SIEM 2018

Cidade de Almada

Escola Secundária Cacilhas-Tejo

Livro de atas

APM
Associação de Professores de Matemática

''Almada cresce, ganha identidade própria, qualifica-se, trilha a sua própria História .... ''

Título

Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática

Organizadores

Ana Caseiro, António Domingos, José Manuel Matos, Fernando Luís Santos, Mária Almeida, Paula Teixeira e Ricardo Machado

Edição

Associação de Professores de Matemática

Lisboa, Abril de 2018

Composição

Fernando Luís Santos

Capa

Miguel Caria com o apoio da professora Tânia Matos

ISBN: 978-972-8768-69-0

Apoios:

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Índice

Introdução

Conferências plenárias

Ensino profissional: educar para o futuro 8

Alexandra Sofia da Cunha Rodrigues

From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process 19

Maria Alessandra Mariotti

Desenvolvimento curricular na matemática escolar 34

José Manuel Matos

Simpósios

Avaliação formativa com recurso à tecnologia 53

Carla Roque, Helena Rocha

Demonstração matemática versus demonstração no ensino da Matemática – a perspetiva de professores 70

Helena Rocha

Avaliação e comunicação na aula de matemática: das perceções às práticas 83

António Guerreiro, Cristina Martins

Ensinar matemática recorrendo ao ensino experimental das ciências 97

Maria Cristina Costa, António Domingos

O conhecimento estatístico de futuros professores dos primeiros anos: um estudo de caso numa escola superior de educação 111

Ana Caseiro, Ricardo Machado, Tiago Tempera

Interpretação por futuros professores de Educação Básica de estratégias de resolução de tarefas envolvendo números racionais 125

Maria Clara Martins, Neusa Branco

Implicações da utilização de simulações e protótipos num problema de modelação: uma abordagem de STEM 129

Ana Margarida Baioa, Susana Carreira

As armadilhas do consumismo: uma abordagem para educação financeira escolar 148

Katyane Anastácia Samoglia Costa Capichoni Massante, Amarildo Melchiades da Silva

A génese instrumental com a calculadora gráfica na demonstração do Teorema de Pitágoras no 8.º ano de escolaridade 155

Manuela Subtil, António Domingos

As representações dos números racionais na perspetiva de alunos do 5.º ano de escolaridade 172

Sofia Graça, João Pedro da Ponte, António Guerreiro

Um panorama dos programas de aritmética dos grupos escolares de Santa Catarina, Brasil: 1911 e 1946 187

Thuysa Schlichting de Souza, David Antonio da Costa

O questionamento da professora na promoção da estruturação numérica 199

Margarida Rodrigues, Lurdes Serrazina, Ana Caseiro

Problem based learning num curso profissional: uma experiência de ensino no módulo Otimização (A10) 215

Alexandra Sofia Rodrigues, Corália Pimenta

Uma abordagem aos sistemas de equações no 8.º ano 229

Luís Bernardino , António Guerreiro

Perceber o pensamento algébrico das crianças: um estudo com futuros educadores e professores dos anos iniciais 247

Joana Cabral, Hélia Oliveira, Fátima Mendes

Dificuldades de alunos do 2.º ciclo na construção de triângulos 250

Paula Vieira da Silva, Leonor Santos

Crenças dos docentes do 1.º Ciclo sobre a aprendizagem matemática fora da sala de aula 263

Alexandra Souza, Margarida Rodrigues

O desenvolvimento do raciocínio geométrico:um estudo no 1.º ciclo do ensino básico 280

Joana Conceição, Margarida Rodrigues

Painel plenário

Currículo e avaliação em Matemática 284

Cecília Monteiro, António Borralho, António Teodoro, Teresa Moreira, Helena Silva

Espaço GTI

Third Wave Project – WIFItoo 286

Apresentado por: Ana Isabel Silvestre, Moderado por: Hélia Pinto

Introdução

O XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática (XXIX SIEM) é uma iniciativa da Associação de Professores de Matemática (APM) que se realizou nos dias 6 e 7 de abril de 2018, na Escola Secundária Cacilhas-Tejo, Almada.

À semelhança de anos anteriores, e tendo como preocupação a melhoria na qualidade do ensino e na investigação no domínio da Educação Matemática, estabelecendo conexões entre estes dois pólos, existiu um momento de interligação entre o programa científico do SIEM e do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática).

O programa científico do XXIX SEIM englobou três conferências plenárias, sendo uma delas comum ao ProfMat, um painel plenário, também comum ao ProfMat, seis simpósios de comunicação e o Espaço GTI.

A primeira conferência plenária, partilhada com o ProfMat, foi proferida por Alexandra Rodrigues, do Instituto de Gouveia-Escola Profissional, e teve como título "Ensino profissional: Educar para o futuro". A segunda conferência plenária dinamizada por Alessandra Mariotti, da Università di Siena, intitulou-se "From using artefacts to mathematical meaning: The teacher's role in the semiotic mediation process". A terceira, e última, conferência plenária foi proferida por José Manuel Matos, da Universidade Nova de Lisboa e teve como título "Desenvolvimento curricular na matemática escolar".

O painel plenário intitulado por "Currículo e avaliação em Matemática" foi moderado pela Cecília Monteiro, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa. Como intervenientes neste painel estiveram António Borralho, da Universidade de Évora, António Teodoro, da Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Teresa Moreira, da Associação de Professores de Matemática e Helena Silva, do Externato Fernão Mendes Pinto.

As quinze comunicações e os três *posters* foram organizados em seis simpósios. Este ano incluíram-se as apresentações dos *posters* nos próprios simpósios, com o objetivo de existir uma partilha e discussão mais ampla e aprofundada dos seus conteúdos. Os temas das comunicações e dos *posters* foram diversificados, abrangendo vários temas relevantes no domínio da Educação Matemática (Currículo da Matemática, Aprendizagens Matemáticas, Avaliação, Formação de professores, Tecnologias, Educação Financeira e História da Matemática). Todas as comunicações e *posters* foram sujeitos a um processo de revisão científica por pares.

Neste documento, apresentam-se os textos remetidos pelos autores das conferências e das diversas comunicações e *posters*.

O XXIX SIEM contou com a participação de professores e investigadores oriundos de Angola, Brasil, Itália e Portugal.

Almada, abril de 2018

A Comissão Organizadora

Conferências plenárias

ENSINO PROFISSIONAL: EDUCAR PARA O FUTURO

Alexandra Sofia da Cunha Rodrigues

Instituto de Gouveia — Escola Profissional e UIED, alexsofiarod@gmail.com

Resumo. *Este artigo faz uma reflexão sobre o ensino profissional em Portugal, tendo em atenção o contexto histórico do seu (re)aparecimento e algumas perspetivas de organizações nacionais e internacionais sobre este tema, à luz de relatórios publicados recentemente. Ao longo dos últimos anos, a investigação no ensino profissional ficou aquém do desejável no nosso país, porém encontrámos trabalhos importantes que poderão contribuir para a (re)formulação do currículo de matemática e das metodologias aplicadas na aula nos cursos profissionais. Partindo dos resultados da investigação pretende-se promover a reflexão sobre o enquadramento da disciplina de Matemática para que esta seja um contributo na educação integral dos jovens e tenha um papel estruturante na formação dos cidadãos do século XXI.*

Abstract. *This article intends to be a reflexion about technical and vocational training in Portugal, taking into account the historical context of its (re)appearance and some perspectives of national and international organizations on this subject, in the light of recently published reports. During the last years, research in vocational education has fallen short of what is desirable in our country, but we have found important works that could contribute to the (re)formulation of the mathematics curriculum and the methodologies applied in the classroom in the professional courses. Starting from the results of the research, it is intended to promote reflection on the framework of Mathematics and turn it as a contribution in the integral education of the young, with a foundation role in the formation of the citizens of the 21st century.*

Palavras chave: *Ensino profissional; currículo; educação matemática.*

Introdução

A vertente profissional é fundamental na vida da maioria das pessoas e o motor da economia global. A um nível pessoal, a profissão de cada indivíduo não se limita a fornecer os meios de sobrevivência em termos de alimentos, roupas e alojamento, mas o tipo de trabalho realizado por indivíduos e grupos tem também um impacto importante sobre a sua autoidentidade, posição social e padrão de vida (UNESCO, 2006). O ensino profissional produz impacto a nível social, económico, educacional, provocando alterações no mercado de trabalho e nas políticas de desenvolvimento, tendo consequências ao nível da construção da economia e na promoção de um desenvolvimento sustentável.

Considerando a importância que o ensino profissional tem para a formação e qualificação de jovens, iniciaremos com um enquadramento histórico do ensino

profissional em Portugal e com uma reflexão sobre relatórios recentes de diversas organizações nacionais e internacionais.

Posteriormente, de forma não exaustiva, pretendemos ter em conta alguns resultados da investigação portuguesa sobre o ensino profissional. Não é objetivo deste artigo fazer uma descrição detalhada e muito pormenorizada dos estudos existentes. Pelo contrário, ele pretende essencialmente refletir sobre alguns resultados da investigação, numa abordagem tanto quanto possível pouco tecnicista, mas que permita ao leitor conhecer os textos fundamentais e explorar por si este campo.

Finalmente, à luz das investigações já realizadas iremos tecer algumas considerações sobre a matemática no ensino profissional e apontar possíveis áreas de investigação futuras, para que os resultados decorrentes da investigação sobre esta modalidade de ensino em Portugal venham a constituir um recurso à disposição dos responsáveis educativos, dos diretores dos cursos profissionais, dos formadores e dos professores para a perspectivação de novos programas e metodologias, para uma possível operacionalização nas escolas, em particular, nas salas de aula.

Enquadramento histórico recente

Houve três tentativas para restabelecer o ensino profissional público (de nível médio) em Portugal, após o 25 de abril de 1974. A via profissionalizante criada em 1980, o ensino técnico-profissional em 1983 e a criação das escolas profissionais em 1989. As duas primeiras iniciativas não foram bem sucedidas, mas as escolas profissionais desempenharam um papel fundamental na formação profissional, respondendo a uma procura crescente ao longo do tempo que se seguiu à sua constituição (CNE, 2014). "Em 2000, aproximadamente 200 escolas profissionais privadas eram responsáveis pela formação profissional de nível secundário de 26.777 alunos, número que atingiu em 2010, um valor perto de 41.000 alunos." (CNE, 2014, p. 15).

As escolas profissionais foram criadas com autonomia pedagógica e os primeiros planos curriculares para a disciplina de Matemática foram trabalhados em parceria com o Gabinete de Educação Tecnológica, Artística e Profissional (GETAP) e tinham a marca das respetivas escolas. Até 2004/05, a diferenciação curricular era uma mais-valia dos projetos educativos das escolas profissionais (Rodrigues, 2015).

Após a publicação em 2004 do Decreto-Lei que reorganiza e restrutura os cursos de nível secundário, a carga horária total dos cursos profissionais diminuiu de 3600 horas

para 3100 horas, e as disciplinas da componente científica (2 ou 3 disciplinas, onde se enquadra a Matemática) teriam um total de 500 horas, diminuindo o número de horas da disciplina. O mesmo diploma prevê que "Para a consecução destes desideratos, impõe-se realizar a revisão curricular deste nível de educação, procedendo ao ajustamento de currículos e conteúdos programáticos, garantindo uma correta flexibilização dos mecanismos de mobilidade horizontal entre cursos." (Decreto Lei n.º 74/2004, p. 1931).

Em sequência, a Direção Geral de Formação Vocacional publicou em 2004 o programa da disciplina de Matemática para os cursos profissionais de nível secundário (DGFV, 2004), que se mantêm em vigor até à data de hoje.

A visão nacional e internacional sobre o ensino profissional

O ensino profissional está na ordem do dia e nos discursos de vários países pelo papel que poderá ter no desenvolvimento do tecido económico e na promoção da economia. A nível global destaca-se a importância do desenvolvimento de competências, como uma das preocupações centrais do século XXI. Diversas organizações nacionais e internacionais desenvolveram estudos sobre o desenvolvimento de competências transversais e a relação da importância da educação com o mercado de trabalho. Neste texto iremos focar-nos nos pontos de vista do Conselho Nacional da Educação, da UNESCO e da OCDE.

A OCDE considera que o ensino profissional contribui para dotar os indivíduos de competências transversais que lhes permitam a aprendizagem ao longo da vida e que suportem o desenvolvimento profissional num mercado de trabalho em rápida evolução (Field, Hoeckel, Kis & Kuczera, 2010). Assiste-se à valorização da formação ao longo da vida e a um crescimento da importância atribuída à formação técnica e profissional em todos os níveis de ensino, como preparação para integrar o mundo do trabalho. Na era da informação emergente, tanto a natureza do trabalho como a preparação para o trabalho estão a atravessar grandes mudanças, com o aparecimento de profissões que envolvem conhecimentos tecnológicos e a valorização da formação para ingressar na vida ativa. Anthony Mann, que lidera a equipa do ensino técnico profissional e formação de adultos na OCDE, refere que o interesse no ensino profissional está a crescer e destaca três características comuns de sistemas de ensino profissional de sucesso: i) dota os jovens das competências que eles precisam e que os empregadores querem, ii) dota os formandos de

alicerces que oferecem apoio ao progresso profissional no mundo do trabalho e iii) têm em conta o *background* do formando.

Por sua vez, a estratégia da UNESCO para 2016-2021, enfatiza o direito à educação, os princípios de equidade, inclusão e qualidade e a importância da aprendizagem ao longo da vida. O ensino profissional está preocupado com a aquisição de conhecimentos e habilidades para o mundo do trabalho, e deverá ajudar os jovens e os adultos a desenvolver as habilidades que precisam para o emprego, o trabalho digno e o empreendedorismo, promovendo um crescimento económico equitativo, inclusivo e sustentável e apoiando transições para economias verdes e sustentabilidade ambiental.

No quadro das orientações europeias para a modernização dos sistemas de educação e formação de 2000, o ensino profissional assume um papel determinante nas políticas públicas de educação e formação, "e Portugal tem vindo a apostar fortemente nesta via de ensino quer através da sua extensão, em 2004, à rede pública de escolas, quer através da definição e criação de outras ofertas formativas de cariz profissionalizante, de estrutura modular e de formação profissional inicial de curta duração, com o objetivo de qualificação da população portuguesa." (CNE, 2014, p. 4).

Investigação sobre o ensino profissional em Portugal

Tendo consultado os repositórios de algumas universidades portuguesas, percebemos que o ensino profissional no nosso país ainda não é um foco principal na investigação, especialmente na investigação em educação matemática. Salienta-se que não se pretende, neste artigo, elencar exaustivamente toda a investigação existente, mas apenas destacar alguns trabalhos de investigação que nos possam ajudar a refletir sobre o papel do ensino profissional em Portugal e sobre o enquadramento da disciplina de Matemática e a sua contribuição para a formação de técnicos intermédios, que se pretendem competentes para integrar um mundo de trabalho em constante evolução.

Um desses estudos, que culminou com uma tese de doutoramento analisou quais as condições e formulação das políticas públicas na generalização do ensino profissional, em 2004-2009 (Duarte, 2015). A autora refere que a partir de 2001, a pressão internacional, através da divulgação de indicadores relativos ao abandono escolar precoce e à população ativa com o ensino secundário ou superior, posicionavam Portugal entre os piores dos países da OCDE. Após as imposições resultantes das metas europeias assinadas na Estratégia de Lisboa, e atendendo aos resultados da participação portuguesa em

programas internacionais como o PISA bem como à análise dos resultados internos decorrentes de vários anos de exames nacionais foi diagnosticada uma crise na escola pública que promoveu uma mudança ao nível da percepção pública dos problemas. Como resposta a este problema, e face à impossibilidade orçamental de criar mais escolas profissionais privadas, a introdução, em 2004, e a generalização, em 2007/2008, dos cursos profissionais nas escolas secundárias foi o instrumento de política desenvolvido para responder aos problemas e bloqueios que estavam identificados no ensino secundário. Esta decisão política, contribuiu de facto para a redução do abandono escolar e o aumento da escolarização da população portuguesa, porém "o perfil dos alunos que frequentam os cursos profissionais, apesar de heterogéneo, apresenta uma maior relação com origens sociais mais desfavorecidas e trajetos escolares marcados por algum insucesso escolar" (Duarte, 2015, p. 282).

A mesma conclusão sobre o perfil dos alunos que ingressam no ensino profissional encontra-se no estudo conduzido por Silva (2013) em quatro escolas da região de Viseu (duas escolas profissionais privadas e dois agrupamentos de escolas com cursos profissionais), tendo concluído que

> O ensino profissional é encarado maioritariamente como um recurso e não como vocação, não só pelos alunos e suas famílias, que veem neste tipo de ensino como um caminho "mais facilitador" de concluírem o ensino secundário, mas também pelos governantes e escolas secundárias, que encaram o ensino profissional como um recurso para manter no sistema de ensino os alunos sem sucesso no ensino regular. (Silva, 2013, p. 102)

Também Alves (2015), que realizou uma investigação em cinco instituições do ensino profissional do Porto e de Matosinhos, reconheceu as debilidades do sistema de ensino profissional em Portugal, referindo que a imagem desta tipologia de ensino está associada a um sistema de ensino-formação orientado para grupos sociais com baixos níveis de escolaridade, facultando-lhes uma formação de índole prática, orientada para a aprendizagem técnico-profissional e para o ingresso no mercado de trabalho. Porém, refere como positivo o papel desta modalidade de ensino que contribui para que jovens provenientes de meios mais desfavorecidos não abandonem a esperança de melhorar as suas condições de vida, investindo no aumento dos seus conhecimentos e qualificações. Falta refletir sobre o futuro do ensino profissional e percepcionar que investimento é necessário para uma maior credibilização e valorização social dos técnicos intermédios formados em cursos profissionais. Reconhecidamente, o ensino profissional teve um papel

importante na redução do abandono escolar e no investimento formativo de jovens de origens socioeconómicas mais desfavorecidas, o próximo passo seria investigar que políticas económicas e sociais deveriam ser implementadas para que o tecido empresarial reconheça e valorize as competências adquiridas pelos jovens que concluíram o seu percurso escolar através do ensino profissional.

Em várias investigações sobre a matemática no ensino profissional, há sugestões metodológicas a adotar no que concerne à disciplina de Matemática. Uma dessas investigações, foi levada a cabo por Vieira (2000) que realizou um estudo empírico de uma intervenção educativa com recurso à aprendizagem colaborativa, tendo como ponto de partida o problema do insucesso na disciplina de Matemática, que o autor considera "estruturante, para a formação dos indivíduos, no contexto do ensino profissional" (Vieira, 2000, p. 230). Participaram 182 alunos, de nove turmas do 1º ano do ensino profissional, da região centro de Portugal. O trabalho empírico realizado pelo autor contou com três estudos. O primeiro, permitiu a construção/adaptação dos instrumentos, o segundo a apreciação dos efeitos da introdução de estratégias de aprendizagem cooperativa na aula de matemática, e o terceiro, de carácter exploratório, a análise de características gerais de evolução dos resultados escolares e de variáveis nele associadas no ensino profissional. Neste último, os resultados obtidos para a intervenção realizada foram surpreendentes perante a análise teórica efectuada e as hipóteses avançadas, que não corresponderam ao esperado e determinaram a existência de resistência dos alunos à metodologia utilizada. O autor refere que esta resistência pode ser devida a i) à aplicação do estudo em grupos heterogéneos, ii) ter sido apresentada aos alunos no ensino secundário e não numa face mais precoce e iii) ter sido aplicada no final do ano letivo, pois torna-se mais difícil introduzir mudanças e percepções no conhecimento dos alunos. Falta um maior e melhor conhecimento do ensino profissional, que poderá trazer contribuições importantes para definir os modelos e metodologias mais adequadas de aplicação na aula de Matemática, e permitir a sua adaptação a estudantes que valorizam um ensino mais prático e dirigido para o futuro mercado de trabalho.

Outro estudo, no âmbito da resolução de problemas, foi levado a cabo por Babo (2017), que pretendeu averiguar como alunos do segundo ano de um curso profissional, com níveis distintos de conhecimentos e diferentes motivações pela disciplina, resolvem problemas de programação linear com recurso à calculadora gráfica. As conclusões alcançadas indicam que para que consigam adquirir todas as competências matemáticas, é

necessário que os alunos se envolvam noutro tipo de experiências para além de ouvir o professor e praticar a resolução de exercícios; é essencial que explorem, investiguem, resolvam problemas, comuniquem, discutam, visto que aprender requer um investimento cognitivo, afetivo e reflexivo. O trabalho em pares promoveu a cooperação e foi visto como positivo uma vez que "verificou-se que os alunos trocaram conhecimentos, assumindo uma postura de diálogo e de discussão. Souberam ouvir e questionar o colega de trabalho com o intuito de se entreajudarem, de aprenderem e de solucionarem a tarefa proposta." (Babo, 2017, p. 80), competências que se pretendem no mercado de trabalho. Esta conclusão também foi registada por Bogas (2015) no seu relatório final de estágio em ensino da Matemática. Babo (2017) considerou ainda que uma das maiores dificuldades dos alunos registou-se na interpretação do enunciado e, sem querer generalizar, constatou que neste caso foi interessante notar que os alunos que revelam mais dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos e menos interesse pela disciplina desenvolveram raciocínios mais concretos na resolução de tarefas contextualizadas à realidade e se mostram menos preocupados em utilizar a "fórmula" que lhes permite a resolução de problemas na aula. Seria importante perceber o passado escolar dos alunos que ingressam num curso profissional e qual a sua relação anterior com a disciplina de Matemática. Este conhecimento iria permitir aos docentes uma maior adequação das tarefas ao perfil dos alunos.

No âmbito da investigação para obtenção do Grau de Mestre, Mota (2016) analisou o desempenho de um grupo de alunos do 1º ano de um curso profissional, na aplicação de conceitos matemáticos a tarefas contextualizadas no âmbito da educação financeira inseridos no *Módulo A3 - Estatística*. Os resultados do estudo revelaram que os alunos apresentaram lacunas na aplicação e compreensão de conceitos matemáticos. Porém, a investigadora considerou que a introdução do estudo da estatística aplicada a situações de natureza financeira gerou níveis de envolvimento, empenho e motivação significativos. Uma das conclusões deste estudo foi o registo do elevado potencial da disciplina de Matemática para a promoção da educação financeira. A existência de um programa de matemática fechado e estruturado em módulos poderá dificultar a exploração de tarefas de educação financeira na aula de Matemática.

Numa outra vertente, Carvalho (2015) analisou o currículo apresentado, estudando a linguagem matemática utilizada em manuais do ensino secundário e profissional. O investigador analisou dezasseis manuais, oito de matemática A e oito para os cursos

profissionais. Na análise, verificou que os temas tratados vão sendo abordados com níveis crescente de complexidade, de forma ascendente no que respeita aos anos letivos. Concluiu que não existem diferenças marcantes entre os manuais de Matemática A e os manuais de Matemática dos cursos profissionais. Considerou que, no entanto diferenças alguns capítulos dos manuais propostos por diferentes editoras, resultantes de opções de apresentação do currículo. Um melhor conhecimento dos alunos do ensino profissional e dos seus objetivos, poderia contribuir para a elaboração de manuais mais adequados a esta tipologia de ensino.

Para terminar esta secção, falta-nos referir três estudos que analisam as implicações curriculares do programa de matemática e que referem a importância de se proceder a mecanismos de ajustamento, que se prendem com a planificação, a metodologia, a organização do trabalho dos alunos e os recursos, por forma a reforçar a importância da disciplina de Matemática no enquadramento técnico dos cursos profissionais.

Monteiro (2010) investigou as diferenças de gestão curricular ao nível da disciplina de Matemática nos cursos profissionais e nos cursos científico-humanísticos. O estudo foi conduzido numa escola do Barreiro e a amostra foi constituída por um grupo de alunos de 10º ano correspondente a duas turmas do ensino científico-humanístico e duas turmas do ensino profissional, ambas com uma carga horária de 300 horas na disciplina de Matemática. Um dos resultados do estudo evidenciou existir uma maior flexibilidade na gestão curricular efetuada nos cursos profissionais do que nos cursos científico-humanísticos, atribuindo este fator à extensão do programa de Matemática A, acrescida da realização do exame nacional no final do ciclo de estudos. Nos cursos científico-humanísticos "o trabalho parece ser orientado de uma forma mais estruturada e organizada, especificamente direcionada para o exame, acabando esta prática por se tornar um pouco limitativa para o professor." (Monteiro, 2010, p. 52). Um dos resultados desta investigação recomenda uma diferenciação dos métodos e gestão curricular do programa de Matemática dos cursos profissionais, atendendo às necessidades diferenciadas de aprendizagem dos alunos e tendo em vista a interdisciplinaridade com a área técnica do curso. Também Rodrigues (2015), que estudou o programa da disciplina de Matemática e investigou a perceção do ensino da disciplina no conjunto de professores de quatro escolas profissionais, considerou que deveria haver uma maior flexibilização curricular para permitir a exploração de aplicações da Matemática no contexto da área técnica do curso e a diferenciação pedagógica dos alunos. Santos (2014), numa investigação que contou com a

participação de seis professores em três momentos distintos, lamentou que as situações problema propostas pelos docentes de Matemática não tenham mais relevância para os respetivos cursos e considera que esta lacuna se deve à ausência de trabalho colaborativo entre os professores de Matemática e os restantes professores do Conselho de Turma, dificultando a articulação de conhecimentos.

Faltam investigações sobre quais as competências de matemática a desenvolver nos alunos dos cursos profissionais, que lhes permitam uma melhor integração no mercado de trabalho, e que identifiquem conteúdos de matemática adequados às áreas de formação que integram o catálogo nacional de qualificações por forma a responder melhor às necessidades do tecido empresarial empregador.

Considerações finais

À luz da investigação feita em Portugal sobre a matemática no ensino profissional, pretendemos refletir sobre enquadramento da disciplina de Matemática nos cursos profissionais para que esta tenha seja um contributo na educação integral dos jovens e tenha um papel estruturante na formação de cidadãos do século XXI.

É transversal a toda a investigação, que os alunos que ingressam no ensino profissional têm características diferentes e objetivos diferentes dos alunos que estão a frequentar o ensino secundário, com vista ao prosseguimento académico de estudos. São alunos que valorizam um ensino mais prático e, na sua maioria são oriundos de meios sociais mais desfavorecidos, alguns dos quais veem nesta modalidade de ensino a oportunidade de melhorar as suas qualificações e ter um futuro melhor. Também se deverá reconhecer que cada um é único e que apresenta necessidades de aprendizagem específicas. A estrutura modular dos cursos profissionais foi criada para permitir a diferenciação pedagógica dos alunos, respeitando diferentes ritmos de aprendizagem (Rodrigues, 2015). A organização da sala de aula e as metodologias de aprendizagem deverão proporcionar ambientes educativos em que todos os alunos possam aprender. Para que tal seja possível, os professores deverão proceder a um planeamento de forma a contemplar os aspectos sociais, e sempre que possível valorizar as aplicações da matemática à área técnica de formação do curso profissional (Monteiro, 2010).

É um desafio ser professor de Matemática num curso profissional e colaborar para dotar os alunos de ferramentas que os ajudem a ter sucesso no mercado de trabalho. Contudo, as investigações realizadas em Portugal trouxeram algum contributo para a

melhoria das práticas docentes na aula. Uma primeira recomendação prende-se com a valorização das experiências prévias dos alunos, tendo estas em conta na elaboração de tarefas. Todas as investigações apontam para a utilização de metodologias de ensino aprendizagem que contribuam para desenvolver o espírito crítico, o saber trabalhar em equipa e as competências de aprendizagem ao longo da vida. Algumas investigações destacam que se devem privilegiar a aplicação de metodologias de trabalho de projeto e de trabalho de grupo, apostando na resolução de problemas, indo de encontro ao desenvolvimento de competências de trabalhar em equipa e aprender a aprender.

Outro consenso presente na investigação é a importância da definição das equipas pedagógicas responsáveis pela formação dos alunos dos cursos profissionais, recomendando o aumento do trabalho colaborativo e a participação de todos na flexibilização curricular e adequação dos objetivos de aprendizagem à especialização técnica de cada curso, para que assim se vá de encontro aos interesses dos alunos e ao futuro perfil profissional dos mesmos.

Melhorar o ensino da Matemática nos cursos profissionais é uma responsabilidade de todos e de cada um, como agentes educativos na formação de jovens que irão ingressar um mercado de trabalho em permanente evolução, no século XXI.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Referências

Alves, J. C. S. (2015). O lugar na escola. Ensino profissional: contextos organizativos e dinâmica social (da crítica e da utopia). Dissertação de Mestrado em Sociologia, Universidade do Porto, Porto.

