto específico em que estes se encontravam.

Avaliação do impacto

A avaliação do impacto refere-se aos processos para avaliar o impacto do programa de desenvolvimento profissional (por exemplo, na prática dos professores) e à forma como tal informa futuras adaptações do pro-

grama (por exemplo, propostas de melhoria) ou a conceção de outros programas de desenvolvimento profissional.
Este é um aspeto difícil de analisar no programa PM. Os próprios grupos de professores envolvidos procuraram frequentemente, por sua própria iniciativa, fazer algum balanço do trabalho desenvolvido, mas um trabalho mais abrangente e que permita tirar conclusões para futuros programas, mesmo quando é realizado, tende a não ter uma divulgação dos resultados na medida em que são considerados confidenciais.

Conclusão

A análise do conjunto de programas de desenvolvimento profissional escolhidos nos quatro países considerados neste estudo permitiu identificar um conjunto de temas, de aspetos e de sub-aspetos e a partir destes inferir as nossas *teorias pragmáticas* para o *design* de programas de desenvolvimento profissional com foco no uso da tecnologia para ensinar matemática. Aqui abordamos apenas as que estão mais relacionadas com o programa de desenvolvimento profissional que discutimos neste texto, o Plano da Matemática, remetendo para Faggiano et al. (2021) para uma leitura global das nossas *teorias pragmáticas.*

Foco na matemática com tecnologia em vez de apenas na tecnologia

A experiência revela que apesar de ser necessário ao professor algum conhecimento técnico da tecnologia, tal não é suficiente para a sua integração no ensino da Matemática, requerendo também um outro tipo de conhecimento que inclua como usar e tirar partido da tecnologia para ensinar matemática (Clark-Wilson et al., 2014; Faggiano, 2009; Rocha, 2020) e permitindo ao professor ser capaz de promover o desenvolvimento da génese instrumental dos seus alunos (Trouche, 2004).

Atender às necessidades dos professores

Reconhecer o professor como um profissional capaz de identificar as suas próprias necessidades é, não só importante, como também um elemento determinante para conseguir um maior envolvimento, pois este vê-se como parte relevante ao poder discutir as suas necessidades e aquilo que considera importante, conseguindo assim uma maior proximidade com a realidade da sua sala de aula.

Conectar o desenvolvimento profissional e a prática letiva

A relevância do programa de desenvolvimento profissional será tanto maior quanto maior for a proximidade à prática letiva do professor. São essas experiências que permitem ao professor refletir, seja em conjunto com os seus pares seja com especialistas.

Desenvolver comunidades de prática

O desenvolvimento de comunidades de prática e de práticas colaborativas entre professores não é fácil de alcançar e ainda menos de manter. Contudo, estas são particularmente promissoras para o desenvolvimento profissional do professor por potenciarem a comunicação entre professores e a partilha de experiências.

Comentários finais

A importância de conseguir uma teoria que possa servir de base ao design de programas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática para integrar a tecnologia nas suas práticas parece-nos inquestionável. A nossa teoria pragmática, de que apresentámos alguns dos itens, parece-nos poder constituir na sua globalidade um primeiro contributo. Ainda assim, será importante atender à evolução da tecnologia e das formas de comunicação e ir procedendo aos necessários ajustes. É fundamental ter presente que uma estratégia de desenvolvimento profissional bem sucedida num determinado momento, poderá deixar de o ser a certa altura. Seria ainda importante dar continuidade a este trabalho, alargando a análise a programas implementados noutros países, de modo a conseguir um maior enriquecimento e aprofundamento das nossas teorias pragmáticas.

Agradecimentos

Um agradecimento a Alison Clark-Wilson do UCL Knowledge Lab, UCL Institute of Education, Reino Unido, pelas suas ideias e comentários a este trabalho.

Um agradecimento também pelo financiamento a parte deste trabalho proporcionado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017.

Referências bibliográficas

Aldon G., Arzarello F., Panero M., Robutti O., Taranto E., & Trgalová J.(2019). MOOCs for mathematics teacher education to foster professional development: *Design principles and assessment. In* G. Aldon, & J. Trgalová (Eds.), *Technology in Mathematics Teaching. Mathematics Education in the Digital Era* (vol. 13, pp. 223-246). Springer.

Ball, D, Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Clark-Wilson, A., Aldon, G., Cusi, A., Goos, M., Haspekian, M., Robutti, O., & Thomas, M. (2014). The challenges of teaching mathematics with digital technologies – the evolving role of the teacher. *In* P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 1, pp. 87- 116). PME.

Clark-Wilson, A., & Hoyles, C. (2019). A research-informed web-based professional development toolkit to support technology-enhanced mathematics teaching at scale. *Educational Studies in Mathematics,* 102, 343-359.

Cusi, A., Swidan, O., Faggiano, E., & Prodromou, T. (2020). The collaborative work on scenario design as a tool to foster teachers' professional development. *In* H. Borko & D. Potari (Eds.), *Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups — Conference Proceedings of ICMI Study 25* (pp. 605-612). National and Kapodistrian University of Athens.

Faggiano, E. (2009). *Leading teachers to perceive and use technologies as resources for the construction of mathematical meanings. In* V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 1310–1319). ERME.

Faggiano, E., Rocha, H., Sacristan, A., & Santacruz-Rodríguez, M. (2021).

Towards pragmatic theories to underpin the design of teacher professional development concerning technology use in school mathematics. *In* A. Clark-Wilson, A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, & H-G. Weigand (Eds.) *Mathematics Education in the Digital Age: Learning, Practice and Theory* (pp. 42-68). Routledge.

GTM – Grupo de Trabalho de Matemática (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática* (1.ª versão) (pp. 182-189). DGE. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf

Kennedy, M. M. (2016). How does professional development improve teaching? *Review of Educational Research*, 86(4), 945-980.

Ponte, J. P. (1994). *O projeto MINERVA: introduzindo as NTI na Educação em Portugal* - Relatório do projeto MINERVA. Lisboa: DEPGEF. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte(MINERVA-PT).doc

Powell, C., & Bodur, Y. (2019). Teachers' perceptions of an online professional development experience: Implications for a design and implementation framework. *Teaching and Teacher Education*, 77, 19-30.

Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM – Mathematics Education, 52* (7), 1381-1396.

Rocha, H., & Palha, S. (2021). A tecnologia na formação inicial de professores de Matemática – um olhar sobre duas realidades. *In* A. Richit & H. Oliveira (Eds.), *Formação de professores e tecnologias digitais* (1-34). Editorial Livraria da Física.

Sacristán, A. I., & Rojano, T. (2009). The Mexican national programs on teaching mathematics and science with technology: The legacy of a decade of experiences of transformation of school practices and inter actions. *In* A. Tatnall, & A. Jones (Eds.), *Education and technology for a better world* (207–215). Springer.

Sacristán, A. I., Sandoval, I. T., & Gil, N. (2011). Teachers engage in peer tutoring and course design inspired by a professional training model for incorporating technologies for mathematics teaching in Mexican schools. *In* M. Joubert, A. Clark-Wilson, & M. McCabe (Eds.), *ICTMT 10: Enhancing Mathematics Education through Technology* (248–253). ICTMT.http://www.mccabeme.myweb.port.ac.uk/ictmt10proceedings2.pdf

Teixeira, P. (2004). *O acompanhamento local como modelo de desenvolvimento curricular em Matemática.* Coleção Teses. Associação de Professores de Matemática.

Tondeur, J., van Braak, J., Sang, G., Voogt, J., Fisser, P., & Ottenbreit-Leftwich, A. (2012). Preparing pre-service teachers to integrate technology in education: A synthesis of qualitative evidence. *Computers & Education,* 59, 134–144.

Thomas, M. O. J., & Hong, Y. Y. (2013). Teacher integration of technology into mathematics learning. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 20* (2), 69-84.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 9* (3), 281-307.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristán, A. I. (2012).

Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. *In* M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (753–789). Springer.

CARTAZ | Tipologia de Tarefas nos Manuais Portugueses de Matemática A para 11.º ano

POSTER | *Types of Tasks in Portuguese Mathematics Manuals for 11th Grade*

Letícia Gabriela Martins[1], Maria Helena Martinho[2]

Resumo: Os alunos podem ter contacto com diferentes tipos de tarefas em Matemática. Neste estudo, foi feita uma análise a todos os manuais portugueses de 11º ano aprovados para o ano letivo 2019/2020, da disciplina de Matemática A, de modo a perceber que tipos de tarefas cada manual propunha. Considerando que as tarefas podem ser divididas em quatro categorias principais, exercício, problema, exploração e investigação, concluiu-se que cerca de 88% das tarefas são exercícios, aproximadamente 11% são problemas e as restantes tarefas são explorações, não tendo sido encontrada nenhuma tarefa considerada como investigação.

Palavras-chave: tipologia de tarefas; manuais escolares; matemática; ensino secundário

Abstract: *Students can have contact with different types of tasks in Mathematics. In this study, an analysis was made of all the 11th grade Portuguese textbooks approved for the academic year 2019/2020, in the subject of "Mathematics A", to understand what types of tasks each textbook proposed. Considering that the tasks can be divided into four main categories, exercise, problem, exploration, and investigation, it was concluded that about 88% of the tasks are exercises, approximately 11% are problems and the remaining tasks are explorations, without any task considerer as investigation.*

Keywords: *task types; textbooks; mathematics; high school*

Introdução e contextualização teórica

No ensino da Matemática, é importante que os alunos tenham oportunidade de se envolver em diferentes tipos de tarefa, dado que cada tipo desempenha funções diferentes. As tarefas podem ser usadas,

1. CIEd, Universidade do Minho, lgb.martins@hotmail.com
2. CIEd, Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt

por exemplo, para introduzir novos conceitos matemáticos, desafiar e despertar curiosidade na matemática por parte dos alunos, aumentar a envolvência destes na disciplina, ou para desenvolver o raciocínio dos alunos (NCTM, 2007). De acordo com o NCTM (2007), a escolha de uma boa tarefa pode fazer com que os alunos se sintam mais entusiasmados com a Matemática. Propor uma tarefa que possa ser resolvida com diferentes estratégias torna-a mais acessível e equilibrada para todos os alunos, mesmo que tenham diferentes conhecimentos prévios e experiências. Stein e Smith (2009) referem que há tarefas que exigem um procedimento mais rotineiro e outras que estimulam os alunos a estabelecer conexões, sendo que ambas fornecem oportunidades de pensar, apesar de distintas. É o facto de explorarem diferentes tipos de tarefas que permite aos alunos desenvolver “ideias implícitas (...) sobre a natureza da Matemática” (Stein & Smith, 2009, p. 22). Para Danielson e Marquez (2016), uma tarefa de alta qualidade exige raciocínio para ser resolvida e requer alguma persistência, além de estar alinhada com o currículo definido para a disciplina e de avaliar conteúdo matemático e “hábitos mentais”. Mas que tipo de tarefas podemos propor aos nossos alunos? Ponte (2005) indica uma tipologia de tarefas que segue duas dimensões fundamentais: o grau de desafio (que varia entre ‘reduzido’ e ‘elevado’) e o grau de estrutura (que varia entre ‘aberto’ e ‘fechado’). As tarefas de estrutura fechada, isto é, tarefas em que o enunciado nos fornece tudo o que precisamos de saber e aquilo que é pedido, podem ser exercícios ou problemas (se o grau de desafio é reduzido ou elevado, respetivamente). Já as tarefas de estrutura aberta, ou seja, em que não são explícitos todos os dados necessários ou o que é pedido tem algum grau de indeterminação, dividem-se em explorações (grau de desafio reduzido) ou investigações (grau de desafio elevado). De acordo com Ponte (2005), a distinção entre exercício e problema, ou entre exercício e exploração, é algo que nem sempre é simples de definir, isto porque depende muito dos conhecimentos prévios dos alunos. Por exemplo, uma tarefa pode consistir num problema para um aluno e, posteriormente, uma tarefa semelhante ser encarada como exercício dado que o grau de desafio já se revela menor.

Que tipos de tarefas encontramos nos manuais?

Os manuais escolares usados em sala de aula devem propor tarefas que promovam o raciocínio matemático, de forma a que os alunos tenham contacto com questões que os obriguem a justificar e explicar o que estão a pensar (Aineamani, 2018). Jäder (2015, citado por Radmehr & Vos, 2020), realizou um estudo com manuais de matemática de doze países dos diferentes continentes. Neste estudo, Jäder, de acordo com Radmehr e Vos (2020), concluiu que 79% das tarefas analisadas seriam aquilo que nós chamamos de exercício, uma vez que são referidas como sendo tarefas passíveis de ser resolvidas através da repetição de procedimentos dados previamente. Já os restantes 21%, de acordo com os autores, eram distribuídos por tarefas que podiam ser resolvidas por aplicação de procedimentos padrão com pequenas alterações (13%) e por tarefas cujo método de resolução exige alguma criatividade (9%). Mas será que os manuais escolares portugueses propõem diferentes tipos de tarefas? Foi a esta pergunta que quisemos responder com este estudo.

Metodologia e Resultados

Para este estudo, foram analisados todos os seis manuais disponíveis pela Direção Geral de Educação para o 11º ano no ano letivo 2019/2020, na disciplina de Matemática A. Para realizar a análise destes dados, foi utilizada a análise de conteúdo, uma técnica útil para procurar padrões e tendências em determinados documentos (Stemler, 2001). Os procedimentos de análise são organizados em torno de um processo de categorização (Bardin, 1977). As categorias utilizadas nesta análise seguem a tipologia de tarefas indicada por Ponte (2005), isto é: exercício, problema, exploração e investigação. Para manter o anonimato ético, cada manual será referido como sendo A, B, C, D, E, F, em vez de referir o nome de cada um deles. Na Tabela 1 pode ser visto um resumo dos dados recolhidos.

Tabela 1.
Total de tarefas de cada manual, distribuidas por cada tipo de tarefa.

Tipologia de Tarefas	Total de tarefas por cada manual					
	Manual A	Manual B	Manual C	Manual D	Manual E	Manual F
Exercício	723	803	627	719	810	461
Problema	103	123	101	59	78	59
Investigação	0	0	0	0	0	0
Exploração	8	11	2	1	9	0

Por observação da Tabela 1 conseguimos perceber que o tipo de tarefas mais presente nos manuais analisados são os exercícios, já que 4143 das 4697 tarefas são exercícios (ou seja, cerca de 88%). Também é possível perceber que o segundo tipo de tarefa mais presente nos manuais, embora em muito menos quantidade do que os exercícios, são os problemas, com uma percentagem de aproximadamente 11% das tarefas. Foram também encontradas tarefas de exploração, embora de forma muito residual já que menos de 1% são tarefas de exploração e, além disso, um dos manuais não tinha nenhuma tarefa deste tipo. Por fim, relativamente a tarefas de investigação, nenhum dos manuais apresentava tarefas desse tipo.

Considerações Finais

Com este estudo, percebemos que os alunos de 11.º ano de Matemática A, em Portugal, estão expostos maioritariamente a exercícios em detrimento de qualquer outro tipo de tarefa, se o único material utilizado em sala de aula e fora dela for o manual escolar, resultado que vai ao encontro do estudo realizado por Jäder (2015, citado por Radmehr & Vos, 2020). Isto é um indicador da importância do papel do professor no planeamento das suas aulas, uma vez que terá de ser ele a procurar diversificar as tarefas, recorrendo a fontes que não sejam exclusivamente os manuais adotados.

Agradecimentos

A primeira autora é suportada pela bolsa de doutoramento SFRH/BD/147510/2019, atribuída pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Este trabalho é também financiado pelo CIEd – Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade do Minho, projetos UIDB/01661/2020 e UIDP/01661/2020, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT.

Referências bibliográficas

Aineamani, B. (2018). How learners communicate their mathematics reasoning in mathematics discourse. In J. N. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. R. Mendes, & M. Schütte (Eds.), *Language and communication in mathematics education: International perspectives* (65–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75055-2_6

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Edições 70, Lda.

Danielson, C., & Marquez, E. (2016). *Performance tasks and rubrics for high school mathematics*. https://doi.org/10.4324/9781315695259

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar. Associação de Professores de Matemática.* http://www.apm.pt/portal/index.php?id=89310

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (Vol. 1, pp. 11–34). Associação de Professores de Matemática.

Radmehr, F., & Vos, P. (2020). Issues and challenges of 21st century assessment in mathematics education. In L. Leite, E. Oldham, A. S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & M. H. Martinho (Eds.), *Science and mathematics education for 21st century citizens: Challenges and ways forward* (359–379). Nova Science Publishers.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105, 22–28.

Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation,* 7(17).

CARTAZ | Dificuldades de alunos do 12.º ano na resolução de tarefas combinatórias

POSTER | *Some difficulties of 12th grade students in solving combinatorial tasks*

Mónica Valadão[1], Nélia Amado[2], João Pedro da Ponte[3]

Resumo: A natureza das tarefas no processo de ensino e aprendizagem da análise combinatória é reconhecidamente da maior importância para que os alunos compreendam os vários conceitos envolvidos. A identificação das dificuldades dos alunos na resolução de tarefas combinatórias pode ser um ponto-chave na promoção de uma aprendizagem significativa da Análise Combinatória. A partir das resoluções de alunos de uma turma do 12.º ano a um conjunto de tarefas, foi possível compreender e analisar as suas principais dificuldades e, deste modo, perceber de que forma é possível preparar os alunos para uma compreensão mais profunda deste tema.

Palavras-chave: Tarefas; combinatória; dificuldades; aprendizagem.

Abstract: *In the process of teaching and learning combinatorics, the nature of the tasks it is recognised as utmost important for students to understand the concepts. Identifying students' difficulties in solving combinatorial tasks may be a key point in promoting meaningful learning of combinatorics. From the resolutions of 12th grade students to a set of tasks, it was possible to understand and analyze their main difficulties and, thus, understand how it is possible do train students for a deeper understanding of this topic.*

Keywords: *Tasks; combinatorics; difficulties; learning.*

1. EBS Tomás de Borba, monica.ar.valadao@edu.azores.gov.pt
2. Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
3. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Introdução

A importância da Análise Combinatória no currículo de matemática do ensino secundário está bem patente na literatura em educação matemática (e.g., English, 1991; Batanero et al., 1997; Lockwood et al., 2020), quer pelo seu potencial como contexto para a resolução de diferentes tipos de tarefas, quer pela sua aplicação no cálculo de probabilidades e em outras áreas do conhecimento, como a computação. Na perspetiva de Lockwood et al. (2020), o ensino da Análise Combinatória promove importantes práticas matemáticas, nomeadamente a construção de argumentos viáveis e a análise crítica dos raciocínios, a procura e a utilização de estruturas/padrões e, incentiva a justificação e a generalização. A maior parte dos alunos revela grandes dificuldades na resolução de tarefas de contagem, pois admitem uma variedade de estratégias e representações (e.g., Batanero et al., 1996; English, 2005), não se reduzindo à aplicação de uma fórmula.

Neste estudo analisamos as dificuldades dos alunos na resolução de duas tarefas de análise combinatória cujos enunciados apresentam pequenas diferenças, mas que requerem raciocínios bastante distintos.

Metodologia

Neste estudo adotou-se uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo. O trabalho foi desenvolvido durante a realização de um estudo piloto que decorreu no âmbito do trabalho de doutoramento da primeira autora desta comunicação.

A recolha de dados ocorreu em junho de 2021, em duas aulas de 90 minutos, numa turma de 12.º ano com 12 alunos. A média das classificações dos alunos na disciplina de matemática no 3.º período foi de 15,75 valores e todos os alunos obtiveram classificação igual ou superior a 10 valores.

Neste estudo foi proposta uma sequência de oito tarefas que teve como propósito compreender e analisar as dificuldades dos alunos na resolução de tarefas de Análise Combinatória e perceber de que forma os alunos distinguem diferentes situações problemáticas.

Resultados

As tarefas propostas envolvem a partição de um conjunto de objetos diferentes em subconjuntos (alguns distintos e outros iguais).

> ***Tarefa 1:*** *Quatro irmãos, a Alice, o Bernardo, a Carolina e a Diana vão passar a noite na casa dos avós. Na casa dos avós existem dois quartos diferentes disponíveis (um no rés-do-chão e outro no 1.º andar), nos quais podem dormir algumas ou todas as crianças. De quantas maneiras diferentes pode a avó distribuir as crianças pelos quartos?*
>
> Adaptado de Batanero, Navarro-Pelayo & Godino (1997)

A figura 1 mostra a dificuldade de um aluno em compreender que a distribuição das crianças pelos dois quartos não contempla a sua disposição em cada quarto.

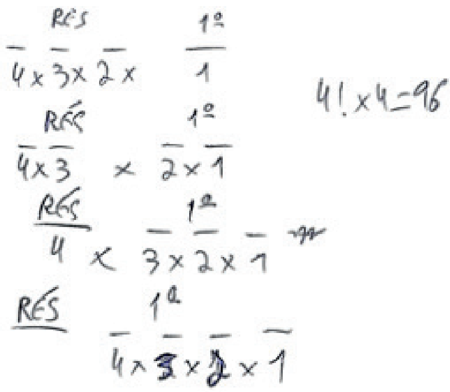


Figura 1 – Resolução do aluno 1 da tarefa 1.

A maioria dos alunos revelou dificuldades na contagem do número de maneiras distintas de distribuir os irmãos pelos dois quartos quando ficam duas crianças em cada quarto. Quando se determina o número subconjuntos constituídos por dois elementos, já prevê a troca dos elementos entre os quartos. Esta situação também esteve na base da maioria das dificuldades dos alunos na tarefa 2.

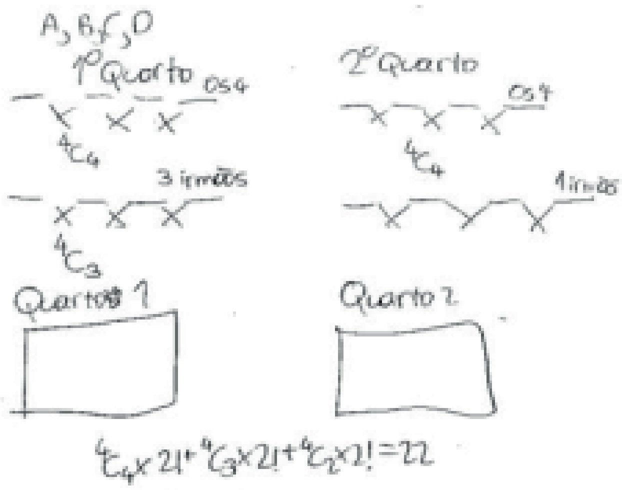


Figura 2 – Resolução do aluno 2 da tarefa 1.

Na resolução apresentada na figura 3, a aluna considera os vários subproblemas relativos à decomposição do número 4 em duas parcelas, no entanto, em cada situação aplica o princípio da adição na distribuição dos irmãos pelos dois quartos, quando esta situação deveria corresponder a duas etapas no mesmo subproblema (princípio da multiplicação).

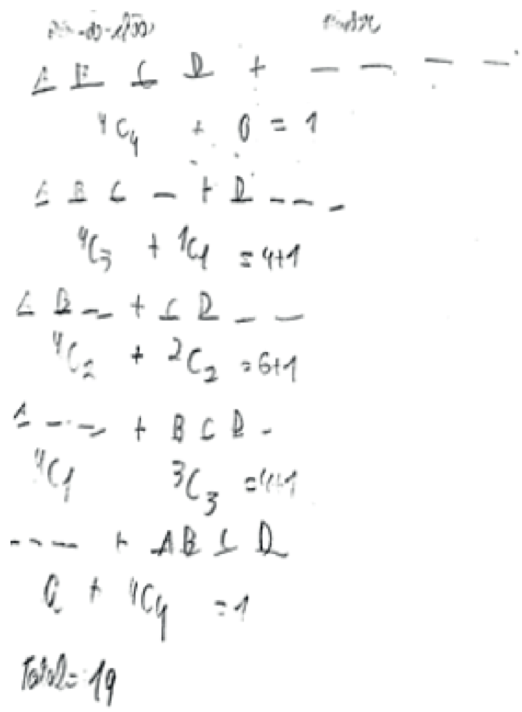


Figura 3 – Resolução do aluno 3 da tarefa 1.

> ***Tarefa 2:*** *A Alice, o Bernardo, o Carlos, o Daniel, a Elisa, o Frederico, a Guida, a Helena e o Isaac são nove amigos.*
>
> **2.1** *Os amigos vão dividir-se em três grupos. Um grupo de 2, um grupo de 3 e um grupo de 4. De quantas formas diferentes podem fazê-lo?*
>
> **2.2** *Suponha que os amigos pretendem dividir-se em três grupos de 3. De quantas formas diferentes podem fazê-lo?*
>
> Adaptado de Annin & Lai (2010)

A resolução da alínea 2.2 da tarefa 2 é mais desafiante do que a 2.1, apesar de a maioria dos alunos ter seguido a mesma estratégia de resolução. Esta situação é apresentada através da resolução de um aluno (figura 4).

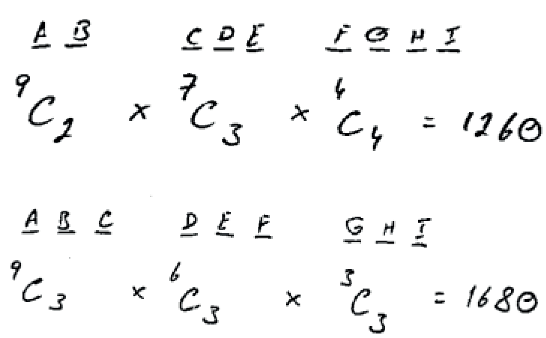


Figura 4 – Resolução do aluno 4 da tarefa 2.

Na partição de um conjunto de objetos diferentes em subconjuntos, consoante varia o número de elementos que compõem cada subconjunto e o tipo de subconjuntos que se pretende formar, o processo de resolução também pode variar. No entanto, estas pequenas diferenças não são facilmente percecionadas pelos alunos.

As resoluções evidenciaram as seguintes dificuldades: i) compreender se interessa, ou não, a ordem dos elementos; ii) identificar o tipo de subconjuntos envolvidos nos modelos de partição; e iii) distinguir o princípio (da multiplicação ou da adição) a utilizar na resolução da tarefa proposta.

Perante as dificuldades dos alunos, foi necessário começar por apresentar um exemplo, mais simples, onde os alunos podiam enumerar os resultados, para depois se estender o raciocínio aos outros casos. Deste modo, os alunos conseguiram distinguir a estrutura de cada tarefa e o que lhes era pedido, chegando, assim, a uma resolução correta.

Conclusão

Verificou-se que os alunos procuram aplicar de imediato as fórmulas das operações combinatórias estudadas. Muitas vezes essa aplicação revelou-se incorreta, o que nos pode levar a afirmar que os alunos não compreendem em que situações as devem utilizar. A compreensão dos conceitos (nomeadamente das operações combinatórias) não se pode reduzir à aplicação de uma fórmula ou definição, deve emergir das práticas desenvolvidas durante a resolução das tarefas. É ainda fundamental dar liberdade aos alunos para adotarem diferentes abordagens e recorrerem a representações diversificadas, que possam encorajá-los a descrever e a explicar os seus processos de resolução e a partilhar as suas ideias com os colegas. Os resultados indicam que pode ser importante realizar mais investigações com o objetivo de desenvolver tarefas e sequências de ensino que possam ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão conceptual sobre as tarefas de contagem (Lockwodd et al., 2015).

Referências bibliográficas

Annin, S. A., & Lai, K. S. (2010). Common errors in counting problems. *Mathematics Teacher, 103* (6), 402-409.

Batanero, M. C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio.* Síntesis.

Batanero C., Navarro-Pelayo V., & Godino J. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.). *Assessment challenge in statistics education* (239-252). IOS Press.

English, L. D. (1991). Young children’s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 451-474. English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children’s combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (121–141). Springer.

Lockwood, E., Swinyard C. A., & Caughman, J. S. (2015). Patterns, sets of outcomes, and combinatorial justification: Two students’ reinvention of counting formulas. *International Journal of Research in Undergraduate*

Mathematics Education, 1, 27–62. DOI: 10.1007/s40753-015-0001-2.
Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema, E. S. (2020). A case for combi natorics: a research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior,* 59. http://dx.doi.org/10.1016/ j.jmathb.2013.02.008.

CARTAZ | Análise da adequação didática nas aulas de probabilidades de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

POSTER | *Didactical suitability in probability Mathematics Applied to Social Sciences classes*

Sónia Raposo[1], Maria Manuel Nascimento[2], Helena Bogas[3]

Resumo: Neste trabalho, e utilizando o referencial teórico do enfoque ontosemiótico de Godino e colegas, analisa-se a adequação didática a posteriori de uma intervenção didática na aprendizagem do tema das probabilidades – probabilidade condicionada, probabilidade conjunta, teorema da probabilidade total e regra de Bayes – em Matemática do ensino secundário. Tendo em conta os erros e as dificuldades dos alunos foram identificados em trabalhos anteriores, aqui e numa turma de 10.º ano de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, tenta compreender-se quais os elementos da utilização das apliquetas que auxiliaram e incentivaram a aprendizagem das probabilidades. Neste trabalho, caracterizou-se a adequação didática a posteriori da intervenção didática realizada. Como resultado houve uma alta adequação didática a posteriori, e a adequação mediacional foi considerada média.

Palavras-chave: Applets, probabilidades, abordagem ontosemiótica, adequação didática.

Abstract: *In this work, and using the ontosemiotic approach of Godino and colleagues, the a posteriori didactic adequacy of a didactic intervention in learning the theme of probabilities is analyzed – conditioned probability, joint probability, total probability theorem and Bayes' rule – in high school mathematics. Taking into account the errors and difficulties of the students were identified in previous works, here and in a 10th grade class of Mathematics Applied to Social Sciences (ages 15-16), we try to understand which elements of the application of the applicators helped and encouraged the learning of probabilities. In this work, the a posteriori didactic suitability of the didactic intervention was characterized. As a result, a high a posteriori didactic adequacy was found, and the mediational adequacy was considered median.*

1. Agrupamento de Escolas Morgado de Mateus, spvr5@hotmail.com
2. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, mmsn@utad.pt
3. Escola Profissional da Nervir, helena.bogas@gmail.com

Keywords: *Applets, probabilities, ontosemiotic approach, didactical suitability.*

1. Introdução

O ensino dos conceitos de probabilidade condicionada, probabilidade conjunta, teorema da probabilidade total e regra de Bayes só ocorre no ensino secundário e vários estudos (e.g., Tarr & Jones, 1997) afirmam que seria mais adequada ensiná-los mais cedo. Vários autores identificaram que os alunos possuem conceções erróneas sobre alguns conteúdos do tema de probabilidades (e.g., Fischbein & Gazit, 1984). Em Portugal os resultados de, por exemplo, Correia e Fernandes (2013) sobre intuições sobre probabilidades condicionadas em alunos do 9º ano do 3.º ciclo do ensino básico, são promissores quanto à introdução destes conceitos mais cedo. Foi estruturada uma intervenção didática (ID) usando apliquetas, de forma a levar os estudantes a superá-los (e.g., Healy et al., 2013). Os resultados são de uma ID dinamizada com os alunos de 10.º ano de Matemática Aplicada às Ciências Socias (MACS), usando os indicadores de adequação didática (AD) do Enfoque Ontosemiótico (EOS) de conhecimento e ensino de matemática, desenvolvida por Godino e colegas (e.g., Godino, 2011; Godino, 2013). O objetivo deste trabalho foi o de caracterizar a adequação didática a posteriori da ID realizada neste tópico.

2. Marco teórico

Este trabalho baseou-se EOS (e.g., Godino, 2002) e em quatro níveis de análise didática: Sistemas de práticas com descrição das ações realizadas para resolver as tarefas matemáticas propostas; Configurações de objetos e processos, tanto matemáticos, como didáticos, com descrição de objetos e processos matemáticos; Dimensão normativa na qual se identifica a rede de regras, hábitos e normas que condicionam e tornam possível o processo de estudo e que afetam cada componente e suas interações; AD do processo de instrução que identifica potenciais melhorias no processo de estudo. Neste trabalho centramo-nos no 4.º nível de análise: AD a posteriori. Este nível estrutura-se em 6 componentes: epistémica, cognitiva, internacional, mediacional, emocional e ecológica. A AD de um processo de instrução define-se como a articulação coerente e sistemática destas seis componentes (Godino et al., 2002). Os critérios de AD e os componentes e indicadores destas idoneidades são os seguintes: Adequação epistémica (Fig. 1); Adequação cognitiva (Fig. 2); Adequação interacional (Fig. 3); Adequação mediacional (Fig. 4); Adequação emocional (Fig. 5); Adequação ecológica (Fig. 6). Os indicadores de Godino (2011) são um guia geral de indicadores de AD para a análise a posteriori da ID. Godino (2013) também estabeleceu alguns indicadores de adequações relativos às interações entre elas, uma vez que considera que não devem ser relacionadas (Fig. 7).

Componentes	Indicadores
Situações-problema	- Apresenta-se uma amostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercitação e aplicação. - Propõem-se situações de generalização de problemas.
Linguagem	- Uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), traduções e conversões entre os mesmos. - Nível de linguagem adequado a quem se dirige. - Proposta de situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições e procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. - Apresentam-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado. - Propõem-se situações onde os alunos tenham que gerar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	- As explicações, provas e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem. - Promovem-se situações nas quais o aluno tenha que argumentar.
Relações (conexões, significados)	- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições…) relacionam-se e ligam-se entre si.

Figura 1. Componentes e indicadores (C&I) de adequação epistémica (Godino, 2011).

Componentes	Indicadores
Conhecimentos prévios	- Os alunos têm os conhecimentos prévios necessários para o estudo do tema (caso não os possuam, o professor planifica o seu estudo). - Os conteúdos pretendidos podem alcançar-se (têm uma dificuldade manejável) nas suas diversas componentes.
Adaptações curriculares às diferenças individuais	- Incluem-se as atividade de ampliação e de reforço. - Promove-se o acesso e o sucesso de todos os alunos.
Aprendizagem	- Os diversos modos de avaliação indicam que os alunos se apropriam dos conhecimentos pretendidos (incluindo compreensão e competência). - Compreensão conceptual e proposicional; competência comunicativa e argumentativa; fluência na aplicação de procedimentos; compreensão das situações; competência metacognitiva. - A avaliação tem em conta níveis distintos de compreensão e competência. - Divulgam-se os resultados das avaliações e usam-se para tomar decisões.

Figura 2. C&I de adequação cognitiva (Godino, 2011).

Componentes	Indicadores
Interação professor/aluno	- O professor faz uma apresentação adequada do tema (apresentação clara e bem organizada, não fala demasiado rápido, enfatiza os conceitos-chave do tema, *etc.*). - Reconhece e resolve os conflitos dos alunos (fazem-se perguntas e respostas adequadas, *etc.*). - Procura-se chegar a consensos com base no melhor argumento. - Usam-se diversos recursos retóricos e argumentativos para implicar e captar a atenção dos alunos. - Facilita-se a inclusão dos alunos na dinâmica da sala.
Interação entre alunos	- Favorece-se o diálogo e a interação entre os alunos. - Convencem-se a si próprios e aos outros da validade das suas afirmações, conjeturas e respostas, apoiando-se em argumentos matemáticos. - Favorece-se a inclusão no grupo e evita-se a exclusão.
Autonomia	- Contemplam-se os momentos em que os alunos assumem a responsabilidade do estudo (colocam questões e apresentam-se soluções; exploram exemplos e contraexemplos para investigar e conjeturar, usam uma variedade de ferramentas para raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicar as soluções).
Avaliação formativa	- Observação sistemática do progresso cognitivo dos alunos.

Figura 3. C&I de adequação interacional (Godino, 2011).

Componentes	Indicadores
Recursos materiais	- Usam-se materiais manipulativos e informáticos que permitem abordar os conteúdos pretendidos com boas situações; linguagem, procedimentos e argumentações adequadas. - As definições e propriedades surgem e são contextualizadas usando situações e modelos concretos e visualizáveis.
Número de alunos, horário e condições de trabalho	- O número e a distribuição dos alunos permite levar a cabo o ensino pretendido. - O horário das aulas é adequado. - A aula e a distribuição dos alunos é adequada para o desenvolvimento do processo de instrução pretendido.
Tempo (de ensino coletivo/ tutoria; tempo de aprendizagem)	- O tempo é suficiente para o ensino pretendido. - Dedica-se tempo suficiente aos conteúdos mais importantes do tema. - Dedica-se tempo suficiente aos conteúdos nos quais os alunos revelam mais dificuldades de compreensão.

Figura 4. C&I de adequação mediacional (Godino, 2011)

Componentes	Indicadores
Interesse e necessidades	- As áreas em estudo têm interesse para os alunos. - Propõem-se situações que permitam valorizar a utilização das matemáticas na vida quotidiana e profissional.
Atitudes	- Promove-se a participação nas atividades, perseverança, responsabilidade, entre outros. - Favorece-se a argumentação em situações de igualdade; o argumento valoriza-se por si mesmo e não porque alguém o diz.
Emoções	- Promove-se a autoestima, evitando a rejeição, fobia ou medo das matemáticas. - Ressaltam-se as qualidades de estética e precisão das matemáticas.

Figura 5. C&I de adequação emocional (Godino, 2011).

Componentes	Indicadores
Adaptação ao currículo	- Os conteúdos, sua implementação e avaliação estão de acordo com as diretrizes curriculares.
Abertura à inovação didática	- Inovação baseada na investigação e na prática reflexiva. - Integração de novas tecnologias no projeto educativo.
Adaptação socioprofissional e cultural	- Os conteúdos contribuem para a formação socioprofissional dos alunos.
Educação com valores	- Contempla-se a formação nos valores democráticos e o pensamento crítico.
Conexões intra e interdisciplinares	- Os conteúdos relacionam-se com outros conteúdos intra e interdisciplinares.

Figura 6. C&I de adequação ecológica (Godino, 2011).

Componentes	Indicadores
Temporal - epistémica	- O conteúdo e os seus diversos significados distribuem-se de forma racional ao longo do tempo destinado ao estudo.
Temporal - cognitivo	- Os objetivos das aprendizagens têm em conta as etapas de desenvolvimento evolutivo dos alunos.
Temporal - instrucional	- A gestão do tempo de ensino tem em conta os diversos momentos requeridos para o desenvolvimento dos diferentes tipos de aprendizagem.
Temporal - ecológica	- O tempo destinado ao processo de estudo no currículo é adequado para alcançar a aprendizagem do conteúdo programado.
Epistémica - ecológica	- O currículo propõe o estudo de problemas de âmbitos variados como a escola, a vida quotidiana e o trabalho.
Epistémica - cognitiva - afetiva	- O conteúdo do estudo tem sentido para os alunos nos diferentes níveis e graus. - Os alunos têm confiança nas suas capacidades para enfrentar problemas difíceis e mantêm a sua perseverança ainda que a tarefa seja complexa. - Estimula-se os alunos a refletir sobre os seus raciocínios durante os processos de resolução de problemas de tal forma que sejam capazes de aplicar e adotar as estratégias que desenvolveram noutros problemas, noutros contextos. - As tarefas que os professores selecionam para avaliar são representativas das aprendizagens pretendidas.
Epistémica - cognitiva - mediacional	- O uso de recursos tecnológicos conduz a mudanças positivas no conteúdo de ensino, nos modos de interação, na motivação e na aprendizagem dos alunos.
Cognitiva - afetiva - interacional	- As explicações dadas pelos alunos incluem argumentos matemáticos e raciocínios e não apenas a descrição de procedimentos. - Incluem-se conteúdos motivadores, com adaptações razoáveis e apropriadas, que promovam o acesso e sucesso de todos os alunos.
Ecológica - instrucional (papel do professor e sua formação)	- O professor é compreensivo e dedicado aos seus alunos. - O professor conhece e entende profundamente as matemáticas que ensina e é capaz de usar esse conhecimento com flexibilidade nas suas tarefas de ensino. - O professor tem várias oportunidades e apoio para incrementar e atualizar frequentemente os seus conhecimentos didático-matemáticos.

Figura 7. C&I de adequação de interações entre as adequações (Godino, 2013).

3. Metodologia

A ID didática implementada, analisou-se recorrendo aos C&I (Fig. 1 a 7). Nesta ID propôs-se aos estudantes a resolução de um conjunto de tarefas, aula-a-aula, recorrendo a apliquetas de probabilidades (Raposo, 2020). Os 15 estudantes eram de uma turma do 10.º ano do ensino secundário, na qual a professora/investigadora lecionava, com média de idades era 16 anos e organizados em pares ou trios. Usou-se a metodologia de trabalho colaborativo, usando as apliquetas, sempre que possível (Raposo, 2020). Trata-se de um trabalho qualitativo com cariz descritivo com o objetivo de interpretar e obter maior compreensão dos fenómenos investigados (Cohen et al., 2011). A recolha de dados usou as vídeo-gravações das aulas, notas de campo e documentos escritos.

4. Discussão dos resultados

Analisando as AD parciais considerou-se elevada a adequação global, a posteriori, da ID (Raposo, 2020) e construiu-se o hexágono (e.g., Godinho, 2013) das adequações efetivamente atingidas na realização da intervenção didática implementada (Figura 8).

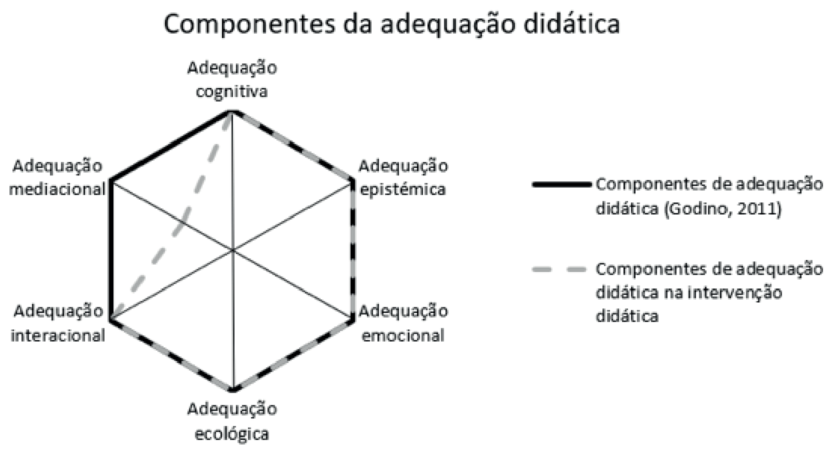


Figura 8. Hexágono representativo da AD a posteriori.

5. Conclusões

Os aspetos da elevada AD obtida: As tarefas e os questionamentos da professora levou os alunos de um nível mais básico para níveis superiores de conhecimentos e conscientes da melhoria na sua aprendizagem (Fig. 1 e 2); As interações professora-estudante (P-E) asseguraram que se atribuíam aos objetos os significados adequados. Com base no diálogo, a professora evitou que os estudantes retivessem os conflitos semióticos (Fig. 1 e 3). As interações P-E favoreceram um clima emocional positivo (Fig. 7); Usar as apliquetas foi motivador para as interações entre os alunos e na sua aprendizagem e estiveram empenhados e motivados na resolução de todas tarefas, sobretudo se envolviam apliquetas (Fig. 4). Implicaram-se e interagiram durante as aulas com os colegas de grupo e com a professora: o ambiente de trabalho foi propício à aprendizagem e aumentou a sua motivação, resultando num elevado grau de adequação emocional (Fig. 5). A análise da ID para a aprendizagem de probabilidades nas aulas da turma de MACS com as apliquetas, permitiu contribuir para a investigação do uso das tecnologias na prática letiva, mas continua a ser necessário investigar outros aspetos do seu uso. Além disso, o uso da adequação didática do processo de instrução (e.g., Godino, 2011, 2013) identificou melhorias no processo em estudo.

Referências bibliográficas

Cohen, L., Manion, L., & Morrison K. (2011). *Research Methods in Education.* (7th Ed.). Routledge Falmer.

Correia, P., & Fernandes, J. A. (2013). Caracterização das intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada. Fernandes, J., Viseu, F., Martinho, M. & Correia, P. (Orgs.) (2013). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.* Centro de Investigação em Educação da Universidade Minho.

Fernandes, J., Viseu, F., Martinho, M. & Correia, P. (Orgs.) (2013). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.* Centro de Investigação em Educação da Universidade Minho.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15,* 1-24.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22* (2&3), 237-284.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática,* Recife, Brasil, 26-30 junho. 25p.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investi gación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Healy, M., Berger, D., Romero, V., Aberson, C. & Saw, A. (2013). Evaluating Java Applets for Teaching on the Internet. Java Applets in Education, 1-4. http://www.humboldt.edu/psychology/fs/aberson /java.pdf

Tarr, J., & Jones, G. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal, 9* (1), 39-59.

Raposo, S. (2020). *Apliquetas no ensino de probabilidades: Um estudo de caso com alunos de uma turma de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.* [T. Doutoramento], UTAD, Vila Real.

Simpósio de Comunicações 4
Communication Symposiums 4

XXXI SIEM
seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

O aprender e ensinar matemática em tempos de Covid-19: uma experiência de ensino com o uso do *jamboard* e *meet* no ensino remoto

Learning and teaching math in Covid-19 times: a teaching experience using the jamboard and meet in remote learning

Cília Cardoso Rodrigues da Silva[1]

Resumo: O aprender e ensinar matemática em tempos de Covid-19 é a descrição de uma experiência de ensino ocorrida no ambiente virtual de aprendizagem de uma escola pública do Brasil, com 8 estudantes que cursaram o 4.º e 5.º ano, em 2020. O estudo apoia-se numa abordagem qualitativa dentro do paradigma interpretativo. A recolha de dados foi realizada pela autora com observação participante. O objetivo foi compreender as possibilidades de aprender e ensinar matemática com o uso dos aplicativos *Jamboard* e *Meet* no ensino remoto. O tema do estudo centra-se no mediar, intervir e interagir na perspetiva epistemológica da participação. Durante a descrição apresento exemplos de escrita de números, estratégia de cálculo, comparação de frações e o uso de um jogo que envolveu os fatos da multiplicação. O estudo aponta que o uso destes aplicativos possibilitaram a mediação, intervenção e interação, em tempo real, com os estudantes. Além de ter contribuído para que os estudantes demonstrassem seus pensamentos matemáticos através dos registos nos quadros do *Jamboard* e dos diálogos estabelecidos, pelo *google meet*, com os pares e a professora.

Palavras-chave: sentido de número; ensino remoto; *Google Meet; Jamboard.*

Abstract: *Learning and teaching mathematics in Covid – 19 times is the description of a teaching experience that took place in the virtual learning environment of a public school in Brazil, with 8 students who attended the 4th and 5th grades in 2020. The study supported based on a qualitative approach within the interpretive paradigma. Data collection was performed by the author with participant observation. The objective was to understand the possibilities of learning and teaching mathematics using the Jamboard and Meet applications in remote education. The theme*

1. Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, ciliacr@gmail.com

of the study focuses on mediating, intervening and interacting in the epistemological perspective of participation. During the description I present examples of writing numbers, calculating strategy, comparing fractions, and using a game that involved the facts of multiplication. The study points out that the use of these applications enabled mediation, intervention and interaction, in real time, with students. Besides having contributed for the students to demonstrate their mathematical thoughts through the records on the Jamboard frames and the dialogues established, by the google meet, with the peers and the teacher.

Keywords: number sense; remote education; Google Meet; Jamboard.

Introdução

No Brasil, Ministério de Educação (MEC), Conselhos de Educação (nacional, municipal e distrital), Secretarias de Educação, Universidades, Organizações, Escolas, Comunidades, Sindicatos, Professores/as, Profissionais da educação, dentre outros, cada um com suas responsabilidades e possibilidades; diante dos desafios que a Covid-19 impõe; se depararam com situações de pensar e discutir possibilidades para garantir a aprendizagem e o ensino no ambiente virtual de aprendizagem (AVA).

Isolamento social, escolas fechadas, estudantes e docentes em casa, aprendizagem e ensino não presencial em ambientes virtuais – levou-me a pensar e repensar os objetivos, conteúdos, metodologias e práticas pedagógicas para o aprender e ensinar matemática. Sugiram as seguintes questões: De que forma podemos orientar, acompanhar, propor, mediar, intervir, interagir e avaliar nos espaços virtuais? Que recursos, ferramentas e instrumentos são necessários?

Nesta comunicação apresento uma experiência de ensino que ocorreu no Brasil, capital Brasília, Distrito Federal, na Região Administrativa do Plano Piloto, com 08 estudantes, no ano de 2020. O objetivo foi compreender as possibilidades de aprender e ensinar matemática com o uso dos aplicativos *Jamboard* e *Meet* no ensino remoto. O tema do estudo centra-se na mediação, intervenção e interação do aprender e ensinar matemática no ambiente virtual de aprendizagem. Ressalto que na experiência de ensino foram trabalhados conteúdos matemáticos diversos (escrita de números maiores que 100; resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão; números fracionários; horas e minutos). Apresento e discuto alguns quadros do *Jamboard* que evidenciam o mediar, intervir e interagir para o aprender e ensinar matemática através do uso destes aplicativos.

É um estudo que se justifica pelos momentos emergenciais que estamos vivenciando – pandemia – além de sua urgência em pensar, discutir e apontar possibilidades de mediação, intervenção e interação com o uso de ferramentas digitais para o aprender e ensinar matemática nos anos iniciais a partir do AVA. Um estudo que segue uma abordagem qualitativa dentro de um paradigma interpretativo em que a recolha de dados foi realizada a partir da observação participante pela autora.

O contexto educacional em tempos de Covid-19

A Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF) disponibilizou a todos/as estudantes, docentes e profissionais da educação a plataforma Escola em casa DF, a sala virtual para todas as modalidades e etapas de ensino (SEEDF, 2021). A plataforma é utilizada por meio do "*Google* sala de aula" com os serviços *Gsuíte*, nesse espaço, professores/as poderão se comunicar com estudantes realizando videoconferência, troca de mensagens, acesso a materiais didáticos, aplicação de avaliações, formação de grupos de trabalho, entre outras atividades. Na plataforma ficam dispostas todas as salas de aula (turmas) da escola. Dentro da plataforma estão disponíveis os aplicativos do *Google: drive, meet, earth, podcast, jamboard* etc. Em geral, a dinâmica dos docentes é realizar encontros virtuais via *meet*, atribuir tarefas na plataforma aos estudantes, esperar devolutivas deles e dar retorno ao que realizaram.

Um novo contexto educativo se instala, Weber, Santos e Cruz (2014) apontam que novos contextos nos levam a discutir o uso de novas linguagens, novas formas de comunicar e novos contextos de comunicação e educação que exigem dos cidadãos novas destrezas e habilidades, a fim de terem garantidas plenas possibilidades de participação virtual.

Moreira e Schlemmer (2020) indicam que os contextos sociais e pedagógicos contemporâneos têm se transformado com a utilização de tecnologias digitais e de redes de comunicação digitais, com apoio da internet, proporcionando oportunidade de inovação, integração, inclusão, flexibilização e personalização da aprendizagem, com base em uma mudança de paradigma. Em contrapartida, alertam que as tecnologias digitais e a internet não geram alterações instantâneas nos currículos e nas práticas pedagógicas, uma vez que são as conceções e as condições de apropriação tecnológica os elementos mobilizadores.

Sem perder de vista que o contexto educativo é constituído por um sistema semiótico complexo com produção contínua de significados relacionados às pessoas, aos objetos de conhecimento e aos diferentes fenómenos do mundo (Santana e Almeida, 2020).

No 1º ciclo as crianças ainda necessitam do contato presencial dos colegas, dos docentes, dos objetos de conhecimento para se apropriarem dos conceitos matemáticos que estão a construir. Foi necessário encontrar no ambiente virtual de aprendizagem ferramentas que amenizasse essa necessidade, ou seja, que possibilitasse uma mediação, intervenção e interação em tempo real. Ao realizar uma busca nos aplicativos do *Google* encontramos o aplicativo *Jamboard* e o *Meet*.

Jamboard e *Google Meet*

Estes dois aplicativos estão disponíveis nos serviços do *Gsuíte* da Plataforma Escola em casa DF. O *Meet* é o aplicativo que permite videoconferências *on-line* no computador sem instalação de *software* e para os dispositivos móveis (*smartphone* ou *tablets*) é necessário baixar o aplicativo *Google Meet*. As reuniões ao vivo podem ser transmitidas para 100 mil espectadores do próprio domínio, mas no Escola em casa DF há permissão para no máximo 100 convidados do mesmo domínio ou não. O acesso às videoconferências no *Google* sala de aula necessita de permissão do professor docente que criou o *link*, por isso aconselha-se usar o email e senha disponibilizados para acesso à plataforma Escola em casa DF. Dentre os serviços do *Gsuíte* o *Google Meet* permite a comunicação entre os pares. A SEEDF destaca o uso do *Google Meet* para a realização de aula síncronas durante o período do ensino remoto, por se tratar de valioso momento para: (i) construção e manutenção de vínculos com os estudantes; (ii) minorar os efeitos do isolamento social; (iii) orientação das atividades a serem realizadas e; (iv) esclarecimento de eventuais dúvidas.

O *Jamboard* é um aplicativo disponibilizado nos serviços do *Gsuíte*, é uma tela colaborativa que facilita a forma de compartilhar ideias em tempo real. Podemos dizer que é a lousa ou o quadro branco que usamos em sala de aula no ensino presencial, no entanto, a diferença é que o *Jamboard* é digital e a interação é *on-line*. Nele se pode criar aulas interativas, compartilhar telas através do *Meet*; pode-se editar o frame (quadro), colocar ideias e trocar opiniões sobre determinado assunto trabalhado em aula.

Figura 1. Aplicativos Google

Destaca-se que há uma integração entre a plataforma *Google* Sala de Aula e os outros serviços da *Google*, o acesso e o uso é bastante simples, a eles estão agregados à conta *Gmail*. No contexto de educação remota o *Google Meet* e o *Jamboard* se articulam, o primeiro possibilita a comunicação entre professor/estudante; estudante/estudante e estudante/professor enquanto o *Jamboard* é a ferramenta que pode ser usada como o quadro branco ou o caderno, com possibilidades de propor tarefas matemáticas e se registar as estratégias de cálculo pensadas pelos estudantes.

Aprender e ensinar matemática numa perspetiva de sentido de número

Aprender e ensinar matemática é uma atividade humana que envolve mediação, intervenção e interação entre os pares, por isso é importante, na aula, discutir e socializar as resoluções das tarefas matemáticas desenvolvidas pelos estudantes. Com relação a isso Abrantes et al. (1999) nos apontam que envolver os estudantes nestes momentos de discussão e socialização faz com que eles se apropriem de novas ideias e novos conceitos.

Os conceitos são mobilizados por nós, em nosso cotidiano, para que possamos nos desenvolver em determinada cultura, em nossos meios sociais, seja na família, na escola, na universidade, no trabalho, enfim, em qualquer situação de vida. A construção de conceitos é individual e subjetiva, sem perder de vista que a interação com os objetos de conhecimento, a troca entre os pares é essencial para essa construção. Mas de quais conceitos estamos falando? Para esta comunicação estamos a falar do sentido de número, ou seja, da sua natureza intuitiva, do seu desenvolvimento gradual e dos processos pelos quais se pode evidenciar (Cebola, 2002).

Nesta perspetiva o NCTM (1989) considera cinco componentes para o sentido de número e quatro para o sentido de operação.

Tabela 1.
Componentes do sentido de número e sentido de operação de acordo com o NCTM

Componentes	
Sentido de número	Sentido de operação
• Desenvolvimento dos conceitos elementares de número (cardinal e ordinal); • Exploração das relações entre os números através de materiais manipuláveis; • Compreensão do valor relativo dos números; • Desenvolvimento da intuição do efeito relativo das operações nos números e; • Desenvolvimento de referências para medir objetos comuns e situações do mundo que nos rodeia.	• Compreender a operação; • Ter conhecimento dos modelos e das propriedades de uma operação; • Identificar relações entre as operações; • Tomar consciência dos efeitos de uma operação num par de números.

Cebola (2002) aponta que estas componentes permitem afirmar que o sentido de operação interage com o sentido de número e possibilita um suporte para o desenvolvimento concetual dos procedimentos do cálculo mental e escrito. Por sua vez, Reys (1998) afirma que a flexibilidade e a performance apropriadas ao cálculo mental e à estimação são características tipicamente associadas ao sentido de número. No que se refere à estimação há duas ações que coordenar: as capacidades de arredondar e calcular mentalmente (Sowder & Shapelle, 1994). Cebola (2002) diz que o cálculo mental e o cálculo por estimação proporcionam

oportunidades para uma aplicação flexível dos conceitos de número e das operações, para inventar processos de resolver novos problemas, e para refletir sobre os números e os seus significados no contexto de um dado problema. Ambos chegam ao sentido de número.
Por fim, podemos dizer que o sentido de número envolve números e operações em todos os seus sentidos e significados a partir da compreensão global que cada um possa ter destes, sem perder de vista a capacidade e tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis ao resolver problemas envolvendo os números e operações.

Metodologia

Este estudo realizado em uma escola pública tem um caráter interpretativo com uma abordagem qualitativa em que a recolha de dados foi feita a partir de uma observação participante da autora, no ensino remoto, em 11 Encontros Matemáticos que aconteceram no período de setembro a dezembro de 2020.
Gravemeijer e Van Eeder (2009) explicitam que a experiência de ensino é explorar, provar e investigar um conjunto educacional experimental, e não comparar algo experimental pré-determinado com a educação convencional. Foi nesta perspetiva que se constituiu a experiência de ensino descrita nesta comunicação que ocorreu no Brasil, capital Brasília, Distrito Federal, na Região Administrativa do Plano Piloto, com 08 estudantes, sendo 03 meninos e 05 meninas que cursaram o 1.º Ciclo (4.º e 5.º ano) no ano de 2020.
Nesta experiência de ensino o objetivo foi compreender as possibilidades de aprender e ensinar matemática com o uso dos aplicativos *Jamboard* e *Google Meet* no ensino remoto. A fim de compreender essas possibilidades descrevo como ocorreu a mediação, intervenção e interação nos Encontros Matemáticos.

Possibilidades de aprender e ensinar matemática no ensino remoto

Os Encontros Matemáticos no ambiente virtual de aprendizagem
A partir das demandas dos docentes à Pedagoga da Equipe Especializada de Apoio à Aprendizagem (EEAA), a autora, propôs e criou os Encontros Matemáticos para atender os 8 estudantes do 4.º e 5.º anos. A EEAA é multidisciplinar, situada na escola, composta por dois profissionais: Pedagoga e Psicóloga, com atuação voltada para o contexto educacional. O objetivo é a promoção da melhoria do processo de ensino e aprendizagem, por meio de ações institucionais, preventivas e interventivas. No espaço escolar atua em três dimensões: mapeamento institucional; assessoria ao trabalho coletivo e acompanhamento do processo de ensino e de aprendizagem (SEEDF, 2010). A principal queixa dos docentes foi que “alguns estudantes estavam com dificuldades em matemática, pois já se encontravam no 4.º e 5.º ano e ainda não sabiam realizar as quatro operações e escrever números maiores do que 100”.
Assim foi construído o cenário da experiência de ensino. A pedagoga da EEAA organizou os estudantes em pequenos grupos: de 2 a 4 es-

tudantes. Os Encontros Matemáticos aconteceram às segundas-feiras, de 14h às 18h, com duração de uma hora para o grupo atendido. A cada encontro foram propostas tarefas de matemática de acordo com a necessidade do estudante, então, os principais temas dos encontros foram: escrita de números maiores que 100; as quatro operações com especial atenção as de multiplicação e divisão; comparação e equivalência de números fracionários e hora/minutos.
Os Encontros Matemáticos foram realizados no ambiente virtual de aprendizagem disponibilizado pela SEEDF, plataforma Escola em casa DF, *Google* Sala de aula. A fim de mediar, intervir e interagir, em tempo real com os estudantes, utilizei os aplicativos *Google Meet* e *Jamboard*. A cada encontro os estudantes e seus familiares recebiam um comunicado em forma de cartão, via *WhatsApp*, com as principais informações.

Figura 2. Cartões enviados aos estudantes e familiares

Mediação, intervenção e interação com o uso dos aplicativos Google Meet e Jamboard
O mediar, intervir e interagir são fundamentados na visão epistemológica de participação proposta por Sfard (1998), que passa a ser vista como "um processo de tornar-se membro de uma determinada comunidade" (p.6) e evoca as ideias de "se estar junto, de solidariedade, e de colaboração" (p.8). A pandemia – Covid 19 contribuiu que os espaços presenciais de aprendizagem se instalassem nos ambientes virtuais de aprendizagem (AVAs). Os AVAs oferecem espaços virtuais para que os estudantes e professores possam se reunir, compartilhar, colaborar e aprender juntos. No caso desta experiência de ensino o *Google Meet* e o *Jamboard* foram os aplicativos utilizados para proporcionar a participação dos estudantes e pedagoga da EAA, em tempo real. O *Google Meet* foi utilizado como ferramenta de comunicação síncrona em que estudantes e pedagoga da EEAA podiam conversar, dialogar, instruir, perguntar, trocar etc. O *Jamboard* foi a ferramenta que possibilitou que os estudantes pudessem, em tempo real, expressar seus pensamentos matemáticos e registar suas estratégias ao serem desafiados a resolver as tarefas matemáticas.

Possibilidades de aprender e ensinar matemática no ensino remoto
A cada Encontro Matemático foi trabalhado com os estudantes um tema

matemático. Para esta comunicação discuto e apresento quatro exemplos que demonstram possibilidades de aprender e ensinar matemática no ensino remoto com o uso dos aplicativos *Google Meet* e *Jamboard*.

Exemplo 1 – escrita dos números maiores que 100
O primeiro exemplo refere-se à tarefa resolvida por Jana, 4.º ano, que envolveu a escrita dos números maiores que 100.