Babo, A. P. S. (2017). *Resolução de problemas de programação linear: um estudo no ensino profissional.* Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Bogas, H. M. G. (2015). *Trabalho de projeto em estatística no ensino profissional.* Relatório Final de Estágio em Ensino da Matemática. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

Carvalho, C. A. B. (2015). *A linguagem matemática em manuais do ensino secundário e profissional.* Tese de Doutoramento em Ciências da Educação, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

CNE, Conselho Nacional da Educação. (2014). Relatório Técnico — Ensino e formação profissional dual. Lisboa: Conselho Nacional da Educação.

Duarte, A. I. F. (2015). Condições de formulação das políticas públicas: o caso da generalização do ensino profissional, 2004-2009. Tese de Doutoramento em Políticas Públicas, Instituto Universitário de Lisboa, Lisboa.

DGFV, Direção Geral de Formação Vocacional. (2004). Programa. Componente de Formação Científica. Disciplina de Matemática. Lisboa: Ministério da Educação.

Field, S., Hoeckel, K., Kis, V. & Kuczera, M. (2010). *Learning for jobs*. Paris. OCDE publishing.

Monteiro, I. M. R. (2010). *A matemática nos cursos profissionais*. Dissertação de Mestrado em Ciências da Educação, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Mota, V. L. P. (2016). *A matemática nos cursos profissionais com recurso a tarefas de educação financeira*. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Rodrigues, A. S. (2014). Os programas de matemática no ensino profissional. Em A. J. Almeida e J. M. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)* (pp. 95-113). Caparica: UIED e APM.

Rodrigues, A. S. C. (2015). *A matemática no ensino profissional. Os programas e as representações dos professores*. Tese de doutoramento em Didática da Matemática, Universidade da Beira Interior, Covilhã.

Santos, S. M. J. (2014). Avaliação da Gestão curricular da matemática: cursos profissionais III. Tese de doutoramento em didática e formação-avaliação. Universidade de Aveiro, Aveiro.

Silva, R. P. D. (2013). *Ensino Profissional: vocação ou recurso?*. Dissertação de Mestrado em Organização e Gestão Escolar, Universidade Católica Portuguesa, Viseu.

UNESCO (2006). *What is TVET?*. Acedido em fevereiro, 2018, em http://www.unevoc.unesco.org [Texto online].

Vieira, P. N. B. (2000). Estratégias alternativas de ensino-aprendizagem na matemática: estudo empírico de uma intervenção com recurso à aprendizagem cooperativa, no contexto do ensino profissional. Dissertação de Mestrado em Psicologia, Universidade do Porto, Porto.

FROM USING ARTEFACTS TO MATHEMATICAL MEANINGS: THE TEACHER'S ROLE IN THE SEMIOTIC MEDIATION PROCESS

Maria Alessandra Mariotti

Università di Siena- Italy

Abstract: *The didactic potential of artefacts for learning have been extensively studied, with a main focus on their possible use by students and the subsequent benefits for them. However, there has been the tendency to underestimate the complexity of exploiting this potential, and specifically the complexity of the teacher's role orchestrating the teaching and learning process. Following Vygotsky's seminal idea of semiotic mediation, the theoretical framework of Theory of Semiotic Mediation (TSM) has been developed (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008) with the aim of providing a teaching and learning model, where attention is focussed on the semiotic processes related to the use of cultural artefacts. Through the semiotic lens it is possible to analyse the classroom discourse and highlight specific patterns in the teacher's action that make students' personal meanings evolve towards the mathematical meanings that are the objective of the didactic intervention. I will discuss a first model of the teacher's action and I will provide some examples drawn from long term teaching experiments carried out at different school levels.*

Key words: *Semiotic mediation; Artefact; Semiotic potential; Didactic cycle; ICT-tools.*

Introduction

Potentialities of ICT tools for learning have been extensively studied, with a main focus on the possible benefits for students; however, there is the risk of underestimating the difficulties in the integration of ICT-tools in school practice (Artigue, 2002; Lagrange et al. 2001), in particular it has become more and more urgent to address the complexity of the teacher's role in exploiting these potentialities (Drijvers, 2012). As Hoyles, Noss and Kent (2004) wrote:

> If we could understand more precisely the roles that teachers are called upon to play in computationally based environments, then it would be surely throw light on the nature of the mathematical knowledge involved, its relationship with the priorities of the official mathematical curriculum, and help to clarify how the process of integrating technologies productively into classroom practice might be facilitated. (p. 316)

As clearly pointed out from different perspectives (Bartolini Bussi, 1998; Trouche, 2004), the teaching learning process integrating ICT has to be carefully orchestrated by the teacher.

Elaborating on the seminal idea of semiotic mediation introduced by Vygotsky (1978) we elaborated a model (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008) aimed at describing and explaining the process that starts with the student's use of a specific tool to accomplish a task and leads to the student's appropriation of a particular mathematical content. In this respect, such a model consider the issue of integrating ICT tool from a broader perspective, and proposes a theoretical framework that might include any kind of artefact, given is potential to be related to a specific mathematical meaning; moreover, such theoretical approach explicitly takes into account the role of the teacher, offering the base for an explicit model of what is expected from her/him.

In this contribution, after giving an overview of the key ideas of a theoretical framework (the Theory of Semiotic Mediation, TSM) I will focus on the action of the teacher, on how she/he can utilize the artefact according to her/ his specific educational goals.

Mediation According to a Semiotic Approach

The term *mediation* has been frequently used, with different and not always compatible meanings, in relation to the introduction of new technologies in school practice, and has become widely present in the current mathematic education literature (Meira, 1995; Radford, 2003; Noss and Hoyles, 1996; Borba and Villarreal, 2005). Mostly used in relation to the support that a specific tool gives one in the accomplishment of a task through its use, the idea of mediation has been also related to the potentiality of fostering learning processes with respect to a specific piece of knowledge, for instance mathematical kowledge. However, often, the complexity of the mediation process has not been adequately ddressed, as a consequence of neglecting the epistemological issue concerning the relationship between the accomplishment of a task and the student's mathematical learning processes.

On the contrary, this issue is specifically addressed by the Theory of Semiotic Mediation (TSM) (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008), which elaborates on the notion of mediation combining a semiotic and an educational perspective, and considering the crucial role of *human mediation* (Kozulin, 2003, p.19) in the teaching-learning process. The TSM provide a model of the teaching and learning process developed around two key elements: the notion of semiotic potential of an artefact and the notion of didactic cycle. After a short description of these main notions, I will describe different mediation

modalities that may be accomplished by the teacher in exploiting the semiotic potential of a given artefact within the collective phase of a didactic cycle.

The semiotic potential of an artefact

The relationship between mathematical knowledge and the use of specific tools has a long standing history: the case of ruler and compass is perhaps the most representative. As a matter of fact, observing the use of a specific tool it may happen that an expert is led to recall a specific mathematical knowledge. Following Hoyles (1993), one can speak about the relationship between artefact and knowledge as *evoked knowledge*. For example, positional notation and the polynomial notation of numbers may be evoked by an abacus and by its use; similarly, for a mathematician, a Dynamic Geometry System may evoke the classic "ruler and compass" Geometry.

Figure 1 The pair of compasses and the glass & pencil

Let us consider the following tools (figure 1): one is the well-known pair of compasses and the other is the combination of a glass and a pencil. When used to draw, both these tools produce a circular trace, a round, and for this reason, both of them can be related, and thus evoke, the mathematical notion of circle. However, in spite of the common final product, if we compare them with respect to the gestures acted we observe that the procedure followed is completely different and evokes quite different geometrical elements and properties.

According to Rabardel (1995), we distinguish between the object itself – the artefact - and the procedure that is used to accomplish the task- schema of utilization -; considering the combination of an artefact and its schema of utilization we can identify specific mathematical meanings that may be evoked by the use of a specific artefact.

As for the combination of glass and pencil, the schema of utilization focusses on the circular movement of the hand holding the pencil; this leads to the regularity of the specific

shape that for an expert may evoke its geometric property of constant curvature; in the case of the pair of compasses, the schema of utilization focusses on the presence of the special point where the point of the first arm is fixed, the enlargement of the two arms and the constancy of such enlargement in tracing the round shape. For an expert, all that may evoke the notion of *centre*, the notion of *radius*, together with the property of the constancy of the distance between the centre and any point of the circle, that is the geometrical *definition of circle*.

It is clear that depending on which of the two artefact is used, different mathematical meanings are evoked; in other words we can say that the two artefact have different *semiotic potential*. In general we define the *semiotic potential of an artefact* as the double relationship that may occur between an artefact and on the one hand the personal meanings emerging from its use to accomplish a task (instrumented activity), and on the other hand the mathematical meanings evoked by its use and recognizable as Mathematics by an expert.

An a priori analysis, involving at the same time a cognitive and epistemological perspective, may lead one to identify the *semiotic potential* of an artefact.

The design of any pedagogical plan (teaching-learning sequence) centred on the use of a given artefact has to be based on an a priori description of the semiotic potential of an artefact; examples inspired by classic ancient artefact can be that of the abacus (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008, p 758 ff.) and that of the prospectograph (Bartolini Bussi, Mariotti and Ferri 2005). As far as ICT are concerned, the instrumental approach (Rabardel, 1995) and its elaboration by some authors in the case of ICT (Lagrange, 2000; Artigue, 2002; Trouche, 2005) provide fruitful tools of analysis for identifying the potential meanings that might emerge during students' activities and the related mathematical meanings that might be evoked.

The didactic cycle

The identification of the semiotic potential of a certain artefact constitutes the necessary ante fact of its use in the classroom, however the effectiveness of its use needs the careful design of the teaching intervention. When a cognitive and epistemological analysis has produced a sequence of possible tasks, a suitable didactic organization of these tasks is required, together with teacher's appropriate management of classroom activities. Taking a semiotic perspective, means to focus on the production of signs and on

the process of transformation of such signs, considering such transformation as an evidence of learning. In other words, according to the TSM we recognize a central role to signs[1], both as a product and as a medium, and we interpret the construction of knowledge as an evolution from meanings rooted in the use of the artefact toward meanings explicitly recognized as consistent with Mathematical meanings: starting with the *unfolding of the semiotic potential*, witnessed by students production of specific signs, the meaning of which primarily refers to the use of the artefact (*artefact signs*), the active intervention of the teacher will promote the evolution of such signs into the expected mathematical signs. The whole structure of a teaching sequence may be outlined as an iteration of *didactical cycles,* designed to *exploit of the semiotic potential of the artefact*. Each cycle is constituted by specific activities, each type of activity contributes differently but complementarily to develop the complex process of semiotic mediation.

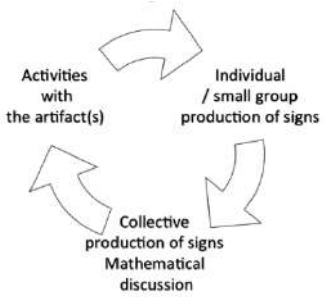


Figure 2 The didactic cycle

In summary, the *semiotic mediation process* consists in the evolution from the emergence of personal meanings related to the accomplishment of a task and in the collective development / construction of shared signs related to both the artefact's use and the mathematics to be learnt. A sequence of didactic cycles can be organized with the aim of supporting such an evolution; the different activities proposed in each cycle are classified according to their contribution to the semiotic mediation process. Three categories of tasks constitute one didactic cycle, as described in the following.

Activities with the artefact. These constitute the start of any cycle and are based on asking students to carry out a task involving the use of the artefact, with the aim of promoting the emergence of signs (words, sketches, gestures) whose meanings refers to

[1] The use of the term sign is inspired by Pierce. We assume an indissoluble relationship between signified and signifier. In the stream of other researchers (Radford, 2003; Arzarello, 2006) we developed the idea of meaning originate in the intricate interplay of signs (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008); for a thoughtful discussion see also (Sfard, 2000, p. 42 and following).

the use of the artefact but are also coherent with the mathematical meanings that are the goal of the teaching intervention.

Activities of individual production of signs. Spontaneous production of signs emerging during the activities with the artefact, different semiotic activities are proposed, asking individual production and elaboration of signs, related to the previous phase. A crucial role is played by written texts, because of their nature and unlike other signs, like gestures, written signs (in particular words) start to be detached from the contingency of the situated action. Moreover written productions can become objects of discussion in the following collective work.

Collective Discussion. This kind of activity plays an essential part in the teaching-learning process and constitute the core of the semiotic mediation process. The whole class is engaged: various solutions are discussed collectively, students' written texts or other texts are collectively analysed, commented, elaborated. Students' intervention are coordinated by the teacher with the objective of fostering the move towards mathematical meanings, exploiting the semiotic potentialities coming from the use of the particular artefact.

The role of the teacher in the development of the semiotic mediation process.

The semiotic mediation perspective stresses the fact that the artefact is used in the classroom not only by the students for solving given tasks, but it is also used by the teacher for accomplishing a didactical task, pursuing her/his educational goals. In this sense, the artefact is a resource for the teacher. It is used by the teacher as a **tool of semiotic mediation** (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008, p.754).

In each of the phases of the didactic cycle the teacher plays a crucial role, her intervention concerns

- the design tasks aiming at favouring the unfolding of the semiotic potential of the selected artefact,
- the analysis of students' written solutions and reports after the accomplishment of the tasks identifying the emergence of the expected signs,
- the planning of the collective discussion on the base of the results of the previous analysis
- the management of the collective discussion fostering the evolution of students' personal meanings towards the desired mathematical signs.

Some of the teacher's actions sketched above concern the design of the teaching interventions, while others concern its enactment; some concern the social activities in the classroom and others concern the individual activities.

In the following sections, I will focus on the teacher's action concerning collective activities, specifically those aimed at driving the classroom discussion in order to promote the development of the semiotic mediation process.

The evolution of the mathematical discourse in classroom

Consistently with a Vygotskian approach, we interpret the teaching and learning process as a *process of internalization*, that is we interpret individual knowledge construction, as a social endeavour, directed by *semiotic* processes related to communication, and involving the production and interpretation of signs, in what can be called *interpersonal space* (Cummins, 1996). Moreover, still consistently with a Vygotskian approach, at the core of the TSM there is also the assumption that semiotic processes, generating and fostring the social construction of knowledge, may be directed by the teacher who can intentionally act to promote the evolution of the classroom mathematical discourse[2].

A number of teaching experiments were carried out in the past years, involving different artefacts, of different nature; according to a design-based approach, where "the design is conceived not just to meet local needs, but to advance a theoretical agenda (Barab & Squire, 2004, p. 5), specific attention was dedicated to analyse teacher's action in managing the process of evolution of signs (Mariotti, 2001; Cerulli, 2004; Falcade, 2004, 2006; Mariotti & Maracci, 2010). Such analysis highlighted recurrent action patterns related to an effective development of semiotic mediation process; as a matter of fact, these patterns can be described according to the main objectives of the classroom discussion within a didactical cycle: that is, promoting both the emergence and sharing of the students' personal signs and their evolution towards the desired mathematical signs. The description of the different categories constituting the action patterns will be given in terms of these objectives.

---

[2] The use of the term *Mathematical discourse* is consistent with the Moschkovich's (2003). characterization: " Mathematical Discourse includes not only ways of talking, acting, interacting, thinking, believing, reading, writing but also mathematical values, beliefs, and points of view. Participating in mathematical discourse practices can be understood in general as talking and acting in the ways that mathematically competent people talk and act when talking about mathematics.

Joint construction of shared-signs

Consider the objective of promoting the emergence of personal signs referring to the common experience with the artefact, two complementary actions can be defined by this objective: *back to the task* action and *focalization* action.

The first and crucial step in the semiotic mediation process consists in fostering the emergence of signs related to the actual use of the artefact, then a first class of situations can be characterized by the need of promoting the students' production of signs. In general, that need occurs at the very beginning of a classroom discussion, but it may also occur during the discussion flow: for instance, when students' contributions fail or stop to adequately feed the classroom discourse. In short, in all those moments in which the production of signs should start or re-start, the situation demand of an intentional and explicit intervention (*back to the task*) of the teacher aimed at

- provoking students' production of personal signs related to the actual use of the artefact;
- constructing a shared context for these signs through evocating of the actual context of use of the artefact;
- obtaining contributions from all the students and in a number of as large as possible.

These objectives are complementary; the teacher's actions are often meant to pursue all of them simultaneously, even if from time to time one of them might be prominent.

Typical intervention can be "who want to report on the task that was proposed?... How did you accomplished the task? ... Which was the request of the task?"

The action of back to the task is to be considered effective if it provokes a large number of contributions, however, not all the emerging elements might related to the semiotic potential; that leads to the need of selecting the pertinent aspects of the shared meanings in respect to the development of the mathematical signs that constitute the final education goal. In those moments when the selection of specific aspects is required, an intentional intervention (*focalization*) of the teacher is required, aimed at

- highlighting specific (shared) signs produced up to that moment;
- selecting pertinent aspects of the meanings of these (shared) signs;
- circumscribing the reference of certain signs to specific aspects of the use of the artefact;
- supporting students' consciousness-raising of these key aspects.

In short, the objective is that of highlighting and limiting a part of the students' common experience with the artefact, in relation to its semiotic potential. In this case gestures are often observed, sometimes simulation specific aspects of the artefact's use.

In the following, the short excerpts of a collective discussion illustrates the interlacement of interventions belonging to the two previous typologies. This excerpt is drawn from a teaching experiment (for details, see Falcade et al., 2007) concerning the use of a Dynamic Geometry System, and specifically the dragging tool and the macro tool, as artefacts whose semiotic potential concerns the mathematical meaning of variable, of function as dependent co-variation. The example is drawn from the first discussion that took place after the first session of activities at the computer when students were asked to explore the behaviour of different points on the screen; three of these points are free points and can be moved by dragging, the other (H) is obtained after the application of a macro (Effetto1) thus it depends on the others. The mathematical meanings of variables and dependency between variable is clearly evoked. In the first part of the discussion, the movements of the points have been observed but their characteristics not yet clearly identified.

Excerpt 1 from the 1st discussion

> 33. Teach : "Effetto1"[the macro] condenses, hiding it, a construction that subsequently you discovered … and what does this construction do
> 34. FI : It constructs a point.
> 35. Teach : It constructs a point H starting from …?
> 36. Chorus (C, FI, I) : From three points.
> 37 I : but… [starting] from two circles … we used the three points to make the two circles.
> 38. Teach : Yes, because one made you discover this construction … because, what did one say to you? I mean, what did the task ask you to do?
> 39. I : We should say … first if I moved point A [I was asked to say] which of the points were moving and which were not moving…
> 40. Teach : Ok … so, for instance, moving P, I see that only H moves and not only that, let us try to see, a bit … I see, what does it move too… ?

The first part of the excerpt (33; 38) shows an occurrence of a back to the task intervention that fulfil the need of recovering the experience lived in the context of the artefact; such intervention is produced as an *on the spot* reaction to students' behaviour. The last part of the excerpt (40) shows the teacher focussing on the coordination of the points' movements: according to the semiotic potential of the dragging tool, points dependency refers to the mathematical meaning of co-variation (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 769).

As said above, Back to the task and Focalization are two complementary types of interventions, the former is meant to exploit the semantic richness of the context of the artefact, the latter is meant to focus the specific meanings that might be related to the expected mathematical meanings.

Towards the mathematical signs

The mobilization, repeated and alternated, of the two types of action described above is expected to foster the construction of a shared web of signs, which on the one hand are anchored to the artefact actual, and on the other hand retain those key elements of their meanings which are pertinent in respect to the development of the mathematical signs that are the objective of the didactic intervention.

Nevertheless, the evolution towards the expected mathematical signs requires further interventions to get the required de-contextualization of the produced signs from the artefact and its use and the due proper mathematical characterization. Two more types of intervention can be mobilized for attaining this evolution: *ask for a synthesis* and *offer of a synthesis*.

The unfolding of the semiotic potential, that is the emergence of shared and stable signs condensing the key aspects relating the artefact both to the experience of its use and to the Mathematics evoked by that use, requires the teacher intervention to promote the need of generalizing and de-contextualizing the meanings emerged. However, the process of generalization and de-contextualization of meanings cannot consist of simply replacing the produced signs (for instance "moving point") with the appropriate mathematical signs ("independent variable"). New signs must be constructed and shared gaining a full mathematical meaning but at the same time keeping the specific key aspects related to their origin. For instance, the dynamics intrinsic of a moving point is expected to remain as a component of the mathematical meaning of independent variable, though its mathematical definition will not include explicitly this property. This evolution consists in a complex semiotic process requiring a direct intervention (*ask for a synthesis*) of the teacher aiming at:

- promoting the de-contextualization from the use of the artefact;
- promoting the generalization with respect to the specific tasks;

- maintaining in both the previous processes (de-contextualization and generalization) those aspects of the personal meanings recognized as pertinent to the target mathematical signs.

Such a complex semiotic process can be fostered by a teacher's intervention inviting students to summarize what has been discussed up to that point, and/or what students consider as shared in the ongoing collective discussion. We name this type of intervention ask for a synthesis. As a matter of fact, asking for a synthesis does not only induce students to make explicit their personal meanings, but also induce them to condense different experiences in one sentence, and this may lead one look for commonalities, and in so doing fostering generalisation. Moreover, syntheses produced during collective discussion tend to involve signs previously emerged, but also they may include mathematical signs already in use or recently introduced by the teacher; in other words, sharing personal meanings through a synthesis forms the interpersonal space within which the point of view of mathematics can be introduced by the teacher, and eventually a standard terminology. The following excerpt, still drawn from the first collective discussion, shows the teacher asking the students for synthesis

Excerpt 2 from the 1st discussion

> 211. T: Who would like to synthesize all what I have said? … but I want someone that never talked … Ma!
> 212. Ma: what I understood…?
> 213. T: Ok, go on, what did you understand
> 214. Ma: I mean … there are certain things that are taken from others that are independent… that are points A, B and P; H is obtained by a construction that derives from A, B and P, thus H depends on the position …
> 215. T: … on the position of the three points A, B and P. Thus the function … what is it [the function] for you?
> 216. Ma: The function for me is … I mean it should be a construction that practically … is obtained by different means … that derive from …

After the explicit request for a synthesis (211), MA explains his interpretation of the request: making explicit what he understood (212). The teacher mirrors MA intervention, confirming his interpretation of her request. In the following utterance (214) we observe the germ of a process of de-contextualization. The generic terms (for instance, "certain things taken from others") used by MA maintain the reference to the artefact but express the intention of overcoming it. However, as it clearly appears, cutting the link with the experience is too difficult for MA, and the teacher perceiving his difficulty follows the student's wording when he comes back to the artefact context.

The mediation process restarts immediately after, when the teacher asks to make explicit the personal meaning of the sign /function/ (215). MA attempts again a general formulation without referring to the artefact.

As the excerpt shows the semiotic mediation process progresses through an alternate movement: back and forth from referring to the artefact context to referring to Mathematics. A key role seems to be played by generic expressions such as “certain things” or common language expressions such as “depends on”; because of the ambiguity of these terms, their role is that of fostering the move between the two semantic fields – artefact context and Mathematics context.

As shown in the previous excerpt, the request of a synthesis may be too difficult to be fully accomplished by students, but it is also clear that asking for a synthesis plays a crucial role in the semiotic mediation process, contributing to the development of the shared semiotic environment within which the teacher may introduce the point of view of mathematics, and eventually a standard terminology.

As a matter of fact, when the discussion has set in motion the de-contextualization and generalization of meanings form the context of use of the artefact, but the evolution cannot be considered complete yet, the teacher may intervene with the *offer of a synthesis*, explicitly referring to the mathematical context and its meanings with the aim at:

- making explicit the relationships between mathematical meanings, and meanings constructed trough the classroom discussion;
- introducing the desired mathematical signs and providing a mathematical formulation;
- ratifying the acceptability and the mathematical status of a specific sign.

The excerpt below shows an example of teacher’s offer of a synthesis (159) of what emerged up to that moment: evoking the experience with the artefact she explains the relationship between independent and dependent variables and define them. It is worth noticing that what is reported in the following excerpt preceded the conversation reported in the previous **Excerpt 2** (look at the numbers of the utterances). This shows two interesting aspects: on the one hand, the offer of a synthesis is not meant to stop the semiotic mediation process, it may constitute an intermediate step in the evolution providing exemplar modes of de-contextualization and generalization; on the other hand, the complexity of the semiotic mediation process, involving the individual and the collective sphere, requires the teacher repeatedly alternating requests and offers of synthesis.

Excerpt 3 from the 1st discussion

> 159. T : Well, then what happens is that in general for a function, the points from which I start are named independent variables, because I can move them wherever I like, whilst what I obtain is named dependent variable, because it depends … on what [does it depend]?
> 160. I : [it depends on] the independent variables.

The teacher states the use of mathematical terms such as "independent variable" and "dependent variable", making explicit the link between the meaning of these mathematical signs and those emerging from the activity with the artefact – /point from which I start/, /points I can move wherever I like/.

Conclusions

According to the TSM the didactic use of an artefact has a twofold nature: on the one hand it is directly used by the students as a means to accomplish a task; on the other hand it is indirectly used by the teacher as a means to achieve specific educational goals, for instance the construction of mathematical knowledge. My contribution focused on the specific role played by the teacher in the management of the teaching and learning process, specifically I directed my attention to a particular phase of the general didactic arrangement, the phase of the collective discussion, outlining possible patterns in the modalities of interaction between the teacher on her students. After the analysis of a number of collective discussions, categories of possible actions were identified, leading to an explicit categorization of possible modes of teacher's intervention aimed at driving the semiotic process centred on the use of an artefact. Specifically, the two pairs of complementary actions introduced above, describe how, during a collective discussion, the teacher can foster both the joint construction of shared-signs and the evolution of these signs into the expected mathematical signs.

The explicit model of the teacher's actions, described above, shades light on specific forms of mediation related to the teaching and learning process, specific elements concerning the orchestration of the classroom discussion, and clarifies what is expected by the teacher because the artefact may function as a tool of semiotic mediation. The explicit characterization of the possible teacher's actions, makes possible to communicate and share them in the community of the teachers, contributing to foster teachers' professional development along this dimension, specifically focussing on the relevance of teacher's

consciousness about his own role and specifically about the choices that he has to undertake in classroom conversations.

References

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics In A CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumention and the Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal for Computers in Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process, *Relime,* Vol Especial, 267-299.

Barab, S., & Squire, B. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14. Retrieved from http://website.education.wisc.edu/kdsquire/manuscripts/jls -barab-squire-design.pdf

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: a Vygotskian analysis, in H. Steinbring et al. (eds.), *Language and communication in mathematics classroom*, NCTM, Reston, Virginia, pp. 65-84.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English et al. (eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* , LEA.

Bartolini Bussi M.G.; Mariotti M. A.; Ferri F. (2005). Semiotic Mediation In The Primary School: Dûrer's Glass In Hoffmann H.; Lenhard J.; Seeger F. *Activity And Sign – Grounding Mathematics Education* (Festschrift For Michael Otte) Pp. 77-90 Isbn: 0-387-24269-4 New York, USA: Springer.

Borba M. C. & Villarreal M. E. (2006). Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation, Springer.

Cerulli, M. (2004). Introducing pupils to Algebra as a Theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation, Ph.D Thesis in Mathematics, Università di Pisa, Scuola di Dottorato in Matematica.

Cummins, J. (1996). Negotiating identities: Education for empowerment in a diverse society. Ontario, CA: California Association of Bilingual Education.

Drijvers, P. (2012). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). ICME 12. 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M.A (2004). Towards the definition of function, Proceedings 28th PME Conference, II- 367-374.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M.A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 66, N. 3, Dordrecht: Kluwer, pp. 317 – 333

Falcade, R. (2006). Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collective, dans des sequences d'ensignament avec Cabri- Géomètre por la construction des notions de fonction et graphe de fonction. Grenoble: Université J. Fourier : Unpublished doctoral dissertation.

Hoyles, C., Noss, R., & Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 309.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation, Keitel, C. & Ruthven K., *Learning from computers: Mathematics Education and Technology*, NATO ASI Series, New York, USA: Springer.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V.S. Ageyev and S.M. Miller, *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*. Cambridge University Press. 15 -38

Lagrange, J-B (2000). L'intégration des instruments informatiques dans l'enseignement: Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics* 43 (1), 1-30.

Lagrange, J-b., Artigue, M., Laborde, C. and Trouche, L. (2001). *A meta study on IC Technologies in Education*. Proceedings PME25, The Netherlands: Utrecht. 1, 111-122.

Mariotti, M.A., Maracci M (2010). Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In: G. Gueudet, L. Trouche. *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107), Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Mariotti, M.A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment, *International Journal of Computer for Mathematical Learning, Vol. 6, 3* Dordrecht: Kluwer, 257-281.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29, No. 2 (Mar., 1998), pp. 121-142

Moschkovich, J. (2003). What Counts as Mathematical Discourse?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 325-332.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers (Vol. 17). New York, USA: Springer.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains. A. Colin, Paris.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being. P. Cobb, E. Yackel and K. McClain (Eds.) Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design, 37-98.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, *9*(3), 281.

Trouche. L. (2005). Construction et Conduite des Instruments dans des Apprentissages Mathématiques: nécessité des Orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), 91-138.

Vygotskij, L. S. (1978). Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes, Harvard University Press.

DESENVOLVIMENTO CURRICULAR NA MATEMÁTICA ESCOLAR

José Manuel Matos

Universidade Nova de Lisboa, jmm@fct.unl.pt

Resumo. *Apoiando-se numa perspectiva cultural, problematiza-se o conceito de currículo e de desenvolvimento curricular na área do ensino e da aprendizagem da matemática.*

Abstract. *Based on a cultural perspective, the concept of curriculum and curriculum development in the area of teaching and learning of mathematics is discussed.*

***Palavras-chave**: Cultura escolar, educação matemática, estudos curriculares*

Historicamente, em todas as nações, a mudança do currículo foi vista e usada como uma maneira efetiva de mudar a prática da aula e influenciar a aprendizagem dos alunos para atender às necessidades do mundo em mudança. O currículo de matemática escolar é pois uma questão central porque determina o que os alunos aprendem, quando aprendem e como aprendem. Embora boa parte da investigação em educação matemática esteja centrada em temas curriculares, estes trabalhos raras vezes recorrem ao aparato teórico mais global da análise curricular. Desde há muito tempo que existem múltiplos estudos sobre temas curriculares, essencialmente apresentando conteúdos e métodos para o ensino da matemática.

A diferenciação do campo da Educação Matemática faz-se precisamente a partir dos anos 1960 quando desloca o centro de atenção da resposta imediata a problemas de prática de aula e passa a incorporar no seu trabalho uma vertente de investigação procurando não novos métodos de ensino, mas questionando que métodos funcionam, como aprendem os alunos, como os professores gerem as suas aulas, e que metodologias de pesquisa são adequadas para responder a estas questões (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013). O tema será mais tarde sistematizado no livro fundador de Howson, Keitel e Kilpatrick, *Curriculum development in mathematics* (1981), agora como objeto de reflexão e com ligações às teorias curriculares da época. Poucos trabalhos sobre o currículo foram desde então desenvolvidos e apenas recentemente no último *Handbook of Mathematics Education* (Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick e Leung, 2013) encontramos de novo textos de diversos autores sobre o tema.

Com este trabalho pretende-se rever o conceito de currículo e de desenvolvimento curricular de um ponto de vista que seja relevante para os educadores matemáticos e sugerindo abordagens e apontando tensões. Em fundo está a preocupação em saber o que

é, de onde vem e como muda a matemática escolar entendida como um fenómeno cultural. Posto de outro modo, procura-se estudar entender o currículo como imerso na cultura matemática escolar tecida pelos significados atribuídos pelos diferentes intervenientes (Geertz , 1973): alunos, professores, académicos, governantes, etc.

Estudando o currículo

Estudar o currículo, e em particular dos modos de o influenciar, iniciou-se com os trabalhos de Bobbit de 1918, prolongados pela abordagem de Tyler e têm sido o centro de uma área de investigação, teoria curricular, ou "curricular studies" na versão anglo-saxónica. O seu objetivo é o estudo das características do currículo em geral desenvolvendo estudos de dimensão ampla, abrangente, não limitadas a disciplinas escolares específicas, e que procuram compreender as diversas forças que influenciam as intervenções curriculares, as suas dimensões ideológicas e políticas, e o papel dos diferentes atores. O livro *Currículo: Teoria e práxis* de José Augusto Pacheco (2001) talvez seja o trabalho em língua portuguesa que melhor dá conta das problemáticas abrangidas.

Os estudos curriculares dos educadores matemáticos tendem a tomar uma direção diferente, mas complementar. O campo da Educação Matemática tem um duplo âmbito de reflexão e ação (Matos, 2018). Por um lado, enquanto campo académico validado através dos critérios científicos usuais (trabalhos de investigação ou modelos teóricos sobre o tema), promove uma *reflexão* sobre os problemas do ensino e da aprendizagem da matemática. Por outro, o campo incorpora uma vertente de *ação*, procurando intervir sobre a prática escolar. A fronteira entre estas duas vertentes é difusa e facilmente encontramos exemplos de trabalhos que aliam intervenções curriculares a uma investigação sobre os processos usados e os resultados alcançados. Mas essa fronteira existe e, mesmo nos casos que melhor integram estas duas vertentes, permanece a tensão entre os critérios de validação dos resultados: académica ou de eficácia.

Esta dualidade vai-se revelar de forma vincada no estudo do currículo em que, a par de uma dimensão de pesquisa, ocorre muitas vezes um contexto de intervenção. Assim, os estudos curriculares em Educação Matemática devem debruçar-se de forma detalhada sobre os modos de atuação dos reformadores, e, em especial, sobre os conteúdos matemáticos e métodos de ensino preconizados por cada intervenção. Embora tomando em conta as grandes forças sociais e culturais que influenciam as opções de política educativa e explicam as dimensões mais gerais dos movimentos de desenvolvimento

curricular, os estudos curriculares em Educação Matemática necessitam de pormenorizar temas, abordagens metodológicas, materiais, representações, atitudes, por vezes optando por descrições densas de processos e participantes, que são fundamentais para descrever e estudar a matemática escolar.

Este programa de pesquisa justifica pois que o estudo do currículo de matemática se diferencie dos estudos curriculares mais abrangentes envolvendo o fenómeno curricular na sua globalidade. Esta especificidade legitima-se no contributo de dois autores que, embora trabalhando em campos distintos, chamaram a atenção para ela. O primeiro foi Lee Shulman, que, num texto fundador de 1986, confrontado com a necessidade de avaliar o desempenho profissional de professores, argumenta que o conhecimento docente tem especificidades que o distinguem (e, de certo modo, autonomizam) quer do conhecimento pedagógico geral, quer do conhecimento científico, e designou-o de *conhecimento pedagógico do conteúdo*. No seu entender este conhecimento, profundamente ligado à prática profissional seria de natureza diferente dos outros dois. Num texto posterior (1987) Shulman caracteriza-o como

> [uma] fusão de conteúdos e pedagogia numa compreensão de como tópicos, problemas e assuntos específicos são organizados, representados e adaptados aos distintos interesses e capacidades dos alunos e apresentados para ensino. (Shulman, 1987, p. 8).

O segundo autor que destaca a especificidade das disciplinas escolares foi André Chervel que, num texto fundador de 1988, argumenta que as disciplinas escolares não são meras uma aplicações ao contexto escolar de saberes desenvolvidos na academia, nem os seus professores um grupo profissional conduzido apenas, quer pelas grandes opções de política educativa – elas próprias fruto de amplos movimentos sócio-económicos –, quer por saberes – a Ciência ou a Cultura – gerados externamente. Recorrendo a estudos sobre o desenvolvimento da gramática em França, entre outros, Chervel vai mostrar que as disciplinas escolares têm a capacidade de gerar um conhecimento próprio que escapa àquelas determinantes globais e que, pelo menos no caso da gramática, gera até o próprio conhecimento científico. Os investigadores só teriam pois a ganhar compreensão se as entendessem como que dotadas de autonomia em relação a condicionantes externas à escola.

Não cabe aqui um aprofundamento dos desenvolvimentos que estas propostas tiveram, e tiveram bastantes, mas estes dois investigadores, embora trabalhando em áreas

distintas, têm o mérito de pela primeira vez destacarem a especificidade dos saberes disciplinares escolares. Essa especificidade sugere-nos a pertinência de estudar o currículo de matemática escolar nos seus próprios termos, distinguindo-o pois, quer de abordagens curriculares mais globais, quer do desenvolvimento da própria ciência matemática.

O que é o currículo

Estudar o currículo deve pois ser uma área central na investigação em Educação Matemática. Uma primeira questão a colocar é a de que falamos quando usamos a palavra currículo. Embora não exista consenso na definição do termo e o seu uso varie consideravelmente de autor para autor (Cuban, 1992), a resposta que usarei deverá ter em conta o interesse prévio que mencionei no início: o que é, de onde vem e como muda a matemática escolar entendida como fenómeno cultural. Nesse sentido, o currículo deve ser entendido como o local de confluência de práticas distintas (Gimeno, 2000) envolvendo múltiplos atores com agendas muitas vezes não coincidentes: os professores, as associações profissionais, as editoras de livros de texto, as academias, os decisores políticos e outras forças sociais, cada um tecendo a sua teia específica de significados.

Assim, deveremos incluir no estudo do currículo, para além das dimensões usualmente consideradas como tal — os programas e outras peças legislativas —, os livros de texto, as planificações de professores, os momentos de avaliação, sejam, eles exames nacionais ou não, e também diversos tipos de publicações que influenciam os modos como os intervenientes dotam de significado as suas práticas curriculares. O conceito de currículo deverá igualmente incluir a produção curricular com origem nos professores. Como vimos, o seu conhecimento profissional produz um tipo de saber específico que envolve temas, representações, processos, formas de fazer, etc. que apenas pode ser desenvolvido em contextos de prática.

Podemos caracterizar o currículo distinguindo duas vertentes. Uma primeira mais idealizada, e portanto mais formal, onde o currículo é um plano prévio, construído a partir de finalidades, desenvolvido quer pelas instituições oficiais, as escolas ou o professor (Pacheco, 2001). Aqui o currículo é um plano de ação pedagógica especificando um conjunto de conteúdos a ensinar e eventualmente propondo métodos de intervenção e que Julia (1995), num contexto de estudo da cultura das disciplinas escolares, designa de *normas*. Numa segunda vertente mais ligada à realidade, e portanto mais informal, vemos o currículo como um processo, um conjunto de experiências educativas e um sistema

dinâmico, probabilístico e complexo, sem uma estrutura pré-determinada (Pacheco, 2001) e que Julia (1995) designa de *práticas*.

Em suma, como refere Pacheco (2001):

> O currículo define-se como um *projeto*, cujo processo de construção é interativo, que implica unidade, continuidade e interdependência entre o que se decide no plano oficial, e no plano real, ou do processo de ensino-aprendizagem.
>
> O currículo é uma *prática* pedagógica que resulta da interação e confluência de várias estruturas (políticas, administrativas, económicas culturais, sociais, escolares...) na base das quais existem interesses concretos e responsabilidades compartilhadas. (Pacheco, 2001, p. 20, ênfase minha)

Categorizando tipos de currículo

As práticas envolvidas no currículo conduzem-nos a uma diferenciação entre tipos de currículo. A categorização mais vulgarizada entre os educadores matemáticos é a proposta pela I*nternational Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) (Travers e Westbury, 1989) que distinguiu entre três níveis de currículo (intencionado, implementado e atingido). O *currículo intencionado* (intended), ao nível do sistema de ensino, refere-se aos documentos formalmente escritos que estabelecem expectativas para a aprendizagem de matemática. O *currículo implementado* (implemented), que ocorre ao nível da aula e da escola, refere-se aos processos para o ensino e aprendizagem de matemática, interpretados e implementados pelos professores. O *currículo atingido* (attained), tratado ao nível do aluno, refere-se ao que é realmente aprendido e que se manifesta nas realizações e atitudes dos alunos. Esta categorização destaca as diferenças entre o que uma sociedade gostaria de ter ensinado, o que é realmente ensinado e o que os alunos realmente aprenderam e, em Portugal, foi usada por exemplo na meta-análise efetuada por Ponte, Matos e Abrantes (1998).

Embora muitas vezes a distinção entre estes três níveis seja apropriada para a investigação que se deseja levar a cabo, ela não é adequada quando se pretende maior detalhe. Em particular, o modelo não refere alguns atores que intervêm de forma decisiva no processo de ensino e de aprendizagem. Se se desejar, por exemplo, estudar a influência de materiais relevantes para o currículo implementado (livros de texto, ou outros materiais de apoio ao ensino e à aprendizagem) o modelo da IEA não o permite. O modelo também não prevê o papel dos mediadores curriculares, por exemplo, o dos acompanhantes da prática pedagógica, que, em Portugal entre 1997 e 2001, realizaram na disciplina de Matemática do ensino secundário não só a intermediação entre o currículo intencionado e

o implementado, mas também apoiaram o próprio aprofundamento do currículo intencionado (Teixeira, 2004).

Posto de outro modo, centrar a discriminação dos níveis nos locais onde se elabora currículo, embora adequada para muitas investigações, para outras, não destaca suficientemente a intervenção de todos os participantes. Em particular, se se pretender uma visão cultural centrada nos significados dos participantes, a estes deve ser dada centralidade, destacando o respetivo poder de decisão curricular.

Pacheco (2001) desenvolve um modelo que permite destacar de forma mais clara o poder de intervenção dos participantes no desenvolvimento curricular. Seguindo de perto as ideias de Gimeno (ver, por exemplo, Gimeno, 2000) distingue seis níveis de desenvolvimento do currículo:

1. O *currículo prescrito* é o domínio das autoridades educativas (ao nível nacional ou regional) que em quase todos os sistemas educativos prescrevem ou sugerem os temas que devem ser objeto de ensino. Estas especificações podem ser normativas ou meramente indicativas, dependendo do nível de ensino ou do grau de autonomia das escolas. Em Portugal para além dos programas nacionais existem outras recomendações — por exemplo, as Competências essenciais (2002), as Metas (Bivar e outros, 2013), o Referencial para a Educação Financeira (Dias e outros, 2013), etc. — que pretendem complementar os programas. Nem sempre a convivência entre estes diferentes normativos e o programa é pacífica.

2. O *currículo apresentado aos professores* é o domínio de um conjunto de intermediários entre as autoridades educativas e os professores. Existe virtualmente em todo o mundo uma série de materiais, elaborados por diferentes intervenientes, que re-elaboram o significado e os conteúdos do currículo prescrito. Os livros de texto constituem o exemplo mais conhecido, mas existe toda uma panóplia de outros materiais (livros do professor, guias, livros de exercícios, materiais disponíveis na internet, etc.). É normalmente argumentado que estes decisores curriculares são os mais influentes na gestão quotidiana da prática escolar pelos professores.

Por vezes existe um outro tipo de intermediários que entre o programa e os professores. Por exemplo, em Portugal durante a implementação de um novo programa de Matemática para o ensino secundário entre 1997 e 2002 foi constituído um corpo de acompanhantes cuja missão era servir de intermediários entre os professores e os autores do novo programa. A sua função era assumidamente facilitar o desenvolvimento do

conhecimento profissional que o novo programa necessitava, quer na nova hierarquia e sequência dos temas, quer no uso das agora obrigatórias calculadoras gráficas.

3. O *currículo moldado pelos professores* é o domínio dos professores. Neste nível curricular encontramos as planificações desenvolvidas pelos professores individualmente ou em grupo. Estes são agentes decisivos na concretização dos conteúdos e significados dos programas e, com maior ou menor contributo dos outros intervenientes curriculares, moldam-nos a partir recorrendo à sua cultura profissional. Discuti-lo-ei em detalhe mais à frente.

4. O *currículo em ação* é o domínio simultâneo do professor e dos seus alunos. Na prática real que se concretiza nas tarefas académicas podemos notar o significado do que são as propostas curriculares que se podem desenrolar em aula ou for dela. É aqui que se situa o que normalmente designamos de *Didática*. Baseado nos trabalhos de Schulman e de Chervel, argumentei anteriormente sobre o modo como este tipo de currículo não é uma mera aplicação de diretrizes superiores, ensinável através de cursos. Antes os professores desenvolvem-no individualmente ou em grupo em contextos da prática de aula. É neste nível que encontramos a cultura da aula de matemática estudada por Yackel e Cobb (1996) e Castro (2017).

5. O *currículo realizado* é o domínio dos que observam o currículo em ação. Como consequência da prática produzem-se efeitos complexos dos mais diversos tipos: cognitivos, afetivos, sociais, morais, etc. que podem ser objeto de estudo de diversos profissionais: académicos, inspetores, professores, etc. Cada um destes intervenientes observa a prática pedagógica com os seus próprios quadros mentais, teóricos ou institucionais e cada um pode assim propor uma interpretação própria do currículo em ação em estudo.

6. O *currículo avaliado* é normalmente um domínio exterior à escola, ligado à administração escolar. Incluem-se aqui os exames de âmbito nacional ou não. O currículo avaliado impõe aos diversos participantes (professores, alunos, escolas, pais, editoras, etc.) critérios para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos.

Costuma ainda ser referido o que se designa por *currículo oculto*, que abrange processos, crenças e conhecimentos adquiridos de forma tácita e que não fazem parte explícita dos restantes níveis curriculares.

Os níveis são hierárquicos e sequenciais?

Da observação do modelo poderia ficar a impressão de que o desenvolvimento curricular ocorre de uma forma hierárquica e sequencial: os governantes decidem o currículo e publicam-no em forma legal, os autores de manuais incorporam as novas orientações nos seus livros, os professores executam as ordens superiores e no final os exames, de novo decididos superiormente, encarregam-se de esclarecer se tudo decorreu da melhor forma. Esta visão reproduz de perto o modelo tecnocrata IDD — Investigação, Desenvolvimento, Disseminação — aplicável ao desenvolvimento de produtos em múltiplos campos. Tipicamente, o processo é iniciado por um conjunto de peritos que estuda o problema, depois propõe uma versão experimental do produto e, após as correções necessárias, dissemina o produto final. Esta perspectiva, característica de modelos educativos centralizados, encontra-se em muitos autores que se debruçam sobre os temas curriculares abordados do ponto de vista da administração escolar. No entanto, a realidade desmente que mudanças curriculares decorram necessariamente segundo esse guião. E mesmo em casos em que se pretendia que tal acontecesse, as coisas não correram exatamente assim.

Um olhar para o passado permite-nos compreender como a sequência IDD não é necessária para ocorrer desenvolvimento curricular e veremos mais adiante exemplos de geração curricular efetuadas a partir do ambiente escolar e não da administração central. Queria apenas referir aqui o caso da matemática liceal. Não podemos falar de uma matemática característica do ensino secundário antes da criação dos liceus em 1836. Mesmo assim, apenas a partir da década 1860 a designação da disciplina se estabilizou e nos anos 1870 apareceram os primeiros programas (Aires e Santiago, 2014). Durante quase trinta anos, portanto, a disciplina de matemática dos liceus funcionou sem que se sentisse a necessidade de elaborar a respetiva lista de conteúdos. E no entanto, apesar da ausência de um currículo prescrito, é durante este período que, concomitantemente com a transição entre o uso de livros traduzidos e a produção de livros escolares elaborados especificamente para os liceus por autores nacionais, assistimos à génese da matemática escolar do ensino secundário nacional (Matos, 2014). O primeiro currículo prescrito de matemática dos liceus é pois uma sistematização de tópicos já usados no currículo apresentado aos professores.

A centralidade do currículo moldado pelo professor

Para um educador matemático, a relevância dos diferentes níveis não é a mesma e um dos mais importantes é o currículo moldado pelo professor. A subestimação da importância deste nível está na origem do fracassos de muitas reformas curriculares. Ele é o epicentro onde é gerado o conhecimento didático do conteúdo de que fala Schulman. Para além de boa parte das investigações curriculares atuais se centrarem neste nível (ver, por exemplo, Ponte, 2003), este nível curricular está associado ao desenvolvimento da identidade do professor de matemática (Matos, 2016, 2017).

É muito difícil produzir um currículo apresentado aos professores (livros de texto, brochuras, etc.) na ausência de um currículo moldado pelos professores, pois falta a fusão de conteúdos referida por Schulman (1987). A sua importância torna-se clara, por exemplo, no caso do ensino profissional onde a falta de um conhecimento profissional partilhado sobre as características desejáveis para uma matemática ajustada a este sub-sistema de ensino pode explicar as dificuldades dos autores de manuais. A análise da complexidade da linguagem matemática em livros de Matemática usados no ensino profissional português no início da década 2010 (Carvalho, 2015) revela uma considerável disparidade entre editoras e até dentro da mesma editora. Muitos autores recorriam às abordagens que tinham usado em Matemática A, e mesmo os que experimentavam novas abordagens propunham por vezes terminologias e processos mais complexos do que os usados no curso geral.

A internacionalização do currículo

As práticas que confluem no currículo sofrem diversas influências sociais e culturais em particular a exercida por organizações supra-nacionais. A veiculação de propostas curriculares entre diversos países ocorre desde que aparecem os livros impressos no final do século XV. No entanto, a circulação de recomendações curriculares explícitas é mais recente. No ensino primário a difusão das perspetivas curriculares da Escola Nova ocorrem a partir do final do século XIX, especialmente após a implantação da República. No caso da matemática, será essencialmente a partir do início do século XX, com a fundação da revista *L'Enseignement Mathématique* e da *Commission International de l'Enseignement Mathématique* (CIEM), que a disseminação de novas propostas curriculares — ensino da análise, ênfase nos métodos ativos, particularmente o uso de laboratórios de matemática, reflexão sobre a utilidade social da educação — assume uma nova dimensão (Furinghetti,

Matos e Menghini, 2013). Em Portugal, por exemplo, as recomendações da CIEM influenciam decisivamente, quer os programas de Matemática (Aires e Santiago, 2014), quer a produção do currículo modelado pelos professores (Matos, 2017). Mais tarde, a partir dos anos 1960 será a corrente internacional da Matemática Moderna apoiada por diversas organizações internacionais, que inspirará mudanças curriculares (Matos, 2012) e na reação a estas mudanças serão as propostas do *National Council of Teachers of Mathematics* que influenciarão os novos programas do início de 1990 (Matos, 2011).

Assistimos, no entanto, nos dias de hoje a algo diferente. A *Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico* (OCDE), por exemplo, criada para apoiar a cooperação económica entre os países ocidentais, tem vindo gradualmente a ocupar um papel relevante na área da educação (Teodoro e Estrela, 2010). Por um lado, elabora uma panóplia de indicadores que permitem a comparação internacional de todas as dimensões dos sistemas educativos. Esses indicadores contribuem para determinar prioridades futuras, uma vez que constituem uma agenda global para as reformas a serem implementadas no país no futuro próximo ou para as reformas em curso nos sistemas educativos dos diferentes países envolvidos.

Outros projetos têm vindo a ganhar relevância. Um deles é o projeto PISA, lançado pela OCDE em 1997, centrado na numeracia e na literacia. Os seus resultados permitem a monitorização regular dos sistemas educacionais em termos de desempenho dos alunos com base numa estrutura conceptual internacionalmente aceite. Também na União Europeia, apesar da grande diversidade nacional, existem forças procurando uma uniformização curricular. É mais conhecida a homogeneização do ensino superior através do Processo de Bolonha, mas outras iniciativas têm vindo a ser aprovadas, por exemplo, o relatório *European report on the quality of school education. Sixteen quality indicators* (European Commission, 2001) que estabelece indicadores de qualidade para o ensino e aprendizagem de diversas disciplinas, entre elas a Matemática.

Estes projetos internacionais de grande escala onde a matemática se destaca das outras disciplinas servem como alavancas para estabelecer uma agenda para a educação em nível global (Teodoro e Estrela, 2010). Em particular, o uso de indicadores da OCDE para a educação como uma ferramenta para avaliar os sistemas de educação nacionais leva à formação de uma racionalização global, além de impor comparabilidade e um novo consenso nas políticas educacionais. As especificidades nacionais são esbatidas num quadro ideal de uniformidade geral. A formulação de políticas educacionais em países

periféricos ou semiperiféricos do sistema mundial moderno começa a depender cada vez mais da legitimação e do apoio técnico destas organizações e projetos como o PISA desempenham um papel fundamental na normalização das políticas nacionais de educação.

Embora a maioria destas organizações não tenham poder de decisão, os seus trabalhos, e, em especial, a publicação de listas ordenadas de países, influenciam os decisores governamentais, cada um procurando implementar políticas públicas muitas vezes de âmbito curricular que mais rapidamente garantam a subida de posição nessas listas, quer tentando imitar processos de países mais bem colocados, quer recorrendo a opções curriculares legitimadas mais pelas suas crenças profundas do que pela investigação educacional.

De qualquer modo, é expectável que os diferentes países incluam a pouco e pouco uma seleção de tópicos cada vez mais aceite internacionalmente (Cai e Howson, 2013). O lado bom é que os estudantes precisam ganhar alfabetização matemática na arena global, e o que constitui tal alfabetização não difere muito entre os países. O lado mau tem sido a excessiva atenção ao desempenho em exames nacionais e em avaliações internacionais. No caso português, o aumento de retenções em anos não sujeitos a exame como forma de aumentar artificialmente o desempenho em exames é um efeito perverso. Um outro efeito situa-se no estreitamento do que constitui a desejável aprendizagem matemática. Uma visão mais ampla da aprendizagem da matemática que vá além da simples aquisição de um grau aceitável de "alfabetização", pode ser ignorada.

O futuro parece pois apontar para um estreitar das alternativas curriculares em cada país. A crença deste educador matemático, no entanto, é que, por um lado, o papel das associações profissionais e da academia vai ser importante e, por outro, dada a centralidade do currículo modelado pelo professor na geração curricular, continuaremos a assistir a produções locais que, embora articuladas com perspectivas globais, apresentam as suas especificidades mais ou menos relevantes.

Desenvolvimento curricular técnico

Podemos caraterizar os processos de desenvolvimento curricular em três tipos que designarei de *técnico*, *prático* e *colaborativo*. Os dois primeiros estão bem descritos em Pacheco (2001) e em boa parte da literatura sobre desenvolvimento curricular. Resolvi referir o último processo, dada a sua recente relevância em trabalhos significativos.

O desenvolvimento curricular técnico é associado à sequência IDD. A maior experiência curricular dos Estados Unidos, o School Mathematics Study Group (SMSG), efetuada durante a época da Matemática Moderna, seguiu esta orientação.O SMSG, dirigido por Edward G. Begle, criou e implementou um currículo para a escola primária e secundária (escola infantil até ao 12º ano) entre 1958 e 1977. Desenvolvido a partir de duas conferências de matemáticos de importantes universidades dos EUA, os objetivos, os tópicos dos cursos e o tipo de materiais para alunos e professores foram determinados por matemáticos.Os assuntos foram então preparados e enviados a "autores" que produziram textos durante as férias de verão que foram depois revistos.Depois foram testados em escolas no ano letivo seguinte, revistos, aplicados e publicados (Howson, Keitel e Kilpatrick, 1981; Wooton, 1965).

Não foi este o único projeto de reforma curricular a seguir este modelo. Em 1957 o University of Maryland Mathematics Project dirigido por Robert M. Gagné procurou desenvolver uma hierarquia total de objetivos matemáticos e traduzi-los para um currículo de aprendizagem programada.Produziu materiais para o 7º e 8º anos (Howson, Keitel e Kilpatrick, 1981). Em ambos os casos o novo currículo é desenhado por peritos legitimados na sua experiência profissional — investigação matemática, no primeiro caso, psicológica, no segundo.

Em Portugal a experiência de Matemática Moderna durante os anos 1960 segue um padrão semelhante. No caso dos liceus, após um pequeno esboço de programa inicial desenvolvido por uma comissão na qual participavam professores com responsabilidades na formação inicial de professores, o presidente da comissão, Sebastião e Silva, um matemático, escreve um longo manual que vai de servir base à experiência. Tendo como objetivo essencial a formação de alunos destinados a prosseguir estudos superiores nas áreas técnicas e científicas, a experiência alarga-se muito lentamente a outros liceus e só dez anos depois, em 1973, o novo programa é generalizado, permitindo-se, mesmo então, que nem todos os alunos o seguissem (Matos, 2014). No caso do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (CPES), o programa de Matemática, escrito também por Sebastião e Silva, entrou em vigor em 1968. Em ambos os casos foram promovidas ações de formação de professores, os "Cursos de Oeiras" no caso dos liceus e os "Cursos de Atualização" no caso do CPES.