Figura 3. Quadro do *Jamboard* – escrita dos números até 100

O comando da tarefa foi “Escreva usando números: duzentos e quatro; trezentos e trinta; mil e cinco; setecentos e dois; mil cento e três. Jana se apoia na fala para escrever os números, por exemplo, para setecentos e dois escreve 7002 (ver figura). Matematicamente a escrita de Jana está errada, no entanto, ao escrever os números como fala demonstra conhecer as dezenas, centenas e milhar. Sua estrutura de número ainda está no campo aditivo, não leva em conta o valor relativo que caracteriza a estrutura multiplicativa do número. A proposta de intervenção realizada foi disponibilizar no quadro do *Jamboard* as fichas escalonadas e solicitar que ela representasse os números com elas. Da mesma forma que escreveu, Jana representou nas fichas escalonadas, por exemplo, para mil e cinco fez 1.0005 (ver figura). Foi-lhe solicitado que lesse os números e escolhesse apenas um deles para representar utilizando o QVL (quadro valor de lugar). Jana escolheu o número 1.005. A pedagoga pediu que ela representasse o número no QVL, antes de o representar escreveu no quadro 1.05 para mil e cinco. Pegou a ficha escalonada do 100 e do 5 e colocou no QVL (ver Figura). Solicitei que ela lesse o número, ela leu "cento e cinco". No mesmo instante disse: "tá errado!" "Tenho que pegar a do mil". Pegou a ficha colocou no QVL e escreveu no quadro 1.005 (ver figura) dizendo: "agora eu entendi, posso mudar de quadro?" E, no novo quadro representa e escreve todos os números corretamente e para demonstrar que havia entendido representa o número 240 que não estava descrito na tarefa (ver figura).

Exemplo 2 – estratégia de cálculo para resolver uma divisão
O exemplo 2 demonstra a estratégia de cálculo utilizada por Luiz, estudante do 5.º ano, ao realizar a operação de divisão 245 : 5 = 49.

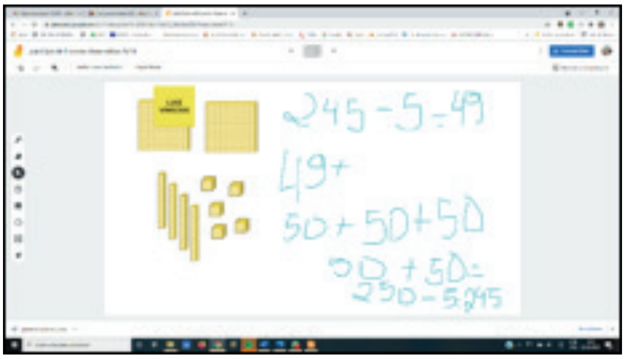


Figura 4. Quadro *Jamboard* – estratégia de cálculo da operação de divisão

Antes de iniciar o Encontro Matemático eu havia perguntado ao Luiz o que gostaria de aprender, então ele respondeu: "não sei divisão". Ao ouvir esta resposta queria saber se de fato ele não sabia dividir, então, disponibilizei para ele o número 245 representado pelo material dourado no quadro do *Jamboard* e perguntei se sabia qual o número estava representado ali e ele respondeu: "duzentos e quarenta e cinco". Então, vamos dividir esta quantidade por 5. Como pode fazer isto? Luiz ignorou o material dourado e escreveu no quadro do *Jamboard* "245 : 5 = 49 e embaixo 49 +". Logo perguntei: "como chegou a este resultado?" Ele respondeu: "fiz de cabeça". Pedi que me mostrasse como havia chegado ao resultado. Então, começou a falar e escrever no quadro do Jamboard: "50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 250". "250 – 5 = 245". Então, perguntei: "Como achou 49?" Ele respondeu: "tenho que dividir para 5, né? Dei 50 para cada que ficou 200, mas é 245, então, tive que tirar 5 de um dos 50 para ficar com 245" E apontou para as somas repetidas dizendo: "ficaram 4 cinquentas e o 45. Do quarenta e cinco eu fui contando de 5 em 5 e achei 9. Viu? O resultado é 49". A representação matemática da operação que o Luiz fez foi: (5 x 50) – 5 = 245. E na explicação final foi (4 x 50) + (9 x 5) =; 200 + 45 = 245. O pensamento do Luiz confirma que ele compreende a parte dentro do todo: dentro do 200 tem 4 cinquentas e dentro do 45 tem 9 cinco e para chegar ao resultado usou o 50 e o 5 como referência.

Exemplo 3 – estratégia de cálculo para resolver multiplicação
A terceira evidência traduz a resolução de uma situação problema simples envolvendo grupos iguais da multiplicação, resolvida por Laura, 4.º ano.

Figura 5. Quadro *Jamboard* estratégia de cálculo para multiplicação

Laura leu a situação problema e escreveu no quadro do *Jamboard*: “4 x 8 = 32”. Perguntei: “como chegou ao resultado?” Ela respondeu: “eu fui somando e achei que 4 oitos dá 32”. Solicitei: “pode escrever como fez a soma?” Então ela escreveu: “8 + 8 = 16” e “16 + 16 = 32”. E falou: “dentro de cada 16 tem dois 8 e 16 mais 16 dá 32. Por isso escrevi 4 x 8 = 32”. Perguntei: “Onde estão os quatro 8?” Ela respondeu: “aqui, oh!” apontando para a soma 16 + 16 = 32.

Exemplo 4 – números fracionários: representações e equivalência
O exemplo 4 demonstra possibilidades de compreensão das frações: representação, levando em conta numerador e denominador; comparação, com o propósito de encontrar as frações equivalentes. Nas duas situações usou-se as barras de fração.

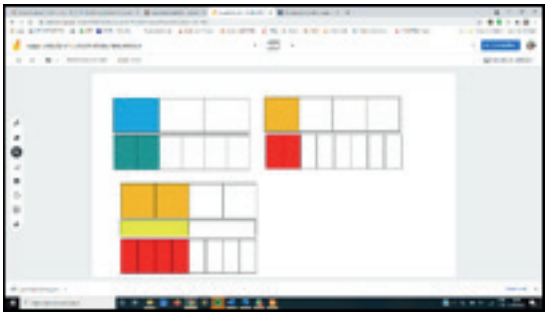


Figura 6. Quadros *jamboard* – representações e equivalência dos números fracionários

Neste Encontro Matemático participaram as estudantes Nicoly e Raquel, 5.º ano. A proposta para elas foi selecionar as barras de frações e pintar as quantidades que representassem os números fracionários 5/8; 3/4; 1/2 e 4/6. De seguida foram feitas as perguntas: pintou menos ou mais que o inteiro? Quanto falta pintar para completar o inteiro? Qual o nome da fração? Quantas partes do inteiro foi pintada? E depois a proposta foi encontrar frações equivalentes a 1/3; 1/2 e 1/4. Percebeu-se que nestas tarefas as estudantes foram se apropriando do conceito de fração, relação entre a parte e o todo. Ao realizar as equivalências foram fazendo a relação de dobro e metade ao comparar o numerador e o denominador.

Exemplo 5 – possibilidades de jogos no Jamboard

O quinto exemplo mostra que no *Jamboard* também há possibilidades de se propor jogos para os estudantes. O jogo além de ser um recurso que promove a motivação e diversão também possibilita a inclusão de um objetivo de aprendizagem. Este é o exemplo de um jogo cujo objetivo é memorizar os fatos fundamentais da multiplicação.

Figura 7. Quadro *Jamboard* – Jogo de tabuada

O tabuleiro foi colado no *Jamboard* com os resultados dos fatos fundamentais da multiplicação. Os números no tabuleiro estão dispostos em várias posições. Participaram do Encontro Matemático as estudantes Janaína, Amanda e Raquel. Decidiram quem iria começar a jogada, escreveram seus nomes utilizando a caixa de texto e em cada rodada, cada uma falava um fato fundamental da multiplicação e todas tinham que encontrar o resultado no tabuleiro, marcava ponto quem encontrasse primeiro. Neste encontro percebi que nas primeiras rodadas para encontrar o resultado as estudantes utilizaram a contagem por saltos, por exemplo, para 4 x 8 contavam de 4 em 4. Para que as estudantes não perdessem a motivação pelo jogo foi permitido que pesquisassem na tabuada os fatos fundamentais que iam dizer e seus resultados, uma vez que o objetivo do jogo era memorizar os fatos fundamentais da tabuada.

Análise dos cinco exemplos

O primeiro exemplo – escrita dos números maiores que 100, mostrou a evolução de Jana na escrita dos números. Em tempo real, foi possível disponibilizar para ela as fichas escalonadas e o QVL, além de dialogar e trocar experiências através do *Google Meet*. Uma das componentes referida pelo NCTM (1989) é a exploração das relações entre os números através de materiais manipuláveis.

O segundo e terceiro exemplo demonstram que existem diferentes estratégias de resolução de problemas. Nas duas evidências há indícios de que os estudantes têm "consciência de que, num determinado momento, algumas estratégias ou algumas ferramentas de cálculo são mais eficientes do que outras" (Cebola, 2002). No Exemplo 2 – estratégia de cálculo para resolver uma divisão mostrou que o estudante Luiz, apesar de ter disponível o material dourado, recorre aos conhecimentos de números e operações que já possui e utiliza procedimentos de cálculo aditivos e subtrativos. Nesta situação o estudante demonstra uma certa compreensão da relação entre as operações conforme é referida pelo NCTM (1989). Cebola (2002) afirma que para compreender as relações entre as várias operações é necessário primeiramente perceber cada uma das operações e depois entender que essas relações aumentam à medida que se passa das operações com números naturais para as operações com números não inteiros. O Exemplo 3 – estratégia de cálculo para resolver uma multiplicação Laura também recorre ao conhecimento que possui, usa o procedimento de adição repetida e reconhece a parte dentro do todo ao dizer que o 8 está no 16 duas vezes. Os dois exemplos mostram que os estudantes reconhecem relações entre as partes e o todo. Além de evidenciar o uso do cálculo mental, Sowder (1988) refere que os algoritmos mentais têm características interessantes que fazem deles uma manifestação importante da existência do sentido de número.

O quarto e quinto exemplo demostrou que os estudantes reconheceram as várias utilizações dos números, ou seja, que os números são usados de muitas formas: para quantificar, medir etc. Assim como existem várias representações dos números como no caso dos números fracionários (3/4; 5/8) e reconhecer que fatos fundamentais como 2 x 4 = e 4 x 2 = representam o mesmo resultado, mas configurações diferentes dependendo do contexto é fundamental para o sentido de número.

Considerações finais

Migrar para o ensino remoto, como uma medida emergencial, devido a Covid-19, exigiu que uma série de ações fossem pensadas. Mudanças de tempo e espaço no processo educativo me fez buscar novas alternativas. Todos, docentes e estudantes, inclusive eu, tivemos que nos adaptar ao uso de aplicativos e plataformas digitais no processo educativo. Os Encontros Matemáticos realizados proporcionaram participação, diálogo, troca de experiências e expressão dos pensamentos matemáticos das crianças envolvidas. Os cinco exemplos confirmaram que os aplicativos *Google Meet* e *Jamboard* ajudam na mediação, intervenção e interação para o aprender e ensinar matemática no ensino remoto. Estes contribuíram para o uso de recursos pedagógicos como materiais manipuláveis e jogos, além de possibilitar que os estudantes registassem suas estratégias de cálculo.

Por fim, na pandemia nos deparamos com um contexto educativo com outro significado, em que o ecrã de um equipamento, seja *smartphone, tablet* e/ou computador exigem outras desenvolturas e capacidades que garantam possibilidades de participação nos ambientes virtuais de aprendizagem.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). A matemática na educação matemática. Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Brasília. (2020). Portaria Nº 129, de 29 de maio de 2020. *Institui o Programa Escola em Casa DF.* Edição extra Nº 87, seção I, p. 3. [DODF: ano XLIX]

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). SEM-SPCE.

Distrito Federal. (2020). *Guia de Orientações para o Ensino Fundamental: Anos Iniciais e Anos finais. Organização escolar em ciclos para as aprendizagens no contexto do ensino remoto.* Brasília. http://www.educacao.df.gov.br/publicacoes-pedagogicas/ [Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal]

(2010). *Orientação Pedagógica: Serviço Especializado de Apoio à Aprendizagem.* Brasília. http://www.educacao.df.gov.br/publicacoes-pedagogicas/ [Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal]

Gravemeijer, K. & Van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109* (5), 510-524.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston,* NCTM.

Reys, R. E. (1998). Computation versus number sense. *Mathematics Teaching in the Middle School. 4* (2), 110-112.

Santana, A. C. & Almeida, R. B. (2020). Mediação pedagógica em tempos pandêmicos: relatos de professores da educação básica. *Polyphonía, 31*,2, (207 – 225).

Schlemmer, E. & Moreira, J. A. (2020). Ampliando conceitos para o paradigma de Educação Digital onlife. *Interacções,* 55, (103-122).

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Bher (Orgs.), *Number concepts for the classroom: Middle grades mathematics* (182-197). NCTM.

Sowder, J. T. & Schappelle, B. (1994). Number sense-making. *Arithmetic Teacher,* 41(6), 342-345.

Sfard, A. (1998) *On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one.Educational Researcher 27*, 2, p. 4-13, 1998.

Weber, A., Santos, E., & Cruz, M. (2014). Letramentos e alfabetizações na cibercultura: crianças e jovens em rede, desafios para a educação. *Teoria & Prática. Campinas: 32* (62) 59-73.

Um robô enfermeiro para tratamento ao Covid-19: Aprendizagem dos lugares geométricos com recurso a robôs e à resolução de problemas

A robotic nursing to Covid-19 treatment: Geometry learning with robots and problem solving

Sónia Martins[1], Cátia Santos[2]

Resumo: A investigação apresentada neste artigo foi desenvolvida na prática de ensino supervisionada, na qual se pretendeu abordar a aprendizagem matemática mediada por problemas, tendo como objetivo compreender os contributos do uso de robôs para a aprendizagem dos lugares geométricos por alunos do 9.º ano de escolaridade. O estudo seguiu uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo, incidindo em dados obtidos de diversas fontes, nomeadamente, registo de foto e vídeo, notas de campo provenientes da observação participante de ambas as investigadoras e recolha das resoluções dos problemas pelos alunos. A análise de conteúdo focou-se na prática dos alunos aquando da resolução dos problemas com robôs. Os resultados mostram que os robôs contribuíram para uma melhor interpretação dos enunciados dos problemas e para a sua resolução pelos alunos. A implementação de um cenário de aprendizagem apelando à resolução de problemas ligados à realidade e com uma metodologia ativa, traduziu-se numa maior envolvência pelos alunos e permitiu-lhes percecionar os conteúdos e procedimentos matemáticos de uma forma contextualizada.

Palavras-chave: Cenário de Aprendizagem; Lugares geométricos; Resolução de problemas; Robôs.

Abstract: *The research presented in this paper was developed in the pre-service teaching practice from the second author, in which was intended to understand mathematics' learning mediated by problems. Our main goal was to understand the contributions from using robots for the learning of geometrical concepts by 9 grade students. The research' methods were qualitative and interpretative, obtained from several sources, such as, photo and video, field notes from researchers' participant observations and students problems' solving. The content analysis was focused on students' practice when solving problems with robots.*

1. Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, soniam@staff.uma.pt
2. Escola Básica e Secundária Gonçalves Zarco, patie_santos@hotmail.com

The results show that robots contributed to a better understanding of the problems and helped students to solve it. The implementation of a learning scenario based in real problems and appealing an active methodology, allowed students to achieve a better engagement and promoted students' mathematics' learning of concepts and procedures.

Keywords: *Learning Scenario; Geometry; Problem Solving; Robots.*

Introdução

Os desafios colocados à educação matemática da atualidade são inúmeros. O advento da tecnologia, a globalização do conhecimento e a emergência de novos cenários de aprendizagem, formais e não formais, conduzem à necessidade de se (re)pensar as práticas de ensino e aprendizagem da matemática.

O presente artigo apresenta parte de um estudo, ainda em fase de desenvolvimento, no âmbito de um relatório de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, o qual pretende abordar a aprendizagem matemática mediada por problemas, tendo como objetivo compreender os contributos do uso de robôs para a aprendizagem dos lugares geométricos por alunos do 9.º ano de escolaridade.

Cientes de que a Geometria constitui um meio privilegiado para representar e dar significado ao mundo que nos rodeia e de que o seu ensino deve promover a descoberta e a experimentação (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999), na presente investigação foi desenhado um cenário de aprendizagem, no qual os alunos envolveram-se na resolução de problemas relacionados com tarefas desempenhadas por um robô enfermeiro no combate à pandemia atual. O estudo foi conduzido pelas questões: i) Como se caracteriza a aprendizagem matemática dos alunos quando usam robôs? ii) Quais os contributos do uso de robôs para a aprendizagem dos lugares geométricos ao nível do 9.º ano? iii) Como é que um cenário de aprendizagem, assente num ensino através de problemas, contribui para a aprendizagem matemática dos alunos? iv) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução dos problemas geométricos e como ultrapassá-las? Na presente comunicação apresentamos alguns resultados relativos às questões ii) e iii).

Fundamentação teórica

Nesta investigação foi criado um cenário de aprendizagem, assente numa metodologia de trabalho na qual se conceptualizou o ensino da matemática através da resolução de problemas com robôs. Nesta secção discute-se o que se entende por cenário de aprendizagem, apresenta-se as principais características de uma metodologia de ensino através de problemas e discutem-se os contributos da robótica para a aprendizagem da matemática.

Cenários de Aprendizagem

Na procura por se equacionar novos contextos educativos, nos quais se perspetivam novas metodologias, novos recursos e a assunção de diferentes papéis por parte de professores e alunos, os cenários de aprendizagem (Carroll, 1999) têm vindo a assumir um papel relevante no contexto educacional.

A elaboração de um cenário de aprendizagem tem como principal finalidade produzir mudanças em práticas existentes. Em termos educacionais, podemos dizer que um cenário de aprendizagem é idealizado na perspetiva de trazer algo 'novo' para a sala de aula. Essa inovação pode traduzir-se na utilização de uma nova ferramenta, numa forma diferente de se desenvolver as atividades, no assumir um novo papel no desenvolvimento dessas mesmas atividades. O pensar e agir 'fora da caixa' terá diferentes características de acordo com os intervenientes e com os objetivos que se pretendem alcançar com essa mudança. Martins e Fernandes (2021) alertam para o facto de a criação de cenários de aprendizagem assumir relevância quando se pretendem criar contextos que potenciem aprendizagens significativas. Na mesma linha, Matos (2013) advoga que os cenários devem conter "o caráter inovador, o sentido transformador, o sentido prospetivo, a flexibilidade e adaptabilidade, o poder metodológico e o caráter apelativo e potencialmente motivador" (p.51). Assim, inovar com recurso a cenários de aprendizagem poderá representar uma oportunidade para se pensar em contextos educativos nos quais o conhecimento matemático ganhe significado no trabalho do aluno e para que este se sinta motivado a participar nas atividades matemáticas desenvolvidas.

Aprendizagem da matemática através de problemas

Existem muitas metodologias que têm sido apontadas como inovadoras, para as quais são avançados benefícios para a aprendizagem dos alunos. Uma delas é a Problem-Based-Learning (PBL), ou aprendizagem baseada em problemas. Nesta investigação, assumimos a PBL como uma estratégia de ensino da matemática 'através' de problemas, conforme se esclarece adiante.

Apesar de ser apontada como uma metodologia inovadora, uma vez que [ainda] quebra com o usualmente estabelecido, Ribeiro (2019), alude que a PBL não é de facto algo recente, tendo as suas raízes nos trabalhos de Dewey (1929) e Bruner (1959 a 1971).

Para Ribeiro e Irala (2020), a PBL consiste "num método pelo qual o docente utiliza uma situação-problema, propondo aos alunos vários caminhos potenciais para a solução, envolvendo-os num processo ativo de aprendizagem" (p.1). A metodologia toma o aluno no centro da

atividade, sendo que o professor deixa de ser o foco da ação. O principal objetivo da PBL é permitir que os alunos se tornem autónomos, reflexivos, críticos e independentes no uso de conteúdos curriculares, em situações problemáticas de cariz prático.
No que se refere à Educação Matemática, a resolução de problemas tem sido uma das áreas em que se tem investido muito em termos investigativos, contudo, apesar dos enormes avanços já conseguidos, "o seu impacto no currículo e sobretudo na sala de aula de matemática de modo a produzir bons resolvedores de problemas tem sido muito limitado." (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p. 39).
Na presente investigação, conceptualiza-se 'problema matemático', no sentido de Abrantes (1989), como um tipo de tarefa, de natureza mais aberta, apresentando uma ligação com situações contextualizadas. Como bem afirma Abrantes (1989), "na vida real, somos confrontados com problemas de que não podemos conhecer antecipadamente a solução e, muitas vezes, não sabemos mesmo se essa solução existe" (p.6). Também como o autor, salientamos que este é um tipo de situação que deveria inspirar atividades de aprendizagem no âmbito da matemática escolar. Assim, uma metodologia baseada na resolução de problemas, na aula de matemática, deverá traduzir-se na criação de contextos desafiadores, nos quais professores e alunos estejam envolvidos em ações conjuntas, almejando solucionar uma determinada problemática, usando conhecimentos e procedimentos matemáticos para esse fim. Também, o recurso a problemas abrangentes, ligados a situações reais, possibilitará aos alunos terem a oportunidade de adquirir "conhecimentos científicos e tecnológicos, incluindo questões ambientais e sociais; desenvolver habilidades de realização de projetos, resolução de problemas, comunicação, trabalho em equipa, autoavaliação e avaliação de pares" (Magalhães, Viseu & Martins, 2016, p.766).
Podemos então conceptualizar a PBL na aula de matemática numa vertente de 'ensino através de problemas' (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015), assumindo que podemos "ensinar nas nossas aulas de matemática usando a resolução de problemas como fio condutor para os conceitos matemáticos, tornando-se assim a base para ensinar os vários conteúdos" (p. 42). Assim, nesta investigação a PBL é entendida como uma metodologia que perspetiva o ensino da matemática em torno da resolução de problemas reais e oferece aos alunos mais oportunidades para pensarem criticamente, apresentarem de forma criativa as suas próprias ideias e comunicarem matematicamente as suas estratégias e resultados.

Aprendizagem matemática com robôs
O uso de robôs tem vindo a assumir considerável importância na construção de abordagens específicas para a aprendizagem de conceitos matemáticos, sendo muitos os estudos nacionais e internacionais que se debruçam sobre esta temática (Martins, 2016).
Segundo Andrade (2011), com o uso de robôs, a aprendizagem é vista como "algo divertido, estimulando a exploração e a investigação"

(p.27), sendo que esta tecnologia cria nos alunos uma grande motivação, levando-os a sentirem-se "um elemento activo no processo ensino-aprendizagem." (p. 29). Mas, relativamente à robótica educativa, existe um outro fator que merece a nossa atenção, o aspeto da tangibilidade.

Não raras vezes, o conhecimento que o professor quer que o aluno aprenda é sobre algo intangível (Zibit & Gibson, 2005) e as ligações entre o que o professor faz e fala e a forma como os alunos percecionam esse conhecimento não são de todo visíveis. Isso faz com que, não raras vezes, os processos de resolução de problemas sejam em grande parte internos e não visíveis para os envolvidos. É neste sentido que a robótica tem se apresentado como um excelente contributo para a aprendizagem, e em particular para a aprendizagem matemática.

O robô enquanto artefacto tangível (palpável, físico, observável, manipulável) ajuda a corporizar ideias matemáticas, que de outra forma poderiam estar 'ocultas' para os alunos. Como afirma Martins (2016), os robôs podem tornar-se invisíveis para que a matemática ganhe visibilidade. Assim, as atividades com robôs podem incidir sobre temáticas transversais ligadas a problemas e desafios contextualizados, nos quais o robô apresenta um extraordinário potencial pedagógico para a abordagem de conceitos matemáticos de uma forma prática, tangível e motivadora. É neste sentido que se procurou criar a abordagem que se apresenta e discute neste trabalho.

Abordagem metodológica

Considerando a natureza do objetivo de investigação - compreender os contributos do uso de robôs para a aprendizagem dos lugares geométricos por alunos do 9.º ano de escolaridade - optámos por uma metodologia que se inscreve num paradigma interpretativo, com uma abordagem qualitativa (Bokdan & Biklen, 1994).

Estudámos o caso de uma turma de 9.º ano de uma escola básica e secundária da Ilha da Madeira, com alunos entre os 13 e os 17 anos. Os dados foram recolhidos no ano letivo 2020-2021 em ambiente natural de sala de aula, sendo que o cenário de aprendizagem que aqui se apresenta incorporou a intervenção pedagógica supervisionada da segunda autora deste artigo.

A temática do cenário de aprendizagem foi escolhida tendo presente o contexto vivido pelos participantes, ou seja, a existência da atual pandemia mundial. Os alunos estavam organizados em 5 grupos (4 grupos de quatro alunos e 1 de cinco). A dinâmica da aula integrava momentos de trabalho autónomo em pequenos grupos e momentos de apresentação e discussão plenária.

A par de outras atividades desenvolvidas no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, as atividades com robôs tinham o intuito de tornar a aprendizagem matemática mais motivante e significativa para os alunos. A metodologia de ensino implementada visou apelar a uma postura distinta da que vinha sendo assumida pelos alunos, uma vez que se mostravam muito pouco motivados para a aprendizagem, existindo algumas situações de indisciplina, associadas ao fraco

interesse demonstrado por alguns.
Os dados recolhidos são de natureza descritiva, tendo sido obtidos de diversas fontes, nomeadamente, registo de foto e vídeo, notas de campo provenientes da observação participante de ambas as investigadoras, recolha das resoluções dos problemas feitas pelos alunos.
Nesta comunicação analisamos a prática dos alunos na resolução dos problemas, procurando destacar os contributos do uso de robôs para a aprendizagem matemática e o potencial oferecido por um cenário de aprendizagem assente numa metodologia de ensino através de problemas.

Os problemas matemáticos com robôs
Na metodologia qualitativa, a investigação orienta-se e desenvolve-se tendo por base a fundamentação teórica. Neste sentido, os pressupostos teóricos orientaram não só a criação dos problemas que melhor nos permitissem compreender o fenómeno em estudo, ou seja, a aprendizagem matemática, mas também moldaram a metodologia de ensino adotada na implementação do cenário de aprendizagem.
Cada um dos 5 grupos de trabalho construiu um robô enfermeiro. Também recebeu o enunciado do problema que teria de resolver usando o robô construído, a maquete da enfermaria descrita no problema e um pequeno guião orientador da exploração ao problema. As enfermarias estavam numeradas. Cada grupo resolveu um problema distinto, pois, desta forma, estariam a ser resolvidos problemas envolvendo todos os lugares geométricos em estudo.
A resolução de cada um dos problemas conduzia à construção de um lugar geométrico, contudo, não existia qualquer tipo de indicação que levasse os alunos a prever que a resolução estava relacionada com este conteúdo matemático.
Na tabela seguinte apresentamos os problemas propostos. A informação da quarta coluna era apenas do conhecimento das professoras:

Tabela 1. Problemas propostos aos alunos

Grupo de Trabalho	Título do Problema	Enunciado	Lugar Geométrico resultante
1	Desin-feção da Enferma-ria 1a	**Parte I-** Um dos grandes desafios colocados ao robô enfermeiro é conseguir, de forma segura, fazer a desinfeção das enfermarias. Desloca-te à tua enfermaria e descobre a melhor posição para o robô desinfetar a maior área usando o sensor de luz/cor com "irradiação germicida ultravioleta". Para fazer a desinfeção, o robô tem de se colocar num lugar específico da enfermaria. Tem de estar à mesma distância da cama do paciente (ponto P) e do armário (ponto A). É necessário também que o robô respeite a distância de segurança, isto é, que esteja o mais longe possível do paciente. Descobre o ponto onde se irá colocar o robô enfermeiro de maneira a fazer a desinfeção nas condições exigidas e denomina-o de D. **Parte II-** Supõe que na tua enfermaria há uma cadeira para o utente se sentar que também precisa ser desinfetada. Descobre a melhor posição para o robô fazer a desinfeção, estando simultaneamente à mesma distância da cama (ponto P), do armário (ponto A) e da cadeira (ponto C). Descobre o ponto onde se irá colocar o robô enfermeiro de maneira a fazer a desinfeção nas condições exigidas e denomina-o de E. **Parte III-** Constrói uma circunferência de centro E e raio [EA]. Se o robô adotar a trajetória circular sobre esta circunferência estará em contacto com o paciente? E com o armário?	**Circuncentro (Interior do triângulo)**
2	Desin-feção da Enfer-maria 1b	Mesmo enunciado do Problema 1	**Circuncentro (Exterior do triângulo)**

3	Desin-feção da Enferma-ria 2	**Parte I-** Quando o robô vai para a enfer-maria 2 normalmente segue uma rota triangular. Entra em E, presta apoio ao paciente (em P) e desloca-se ao armário (em A), caso seja necessário recolher ou repor medica-mentos. Sai da enfermaria, novamente no ponto E. Para desinfetar a enfermaria pretende-se que o robô se coloque num ponto I que esteja à mesma distância dos lados do triângulo [EPA]. Descobre o ponto onde se irá colocar o robô enfermei-ro de maneira a fazer a desinfeção nas condições exigidas e denomina-o de I. **Parte II-** Agora que encontraste o ponto I, descobre/traça um caminho de modo que o teu robô vá até cada lado do triângulo gastando o mínimo de energia (ir de I até *EA*, de I até *AP* e de I até *PE*).	**Incentro**
4	Alarme sonoro da enfermaria	Na enfermaria 3 existem 3 camas para 3 pacientes (pontos P_1, P_2 e P_3). O teu robô tem com desafio desligar um alarme sonoro acionado em caso de emergência. Esse alarme está na intersecção das três alturas do triângulo [P_1 P_2 P_3]. Ajuda o teu robô a encontrá-lo.	**Ortocentro**
5	Medição da tem-peratura na enfer-maria 5	**Parte I-** Na enfermaria 5 existem três camas para três pacientes (pontos P_1, P_2 e P_3). O teu robô enfermeiro tem como função medir a temperatura ambiente da sala. Assim sendo, o robô vai, por exemplo, do P1 para o P2, do P2 para o P3 e do P3 para o P1, parando sempre a meio para medir a temperatura. Não te esqueças de marcar esses novos pontos (M_1, M_2 e M_3). **Parte II-** Supõe que o teu robô quer fazer comparações de temperaturas. Essa comparação é feita entre a temperatura ambiente medida em cada um dos pontos encontrados e a temperatura do paciente que fica na posição oposta a cada um desses pontos. Traça o novo percurso feito pelo robô quando compara as temper-aturas.	**Baricentro**

Apresentação e análise dos dados

Os dois últimos anos letivos têm sido revestidos de incertezas. A pandemia obrigou-nos, no presente ano letivo (2020-2021), a estarmos constante-mente a transitar do ensino presencial para o não presencial, conduzindo a sucessivos ajustes nos métodos de ensino.