Se compararmos estes dois processos de reforma da Matemática Moderna em Portugal nos liceus e no CPES, verificamos que no primeiro caso, desde 1961 e até 1968,

nos liceus normais, em particular no Liceu Pedro Nunes, se vinha a desenvolver aquele tipo de conhecimento (Matos e Monteiro, 2011), inicialmente re-elaborando os conteúdos matemáticos, depois planeando intervenções pedagógicas, e, finalmente, experimentando-as em aula. No CPES, pelo contrário, praticamente não há espaço para este tipo de preparação da reforma. Não existe fase de experimentação do novo programas com o argumento de que já esta já tinha ocorrido com o programa da Telescola em vigor desde 1964 e destinado a alunos da mesma faixa etária (Almeida, 2013). Essa experimentação foi pois encarada como um mero teste dos novos conteúdos. Os "Cursos de Atualização" para docentes que se iniciam em 1968, ano do início do funcionamento do CPES, e se prolongam por mais uns anos, são antes dominados pela apresentação matemática dos novos tópicos (teoria de conjuntos e consequente recomposição da aritmética e da geometria) e deixam pouco espaço à discussão pedagógica (Bento, 2012) dificultando a geração pelos professores de um novo tipo de conhecimento adequado aos novos conteúdos. A mensagem tácita (e por vezes bem explícita) de que a matemática antiga tinha deixada de ser válida e que seria necessário re-aprender conteúdos científicos só complicou ainda mais a situação. A consequência foram as grandes dificuldades de implementação do novo programa, de que dão conta as circulares enviadas para as escolas pelo Ministério da Educação Nacional logo no início da experiência (Matos, 2012).

O desenvolvimento curricular técnico é assim caracterizado por um discurso científico (o que é proposto é legitimado como ciência), uma organização burocrática (com as suas hierarquias em que os executores se submetem aos dirigentes) e uma ação tecnicista (aplicar o currículo superiormente decidido é pragmaticamente uma questão técnica, determinada por factores e variáveis que se podem prever totalmente). Existe uma hierarquia entre a teoria e a prática com a primeira a determinar a segunda. O currículo é um produto, um resultado, uma série de experiências de aprendizagem dos alunos, organizadas pela escola em função de um plano previamente determinado (Pacheco, 2001).

O processo de desenvolvimento curricular técnico constituía nos anos 1960 o método mais avançado de implementar um novo currículo e foi aplicado em muitos países na época da Matemática Moderna, mas é hoje um processo claramente ultrapassado. Nele o professor é um executante passivo, não problemático, que apenas necessita de ser "atualizado" ou "reciclado". A importância da geração de conhecimento pedagógico próprio dos professores teria de esperar mais de vinte anos para ser reconhecida. Causa por isso

estranheza ver este método ressuscitado em 2013 para a implementação das Metas Curriculares em Portugal (Bivar e outros, 2013).

Desenvolvimento curricular prático

Por oposição ao anterior, o termo desenvolvimento curricular prático refere-se à produção de currículo feita a partir dos professores e das escolas. O melhor exemplo é o Projeto Nuffield nascido em Inglaterra a partir de diversos professores de escolas primárias em 1964 para os alunos de 5 a 13 anos (Moon, 1986).Iniciado em plena época da Matemática Moderna, o projeto propunha-se produzir um curso atual desenhado para ajudar as crianças a ligar muitos aspectos do mundo à volta delas, levá-las gradualmente ao processo do pensamento abstrato e desenvolver nelas um pensamento crítico, lógico, mas também criativo.Embora com ligação às ideias de Piaget e Dienes, as atividades e o conteúdo proposto estavam baseados mais em experiências nas aulas do que nos conceitos teóricos. O projeto levou à criação de diversos "teachers' centres".Os centros providenciavam cursos para professores e locais onde os professores se encontravam. discutiam o trabalho e colaboravam no desenvolvimento de ideias e materiais.Estes centros variavam desde uma sala localizada numa escola para os professores trabalharem, até edifícios com as suas salas de aula e laboratórios.

Este tipo de desenvolvimento curricular é caracterizado por um discurso humanista (centrado nos professores e nos alunos), uma organização liberal (descentralizada e igualitária) e uma prática racional (baseada no que funciona na prática). O currículo agora é uma prática que resulta, não só de uma relação entre especialistas curriculares e professores, mas também das condições reais dessa mesma prática. É ainda um processo — uma proposta que pode ser interpretada pelos professores de diferentes modos e aplicada em contextos diferentes — e não um produto e é uma prática constantemente em deliberação e negociação (Pacheco, 2001).

Poder-se-ia pensar que em Portugal, com o seu sistema de ensino centralizado, este processo de geração curricular assente nas escolas e nos professores não poderia ter tido lugar. E, no entanto, sem olharmos com atenção (Esteves, 1998; Guimarães, 2005; Matos, 2008, 2011) observamos que durante os anos 1980, apesar de programas nacionais ultrapassados e excessivamente formalistas, se assiste a múltiplas experiências de inovação curricular centradas no uso de materiais e da tecnologia, e recorrendo às aplicações da matemática e à resolução de problemas enquanto metodologias de inovação. É essa

experiência, espelhada na revista *Educação e Matemática* e nas atas dos congressos ProfMat, que será o motor inicial da Associação de Professores de Matemática e que vai informar os novos programas do 1º ao 9º ano que vão entrar em vigor no final dos anos 1980.

Desenvolvimento curricular colaborativo

Como referi, o campo de Educação Matemática vive numa tensão entre a reflexão e a ação e os processos de desenvolvimento curricular (a par da formação de professores, por exemplo) decorrem precisamente na fronteira entre estas duas vertentes. Uma metodologia que se tem revelado promissora na superação desta contradição é a *investigação baseada em design* (Kelly e Lesh, 2000) aplicada a estudos curriculares. Suportando a sua ação na centralidade do professor e no currículo por ele modelado, a metodologia está na interseção entre processos de desenvolvimento curricular e métodos de pesquisa.

Do ponto de vista do professor, esta abordagem é de natureza interventiva e pragmática, direcionada para a solução de problemas reais, ao mesmo tempo que cria e testa teorias através de ciclos de iteração. O professor busca o desenvolvimento de procedimentos fiáveis para a melhoria das suas práticas e o desenvolvimento do seu conhecimento profissional. Do ponto de vista do educador matemático, permite-lhe desenvolver atividades reflexivas, colaborativas e de questionamento com os professores superando a divisão entre a reflexão e a prática. Esta metodologia permite aliar o trabalho de investigação curricular em contexto de prática ao desenvolvimento profissional.

A questão da distribuição do poder está presente neste tipo de investigação, em particular se o trabalho faz parte dos requisitos necessários à obtenção de um grau académico. Aqui, se o professor investigador estuda a sua própria prática é muito difícil falar de colaboração, pois se por um lado existe uma hierarquia entre orientador e formando, por outro, os requisitos académicos podem entrar em conflito com as validações da experiência em contexto de prática. Noutros contextos, no entanto, o desenvolvimento curricular de tipo colaborativo apresenta aspetos muito promissores.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Referências

Aires, A. P. e Santiago, A. E. (2014). Os programas de Matemática do Ensino Liceal em Portugal. Em A. J. Almeida e J. M. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)* (pp. 71-91). Caparica: UIED e APM.

Almeida, M. C. (2013). *Um olhar sobre o ensino da Matemática, guiado por António Augusto Lopes*. (Doutoramento Tese de doutoramento), Universidade Nova de Lisboa, Caparica.

Bento, M. A. M. (2012). A introdução do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário e da matemática moderna em Portugal. (Mestrado Tese de Mestrado), Universidade Nova de Lisboa, Caparica.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. e Timóteo, M. C. (2013). *Programa e metas curriculares. Matemática. Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Cai, J. e Howson, G. (2013). Toward an International Mathematics Curriculum. Em M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick e F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 949-974). Nova Iorque: Springer.

Carvalho, C. A. B. (2015). *A linguagem matemática em manuais do ensino secundário e profissional*. (Doutoramento em Ciências da Educação Tese de Doutoramento), Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Castro, J. P. (2017). *Cultura de Escola e Cultura da Aula de Matemática – Ensino Elementar*. (Doutoramento Tese de Doutoramento), Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Chervel, A. (1988). L'histoire des disciplines scolaires. *Histoire de l'éducation, 38*, 59-119.

Clements, M., Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J. e Leung, F. (Eds.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Nova Iorque: Springer.

Cuban, L. (1992). Curriculum stability and change. Em P. W. Jackson (Ed.), *Handbook on research on curriculum* (pp. 216–247). Nova Iorque: Macmillan.

Currículo nacional do ensino básico. Competências essenciais. (2002). Lisboa: Ministério da Educação.

Dias, A., Oliveira, A., Pereira, C., Abreu, M. T., Alves, P., Basto, R., . . . Narciso, S. (2013). Referencial de educação financeira para a educação pré-escolar, o ensino básico, o ensino secundário e a educação e formação de adultos. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Esteves, P. (1998). Ensinar Matemática em Subúrbia (1989-96). Estudo de caso sobre um grupo de professores. (Tese de mestrado), Universidade Nova de Lisboa, Monte da Caparica.

European Commission. (2001). European report on the quality of school education. Sixteen quality indicators. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities.

Furinghetti, F., Matos, J. M. e Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. Em A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273-302). Nova Iorque: Springer.

Geertz, C. (1973). The interpretation of cultures. Nova Iorque: Basic Books.

Gimeno Sacristán, J. (2000). O currículo: Uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: Artmed.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática — Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. Em L. Santos, A. P. Canavarro e J. Brocardo (Eds.), *Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas — Actas do encontro de homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 145-166). Lisboa: APM.

Howson, G., Keitel, C. e Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Julia, D. (1995/2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, *1*, 9-44.

Kelly, A. E. e Lesh, R. A. (Eds.). (2000). Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. *Investigación en Educación Matemática XII*, 141-158.

Matos, J. M. (2011). Identity of mathematics educators. The Portuguese case (1981 - 1990). In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1740-1749). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Matos, J. M. (2012). Mathematics teaching and learning in the late 1970s in Portugal: intentions and implementations. Em K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. M. Matos e G. Schubring (Eds.), *"Dig where you stand" 2. Proceedings of the second "International Conference on the History of Mathematics Education" October 2-5, 2011, New University of Lisbon, Portugal* (pp. 303-316). Lisboa: UIED.

Matos, J. M. (2014). Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. Em A. Karp e G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 291-302). Londres: Springer.

Matos, J. M. (2016). Construction and modification of the autonomy of school mathematical knowledge in Portugal. *PNA-Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 10*(2), 95-110.

Matos, J. M. (2017). O desenvolvimento do conhecimento profissional do professor de matemática pelas Escolas Normais Superiores portuguesas (1911-1930). *Cadernos de História da Educação, 16*(3), 666-683.

Matos, J. M. (2018, em impressão). *A Educação Matemática entre reflexão e prática*. Conferência apresentada na Conferência Iberoamericana de Educação Matemática, Madrid.

Matos, J. M. e Monteiro, T. M. (2011). Recompondo o conhecimento didático do conteúdo durante o início da matemática moderna em Portugal (1956-69). *REMATEC, Revista de Matemática, ensino e Cultura, 6*(9), 7-25.

Matos, J. M. e Serrazina, L. (Eds.). (2016). Metodologias de investigação em educação matemática. *Quadrante, 26*(2).

Moon, B. (1986). The "New Maths" curriculum controversy. An international story. Londres: Falmer Press.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: Teoria e práxis* (2ª edição). Porto: Porto.

Pacheco, J. A e Seabra, F. (2013). Curriculum research in Portugal: emergence, research, and europeanisation. Em W. F. Pinar (Ed.), *International handbook of curriculum research* (pp. 397-410). Nova Iorque: Routledge.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender *ProfMat* (pp. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). Investigação em educação matemática. Implicações curriculares. Lisboa: IIE.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Teixeira, P. C. A. (2004). O Acompanhamento Local como modelo de desenvolvimento curricular em Matemática. (Tese de mestrado), Universidade Nova de Lisboa.

Teodoro, A. e Estrela, E. (2010). Curriculum policy in Portugal (1995-2007): global agendas and regional and national reconfigurations. *Journal of Curriculum Studies, 42*(5), 621-647.

Travers, K. J. e Westbury, I. (Eds.). (1989). The IEA Study of Mathematics I: Analysis of mathematics curricula. Oxford: Pergamon.

Wooton, W. (1965). *SMSG. The making of a curriculum*. New Haven: Yale University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Simpósios

AVALIAÇÃO FORMATIVA COM RECURSO À TECNOLOGIA

Carla Roque, Helena Rocha

[1]Escola Básica e Secundária de Santa Maria, cmroque@sapo.pt

[2]UIED, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade NOVA de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

Resumo. *Este estudo tem por objetivo compreender as potencialidades e implicações, para o professor e para a sua prática letiva, do recurso à avaliação formativa com o apoio de tecnologia educativa. Relativamente à metodologia de investigação, este estudo enquadra-se na investigação sobre a própria prática. Os participantes foram a professora, que foi simultaneamente investigadora, e os alunos de uma turma do 9.º ano do ensino regular.*

No decorrer desta experiência constatou-se que o recurso à avaliação formativa permite, por um lado, ao aluno aperceber-se do que já conseguiu compreender e o que tem de fazer para superar o que está menos consolidado e, por outro, à professora detetar atempadamente as dificuldades do aluno e adequar as estratégias às suas especificidades.

A falta de tempo, as dificuldades em gerir o currículo e a existência de exames nacionais são três dos principais obstáculos referidos pelos professores para a não realização de avaliação formativa. Nesta experiência constatou-se que o recurso às novas tecnologias possibilita a superação destas limitações. As conclusões deste estudo sugerem ainda que esta modalidade de avaliação teve um impacto muito positivo tanto na prática da professora como nas aprendizagens dos alunos.

Palavras-chave: *avaliação; avaliação formativa; novas tecnologias.*

Abstract. *The present study aims to understand the potentialities and implications, to the teacher and her practice, of the use of formative assessment with the support of educational technology.*

Regarding the research methodology, this study is part of the research on own practice. The participants were the teacher, who was simultaneously a researcher, and the students of a 9th grade class.

In the course of this experience it was found that the use of formative assessment allows, on the one hand, the student to realize what he manages to understand, and what he has to do to overcome what are less consolidated parts of the content in study; and, on the other, the teacher to detect in a timely manner the difficulties of the student and to change strategies to allow the student to overcome his difficulties.

The lack of time, the difficulties in managing the curriculum and the existence of national exams are three of the main obstacles mentioned by the teachers for the non-realization of formative assessment. In this experience it was found that the use of new technologies turns possible to overcome these limitations.

This type of assessment had a very positive impact on teacher's practice and in the learning of the students.

Keywords: *assessment; formative assessment; new technologies.*

Introdução

A ideia de que a avaliação fornece informações relevantes sobre a aprendizagem dos alunos e de que pode auxiliar o professor a gerir o processo de ensino e aprendizagem (Pinto & Santos, 2006), sustentou a elaboração deste estudo.

As dificuldades demonstradas pelos alunos, no quotidiano da sala de aula, constituem importantes fontes de informação para a superação dessas mesmas dificuldades, torna-se assim necessário refletir sobre o papel da avaliação, assumindo que aprender "não é um simples processo linear de passagem de saberes de uma mente para outra, mas um processo complexo e pessoal" (Pinto & Santos, 2006, p. 7). Neste contexto, a modalidade de avaliação formativa reveste-se de particular interesse, pois será a que melhor permite considerar as dificuldades evidenciadas pelos alunos.

Vários autores defendem a importância e relevância da avaliação formativa. Fernandes (2011) refere que esta deveria ser a modalidade privilegiada pelos professores. Fernandes e Gaspar (2014) afirmam que este tipo de avaliação está associada à melhoria das aprendizagens de todos os alunos e que é particularmente relevante avaliar o que os alunos sabem e são capazes de fazer no quotidiano das salas de aula. Cid e Fialho (2013, p. 2) escrevem que "a avaliação formativa é um dos fatores que pode ser considerado determinante, porque tem mostrado um impacto significativo no desempenho e resultados académicos dos alunos".

A importância da avaliação formativa é também manifestada no parecer elaborado pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) em 2016, onde pode ler-se: "os anos que vindouros serão dedicados certamente à consolidação da centralidade das dinâmicas de avaliação formativa" (p. 68). Neste parecer, o CNE aponta a adoção de práticas de avaliação formativa frequentes e um maior investimento em tecnologia de apoio ao ensino e às aprendizagens, como fatores promotores da qualidade do ensino e das aprendizagens.

O século XXI é marcado pelo desenvolvimento das tecnologias de informação e comunicação, o que desafia a grandes transformações na nossa sociedade. Esta nova sociedade, também denominada como "sociedade de informação" ou "sociedade do conhecimento", tem provocado mudanças nos cenários sociais e, consequentemente, exigido mudanças no sistema de ensino. O grande desafio para qualquer professor será tentar ensinar, e por consequência avaliar, de forma diferente daquela que aprendeu (Hargreaves, 2004). A utilização das tecnologias de informação e comunicação no processo de avaliação apresenta um enorme potencial, nomeadamente quando aplicada à modalidade de avaliação formativa (Lopes & Moura, 2014).

Tendo por base o contexto referido e com o propósito de, como propõe Ponte (2002), experimentar novas dinâmicas de trabalho que conduzam os alunos a melhorar as suas aprendizagens, considerou-se relevante desenvolver um estudo sobre avaliação

formativa aliada ao uso de tecnologia educativa. Desenvolveu-se assim o presente estudo, onde a primeira autora deste artigo foi simultaneamente a professora da turma envolvida e investigadora. O principal objetivo de investigação foi identificar e compreender as potencialidades e implicações do recurso à avaliação formativa, com apoio da tecnologia, na prática do professor. Mais especificamente, pretendeu-se analisar e compreender:

- Como evolui, ao longo da experiência, a perspetiva do professor relativamente à avaliação formativa?
- Quais os aspetos positivos e negativos associados a esta modalidade de avaliação?
- Qual o contributo que a tecnologia pode trazer à implementação da avaliação formativa?

Avaliação formativa

A avaliação integra o processo de ensino e aprendizagem e não deve ser vista como um elemento estranho a este processo (Santos, 2008). De acordo com Fernandes (2013), a avaliação está presente em todos os campos de ação e é ela que nos possibilita conceber juízos e tomar decisões. Quando se fala em avaliação, fala-se em descrever, compreender e agir, com vista a uma melhoria. A avaliação em educação tem-se desenvolvido de forma significativa nas últimas décadas, no entanto, a sua história é já longa.

Stiggins (2005) e Fernandes (2007a), mencionam que, nos anos 70, foi com autores como Bloom, Hastings e Madaus que se ampliou o conceito de avaliação, passando a valorizar-se a avaliação formativa como modo de promover a aprendizagem e o sucesso e não apenas para julgar ou classificar alunos, embora a avaliação ainda permanecesse muito orientada para os resultados. A evolução do conceito de avaliação educacional que certifica a avaliação como um processo formativo, com o objetivo de analisar informações, fazer juízos de valor e tomar decisões que permitam ajustar o processo às necessidades individuais, emergiu no início dos anos 80.

Para Fernandes (2007b, p. 283), a avaliação formativa é "um processo intrinsecamente ligado a todas as atividades de ensino e de aprendizagem desenvolvidas por alunos e/ou professores; por natureza, ela gera informação que pode ser utilizada como *feedback* para melhorar o ensino e a aprendizagem".

Heritage (2007), define avaliação formativa como um processo sistemático que permite reunir continuamente evidências sobre a aprendizagem, sendo os dados recolhidos usados para identificar o nível efetivo de aprendizagem de um aluno e para adaptar o ensino no sentido de ajudar o aluno a atingir a meta de aprendizagem desejada.

Esta autora afirma que a avaliação formativa, quando bem utilizada, fornece a professores e alunos as informações necessárias ao desenvolvimento da aprendizagem.

Num artigo em que analisa a investigação sobre a avaliação das aprendizagens realizada em Portugal nas últimas três décadas, Fernandes (2009) menciona que "as práticas de avaliação formativa estão longe de fazer parte da vida pedagógica das escolas" (p. 89) e que "a avaliação como medida ou como forma de verificar se os objectivos foram ou não atingidos são as concepções predominantes" (p. 90).

Leite e Fernandes (2014), defendem a ideia de que avaliação pressupõe uma partilha entre professores e alunos, na qual os professores devem ser os impulsionadores da aprendizagem e os alunos intervenientes autónomos e atuantes na aquisição dessas aprendizagens.

É fundamental utilizar a avaliação formativa com intencionalidade. Santos e Dias (2006, p. 502), referem que "a avaliação só será efetivamente formativa se houver intencionalidade de utilizar a avaliação para melhorar as aprendizagens dos alunos, tendo essa intencionalidade consequências nessas aprendizagens".

O recurso às novas tecnologias no processo de ensino e de aprendizagem tem aumentado, tendo-se generalizado, nas mais variadas áreas do conhecimento, o uso do computador. Porém, na avaliação das aprendizagens ainda não se pode considerar otimizado o uso da tecnologia, apesar de se reconhecer que num processo centrado no aluno e orientado para a aquisição de capacidades permitiria estabelecer novas perspetivas e possibilidades. A utilização das tecnologias de informação no processo de avaliação apresenta um enorme potencial, nomeadamente quando aplicada à modalidade de avaliação formativa (Lopes & Moura, 2014).

Lobato e Pedro (2014) constatam que os alunos, fora das salas de aula, utilizam diariamente tecnologias móveis como os *smartphones*. A escola deveria tirar partido desta realidade, colocando esta tecnologia ao seu serviço, ao invés de a descurar, cabendo aos professores acompanhar esta tendência, alterando o entendimento conservador de escola. As autoras referem que os telemóveis são uma das tecnologias que apresentou um crescimento mais rápido, tendo atualmente, a sua maioria, maior capacidade de armazenamento e processamento do que um computador da década de noventa do século XX.

Alves, Zuzarte e Barbosa (2016), apresentam algumas abordagens pedagógicas inovadoras usadas em escolas europeias, adotando o uso da tecnologia, em particular de

ferramentas digitais que podem ser usadas em dispositivos móveis. Entre elas é referida a aplicação *Plickers*. Segundo as autoras, esta é uma aplicação muito intuitiva e fácil de usar, sendo que a sua utilização mais imediata é na avaliação formativa, através da realização de questões de escolha múltipla e de verdadeiro ou falso. Estas novas ferramentas tecnológicas estão desenhadas para permitirem efetivar pequenas, mas fundamentais, mudanças no ambiente de sala de aula: promovendo a criação de novas formas de ensinar e de avaliar; possibilitando a realização de avaliação formativa de forma simples; envolvendo o aluno num ambiente desafiador, motivador e atrativo; possibilitando, ainda, que os alunos desenvolvam as suas capacidades de comunicação, argumentação, autonomia e de autorregulação relativamente às suas aprendizagens.

Metodologia

O presente estudo tem como finalidade a melhoria e transformação da prática pedagógica. Adota-se assim uma metodologia orientada para a prática, uma vez que, e de acordo com Zeichner e Diniz-Pereira (2005), se procurou compreender e melhorar o desempenho profissional, através da reflexão sobre a própria prática.

A recolha de dados decorreu durante o 2.º período do ano letivo de 2016/2017, de 9 a 20 de março, em seis aulas, quatro com a duração de 90 minutos e duas de 45 minutos. As técnicas e instrumentos utilizados foram os sugeridos por Coutinho *et al.* (2009): as baseadas na observação, na conversação e na análise de documentos.

Uma das técnicas de recolha de dados escolhida para esta investigação foi a observação, mais especificamente, a observação participante. Esta foi implementada de forma sistemática e decorreu no ambiente natural de sala de aula. As notas de campo permitiram um registo sistemático das observações feitas pela investigadora, sendo constituídas por: (i) descrições das observações informais de como decorreram as aulas; (ii) identificação de diálogos que se passaram entre os alunos ou entre a professora e os alunos; e (iii) relatos sobre a forma como os alunos reagiram. Estas notas de campo, tomaram a forma de anotações condensadas, no momento da ação e, posteriormente, a forma de anotações extensas, em que as notas anteriores foram expandidas, havendo lugar à reflexão. No sentido de complementar posteriormente as notas de campo, recorreu-se a gravações áudio de todas as aulas. Foram ainda consultados ou recolhidos documentos diversos, como registos de natureza biográfica relativos ao percurso escolar dos alunos, planificações anuais e mensais, os resultados do segundo teste do 2.º período, os

resultados da prova final do 9.º ano e as resoluções das tarefas efetuadas pelos alunos. No final do estudo foi pedido aos alunos uma resposta escrita à questão "Qual é a tua opinião sobre as questões formativas realizadas no início e no final de cada aula?".

No início e no final de cada uma das aulas em que decorreu este estudo, foram realizadas questões recorrendo à aplicação *Plickers*, tendo sido definidos, para cada questão, objetivos de aprendizagem a atingir. As respostas dos alunos a estas questões constituíram um dos elementos que permitiu verificar se os objetivos tinham e como tinham sido atingidos.

Na figura 1 pode observar-se uma imagem de uma sala de aula onde se está a usar a referida aplicação.

Figura 1. Sala de aula onde se está a usar a aplicação *Plickers*

Nestas aulas, cada aluno possuía um cartão, pessoal e intransmissível, que permitia quatro ou duas opções de resposta, consoante se tratasse de uma questão de escolha múltipla ou de verdadeiro ou falso. Os alunos liam a questão, que era projetada num quadro branco, e selecionavam a resposta que consideravam estar certa, colocando o seu cartão na posição correspondente à resposta escolhida, virado para a professora. O *smartphone* da professora fazia a leitura das respostas e apresentava em tempo real, graficamente, o número de respostas corretas e incorretas. Estes gráficos permitiam optar entre revelar o resultado global da turma ou o resultado individual por aluno.

Resultados

Na impossibilidade, por questões de espaço, de apresentar aqui toda a experiência, descrevem-se sucintamente alguns episódios. No final da quarta aula em que decorreu a experiência, quando os alunos já conheciam a noção de grandezas inversamente

proporcionais, constante de proporcionalidade inversa e expressão algébrica associada, foi colocada aos alunos a seguinte questão:

Questão 22: A partir da tabela, abaixo, podemos concluir que a expressão algébrica que relaciona y com x é:

x	3	6
y	60	30

(A) $y = \frac{20}{x}$ **(B)** $y = 20x$ **(C)** $y = 180x$ **(D)** $y = \frac{180}{x}$

O objetivo desta questão era averiguar se os alunos conseguiam identificar corretamente a expressão algébrica que relaciona as duas grandezas. Assim, os alunos que respondessem a opção (A) poderiam reconhecer que se tratava de uma situação de proporcionalidade inversa, identificando a expressão algébrica corretamente, no entanto revelariam dificuldades em determinar a constante de proporcionalidade inversa, confundindo-a com a de proporcionalidade direta. Os alunos que escolhessem a opção (B) não conseguiam reconhecer que se tratava de uma situação de proporcionalidade inversa, não conseguindo nem determinar a constante de proporcionalidade inversa, nem identificar a expressão algébrica. Os que optassem pela opção (C) conseguiam determinar a constante de proporcionalidade inversa corretamente, mas não conseguiam identificar a expressão algébrica. Os que respondessem (D) responderiam corretamente.

Ao planificar esta aula a expetativa da professora era naturalmente que a totalidade dos alunos respondesse corretamente. No entanto, a observação do gráfico da figura 2 mostra que não foi isso que sucedeu:

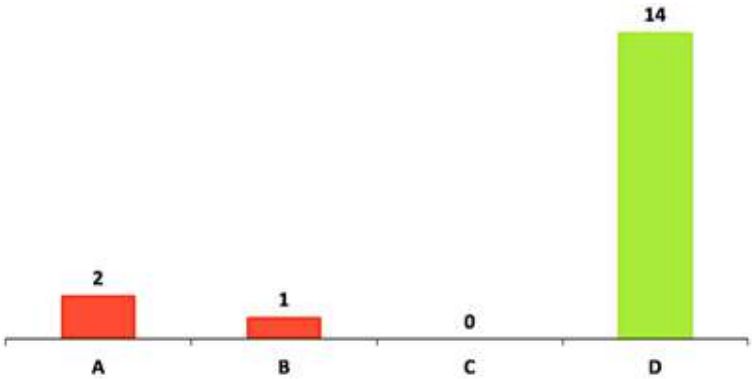


Figura 2. Respostas dadas pelos alunos à questão 22

As respostas dos alunos evidenciaram que ainda existiam dificuldades em determinar a constante de proporcionalidade inversa e em identificar a expressão algébrica deste tipo de proporcionalidade.

Depois de cada aluno responder individualmente à questão colocada existia um momento de debate para que a questão apresentada e as respostas dadas fossem analisadas. Nesta altura cada aluno tinha espaço para expor a sua opinião e fundamentá-la com base nos argumentos que entendesse convenientes. E este era um dos momentos em que todos demonstravam mais interesse e empenho.