Quando desenhámos este cenário de aprendizagem, equacionamo-lo para o regime presencial, no entanto, quando pretendíamos imple-mentá-lo, foi novamente imposto o ensino à distância. Nesse momento, o conteúdo matemático referente aos lugares geométricos foi lecionado num regime de ensino à distância, com recurso à resolução de tarefas com um *software* de geometria.

No ensino à distância observamos que os alunos eram muito pouco participativos, e apesar de alguns procurarem acompanhar o que era feito na aula síncrona, acabavam por não entregar os trabalhos a desenvolver assincronamente. Alguns faltavam regularmente às aulas síncronas e outros insistiam em manter as câmaras desligadas, não participando nas atividades. Este foi um período muito crítico. A falta de autonomia de muitos alunos e a ausência de supervisionamento parental nas atividades escolares conduziu a que muitos ficassem alheios ao que a escola lhes propunha. Quando foram retomadas as aulas presenciais considerou-se produtivo implementar o cenário de aprendizagem, logo no início das atividades presenciais.

Começamos por analisar em grande grupo uma notícia (https://observador.pt/2020/04/16/professor-do-tecnico-quer-criar-robo-enfermeiro-que-cuida-de-doentes-com-covid-19-para-ajudar-os-profissionais-de-saude/) que descrevia o possível uso de robôs no combate à pandemia e desafiamos os alunos a imaginarem que seriam cientistas e que seriam responsáveis por criar um robô para ajudar os profissionais de saúde.

No momento inicial de análise da notícia, denotamos uma nítida envolvência dos alunos na discussão da temática e uma crescente responsabilidade relativamente ao papel que foram chamados a assumir. A temática do cenário, aliada à metodologia de trabalho adotada, permitiu que os alunos trouxessem para o debate os aspetos que consideraram importantes equacionar se fossem cientistas e tivessem de criar um robô para a tarefa proposta. Referiram, por exemplo, que "ao usarmos um robô, estaríamos a proteger os humanos, evitando riscos de contágio" (grupo 5). Outro aspeto salientado foi o facto de que o robô "não tem sentimentos, empatia, nem consegue tomar decisões" e dos desafios e contributos que isso representaria para os profissionais de saúde (grupo 3). Também as características do robô que iriam construir foram debatidas de forma reflexiva e crítica pelos alunos. O uso de energias 'verdes', com recurso a painéis solares (grupo 3), ou um programa que permitisse ao robô falar/interagir com os doentes necessitados (grupo 1) foram aspetos salientados. Estas 'falas' dos grupos evidenciam uma nítida mudança na postura dos alunos e nos papéis passivos que, usualmente, assumiam nas aulas de matemática. A problemática escolhida permitiu que os alunos se envolvessem e assumissem uma postura crítica, criativa, reflexiva e participativa, como é esperado quando adotamos a PBL (Magalhães, Viseu & Martins, 2016).

A problemática trazida pelo cenário de aprendizagem apelou a que os alunos assumissem novos papéis (Carroll, 1999), conduzindo ao desenvolvimento de novas competências e a um sentido de responsabilização para com o que estava a ser desenvolvido pelo coletivo. A existência de uma 'grande ideia' (Fernandes, 2013) é uma característica muito relevante a considerar quando se equaciona o uso de cenários em contexto educativo. É ela que impulsiona os intervenientes a assumirem novos papéis e assumirem novas responsabilidades. Ter de equacionar a criação de um robô que auxiliasse no combate à pandemia foi preponderante para que os alunos se envolvessem na resolução dos problemas matemáticos posteriormente colocados.

Denotámos desde logo um fascínio pelo robô enquanto catalisador da motivação, cooperação e envolvência dos alunos (Andrade, 2011). O protótipo que estava sobre a mesa da professora atraiu-lhes desde logo a atenção, despoletando o interesse em saber construí-lo e programá-lo. Mas, além disso, era o 'seu' robô que iria resolver os problemas propostos e esses problemas, aos olhos dos alunos, eram efetivamente reais.

Com maior ou menor abrangência, o robô permitiu que os alunos pudessem, de uma forma 'tangível' (Zibit & Gibson, 2005), interpretar os problemas colocados e percecionar os conteúdos matemáticos que estavam a ser usados para os resolver. Analisemos o contributo do robô na interpretação do problema da enfermaria 1a. Neste problema os alunos tinham de posicionar o robô de modo a efetuar a desinfeção da enfermaria, estando à mesma distância do paciente (ponto P) e do armário (ponto A), mas assegurando uma distância de segurança, isto é, estando o mais longe possível do paciente.

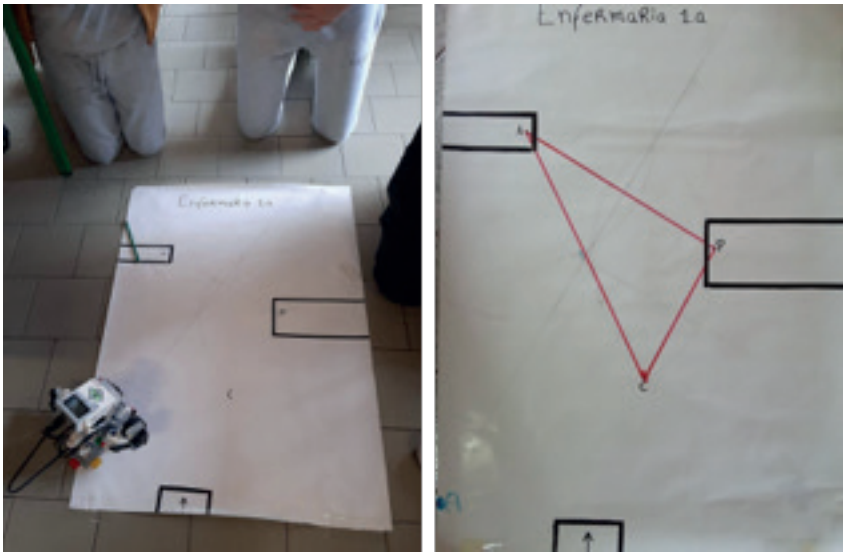


Figura 2- Enfermaria 1a.

Num primeiro momento, apesar de terem construído a mediatriz do segmento de reta [AP], colocaram o robô no ponto médio do segmento. Afirmavam (e isto aconteceu também na enfermaria 1b) que aí ele estaria à mesma distância do armário e do paciente. Quando questionados se estariam posicionados nas condições exigidas, os alunos anuíram. Foi pedido que colocassem o robô sobre um outro qualquer ponto da mediatriz e questionado se o robô continuava a estar à mesma distância de A e de P. Os alunos responderam que sim. Questionou-se se nesse novo ponto ele estaria mais ou menos seguro. Após alguma discussão, concluíram que o robô deveria estar em D, pois estaria o mais longe possível do paciente, reduzindo o risco de contágio. Este episódio evidencia a importância que o robô teve, não só na interpretação do enunciado, mas também na visualização e 'corporização' da propriedade comum a todos os pontos da mediatriz do segmento de reta [AP].

Observamos igualmente que na resolução dos problemas a grande maioria dos alunos não sabia manusear os instrumentos de geometria (compasso, régua, esquadro). Como foi referido, as atividades anteriores tinham sido desenvolvidas à distância, com recurso a um *software*, logo, tais fragilidades nos procedimentos matemáticos não haviam sido colmatadas.

Com a implementação do cenário de aprendizagem, e para que encontrassem as trajetórias e o posicionamento dos robôs nas condições exigidas, os alunos aprenderam a usar estes instrumentos, a discutir os procedimentos adotados com o seu uso e a analisar as propriedades dos objetos matemáticos construídos. Tal aspeto pode ser percecionado abaixo.

Figura 3- Uso de instrumentos pelos grupos.

Outro aspeto a salientar é que, apesar do conteúdo matemático já ter sido lecionado anteriormente, as situações apresentadas e os procedimentos matemáticos necessários para as resolver representavam problemas para os alunos, no sentido de Abrantes (1989), pois a sua solução era-lhes desconhecida. Cabia a cada grupo apresentar aos restantes os seus problemas e as estratégias adotadas na sua resolução, descrevendo os procedimentos matemáticos adotados.

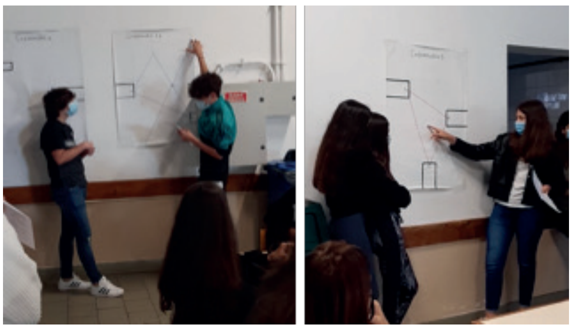


Figura 4- Discussão das estratégias.

Analisemos a comunicação matemática do aluno (A), do grupo que resolveu o problema da enfermaria 2:

A: Como desenhamos a circunferência?.... Nós pegamos no compasso, pusemos em I, fizemos um raio do I até ao Z [apontando] e no ponto Z fizemos a circunferência [descrevendo com o dedo a circunferência]. […] A circunferência não toca em todos os pontos do triângulo porque, se fizéssemos no GeoGebra isto ia ficar direitinho, mas, à mão, isto já não fica…foge um bocadinho. […] O nosso conceito matemático é a bissetriz, que fizemos aqui, aqui e aqui [apontando] e a circunferência do incentro.

Este diálogo evidencia uma preocupação por parte dos alunos em utilizar os termos matemáticos de forma correta, revelando uma boa comunicação matemática, escrita e oral. Todos os grupos nos momentos de apresentação dos seus trabalhos procuraram mostrar as estratégias que utilizaram, os instrumentos que usaram e as soluções encontradas para os seus problemas, sendo que estes problemas foram o fio condutor (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015) para a construção do conhecimento matemático.

Conclusão

As atividades geométricas, da mais variada natureza, constituem um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática dos alunos, representando um campo propício para expressarem as suas ideias e argumentos, verbalmente ou através de desenhos e esquemas (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). Os problemas matemáticos foram explorados pelos alunos segundo uma cultura de aula onde se valorizou a discussão de diferentes estratégias e abordagens, potenciando o processo de exploração e desenvolvimento dos conhecimentos adquiridos, bem como a aquisição de novos conhecimentos, servindo de estímulo no seu processo de aprendizagem matemática (NCTM, 2007). Este tipo de atividades, nas quais se coloca o aluno no centro da ação e o professor como orientador do processo, traduzem verdadeiras oportunidades para a aprendizagem matemática dos alunos.

Implementar um cenário de aprendizagem envolvendo robôs e uma metodologia de ensino através da resolução de problemas revelou-se muito vantajoso para a aprendizagem matemática dos alunos, uma vez que os conteúdos e procedimentos geométricos usados na resolução dos problemas assumiram particular significado para os alunos. Foi através do uso desse conhecimento matemático que a problemática do cenário – criação de um robô enfermeiro para apoio no tratamento ao covid - foi equacionada. A resolução de diferentes problemas em enfermarias covid serviu de gatilho para gerar uma experiência que apelou ao desenvolvimento da criatividade, imaginação, autonomia, espírito crítico e cooperação dos alunos. Aspetos que não eram usualmente exercidos pelos alunos nas aulas de matemática.

Em termos motivacionais, o uso de robôs e a possibilidade de estarem a contribuir para a solução de uma problemática atual foi preponderante para o envolvimento dos alunos na resolução dos problemas matemáticos propostos. Mas além do aspeto motivacional trazido pelo robô, faz-se necessário destacar o seu contributo para a aprendizagem do conteúdo matemático em estudo.

A trajetória a ser assumida pelos robôs, aliado ao uso de instrumentos de geometria para a construção dos lugares geométricos subjacentes ao seu posicionamento, contribuiu para que os conhecimentos e procedimentos matemáticos fossem aprendidos pelos alunos na prática matemática emergente da implementação deste cenário de aprendizagem.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)… *Educação e Matemática, 8,* 7–10.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico.* Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.

Andrade, F.J.S. (2011). *Uma Metodologia educacional no estudo de Funções de 7.º ano.* Universidade da Madeira.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Carroll, J. M. (1999). Five Reasons for Scenario-Based Design. In *Proceedings of the 32nd Hawaii* Int. Conf. On System Sciences, Hawaii. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.106.5310&rep=rep1&type=pdf

Fernandes, E. (2013). *Aprender Matemática e Informática com robots.* Universidade da Madeira.

Magalhães, J. M., Viseu, F.; Martins, P.M. (2016). Aprendizagem Matemática em contexto de projeto multidisciplinar: o pêndulo. In *Atas do XIII Congresso SPCE, 2016. Mundo digital e Educação* (765-775).

Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: ESE Viseu.

Martins, S. (2016). *Aprendizagem de Tópicos e Conceitos Matemáticos no 1º Ciclo do Ensino Básico: Uma história com robots.* Universidade da Madeira, Funchal, Portugal.

Martins, S. & Fernandes, E. (2021). Literacia Matemática: Contributos do design de cenários de aprendizagem na formação inicial de professores. In H. Spínola & S. Carreira (Org.), *Literacia Científica: Ensino, Aprendizagem e Quotidiano* (73-87). CIE-UMa.

Matos, J. F. (2013). Cenários de aprendizagem como recursos estruturantes da ação em educação. In E. Fernandes (Ed.). *Aprender Matemática e Informática com robots.* (47-54). Universidade da Madeira.

NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. APM.

Ribeiro, E.S. & Irala, V.B. (2020). Uso da metodologia Problem-Based Learning pelas diferentes áreas do conhecimento no Brasil: Uma revisão integrativa. *Revista CPAQV, 12* (3), 1-12.

Ribeiro, G. H. (2019). *Matemática, Aprendizagem Baseada em Problemas: metodologia inovadora no 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública.* Universidade Federal de Goiás- UFG.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante. 24* (2), 39–60.

Zibit, M. & Gibson, D. (2005). Inside SimSchool – A simulated environment to understand how students learn. In C. Crawford, R. Carlsen, I. Gibson, K. McFerrin, J. Price, R. Weber & D. Willis (Eds.), *Proceedings of SITE 2005-Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (2897-2901). AACE.

Agradecimentos

Os autores agradecem o financiamento da FCT com o contrato de referência: UIDB/04083/2020.

A aprendizagem de funções mediada pelo Geogebra e pela Modelação 3D

The learning of functions mediated by GeoGebra and 3D Modeling

Sónia Abreu[1], Elsa Fernandes[2]

Resumo: Nesta comunicação procuramos compreender quais os contributos dos artefactos tecnológicos e da metodologia de aprendizagem utilizada nos ambientes inovadores para as aprendizagens matemáticas. A base empírica aqui apresentada consistiu na implementação de um cenário de aprendizagem - Vamos construir um parque eólico - no qual pretendíamos que fossem utilizados diversos conceitos matemáticos, entre eles, os de função polinomial e trigonométrica na tomada de decisões durante a construção de uma turbina eólica e na análise da eficácia da mesma. Atendendo ao problema de investigação adotou-se uma metodologia de investigação qualitativa de carácter interpretativo. Da análise efetuada podemos destacar a importância dos artefactos mediadores na prática decorrente da implementação do cenário de aprendizagem que não só facilitaram a atividade como a transformaram. Podemos também afirmar que foram negociaram significados fazendo emergir diversas aprendizagens relacionadas com o conceito de função.

Palavras-chave: Funções; Modelação 3D; Artefactos; Significado

Abstract: *In this paper we will try to understand what technological artefacts and the learning methodology used in innovative environments contribute to mathematical learning. The empirical basis presented here consisted in the implementation of a learning scenario - Let's build a wind farm - in which we intended to use several mathematical concepts, including polynomial and trigonometric functions to make decisions for the construction of a wind turbine and in the analysis of its efficiency. Considering the research problem, a qualitative research methodology of interpretative nature was adopted. From the analysis carried out, we can highlight the importance of the mediating artifacts in the practice resulting from the implementation of the learning scenario that not only facilitated the activity but also transformed it. We can also say that the students negotiated meanings, emerging several learnings related to the concept of function.*

1. Universidade da Madeira, sonia.abreu@staff.uma.pt
2. Universidade de Madeira, elsaf@staff.uma.pt

Keywords: *Functions; 3D Modelling; Artifacts; Meaning*

Introdução

Nas últimas décadas temos assistido a uma crescente preocupação em compreender em que sentido os ambientes podem contribuir para que os alunos possam realizar aprendizagens significativas que lhes permitam adquirir competências para viver numa sociedade cada vez mais exigente e tecnológica. Neste sentido, têm surgido vários projetos (Droide II, iTEC - Innovative Technologies for an Engaging Classroom, FTE-LAB -Future Teacher E-ducation Lab) que procuram implementar alterações não apenas nos espaços físicos de sala aula, mas também nas metodologias e nos recursos tecnológicos utilizados.

A conceção de um ambiente de aprendizagem está inerentemente ligada à forma como entendemos a aprendizagem. Ao assumirmos a aprendizagem segundo o quadro teórico das teorias sociais de aprendizagem, é natural que o que se entenda por ambiente de aprendizagem tenha também abarcado, além da componente física do ambiente, a componente social e pedagógica do mesmo.

A aprendizagem é, segundo esta perspetiva, encarada como um processo individual, mas que resulta da participação na prática de uma comunidade, das relações sociais e dos significados que são conjuntamente negociados entre os elementos dessa comunidade (Wenger, 1998).

Para compreender o fenómeno aprendizagem implica termos também que ter em conta que a relação estabelecida entre o homem e o mundo não é direta, ela é mediada por elementos intermediários – ferramentas físicas ou mentais. Estes artefactos de mediação (Vygotsky, 1978) não são apenas meios auxiliares para realizar uma ação, são ferramentas que permitem ampliar e transformar essa ação. Leont'ev (2004) considera que para compreender uma ação é necessário compreender o motivo que está por detrás da atividade na qual está inserida.

Na investigação que sustenta esta comunicação utilizamos dois tipos de artefactos físicos – o GeoGebra e a modelação e impressão 3D - com o propósito de ampliar e transformar a ação. Por modelação e impressão 3D entendemos como o design do objeto, em software específico, para posterior impressão em 3D.

Nesta comunicação descrevemos um ambiente de aprendizagem que emergiu da implementação de um Cenário de Aprendizagem (CA), no âmbito da Unidade Curricular (UC) de Matemática VI do Curso de Educação Básica e procura-se compreender quais os contributos dos artefactos tecnológicos e da metodologia de aprendizagem utilizada nos ambientes inovadores para as aprendizagens matemáticas. Assim, começamos por apresentar as teorias de aprendizagem adotadas neste estudo - a teoria da aprendizagem situada e a teoria da atividade.

Seguidamente descrevemos os aspetos metodológicos da investigação subjacente a este estudo bem como o CA desenhado e implementado. Posteriormente apresentamos e discutimos alguns dos resultados e por fim tecemos algumas conclusões.

Enquadramento teórico

A teoria da aprendizagem situada

Lave (1988) trouxe através da sua obra Cognition in Practice, um novo olhar sobre as teorias da cognição e da transferência do conhecimento. Lave e Wenger (1991) apresentaram também uma 'nova conceção' da aprendizagem na qual defendem que para compreender a aprendizagem é importante mudar o "foco analítico do indivíduo como aprendiz para a aprendizagem como participação no mundo social, e do conceito de processos cognitivos para uma visão mais abrangente de prática social" (Lave & Wenger, 1991, p. 43).

A participação social é caracterizada por Wenger (1998) como um processo da aprendizagem e do conhecimento baseado em quatro componentes: comunidade, identidade, significado e prática. Estes componentes estão profundamente interligados, não podemos definir um deles sem recorrer aos outros três. Segundo Figueiredo (2002) estas componentes não só estão interligadas como se relacionam biunivocamente: prática e significado, prática e comunidade, prática e identidade. Analisando a primeira relação - prática e significado-

> interessa notar que o significado se constrói, pela prática, no seio de um processo de negociação de significados. Quando lemos um livro, estamos a negociar com o autor a nossa compreensão do que ele pretende oferecer-nos e é desse processo negocial que nasce o que aprendemos no livro. O mesmo acontece quando nos sentamos ao computador e procuramos interagir com um ambiente de aprendizagem à distância – é por um processo de negociação de significados que vamos progredindo na nossa aprendizagem (p. 47).

Este conceito de negociação de significado é definido por Wenger (1988) como o processo sob o qual nós experienciamos o mundo e nos envolvemos nele de forma significativa. Esta constante negociação de significados é visível mesmo nas nossas rotinas diárias.

Segundo Voigt (1994) para ocorrer aprendizagem Matemática é necessário existir negociação de significado matemático. Esta negociação pode existir de forma implícita quando um aluno regula as suas ações de acordo com o feedback ou as reações dos colegas e/ou do professor ou, de forma explícita quando os alunos argumentam evidenciando pontos de vista diferentes. É desta negociação resultante da partilha dos múltiplos sentidos dos objetos matemáticos que são construídos significados matemáticos.

Teoria da Atividade: Artefactos mediadores da aprendizagem

Compreender o fenómeno aprendizagem envolve muito mais do que

observar o desempenho de quem aprende, é também necessário ter em conta os contextos socioculturais e socio-históricos no qual esse fenómeno ocorre bem como os artefactos e os sistemas de mediação que são utilizados para a construção de significados (Fernandes, 2013).
O conceito de mediação surgiu como resultado do estudo realizado por Vygotsky sobre o funcionamento da mente humana. Para Vygotsky (1978) o desenvolvimento psicológico é um processo que resulta das relações entre o homem e o meio social e cultural. A mediação é um dos conceitos essenciais para se compreender essas relações entre o sujeito e o meio. Esta relação não ocorre de forma direta, é mediada por elementos intermediários. Estes elementos intermediários são ferramentas, físicas ou mentais, que auxiliam a atividade humana e que ajudam a organizar e estruturar o pensamento, moldando a forma como agimos e nos relacionamos com o mundo.
As ferramentas físicas e mentais organizam-se em dois grupos: os instrumentos e os signos. Os instrumentos são elementos intermediários externos ao individuo, já os signos são elementos intermediários internos ao sujeito. Enquanto os instrumentos auxiliam nas ações concretas, os signos auxiliam nos processos psicológicos.
No contexto de sala de aula, estas ferramentas (intermediários externos) podem ser, por exemplo, instrumentos de desenho, computadores, metodologias de trabalho e a organização do espaço (Martins, 2016). Se pensarmos numa aula de matemática, um software de geometria dinâmica pode ser utilizado para representar graficamente uma função, ampliando o rigor com que esse elemento matemático é construído. Quando utilizamos este instrumento com o objetivo de representar graficamente uma função estamos a mudar a natureza da ação levada a cabo pelo sujeito se, em contrapartida tivesse procurado representá-la apenas com um lápis. De forma análoga a modelação e impressão 3D têm um efeito semelhante na natureza da ação. Essa ação mediada pelo instrumento pode envolver também a construção de signos, internos ao sujeito que o utiliza.
Leont'ev (2004) estende o conceito de mediação de Vygotsky centrando a sua atenção no conceito de atividade. Segundo esta perspetiva nem todos os processos podem ser considerados como uma atividade. O autor dá como exemplo os processos de memorização, que não podem ser considerados como uma atividade pois não implicam qualquer relação autónoma com mundo, nem respondem a qualquer exigência específica. Neste sentido atividade é definida como

> (…) os processos que são psicologicamente determinados pelo fato de aquilo para que tendem no seu conjunto (o seu objeto) coincidir sempre com o elemento objetivo que incita o paciente a uma dada atividade, isto é, com o motivo" (Leont'ev, 2004, p. 315).

O objeto orienta a atividade, dando resposta à necessidade do sujeito dessa atividade e o motivo é o estímulo que impulsiona a atividade para um determinado fim.

Para compreender a estrutura da atividade proposta por Leont'ev precisamos de analisar os seus componentes – atividade, ação e operação. A relação existente entre estes componentes pode ser explanada no seguinte exemplo:

> (…) você, que está lendo este texto, poderá ter como atividade a leitura em si ou poderá estar lendo por outro motivo, como a utilização de seu conteúdo em um texto que está escrevendo. No primeiro caso, a leitura é atividade, no segundo, é ação, que compõe outra atividade, isto é, a produção de um texto (Cenci & Damiani, 2018, p. 934).

Ainda recorrendo ao mesmo exemplo podemos verificar que

> (…) para ler o texto, é preciso que você saiba decodificar os símbolos gráficos impressos, coisa que você faz e nem percebe (não é um processo consciente). Isso se caracteriza como uma operação, pois esse processo de decodificação das letras já está automatizado (ibidem, p. 934).

Embora possamos dizer que a atividade corresponde a um sistema mais amplo que é formado por grupos de ações com início e fim bem definidos que dependem das operações, não podemos esquecer que estes três níveis também são intercambiáveis.
Os artefactos mediadores (físicos, simbólicos, externos ou internos) são também moldados na atividade. Na atividade, tais instrumentos são usados pelo sujeito para atingir os produtos esperados, num enquadramento em que existem regras (explícitas ou implícitas) que regulam as ações e interações no sistema (Fernandes, 2013).

Opções Metodológicas

Nesta comunicação procuramos compreender quais os contributos dos artefactos tecnológicos e da metodologia de aprendizagem utilizada nos ambientes inovadores para as aprendizagens matemáticas aquando da implementação do CA - Vamos construir um parque eólico.
Uma vez que o estudo que se pretende realizar exige uma imersão no ambiente de aprendizagem para podermos compreender a forma como os alunos interagem e se relacionam como os artefactos e a importância dessa interação para as aprendizagens, foi adotada uma metodologia de investigação qualitativa de carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Esta opção deveu-se ao facto de considerarmos que

> (…) a melhor forma de estudar a cultura da escola será prestar atenção aos comportamentos contextualizados dos atores e aos significados sociais que eles atribuem às suas práticas (Amado, 2017, p. 150).

O CA foi implementado numa UC de Matemática que é a uma das opções do 3.ª ano do Curso de Educação Básica. Por essa razão fizeram parte deste estudo apenas as sete alunas que estavam inscritas

nessa UC. Convém salientar que a investigadora envolvida nesta recolha de dados era também a docente desta UC o que implicou assumir o duplo papel de investigadora e simultaneamente professora.
Embora a recolha de dados ainda não esteja concluída, será realizada durante dez aulas de 120 minutos, 8 presenciais e 2 a distância. Os dados que aqui analisamos emergiram da observação participante, do registo em diário de campo realizado pela investigadora, da gravação de vídeo das aulas e da recolha dos relatórios realizados pelas alunas acerca da atividade realizada.

O Cenário de Aprendizagem – Vamos construir um parque eólico
Nesta comunicação assumimos Cenário de Aprendizagem como sendo "(…) *stories about people and their activities*" (Carroll, 1999, p. 2). Fernandes (2016) acrescenta ainda que Cenários de Aprendizagem não são "(…) projeções ou planeamentos de ações futuras, mas sim de elementos estruturais que dão forma às trajetórias de aprendizagem das pessoas" (p. 261). Os Cenários de Aprendizagem são situações hipotéticas de ensino-aprendizagem nas quais se descrevem: o contexto e o ambiente no qual se dá a aprendizagem; o domínio ou domínios do conhecimento que estão envolvidos nas atividades; os papéis desempenhados pelos diferentes atores; o enredo no qual se descreve a sequência de episódios que estão na base da estrutura das atividades; a previsão do desfecho e dos produtos que irão emergir na implementação do cenário (Matos, 2014).
A primeira aula iniciou-se com a leitura, no grande grupo, de uma notícia do DN na qual era feita uma análise à produção de energia elétrica no 1.º semestre de 2020 na Madeira, com base nos dados fornecidos pela Empresa de Eletricidade da Madeira comparativamente ao período homólogo do ano anterior. A discussão acerca das fontes utilizadas para a produção de energia, despoletou, nas alunas, o interesse pelas energias renováveis. Perante o interesse manifestado, foi apresentado um tema amplo – 'a grande ideia' - Vamos construir um parque eólico e do trabalho realizado pelas alunas e pela professora

> (…) para a consecução da 'grande ideia', os conteúdos matemáticos (…) e outros foram emergindo. Não queremos com isto dizer que não houve intencionalidade em fazer emergir esses conteúdos, o que queremos realçar é que não foram apenas eles que presidiram à criação e implementação do cenário (Fernandes, 2013, p. 250).

A natureza das atividades propostas na implementação deste CA enquadra-se no que se considera uma metodologia de trabalho de projeto, uma vez que as alunas estiveram ativamente envolvidas numa situação-problema: construir o rotor da turbina eólica.
Após esta discussão, foram formados dois grupos de trabalho, um composto por 3 e outro por 4 alunas e foi disponibilizado, pela professora, um link no moodle para um Sway, com algumas orientações para a realização do trabalho, bem como alguns sites e outros documentos

que poderiam facultar as informações necessárias para a construção da turbina eólica. Na figura 1 é apresentada a sequência de atividades desenhada para este CA.

Sequência de atividades:

- Investigar o que são turbinas eólicas e como é que estas funcionam;
- Calcular o potencial eólico de uma turbina eólica e efetuar o estudo da expressão tendo em conta a velocidade do vento produzido pela ventoinha;
- Organizar a informação recolhida na investigação e decidir que aspetos são necessários ter em atenção para construir o rotor de uma turbina eólica.
- Utilizar o software TinKercad para construir o rotor da turbina eólica.
- Imprimir o rotor da turbina eólica utilizando uma das duas impressora 3D disponíveis na sala.
- Montar a turbina eólica e testar a sua eficácia.

Figura 1. Sequência de atividades do CA

A professora trouxe para a sala um Kit sobre energias renováveis bem como alguns exemplos de turbinas eólicas construídas noutros contexto de aprendizagem (formação inicial e contínua de professores). As alunas tiveram a oportunidade de manusear essas turbinas e verificar o que acontecia quando estas eram sujeitas à ação do vento (simulado com uma ventoinha).

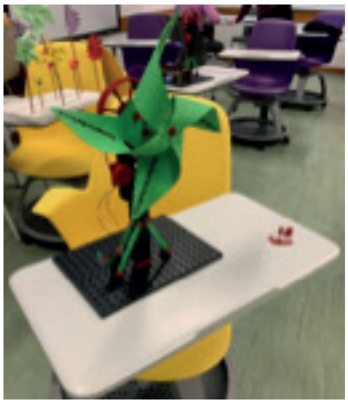


Figura 2. Kit sobre as energias renováveis

Figura 3. Exemplos de turbinas eólicas e de alguns rotores construídos num outro contexto de aprendizagem

Foi deixado ao critério das alunas construir toda a turbina eólica ou utilizar a estrutura já existente e construir apenas o rotor. Os dois grupos decidiram construir apenas o rotor.

Para poderem construir o rotor da turbina, as alunas, tinham de decidir o comprimento e o formato das pás. Foi sugerido pela professora que procurassem determinar o potencial eólico da turbina que queriam construir.

$P = \frac{1}{2}\rho A V^3$, onde:

P – potência do vento medida em Watt, (W)

V – velocidade do vento medida em metros por segundo (m/s)

A – área circular (πr^2, em que o r é o raio do rotor medido em metros) do rotor da turbina (m^2)

ρ – densidade do ar seco $\rho = 1{,}225\ Kg/m^3$, em condições de pressão e temperatura normais.

Figura 4. Equação que permite determinar o potencial eólico de uma turbina eólica

Ao analisarem a equação verificaram que era necessário atribuir um valor à velocidade do vento. Então mediram, recorrendo a um anemómetro, a velocidade do vento produzido pela ventoinha que seria utilizada para testar as suas turbinas. Assim, puderam utilizar estes valores para substituir na equação e desta forma obter o potencial eólico em função do raio do rotor.

Após terem analisado todas as condições que consideraram importantes decidiram o tamanho do raio do rotor e passaram à construção das pás com recurso ao software de modelação 3D *TinKercad*[1]. Numa primeira fase foi dado espaço para que as alunas explorassem livremente o *software* para conhecerem o seu funcionamento. Os dois grupos optaram por escolher as formas disponíveis no *software* adaptando-as de modo a satisfazerem as condições que tinham sido delineadas pelo grupo.

Os modelos construídos pelas alunas foram depois impressos nas impressoras 3D existentes na sala. Ao analisarem o resultado das impressões sentiram a necessidade de efetuar algumas retificações nas suas construções. Num dos casos as pás estavam muito finas e, quando foram retiradas da base de suporte, partiram-se. No outro grupo os orifícios do cubo do rotor não estavam igualmente espaçados o que influenciaria o desempenho das pás. No primeiro caso as alunas reformularam a sua construção aumentando a espessura das pás através do reajuste da altura do sólido. No segundo caso utilizaram rotações de sólidos e o conceito subjacente à divisão de um círculo em três partes iguais para garantir que os orifícios efetuados no rotor, para a colocação das pás, ficassem igualmente espaçados.

Para concluir a construção da turbina as alunas colaram as pás ao cubo do rotor e através de um parafuso juntaram o rotor à estrutura tubular da turbina eólica. Por último utilizaram a ventoinha para testar as suas

1. Este software é bastante intuitivo e adequado a quem está a dar os primeiros passos na Modelação 3D, uma vez que, possuí formas básicas (esferas, cilindros, caixas, etc) que podem ser facilmente adaptadas às dimensões desejadas.

construções e analisar a eficácia das mesmas determinando o número de voltas efetuadas por uma das pás durante um minuto. Para realizarem esta atividade filmaram as turbinas em movimento e criaram uma sequência de fotografias (frames) que foram consecutivamente introduzidas no GeoGebra. As fotografias foram ajustadas de forma a permitir determinar a altura de uma das pás. Associando o tempo correspondente a cada uma das fotografias à altura a que se encontrava a pá nesse instante foi possível, recorrendo a uma função sinusoidal, efetuar o estudo da altura das pás ao longo do tempo.

Análise e Discussão

À procura do melhor raio para o rotor da turbina eólica

Na aula anterior a esta que aqui descrevemos, as alunas tinham realizado uma breve pesquisa acerca do modo de funcionamento e dos aspetos que são necessários ter em conta para a construção de uma turbina eólica. Tinham também procedido ao levantamento da velocidade do vento produzido por uma ventoinha, nas três velocidades que esta dispunha. Nesta aula era esperado que dessem continuidade a esse trabalho procurando descobrir qual o melhor comprimento para as pás que iriam construir. A professora referiu que era necessário apresentar uma justificação para a escolha do comprimento das pás e sugeriu que poderiam explorar a equação do potencial eólico e verificar se esta podia auxiliá-las nessa escolha.

Estas alunas já tinham estudado algumas funções polinomiais, mas nunca tinham abordado uma situação semelhante à que aqui se propunha, na qual tinham de fixar alguns dos valores da equação e tomar um deles como variável. Vejamos um excerto da transcrição relativa à discussão gerada à volta desta equação:

> **Y:** Professora, então a potência é o valor que nos vai dar o que nós precisamos para o tamanho das pás, é isso?
> **Prof:** Se considerarmos o valor do vento constante, o valor da potência passa a ser determinado em função do raio da área circular e, através do raio, podemos determinar o tamanho das pás.
> **S2:** Professora, mas aí nós inventamos para saber o tamanho da pá?

Conforme se pode verificar, quer pela intervenção da aluna Y, quer pela intervenção da aluna S2, ainda não tinham uma noção clara da forma como aquela equação lhes poderia dar a resposta que procuravam – o tamanho das pás. Perante esta situação, a professora recorreu a um instrumento (Vygotsky, 1978) - GeoGebra - habitualmente utilizado nas aulas, para auxiliar a sua explicação e à medida que foi introduzindo a expressão do potencial eólico no campo de entrada, foi discutindo com as alunas os elementos que a compunham.

> **Prof:** Vamos considerar o raio como a nossa variável e ver o que acontece. (…) E agora falta introduzir o valor do vento.

> Que valores vocês obtiveram para o vento?
> **Y:** Mas podemos usar qualquer velocidade, é porque nós anotámos três. Temos que fazer para os três?
> Prof: Sim, podem depois ver para os três.

O GeoGebra surgiu aqui como o artefacto mediador (Fernandes, 2013) que permitiu visualizar a transformação da equação numa função, à medida que os valores foram sendo introduzidos, permitindo assim que as alunas compreendessem que, neste caso específico, o valor do potencial eólico dependia do raio do rotor, pois a velocidade do vento iria ser substituída pelos valores recolhidos na aula anterior. Esta representação da função fez emergir signos matemáticos (Vygotsky, 1978) relacionados com as funções quadráticas, como é possível verificar pela questão colocada por uma aluna.

> **Y:** Como é que vamos, não sei como é que vamos encontrar o valor do raio, então. Temos que ver onde é que acaba a função?
> **Prof:** Será que é isso? Vamos pensar na situação real.

Esta aluna procurava dar um significado matemático (Voigt, 1994) negociado em aulas anteriores durante a resolução de exercícios de funções quadráticas nos quais, muitas vezes, o valor procurado correspondia ao máximo da função. A professora deu continuidade à discussão procurando negociar o significado (Wenger, 1998) de restrição desta função a este contexto específico.

> **Prof:** Podemos ter valores de raio negativo?
> **Y:** Não.
> (…)
> **Y:** x é maior ou igual a zero.
> **Prof:** Sim, vamos escolher a restrição da função, valor inicial, valor final.

Podíamos começar por colocar a função g, o valor inicial é maior ou igual a 0 e, que valor é que vocês acham que fazia sentido colocar no valor final? Não se esqueçam que aquele x na expressão está em metros. Que valor é que acham que podia ficar aqui? Podia por 10 metros?

> **S2:** Não 3,5.
> **Prof:** Não se esqueçam que o x está em metros.
> **S2:** Não, centímetros, mas a professora queria em metros?
> **Prof:** No máximo se calhar meio metro e mesmo assim ... era importante pensarem mais nesta questão.
> (…)
> **A:** As pás têm de ser grandes.
> **Prof:** Sim, mas não se esqueçam que o modelo que estamos aqui a desenhar já tem uma estrutura construída, e a estrutura tem que tamanho?

(…)
Y: A estrutura tinha 37 cm. Mas ainda não percebi porque é que temos que por 0,5.
Prof: Nós vamos ter que pensar nestas questões todas. Será que o comprimento destas pás pode ser meio metro?
S2: Não porque vai ser maior.
Y: É isso.
A: Que a estrutura de baixo.
Y: Senão vai bater no chão.
(…)
S2: Professora, mas por exemplo, onde está o 0,2 e ia bater ao 2,5, o que quer dizer o 2,5? É o tamanho?
Prof: Não o 2,5 que aqui está é ...
Y: É a potência, não é?
Prof: Sim é a potência produzida, e o 0,2 é o tamanho ...
S2: Da pá.

Embora a estrutura de suporte do rotor não estivesse presente fisicamente, esteve concetualmente presente, foi o artefacto mediador (Fernandes, 2013) que auxiliou a negociação conjunta (Wenger, 1998) de qual seria o valor máximo a colocar na restrição da função. Como esta era uma aula online a professora optou por criar salas simultâneas para que os dois grupos pudessem continuar o seu trabalho. A professora foi visitando as salas de modo a apoiar os grupos. O excerto que se apresenta de seguida diz respeito a uma dessas visitas.

Y: Professora isto estava já ficando aflita quando eu vi isto a ficar assim.
Prof: Porque estavam aflitas?
Y: Eu já estava triste eu pensei se a velocidade mínima está dando, tá assim tão pequenino (apontando para o gráfico da função) a gente vai ter que fazer uma miniatura de pás para aquela altura, não vai dar. E então à medida que fomos aumentando a velocidade foi aumentando aqui a capacidade, já estou mais descansada.
(…)
Prof: O que está aí no eixo dos xx é o tamanho das pás em metros. Se vocês tiverem 0.25 são 25cm, se tiverem 0.3 são 30 cm, olhem que umas pás de 30 cm para aquela estrutura já são bastante grandes.
A: é muito grande, eu acho que 20 cm está bom, ou menos.
(…)
A: Depois vamos ter que fazer uma análise deste gráfico.

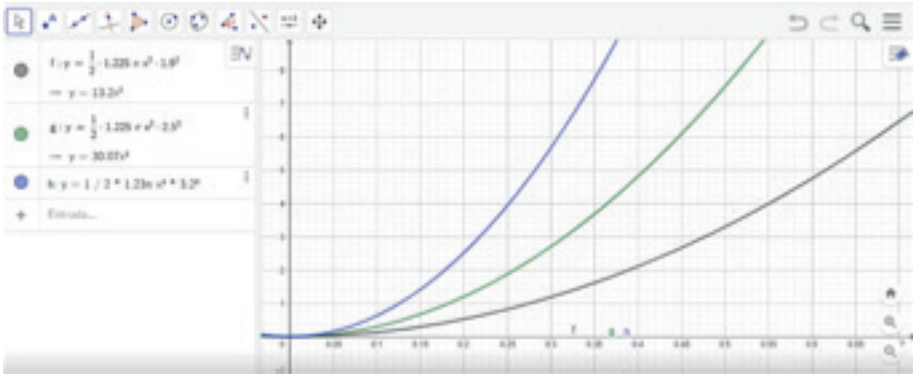


Figura 5. Representação gráfica das funções em estudo pelo grupo

> **Prof:** Sim, olhando para aí e tendo também em atenção que não podem esquecer o tamanho da estrutura.
> **Y:** Pois, por isso é que nós colocamos aqui estes valores de 0.05 em 0.05.

O estudo da função foi uma das ações (Leont'ev, 2004) levadas a cabo pelas alunas no sentido de responder à necessidade que sentiram em determinar o raio do rotor da turbina eólica. Mas, o motivo (Cenci & Damiani, 2018) que as manteve envolvidas na atividade foi efetivamente a vontade de construir e imprimir as pás do aerogerador que fossem bastante eficientes, como se pode constatar pela intervenção da aluna Y "Eu já estava triste, (…) a gente vai ter de fazer uma miniatura de pás". Como já tinham verificado que quanto maior o raio do rotor maior seria a potência eólica da turbina, queriam que as suas pás tivessem o maior tamanho possível.

Conclusões

As alunas envolveram-se de forma significativa na prática decorrente da implementação do CA pois tinham um objetivo (Leont'ev, 2004) muito bem definido – construir uma turbina eficaz. A participação nesta prática envolveu a negociação de significados (Wenger, 1988) inerentes à construção da turbina eólica, mas também de significados matemáticos (Voigt, 1994) relacionados com o conceito de função.
A utilização dos artefactos tecnológicos (GeoGebra, Zoom, estrutura do rotor) deram forma à atividade. Mas foram as pás que, apesar de durante muito tempo terem estado apenas concetualmente presentes, tiveram maior destaque em todo o processo de mediação (Vygotsky,1978). Este processo foi ativo e os artefactos presentes facilitaram formas de ação (Leont'ev, 2004), mas também as transformaram, pela forma como foram apropriados pelas alunas.
A metodologia de projeto foi também um artefacto mediador (Fernandes, 2013) da aprendizagem dos alunos e foi determinante na forma como se envolveram na prática. Ter lançado a 'grande ideia'- Vamos construir um Parque Eólico (Fernandes, 2016) em vez de vamos estudar a função quadrática, cúbica e trigonométrica - foi um aspeto importante na forma como a atividade se desenvolveu.

Referências bibliográficas

Amado, J. (2017). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (3ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto Editora.

Carroll, J. M. (1999). Five Reasons for Scenario-Based Design. In *Proceedings of the 32nd Hawaii Int. Conf. On System Sciences, Hawaii.* http:// citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.106.5310&rep=rep1&type=pdf

Cenci, A. & Damiani, M (2018). Desenvolvimento da Teoria Histórico-Cultural da Atividade em três gerações: Vygotsky, Leontiev e Engeström. *Roteiro 43,* (3), 919-948.

Fernandes, E. (Ed.) (2013). *Aprender Matemática e Informática com Robots.* Universidade da Madeira. *E-book.* www.cee.uma.pt/droide2/ebook/index.html.

Fernandes, E. (2016). O design de cenários de aprendizagem para a escola do futuro. In F. Gouveia, & G. Pereira, *Didática e matética* (258-265). CIE-UMa - Centro de Investigação em Educação.

Figueiredo, A. D. (2002). Redes de Educação: A Surpreendente Riqueza de um Conceito. In Conselho Nacional de Educação (Ed.), *Redes de Aprendizagem, Redes de Conhecimento* (39-55). Conselho Nacional de Educação.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation.* Cambridge University Press.

Leont'ev, A. (2004). *O Desenvolvimento do Psiquismo.* Centauro

Martins, S. (2016). *Aprendizagem de tópicos e conceitos matemáticos no 1.º Ciclo do Ensino Básico: Uma história com robots* (Tese de Doutoramento não publicada), Universidade da Madeira, Funchal, Portugal. https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/1562

Matos, J. F. (2014). *Princípios orientadores para o desenho de cenários de aprendizagem.* Instituto de Educação. http://ftelab.ie.ulisboa.pt/tel/gbook/wp-content/uploads/2017/05/cenarios_aprendizagem_2014_v4.pdf

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Vygotsky, L. M. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: learning, meaning and Identity.* Cambridge University Press.

CARTAZ | Uso do celular para fins pedagógicos: visão dos alunos e professores

POSTER | *Use of cell phones for pedagogical purposes: view of students and teachers*

Marêssa Silva dos Santos[1], Janaina de Souza[2], Thais Oliveira Duque

Resumo: O artigo aborda o estudo acerca do uso do celular como material didático, com um objetivo de verificar se professores utilizam a tecnologia como ferramenta didática e como o aluno se posiciona com o uso do celular para fins pedagógicos. Além de investigar o efeito da pandemia quanto ao uso da tecnologia. A metodologia utilizada se baseia em uma pesquisa quantitativa com abordagem descritiva e exploratória com o uso de um questionário on-line, a pesquisa foi desenvolvida através de aplicativos de rede socias. Obtendo como resultado que professores e alunos em sua maioria acreditam que o celular é um material didático eficaz.

Palavra-chave: Celular, Material didático, Tecnologia

Abstract

The article complements a study on the use of cell phones as teaching material, with the aim of verifying whether teachers use technology as a teaching tool and how the student positions himself with the use of mobile phone for teaching purposes. The methodology used is based on a quantitative research with a descriptive and exploratory approach with the use of an online questionnaire, the research was developed through social network applications. As a result, teachers and students mostly believe that the cell phone is an effective teaching material. The application of the questionnaires allowed us to have a view of how technology is inserted in the classroom, and what is the view of teachers and students on the subject.

Keywords: *Mobile, Courseware, Technology*

1. Instituto Federal de Minas Gerais, maressa_santos17@hotmail.com
2. Instituto Federal de Minas Gerais, janainasouza455.js@gmail.com

Introdução

O objetivo do trabalho foi verificar se os professores utilizam a tecnologia em sala de aula, e, qual o posicionamento do aluno sobre o uso do celular para fins pedagógicos, Além de investigar o efeito da pandemia quanto ao uso da tecnologia. O celular pode ser utilizado como uma ferramenta didática na qual auxilia o professor em sua prática docente, ao invés de vilão se torna um aliado no ensino aprendizagem. Corrobora Pacheco, Pinto E Petrocki (2017), que a utilização do celular como ferramenta didática é essencial, pois permite que os alunos acompanham e participam da evolução tecnológica além de facilitar a compreensão dos conteúdos e possibilita mais interesse em participar e aprender.

Para conseguir o objetivo foram criados questionários para professores e alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, que foram disponibilizados em aplicativos de rede socias, *WhatsApp* e *Facebook*, que teve como objetivo verificar opinião de discentes e docentes de como o aparelho celular interfere na sala de aula.

O questionário foi testado em novembro de 2019 com a participação de 9 professores e 47 alunos, após correção o questionário foi disponibilizado novamente no período de vinte a trinta de setembro do ano de 2020. Obtendo a participação de 70 alunos e 31 professores. Na figura 1 e na figura 2 é mostrado os questionários utilizados na pesquisa.

1) Gênero:	( ) Masculino ( ) Feminino
2) Formação acadêmica:	( ) Graduação ( ) Mestrado ( ) Pós Doutorado ( ) Especialização ( ) Doutorado
3) Em qual instituição fez a graduação?	______
4) Ano de Formação da graduação?	______
5) Qual e quando fez o último curso (especialização/aperfeiçoamento)?	______
6) Tempo de docência?	
7) Disciplina Lecionada?	______ Turma: ( ) Ensino fundamental, em quais turmas?______ ( ) Ensino médio, em quais turmas?______
8) Ministra aulas em escolas?	( ) Pública ( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Federal ( ) Particular
9) Trabalha em qual (is) turno (s):	( ) Matutino ( ) Vespertino ( ) Noturno
10) Idade:	( ) 20 anos a 30 anos ( ) 31 anos a 39 anos ( ) 40 anos a 60 anos ( ) Outra:______
11) Durante as aulas presencias você costuma utilizar o celular como material didático?	11) Durante as aulas presencias você costuma utilizar o celular como material didático? ( ) Não. Por que? ______ ( ) Sim, com qual frequência o uso do celular é permitido? Na sua opinião qual a melhor maneira de usar o aparelho celular como material didático. ______
12) Seus alunos estão utilizando o celular (dentre outros aparelhos) nas aulas do ensino remoto?	( ) Sim ( ) Não Se sim, qual o seu diagnóstico quanto ao foco e a interação. Quais as principais interferências?
13) Quando as aulas presencias voltarem, qual das tecnologias utilizadas neste momento de aulas remotas você pretende utilizar?	( )Celular ( ) Sala de aula virtual ( )Computador ( )Video aula ( ) Plataformas ( ) Outras: ______
14) Na sua visão de professor, o ensino remoto faz com que o aluno:	( ) Melhore sua capacidade de raciocínio individual ( ) Faz com que o aluno procure realmente aprender a matéria ( ) Trás desmotivação para o aluno ( ) Pode trazer abalos psicológicos ( ) Outras observações: ______
15) Quais ferramentas ou formas de aprendizagem você está utilizando nesse momento de ensino remoto?	( ) Video aulas no You tube ( ) Aulas sincronas (interação entre o professor e os alunos acontece em tempo real) ( ) Aulas assincronas (não é necessário que os alunos e professores estejam conectados ao mesmo tempo para que as tarefas sejam concluidas) ( ) Outras: ______

Figura 1 – Questionário professores Fonte: Próprios autores

1) Gênero:	( ) Masculino ( ) Feminino
2) Estuda em escola:	( ) Pública ( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Federal ( ) Particular
3) Idade:	R:
4) Está cursando:	( ) Ensino Fundamental ( ) 6º Ano ( ) 7º Ano ( ) 8º Ano ( ) 9º Ano ( ) Ensino Médio ( ) 1º Ano ( ) 2º Ano ( ) 3º Ano
5) Na escola onde você estuda o uso de celular é permitido?	( ) Sim ( ) Não
6) Em caso afirmativo, os professores utilizam os celulares como um instrumento para auxílio durante as aulas? Se sim em quais matérias?	( ) Sim ( ) Não R:
7) Existem regras para a utilização? E em quais momentos e atividades podem ser usados?	R:
8) Você acredita que o uso do celular pode ajudar no processo de ensino aprendizagem? Justifique.	R:
9)Você consegue acompanhar as aulas pela internet, com facilidade?	( ) Sim ( ) Não Se não qual a dificuldade encontrada?
10) Na sua opinião qual é o melhor tipo de ensino?	( ) Ensino Remoto ( ) Ensino Presencial Por que?
11) Com o uso dos celulares, tablets e computadores, facilitam muito o estudo remoto, apesar disso a falta de estar presente na sala de aula atrapalha um pouco na aprendizagem, qual é a parte mais difícil de estudar em casa?	( ) Dificuldade de acesso à internet. ( ) Falta de equipamentos ( ) Casa tumultuada ( )Não tem lugar para estudar ( )Não tem rotina ( )Tem que trabalhar ( )Ter que cuidar dos irmão ( ) Outros:
12)Quais são os fatores positivos, que você gostaria que fosse levado para o ensino presencial	
13)Você acha que com as aulas onlines você está sendo mais dedicado com os estudos? Justifique.	

Figura 2 – Questionário alunos Fonte: Próprios autores

Resultados

Questionário professores:

Os professores que utilizam celular como material didático afirmaram utilizar para: pesquisa para enriquecer seu conhecimento, registro de aulas práticas, elaboração e entrega de trabalhos, chamada dos alunos, utilização de app fonte de consulta. Destacando a seguinte resposta de uma docente “Com os alunos do ensino médio, com mais frequência do que com o ensino fundamental devida à maturidade. A utilização ocorre de acordo com o conteúdo previamente programado, utilizo para consultas de tabelas ou até mesmo para alguns cálculos, e caso ocorra alguma dúvida no decorrer da aula.”

Já os professores que não utilizam declaram que não havia necessidade, tem por hábito usar mais o quadro e apresentações e que utiliza outros recursos. Dando-se destaque as seguintes repostas: “não é pos-

sível, já que tira a concentração do aluno" e "não há wi-fi disponível e os alunos não possuem rede móvel".
De acordo com a pergunta sobre qual a visão do docente o que o ensino remoto faz com que os alunos acreditem que melhore sua capacidade de raciocínio individual, que faz com que procure realmente aprender a matéria, também podendo trazer desmotivação abalos psicológicos.
Ao verificar as ferramentas ou formas de aprendizagem que os docentes estão utilizando nesse momento de ensino remoto, vídeo aulas no Youtube, aulas síncronas, aulas assíncronas e outras ferramentas e formas de aprendizagem.

Questionário alunos:
De acordo com os discentes participantes, 61% estudam em escolas que permite o uso de celular para fins educacionais, enquanto 39% em escolas que não permite a utilização.
Ao perguntar se existem regras para a utilização? E em quais momentos e atividades podem ser usados? Os discentes afirmaram que sim, a grande maioria relatou que podem ser utilizados somente no recreio e quando o professor autoriza. Uma aluna afirmou "sim, pode ser usado apenas para pesquisar alguma dúvida que a professora não sabe responder na hora".
Sobre o discente acreditar que o uso do celular pode ajudar no processo de ensino aprendizagem. Um estudante relata "sim, pois eles auxiliam nas aulas tornando-as mais interativas e divertidas" e outra que "sim, pois ajuda a poder fazer pesquisas e aprofundar nas respostas".

Conclusão

O uso é feito para aprimorar os conhecimentos, elaboração e entregas de trabalho.
Na relação do ensino remoto pode-se concluir que os alunos preferem aulas presencias pois não consegue acompanhar as aulas no ensino remoto e os docentes em grande maioria afirmaram que os alunos apresentaram uma desmotivação.
O trabalho permitiu ter uma visão de como a tecnologia está inserida na sala de aula, e qual a visão de docentes e discente sobre o assunto. Ainda existe muitas barreiras quanto ao acesso, e, quanto á forma de inserção da tecnologia na sala de aula, outras pesquisas devem ser realizadas com a finalidade de clarificar as lacunas pertinentes ao estudo.

Referências bibliográficas

Pacheco, M. A. T., Pinto, L. R., & Petroski, F. R. (2017). O uso do celular como ferramenta pedagógica: uma experiência válida. In *EDUCERE – Congresso Nacional de Educação* (6363-6376).

CARTAZ | Resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais: o caso da professora Sofia

POSTER | *Mathematical problem solving with digital technologies: teacher Sofia's case*

Hélia Jacinto[1], Susana Carreira[2]

Resumo: Este cartaz reporta parte de uma investigação que visa compreender o papel e o impacto das tecnologias digitais nos processos de resolução de problemas desenvolvidos por professores de matemática experientes. O caso da professora Sofia revela que a tecnologia suporta o processo de resolver e exprimir a solução desenvolvida. O modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias permitiu concluir que os processos "integrar" e "explorar" são fundamentais ao sucesso da atividade e surgem de forma cíclica. O use combinado de conhecimento matemático e da tecnologia promove avanços no desenvolvimento do modelo conceptual até à obtenção da solução tecno-matemática.

Palavras-chave: Resolução de problemas de matemática; Modelo RPMT; Professores de matemática; Tecnologias digitais.

Abstract: *This poster reports part of an investigation that aims to understand the role and impact of digital tools in the problem solving processes developed by experienced mathematics teachers. Teacher Sofia's case reveals that technology supports the process of solving and expressing the solution developed. The Mathematical Problem Solving with Technology model allowed to realize that the processes "integrate" and "explore" are fundamental to the success of the activity and they emerge in a cyclic way. The combined use of mathematical and technological knowledge promote advancements in the development of a conceptual model, until obtaining a techno-mathematical solution.*

Keywords: *Mathematical problem solving; MPST model; Mathematics Teachers; Digital technologies.*

1. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, hjacinto@ie.ulisboa.pt
2. FCT, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.p

Enquadramento teórico

Desafiando conceções que remetem a tecnologia para auxiliar pedagógico ou fonte de motivação, Borba e Villarreal (2005) consideram que os processos mediados por tecnologias produzem alterações profundas na forma de aprender. Através da noção de humanos-com-media, conceptualizam esse poder transformador das tecnologias com as quais se pensa e se age, em que o sujeito é considerado uma unidade indivisível humano-e-ferramenta. Sinclair (2020) discute as possibilidades de interação entre o sujeito e os conceitos matemáticos, em ambiente digital, e defende que não é possível estabelecer uma fronteira clara entre as ações e os pensamentos que as tecnologias espoletam.

Resolver problemas com tecnologias é, aqui, considerada uma atividade de matematização que envolve conceber uma forma produtiva de lidar com a situação desafiadora (Lesh & Zawojewski, 2007) e implica adotar um ponto de vista para criar uma solução que envolve conhecimento matemático e tecnológico. O desenvolvimento de modelos conceptuais é consistente com a ideia de uma atividade de matematização progressiva, onde um modelo de uma situação particular evolui e torna-se num modelo para explicar ou justificar matematicamente a solução (Gravemeijer, 2005). Como o modelo conceptual encerra o pensamento matemático desenvolvido com a tecnologia, torna-se desafiante estabelecer uma fronteira entre as fases de resolução e de explicação do processo. Com frequência, estão tão interligadas que resolver-e-exprimir resume o processo síncrono de matematização e expressão do pensamento matemático (Jacinto & Carreira, 2017).

Silva et al. (2021) discutiram as formas de pensar-com-tecnologia desenvolvidas por professores-com-media, concluindo que o *GeoGebra* e a folha de cálculo influenciaram a exploração do problema em termos visuais e também numérica e experimentalmente. Por seu lado, Hernández et al. (2020) investigaram futuros professores a resolver problemas no *GeoGebra*. Concluíram que a tecnologia permitiu a articulação de diferentes abordagens e o recurso a estratégias de monitorização, nomeadamente avaliando a solução e encontrando suporte para conjeturas, e que os futuros professores utilizaram várias ferramentas e capacidades.

Metodologia de investigação

Este estudo qualitativo envolveu cinco professores de Matemática com larga experiência de lecionação e de utilização de tecnologias nas suas aulas de Matemática. Os dados foram recolhidos por entrevista individual, através do *Zoom*, em que os professores foram convidados a escolher e resolver um dos problemas de matemática disponibilizados, podendo usar a tecnologia da sua preferência. Foi utilizado o protocolo ‘pensar em voz alta’ e a partilha dos ecrãs possibilitou registar ações e falas. Recolheram-se ainda os ficheiros digitais produzidos. Neste cartaz apresentamos os aspetos mais revelantes da atividade de uma das participantes no estudo, a professora Sofia.

A codificação e a análise dos dados basearam-se no modelo descritivo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias (Figura 1)

(Jacinto & Carreira, 2017), sendo que procurámos identificar eventos críticos (Powel et al., 2003) nas falas e nas ações que permitissem segmentar a atividade de resolução-e-expressão.

Captar	Apropriação da situação e das condições do problema, ideias iniciais envolvidas. (Ler[a]; Definir[b])o	Comunicar - Interagir com outros de relevo enquanto lida com o problema ou tarefa. (Comunicação[b])
Identificar	Tentativa inicial de compreender o que está em causa, nomeadamente a matemática que pode ser relevante e as ferramentas digitais que podem ser necessárias. (Análise[a]; Identificação[b], Acesso[b]).	
Interpretar	Percecionar possibilidades de ação com os recursos tecnológicos para ponderar formas matemáticas de abordar a solução. (Análise[a]; Avaliação[b], Interpretação[b]).	
Integrar	Combinar recursos matemáticos e tecnológicos no âmbito de uma abordagem exploratória (Exploração[a]; Organização[b], Integração[b]).	
Explorar	Utilizar recursos matemáticos e tecnológicos para explorar modelos conceptuais que podem conduzir à solução (Exploração[a]; Análise[b]).	
Planear	Delinear uma abordagem para alcançar a solução com base na análise das conjeturas exploradas. (Planear e Implementar[a]; Síntese[b]).	
Criar	Executar a abordagem delineada, recombinando recursos de novas maneiras que permitirão obter a solução, e criar novos objetos de conhecimento, unidades de informação ou outros resultados que contribuirão para resolver-e-exprimir o problema. (Planear e Implementar[a]; Criar[b]).	
Verificar	Envolver-se em atividades para explicar ou justificar a solução obtida com base nos recursos matemáticos e tecnológicos. (Verificação[a]).	
Disseminar	Apresentar a solução ou os resultados a outras pessoas relevantes e considerar o sucesso do processo de resolução de problemas. (Verificação[a]; Reflexão[b], Disseminação[b]).	

[a] estádio de resolução de problemas matemáticos, conforme proposto por Schoenfeld (1985)
[b] processos de resolução de problemas digitais, tal como proposto por Martin & Grudziecki (2006)

Figura 1. Modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias (RPMT; Jacinto & Carreira, 2017).

Resultados

Sofia escolheu o problema "Quanto dura a bateria" (Figura 2) por lhe parecer o mais desafiante, embora acessível. Escolheu usar o *Excel*, onde procedeu ao teste de várias hipóteses. A resolução desenvolveu-se à medida que essas experiências permitiam aprofundar a compreensão das condições, das variáveis e das relações envolvidas. A constante monitorização do trabalho revelou as capacidades metacognitivas de Sofia, imprescindíveis ao desenvolvimento da sua abordagem (Hernández et al., 2020).