No global, este processo permitia à professora identificar de uma forma rápida e individualizada as lacunas dos alunos, e a estes tomarem consciência das dúvidas e conceções erradas que ainda tinham.

Este processo permitia à professora, atribuir aos alunos exercícios adicionais, am responder corretamente, o exercício que se segue, no qual se pretendia que fossem capazes de distinguir relações de proporcionalidade direta das de proporcionalidade inversa, determinando corretamente a constante de proporcionalidade em cada caso e escrevendo a respetiva expressão algébrica:

1. As tabelas seguintes, I, II, III e IV, apresentam relações entre grandezas X e Y.

I

X	4	6	8	12
Y	12	18	24	36

II

X	4	6	8	12
Y	19	21	23	27

III

X	4	6	8	12
Y	24	22	20	16

IV

X	4	6	8	12
Y	24	16	12	8

1.1. Uma das tabelas traduz uma relação de proporcionalidade direta da grandeza *X* relativamente à grandeza *Y*.

1.1.1. Identifica-a. Justifica a tua resposta.

1.1.2. Indica a respetiva constante de proporcionalidade direta.

1.1.3. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas grandezas.

1.2. Identifica a tabela que traduz uma relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas *X* e *Y* . Justifica a tua resposta e identifica a constante de proporcionalidade inversa.

1.2.1. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas grandezas.

(adaptado de: Costa e Rodrigues, 2016, p. 75)

No início da aula seguinte foi apresentada outra questão com o mesmo objetivo de aprendizagem da do final da aula anterior.

Questão 24: A partir da tabela, abaixo, podemos concluir que a expressão algébrica que relaciona *y* com *x* é:

x	1	3
y	6	2

(A) $y = \frac{x}{6}$ **(B)** $y = 6x$ **(C)** $y = \frac{6}{x}$ **(D)** $y = \frac{12}{x}$

E o gráfico da figura 3 apresenta as respostas dos alunos.

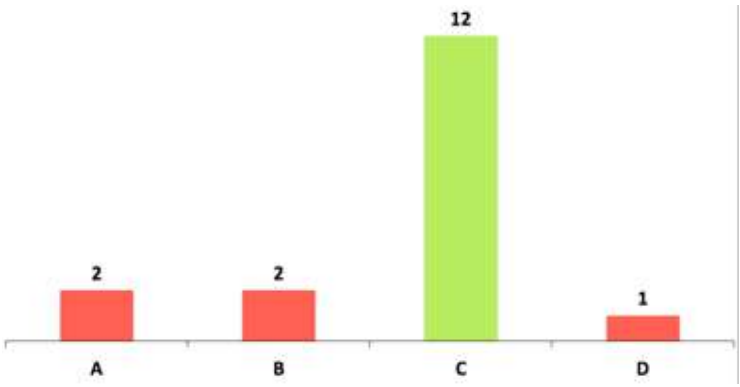


Figura 3. Respostas dadas pelos alunos à questão 24

Os resultados não foram os esperados, com cinco alunos a errar a resposta à questão. Constatando-se que quatro alunos continuavam a apresentar dificuldades em identificar a expressão algébrica e em determinar a constante de proporcionalidade inversa.

Estas questões permitiram à professora aperceber-se de quais os alunos que necessitavam de mais tempo para atingirem os objetivos pré-definidos, e indicar-lhes tarefas consoante a dificuldade/lacuna identificada, e de quais os alunos que já os tinham atingido, e propor-lhes exercícios de desenvolvimento dos conhecimentos que lhes permitissem ir um pouco mais além.

Ao longo da experiência a postura da professora relativamente à avaliação formativa foi evoluindo. De uma postura inicialmente focada nas percentagens de alunos que respondiam acertadamente, a professora passa a reconhecer a forma como uma perspetiva mais formativa da avaliação lhe permite identificar as dificuldades dos alunos. Passa ainda a reconhecer que tal é importante, não só para ela, mas também para o próprio aluno, que consegue identificar o ponto onde se encontra na aprendizagem, onde tem dúvidas e o que precisa ser feito para atingir os objetivos propostos. Isso mesmo é ilustrado nas suas notas de campo, onde os registos iniciais do tipo "na 1.ª questão, 88% dos alunos responderam acertadamente, tendo 12% dos alunos dado uma resposta errada" deram lugar a registos do tipo "na 22.ª questão, dois alunos evidenciaram dificuldade em determinar a constante de proporcionalidade inversa, confundindo-a com a de proporcionalidade direta; um aluno não conseguiu reconhecer que se tratava de uma situação de proporcionalidade inversa, não conseguindo nem determinar a constante de proporcionalidade inversa, nem identificar a expressão algébrica; os restantes alunos evidenciaram conhecimento relativamente à expressão adequada para traduzir uma situação de proporcionalidade inversa, bem como relativamente à forma de determinar a constante de proporcionalidade".

Nas reflexões que foi incluindo nas suas notas de campo ao longo destas aulas, a professora afirma que "tem sido possível fazer um caminho lado a lado e não um caminho onde o aluno segue atrás do professor, muitas vezes sem perceber bem porquê. Tendo-se colocado gradualmente, no aluno, a responsabilidade pelos seus avanços e dificuldades".

De acordo com a professora, o grande benefício passou pela deteção e identificação atempada das dificuldades dos alunos, quer pela professora, quer pelo próprio aluno, o que

contribuiu para uma intervenção imediata, que proporcionou a melhoria das aprendizagens dos alunos.

Depois da sequência de aulas onde foi implementado este estudo, os alunos realizaram o segundo teste do 2.º período, no qual foram avaliados quatro conteúdos: trigonometria; propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência; equações; proporcionalidade inversa e funções algébricas (funções de proporcionalidade inversa).

Foram quatro as questões que avaliaram os conhecimentos relativos à proporcionalidade inversa e funções algébricas.

Na figura 4 encontram-se as respetivas cotações obtidas pelos alunos. E na figura 5 a percentagem de respostas totalmente corretas, por conteúdo, no teste realizado pelos alunos.

Através da sua observação podemos notar que o desempenho dos alunos no conteúdo alvo desta experiência foi bastante satisfatório.

Estes resultados parecem sugerir que a avaliação formativa tem um efeito positivo nas aprendizagens e no desempenho dos alunos.

Questão																**13**	**14.1**	**14.2**	**14.3**	**14.4**	**15.**	**16.1**	**16.2**
Cotação																3	2	4	2	6	3	3	3
1																3	2	4	2	6	3	3	3
2																3	0	2	1	4	3	3	3
3																3	2	4	1	6	0	0	0
4																0	2	4	0	0	0	3	0
5																							
6																3	2	0	2	4	3	3	3
7																3	2	4	2	2	0	3	3
8																3	2	4	2	5	3	3	3
9																3	2	4	2	6	3	3	3
10																							
11																3	2	4	2	6	3	3	2
12																							
13																3	2	4	1	6	3	2	3
14																3	2	4	2	6	3	3	3
15																							
16																3	2	4	2	4	3	0	0
17																3	2	0	0	0	0	0	0
18																3	2	0	0	0	3	0	0
19																							
20																3	2	4	2	6	3	3	3
21																3	0	0	0	0	0	0	0
22																3	2	4	0	0	0	0	0
Número de respostas certas em %	35	76	71	24	59	12	35	24	41	24	76	24	41	29	24	94	82	65	53	41	65	53	53
Conteúdos	trig.	propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência									equações					proporcionalidade inversa e funções algébricas							

Figura 4. Grelha das cotações do segundo teste do 2.º período

Figura 5. Percentagem de respostas totalmente corretas, por conteúdo, no segundo teste do 2.º período

No final do ano letivo os alunos realizaram a prova final de matemática do 9.º ano. Na tabela 1 apresentam-se os resultados obtidos pelos alunos envolvidos no estudo (turma I) e pelas restantes turmas da escola (turmas II, III e IV).

Tabela 1. Percentagem na prova final de matemática das quatro turmas do 9.º ano

Domínio	Percentagem alcançada pela turma			
	I	II	III	IV
Números e Operações	29	42	48	21
Geometria e Medida	61	52	59	37
Funções, Sequências e Sucessões	56	51	49	38
Álgebra	39	40	41	33
Organização e Tratamento de Dados	56	69	74	53

Podemos constatar que a turma I obteve o melhor desempenho no domínio sobre o qual incidiu esta experiência (56%), o que poderá levar a equacionar a possibilidade de existir uma relação entre as práticas de avaliação formativa e os resultados que os alunos, sujeitos a tais práticas, obtêm em provas de avaliação externa.

Conclusões

No início da experiência, a professora relata que, foi necessário realizar um esforço, consciente, contra o automatismo de querer transformar em números o desempenho dos alunos e evoluir no sentido de o encarar como uma forma de aprendizagem e de reflexão sobre o caminho a percorrer. E a professora refere as vezes em que vacilava entre uma avaliação de natureza mais sumativa e outra de natureza mais formativa.

A professora menciona que foi progredindo de um processo de ensino centrado essencialmente nela própria, para um processo partilhado, em que a preocupação em ajudar os alunos a melhorarem e a tornarem-se mais confiantes, autónomos e pró-ativos, passou a ser uma prioridade. Como afirmam Fernandes (2005) e Pinto e Santos (2006), a avaliação formativa deve ser centrada no aluno e nos processos de ensino e aprendizagem e tem como função principal regular e melhorar as aprendizagens dos alunos.

O conceito de avaliação evoluiu no sentido de a tornar mais versátil, consciente e dinâmica, passando a professora a considerar insuficiente a verificação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos com o intuito de os classificar e começando gradualmente a centrar a sua ação na regulação das aprendizagens dos alunos.

A estratégia de avaliação formativa implementada mostrou, no decorrer desta experiência, que esta modalidade de avaliação permite, por um lado, à professora conseguir realizar uma observação mais atenta e estruturada dos processos, percebendo melhor o que cada aluno apreendeu, bem como onde ainda persistem dificuldades e, por outro, aos alunos clarificarem o que era suposto atingirem em determinado momento.

Este foi um elemento chave para o envolvimento dos alunos, uma vez que a apropriação deste conhecimento manifestou-se fundamental para despertar o interesse e envolver os alunos, tal como referido por Barreira *et al.* (2006).

Outro aspeto observado, foi o facto de as dúvidas e respostas erradas dadas pelos alunos contribuírem para o esclarecimento de raciocínios menos corretos, ajudando a que outros alunos não cometessem os mesmos erros. Por outro lado, existiu a preocupação, por parte da professora, em realizar uma abordagem positiva do erro, encarando-o como natural e inerente ao processo de ensino e aprendizagem, de acordo com a perspetiva defendida por Santos (2002).

Ao longo do estudo, a professora foi abandonando a ideia de que é suficiente o aluno ter conhecimento do que não consegue fazer, dando cada vez mais importância a um ensino que tem como ponto de partida o que o aluno já sabe fazer e as falhas e erros que tinham sido cometidos.

Wiliam (2011) menciona que em situações matemáticas, informar os alunos apenas sobre o que eles precisam saber ou fazer para melhorarem o seu desempenho não é suficiente, sendo mais útil apontar os erros que eles estão a cometer, e o que eles necessitam de fazer para melhorarem.

Podemos assim dizer que no final deste estudo a visão da professora evoluiu favoravelmente no que diz respeito à avaliação formativa.

A tabela 2 sintetiza os principais aspetos dessa evolução.

Tabela 2: Visão da professora relativamente à avaliação formativa

Antes	Depois
Processo de ensino e aprendizagem	
centrado na professora	partilhado e centrado no aluno
Avaliação	
classificação do desempenho quantitativa	desempenho entendido enquanto evolução e reflexão do caminho a percorrer qualitativa
Instrumentos	
de verificação do que o aluno sabe em determinado momento Como? exercícios no final da aula; exercícios para fora da sala de aula	de averiguação sobre o que o aluno já sabe fazer e sobre o que ainda não consegue fazer Como? questões de avaliação formativa simples e com objetivos bem definidos
Conhecimento do que o aluno	
não consegue fazer é suficiente	já sabe fazer; das falhas e dos erros que cometeu (ponto de partida)

A avaliação formativa permite a partilha, com o aluno, de responsabilidades e de objetivos, proporcionando o esclarecimento necessário, no que se refere às intenções de aprendizagem e aos critérios para alcançar o sucesso. Esta partilha ocorre quando, depois de um conjunto de evidências serem recolhidas, em sala de aula, elas são interpretadas e usadas para se tomarem decisões sobre os próximos passos a dar.

Esta experiência permitiu reconhecer dois dos resultados atribuídos à prática de avaliação formativa apontados por Black e Wiliam (1998):

(i) melhora substancialmente a aprendizagem de todos os alunos.

- O desempenho global dos alunos da turma no teste realizado depois desta experiência, foi melhor no conteúdo alvo do estudo.

(ii) os alunos que frequentam aulas em que a avaliação predominante é de natureza formativa obtêm melhores resultados em exames e provas de avaliação externa.
- Os alunos da turma I, turma alvo do presente estudo, obtiveram melhores resultados na prova final de matemática realizada no final do 9.º ano.

O uso de tecnologia no processo de avaliação permite considerar novas perspetivas e possibilidades. Esta experiência sugeriu que o uso das novas tecnologias, em particular da aplicação *Plickers*, tal como avançado por Black e Wiliam (1998), poderá potenciar a otimização da avaliação formativa, na medida em que: (i) proporciona um *feedback* imediato sobre os alunos, ao informar em tempo real as respostas às questões colocadas, facilitando a deteção imediata das dificuldades de aprendizagem do aluno; (ii) permite desenvolver hábitos de pensamento positivo nos alunos, como por exemplo, defenderem o seu ponto de vista, hábitos que foram sendo estabelecidos e desenvolvidos depois de cada sequência de questões apresentada; (iii) fornece pistas sobre o que os alunos estão a apreender, possibilitando a determinação do grau de domínio, por parte do aluno, de uma determinada aprendizagem; (iv) permite que a maioria dos alunos coopere nas atividades e no trabalho desenvolvido em sala de aula, conferindo ao aluno um papel mais ativo, e potenciando, como sucedeu neste estudo, a participação, o interesse e o empenho; (v) proporciona aos alunos um *feedback* individual imediato, ao permitir a visualização do desempenho global do aluno.

De acordo com vários autores, como Santos (2005) e Fernandes (2006), a falta de tempo, as dificuldades em gerir o currículo e a existência de exames nacionais são três dos principais obstáculos referidos pelos professores para a não realização de avaliação formativa. O recurso às novas tecnologias constituiu uma ajuda à superação destas limitações. No que diz respeito ao fator tempo, a tecnologia utilizada, neste estudo, permitiu efetuar questões de avaliação formativa de forma rápida e eficiente, possibilitando aos alunos a mobilização dos conhecimentos de forma eficaz. Quanto ao cumprimento do programa, confirmou-se que o recurso às novas tecnologias simplifica a implementação desta modalidade de avaliação, não se verificando nenhuma dilação nas planificações que tinham sido elaboradas. A particularidade da tecnologia usada possibilitar apenas a elaboração de questões de escolha múltipla e de verdadeiro ou falso, conduziu à elaboração de questões semelhantes ou iguais às que figuram em exames nacionais do 3.º ciclo, tendo a vantagem de proporcionar aos alunos o contacto atempado com este tipo de questões.

Na opinião da professora participante neste estudo, o ensino depende, em muito, de professores curiosos e criativos, que ambicionam proporcionar aos seus alunos um ambiente de aprendizagem que os cative e os faça querer continuar a aprender. Os resultados alcançados neste estudo sugerem que a tecnologia pode ser um instrumento poderoso, nas mãos do professor, para promover avaliação formativa e a aprendizagem dos alunos.

Referências bibliográficas

Alves, A., Zuzarte, S., & Barbosa, S. (2016). A iniciativa Laboratórios de Aprendizagem: atividades de aprendizagem inovadoras. *Educação e Matemática*, 140, 74-80.

Barreira, C., Boavida, J., & Araújo, N. (2006). Avaliação formativa: novas formas de ensinar e aprender. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, 40(3), pp. 95-133.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: principles, policy & practice*, *5*(1), 7-74.

Cid, M., & Fialho, I. (2013). Avaliar para aprender na escola: um caminho em aberto. In I. Fialho & J. Verdasca (Orgs.), Turma Mais e sucesso escolar. Trajetórias para uma nova cultura de escola (pp. 79-89). Évora: Centro de Investigação em Educação e Psicologia – Universidade de Évora.

CNE (2017). *Pareceres 2016*. Lisboa: CNE.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2016). *Novo Espaço - parte 2*. Porto: Porto Editora.

Coutinho, C. *et al.* (2009). Investigação-Ação: Metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia Educação e Cultura*, XIII(2), 455-479.

Fernandes, D. (2005). Avaliação alternativa: perspectivas teóricas e práticas de apoio. In Futuro Congressos e Eventos (Ed.). *Livro do 3. º Congresso Internacional Sobre Avaliação na Educação*. pp. 79-92. Curitiba: Futuro Eventos.

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação*. 19(2), 21-50.

Fernandes, D. (2007a). Avaliação das aprendizagens no Sistema Educativo Português. *Educação e Pesquisa*, 33(3), 581-600.

Fernandes, D. (2007b). Vinte e cinco anos de avaliação das aprendizagens: uma síntese interpretativa de livros publicados em Portugal. In A. Estrela (Org.), *Investigação em educação: Teorias e práticas (1960-2005)* (pp. 261-306). Lisboa: Educa.

Fernandes, D. (2009). Avaliação das aprendizagens em Portugal: investigação e teoria da actividade. *Sísifo. Revista de Ciências da educação*. 09, pp. 87-100.

Fernandes, D. (2011). Articulação da aprendizagem, da avaliação e do ensino: Questões teóricas, práticas e metodológicas. In M.P. Alves e J.-M. De Ketele (Orgs.), *Do currículo à avaliação, da avaliação ao currículo* (pp. 131-142). Porto: Porto Editora.

Fernandes, D. (2013). Avaliação em Educação: uma discussão de algumas questões críticas e desafios a enfrentar nos próximos anos. *Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, *21*(78), 9-32.

Fernandes, D., & Gaspar, A. (2014). Avaliação das aprendizagens: uma síntese de teses de doutoramento realizadas em Portugal (2001-2010). *Revista Meta: Avaliação,* 6(17), 199-222.

Hargreaves, A. (2004). O ensino na sociedade do conhecimento: educação na era da insegurança. Porto Alegre: Artmed.

Heritage, M. (2007). Formative Assessment: What Do Teachers Need to Know and Do. The Phi Delta Kappan. 89(2) , pp. 140-145.

Leite, C., & Fernandes, P. (2014). Avaliação, qualidade e equidade. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior*, *19*(2), pp. 421-438. Campinas.

Lobato, A., & Pedro, N. (2014). As Tecnologias Móveis no Processo de Ensino e Aprendizagem da Língua Inglesa. Aprendizagem Online. In *Atas Digitais do III Congresso Internacional das TIC na Educação* (pp.271-281). Lisboa: Instituto da Educação da Universidade de Lisboa.

Lopes, C., & Moura, D. (2014). Avaliação com o recurso a tecnologias da informação. In F. Vieira & M. Restivo (Orgs.), *Novas tecnologias e educação: Ensinar a aprender/Aprender a ensinar* (pp. 191-207). Porto: Biblioteca Digital da Faculdade de Letras da Universidade do Porto.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). Modelos de avaliação das aprendizagens. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa prática. In GTI (Ed.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Santos, L. (2002). Autoavaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.). *Avaliação das aprendizagens* (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: um olhar sobre o seu percurso. In Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas - Actas do Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L., & Dias, S. (2006). Avaliação reguladora, feedback escrito, conceitos matemáticos. Um Triângulo de Difícil Construção. In *Atas do XX SIEM*. Lisboa: APM.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SPCE-SEM.

Stiggins, R. (2005). From formative assessment to assessment for learning: a path to success in standards-based schools. *The Phi Delta Kappan, 87*(4), 324-328.

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Solution Tree Press. Bloomington. EUA.

Zeichner, K. M., & Diniz-Pereira, J. E. (2005). Pesquisa dos educadores e formação docente voltada para a transformação social. *Cadernos de Pesquisa*, *35*(125), 63-80.

DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA VERSUS DEMONSTRAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA – A PERSPETIVA DE PROFESSORES

Helena Rocha

Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade NOVA de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

Resumo. *Este estudo pretende analisar as perspetivas de professores de diferentes níveis de ensino relativamente à demonstração e suas funções na Matemática e no ensino da Matemática. Adotando uma metodologia de índole qualitativa, e tendo por base entrevistas, foram recolhidas as perspectivas de professores do ensino secundário, do ensino superior e de futuros professores de Matemática. As conclusões alcançadas sugerem que os professores parecem partilhar uma conceção formal da demonstração matemática, reconhecendo tanto a necessidade de introduzir alguma simplificação quando se considera a demonstração no âmbito do ensino da Matemática, como a importância das suas funções de validação, de contributo para a aprendizagem e até uma função de certo modo cultural.*

Palavras-chave: *demonstração em Matemática; demonstração no ensino da Matemática; funções da demonstração.*

Abstract. *This study intends to analyze the perspectives of teachers of different levels regarding proof and its functions in Mathematics and Mathematics teaching. Adopting a methodology of a qualitative nature, and based on interviews, the perspectives of teachers of upper secondary, higher education and training teachers of Mathematics were collected. The conclusions reached suggest that teachers seem to share a formal conception of mathematical proof, recognizing the need to introduce some simplification when considering proof in Mathematics teaching as well as the importance of their functions of validation, contribution to learning and even a cultural function.*

Keywords: *proof in Mathematics; proof in the teaching of Mathematics; functions of proof.*

Introdução

A demonstração é considerada a pedra basilar de todo o conhecimento matemático. E, como tal, compreender que a Matemática tem por base o raciocínio e não é apenas um conjunto de regras arbitrárias é uma mensagem importante a transmitir aos alunos. É precisamente esta a postura assumida por Stacey e Vincent (2009), que consideram que raciocínio, fundamentação e demonstração, com um nível adequado de exigência, devem constituir uma parte importante da aprendizagem da Matemática. A referência dos autores a um nível adequado aos alunos, sugere contudo desde logo uma diferença entre a demonstração matemática tal como é vista pelos matemáticos e a demonstração matemática no ensino. Neste artigo procurarei discutir as diferenças de perspetivas entre a

demonstração matemática e a demonstração matemática no ensino tal como é vista pelos professores. Concretamente procurarei responder às seguintes questões:

- Qual o entendimento dos professores relativamente à demonstração matemática e à demonstração matemática no ensino?
- Quais as percepções dos professores relativamente às funções da demonstração matemática e da demonstração matemática no ensino?

A demonstração

O que é ao certo uma demonstração matemática é algo que, de acordo com Steele e Rogers (2012), não é consensual nem mesmo entre os matemáticos. Segundo este autor a demonstração "é um argumento matemático que é geral para uma classe de ideias matemáticas e estabelece a verdade de uma afirmação matemática baseando-se em factos matemáticos que são aceites ou que tenham sido previamente comprovados" (p. 161). Em contexto de sala de aula, Stylianides e Ball (2008), referem-se-lhe como um argumento matemático que usa conhecimentos matemáticos considerados válidos pelos alunos e que não carecem de justificações adicionais, que adopta raciocínios considerados válidos e já conhecidos pelos alunos ou cuja compreensão se encontre ao seu alcance, e que é comunicada de forma adequada que seja igualmente do conhecimento dos alunos ou cuja compreensão esteja ao seu alcance.

A dificuldade em conseguir que os alunos compreendam a necessidade e a importância da prova em Matemática é, segundo deVilliers (1999), bem conhecida de todos os professores do ensino secundário. Esta dificuldade acentua-se quando a tecnologia está envolvida pois, segundo Hsieh et al. (2012), o carácter dinâmico usualmente oferecido por esta permite a realização de trabalho de natureza experimental, que potencia a descoberta de propriedades e a formulação de conjecturas.

A forma como a análise de diversos casos se torna possível com a tecnologia, acaba por originar nos alunos um sentimento de confiança relativamente à veracidade das conclusões que estabelecem com o apoio da tecnologia, que frequentemente é potenciada pela forma como os alunos se habituaram a ver a Matemática validada de forma externa, seja pelo professor, pelo manual ou até pelos pais (Tall et al., 2012). A necessidade de demonstrar a conjectura formulada pode assim não ser sentida. Mas se inferir uma conclusão a partir da reflexão em torno de alguns casos particulares é uma actividade importante, esta é sem dúvida distinta da demonstração (Cabassut et al., 2012). Enfatizar

junto dos alunos a necessidade e a importância da demonstração implicará então a procura pela função desta.

DeVilliers (2012) considera que, tradicionalmente, a justificação ou o convencimento sobre a validade de uma conjectura são encaradas como a principal função da demonstração, sendo que Knuth (2002) considera que este é mesmo o único papel que a maioria dos professores lhe reconhece. Nas últimas décadas esta visão estreita do papel da demonstração tem vindo a ser criticado por autores como Reid (2011), que entende que esta tem assumido igualmente outros papéis importantes para os matemáticos e que pode também assumir um papel de grande valor didáctico em sala de aula.

Para Mejía-Ramos (2005), a procura por uma mais profunda compreensão é o que verdadeiramente move os matemáticos e também o que os leva a rejeitar as "alegadas" demonstrações realizadas por via computacional. E isto apesar de, como realça Hanna (2014), a compreensão ser algo cujo entendimento permanece relativamente indefinido. Por seu turno Boavida (2001) refere-se ao papel da demonstração como um meio e não um fim, englobando simultaneamente a validação e a compreensão. Na realidade actual, em que facilmente se encontram acessíveis sistemas com cálculo algébrico simbólico e programas de geometria dinâmica, é frequente que se consiga uma validação da conjectura com um considerável grau de confiança (deVilliers, 2012). Como tal, torna-se difícil apontar a necessidade de validação como a única necessidade.

As tecnologias permitem o convencimento relativamente à validade da conjectura contudo, em geral, não permitem a compreensão da razão porque assim é (deVilliers, 2012). E esta não parece ser uma questão exclusiva dos matemáticos. Com efeito, um estudo conduzido por Healy e Hoyles (2000), no âmbito do ensino da álgebra, sugere que os alunos preferem argumentos que simultaneamente os convençam e justifiquem a relação em causa. Uma conclusão que sugere que a explicação é algo importante para os alunos e que pode mesmo ser um recurso digno de um maior aproveitamento e exploração no ensino da Matemática. Curiosamente, a situação parece ser interpretada de forma um pouco diferente por alguns professores. Com efeito, como referem Biza, Nardi e Zachariades (2010), enquanto todos os professores reconhecem o papel de verificação da demonstração, o mesmo já não acontece relativamente ao seu papel ao nível da compreensão, sendo que: alguns professores tendem a verificar a validade de uma determinada relação matemática com base em exemplos, mesmo quando acabaram de a

demonstrar; e consideram que os argumentos baseados em casos concretos ou em representações visuais têm maior potencial para convencer.

Mas existem outros papéis que também são atribuídos à demonstração. Boavida (2001) refere-se à demonstração como um processo de descoberta. Segundo a autora, existem numerosos exemplos, na história da Matemática, de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos; de facto, é completamente improvável que alguns resultados (como, por exemplo, as geometrias não euclidianas) pudessem alguma vez ter sido encontrados por mera intuição. Aborda ainda o papel da demonstração como processo de sistematização, considerando que esta revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que a intuição pura não seriam capazes de realizar. Por seu turno Davis e Hersh (1983) encaram a demonstração como um desafio intelectual, considerando que esta cumpre uma função gratificante e de realização própria. A demonstração é portanto um campo de teste para a energia intelectual e o engenho matemático.

Metodologia

O estudo que aqui se apresenta faz parte de um trabalho mais abrangente e ainda em curso. Tendo em conta o objetivo do estudo e as questões de investigação, foi seguida uma metodologia qualitativa, no âmbito do paradigma interpretativo, pois pretendia-se compreender a forma como os professores perspetivam a demonstração matemática e a demonstração matemática no ensino. E de acordo com Bryman (2004), esta é a metodologia mais adequada para estas circunstâncias.

Os participantes no estudo foram professores do ensino superior e matemáticos, professores de Matemática do ensino secundário e futuros professores de Matemática a frequentar um programa de formação inicial (1.º ano do mestrado de formação de professores de Matemática para o 3.º ciclo e ensino secundário). Aqui serão apresentados elementos apenas relativamente a um professor de cada um dos grupos considerados. Dos quatro professores de cada um dos grupos foi escolhido o que desde o primeiro momento mostrou maior empenho e disponibilidade para participar no estudo, assumindo que tal poderia corresponder a um maior interesse e clareza de ideias relativamente à temática subjacente. Paulo é um professor de Matemática do ensino secundário com mais de 20 anos de experiência de ensino. Desde sempre se interessou pela tecnologia e pelo seu uso no ensino da Matemática, tendo mantido sempre o entusiasmo dos anos iniciais da

carreira e o interesse por se manter atualizado. Carlos é um jovem futuro professor de Matemática, que encara com entusiasmo e curiosidade a sua futura profissão. Como muitos jovens da sua idade gosta de tecnologia e mostra à vontade relativamente à sua utilização. Alexandra é uma professora de Matemática do ensino superior com mais de 20 anos de experiência de ensino. Como professora deste nível de ensino divide a sua atividade profissional entre o ensino e a investigação em Matemática, esta divisão não a impede contudo de manter um relacionamento próximo com os seus alunos e o empenho em lhes passar o gosto pela Matemática.

Os dados que aqui se apresentam foram recolhidos através de entrevista, tendo a análise da mesma sido guiada pelas questões de investigação, valorizando as perspetivas dos participantes, tal como referido por Bryman (2004) a propósito da análise narrativa. Para além de um conjunto de questões (em torno do que é uma demonstração, de qual a sua função e das diferenças de perspetiva consoante se tem em conta a Matemática ou o seu ensino), esta entrevista incluía um pedido de opinião relativamente à resposta dada por um aluno a uma solicitação de demonstração. A demonstração consistia em provar que a soma de dois números pares é um número par. Ao professor era apresentado por escrito a descrição do que o aluno fez, tal como consta da figura 1.

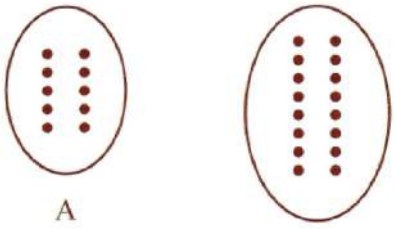
> Para efetuar a demonstração o aluno desenhou as seguintes figuras:
>
> 
>
>
> Terminado o desenho disse que um número é par se for possível obter emparelhamentos como os do diagrama A ou B. Disse que era indiferente o número de emparelhamentos em A ou B. Ora colocando B por baixo de A, continuamos a obter o mesmo tipo de emparelhamento e, portanto, o número que lhe corresponde será também par. Este número é a soma dos números pares dados.
>
> Guimarães (1993, p.15)

Figura 1. Descrição apresentada ao professor da demonstração efetuada pelo aluno

Apresentação de resultados

A noção de demonstração em Matemática e no ensino

Para Paulo, professor do ensino secundário, a demonstração é uma forma de atestar a veracidade de algo, seja uma ideia que nos surgiu ou uma conjectura desenvolvida a partir de um conjunto de observações de natureza empírica. Trata-se no fundo de um procedimento, onde o formalismo parece implícito, guiado pelo raciocínio lógico.

> [A demonstração] sob o ponto de vista matemático é uma sequência de passos, com uma determinada sequência lógica, que tem por objetivo comprovar uma determinada ideia ou conjectura que se baseia numa experiência empírica. (Paulo)

O entendimento de demonstração mantém-se inalterado para este professor quando ele considera a demonstração no ensino da Matemática. As expectativas e as abordagens é que se alteram perante os alunos. Destaca em particular a necessidade de adequar a linguagem utilizada ao nível dos alunos, referindo também a importância de simplificar a estrutura da própria demonstração. Refere ainda outro aspeto que considera importante: a necessidade de apoiar a demonstração em exemplos. Um recurso que justifica como forma de estimular a intuição do aluno para o que vai ser feito e que entende ser importante para ajudar o aluno a perceber a demonstração.

> O que entendo por demonstração matemática é igual na qualidade de pessoa que gosta deste campo da ciência ou na qualidade de professor de matemática dita elementar. A diferença está nos instrumentos utilizados para obter um determinado resultado. Atendendo à idade e ao perfil dos alunos que temos pela frente a abordagem para determinado tipo de demonstrações não pode nem deve ser a mesma. Assim não se pode querer que um aluno do 7.º ano de escolaridade utilize, por exemplo, a demonstração por absurdo com o mesmo grau de profundidade que o fará um aluno no 10.º ano ou mesmo no 12.º ano. Se é espectável que um aluno no 12.º ano, com um desenvolvimento normal na disciplina de Matemática, perceba, por exemplo, a demonstração de que um número irracional não pode ser escrito como o quociente de dois números inteiros, para um alunos de 7.º ano tal demonstração pode ser efetuada mas abreviando quer ao nível da linguagem utilizada, quer ao nível do encadeamento utilizado. Quer para uns quer para outros a demonstração deve e tem que ser simples sob pena de o aluno se perder e não perceber o porquê de tal tarefa. Muitas vezes é necessário, antes de efetuar a demonstração, efetuar alguns exemplos que apelem à intuição para "puxar" o aluno de forma a que ele se sinta motivado a perceber o conceito solicitado na demonstração. (Paulo)

Ao analisar a descrição da demonstração efetuada por um aluno reforça o entendimento anteriormente expresso relativo à importância do nível do aluno,

destacando o empenho do aluno na concretização da tarefa proposta. Mas o que mais se destaca na análise que faz é a referência a diferentes tipos de demonstrações. Fala assim em demonstração visual, contudo acaba por considerar que tal não é uma demonstração. Refere depois as demonstrações computacionais, e o caso do teorema das quatro cores, a que embora reconhecendo o estatuto de demonstração parece não atribuir o mesmo estatuto por falta da base do que designa por um processo formal.

> O que o aluno fez foi o que se convencionou chamar uma demonstração visual, em que se tiram ilações ou conclusões tendo por base um caso particular. No sentido boubakista tal processo não constitui uma demonstração uma vez que não é possível conceber um resultado geral tendo por base um único caso particular. (…) O aluno (…) não desiste de um objetivo que é demonstrar o resultado pretendido. Se o faz bem acho que não (…). Demonstra ter raciocínio matemático e demonstra saber trabalhar com outro tipo de representações além das esperadas, nomeadamente as algébricas.
>
> Volto a afirmar que não efetua de forma correta e esperada a demonstração mas aqui ressalvo que não sei o ano de escolaridade do aluno e se este for do 7.º ano deve ser encorajado (…). Lembro que a demonstração do teorema das quatro cores não tem um processo formal mas sim computacional por exaustão analisando a generalidade dos casos possíveis. Se é uma demonstração no sentido Bourbakista também não é, mas é um meio de provar uma crença e assim legitimar um resultado válido. (Paulo)

Carlos, futuro professor de Matemática, entende tal como Paulo, a demonstração como forma de garantir a veracidade de algo, enfatiza no entanto o rigor que se lhe encontra associado, ao referir a necessidade de seguir regras e procedimentos reconhecidamente aceites.

> Demonstração matemática é o método para provar um teoria, seguindo regras lógicas válidas e utilizando pressupostos matemáticos universalmente e previamente aceites. (Carlos)

No âmbito do ensino da Matemática Carlos encara a demonstração exatamente da mesma forma. Ainda assim considera que são necessárias adaptações para a adequar ao nível dos alunos. Tal poderá significar alterações que incluam nomeadamente redução da sua exatidão. A necessidade de reduzir o nível de exigência pode obrigar à realização de algumas simplificações e fazer com que o que o professor designa por elegância da demonstração não seja plenamente alcançada.

> Como professor, a demonstração matemática tem a mesma definição que anteriormente dei. (…) A demonstração está condicionada pelo conteúdo e nível de conhecimento do receptor/emissor. O seu nível de exigência, grau de exactidão, simplicidade, elegância podem não ser atingidos na plenitude (ou da mesma forma que se exige a um matemático). (Carlos)

Carlos assume a demonstração efetuada pelo aluno com válida, considerando ainda assim que não era a abordagem mais simples. Discute a questão da representação utilizada pelo aluno e pondera o facto de esta disponibilizar uma abordagem mais intuitiva para este aluno. Pondera também aspetos ao nível da criatividade, aludindo superficialmente a como uma certa valorização de abordagens algébricas pode acabar por a tolher. Globalmente valoriza a capacidade do aluno em expressar a sua forma de pensar e em encontrar uma forma de fazer o que lhe foi pedido. Ainda assim, acaba por destacar a abstração e por concluir que ao longo do seu percurso o aluno deve ir sendo encaminhado para o desenvolvimento de uma demonstração algébrica.

> Apesar da demonstração não ser a mais simples e elegante possível é uma demonstração válida, é inteligente, e mais importante, nota-se que o aluno pensou sobre o assunto e encontrou uma forma astuta e perceptível de transmitir o seu entendimento e demonstrar o que era pedido. Não é para mim nada claro qual o nível de escolaridade do aluno, mas sim a sua inteligência gráfica: para este aluno é mais intuitivo demonstrar o assunto a partir de elementos gráficos, pensando igualmente no espaço (puxar os diagramas para baixo um do outro, fazer combinações gráficas, etc.) do que ir por outras vias possíveis (algébrica etc., que com o decorrer do ensino, na faculdade etc., somos guiados e formatados a fazer). Nota-se igualmente um aluno criativo. A demonstração tem igualmente importância na argumentação. Esta demonstração parece menos abstracta do que na realidade é; nota-se a preocupação do aluno em referir "que era indiferente o número de emparelhamentos em A ou B"; ainda assim, sem tirar interesse à anterior, um maior nível de abstracção é atingido numa demonstração do tipo $2n + 2n = 2(2n)$, podendo (talvez) ser exigida no desenrolar da vida académica. (o talvez é porque acaba por limitar o acesso à matemática a alunos com tipos de inteligência mais propicia a demonstrações mais gráficas, ou mais textuais, mais físicas/motoras)... (Carlos)

Alexandra, professora do ensino superior, destaca na demonstração o seu carácter formal e o tipo de argumentação presente, referindo ainda como parte importante o objetivo de validação que se pretende alcançar.

> Uma prova formal de um resultado. Uma sequência de argumentos lógicos que permitem estabelecer a veracidade de uma propriedade matemática. (Alexandra)

No âmbito do ensino da Matemática, Alexandra expressa o mesmo entendimento de demonstração, ainda assim realça a importância de atender ao nível do aluno, considerando necessário ponderar o nível de abstração e de formalismo presente na demonstração. Na sua opinião é preferível reduzir o formalismo, quando tal se traduz em ganhos ao nível da intuição do aluno. Parece pois que Alexandra, embora reconhecendo a primazia do formalismo na demonstração matemática, valoriza acima de tudo a compreensão dos conceitos.

> O meu conceito de demonstração não se altera. Contudo, sobretudo ao trabalhar com alunos mais novos, não directamente ligados ao curso de Matemática, é preciso ser ponderado no nível de abstracção e formalismo incluídos. É por vezes melhor perder em formalismo e ganhar em intuição. (Alexandra)

Esta mesma ideia está presente na apreciação que faz à demonstração apresentada pelo aluno. Alexandra reconhece que a demonstração efetuada não apresenta o formalismo usual, tal não a impede no entanto de a considerar como uma demonstração válida. E alude inclusivamente a áreas da Matemática onde o formalismo escrito se afasta do tradicionalmente considerado numa demonstração.

> O argumento utilizado pelo aluno parece-me perfeitamente válido, embora não se revista do formalismo que costuma estar presente numa demonstração. Contudo, há áreas da matemática onde a argumentação necessita mesmo de ser feita em texto corrido, por falta de notações adequadas. Logo, não vejo qualquer problema com a prova apresentada. (Alexandra)

Considera ainda que este será um aluno relativamente jovem (ao nível do 3.º ciclo) e que com a progressão na aprendizagem da Matemática este tenderá a adoptar a representação 2n para número par.

> Pensando no sistema de ensino português, muito cedo os alunos são habituados a representar os números pares na forma de 2n, com n um número natural. Não tendo o aluno recorrido a esse tipo de representação, julgo que deve estar muito no início do seu percurso escolar. (...) 1.º ciclo, não. Já existe uma tentativa de generalização. Nessa altura, o mais comum é darem alguns exemplos que satisfazem a propriedade e confiarem que se é válida para alguns casos, então será válida para todos os casos. Diria que algures entre 7.º e 9.º ano. (Alexandra)

A função da demonstração em Matemática e no ensino

Na perspetiva de Paulo a função da demonstração matemática é essencialmente comprovar a veracidade de algo.

> Uma demonstração serve essencialmente para comprovar de forma racional e lógica um determinado assunto que se crê verdadeiro. É essencialmente a justificação racional de uma crença. (Paulo)

Este professor considera que essa é também a função da demonstração no ensino da Matemática, ainda assim alude a que por vezes há aprendizagens que decorrem da demonstração.

> O objetivo principal de uma demonstração é reforçar a crença de que uma determinada propriedade é válida para qualquer situação. Deve servir para reforçar uma determinada convicção além de, por vezes, serem úteis para efetuar posteriormente aplicações de determinados conteúdos. (Paulo)

Carlos refere igualmente à função de validação da demonstração.

> A demonstração serve para provar a validade de determinada teoria/ expressão. (Carlos)

Ao nível do ensino, Carlos parece ver funções um pouco diferentes na demonstração, aludindo ao contributo que esta pode trazer à construção do conhecimento e ainda à transmissão desse conhecimento. A demonstração no ensino da Matemática é ainda encarada como um contributo para a clarificação dos conteúdos o que consequentemente contribui para estimular a autoconfiança dos alunos e aumentar a compreensão da Matemática.

> Podemos ver a demonstração como parte fundamental e intrinsecamente ligada à construção do conhecimento matemático (no nível pessoal - com o entendimento de mais matemática - mas também ao nível universal - com a construção de novas teorias/conceitos/ demonstrações) (...) A demonstração matemática tem um papel importante na transmissão do conhecimento (...). O cariz prático e construtivo presente numa demonstração (partindo de pressupostos universais já adquiridos e através dos mesmos ir passo a passo avançando até ao final pretendido), podem assumir um papel central no ensino. (...) Seja feita autonomamente ou não, a demonstração promove a autoconfiança do aluno e o interesse do aluno na matéria (pois clarifica a matemática, tornando-a potencialmente mais acessível a todos). (Carlos)

À semelhança de Paulo e Carlos, Alexandra também aponta como grande função da demonstração a validação de um resultado. Ainda assim, Alexandra alude a situações que vão para além disso. Casos em que a demonstração de alguma forma disponibiliza um método que vai para além da demonstração em si.

> No meu entender, a grande finalidade de uma demonstração matemática é estabelecer um resultado. Contudo, existem algumas demonstrações que vão para além disso. Estou a lembrar-me de situações em que o resultado formal é sucinto e a demonstração fornece o método/metodologia necessários para a obtenção do resultado. (Alexandra)

Quanto à função da demonstração no âmbito do ensino da Matemática, Alexandra refere igualmente a questão da validação, mas fala também em aspetos que remetem para uma função cultural e de conhecimento da essência da Matemática. A importância de desenvolver a capacidade de argumentação, é outro dos elementos fortes que refere.

> A introdução da demonstração na sala de aula é necessária, embora com ponderação. Em primeiro lugar, é necessária porque é uma ferramenta matemática. Os alunos devem conhecer as ferramentas disponíveis na matemática, tal como devem conhecer os instrumentos que têm à disposição num laboratório de química. É bom

> que os alunos contactem com algum formalismo, que aprendam a estruturar argumentos e que percebam que não devem aceitar resultados, apenas porque alguém lhes diz que são válidos. A demonstração cumpre todas essas funções. Contudo, é preciso alguma parcimónia, quer no número de demonstrações, quer nos aspectos técnicos subjacentes a cada prova. Caso contrário, perdem-se os benefícios e ganha-se apenas uma aversão à demonstração. (Alexandra)

Conclusão

A demonstração como forma de garantir a veracidade de algo é a primeira coisa que tanto o professor do ensino secundário como o futuro professor de Matemática destacam ao falar de demonstração. Mas a ideia de rigor e de seguir um determinado formalismo é igualmente importante, sendo referida tanto pelo futuro professor como pela professora do ensino superior.

Todos os professores envolvidos no estudo consideram que o entendimento de demonstração deve ser o mesmo tanto na Matemática como no seu ensino. Ainda assim, todos referem também a necessidade de adequar a abordagem à demonstração ao nível dos alunos. O professor do ensino secundário realça a necessidade de adequar a linguagem utilizada ao nível dos alunos, referindo também a importância de simplificar a estrutura da própria demonstração. Esta necessidade de simplificação é igualmente assumida pelo futuro professor que admite inclusivamente que a exatidão possa nem sempre ser exigida. A professora do ensino superior expressa uma opinião semelhante considerando que quando necessário o formalismo seja sacrificado a favor da intuição e da compreensão matemática. Esta ênfase na compreensão, apenas colocada pela professora do ensino superior, é particularmente interessante, até porque, de acordo com Mejía-Ramos (2005), a procura por uma mais profunda compreensão é o que verdadeiramente leva os matemáticos a realizar demonstrações e também o que os leva a rejeitar as "alegadas" demonstrações realizadas por via computacional. Um aspeto igualmente digno de nota, é a referência do professor do ensino secundário ao recurso a exemplos em associação com a demonstração. Esta é uma questão frequentemente referida na literatura em torno da demonstração e que ilustra bem a complexidade da gestão dessa abordagem (ver, por exemplo, Biza, Nardi & Zachariades, 2010; Sandefur et al., 2013).

Perante uma demonstração concreta é possível perceber a importância que todos os professores atribuem ao formalismo da linguagem numa demonstração. O reconhecimento desta importância origina contudo posturas diferentes perante o exemplo de uma demonstração que não a considera. Para o professor do secundário não se trata de uma demonstração, para o futuro professor a decisão não é clara e para a professora do ensino

superior é uma demonstração. Com referências a diferentes tipos de demonstrações, a diferentes representações ou a diferentes áreas da Matemática e diferentes entendimentos de formalismo, cada um fundamenta à sua maneira a opção assumida. Verdadeiramente digno de nota é a pluralidade de perspetivas, não só entre professores mas também inclusive dentro da própria Matemática.

A principal função da demonstração é apontada por todos os professores como sendo a validação do resultado em causa, o que, de acordo com deVilliers (2012), corresponde a uma perspetiva tradicional da função da demonstração. Apenas a professora do ensino superior alude a que a demonstração poderá ter também uma função de certo modo instrutiva, podendo oferecer um método de abordagem a certas situações.

Ao nível do ensino, para além da função de validação é também atribuída à demonstração, por todos os professores envolvidos, uma função instrutiva. Tal significa que os professores possuem, de acordo com deVilliers (2012), uma perspectiva tradicional da demonstração na Matemática, mas o mesmo já não sucede relativamente à demonstração no ensino da Matemática. Para o futuro professor a demonstração pode ajudar a clarificar conteúdos. Para a professora do ensino superior pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentação, contribuindo também para a compreensão da verdadeira essência da Matemática. Estas conclusões de algum modo contrariam as alcançadas por Knuth (2002), que concluiu que a maioria dos professores apenas atribui à demonstração a função de validação.

Globalmente, os professores parecem partilhar uma conceção formal da demonstração matemática, reconhecendo tanto a necessidade de introduzir alguma simplificação quando se considera a demonstração no âmbito do ensino da Matemática como, e em sintonia com algumas das funções avançadas por deVilliers (2001) e Davis e Hersh (1983), a importância das suas funções de validação, de contributo para a aprendizagem e até uma função de certo modo cultural.

Referências bibliográficas

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2010). Teachers' views on the role of visualization and didactical intentions regarding proof. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Cerme 6 - Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 261-270). Paris: INRP.

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração matemática. *Educação e Matemática*, *63*, 11-15.

Bryman, A. (2004). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Cabassut, R., Conner, A., Íşçimen, F., Furinghetti, F., Jahnke, H., & Morselli, F. (2012). Concepts of proof – in research and teaching. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (pp. 169-190). Dordrecht: Springer.

Davis, P., & Hersh, R. (1983). A experiência matemática. Lisboa: Gradiva.

DeVilliers, M. (1999). Rethinking Proof with Sketchpad. NY: Key Curriculum Press.

DeVilliers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras*, *33*(3).

Guimarães, H. (1993). Uma demonstração – Pense nisto. *Educação e Matemática*, 25, 15.

Hanna, G. (2014). The width of a proof. *PNA*, *9*(1), 29-39.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 396–428.

Hsieh, F., Horng, W., & Shy, H. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (pp. 279-304). Dordrecht: Springer.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379–405.

Mejía-Ramos, J. (2005). Aspects of proof in mathematics research. In D. Hewitt (Ed.), Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25(2). St. Martin's College, Lancaster: Open University.

Reid, D. (2011). Understanding proof and transforming teaching. Proceedings of North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Reno, NV: PME-NA.

Sandefur, J., Maon, J., Stylianides, J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 323-340.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 271-288.

Steele, M., & Rogers, K. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 159-180.

Stylianides, A., & Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 307–332.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng,Y. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (pp. 13-49). Dordrecht: Springer.

Agradecimentos

Trabalho desenvolvido no âmbito do projecto *24.º problema de Hilbert*, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia (PTDC/MHC-FIL/2583/2014).

AVALIAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA AULA DE MATEMÁTICA: DAS PERCEÇÕES ÀS PRÁTICAS

António Guerreiro, Cristina Martins

[1]ESEC, Universidade do Algarve, aguerrei@ualg.pt

[2]ESE, Instituto Politécnico de Bragança, mcesm@ipb.pt

Resumo. *O desenvolvimento do estudo das relações existentes entre a avaliação e a comunicação nas práticas dos professores de matemática, guia-nos a dar conta de uma nova fase da investigação. Após a averiguação das perceções dos professores participantes, seguimos para a fase de análise das práticas de sala de aula. Para tal foi feita a observação de uma aula de cada um dos professores participantes. Discutiram-se os resultados à luz das categorias previamente definidas e baseadas no enquadramento teórico constituído. É nosso propósito nesta comunicação, apresentar a articulação entre as perceções e as práticas de um dos professores participantes no estudo. Os dados, neste caso, apontam para que, em várias categorias, as perceções do professor Martins se cruzam com a sua prática, ressaltando a centralidade dos conhecimentos e do discurso do professor na comunicação e na avaliação dos alunos.*

Abstract. *The development of the study of the relationships between evaluation and communication in the practices of mathematics teachers leads us to account for a new phase of the research. After inquiring into the perceptions of participating teachers we continue towards the phases of analysis of classroom practices. For this purpose, a classroom observation was conducted for each of the participating teachers. The results were discussed in view of the previously defined categories and based on the theoretical framework built. It is our goal in this paper to present the articulation between perceptions and practices of one of the participating teachers. The data, in this case, point to the fact that, in several categories, the perceptions of teacher Martins, intersect his practice, highlighting the centrality of the teacher's knowledge and discourse in the communication and evaluation of students.*

***Palavras-chave**: avaliação, comunicação, perceções, práticas, aula de matemática*

Continuidade do projeto: Fundamentos metodológicos e teóricos

Mantendo a convicção de que compreender as relações existentes entre a avaliação e a comunicação trará contributos à melhoria das práticas profissionais dos professores e dos futuros professores de matemática e contribuirá para um melhor conhecimento das dinâmicas de sala de aula, demos seguimento ao projeto de investigação divulgado anteriormente em algumas publicações (e.g. Guerreiro & Martins, 2017a; 2017b; Martins & Guerreiro, 2017a; 2017b).

Recordamos que, neste projeto, adotamos um design de investigação interpretativo, com uma componente de colaboração entre investigadores e professores participantes,

com o intuito de interpretar, compreender e explicar significados, num contexto específico, tendo por propósito responder à questão de investigação: que relação existe entre a avaliação e a comunicação nas aulas de matemática no 2.º ciclo do ensino básico?

Após a fase de averiguação e análise das perceções dos professores sobre a avaliação e a comunicação no contexto das suas práticas na aula de matemática, pretendemos, responder à questão: Que articulação se verifica entre as perceções e as práticas dos professores participantes?, dando particular relevância à apresentação e discussão dos resultados referentes a um dos professores - Martins.

Relativamente à recolha de dados, na primeira fase, utilizamos uma entrevista semiestruturada (recolha das perceções) e, na segunda fase, procedemos à observação de uma aula de cada um dos professores participantes (recolha das práticas), que foi registada em áudio, complementada com uma observação naturalista participada. Procedeu-se à sua transcrição, tendo por referência as categorias de análise anteriormente utilizadas nas perceções e especificadas no ponto – Perceções e práticas, do professor Martins, sobre avaliação e comunicação. Neste momento cruzaram-se e discutiram-se os resultados com os já obtidos relativamente às perceções do professor e, por fim, refletiu-se sobre a sua confluência.

Salientamos que as categorias de análise da avaliação e da comunicação estão enquadradas na perspetiva teórica da existência de avaliação das e para as aprendizagens dos alunos (Fernandes, 2011; 2015) e na dicotomia entre a comunicação matemática como instrumento de ensino e como interação entre os alunos e entre estes e o professor (Menezes, Guerreiro, Martinho & Tomás Ferreira, 2013).

No campo da avaliação, salientamos a importância da avaliação ser concebida essencialmente na sua vertente formativa como um processo de clarificação das dificuldades dos alunos e consequente tomada de decisões sobre o processo de ensino e de aprendizagem, pelo que a diversidade de processos de recolha de informação é fundamental (Fernandes, 2011; Fernandes, 2015; Santos, 2002). Neste sentido, a avaliação apresenta-se com a função de regulação, sendo parte integrante do processo de formação, no qual as atividades de avaliação são também atividades de aprendizagem.

No campo da comunicação, consideramos que a natureza da comunicação na aula de matemática estrutura as interações entre os alunos e entre estes e o professor e condiciona o processo de ensino e de aprendizagem, assumindo o domínio comunicativo do professor na sala de aula ou sustentando a partilha de conhecimento entre todos os

intervenientes (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015). Particularmente, o questionamento oral ou escrito surge como um processo de regulação das aprendizagens (Santos, 2004), podendo assumir uma natureza avaliativa caracterizada pela testagem de conhecimentos, mas também pela possibilidade de partilha comunicativa entre intervenientes.

Perceções e práticas, do professor Martins, sobre avaliação e comunicação

Martins tinha dezoito anos de serviço docente, no ano letivo 2016/17, nos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, e lecionava no distrito de Faro, Portugal. As turmas do docente Martins tinham poucos discentes (entre 12 a 15 alunos) em virtude de trabalhar num Território Educativo de Intervenção Prioritária: "Tenho a sorte de trabalhar com turmas muito pequenas, mas ao mesmo tempo muito problemáticas" [entrevista]. Na aula, os alunos, da turma do 5.º ano, eram treze, dado que dois alunos faltaram nesse dia. O sumário foi escrito no final da aula: Tabelas de frequências absoluta e relativa. Construção de gráficos de barras.

Perceções e práticas sobre avaliação na aula de matemática

Conceito de avaliação. Martins defende que a avaliação da aprendizagem é "aferir aquilo que os miúdos aprendem ou não" [entrevista], entendendo a avaliação como uma retroação em relação ao discurso do professor, "aferir se a mensagem está a passar, se não está a passar" [entrevista]. Esta avaliação da aprendizagem está centrada no conhecimento dos alunos, em função do conhecimento do professor, e no discurso do professor na sala de aula.

Neste sentido, o professor sintetiza os conteúdos lecionados e antecipa os temas matemáticos a tratar, conjugando o seu discurso com as intervenções dos alunos em relação a conhecimentos lecionados ou aos do ciclo de ensino anterior. Na aula, Martins começou por relembrar os conteúdos anteriormente lecionados:

Professor: –	Iniciamos, neste capítulo novo, a organização e tratamento de dados, na primeira fase de todas, não sei se vocês se recordam, quando estivemos a fazer aquele jogo inicial da batalha naval, lembram-se?
Alunos: –	Sim.
Professor: –	Em que começamos por falar nas coordenadas dos pontos que marcávamos e marcávamos, onde? No chamado referencial cartesiano. Lembram-se disso?
Alunos: –	Sim [aula].

E por antecipar os conteúdos a lecionar, perspetivando o decorrer da aula, fazendo referência aos conteúdos matemáticos do ano anterior:

Professor: – Vamos começar por falar numa coisa que se chama tabela de frequências, tabelas de frequências essas que vocês já trabalharam no quarto ano. Vamos relembrar. Depois vamos passar pelos chamados gráficos de barras, dos gráficos de barras. Depois vamos falar de outra maneira de organizarmos os dados, de um antigo conhecido vosso, que é o diagrama de caule …
Alunos: – … e folhas.
Professor: – … e folhas, que vocês também já sabem. E, se tudo correr bem, no final havemos de fazer uma fichinha de trabalho que o professor trouxe para vocês fazerem (alunos protestam), mas logo se vê se temos tempo ou não.
Alunos: – Não, não temos tempo [aula].