Desafio C: Quanto dura a bateria

A Leonor pediu à mãe a câmara de vídeo para filmar o ensaio geral da peça de teatro que está a preparar com os seus colegas no clube de teatro. Ela sabe que a bateria da câmara dura 2 horas se estiver em modo de gravação e 3 horas se estiver em modo de reprodução. A Leonor quer gravar o ensaio e logo a seguir visionar o vídeo gravado com os colegas e não pode voltar a carregar a bateria. Qual é o tempo máximo, em minutos, que ela poderá gravar do ensaio para conseguir visionar tudo o que gravou, logo depois?

Não se esqueça de explicar o seu processo de resolução!

Figura 2. Problema "Quanto dura a bateria" (adaptado de SUB14)

Através do modelo RPMT observou-se que a resolução do problema decorreu por meio de microciclos entre vários processos. Inicialmente,

sucedem-se ciclos entre os processos integrar-interpretar com o *Excel* que promovem um melhor entendimento das condições e relações existentes. Posteriormente, o ciclo integrar-explorar-interpretar permite o teste de casos particulares familiares (modelo de), fundamentais na procura e refinamento de um modelo mais geral para obter a solução (modelo para). O modelo conceptual evolui à medida que os ciclos integrar-explorar desvendam relações mais sofisticadas entre as variáveis, evidenciando uma matematização progressiva (Gravemeijer, 2005).
A tabela criada no *Excel* foi utilizada tanto como recurso para resolver como para exprimir o raciocínio já que foi inserida na explicação dos processos seguidos (Figura 3). A atividade de resolver-e-exprimir-com-tecnologias também fica patente pelo facto de Sofia verificar o seu raciocínio com regularidade, reforçando a ideia de que o resolver está intimamente relacionado com o exprimir.

Conclusão

O modelo RPMT permitiu examinar com detalhe o papel dos recursos tecnológicos e matemáticos utilizados pela professora. A tecnologia revelou-se muito relevante em toda a atividade de resolução do problema e de expressão do pensamento matemático, especialmente quando a sua utilização foi combinada de forma eficiente com conhecimentos matemáticos apropriados. O uso combinado de recursos tecnológicos e matemáticos no seio dos microciclos integrar e explorar potenciou o desenvolvimento do modelo conceptual e a obtenção de uma solução tecno-matemática.

Problema

Primeiro calculei a percentagem da bateria que ficava disponivel após a gravação.

Com exemplo de gravar uma hora ficava outra hora disponivel, o que correspondia a 50% da bateria, pois a câmara só dava para gravar 2 horas. Depois sabendo que a câmara dava para visionar 3 horas quando a bateria estava a 100%, sabia que estando a 50% daria para 1 hora e 30 minutos.

Depois generalizei esta parte, calculando a percentagem de bateria que sobrava após a gravação (1-tempo gravado/2).

De seguida multiplico a percentagem de bateria que sobra pelas 3 horas para saber que parte das 3 horas posso usar.

O tempo visionamento não pode ser inferior ao tempo de gravação, senão não consigo ver tudo o que gravei.

Para gravar o máximo que podia ver fiz experiências com o Excel até o tempo de gravação ser igual ao de visionamento.

Falta agora uma fórmula matemática para chegar a este valor (1,2 horas de gravação).

Gravação	Visionamento	%bateria	visionar
2	3		
1	1,5	50%	1,5
1,5		25%	0,75
1,1		45%	1,35
1,2		40%	1,2

Figura 3. Relato da resolução do problema, elaborado por Sofia no editor de texto.

Referências bibliográficas

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking.* Springer.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*, (pp. 83–101). APM.

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2020). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51* (2), 208-223.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical problem solving with technology: the Techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1115–1136.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* pp. 763–804. IAP and NCTM.

Powell, A., Francisco, J., & Maher, C. (2003). Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes, *Bolema, 17* (21), 81-140.

Sinclair, N. (2020). On teaching and learning Mathematics–Technologies. In Y. Kolikant, D. Martinovic & M. Milner-Bolotin (Eds.), *STEM Teachers and teaching in the Digital Era* (91-107). Springer.

Silva, R, Barbosa, L., Borba, M., & Ferreira, A. (2021). The use of digital technology to estimate a value of Pi: Teachers' solutions on squaring the circle in a graduate course in Brazil, *ZDM Mathematics Education*, *53*, 605–619.

Simpósio de Comunicações 5
Communication Symposiums 5

XXXI SIEM
seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

Práticas na aula de matemática: tarefas que desafiam

Practices in math classroom: challenging tasks

Alexandra Souza[1], Margarida Rodrigues[2]

Resumo: A ênfase colocada na realização de tarefas desafiantes responsabiliza o professor pela seleção, adaptação ou construção de tarefas que possam servir os propósitos de um ensino exploratório, considerando-as como oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos. Neste texto analisamos as reflexões de 5 professoras do 1.º ciclo, participantes num estudo de aula, a partir das quais procuramos compreender como é que analisam tarefas selecionadas, com o critério de serem desafiantes, a partir do ponto de vista das dificuldades dos alunos e das estratégias usadas. Os dados foram recolhidos por observação participante, com gravação áudio das sessões de trabalho, recolha documental e recurso a um diário de bordo. Os resultados apontam para a importância dos enunciados das tarefas e para a antecipação de dificuldades e de estratégias como fatores determinantes no efeito da tarefa. Este processo também favoreceu a reflexão colaborativa sobre as aprendizagens dos alunos e, assim, estas professoras desenvolveram o seu conhecimento didático sobre a escolha e adaptação de tarefas, fatores que contribuíram para o seu desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: Tarefas; Ensino Exploratório; Estudo de Aula; Desenvolvimento profissional.

Abstract: *The emphasis placed on performing challenging tasks makes the teacher responsible for the selection, adaptation or construction of tasks that can serve the purposes of exploratory teaching, considering them as learning opportunities offered to students. In this paper we analyze the reflections of 5 teachers from primary school, taking part in a lesson study, from which we seek to understand how they analyze tasks selected with the criterion of being challenging, from the point of view of students' difficulties and the strategies used. Data were collected by participant observation, with audio recording of the work sessions, documentary collection and use of a logbook. The results point to the importance of the statements of the tasks and to anticipation difficulties and strategies as determining factors in the effect of the task. This process also favored collaborative reflection on students' learning*

1. UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, paralexandra@gmail.com
2. Eselx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

and, thus, these teachers developed their didactical knowledge about the choice and adaptation of tasks, factors that contributed to their professional development.

Keywords: *Tasks; Exploratory Teaching; Lesson Study; Professional development.*

Introdução

Em Portugal, as orientações curriculares vigentes (Aprendizagens Essenciais e Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico) colocam enormes desafios às escolas e ao professor, exigindo uma profunda reflexão em torno das práticas pedagógicas e didáticas, de modo a permitir uma maior eficácia em termos das aprendizagens e da qualidade das mesmas, numa perspetiva inclusiva e de equidade. Estes desafios também impõem que as questões da autonomia e flexibilidade curricular sejam trabalhadas pela comunidade, num contexto colaborativo, que promova a reflexão sobre as necessidades dos alunos – conhecimentos, capacidades, atitudes e valores, e as respostas da escola para estas necessidades. Assim, importa compreender como é que o estudo de aula (EA) com professores do 1.º ciclo poderá contribuir para esta mudança, promovendo o desenvolvimento profissional de professores, nomeadamente na escolha de tarefas desafiantes. É nossa convicção que o EA poderá apoiar os professores a implementar com maior regularidade situações de aprendizagem de natureza exploratória, práticas que consideramos mais ajustadas às atuais exigências curriculares, na medida em que a aprendizagem decorre do trabalho que os alunos desenvolvem a partir de tarefas matemáticas desafiantes e das possibilidades de partilhar e discutir as suas ideias com os outros alunos e professores. Do mesmo modo, entendemos que o EA, pelas suas características, pode ser o suporte necessário para os professores refletirem colaborativamente sobre as suas práticas em sala de aula, tendo como foco principal as aprendizagens dos alunos (Fujii, 2016) e, assim, sentirem-se apoiados a empreenderam mudanças nas suas práticas de trabalho.

Neste artigo analisamos as reflexões de 5 professoras do 1.º ciclo, participantes num EA, a partir das quais procuramos compreender como é que analisam tarefas selecionadas de manuais, com o critério de serem desafiantes, a partir do ponto de vista das dificuldades dos alunos e das estratégias usadas. Essas reflexões foram realizadas antes ou após a implementação dessas tarefas. Objetivamente, pretendemos compreender que dificuldades dos alunos identificaram e como foram superadas, que estratégias anteciparam e se os alunos corresponderam, e como todo este processo de seleção e adaptação de tarefas contribuiu para o seu desenvolvimento profissional.

Estudos de Aula

Nos últimos anos têm sido realizados alguns EA adaptados ao contexto português. Segundo Murata (2011), este processo de desenvolvimento profissional, com origem no Japão, permite aos professores implementarem trabalho de cunho colaborativo, caracterizado pela partilha de objetivos, discussão de ideias e construção de recursos de ensino, criando oportunidades de aprendizagem mútua em que podem compartilhar e desenvolver os seus conhecimentos. O EA decorre em várias etapas interrelacionadas - planificação, implementação, observação e reflexão sobre as aulas – que se constituem num ciclo, podendo ter um único ciclo ou vários.

Os professores, quando participam num EA, procuram através de trabalho colaborativo e reflexivo aperfeiçoar as suas práticas letivas de modo a contribuir eficazmente para a superação das dificuldades dos alunos identificadas em determinado tópico ou objetivo. Para o efeito, tentam fazer um diagnóstico preciso, fundamental para identificar corretamente estas dificuldades, de modo a reunir informação pertinente (documentos curriculares, estratégias e materiais de ensino disponíveis e resultados da investigação) que possa apoiar as opções tomadas. Suportados pela informação reunida, planificam com minúcia uma aula sobre o tópico em questão, que é lecionada por um dos professores do grupo. Esta aula, denominada “aula de investigação” (AI), é observada por todos os outros participantes, que focalizam a sua atenção no trabalho dos alunos, nomeadamente nas estratégias usadas para a resolução das tarefas e nas dificuldades evidenciadas. De seguida, e com base na informação recolhida, refletem sobre todo o processo e, se for caso disso, introduzem adaptações (Ponte et al., 2017).

Em Portugal, os estudos de aula estão muito associados a um ensino de cariz exploratório (Ponte, 2005), mas mantêm a estrutura base e todo o investimento realizado na etapa de planeamento, subjacente à preparação da AI. O ponto de partida é sempre uma questão de interesse comum para o grupo de participantes, muito associada a dificuldades de aprendizagem dos alunos em determinado tópico. Neste planeamento, os professores consideram as orientações curriculares da disciplina, os resultados de investigações relacionadas com o tópico e as aprendizagens dos alunos, e mobilizam o seu conhecimento profissional (Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002). São escolhidas e preparadas tarefas que permitam fazer um diagnóstico prévio do conhecimento dos alunos e das suas dificuldades. São analisados os resultados e discutidas questões de natureza didática, de modo a conseguir planificar com grande detalhe a AI, que vai ser objeto de reflexão. Esta planificação cuidada faculta ao professor alguma antecipação aos eventuais acontecimentos, apoiando a sua ação no decurso da aula.

Todo este planeamento da AI exige trabalho colaborativo e reflexivo e implica a mobilização do conhecimento profissional do professor, com base na centralidade do conhecimento da prática letiva, conforme é apresentado em Ponte (2012).

Tarefas

É consensualmente aceite que o ensino exploratório da Matemática promove “aprendizagens matemáticas ancoradas na compreensão e na construção do conhecimento com significado, a partir do trabalho realizado sobre tarefas desafiantes” (Canavarro, 2013), mas que esta é uma prática exigente, sendo necessário um trabalho continuado e persistente por parte do professor. A prática do ensino exploratório começa com a seleção destas tarefas para a sala de aula.

Nesta perspetiva, o ensino que valoriza o papel ativo do aluno na aprendizagem considera que as tarefas são o suporte fundamental do ensino-aprendizagem e a condução da sua resolução na sala de aula “o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos estudantes” (Christiansen & Walther, 1986, p. 3). Neste pressuposto, as tarefas devem ter um grau de desafio ao alcance dos alunos, ou “usando a popular expressão de Lev Vygotsky, que se situem na “zona proximal de desenvolvimento” dos alunos” (Ponte, 2014, p. 5) e estimulá-los a mobilizarem os seus conhecimentos e a apresentarem soluções originais, fazendo uso de diferentes estratégias e representações matemáticas.

As características de cada tarefa determinam as potencialidades para os alunos se envolverem cognitivamente na sua resolução. Considerando os diferentes tipos de tarefas que um professor pode propor, Ponte (2005) classifica-os de acordo com a variação entre duas dimensões - grau de estruturação e grau de desafio - originando quatro quadrantes com propriedades distintas, a que podemos associar diferentes tipos de tarefa: exercícios, problemas, explorações e investigações. Para este autor, o que distingue os exercícios dos problemas não é só o seu grau de desafio, classificação um pouco subjetiva, mas sim, o facto de os alunos conhecerem ou não um processo para os resolverem. Ainda que no 1.º ciclo as tarefas mais comuns sejam os exercícios (tarefas rotineiras de grau de desafio reduzido) e os problemas (tarefas não rotineiras de grau de desafio mais elevado), a diversificação de tarefas é necessária porque cada um destes tipos de tarefa tem propósitos diferentes em Matemática, sendo todos importantes para os fins que preconizam (Ponte, 2005).

Na resolução de problemas os alunos enfrentam dificuldades que podem ser superadas com o recurso a diversas estratégias, já identificadas e referidas em Boavida et al., (2008), como: (i) fazer uma simulação/dramatização; (ii) fazer tentativas; (iii) reduzir a um problema mais simples; (iv) descobrir um padrão; (v) fazer uma lista organizada; e (vi) trabalhar do fim para o princípio, as quais podem ser aplicadas a diferentes problemas. Estas autoras acrescentam ainda que, em combinação com estas estratégias, os alunos também podem recorrer a diferentes representações como: desenhos, esquemas ou tabelas.

A antecipação das dificuldades dos alunos e das suas estratégias preferidas fornecem ao professor elementos que lhe permitem definir ações concretas, suportadas pelo seu conhecimento profissional, quer para intervir em situações de bloqueio dos alunos, quer para tirar partido dessas mesmas situações e assim conseguir fazer uma gestão mais eficaz da aula.

Aspetos metodológicos

Tendo em conta a importância da experiência vivida pelas participantes, adotámos uma abordagem interpretativa a partir dos dados que foram recolhidos no terreno, para através de uma análise indutiva contribuir para uma descrição e compreensão da mesma (Bogdan & Biklen, 1994).

Optámos por trabalhar com professores do mesmo nível de ensino, da mesma escola e a lecionar o mesmo ano de escolaridade. Esta investigação resulta da realização de um EA numa escola do 1.º ciclo de Lisboa, no ano letivo de 2019-20[1], com quatro professoras que lecionavam o 2.º ano de escolaridade e uma professora que fazia apoio a estas turmas. As sessões foram dinamizadas pela primeira autora deste artigo (Inv1), com o apoio dos orientadores, um dos quais é a coautora deste artigo (Inv2). A realização desta investigação foi autorizada pela direção do Agrupamento e as participantes consentiram a gravação de todas as sessões.

As 5 professoras que integraram este primeiro EA, e a quem atribuímos pseudónimos, são professoras consideradas experientes, com 18 ou mais anos de serviço docente no 1.º ciclo e que estavam motivadas para participar.

Na totalidade foram realizadas 19 sessões, com uma duração ajustada ao propósito das mesmas (entre 1 e 3 horas), que constituíram uma oficina de formação creditada. As sessões seguiram o planeamento normal de um EA, com a ressalva que se realizaram 4 aulas de investigação diferentes, cada uma dinamizada pela respetiva professora da turma. Para aprofundamento neste EA, o grupo de professoras elegeu a resolução de problemas, considerando-a uma atividade relevante na aprendizagem da matemática, transversal a todos os domínios e na qual os alunos revelam muitas dificuldades.

Os dados aqui analisados provêm das sessões de trabalho conjunto das professoras e incidem sobre a análise de quatro tarefas. Os dados da primeira e segunda tarefa referem--se apenas a episódios após a sua implementação. Os restantes foram recolhidos em sessões antes e após a implementação das tarefas. Destas, só a tarefa “Fazer colares” foi usada numa aula de investigação. Os dados foram recolhidos por observação participante com a elaboração de um diário de bordo, recolha documental e gravação áudio de todas as sessões.

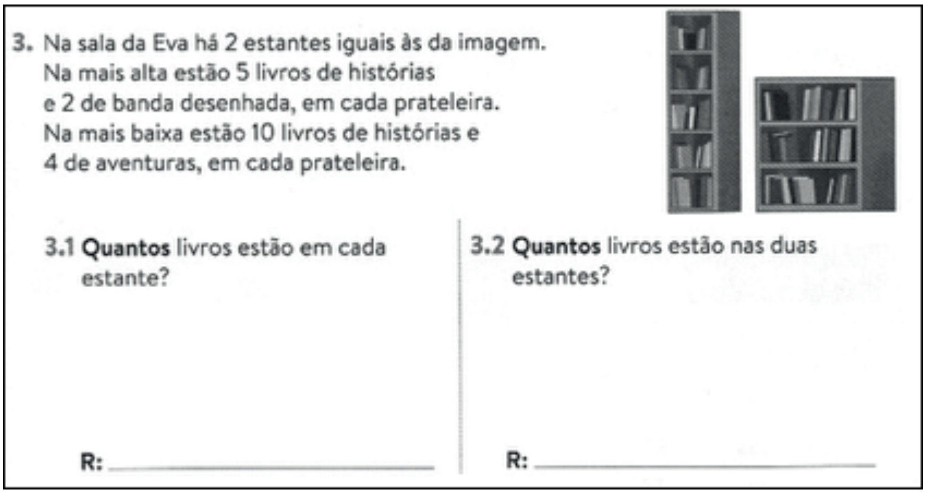
A análise das transcrições das gravações permitiu fazer uma análise indutiva dos dados e, relativamente à análise das tarefas efetuada pelas professoras, identificar elementos significativos que facilitaram a elaboração de um quadro analítico, ainda em construção, com base nas dificuldades dos alunos encontradas ou antecipadas e como as ultrapassaram, nas estratégias usadas ou previstas e como as valorizaram, e perceber como todo este processo contribuiu para o seu desenvolvimento profissional.

Resultados

Neste estudo, em que o foco de análise incidiu sobre as tarefas, as professoras privilegiaram a escolha de problemas com elevado grau

1. O estudo de aula estava projetado para o ano letivo 2019-2020, mas devido à suspensão das atividades letivas determinadas pelo Decreto-Lei n.º 10-A/2020, de 13 de março, por força da situação pandémica relacionada com a COVID-19, as sessões foram interrompidas em março e só retomadas em setembro, tendo o EA sido concluído em novembro 2020, no ano letivo 2020-2021.

de desafio, que estivessem relacionados com os domínios/conteúdos abordados ao longo do tempo.
O excerto apresentado resume parte de um episódio em que se identificaram as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de uma tarefa selecionada do manual[2] (p. 111) e as estratégias de superação usadas.



3. Na sala da Eva há 2 estantes iguais às da imagem.
Na mais alta estão 5 livros de histórias e 2 de banda desenhada, em cada prateleira.
Na mais baixa estão 10 livros de histórias e 4 de aventuras, em cada prateleira.

3.1 **Quantos** livros estão em cada estante?

R: ____________

3.2 **Quantos** livros estão nas duas estantes?

R: ____________

Figura 1. Tarefa selecionada.

> Inv1: Porque achas que houve muitas dificuldades neste problema?
> Rute: Porque eram muitos dados, eles baralhavam-se. Porque eles faziam quanto é que tinha cada uma das prateleiras e não multiplicavam. Eles faziam esta soma e esta.
> Inv1: Portanto fizeram somas. Somaram só as primeiras. Chegaram ao número de livros por prateleira.
> (...)
> Tina: Eles bloquearam na leitura deste problema.
> Ema: Era muito texto.
> Rute: Com muitos dados...
> Tina: Eu, se calhar condicionei-os um bocadinho, não lhes dei o tempo suficiente para pensarem um bocadinho melhor. Fiz-lhes a explicação no quadro, com um esquema que representava a imagem do livro.
> (...)
> Inv1: Neste, o das estantes, a maioria dos grupos precisou de um empurrãozinho, de um desbloqueio. A vossa ideia é que tem muita informação e, portanto, foi difícil para eles operacionalizarem.
> Rute: A informação não é a mais, os dados são todos necessários, mas acho que era o facto de terem de recorrer aos dois registos: ao texto e à imagem, que baralhava um pouco. Eles só sabiam o número de prateleiras se olhassem para a imagem. Esta informação não estava no texto.

As professoras reconheceram que a tarefa apresentava um grau de dificuldade elevado para este ano de escolaridade, acentuado pela quantidade de informação, distribuída por duas fontes: o texto e a imagem. Ajudar os alunos na leitura e apoiar com um esquema visual no quadro foram algumas das estratégias usadas para superar as dificuldades e desbloquear a situação. A pronta intervenção da professora Tina, reconhecida pela própria, pode ter impedido que alguns alunos com-

2. Gonçalves, H., & Mestre, C. (2019). Plim! Matemática- 2.º ano. Texto.

preendessem o problema por si e desenvolvessem um plano de resolução autónomo.

A passagem seguinte condensa parte de outro episódio, na mesma sessão, com outra tarefa também do manual (p.97).

As professoras reconheceram que a tarefa apresentava um grau de dificuldade elevado para este ano de escolaridade, acentuado pela quantidade de informação, distribuída por duas fontes: o texto e a imagem. Ajudar os alunos na leitura e apoiar com um esquema visual no quadro foram algumas das estratégias usadas para superar as dificuldades e desbloquear a situação. A pronta intervenção da professora Tina, reconhecida pela própria, pode ter impedido que alguns alunos compreendessem o problema por si e desenvolvessem um plano de resolução autónomo.

A passagem seguinte condensa parte de outro episódio, na mesma sessão, com outra tarefa também do manual (p.97).

Resolvo problemas

O Rui tem 6 periquitos. Todos os dias dá 3 folhas de alface a cada 2 dos seus periquitos.
Quantas folhas de alface lhes dá por dia?

Figura 2. Tarefa selecionada.

> **Rute:** Eu tive alguns a errar porque eles não liam tudo. Eles liam assim: "todos os dias dá 3 folhas de alface a cada" e já não liam o resto.
> **Clara:** O primeiro problema que eu detetei, neste problema foi a interpretação, porque eles leem que é para dar 3 folhas de alface a cada periquito. Depois tenho estas duas meninas que diziam, nós sabemos que dá nove, mas não conseguimos lá chegar; não conseguimos explicar. Então se não conseguem de outra maneira, façam desenhos, façam como quiserem. E elas aí, partiram para o desenho e foram as únicas que me deram o resultado certo, porque todos os outros diziam-me que era 18.

A leitura volta a ser identificada como o fator condicionante e, no caso em apreço, as professoras atribuem à falta de atenção por parte dos alunos.

> **Clara:** Até que eu disse: "Leiam bem o que é que diz. Explica aí que não são 3 folhas para cada um, leiam com atenção." Depois já começaram a perceber.
> (...)
> **Flor:** Eu tive muitas representações diferentes, mas tudo na base do desenho, em esquema.
> **Inv2:** Pois, mas é natural aqui precisarem de um esquema.
> **Tina:** Este aqui fez de uma maneira diferente: 2 periquitos ganham 3 folhas, mais 2 periquitos ganham 3 folhas, mais 2 periquitos ganham 3 folhas; 3X3=9. Foi por etapas, escreveu mesmo as frases e depois

fez a multiplicação.
Inv2: Então, e quando eles encontraram dificuldade a interpretar, como é que ultrapassaram aqui a questão de ser a cada 2? Como é que fizeram?
Tina: Tivemos que ser nós a reforçar que não era uma folha para cada um. Tem que haver alguns elementos desbloqueadores. Eles não leem tudo.
Inv2: Mas depois de lerem, conseguem?
Flor: Eu, por acaso até achei que mesmo os que leram tudo não perceberam bem como é que iam dar 3 folhas a cada 2 periquitos. Só quando nós dissemos, se não conseguem de outra maneira, façam com desenhos, é que ajudou. Eu acho que o começarem a desenhar é que ajudou a desbloquear. Eu tenho alguns que leram tudo, mas não estavam a encontrar uma conta que desse para resolver.
Ema: Eles dizem mesmo que sabem a resposta, mas não sabem como é que vão mostrar... Eles dizem mesmo: "Qual é a conta que vou fazer? Eu sei, mas não sei qual é a conta."
Flor: Foram os esquemas que os ajudaram a perceber.

A dificuldade dos alunos em conseguirem resolver por processos de cálculo conhecidos foi outra condicionante, ultrapassada pelo incentivo a usarem outras representações como forma de apresentação da situação proposta.

Flor: Mais do que o das prateleiras, ou outro, este foge mais ao padrão.
Inv2: E acaba por exigir uma maior abstração. É natural eles terem de se ancorar com o desenho.
Flor: É isso que nós notamos, agora que estamos a preparar os testes, eu fui ver os testes que tínhamos feito com as outras turmas e nada se adapta já.
Inv1: Quando tu dizes "nada se adapta"?
Flor: É de menos, comparativamente.
Inv2: Mas a que atribui?
Flor: O grupo não é seguramente melhor. Se calhar somos nós...
Clara: O nosso grau de exigência está cada vez maior.
Rute: O programa é o mesmo.
Flor: Eu acho que nós vamos aprofundando cada vez mais...
Tina: Nós vamos dominando cada vez melhor os conteúdos, vamos aprofundando e trabalhamos de maneira diferente.
Ema: Com as outras turmas o programa era novo, havia umas certas inseguranças. As provas de aferição trouxeram uma diversidade de problemas muito grande, que fomos gradualmente introduzindo nas nossas práticas.

Reconhecem que estão cada vez mais exigentes e que essa exigência resulta de uma maior confiança nos processos e, também, de alterações que, ao longo do tempo, foram introduzindo nas suas práticas, umas motivadas por fatores externos: a diversidade de exercícios das provas de aferição e as alterações programáticas e outras por fatores internos: maior conhecimento dos conteúdos, aprofundamento do seu conhecimento didático, o que lhes dá confiança para fazerem diferente. Assim, consideram que propõem agora tarefas mais desafiantes com-

parativamente àquelas que propunham em anos anteriores.
Descreve-se em seguida parte do trabalho de antecipação das estratégias de resolução dos alunos para uma tarefa proposta pela investigadora e escolhida de um livro[3] (p. 10).

1 – A semanada a dobrar

O pai do Diogo resolveu, durante 4 semanas, dar-lhe um prémio: a sua semanada era sempre o dobro da semana anterior.

Se na primeira semana o Diogo recebeu 6€, com quanto dinheiro ficou no fim de 4 semanas?

Figura 3. Tarefa proposta.

> **Inv1:** E como é que acham que eles iriam resolver este problema?
> **Flor:** 1.ª semana 6, 2.ª semana 12, 3.ª semana 24, 48 e, depois no fim tinham que somar tudo.
> **Clara:** Começavam no 6, depois 6+6, depois 12+12, 24+24 e depois somavam tudo.
> **Rute:** Pra já, eles não vão ler o dobro.
> **Ema:** Talvez alguns façam 2X6, 2X12, 2X24.
> **Rute:** Alguns vão fazer sempre o 12, vão fazer 6 mais o dobro, mais o dobro, mas o dobro do 6.
> **Tina:** Alguns dos meus vão ficar a meio do problema, chegam ao 48, mas depois não somam os valores das 4 semanas.
> **Flor:** E alguns não vão saber o que é o dobro.
> **Inv1:** Mas é o que andam a trabalhar agora, certo? Os dobros e as metades!?

As professoras antecipam alguns casos de sucesso com base em raciocínios aditivos e talvez multiplicativos e outras situações menos conseguidas, atribuídas a planos incompletos, devido a esquecerem-se de fazer o último passo. Para os casos de insucesso, reforçam a falta de atenção na leitura e a inconsistência no conceito de dobro.
Esta discussão e antecipação das estratégias teve em conta o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem e avançou possíveis casos.
Na sessão seguinte foram analisadas as resoluções dos grupos e confirmaram-se algumas das expectativas das professoras. Um erro comum foi conseguirem calcular o dobro e esquecerem-se de juntar os 4 valores, apresentando 48 como o valor final. Alguns não calcularam o dobro e adicionaram sempre 6 ao número anterior, apresentando 24 como resultado. Outros realizaram a tarefa sem dificuldades, calculando os valores corretos para cada semanada e adicionando os 4 valores no final. Pelos cálculos escritos não se conseguiu perceber se usaram a multiplicação ou a adição de parcelas iguais, porque apresentaram apenas o valor total de cada cálculo intermédio, mas as professoras referiram que, quando questionados nas apresentações, alguns grupos disseram que multiplicaram por 2, ainda que a maioria tenha adicionado.

3. Rangel, M. & Coimbra, B. (2010). Matmagicar-Problemas de Matemática 1.º ciclo-2.º ano. Porto Editora.

> **Tina:** Nós criámos isso nos miúdos com os problemas, quando perguntávamos: “Qual foi a tua estratégia?”
> **Clara:** Habituámos os miúdos a pensar cada um por si e não ficarem agarrados que aquele problema tem de se resolver daquela maneira.
> **Rute:** E o facto de terem de verbalizar como é que pensaram, ajuda-os a comunicarem a forma como pensaram.
> **Inv1:** Porque no papel nem sempre se percebe como é que pensaram e quando eles comunicam, explicam.
> **Flor:** Esta exploração que nós fazemos das diferentes estratégias convida muito a que eles venham explicar.

O incentivo dado para que os alunos apresentassem a estratégia usada, estimulou a comunicação matemática e forneceu pistas às professoras sobre o modo como resolveram a situação, abrindo espaço para dar a conhecer à turma outras formas de resolver a tarefa, valorizando a diversidade e criando momentos de aprendizagem.
A quarta tarefa, retirada do mesmo livro (p. 30) e adaptada, foi a eleita para ser resolvida numa AI e um dos propósitos era compreender qual a estratégia mais escolhida por estes alunos, para este tipo de problemas.

3 – Fazer colares

A Ana para fazer um colar precisa de: 1 fio, 1 fecho, 2 peças ovais e 4 bolinhas.

3.1. – A Ana quer fazer 5 colares. De quantas peças vai precisar?

3.2. – Se só tivesse 3 fios, 4 fechos, 6 peças ovais e 10 bolinhas, quantos colares completos poderia fazer? Quantas peças sobrariam?

Figura 4. Tarefa proposta.