O professor alude aos conteúdos matemáticos anteriormente trabalhados como forma de integrar os alunos nos conteúdos a lecionar e refere a existência de «uma fichinha», utilizando um diminutivo para minimizar o papel daquele instrumento de avaliação, mesmo assim contestado pelos alunos. A estrutura proposta para a aula é consistente com as perceções do professor em relação à avaliação das aprendizagens, dado que se propõe lecionar conteúdos e verificar o nível de conhecimento dos alunos.

Componentes integrantes da avaliação. O professor critica a valorização excessiva da componente de conhecimento em detrimento das atitudes e valores, particularmente nos alunos com contextos socioeconómicos desfavorecidos. Martins relata que, no seu agrupamento de escolas, os professores optaram por reforçar o peso das atitudes e valores atribuindo-lhe o peso de 30%:

> Estamos a dar um peso excessivo à parte dos conhecimentos e tem que haver aqui um equilíbrio porque a natureza dos nossos alunos assim pedia … valorizar mais um pouco essa outra questão … estamos a falar na ordem dos trinta setenta … é aí nesses trinta que cabe a parte da responsabilidade, dos trabalhos [entrevista].

O professor, no decorrer da aula, foi salientando os conhecimentos essenciais, valorizando com indicações escritas com expressões como Atenção!! Importante!!, particularmente nas definições ou sínteses, como forma de salientar os conhecimentos mais relevantes para a avaliação dos alunos. Na aula, a propósito das principais características dos gráficos de barras, o professor destacou esse conhecimento com uma chamada de importância:

Importante!!
→ O gráfico de barras deve ter um título adequado;
→ Os eixos devem estar legendados;
→ As barras não devem estar juntas (devem estar separadas pela mesma distância);
→ As barras devem ter a mesma espessura [aula].

A importância dada à correta construção do gráfico de barras é acompanhada pelo professor, realçando a necessidade de todas as barras terem a mesma espessura:

Professor: – O que é que aconteceu aqui? Esta barra é magrinha e esta aqui é gordinha…
Outro aluno: – As minhas são todas gordas.
Professor: – É assim, não há nenhuma espessura para as barras, têm é que ter a mesma espessura.

Em outras situações, o professor alerta os alunos para a pouca relevância da coluna da contagem numa tabela de frequências:

Professor: – Como vocês vão ver no vosso livro e como já viram nos vossos livros do quarto ano aparece aqui uma coluna … e esta coluna, vou vos já dizer que, no caso do professor, se vocês estiverem a fazer isto no teste é dispensável, porquê? Que é uma coluna que se chama a coluna da contagem [aula].

Na sua prática, Martins realça os conteúdos matemáticos essenciais em relação à avaliação dos alunos. Ao longo da aula, vai salientando o que considera mais e menos relevante nos procedimentos e conhecimentos dos alunos.

Instrumentos de avaliação dos alunos. Os instrumentos mais utilizados na avaliação dos alunos pelo professor Martins têm as características dos testes escritos formais – "nunca fazer menos de dois momentos de avaliação [por período letivo]" [entrevista], mesmo em formatos reduzidos: "todas as semanas temos um momento de avaliação, eles já sabem que vão ter aquele momento de avaliação, são duas ou três questões" [entrevista], no sentido de monitorizar o conhecimento dos alunos.
Na aula, estava prevista a realização de «uma fichinha», no termino da lição, em consonância com o relato do professor na entrevista. Contudo, neste caso, atendendo ao decorrer da aula, a referida ficha de avaliação não se realizou:

Professor: – A nossa fichinha de trabalho vai ter de ficar para outra altura …
Aluno: – Para amanhã.
Professor: – Não vamos ter tempo de fazer hoje [aula].

Para além dos registos escritos, existe uma avaliação para a aprendizagem com características de *feedback*, com uma natureza mais oral: "[o feedback] acaba por ser mais

oral, individualizado" [entrevista]. Na aula, o professor ia questionando os alunos a propósito dos conteúdos lecionados, neste caso, a tabela de frequência absoluta:

Professor: –	Frequência absoluta, no fundo é o quê? Quem consegue dizer, por palavras vossas, o que significa esta frequência absoluta? Mara, consegues dizer?
Mara: –	Quantas pessoas escolheram …
Professor: –	Quantas pessoas, neste contexto, é que escolheram, no caso, por exemplo, Benfica. Quantas é que escolheram Sporting, por aí fora, sim senhor. Portanto, frequência absoluta … Diz lá, Paulo.
Paulo: –	Outra maneira é dizer, aquelas são o mesmo número racional …
Professor: –	Dizer o número racional, explica, estamos na frequência absoluta.
Paulo: –	A frequência absoluta é traduzir o número romano em racional.
Professor: –	O número romano para racional?
Paulo: –	Cardinal.
Professor: –	Eu presumo que tu estás a tentar dizer o seguinte: é traduzirmos a contagem que nós fizemos para um número, certo? É isso que estavas a tentar dizer?
Paulo: –	Sim [aula].

Este questionamento oral inicial, direcionado a uma aluna, a propósito do conceito de frequência absoluta, gerou uma outra abordagem relacionada com distintas representações, em que um aluno associa a contagem estatística à numeração romana e troca o termo cardinal por racional. O professor utiliza, deste modo, o discurso oral para avaliar os conhecimentos e clarificar o discurso dos alunos.

Funções da avaliação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. A avaliação das aprendizagens dos alunos, associada ao sucesso escolar, parece constituir uma preocupação constante do professor. Martins entende que a avaliação deve ser partilhada com os alunos – "vale a pena partilhar com eles [alunos] a avaliação" [entrevista] – e que uma avaliação positiva tem nos alunos um papel motivador em relação à matemática – "a avaliação na matemática tem muito, muito, muito a fazer no estimulo dele para a disciplina" [entrevista] – e também em relação às restantes disciplinas. Para o professor Martins, a avaliação dos alunos também tem a função de o questionar sobre o seu ensino:

> Se formalmente a gente avalia determinado conteúdo e se chegas à conclusão que grande parte dos teus alunos não conseguem fazer as coisas com sucesso, então alguma coisa está mal, temos que desconstruir um bocado isto e ver onde é que é, o que é que foi, acaba por ser uma base para … das duas uma, ou continuar como as coisas estão ou calma, vamos travar, vamos voltar a trás e vamos ver o que está aqui a falhar [entrevista].

Nesta dimensão de instrução, o professor questiona-se sobre a natureza dos erros dos alunos e sobre as resoluções singulares – "um exercício proposto pelo livro … chama-te à atenção um erro recorrente que muitos deles estão a ter e também te chama à atenção como é que alguns deles estão a chegar a outro sítio" [entrevista] – aludindo ao conhecimento profissional do professor em consequências das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas matemáticas.

Em resultado de anteriores experiências de avaliação, o professor alerta os alunos para um tipo de erro muito comum na diferença entre moda e frequência absoluta da variável ou variáveis modais:

Professor: –	Há um erro que, por vezes, os alunos costumam cometer que é o seguinte, aqui no nosso caso, por exemplo, o professor perguntava-vos «Qual foi a moda desta distribuição estatística ou qual foi a moda da preferência de clube dos alunos do [refere turma]?» E vocês respondiam oito. Ok? O que é que estava aqui não correto? O oito não é a moda, certo?
Aluno: –	É o Benfica.
Professor: –	Porquê? A moda é o dado que tem a frequência oito, neste caso era o Benfica. Portanto, muita atenção que é um erro, por vezes, cometido, está bem? É um dado estatístico que tem a maior frequência e não a frequência do dado estatístico. E não dizer, oito [aula].

Martins revela uma preocupação constante com os conhecimentos dos alunos, realçando alguns comportamentos tipo, com implicações na avaliação das aprendizagens, particularmente no que se refere ao desempenho destes na avaliação baseada no questionamento oral e no teste escrito.

Em síntese, as perceções e práticas sobre avaliação do professor revelam que a avaliação na aula é entendida nas vertentes da avaliação das aprendizagens, tendo por propósito constante, facilitar a aquisição dos conhecimentos matemáticos pelos alunos, realçando os conhecimentos mais relevantes, minimizando alguns procedimentos matemáticos e alertando para erros comuns na compreensão dos conceitos matemáticos.

Perceções e práticas sobre comunicação na aula de matemática

Conceito de comunicação na aula de matemática. Martins perspetiva a comunicação como um instrumento linguístico caracterizado por uma mensagem numa linguagem especifica. Nas suas palavras:

> Temos claramente dois momentos de comunicação, já para não falar logo quando o professor chega … o professor hoje vem de preto … vem com uma cara daquelas … vem contente (…) linguagem formal da matemática (…) uma linguagem mais terra a terra para eles [entrevista].

Martins utiliza uma linguagem matematicamente correta, mas, por vezes, com uma informalidade e uma tentativa de adequação à linguagem dos alunos:

> Professor: – Da tabela de frequências para o gráfico de barras, ok? Que é, digamos assim, do ponto de vista visual, se vocês olharem para um gráfico de barras e para uma tabela de frequências, na minha opinião é mais apelativo. É menos chato entre aspas, como vocês dizem, olhar para um gráfico de barras do que olhar para uma tabela [aula].

O professor remete a comunicação para a proximidade linguística entre ele e os alunos.

Características da comunicação na aula de matemática. Martins caracteriza a comunicação na sala de aula com uma dimensão de interação entre o professor e os alunos – "entre eu e eles" [entrevista] – defendendo que existe muita dificuldade na interação comunicativa entre os alunos, em parte devido à natureza económica e social da turma – "lá está, devido à própria natureza daquelas turmas, eles são muito desorganizados a comunicar entre eles … muitas vezes não conseguem respeitar-se uns aos outros" [entrevista].

Na aula, Martins interagiu regularmente com os alunos e muito raramente estes interagiam entre si, no contexto da matemática. Neste episódio, sobre a simplificação de frações, no contexto das frequências relativas, a interação entre os alunos ocorreu sempre com o professor por permeio:

> Luís: – Não sei quê relativa é quatro sobre vinte.
> Professor: – Não sei quê relativa é quatro sobre 20, já vamos lá. Esse não sei quê é a frequência relativa, tu disseste … Cláudio, diz. Vai ser quatro em … Sabes quantos são o total?
> Cláudio: – Vinte.
> Professor: – Quatro em Vinte. Já agora, recapitulando aqui um bocadinho, pode ser ali a Inês. Inês, aquela fração já está na forma irredutível?
> Inês: – Não.
> Professor: – Como é que nós podemos pô-la?
> Inês: – A … um sobre …
> Professor: – Um sobre …
> Inês: (em silêncio)
> Professor: – Como é que o quatro se transformou em um?
> Inês: – Dividi por quatro.

Professor: – Então, vinte dividido por quatro.
Inês: – Cinco.
Professor: – Cinco, ok? [aula]

Perante a dificuldade da aluna, o professor questiona-a focalizando as questões na resolução da tarefa. Contudo, Martins rejeita um discurso exclusivamente unidirecional ou colaborativo, apesar de defender o questionamento com perguntas direcionadas para os conteúdos – "às vezes com pequenas perguntinhas … às vezes com uma pequena revisão, com uma pequena pergunta … leva a uma determinada resposta [que faça clique no conhecimento do aluno]" [entrevista] – mas rejeita, ironizando, as perguntas em que os alunos se limitam a terminar as frases do professor – "dois ao quadrado é qua…, qua…, qua…, para ele [o aluno] dizer tro" [entrevista].

As questões do professor estão quase exclusivamente centradas no conhecimento dos alunos e nas tarefas matemáticas, como tinha referido aquando da entrevista:

Professor: – Sporting, temos uma pessoa, um tracinho, aqui corresponde a uma pessoa, aqui será quanto a relação?
Alunos: – Um em treze.
Professor: – Um em treze, não é?
Aluno: – Um treze avos [aula].

Martins interage com os todos os alunos com base em questões focalizadas nas tarefas matemáticas, sem dinamizar uma significativa interação entre os alunos. Contudo, as questões apresentam diferentes níveis de dificuldade: «Qual a percentagem de alunos que tem menos de dois irmãos?» ou «Diz-me qual o número de alunos que têm três ou mais irmãos?» [aula].

Durante a aula, as questões direcionadas aos alunos tiveram o propósito de testar o seu conhecimento e estiveram focadas nas tarefas matemáticas, sendo que o professor sabia de antemão as respostas solicitadas.

Formas de comunicação na aula de matemática. A comunicação oral e escrita é permanente na sala de aula, contudo o discurso escrito surge como suporte do discurso oral e é valorizado pela sua natureza de registo e de permanência para além do momento de sala de aula. Na aula, o professor valorizou o discurso escrito nos registos de definições ou sínteses. O professor define a Moda (Mo) e escreve a definição no quadro e solicita aos alunos o seu registo escrito no caderno:

Moda (Mo)
É o dado estatístico com maior frequência. No nosso exemplo a moda é os alunos preferirem o "Benfica" [aula].

Martins considera que, nas suas aulas, existe um significativo desequilíbrio entre a oralidade e a escrita, em parte devido à dimensão da turma – "claramente desequilibrada … no discurso … mais oral … a escrita é mais para o registo desses momentos" [entrevista]. A oralidade domina a aula – "o discurso [oral] faz parte de grande parte da aula" [entrevista] – e a escrita caracteriza-se pelo registo de definições e sínteses – "faz sentido os miúdos registarem … sínteses, alguma definiçãozinha que seja necessária" [entrevistas]:

> Professor: – O que é que o professor quer ver agora convosco? Quer ver, para além de nós irmos fazer as nossas contagens, ver qual é a frequência absoluta, a frequência relativa, vamos focarmos um bocadinho … depois do Luís ter resolvido aquilo que tem que resolver com o Gonçalo. Vamos ter que nos focarmos um bocadinho ali sobre a frequência relativa. Porquê? Como vocês vão ver a frequência relativa pode ter vários aspetos. Ali vimos o aspeto de uma fração, de uma fração, mas como vocês vão ver, ela pode vir com o aspeto de um numeral decimal ou pode vir no aspeto de uma percentagem. A gente agora vai ver como fazemos essas coisas e até que ponto isso é útil ou não. Está bem? [aula].

A aula tem um registo maioritariamente oral, mas muito dependente do discurso do professor, em parte para limitar as distrações e os conflitos entre os alunos.

Funções da comunicação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. A comunicação como instrumento do professor surge como um pressuposto da construção do conhecimento matemático. Martins assume que se questiona a propósito da sua própria comunicação, particularmente na eficácia do seu discurso ou da mensagem, quando avalia os alunos e os resultados ficam aquém das expetativas:

> A avaliação que eu estou a fazer está um bocadinho aquém daquilo que eu esperava … Será que isto também tem a ver com a comunicação que eu tenho? Será que a minha mensagem está a passar? Será que é da melhor forma? Haverá aqui alguma alternativa? A minha mensagem não está a passar por algum motivo? [entrevista].

Martins recorre com frequência aos alunos, parecendo testar constantemente os conhecimentos destes, em princípio adquiridos em anos anteriores ou já lecionados nesse ano:

> Professor: – Oito sobre vinte, já está na forma irredutível? Como é que vimos na forma irredutível? O oito e o vinte aparecem em que tabuada, na tabuada que venha logo assim à cabeça?
> Alunos: – Dois.
> Professor: – Na do dois, será que não aparece em mais nenhuma?

Aluno. – Quatro
Aluno: – Cinco
Professor: – Na do cinco, ó João, porque é que o oito não aparece na tabuada do cinco de certeza?
João: – Porque os números que aparecem na tabuada do cinco acabam no cinco ou no zero.
Professor: – Pronto, então o cinco esquece. Na do quatro, vamos lá ver. Do quatro, se eu dividir ambos os termos da fração por quatro, vou ficar com dois quintos. Olha, precisava fazer agora grandes contas para saber a que percentagem é que isto equivalia? Se um quinto corresponde a vinte porcento, dois quintos corresponderá …[aula].

Nas interações com os alunos, o professor utiliza constantemente expressões interrogativas como «ok?» e «não é?», de forma a tentar certificar-se do entendimento dos alunos sobre o seu discurso. O professor reconhece que a profissão docente resulta duma aprendizagem constante e considera que "cada ano que passa é mais desafiador" [entrevista].

Em síntese, as perceções e práticas sobre comunicação do professor revelam que a comunicação assume o papel de instrumento comunicativo, especialmente sustentado numa linguagem precisa, mas ao mesmo tempo informal. O papel da linguagem surge com uma centralidade na aula, assumindo um papel predominante no ensino e na aprendizagem da matemática. As interações na sala de aula centram-se entre o professor e os alunos.

Avaliação e comunicação: Convergência ou distanciamento entre perceções e práticas?

No respeitante ao conceito de avaliação é notória a articulação entre as perceções do professor e as suas práticas. Quando expôs as suas perceções, Martins tornou claro que se situa na avaliação das aprendizagens. Igualmente, a estruturação e organização da aula mostrou a sua intenção de propor os conteúdos e *medir* a aprendizagem realizada.

Quando adiantou as suas perceções acerca das componentes integrantes da avaliação, foi manifestamente relevante a critica à valorização excessiva da componente de conhecimento em detrimento das atitudes e valores. Contudo, na aula foi essencialmente valorizada a importância da aprendizagem dos conhecimentos em estudo, dando relevância à necessidade de prestar atenção para a consecução dos objetivos da aula. Quanto aos instrumentos de avaliação utilizados, disse valorizar o trabalho contínuo dos

alunos, fazendo momentos de avaliação com formato reduzido, mas com caraterísticas de testes formais.

As funções da avaliação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos, surgem nas suas perceções essencialmente associadas à promoção do sucesso escolar, estando em perfeita consonância com a aprendizagem dos conhecimentos. Reconheceu que a partilha dos resultados de avaliação, quando positivos, tem o papel de facilitador da motivação para o processo de ensino e de aprendizagem. São os resultados da avaliação que conduzem este professor a questionar o seu ensino e a reorientá-lo. O erro é, na sua opinião, de importância vital neste processo. Na sua prática é visível este reconhecimento, alertando mesmo os alunos para os erros mais comuns em determinada situação.

No respeitante à comunicação, foi evidente nas suas perceções, a assunção da comunicação como um instrumento comunicativo, valorizando a linguagem formal da matemática, mas também a informal. Mostrou que a interação se verifica, sobretudo, entre o professor e os alunos. O mesmo transparece nas suas práticas de sala de aula, mormente quando tenta aproximar a sua linguagem à dos alunos.

Estas perceções e práticas são valorizadas de forma similar quando nos debruçamos sobre a análise das características principais da comunicação matemática em sala de aula. Foi percetível a relevância atribuída à interação entre o professor e os alunos, em detrimento da interação entre os últimos. O questionamento foi utilizado com o propósito especifico de testar o conhecimento dos alunos, parecendo óbvio que as respostas solicitadas, centradas nas tarefas, eram as por si previstas.

Quando analisamos as formas de comunicação na aula de matemática, sobressai com clarividência, quer nas perceções quer nas práticas do professor, que são consideradas a comunicação oral e a escrita na sala de aula. Foi relevante, na aula observada, a frequência da comunicação oral centrada no professor e com a finalidade de chamar os alunos aos conhecimentos em estudo e controlar as suas distrações e conflitos. A comunicação escrita foi utilizada no registo de definições e sínteses.

As funções da comunicação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos, é um ponto de reflexão no dia a dia deste professor quando questiona a sua eficácia. É seguro afirmar que a principal função é a de construção de conhecimentos matemáticos. Na sua prática, foi recorrente o testar dos conhecimentos adquiridos pelos alunos em anos anteriores e a constante certificação do entendimento dos alunos dos conceitos em estudo.

Para finalizar, salientamos que após a realização destas duas fases do projeto, fica claro, para nós, que, como refere Perrenoud (1999), para se saber se a regulação da avaliação praticada é efetiva, não basta interrogar o professor sobre as suas intenções, nem descrever as suas práticas, "é preciso descobrir a sua retroacção sobre as aprendizagens" (p. 79), assinalando que quando se observam as interações em aula, na maior parte das vezes, se fica condenado a *supor* que tal intervenção modifica as aprendizagens dos alunos. Porém, baseando-nos no conteúdo das interações didáticas e na análise das reações observáveis, conseguiremos uma aproximação que, embora não seja satisfatória, é suficiente para ressaltar a distância entre as intenções e as regulações efetivas, pois é importante não nos afastarmos de um aspeto fundamental das práticas: "a distância entre o que se quer fazer e o que se faz realmente" (p. 80).

Referências bibliográficas

Fernandes, D. (2011). Avaliar para melhorar as aprendizagens: análise e discussão de algumas questões essenciais. In I. Fialho & H. Salgueiro (pp. 81-107), *TurmaMais e Sucesso Escolar. Contributos teóricos e Práticos*. Évora. CIEPUE. Universidade de Évora.

Fernandes, D. (2015) Prefácio. In Neves, A. C. & Ferreira, A. L. (2015). Avaliar é Preciso? Guia prático de avaliação para professores e formadores. Lisboa: Guerra & Paz.

Guerreiro, A. & Martins, C. (2017a). Avaliação e comunicação na aula de Matemática: um projeto de investigação. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 330-342). Viseu, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Guerreiro, & Martins (2017b, no prelo). Articulação entre avaliação e comunicação na aula de matemática: Contributos para a aprendizagem dos alunos. *In Libro de actas do VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Madrid, España: Federación Iberoamericana de Educación Matemática.

Martins, C. & Guerreiro, A. (2017a). Processos de comunicação e de avaliação: como efetivar a sua articulação? In M. V. Pires, C. Mesquita, R. P. Lopes, G. Santos, M. Cardoso, J. Sousa, E. Silva & C. Teixeira (Eds.), *Livro de atas do II Encontro internacional de formação na docência, INCTE 2017* (pp. 385-392). Bragança, Portugal: Instituto Politécnico de Bragança.

Martins, C., & Guerreiro. A. (2017b). Relações entre avaliação e comunicação: Perceções de dois profesores de Matemática. *Revista de Estúdios e Investigación en Psicologia y Educación*, Vol.Extr.(6), 395-399. DOI: https://doi.org/10.17979/reipe.2017.0.06.2897

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sysiphus, 1*(3), 44-75.

Perrenoud, P. (1999). Avaliação: Da excelência à regulação – entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como?. In P. Abrantes, & F. Araújo (Coord.). *Reorganização Curricular do Ensino Básico: Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp.75-83). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Santos, L. (2004). La evaluación del aprendizage en matemáticas: orientaciones y retos. In J. Giménez; L. Santos, & J. P. Ponte (Coords.). *La actividade matemática en el aula: Homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 157-168

ENSINAR MATEMÁTICA RECORRENDO AO ENSINO EXPERIMENTAL DAS CIÊNCIAS

Maria Cristina Costa, António Domingos

[1] ESTT do Instituto Politécnico de Tomar, ccosta@ipt.pt

[2] FCT da Universidade NOVA de Lisboa, amdd@fct.unl.pt

Resumo. *Este artigo tem por objetivo investigar como ensinar Matemática através do ensino experimental das ciências, nos primeiros anos de escolaridade. Nos últimos anos têm sido cada vez mais os apelos para uma abordagem interdisciplinar, de forma a tornar os estudantes mais preparados para os desafios da vida real. No entanto, são inúmeras as referências sobre as dificuldades da implementação do ensino experimental das ciências, sendo ainda maiores as dificuldades em promover a interdisciplinaridade, nomeadamente com a Matemática. Este estudo pretende contribuir para conhecer melhor esta problemática, dando conta dos resultados de uma investigação, desenvolvida com professores do ensino básico, que participaram num programa de desenvolvimento profissional.*

Com uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, os dados recolhidos consistem em observações presenciais e relatórios dos professores no âmbito do programa de formação. Com base no estudo de caso de uma professora, verifica-se que esta criou e implementou diversas tarefas interdisciplinares envolvendo a Matemática.

Conclui-se que é possível trabalhar a Matemática, a partir do ensino experimental das ciências, através de um contexto formativo que exemplifica esta abordagem e apoia os professores na sua implementação em aula.

Palavras chave: *Ensino da Matemática; interdisciplinaridade; desenvolvimento profissional.*

Abstract. *This paper aims to investigate how to teach mathematics through hands-on science education in the first years of schooling. In recent years there have been a growing call for an interdisciplinary approach in order to make students more prepared for real-life challenges. However, there are several references about the difficulties of implementing hands-on science teaching and about promoting interdisciplinarity, especially with mathematics. This study aims to contribute to a better understanding of this problem, reporting the results of an investigation carried out with primary school teachers who participated in a professional development programme.*

With a qualitative methodology and an interpretative approach, data collection consist in observations and teacher reports within the training program. Based on the case study of a teacher, it is verified that she created and implemented several interdisciplinary tasks involving Mathematics.

It is concluded that it is possible to teach Mathematics, from hands-on science teaching, through a formative context that exemplifies this approach and supports the teachers in their implementation of hands-on science tasks in class.

Keywords: *Mathematic education; interdisciplinarity; professional development.*

Introdução

Nos últimos anos têm sido cada vez mais as recomendações para implementar novas abordagens pedagógicas mais centradas nos estudantes e com aplicações à vida real, de modo a promover a aprendizagem significativa. Um aspeto cada vez mais presente nos programas curriculares é a importância da promoção da interdisciplinaridade como uma forma de tornar os estudantes mais preparados para os desafios científicos e tecnológicos, cada vez mais exigentes da nossa sociedade.

Em Portugal, o primeiro ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) consiste em quatro anos de escolaridade, tendo os alunos idades compreendidas entre os 6 anos (1.º ano) e os 10 anos (4.º ano). No 1.º CEB, existem três áreas curriculares lecionadas pelo mesmo professor, conhecido como professor titular da turma: Matemática, Português, Estudo do Meio e Expressões. Nos princípios orientadores da organização curricular e programas do Ensino Básico (DGIDC, s.d.) é referido que "o Estudo do Meio está na intersecção de todas as outras áreas do programa, podendo ser motivo e motor para a aprendizagem nessas áreas." (p. 101). As indicações metodológicas são que "A curiosidade infantil pelos fenómenos naturais deve ser estimulada e os alunos encorajados a levantar questões e a procurar respostas para elas através de experiências e pesquisas simples" (p. 115). Recomenda-se, ainda, que os alunos devem usar instrumentos de observação e medida, sendo importante que os mesmos façam registos daquilo que observam.

No que diz respeito à Matemática (DGIDC, s.d.), a análise do mundo natural é uma das três finalidades assinaladas nas orientações metodológicas:

> A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução. Em particular, o domínio de certos instrumentos matemáticos revela–se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (Física, Química, Ciências Naturais, Geografia…) (p. 2).

No ano escolar 2017/2018, foi autorizada, em regime de experiência pedagógica, a implementação do projeto de autonomia e flexibilidade curricular dos ensinos básico e secundário (Diário da República, 2017), que vai ao encontro da importância da interdisciplinaridade, ao ponto de se recomendar alterar a ordem de implementação dos conteúdos do currículo, quando necessário. Este ano letivo está a decorrer como uma experiência piloto, à qual aderiram alguns agrupamentos de escolas do nosso país. No futuro pretende-se que esta iniciativa seja estendida a todos os outros agrupamentos. Estas

recomendações levam a uma mudança de paradigma, uma vez que conduzem à necessidade de inovar as práticas dos professores, no sentido de corresponder às indicações metodológicas dos programas. Ora, este aspeto faz levantar várias questões tais como: Como ensinar Matemática de forma interdisciplinar? Que conhecimentos são necessários para mudar o paradigma? Que tarefas de Matemática podem ser implementadas de forma interdisciplinar?

O ensino das ciências, nos primeiros anos de escolaridade integra os conteúdos da área curricular do Estudo do Meio, sendo cada vez mais os apelos para realizar atividades experimentais em aula. No entanto, são inúmeras as referências sobre as dificuldades da implementação do ensino experimental das ciências, sendo ainda maiores as dificuldades em promover a interdisciplinaridade, nomeadamente com a Matemática. Este estudo pretende contribuir para conhecer melhor esta problemática, dando conta dos resultados de uma investigação, desenvolvida com professores do ensino básico, que participaram num programa de desenvolvimento profissional que envolve conteúdos de Matemática, ciências e tecnologia. A principal questão que queremos investigar é: Como ensinar Matemática a partir do ensino experimental das ciências, nos primeiros anos de escolaridade?