Apesar de terem assinalado algumas situações que podiam ser complicadas, nomeadamente a falta de uma imagem ou suporte físico, a professora que dinamizou a AI não quis fazer alterações à tarefa, querendo ver como é que os seus alunos se desenvencilhavam. O grupo achou que a maioria dos alunos iria resolver a situação através de desenhos. Na sessão de reflexão depois da AI, e mantendo a sua opção de não alterar a tarefa para não diminuir o nível de desafio, a professora dinamizadora justificou uma intervenção específica na aula.

> **Clara:** Senti necessidade de esclarecer as ovais porque era uma dúvida no vocabulário que os estava a condicionar, não lhes dei nenhuma achega precisamente para não os condicionar ao meu pensamento.
> **Flor:** Houve mais do que um que também não sabia o que era o fecho. Acho que o que aqui há a melhorar é a questão do vocabulário.

A discussão foi intensa e ainda que para esta aula se tivesse optado por não colocar um desenho, as professoras acharam que, para as outras aulas, o enunciado da tarefa tinha de ser aperfeiçoado. Ainda assim, a maioria dos grupos de alunos conseguiu ultrapassar as dificuldades e elaborar estratégias de resolução na base do desenho.

> **Inv1:** Mas, reparem como os pormenores fazem a diferença.
> **Flor:** Eu acho que a riqueza de nós podermos assistir aos alunos dos outros, é podermos ver que há um padrão. (...) Eles têm dificuldades nas mesmas coisas e facilidades também, nas mesmas coisas.
> **Clara:** Nós vemos isso quando corrigimos fichas de avaliação.
> **Flor:** E muitas vezes as dificuldades têm a ver com isto: é uma pergunta mal feita, um esquema que não está completamente claro, ou uma pergunta que tem imensa informação.... É uma aprendizagem que nós fizemos: a forma como apresentamos um problema ou como explicamos pode condicionar todo o desenvolvimento da situação.

Nesta tarefa as professoras compreenderam a importância de atender ao vocabulário na perspetiva do aluno, se este é familiar ou não, e como um pormenor a que se atribui menos relevância pode condicionar o desenvolvimento da atividade matemática.
Para ser aplicada nas outras turmas, a tarefa acabou por ser toda reformulada. Partiu-se a tarefa em duas partes, cada uma numa folha separada; acrescentou-se um desenho do colar na primeira parte; na primeira questão introduziu-se um passo intermédio para 2 colares e só depois para 5 e, na segunda parte, alterou-se a última questão para: "Que peças lhe faltavam para fazer mais um colar?", indo ao encontro do raciocínio expresso por alguns alunos no momento das apresentações.

Considerações finais

Nas sessões presenciais as professoras empenharam-se na reflexão conjunta sobre os processos e os produtos, tornando-se mais atentas aos processos de aprendizagem dos alunos e às dinâmicas de sala de aula, considerando um contributo para o desenvolvimento do seu conhecimento didático. Foi com base nestas partilhas, nas observações realizadas e nas evidências recolhidas, que constataram que algumas das dificuldades dos alunos identificadas eram comuns nas várias turmas e não específicas de uma ou de outra, e muitas vezes tinham origem nas tarefas propostas. Por esta razão, entendem que todo o trabalho de antecipação de dificuldades dos alunos e de possíveis estratégias de resolução permite a identificação prévia de fragilidades da tarefa e o seu aprimoramento, com base nos conhecimentos dos alunos e da aprendizagem, tendo o cuidado de não reduzir o seu nível de desafio, ou seja, não reduzindo o seu grau de abertura e nível de exigência conceptual. Este levantamento preliminar implicou-as na preparação da aula e deu-lhes ferramentas para serem mais eficazes na gestão da aula, nomeadamente para intervirem em momentos de bloqueio ou para aceitarem e incentivarem a elaboração de planos autónomos, aproveitando a diversidade de soluções. Reconheceram que algumas das dificuldades identificadas estão associadas a uma baixa compreensão leitora e não resultam da falta de competências matemáticas, ficando sensibilizadas para o cuidado a ter na elaboração de propostas, tendo em conta a sua intencionalidade e nível de exigência.
Acredita-se que o ambiente criado contribuiu para o comprometimento

do grupo, favorecendo uma exposição sem constrangimentos, que fortaleceu o conjunto e permitiu escolher tarefas desafiantes para trabalhar em sala de aula. Desafiantes no sentido em que desafiavam os alunos a mobilizarem os seus conhecimentos para encontrarem um processo de resolução, recorrendo a diferentes estratégias e representações, gerando momentos de aprendizagem e de construção do conhecimento.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de uma bolsa atribuída a Alexandra Souza (SFRH/BD/144428/2019).

Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I, & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico.* ME-DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2013). Um caso multimédia na formação inicial: contributos para o conhecimento sobre o ensino exploratório da Matemática. *Da Investigação às Práticas, 3* (2), 125–149.

Christiansen B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243–307). Dordrecht: D. Reidel.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education, 48* (4), 411–423.

Murata, A. (2011). *I*ntroduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). Springer.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 13–27). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11* (2), 145-163.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2017). A adaptação dos estudos de aula ao contexto português. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. P. Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 129-141). APM.

O processo de generalizar: Um estudo com futuros professores

The process of generalizing: A study with prospective teachers

Margarida Rodrigues[1], Lurdes Serrazina[2], Lina Brunheira[3]

Resumo: Este artigo tem como objetivo analisar como futuros professores se envolveram num processo de generalização, ao resolverem uma tarefa proposta no âmbito de uma experiência de formação. Os dados foram recolhidos através da observação participante apoiada por gravação áudio e vídeo enquanto os futuros professores resolviam a tarefa em trabalho autónomo, organizados em grupo, mas também durante a discussão coletiva. Os futuros professores mostraram capacidade de generalizar, embora nem todos o tenham feito com o mesmo nível de sofisticação. Grande parte mostrou preocupação em apresentar o resultado utilizando a linguagem algébrica, embora a linguagem natural tivesse também um importante papel. De notar ainda, o papel do processo de exemplificar como apoio ao processo de generalizar.

Palavras-chave: raciocínio matemático, generalizar, exemplificar, formação inicial de professores

Abstract: *The aim of this paper is to analyse how prospective teachers had been involving in a generalization process, when solving a task, included in a teaching experiment. Data were collected through participant observation supported by audio and video recordings, while the prospective teachers solved the task in autonomous work, organized in groups, but also during the whole class discussion. Prospective teachers show the ability to generalize, although with different levels of sophistication. Most of them were concerned with presenting the result using algebraic language, although natural language also played an important role. Also to be noted the role of the process of exemplifying as support to the generalizing process.*

Keywords: *mathematical reasoning, generalizing, exemplifying, preservice teacher education*

Eselx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa,

1. margaridar@eselx.ipl.pt;
2. lurdess@eselx.ipl.pt;
3. lbrunheira@eselx.ipl.pt

Introdução

Documentos curriculares nacionais e internacionais incluem o desenvolvimento do raciocínio matemático como uma capacidade a ser desenvolvida por todos os alunos desde os primeiros anos de escolaridade (ME, 2018; NCTM, 2007). Envolver os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovam o raciocínio matemático e a resolução de problemas, para além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias, conduz a um ensino eficaz da matemática (NCTM, 2017). Também aos futuros professores devem ser dadas oportunidades para compreenderem o que o raciocínio matemático envolve (Loong et al., 2017), proporcionando-lhes experiências significativas que possam mais tarde vir a desenvolver com os seus alunos (Hiebert et al., 2003). Do mesmo modo, Stylianides e Stylianides (2006) consideram ser necessário dar uma atenção especial ao raciocínio matemático na formação inicial de professores, nomeadamente à capacidade de raciocinar. Para estes autores, a ligação entre a atividade de raciocinar e provar e atribuir sentido, permite tornar as aprendizagens significativas, justificando. Deste modo, trabalhar esta dimensão poderá providenciar um maior desenvolvimento do conhecimento matemático e didático dos futuros professores dos primeiros anos, capacitando-os para conduzirem práticas promotoras do raciocínio matemático dos seus alunos.

Este artigo enquadra-se no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores (REASON), o qual visa estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento em professores e futuros professores dos ensinos básico e secundário. O presente artigo tem como objetivo analisar como futuros professores (estudantes do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB) se envolveram num processo de generalização, ao resolverem uma tarefa proposta no âmbito de uma experiência de formação.

Raciocínio matemático e o processo de generalizar

O significado de raciocínio matemático nem sempre é consensual, havendo autores que referem pensamento matemático ou pensar matematicamente como sinónimo de raciocínio. Nesta comunicação, seguimos a perspetiva de Ponte et al. (2020) para quem o "raciocinar" matematicamente é mais restrito do que "pensar", considerando raciocínio matemático como "realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (p. 7).

Ponte et al. (2020) referem três tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo. No raciocínio dedutivo, um conjunto de asserções são encadeadas de forma lógica, justificando esse encadeamento e, se essa cadeia de deduções não contiver erros, obtém-se uma conclusão necessariamente verdadeira. Este tipo de raciocínio é muitas vezes considerado o raciocínio matemático. No entanto, Polya (1990) veio dar um relevo especial ao raciocínio indutivo em matemática, considerando que ele está presente quando se chega a uma regra a partir da observação do que acontece em diferentes casos particulares, por exemplo, quando através da observação de uma regularidade se estabelece uma generalização. No que se refere ao raciocínio abdutivo, este aparece muitas vezes associado ao raciocínio indutivo. Silva (2009), referindo-se ao trabalho de Pierce, considera abdução como "um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência" (p. 39). Para esta autora, abduzir é levantar hipóteses, como formas de explicar fenómenos surpreendentes que se observam. Oliveira (2008), a partir da análise do trabalho de diferentes matemáticos, considera o raciocínio dedutivo fundamental quando se conclui uma investigação matemática. Normalmente, a prova é precedida por uma fase exploratória onde se experimentam tentativas, avanços e recuos, analogias ou intuições, emergindo tipos de raciocínio indutivo e abdutivo associados ao processo de generalizar.

Para Jeannotte e Kieran (2017), os tipos de raciocínio antes referidos incluem-se no aspeto estrutural do raciocínio. Para além deste, estas autoras identificam o aspeto processual do raciocínio matemático envolvendo os processos de procura por semelhanças e diferenças (generalizar, conjeturar, identificar um padrão, comparar e classificar) e os processos relacionados com a validação (justificar e provar). Ponte et al. (2020) destacam conjeturar, generalizar e justificar como processos essenciais do raciocínio matemático, sendo conjeturar central no raciocínio abdutivo, generalizar, ou seja, formular conjeturas de natureza geral, um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo e justificar, um processo essencial do raciocínio dedutivo.

Para Lanin et al. (2011), o processo de generalizar ocorre quando um indivíduo identifica pontos comuns em casos diferentes ou quando estende o raciocínio além do domínio em que foi generalizado. De uma forma consistente, para Jeannote e Kieran (2017), generalizar consiste em inferir afirmações sobre um conjunto de objetos, ou uma relação sobre esses objetos, a partir da análise de um subconjunto desses objetos. As autoras consideram ainda o processo de exemplificar como apoio aos outros processos de raciocínio matemático, nomeadamente ao processo de generalizar.

É fundamental desenvolver o processo de generalizar desde o início da escolaridade, enfatizando a construção de significados e a compreensão (Cusi & Malara, 2007; Kaput, 1999). Este processo tem o potencial de contribuir para o aprofundamento da compreensão da Matemática. Para Warren e Cooper (2007), a descrição de uma dada regularidade através da linguagem natural é de grande importância para os alunos conseguirem, depois, exprimir a generalização através de notação simbólica.

O estudo de Ponte e Branco (2013), com futuros professores dos primeiros anos, aponta para a necessidade de a formação inicial promover a produção de generalizações, bem como a compreensão do significado de variável e da simbologia algébrica. Contudo, além de desenvolverem a sua própria capacidade de generalizar, Melhuish et al. (2020) referem que se desejamos que os professores promovam a capacidade de generalizar dos seus alunos, devemos proporcionar oportunidades para analisarem evidências desses processos durante a sua formação.

Metodologia

O presente estudo seguiu uma abordagem qualitativa-interpretativa (Patton, 2002; Quivy & Campenhoudt, 2008).), incidindo nos processos e nos significados dos participantes, futuros professores. Foi desenvolvido no contexto de uma experiência de formação, correspondendo ao 1.º ciclo da Investigação Baseada em Design (Cobb et al., 2003), e conduzida pela primeira autora, com futuros professores, estudantes do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, na Unidade Curricular de Didática da Matemática no 1.º e no 2.º CEB. Estes futuros professores (num total de 31) constituíam a turma do 1.º ano desse mestrado, numa das instituições do Projeto.

A experiência, realizada no início do funcionamento da Unidade Curricular, contemplou seis aulas – uma por semana com a duração de 2h 30 min. Nestas aulas, foram exploradas e discutidas tarefas de formação que se propunham desenvolver nos futuros professores o conhecimento das práticas de ensino promotoras do desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Todas as tarefas foram inicialmente exploradas autonomamente pelos futuros professores, organizados em oito grupos, sendo posteriormente discutidas pelo coletivo da turma.

Este artigo contempla a tarefa *Chupa-chupas*[1], a segunda tarefa proposta na experiência de formação, incidindo na parte inicial (Figura 1), a qual visou o primeiro contacto com processos de raciocínio ilustrados em resoluções de alunos do 1.º CEB. A disponibilização da tarefa aos futuros professores foi feita em duas partes. Primeiro, foi distribuída a tarefa proposta a alunos do 1.º CEB (item 1) e só depois a tarefa integral, incluindo a tabela com resoluções de alunos do 1.º CEB.

1. Tarefa adaptada da tarefa “Lots of Lollies”, disponível em: https://nrich.maths.org/2360

Considere a seguinte tarefa.

André e Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos, Ana, Rui e António que também queriam chupa-chupas. Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas. Quantos chupa-chupas podiam estar no saco?

1. Resolva a tarefa.

2. Analise as resoluções de alguns alunos e os processos de raciocínio associados a essa resolução.

Resoluções	Processos de raciocínio
Maria: Podem estar 7 rebuçados.	Exemplificar: Maria dá um exemplo.
António: Podem estar 7, 17 e 27. Podem estar todos os ímpares	Exemplificar: António dá três exemplos. Generalizar: António identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números ímpares.
Miguel: Podem estar 7, 17 e 27. Podem estar todos os números que terminam em 7.	Exemplificar: Miguel dá três exemplos. Generalizar: Miguel identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números terminados em 7.
Manuela: Não podem ser os números pares pois não sobra 1 quando são partilhados por 2. Não podem ser todos os ímpares porque, por exemplo, o 15 não dá pois não sobram 2.	Generalizar: Manuela identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio além do domínio em que foi generalizado. Justificar: Manuela apresenta um argumento lógico baseado em ideias matemáticas e recorre a um contraexemplo para refutar uma afirmação.
José: Não podem ser pares porque sobra 1. Não pode ser 5 porque não sobram 2. Pode ser 7 porque sobra 1 e 2.	Justificar: José apresenta um argumento lógico baseado em ideias matemáticas. Exemplificar: José dá um exemplo.
Catarina: Podem ser ímpares. Dos ímpares não podem ser os que terminam em 1, 3 e 5. Só os que terminam em 7.	Generalizar: Catarina identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números ímpares terminados em 7.

Identifique os processos de raciocínio que usou na sua resolução e compare-os com os usados por estes alunos.

Figura 1. Parte inicial da tarefa *Chupa-chupas.*

Foram selecionados, para serem objeto de gravação do seu trabalho autónomo, dois dos grupos de futuros professores (Grupos 1 e 2), tendo em conta a forma como interagiram durante o trabalho autónomo e a sua participação ativa na discussão coletiva. A recolha de dados foi realizada através da observação das aulas recorrendo à gravação áudio e vídeo, com posterior transcrição, e à observação participante de elementos da equipa do projeto. Os documentos produzidos pelos futuros professores, durante a resolução das tarefas, foram também recolhidos. Todos os futuros professores assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido, relativamente aos métodos de recolha de dados, e são tratados por nomes fictícios, respeitando o critério ético de confidencialidade.

No âmbito deste artigo, foram analisadas, através de análise de conteúdo (Bardin, 2010) as produções dos oito grupos, bem como as discussões ocorridas no seio dos grupos 1 e 2. Além das resoluções dos itens 1 e

2, apresentamos situações de discussão do item 2 no Grupo 2, pois foi apenas neste Grupo que se verificou uma discussão centrada no processo de generalizar.

Resultados

Exploração autónoma da tarefa

Os estudantes, futuros professores, começaram por realizar o item 1 da tarefa, em grupo, usando os seus próprios procedimentos, já que não foi solicitado que pensassem em estratégias de resolução próprias de alunos do 1.º CEB. Todos os grupos resolveram corretamente o item, sendo que, dos oito grupos, cinco usaram notação algébrica, registando o seu significado. Os Grupos 3, 4 e 6 resolveram a tarefa, estabelecendo, primeiro, o número mínimo e, em seguida, generalizaram, usando a linguagem natural. Passamos a apresentar o registo final da resolução do Grupo 4 (Figura 2).

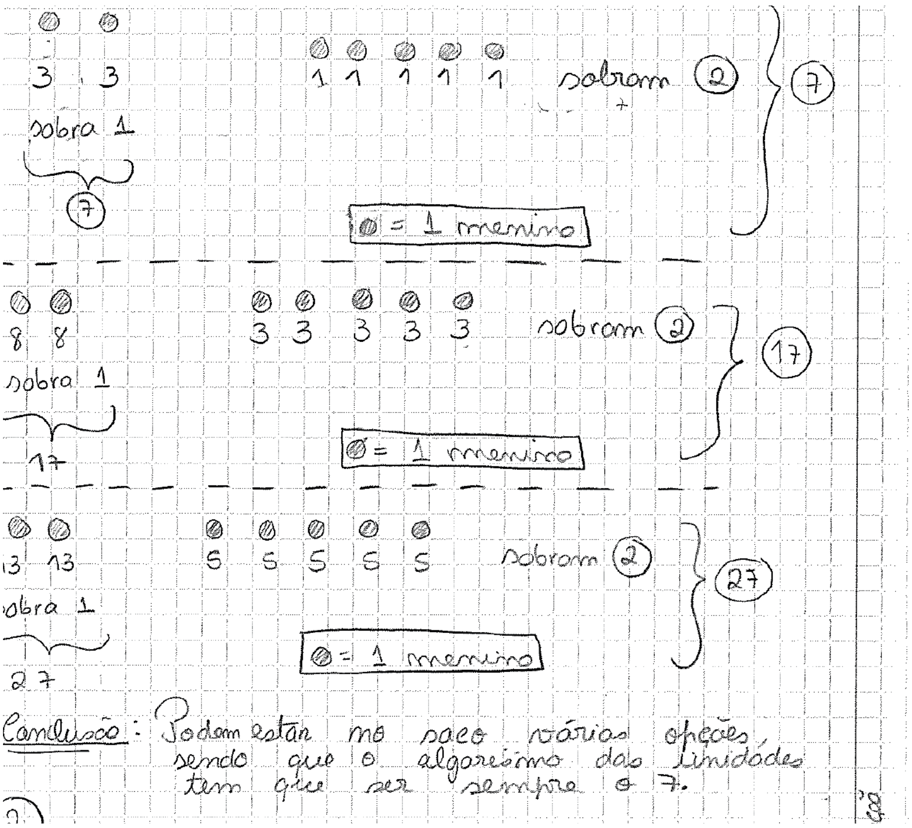


Figura 2. Resolução do Grupo 4 do item 1.

Este grupo usou representações icónicas na modelação da situação proposta, concretizando quantos chupa-chupas receberia cada menino nas primeiras três possibilidades, partindo do 7 como número mínimo. Esta resolução parece evidenciar o processo de exemplificar como tendo sido importante para os futuros professores conseguirem formular uma generalização, verificando, primeiro, uma propriedade comum a essas três possibilidades e estendendo, em seguida, essa propriedade à infinidade dos números (“sempre”) embora não a expressem (“Podem

estar no saco várias opções”). Atendendo ao item 2, este grupo clarifica o seu processo de resolução. Referem que “numa primeira fase, consideramos que podiam estar 7 *chupa-chupas* no saco”. Este número respeita simultaneamente as duas condições do problema. Em seguida, atenderam apenas à situação da partilha por 2, conjeturando a primeira generalização: “talvez pudessem ser todos os ímpares”. Entretanto, verificaram alguns exemplos de números ímpares que não respeitavam a segunda situação da partilha por 5, como sejam o 15, 25 e o 35. Foi depois desta verificação que “começamos a reparar num padrão”, “através dos aspetos comuns que encontramos”: “Para este padrão o sete tem que ser obrigatoriamente o algarismo das unidades”. Assim, o processo de exemplificar fez com que a conjetura inicial, ao invés de ser completamente abandonada, fosse refinada para estabelecer quais os números ímpares que satisfaziam as duas condições do problema.
Vejamos a resolução do Grupo 3.

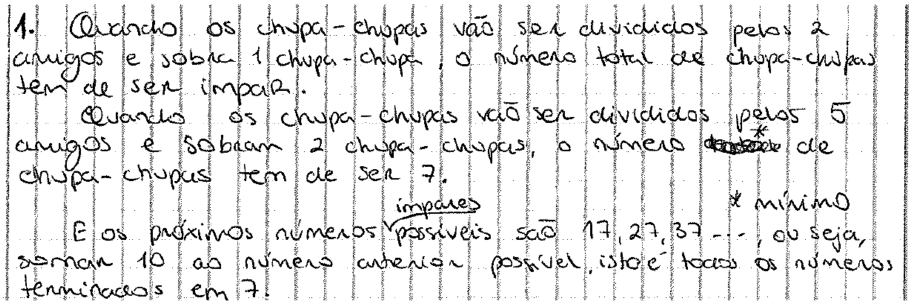

1. Quando os chupa-chupas vão ser divididos pelos 2 amigos e sobra 1 chupa-chupa, o número total de chupa-chupas tem de ser ímpar.
Quando os chupa-chupas vão ser divididos pelos 5 amigos e sobram 2 chupa-chupas, o número * de chupa-chupas tem de ser 7.
* mínimo
E os próximos números ímpares possíveis são 17, 27, 37 ..., ou seja, somar 10 ao número anterior possível, isto é todos os números terminados em 7.

Figura 3. Resolução do Grupo 3 do item 1.

A resolução deste grupo não evidencia o uso de exemplos, para além do número mínimo. Começam por generalizar pensando unicamente na situação da partilha por 2. E, partindo da restrição de números ímpares, estabelecem o número mínimo 7. Em seguida, generalizam atendendo já à simultaneidade das duas condições: “todos os números terminados em 7”.
Quatro dos grupos, Grupos 1, 2, 5, e 7, incluíram expressões algébricas gerais representativas do número de *chupa-chupas*. Como se pode observar, estas resoluções incluíram uma abordagem formal como a determinação do termo geral $10n$-3, $n \geq 1$ (Grupo 1, Figura 4) ou $10n+7$, $n \geq 0$ (Grupo 7, Figura 5).

André e Rute → sobrou 1, ou seja, tem que ser número ímpar
(2 amigos)

André, Rute, Ana, Rui e Antônio → sobrou 2, ou seja, múltiplos de $5+2=7$.

Assim, podemos dizer que o número de chupa-chupas que podem estar no saco terá sempre o número 7 nas unidades (7, 17, 27, 37, 47, 57, ...).

Podemos chegar ao termo geral:

$$7 \xrightarrow{+10} 17 \xrightarrow{+10} 27 \xrightarrow{+10} 37$$

Termo geral de qualquer sequência: $U_n = an+b$

$$U_n = an+b$$
$$7 = 10+b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7-10 = b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3 = b$$

ou seja, o termo geral é $U_n = 10n-3$.

Figura 4. Resolução do Grupo 1 do item 1.

Tal como os grupos reportados atrás, o Grupo 1 estabelece duas generalizações, recorrendo à linguagem natural; a de serem números ímpares, atendendo à partilha por dois, e a do 7 no algarismo das unidades, conjugando as duas condições. A partir da observação da sequência com os quatro primeiros termos, e da expressão *un*=*an*+b, o Grupo 1 parece atribuir a a o significado da razão desta progressão aritmética. Assim, parte do 1.º termo substituindo *n* por 1, para assim determinar o valor de b, e obter então o termo geral.

1. André + Rute $x+y+1$

André	+ Rui	+ Antônio	+ Ana	+ Rute	$x+y+z+a+b+2$
1	1	1	1	1	+ 2 = 7
2	2	2	2	2	+ 2 = 12 x
3	3	3	3	3	+ 2 = 17
5	5	5	5	5	+ 2 = 27
7	7	7	7	7	+ 2 = 37

André + Rute $2n+1$

$\underbrace{A+R+An+Ana+Rute}$ $(2n+1)+2$

$5n+2$, $n = 2n+1$

$5(2n+1)+2 = \boxed{10n+7}$

↳ Total de chupas no saco, para $n \geq 0$.

Figura 5. Resolução do Grupo 7 do item 1

Tal como o Grupo 4, também o Grupo 7 (Figura 5) começa por exemplificar com números concretos de *chupas* a distribuir. No entanto, concretiza apenas para a situação de partilha pelos 5 amigos, seguindo inicialmente a ordem dos números naturais (1, 2), e após assinalar como excluída a solução 12, por não respeitar a condição da primeira situação, passa a seguir a ordem dos números ímpares (3, 5, 7) até à solução 37. A análise da parte restante do registo escrito permite-nos inferir que o grupo entendeu a impossibilidade de, na segunda situação, dar um número par de *chupa-chupas* a cada uma das crianças. Em seguida, o grupo incide na modelação do problema através de expressões algébricas. Nesta fase, começa por traduzir números ímpares da primeira situação por uma expressão algébrica ($2n+1$). Na modelação da segunda situação, parece ter presente já a sua conjunção com a primeira situação, ao registar primeiro $(2n+1)+2$, parecendo, assim, assumir que o número total de *chupa-chupas* distribuídos pelos 5 amigos teria que ser ímpar. Seguidamente, regista $5n+2$, assumindo n como número ímpar, e por fim, substitui, nessa expressão, n pela expressão que representa número ímpar, obtendo assim o termo geral, para $n \geq 0$.
O Grupo 2 determinou $5n+2$ (Figura 6), tal como o Grupo 5.

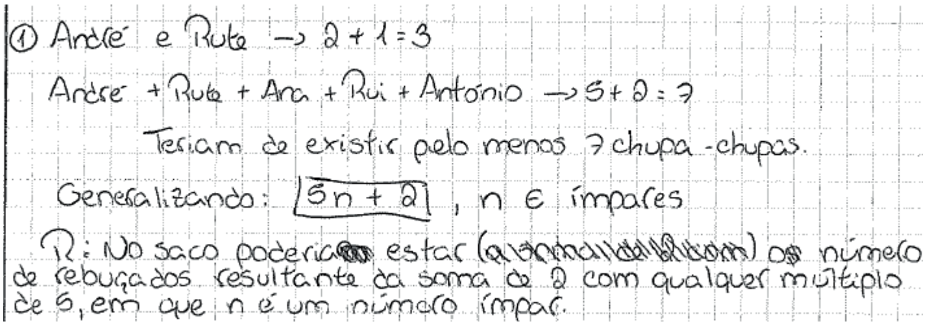


Figura 6. Resolução do Grupo 2 do item 1

O Grupo 2, nesta resolução, tal como outros grupos, começa por determinar qual o número mínimo de *chupa-chupas*. Nessa determinação, parece atender às duas situações de forma independente, começando por verificar o número total, para cada situação, se fosse dado um *chupa-chupa* a cada criança. No entanto, atende à conjunção das situações quando estabelece o 7 como número mínimo. Quando determina uma expressão geral simbólica, parece apoiar-se na expressão concretizada para $n=1$, relativa à partilha por 5: $5+2=7$. Assim, inferimos que o grupo generalizou que só seria possível cada criança receber um número ímpar de *chupa-chupas*, ao considerar n como um número ímpar, atribuindo, assim, à variável n, um sentido distinto do usual em matemática. Parece ter seguido um raciocínio análogo ao do Grupo 7, embora não tenha concluído o processo de transformar a expressão numa compatível com o significado matemático de *n.* Analisando os diálogos ocorridos no seio do Grupo 2, durante a exploração autónoma da tarefa, verificamos que foi no decurso da análise das respostas dos alunos (item 2) que o grupo se deu conta da impossibilidade de números pares como solução do problema e que a fórmula 5*n*+2, registada inicialmente para n designando qualquer número natural, só se aplicaria à segunda situação do problema. Vejamos o respetivo extrato:

Daniela: Há aqui um que diz que não podem ser números pares.
Helena: Sim.
Nuno: Mas nós não dissemos isso, pois não?
Helena: Não.
Lara: Não.
Nuno: Mas ela generalizou?
Daniela: Não generalizou corretamente.

O grupo, ao ler uma resposta não coincidente com a sua resolução da tarefa, considera inicialmente que a resposta de Manuela relativamente aos números pares está incorreta. A análise desta resposta prossegue:

Nuno: Como é que ela diz? Não podem ser os números pares…
Helena: Pois não sobra um.
Nuno: Quando são partilhados por dois. Lá está. Sim, à partida.
Helena: Sim...
Nuno: Com o primeiro exemplo não podem ser pares.
Daniela: Exato.

Ao ler melhor esta resposta, o grupo reconsidera a apreciação inicial de incorreção da resposta de Manuela, concordando que a primeira situação do problema implica que não possam ser números pares. A discussão prossegue, no seio do grupo:

Daniela: Nós pensámos mal. O n tem que pertencer aos números ímpares. Porque tem de ser válido também para o primeiro exemplo. Para o André e para a Rute...
Helena: Ou seja, esta fórmula não pode ser só para o segundo, mas tem de dar também pro [sic] primeiro.

Assim, o grupo mantém a fórmula inicial de 5*n*+2, decidindo restringir *n* aos números ímpares, decorrente de atender agora à conjunção das duas situações do problema. De seguida, debatem o significado de *n* no contexto do problema.

Lara: O *n* é o número de rebuçados.
Helena: É.
Nuno: Ahh...
Helena: Não.
Daniela: Não, não, não, não, não. O cinco *n* mais dois é que é o número de rebuçados.
Lara: A... O *n* é o número de pessoas? De, de, de crianças que há.
Daniela: Não.
Nuno: Não, não.
Daniela: Não. Cinco é o número de crianças que há.
Nuno: Exato.
Helena: Mais dois é os rebuçados que sobram.

> **Lara:** Ai, então *n* é o quê?
> (…)
> **Daniela:** É uma generalização. O *n* é um número natural, neste caso tem que ser ímpar.
> (…)
> **Lara:** Porque é que o *n* tem de ser ímpar?
> (…)
> **Daniela:** Dá exemplos do *n*.
> **Nuno:** Imagina, imagina que o *n* é par cinco vezes dois dez, mais dois, doze. Doze rebuçados. Se eles distribuírem pelos cinco amigos, sobram dois.
> **Lara:** Sim.
> **Helena:** Mas se distribuírem só pelos dois.
> **Nuno:** Mas se distribuíssem pelos dois, só pelo André e a Rute.
> **Helena:** Já não sobra um.
> (…)
> **Daniela:** Os rebuçados são os mesmos, percebes? Os *chupa-chupas* são os mesmos. Eles tinham os *chupa-chupas* todos dentro de um saco e dividiram primeiro pelos dois e depois quando chegaram os outros é que eles decidiram pôr outra vez tudo no saco...
> (…)
> **Lara:** Ok. Eles têm sempre um saco com os mesmos.

Lara, após considerar que *n* era o número de *chupa-chupas*, e de ouvir os desacordos dos colegas, interpela-os sobre o significado desta notação, questionando então se seria o número de pessoas pelas quais se distribuíam os *chupa-chupas*. Daniela esclarece-a, assumindo o uso da notação como uma generalização, e atribuindo a *n* um significado alterado, decorrente da restrição efetuada pelo grupo mediante a conjunção das duas situações do problema. Assim, Daniela começa por referir-se ao sentido usual de n (“O *n* é um número natural”) para depois se focar no sentido atribuído no contexto (“neste caso tem que ser ímpar”). Foi necessário os colegas fazerem a sugestão de exemplificar o *n* com valores concretos, e de contextualizar as ações referentes a voltarem a colocar os *chupa-chupas* dentro do saco, sempre que era feita uma nova distribuição por um número diferente de pessoas, para Lara compreender a expressão algébrica em causa (“Ok. Eles têm sempre um saco com os mesmos.”). No entanto, não chegam a referir que *n* é o número de *chupas* distribuídos a cada amigo, considerando apenas a expressão $5n+2$. Este diálogo é ilustrativo de como o processo de exemplificar apoiou a compreensão de uma generalização produzida antes. É, ainda, de destacar a preocupação de Lara em dar sentido ao trabalho produzido pelo grupo.

Discussão coletiva
Em seguida, os grupos partilharam as suas resoluções. Célia, do Grupo 7, explica como chegou ao termo geral e regista-o no quadro:

> **Célia:** Então nós com esta expressão fizemos, visto que eram cinco amigos, fizemos cinco *n*, porque o *n* neste caso representaria o número de rebuçados por cada criança, vezes os cinco, mais os dois que sobravam e este *n*, sendo um número ímpar fomos substituir

> pela expressão geral. Portanto, ficaria cinco vezes dois *n* mais um (5(2*n*+1)+2)…

Nuno, do Grupo 2, questiona Célia:

> **Nuno:** Eu posso só colocar uma questão à Célia, porque eu percebi que ela tinha dito que o *n* era o número de rebuçados por pessoa, era isso?
> (…)
> **Célia:** Na expressão inicial, no cinco *n* mais dois o *n* era o número de rebuçados por cada, cada criança, porque eles multiplicavam o número de rebuçados por cada um mais o dois. No momento em que tu substituis, depois, esse *n* pelo número de rebuçados pela expressão do número geral, o *n* deixa de ser um número pertencente a cada aluno, mas sim um número maior ou igual a zero, na expressão toda é que te dá o número possível, dentro do saco, de *chupa-chupas*.

Tal como sucedera no seio do Grupo 2, o interesse pela dimensão semântica das expressões algébricas produzidas, e consequentemente, da compreensão das generalizações, suscitou discussão também no seio da turma. Como referido atrás, o Grupo 7 alcança o termo geral da sequência, partindo de um processo de exemplificar o número concreto de *chupa-chupas* a distribuir pelos cinco amigos. Talvez por isso, o grupo tenha atribuído inicialmente esse significado a *n*, tal como referido por Célia ("porque o *n* neste caso representaria o número de rebuçados (…) por cada criança, (…) e este *n*, sendo um número ímpar, fomos substituir pela expressão geral"). O grupo entende que no momento em que obtém o termo geral, após a substituição de *n* por 2*n*+1, o *n* já não representa número ímpar nem o número de *chupa-chupas* recebido por cada criança, como inicialmente, embora revele alguma dificuldade em expressar claramente o seu significado, referindo-se aos números naturais ($n \geq 0$) sem indicar o seu significado posicional na sequência das soluções do problema. A discussão prossegue:

> **Nuno:** Então se nós quiséssemos perguntar, se dez *n* mais sete, e *n* é? O que é que diríamos?
> **Célia:** Isso foi uma questão também no nosso grupo, gerou aqui uma discussão incrível
> (risos)
> **Daniela:** Porque, porque a verdade é que nós quando, quando nós vamos aplicar o problema nós temos que conseguir dizer que o *n* é qualquer coisa.
> (…)
> **Daniela:** Exato, e se nós dissermos que o *n* é o número de rebuçados, nós não podemos considerar, se nós vamos distribuir os rebuçados, os rebuçados nunca podem ser zero. Porque nós temos rebuçados pra [sic] distribuir.
> (…)
> **Ana:** Por exemplo, imagina que te dão o saco tem 37 rebuça, ahh... *chupa-chupas*, (…) então quanto é que tem cada criança? E nós fomos substituir ahhh… aquela expressão geral e achamos que o

> número era, o *n* era três. Pronto. E depois como é que, qual é que foi a conclusão?
> **Professora:** Agora vamos lá ver, só para distinguir aqui a questão do significado do *n*, portanto, questão muito pertinente (…). Reparem que estes termos gerais estão associados a sequências, o nosso n será sempre a ordem. Portanto, o número de rebuçados por saco há de ser o termo. Temos de distinguir o n que é a ordem, dos termos. E o próprio termo, portanto, o número de rebuçados nunca será o *n*, mas sim o resultado desta sequência, portanto, na sequência vou ter todos os números possíveis a colocar no saco.
> Nuno (vai ao quadro): Era só porque se queremos admitir que o *n* será o número de rebuçados por criança então poderíamos talvez se calhar… (…) A Célia tinha dito no início que o *n* seria o número de rebuçados por criança e pegando nessa, nessa ideia…
> **Célia:** Do 5*n*+2.
> **Nuno:** Sim, sim, pegando até na expressão de cima. Até poderia ficar o cinco *n* e assim o *n* ficaria na mesma como sendo o número de rebuçados por criança, mais dois, mas sendo que o *n* pertence ao conjunto dos números ímpares. E então…
> **Célia:** Sim, sim, (…) exatamente por o *n* pertencer ao conjunto dos números ímpares é que a gente foi substituir o n pela expressão do número ímpar que era para generalizar. Percebes?

No início deste segmento de discussão, Daniela refuta a ideia de *n* poder ser o número de *chupa-chupas* recebido por cada criança, em 10*n*+7, dizendo que nesse caso, não faria sentido distribuir 0 rebuçados, como acontece no caso do primeiro termo, 7 rebuçados no saco ("se nós dissermos que o n é o número de rebuçados, (…) se nós vamos distribuir os rebuçados, os rebuçados nunca podem ser zero"). Ana, do Grupo 7, ao intervir, incidindo no caso particular de 37 *chupa-chupas* dentro do saco, parece questionar esse significado pois a substituição de *n* por 3 não é coerente com a distribuição de 7 *chupa-chupas* a cada um dos 5 amigos, como o grupo tinha determinado antes. A professora intervém, clarificando os significados dos números correspondentes às ordens e aos termos de uma sequência ("o nosso *n* será sempre a ordem. Portanto, o número de rebuçados por saco há de ser o termo").
A intervenção de Nuno denota a intencionalidade de representar o que pode ser efetivamente distribuído por cada uma das cinco crianças, ao justificar a opção do seu grupo pela expressão 5*n*+2, em que n passa a ter o significado específico de qualquer número ímpar ("sendo que o *n* pertence ao conjunto dos números ímpares") representando o número de *chupa-chupas* a distribuir por cada um dos cinco amigos.

Considerações finais

Os futuros professores evidenciaram capacidade de generalizar, não se tendo verificado dificuldades, embora as generalizações produzidas revelem diferentes graus de sofisticação. A maioria dos grupos, para além da expressão da generalização em linguagem natural, preocupou-se em exprimi-la com recurso a termos gerais envolvendo notação simbólica. Tal como referem Warren e Cooper (2007), a descrição da regularidade presente em sequências de crescimento em linguagem natural é funda-

mental na sua relação com os sistemas formais de notação simbólica. O processo de exemplificar suportou o processo de generalizar (Jeannote & Kieran, 2017), na medida em que foi a identificação de propriedades comuns aos exemplos correspondentes às primeiras possibilidades, soluções do problema, que conduziu a estender essas propriedades à infinidade das soluções (Lanin et al., 2011).
É de relevar a ênfase na dimensão semântica das diferentes simbologias adotadas, decorrentes dos processos diferenciados na construção dos termos gerais, e a preocupação dos estudantes em dar sentido à representação simbólica na modelação da conjunção das duas situações propostas no problema. Tal como sustentado por diversos autores (Kaput, 1999; Cusi & Malara, 2007), tem de se partir do significado do contexto para chegar à sintaxe algébrica. No âmbito da significação das expressões simbólicas, verificou-se alguma dificuldade na distinção entre a linguagem ordinal e a cardinal. A semântica, enquanto aspeto marcante da discussão entre os futuros professores, sugere uma valorização didática da atribuição de sentido ao trabalho efetuado como um aspeto a que os futuros professores dão uma especial atenção.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (2010). *Análise de conteúdo* (4.ª ed). Edições70.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante, 16* (1), 57–80. https://doi.org/10.48489/quadrante.22812.

Hiebert, J., Morris, A. K., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6* (3), 201-222.

Jeannote, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96* (1), 1-16. doi:10.1007/S10649-017-9761-8.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*.

Lannin, J. K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.

Loong, E. Y-K, Vale, C., Herbert, S. Bragg, L. A., Widjaja, W. (2017). Tracking change in primary teachers' understanding of mathematical reasoning through demonstration lessons. *Mathematics Teacher Education and Development, 19* (1), 5-29.

Melhuish, K., Thanheiser, E., & Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23* (1), 35-67.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais.* DGE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* APM.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática.* APM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.
Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3ª ed.). Sage.
Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (ed. orig. 1954, Vol. 1). Princeton University Press.
Ponte, J. P., & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista, 50*, 135-155.
Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?”*. Educação e Matemática, 156*, 7-11.
Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais.* Gradiva
Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática, 101*, 37-41.
Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201-208). PME.
Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds’ thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67* (2), 171-185.

CARTAZ | A antecipação das dificuldades – uma competência do professor na integração da modelação matemática na prática letiva

POSTER | *Anticipating difficulties – a teacher's competence in the integration of mathematical modelling in teaching practice*

António Júlio Aroeira[1], Susana Carreira[2], João Pedro da Ponte[3]

Resumo: A antecipação das dificuldades dos alunos e apoio é uma dimensão relevante do conhecimento didático do professor na realização de tarefas de modelação matemática. O estudo tem como objetivo compreender a relação entre a antecipação das dificuldades e o consequente delineamento de ações de apoio aos alunos na resolução de uma tarefa de modelação matemática, tendo com referencial teórico o modelo de conhecimento didático de Borromeo Ferri e Blum (2009), seguindo uma metodologia de investigação baseada em design (IBD). Do estudo realizado foi possível concluir que as ações de apoio foram condicionadas pelo facto da professora ter subestimado as dificuldades dos alunos na tarefa.

Palavras chave: modelação matemática; tarefas de modelação; conhecimento didático; estudo de aula

***Abstract**: The anticipation of students' difficulties and support is a crucial dimension of the teacher's didactic knowledge in performing mathematical modeling tasks. The study aims to understand the relationship between the anticipation of difficulties and the consequent design of actions to support students in solving a mathematical modeling task, having as theoretical reference the didactic knowledge model of Borromeo Ferri and Blum (2009), following a design-based investigation methodology (IBD). From the study carried out, it was possible to conclude that the support actions were conditioned by the fact that the teacher underestimated the students' difficulties in the task.*

***Keywords:** mathematical modelling; modelling tasks; didactic knowledge; lesson study*

1. EBS da Madalena, antonio.aroeira@gmail.com
2. Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt
3. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Introdução

As diferentes perspetivas de modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática assumem como ponto de partida um problema do mundo real e uma forma de o resolver por meio da matemática (Greefrath & Vorhölter, 2016), sendo necessária uma transição, em ambos os sentidos, entre a realidade e a matemática (Borromeo Ferri, 2018), num processo de natureza cíclica que comporta diversas fases (Blum & Leiß, 2007).

Existem atualmente fortes recomendações para a integração da modelação matemática nos currículos escolares (Bakker, Cai & Zenger, 2021). Doerr (2007) refere que as atividades de modelação genuínas ainda são pouco frequentes nas aulas de matemática, sendo consideradas difíceis pelos professores (Blum & Borromeo Ferri, 2009) até porque uma aprendizagem em modelação matemática bem-sucedida depende fortemente das competências do professor nesse campo (Niss, Blum & Galbraith, 2007). O conhecimento do processo de modelação matemática e das suas fases, a planificação de tarefas, a condução das aulas, a identificação das dificuldades dos alunos e o apoio a prestar na sua superação são competências fundamentais do professor (Borromeo Ferri, 2018), incluindo a capacidade de ouvir e de colocar questões para compreender e clarificar os diversos aspetos envolvidos na resolução de uma tarefa de modelação (Doerr & English, 2006).

Este estudo tem como objetivo compreender a relação entre a antecipação das dificuldades e o consequente delineamento de ações de apoio aos alunos na resolução de uma tarefa de modelação matemática e a forma como o professor atua, na sala de aula, para apoiar o trabalho dos alunos e fomentar interações facilitadoras do processo de modelação.

Enquadramento teórico

O modelo de conhecimento didático de Borromeo Ferri e Blum (2009) que serve de suporte teórico a este estudo é específico do conhecimento didático para o ensino da modelação matemática e baseia-se em quatro competências fundamentais (Figura. 1).

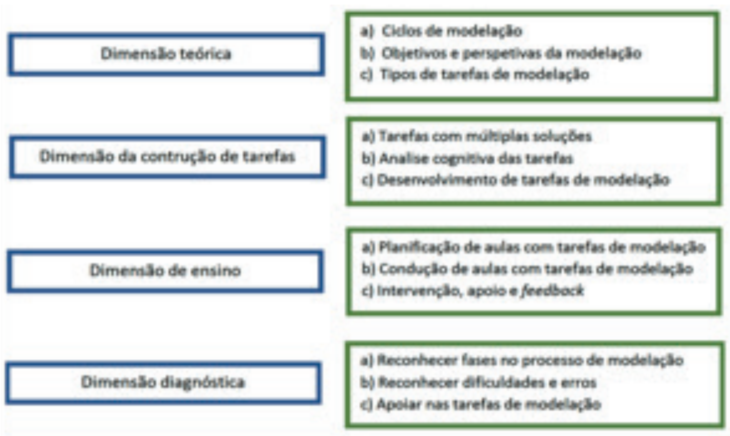


Figura 1. Modelo do conhecimento didático de Borromeo Ferri e Blum (2009).

Tendo em consideração o objetivo do estudo, a análise incide sobre as dimensões de ensino e diagnóstica, nos aspetos relacionados com a identificação de dificuldades previsíveis dos alunos e consequentes ações de apoio antecipadas e a forma como efetivamente o professor atua, na sala de aula, durante o trabalho dos alunos na tarefa de modelação proposta. Os resultados apresentados decorrem de um estudo sobre o desenvolvimento do conhecimento didático em modelação matemática. O estudo constitui uma fase de investigação inicial destinada a informar e orientar a realização de um Estudo de Aula, como contexto formativo centrado na integração de tarefas de modelação matemática com recurso a tecnologia, que envolverá um grupo de professores de Matemática do ensino secundário.

Metodologia

O estudo segue uma metodologia de investigação baseada em design (IBD). O presente estudo preliminar é o primeiro ciclo desta IBD e inclui as três fases características bem articuladas com o Estudo de Aula: planeamento, realização e análise retrospetiva. Este estudo envolveu uma professora do ensino secundário e decorreu durante um mês. A professora tem 27 anos de experiência profissional e possui, para além da Licenciatura em Ensino da Matemática, uma Pós-Graduação em Investigação Operacional e um Mestrado em Tecnologias em Educação. A recolha de dados teve por base uma entrevista inicial semi-estruturada, quatro sessões de trabalho, uma aula de investigação e uma entrevista final. Todas as sessões de trabalho e entrevistas foram gravadas em áudio e a aula de investigação em áudio e vídeo. As gravações, em conjunto com os documentos produzidos durante as sessões e as notas pessoais, forneceram os dados utilizados no estudo.

Figura 2. Estrutura do estudo de aula.

Na primeira sessão do estudo de aula analisaram-se tarefas de modelação identificando as suas características e as fases do ciclo de modelação matemática (Blum & Leiß, 2007). A segunda e terceira sessões destinaram-se à análise da tarefa proposta à professora (Figura 3), considerando diferentes abordagens, possíveis dificuldades e intervenções da professora, a planificação da aula de investigação, nomeadamente na estrutura e organização do trabalho dos alunos. A análise do trabalho desenvolvido na aula de investigação, a reflexão sobre as aprendizagens dos alunos e reformulação do plano de aula, decorreu na quarta sessão. São analisados os dados referentes às sessões de preparação da aula e discussão da tarefa de modelação proposta (Figura 3), nomeadamente os que decorrem da antecipação de dificuldades e delineamento de propostas de intervenção, bem como na antevisão de hipotéticos diálogos entre a professora e os alunos durante a aula.

Dispomos de uma folha de cartolina de tamanho A4 para fazer uma caixa com tampa, conforme está ilustrado na figura 1, para guardar a maior quantidade possível de drageias de chocolate da reconhecida marca M&M's (figura 2).

Figura 2: Drageias de Chocolate M&M's

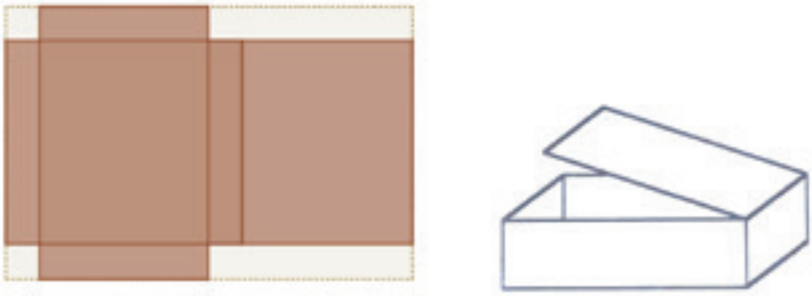


Figura 1: Planificação e modelo da caixa

Determina o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa que permita guardar o maior número possível de M&M's.

Figura 3. Tarefa de modelação planificada e desenvolvida com um grupo de alunos (adaptada de Guzmán e Colera, 1987).

Resultados e conclusões

Damos destaque ao confronto entre as dificuldades antecipadas e as ações de apoio aos alunos previamente estabelecidas e a forma como efetivamente o professor atuou durante a realização da tarefa de modelação, de acordo com a tomada da iniciativa e o nível de intervenção do professor durante atividades de modelação (Borromeo Ferri, 2018):

1. Quem despoletou a intervenção? (Iniciativa do professor ou solicitação do grupo de alunos);

2. Nível de intervenção (diagnóstico, avaliação/feedback, sugestão indireta, sugestão direta ou não intervenção consciente).

Durante a fase de planificação da aula, foi discutida a forma de acompanhamento e intervenção no trabalho realizado nos grupos. Para além de responder às solicitações dos alunos a pedir apoio nas dificuldades que possam ter, discutiu-se em que circunstâncias o professor deveria intervir e como o deveria fazer. Desta discussão resultou que a intervenção do professor deveria ser, essencialmente, de diagnóstico ou de avaliação/feedback e ocorrer em situações de impasse no trabalho do grupo ou quando a estratégia ou trabalho apresentado fossem incorretos. O delineamento de propostas de intervenção, a partir da antecipação de dificuldades dos alunos, abarcou as várias etapas do ciclo da modelação, com destaque para a compreensão da situação, a construção do modelo real e, posteriormente, do modelo matemático.

Iremos destacar as dificuldades associadas à compreensão da situação e à construção do modelo real. Durante a preparação da tarefa, o processo de construção da caixa foi discutido no sentido de identificar eventuais dificuldades dos alunos na interpretação da planificação apresentada. A professora afirmou: "eu acho que não se vai colocar, mas em última instância pode ser que alguém não entenda o que está aqui em causa". E acrescentou: "eu acho que não vão ter a menor dificuldade". No entanto, ficou definido o apoio a prestar aos alunos: analisar a planificação e construir uma caixa conforme a figura sugeria.

Durante a aula todos os grupos de alunos tiveram dificuldade na construção da caixa real. O apoio prestado pela professora nesta dificuldade seguiu a proposta de intervenção delineada e ajudou três grupos, mas não foi eficaz com um dos grupos, não sendo possível a estes alunos completar a tarefa proposta. A professora, apesar de ter um grande conhecimento dos alunos, subestimou algumas das dificuldades que estes poderiam ter na resolução desta tarefa o que pode significar que este conhecimento dos alunos é baseado na forma como a professora constrói a sua perceção das competências e capacidades dos alunos perante outro tipo de tarefas que não de modelação matemática.

Referências bibliográficas

Bakker, A., Cai, J. & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics 107*, 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1* (1), 45–58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). *How do students' and teachers deal with modelling problems?* In C. Haines (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (222-231). Ellis Horwood.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (69–78). Springer.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2006). Middle grade teachers' learning through students' engagement with modeling tasks. J*ournal of Mathematics Teacher Education, 9* (1), 5–32.

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). T*eaching and learning mathematical modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries,* ICME 13. Springer.

Kaiser, G. (2006). *T*he mathematical beliefs of teachers about applications and modelling-results of an empirical study. In J. Novotńa, H. Moraová, M.

Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the international Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3) (393-400). PME.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (3-32). Springer.

CARTAZ | O uso da Plataforma HypatiaMat na promoção da aprendizagem da adição de números naturais

POSTER | *The use of the HypatiaMat Platform in promoting learning to add natural numbers*

Daniela Pires[1], Ana Elisa Santiago[2], Fernando Martins[3]

Resumo: Este artigo tem como objetivo analisar o modo como o uso da Plataforma Hypatiamat (PHM) influenciou a compreensão da adição de números naturais por três pares de alunos do 2.o ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico. A recolha de dados foi realizada através da observação participante, notas de campo, registos áudio, análise documental das produções escritas dos alunos e dos dados recolhidos usando o *screen recording* captadas com o *software Kazam*. O processo de análise evidenciou melhorias na compreensão dos alunos relativamente à adição de números naturais, nomeadamente no que respeita o valor posicional dos números e a composição numa unidade de ordem superior.

Palavras-chave: Adição; 1.º Ciclo do Ensino Básico; Plataforma *HypatiaMat*.

Abstract: This paper aims to analyze how the use of the HypatiaMat Platform influenced the understanding of the addition of natural numbers by three pais of students of the 2nd year of the Primary School Training. The data were collected by participant observation, field notes, audio records, documentar analysis of students' written productions and the data collected using the screen recording captured with the Kazam software. The analysis process showed improvements in the students' understanding regarding the addition of natural numbers, namely with regard to the positional value of numbers and the composition in a higher order unit.

Keywords: *Addition; Primary School Training; HypatiaMat Platform.*

1. Escola Superior de Educação de Coimbra – Instituto Politécnico de Coimbra, dapires1997@gmail.com
2. Escola Superior de Educação de Coimbra – Instituto Politécnico de Coimbra – NIEFI; CIC.NOVA, elisa_santiago@hotmail.com
3. Escola Superior de Educação de Coimbra – Instituto Politécnico de Coimbra – NIEFI; CIC.NOVA, fmlmartins@esec.pt

Introdução

Nas últimas décadas, a par com a evolução das tecnologias na sociedade, a escola tem integrado na sala de aula atividades diversificadas para os alunos, desenvolvendo a utilização e integração das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) (Pires et al., 2020). Os primeiros níveis de escolaridade são a base para a aquisição de conhecimentos matemáticos, assim os alunos desenvolvem um conjunto de capacidades para conseguirem perceber qual a operação a usar para resolver uma tarefa (Rodrigues, 2017).

Assim, este estudo teve como objetivo analisar o modo como o uso da Plataforma *HypatiaMat* influenciou a compreensão da adição de números naturais por três pares do 2.o ano. Foi criado um conjunto de guiões de exploração como suporte aos alunos na realização de tarefas com recurso à PHM.

Fundamentação teórica

Os primeiros anos de escolaridade são fundamentais para adquirir um conjunto de conhecimentos matemáticos, sendo de grande importância o sentido de número e de operação, tal como referem Rodrigues (2017), Ministério da Educação (2013) e Silva (2018).

A tecnologia está interligada à Matemática, e tem um papel fundamental nesta (Nunes e Bessa, 2018), pois promove alterações no processo de ensino e aprendizagem, deixando os alunos mais autónomos intelectualmente.

A plataforma *Hypatiamat* incorpora um conjunto de aplicações hipermédia criadas com o intuito de promover a competência matemática (Pinto, 2014). Atualmente existem alguns estudos que reforçam a importância da Plataforma Hypatiamat na aprendizagem das crianças, tal como o estudo de Hortênsio (2020).

Opções Metodológicas

Nesta investigação foi utilizada uma metodologia de caráter qualitativo, de índole interpretativa, design de investigação-ação e observação participante (Cohen et al., 2007). A experiência de ensino foi realizada numa turma do 2.o ano do 1.o CEB, com 22 alunos, de idades compreendidas entre os 6 e os 7 anos, que trabalhavam colaborativamente em grupos de 2 ou 3 elementos. Decorreu em três fases diferentes: fase inicial; fase de intervenção (quatro sessões); e fase final, contemplando as sessões da fase de intervenção tarefas da PHM, suportadas em guiões construídos pela investigadora. Apesar de todos os alunos terem participado no estudo, selecionámos 3 grupos (Grupo 1, 2 e 3) para proceder à análise dos dados por considerarmos serem representativos dos diferentes níveis de conhecimento.

Durante as sessões da fase de intervenção, os alunos tinham de realizar as tarefas da PHM, com o suporte de um guião, como o exemplo apresentado a seguir:

Guião da sessão nº 1

Nome: ______________________________ Data: ____/____/____

Nome: ______________________________ Data: ____/____/____

2 - Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Figura 1. Exemplo do Guião da sessão n.º 1

Apresentação e Discussão de Resultados

A seguir apresentam-se e discutem-se as produções dos alunos, ao longo das sessões.

Na primeira sessão, as explicações dos alunos eram minimalistas, limitando-se os alunos a copiar o que surgia no monitor. Nesta sessão, os alunos desistiam muito facilmente das tarefas, recorriam ao botão da ajuda ou iam tentando até conseguirem acertar na resposta, como podemos verificar no seguinte diálogo do grupo 1:

> **Aluno A** – Nunca vamos sair daqui.
> **Aluna B** – Mete, mete.
> **Aluno A** – Olha trinta e cinco.
> **Aluna B** – Não, tive uma ideia. Porque é que não metemos zero, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, treze, catorze.
> Outras vezes, os alunos solicitavam ajuda à professora estagiária (PE), que tentava fornecer-lhes ferramentas para conseguirem chegar à resposta final, tal como está descrito no seguinte diálogo:
> **Aluno C** – Professora, nós estamos muitas vezes a repetir esta que não sabemos.
> **PE** – Cada página tem dez selos, consoante as páginas que aí têm quantos selos é que têm? Aluno C – Faltam aqui selos.
> **PE** – Olha tu tens aqui seis páginas.
> **Aluna D** – Nós antes tínhamos sete.

Já na segunda e terceira sessão, percebemos que os alunos tentaram melhorar as suas explicações e transcrever, para além da resposta, o seu raciocínio existindo uma melhoria no pensamento e no funcionamento dos grupos. Por fim, na última sessão, podemos relatar que os alunos explicaram o seu pensamento de uma forma mais pormenorizada e com uma maior complexidade. Os alunos começaram também a trabalhar mais cooperativamente. Ao longo do estudo, existiram melhorias nos alunos quer a nível do raciocínio quer a nível da comunicação entre pares.

Desta forma, consideramos importante a integração das tecnologias na prática dos professores, com o recurso a guiões didáticos tanto para aulas digitais como aulas não digitais. Outro aspeto importante é trabalho cooperativo entre os alunos, permitindo a partilha de ideias e das diferentes formas de pensamento.

Conclusão

No final deste estudo, pudemos afirmar que existem evidências para que possamos referir que a tecnologia é uma mais-valia para explorar conteúdos matemáticos, melhorando a aprendizagem da adição de números naturais e do sentido de número no desenvolvimento das crianças, tendo os guiões um papel fundamental na produção da comunicação matemática e raciocínio, como refere Hortênsio (2020) e Pires (2021).

Concluindo, consideramos que existe um longo caminho a percorrer e que ainda existe muito a fazer para mudar mentalidades e as práticas profissionais (Costa et al., 2020).

Referências bibliográficas

Costa, S., Duque, I., & Martins, F. (2020). Reciclagem e literacia estatística: uma prática interdisciplinar. *APEduC Revista / APEduC Journal, 1* (1), 129-141. https://apeducrevista.utad.pt/index.php/apeduc/article/view/35

Hortênsio, A. (2020). A influência da plataforma hypatiamat na resolução de situações problemáticas envolvendo a adição e subtração. [Relatório Final do Mestrado, ESE IPC]. Repositório Comum. http://hdl.handle.net/10400.26/33215

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e metas curriculares de matemática do ensino básico*. DGE. http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematic a_basico.pdf

Pinto, R. (2014). *As aplicações hipermédia podem promover o sucesso escolar e a autorregulação da aprendizagem? Análise da eficácia de uma aplicação hipermédia* [Tese de Doutoramento, Universidade do Minho]. Repositório Universidade do Minho. http://hdl.handle.net/1822/35846

Pires, D. (2021). *Adição de números naturais usando a plataforma hypatiamat* [Relatório Final de Mestrado, ESE IPC]. https://www.esec.pt/sites/default/files/wysiwyg_files/versao_final_-_daniela_pires.pdf

Pires, D., Santos, P., Santiago, A., & Martins, F. (2020). Adição de números naturais usando a plataforma hypatiamat. In F. Martins, L. Mota, & S. Espada (Eds.), *A Formação de professores e educadores: das políticas às práticas supervisionadas* (pp. 269-285). https://www.researchgate.net/publication/347458333_Adicao_de_numeros_naturais_usan do_a_plataforma_HypatiaMat

Rodrigues, J. (2017). A *adição e subtração no pré-escolar e no 1.o ciclo no ensino básico* [Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho]. Repositório Universidade do Minho. http://hdl.handle.net/1822/57295

Silva, R. (2018). *Modelação matemática como ambiente de aprendizagem: o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição e da subtração* [Relatório Final do Mestrado, ESE IPC]. Repositório Comum. http://hdl.handle.net/10400.26/24168

Contactos

Email: siem2021.apm@gmail.com
Morada: SIEM 2021 - Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Telefones: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77

XXXI SIEM
seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

Santarém | Online 2021

XXXI SIEM

seminário de investigação em educação matemática 3 de julho de 2021

APM Associação de Professores de Matemática

POLITÉCNICO DE SANTARÉM

POLITÉCNICO DE SANTARÉM ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS SÁ DA BANDEIRA

Santarém