Vamos responder a esta questão apresentando e analisando tarefas de Matemática, criadas e implementadas pelos professores, no âmbito da sua participação num programa de desenvolvimento profissional, onde é promovida a interdisciplinaridade, nomeadamente entre a Matemática e as ciências. Em particular, procuramos identificar que tarefas de Matemática são propostas pelos professores, a partir de atividades experimentais de ciências.

Enquadramento teórico

A literacia Matemática é reconhecida internacionalmente como desempenhando um papel cada vez mais importante para o crescimento económico e prosperidade de uma nação. Neste sentido, uma parceria entre investigadores e designers, que promova a integração de tarefas com abordagens pedagógicas adequadas, é fundamental para melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática (Geiger et al., 2014).

As ciências devem ser usadas para promover a interdisciplinaridade, por favorecerem a aprendizagem de outras áreas curriculares (e.g., Abell & Mcdonald, 2006) e a sua integração no currículo favorece os estudantes, uma vez que estes ficam mais bem

preparados para a vida real (e.g., Beane, 1995). Relacionar a Matemática com as ciências tem sido amplamente defendido por vários autores (e.g., Berlin & Lee, 2005) mas a concretização deste objetivo não é fácil (e.g., Baxter, Ruzicka, Beghetto & Livelybrooks, 2014). Treacy e O'Donoghue (2014) referem a existência de pouca investigação sobre a integração da Matemática e ciências na aula, bem como a falta de um modelo de ensino que seja adotado por todos. Estes autores defendem, ainda, que um modelo eficiente para esta integração tem que ser baseado em tarefas experimentais investigativas e centradas nos estudantes.

Para melhorar a aprendizagem da Matemática de cada criança, é crucial dar oportunidades de aprendizagem aos professores, sendo fundamental o desenvolvimento cuidadoso de cursos, *workshops* e materiais bem desenhados e administrados (Ball, 2003). Os professores devem trabalhar e experimentar, os conteúdos e tarefas que se espera que venham a desenvolver em aula, num ambiente de reflexão em que se sintam apoiados (Afonso, Neves, & Morais, 2005).

Um programa de desenvolvimento profissional só será bem sucedido, se os professores conseguirem implementar na prática, em aula, o que aprenderam (Buczynski & Hansen, 2010). Para uma maior eficácia, é importante desenvolver um conhecimento robusto das matérias a ensinar, sendo fundamental apoiar os professores em contexto de aula (Abd-El-Khalick, 2013).

Costa e Domingos (2017) desenvolveram um estudo preliminar, onde verificaram a importância do conhecimento de conteúdo sobre ciências, para promover o sucesso da implementação de atividades experimentais interdisciplinares, em aula, pelos professores. Neste sentido, concluem haver necessidade de continuar a investir no seu desenvolvimento profissional, de modo a aumentar a sua confiança e autonomia para inovarem as suas práticas.

Para Gimeno (2000), as tarefas são atividades de ensino e aprendizagem, realizadas em ambientes escolares, estando inseridas no currículo em ação. Mas não basta escolher/ criar tarefas. A forma como estas são introduzidas e conduzidas pelo professor é essencial para a sua eficácia (Ponte, 2005). Além disso, as tarefas não precisam de ser puramente de matemática, podendo ser aplicações que envolvem outras realidades como é o caso do ensino experimental das ciências.

Metodologia

Com base no enquadramento teórico, acima descrito, foi criado um programa de desenvolvimento profissional de professores do 1.º CEB que envolve formação na área da Matemática, ciências e tecnologia. Este programa consiste em *workshops*, com a duração de cerca de 3 horas cada, onde são introduzidos conteúdos sobre ciências, nomeadamente astronomia, eletricidade e som, entre outros. Neste programa, os professores são encorajados a desenvolver a sua autonomia, de forma a criar e a implementar as suas próprias tarefas, promovendo a interdisciplinaridade.

O estudo aqui apresentado faz parte de um estudo mais amplo que assenta numa metodologia baseada em *Teacher Design Research*. Esta metodologia envolve a realização de vários ciclos, com o objetivo de promover o desenvolvimento profissional dos professores, levando-os a inovarem as suas práticas (Bannan-Ritland, 2000).

Neste artigo, teremos em conta o segundo ciclo de *Teacher Design Research* que decorreu no ano letivo 2016/2017. Os participantes são professores do 1.º CEB, inscritos no programa de formação referido. Para além dos workshops destinados aos professores, os formadores deslocaram-se à sala de aula de alguns formandos, quer para realizar atividades experimentais interdisciplinares em ciências, com os respetivos alunos (a fim de as exemplificar), quer para apoiar os professores enquanto estes implementam as tarefas por eles propostas. No final do programa, os professores apresentaram um relatório, contendo uma reflexão crítica sobre o impacto da formação recebida, bem como sobre propostas de atividades a desenvolver com os alunos e, ainda, evidências da implementação de práticas desenvolvidas em aula, no âmbito da formação recebida.

A recolha de dados foi feita através dos relatórios apresentados e observações dos professores na implementação das tarefas (Cohen, Lawrence, & Keith, 2007). Os dados são de natureza qualitativa e foram analisados recorrendo a um paradigma interpretativo. As observações decorreram essencialmente nos workshops de formação presencial com os professores e nas visitas às respetivas aulas. A primeira autora do artigo esteve presente em todos estas ações, numas como dinamizadora e noutras como observadora. O segundo autor é responsável pela triangulação e validação de toda a informação recolhida.

Análise e discussão de dados

No ano letivo 2016/2017 participaram, no programa de formação, 37 professores do sexo feminino e um do sexo masculino, de catorze escolas do 1.º CEB, com idades

compreendidas entre os 35 e os 61 anos de idade e mais de 10 anos de experiência de ensino. Neste artigo, será apresentado com mais detalhe o estudo de caso de uma professora que criou e implementou atividades experimentais relacionadas com a astronomia que foi um dos temas abordados na formação.

A professora Manuela

A professora Manuela (nome fictício) com 50 anos de idade, 28 anos de serviço, titular de uma turma com 20 alunos do 3.º ano de escolaridade, escolheu a astronomia para trabalhar a Matemática. Começou por organizar os alunos em grupos de quatro e optou por fazer uma modelação do Sistema Solar. O Sol, com 50 cm de diâmetro, foi desenhado numa cartolina amarela. De seguida, foi recortado um retângulo com 15 cm × 110 cm, em papel branco, para colocar os planetas, de acordo com a escala indicada numa ficha de trabalho elaborada pela professora.

A professora começou por pedir aos alunos para marcarem as distâncias, relativas aos raios das órbitas dos planetas, no retângulo recortado, de acordo com os dados indicados na tabela que integra a ficha de trabalho (Figura 1). As instruções da ficha de trabalho são as seguintes:

1- Repara que o Sol tem um diâmetro muito maior que os planetas.

2- Marca no papel de cenário, a partir do Sol, as distâncias, indicadas na tabela, a que cada planeta se encontra daquela estrela.

3-Traça, recorta, molda e pinta, das respetivas cores e com os diâmetros indicados, os planetas.

4- Cola, nas respetivas marcas, o planeta que representa e o teu modelo do Sistema Solar.

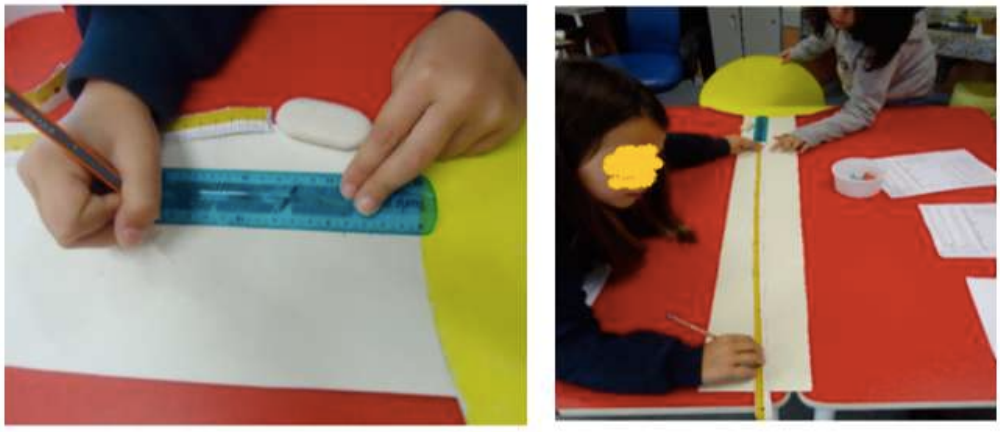


Figura 1 – Marcação dos raios das órbitas dos planetas.
Fonte: Observação da aula (fotos da primeira autora).

Depois de marcados os raios das órbitas de todos os planetas passou-se à modelação dos mesmos. Os planetas foram construídos pelos alunos, respeitando a escala e as cores indicadas na tabela da ficha (Figura 2).

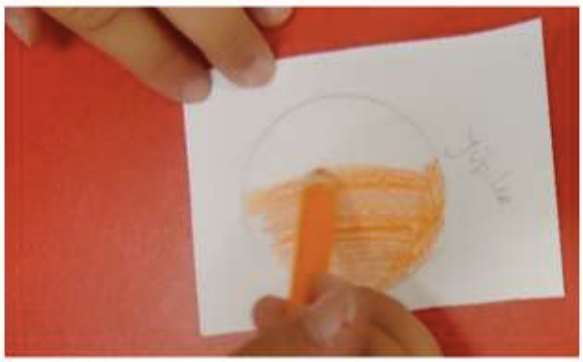


Figura 2 – Modelação dos planetas.
Fonte: Observação da aula (fotos da primeira autora).

Os planetas mais pequenos foram modelados com plasticina, de acordo com as cores indicadas. Os maiores, como é o caso de Júpiter e Saturno, foram desenhados num papel com a ajuda de um compasso e posteriormente pintados de acordo com a cor indicada. A professora orquestrou o trabalho dos alunos promovendo a sua autonomia:

Professora:	Vamos fazer Mercúrio com um bocadinho de preto, … 2 mm… Vejam no paquímetro o tamanho: é muito, muito pequenino. [A professora confirma com o paquímetro se as dimensões dos planetas, modelados pelos alunos estão corretas]
Professora:	Vamos começar por construir os planetas maiores. Quais são eles?
Aluno:	São Júpiter e Saturno.
Professora:	Qual é o seu diâmetro?
Aluno:	Não sei!
Professora:	Vê na tabela que está na folha que vos dei.
Aluno:	Ah! O Júpiter tem 6 *cm* e o Saturno tem 5 *cm*.
Professora:	O que é o diâmetro? [A professora desenha uma circunferência no quadro e traça o diâmetro da mesma]
Professora:	Se Júpiter tem 6 *cm* de diâmetro, vamos abrir o compasso com quanto? Júpiter é no papel. Vamos abrir o compasso em quanto?
Aluna:	6 *cm*.
Professora:	Não! 6 *cm* é o diâmetro. [A professora volta ao quadro para explicar o que é o diâmetro.] Oh Carolina, se vais traçar a circunferência, vais abrir o compasso de que tamanho? Do tamanho do diâmetro?
Aluna:	Não! É do raio. São 3 *cm*.
Professora:	Muito bem!

Depois de todos os planetas moldados e colados nas marcações assinaladas, a professora pediu aos alunos para resolverem um conjunto de exercícios apresentados na

ficha de trabalho inicialmente distribuída. A ficha continha uma grelha com as seguintes informações: distância dos planetas ao Sol em milhões de km, quantos dias demora a translação dos planetas em torno do Sol, velocidade dos planetas, quantos dias ou horas demora a rotação dos planetas, diâmetro e temperatura média dos planetas (informações obtidas com recurso à internet). Algumas das questões da ficha são as seguintes:

1.Coloca por ordem crescente o nome dos planetas em relação ao seu diâmetro no equador em km.

2.Calcula a quantos quilómetros se encontra o planeta Neptuno do planeta Terra.

3.Quantas horas demora o planeta Mercúrio no seu movimento de rotação?

4.Quantos metros tem o diâmetro no equador, o planeta Terra?

5.Se a velocidade dos planetas fosse a metade do que está representado na grelha, qual seria a velocidade de cada um deles?

A figura 3 contem resoluções dos alunos a algumas questões colocadas pela professora na ficha de trabalho, nomeadamente colocar o nome dos planetas por ordem crescente em relação ao seu diâmetro, e exercícios que envolvem cálculos tais como adições e multiplicações.

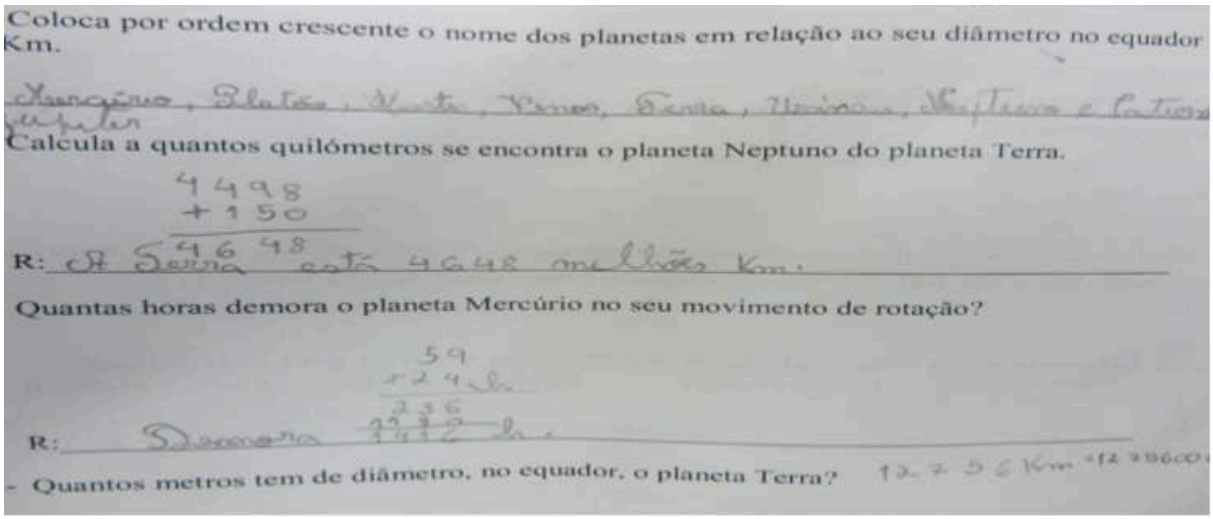


Figura 3 – Resolução de alguns dos exercícios propostos.
Fonte: Relatório da professora.

A figura 4 mostra resoluções relativamente à questão n.º 5: Se a velocidade média dos planetas fosse metade do que está representado na grelha, qual seria a velocidade de cada um deles?

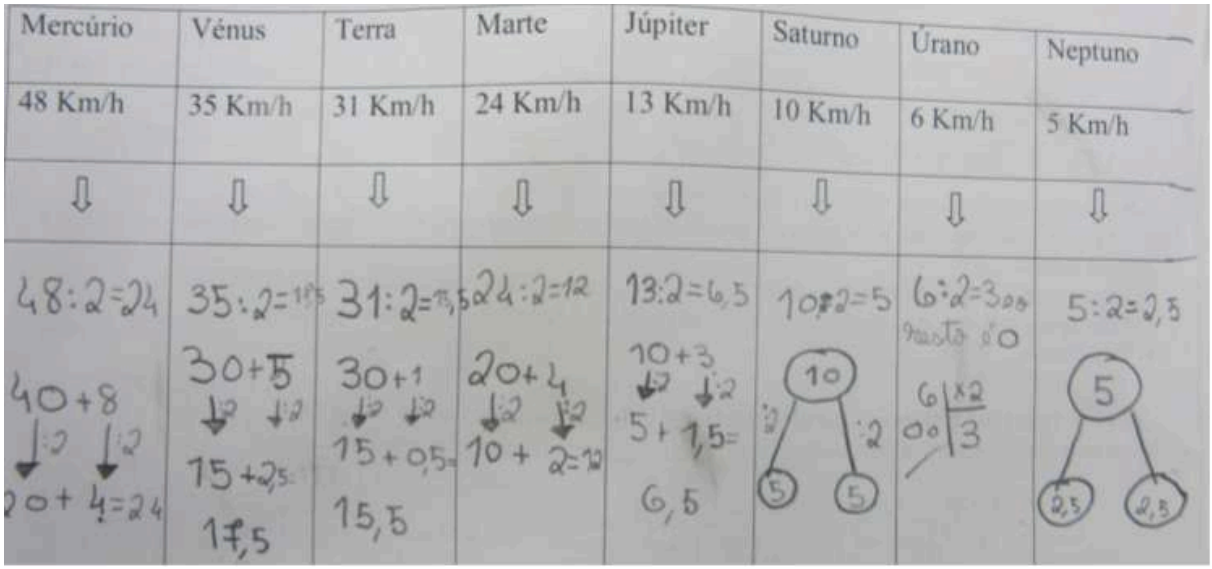


Figura 4 – Resolução dos exercícios propostos.
Fonte: Relatório da professora.

A resolução apresenta estratégias para realizar a divisão, introduzidas nas metas curriculares (MEC, 2013), sem recorrer necessariamente ao algoritmo da divisão. Este é mais um exemplo em que a Matemática é trabalhada através de cálculos.

Nesta aula, a professora começou por realizar tarefas de caracter exploratório, introduzindo a astronomia e recorrendo à Matemática para fazer a modelação do Sistema Solar, nomeadamente traçando circunferências e modelando planetas de acordo com os dados. Para esta tarefa os alunos tiveram que perceber qual a relação entre o raio e o diâmetro de uma circunferência ou de uma esfera. Após a modelação, a professora acaba por trabalhar a Matemática recorrendo a tarefas que estão incluídas na categoria dos exercícios.

Numa outra aula a professora trabalhou o movimento de translação dos planetas em torno do Sol e a respetiva velocidade média (Figura 5). A aula decorreu no ginásio da escola, sendo os alunos organizados em grupos, de forma a cada grupo representar um planeta. A cada grupo foi entregue uma ficha com alguns dados sobre os planetas, nomeadamente raios das órbitas e respetivas velocidades médias em torno do Sol

O círculo central do ginásio representava o Sol. Os planetas, previamente desenhados, pintados e recortados foram identificados pelos alunos e colocados pela respetiva ordem, de acordo com a sua localização relativamente ao Sol. A professora Manuela começou por pedir ao grupo do Mercúrio para vir traçar a respetiva órbita com giz no chão do ginásio. Com uma fita métrica começaram por marcar pontos, que

representavam o raio da órbita, enquanto os colegas de grupo os uniam para traçar a órbita. De seguida foi a vez do grupo de Vénus e assim sucessivamente.

Uma vez desenhadas as órbitas dos planetas, deu-se início à respetiva "corrida". Cada planeta tinha uma corda cujo comprimento era proporcional à respetiva velocidade média. Quanto maior a velocidade, maior o comprimento da corda. Todos os planetas começaram alinhados.

Professora: Qual o planeta que vai chegar primeiro?
Aluno1 : Sei lá!
Aluno2 : É o Mercúrio. Não vês que tem a corda maior?
Aluno3: E também tem a órbita mais pequena!

A professora explicou que cada vez que tocasse o apito (duração de cerca de um segundo) os alunos avançavam com o respetivo planeta a distância correspondente ao comprimento da corda. Enquanto o colega do grupo avançava com o planeta em torno do Sol, ao longo da órbita, os restantes colegas ficavam encarregues de contar o número de apitos da professora. Quando o Mercúrio atingiu um quarto de volta a professora mandou parar e perguntou ao grupo:

Professora: Quantos apitos foram dados até Mercúrio dar um quarto de volta?
Aluno: Foram 7.

Quando Mercúrio completou a primeira e segunda voltas a professora coloca novas questões. O mesmo para Vénus e para os planetas seguintes. Quando finalmente Neptuno atingiu um quarto de volta:

Professora: Quantos apitos foram dados até Neptuno dar um quarto de volta?
Aluno: Foram 10.

A atividade continuou quase até ao final da aula. Por fim a professora fez uma reflexão com os alunos sobre o que aprenderam e pediu para resolverem alguns exercícios, relacionados com o que foi trabalhado.

Nesta sessão, a professora desenvolveu tarefas de Matemática de carácter investigativo, uma vez que esta foi usada para concretizar o desenho das órbitas e para simular a velocidade dos planetas, em torno do Sol.

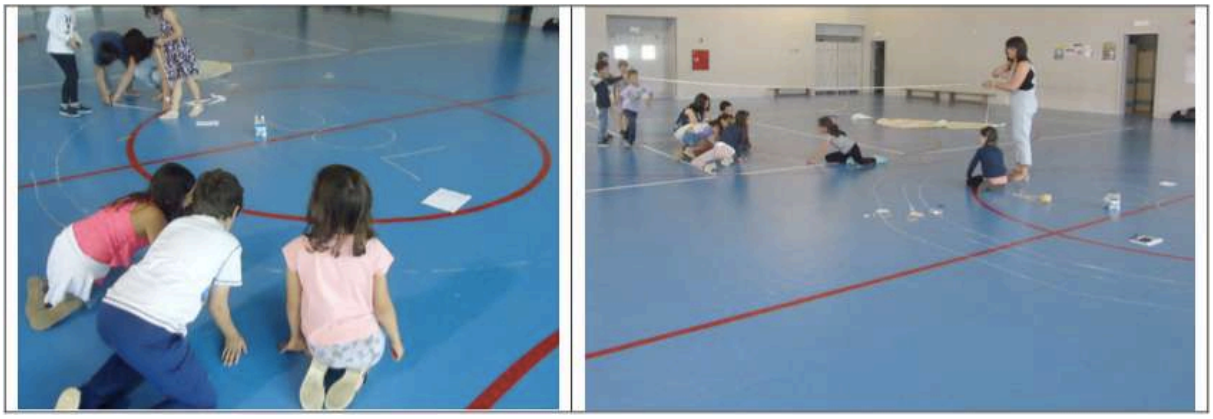


Figura 5 – Modelação dos planetas.
Fonte: Observação da aula (fotos da primeira autora).

Muitas das tarefas apresentadas pela professora Manuela nas fichas de trabalho estão incluídas na categoria dos exercícios. No entanto, dada a forma como estas aulas foram orquestradas antes da resolução destes exercícios, consideramos que algumas das tarefas iniciais foram de natureza exploratória e investigativa. Neste sentido, os alunos concretizaram tarefas interdisciplinares guiados pelas indicações da professora que intervinha, sempre que necessário, para aferir sobre se estavam a ser bem executadas ou para introduzir conteúdos de matemática, necessários para a boa execução dos trabalhos. Um exemplo é a explicação relativamente ao diâmetro da esfera que os alunos confundiram com o raio.

O relatório final da professora Manuela, para além de ilustrar muitas das tarefas que realizou com os respetivos alunos, mostra o impacto que a formação teve nas práticas realizadas, bem como nas metodologias de implementação das mesmas:

> A prática desta Ação de Formação permitiu-me apreender novos percursos de aprendizagem no que respeita à diversidade de temas abordados (…) capazes de melhorar as competências inerentes às aprendizagens.

A interdisciplinaridade observada nas suas aulas também é referida no relatório, indo para além das aplicações à Matemática.

> Toda a formação acabou por nos auxiliar a investir na abordagem de temas curriculares, de uma forma diferente, em contexto de sala de aula, (…) as atividades que desenvolvi com os meus alunos tiveram uma relação com todas as áreas disciplinares (interdisciplinaridade): Matemática, no que respeita aos domínios dos Números e Operações, Geometria e Medida e Organização e tratamento de dados; Português, na construção de textos; Expressões, no que respeita à moldagem e à pintura; Estudo do Meio, onde foram abordados conteúdos programático relacionado com o Sistema Solar e "À Descoberta dos Materiais e Objetos" e Cidadania que visou

> contribuir para a formação de pessoas responsáveis, autónomas, que conhecem e exercem os seus deveres em diálogo e no respeito pelos outros.

O apoio prestado pelos formadores foi muito valorizado pela professora:

> Também enalteço o interesse dos formadores no apoio à concretização das aulas, no que respeita à informação que nos proporcionaram assim como a atenção e a valorização do que lhes foi apresentado.

Em resumo, a professora Manuela trabalhou a Matemática, a partir da astronomia, desenvolvendo tarefas de caracter exploratório e investigativo mas, ao mesmo tempo focou-se em tarefas de cálculo, recorrendo a exercícios para a sistematizar conceitos matemáticos. Além disso, as tarefas envolveram diversos domínios desde Números e Operações, Geometria e Medida e Organização e tratamento de dados.

Tal como a professora Manuela, vários professores trabalharam a Matemática, a partir de outros tópicos de ciências, tais como eletricidade e som, entre outros, mas por limitações de espaço, não os podemos discutir neste artigo.

Considerações finais

Neste artigo, investigámos em que medida os professores, que participaram num contexto de formação profissional, criam e implementam tarefas de Matemática com base no ensino experimental das ciências.

Apesar das dificuldades identificadas na literatura relacionadas com a integração da Matemática e das ciências (e.g., Treacy & O'Donoghue,2014), vários autores defendem a importância de promover um contexto de desenvolvimento profissional que seja adequado à inovação das práticas dos professores (e.g., Afonso et al., 2005; Murphy, Smith, Varley, & Razi, 2015). Concordamos com estes autores, dando conta de um estudo desenvolvido com professores que participaram num programa de desenvolvimento profissional em Matemática e ciências, que criaram e implementaram tarefas de Matemática interdisciplinares.

Tal como Afonso et al. (2005), defendemos a importância de um programa de desenvolvimento profissional onde os professores se sintam apoiados e tenham oportunidade de aprender e experimentar o que se espera o que venham a desenvolver em aula. Além disso, os professores devem apropriar-se das inovações tornando-as nas suas próprias práticas de modo a terem efeitos reais (Zehetmeier, Andreitz, Erlacher & Rauch, 2015). Entendemos que foi o que aconteceu com a professora Manuela ao criar as suas

próprias tarefas, para implementar em aula com os seus alunos. A professora trabalhou a Matemática, a partir da astronomia, começando por introduzir tarefas de caracter exploratório e investigativo mas acabou por recorrer a exercícios, como forma de trabalhar a Matemática, valorizando esta abordagem como consolidação dos processos matemáticos. As tarefas incluíram vários domínios do programa da área curricular de Matemática, nomeadamente Números e Operações, Geometria e Medida e Organização e Tratamento de dados. Concluímos que é possível trabalhar a Matemática, a partir do ensino das ciências, através de um contexto formativo, como se exemplifica nesta abordagem, e que apoia os professores na sua implementação em aula.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Referências bibliográficas

Abd-El-Khalick, F. (2013). Teaching with and about nature of science, and science teacher knowledge domains. *Science & Education*, 22(9), 2087-2107. doi:10.1007/s11191-012-9520-2

Abell, S. K., & McDonald, J. T. (2006). Envisioning a curriculum of inquiry in the elementary school. In L. B. Flick & N. G. Lederman (Eds.), *Scientific inquiry and nature of science: Implications for teaching, learning, and teacher education* (pp. 249-261). Dordrecht, Boston: Springer.

Afonso, M., Neves, I., & Morais, A. M. (2005). Processos de formação e sua relação com o desenvolvimento profissional dos professores. *Revista de Educação*, v. 13, n. 1, p. 5 – 37.

Ball, D. L. (2003). Mathematics in the 21st century: What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. Paper presented at the Secretary's Summit on Mathematics, U.S. Department of Education, Washington, DC.

Bannan-Ritland, B. (2000).Teacher Design Research. An emerging paradigm for teachers' professional development. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* Capítulo 12, p. 246-262. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Baxter, J. A., Ruzicka, A., Beghetto, R. A., & Livelybrooks, D. (2014). Professional development strategically connecting mathematics and science: The impact on teachers' confidence and practice. *School Science and Mathematics*, 114(3), 102-113.

Beane, J. A. (1995). Curriculum integration and the disciplines of knowledge. *The Phi Delta Kappan*, 76(8), 616-622.

Becker, K., & Park, K. (2011). Effects of integrative approaches among science, technology, engineering, and mathematics (STEM) subjects on students' learning: A preliminary meta-analysis. *Journal of STEM Education*, 12(5 & 6), 23-37.

Berlin, D. F., & Lee, H. (2005). Integrating science and mathematics education: Historical analysis. *School Science and Mathematics*, 105(1), 15-24.

Buczynski, S., & Hansen, C. B. (2010). Impact of professional development on teacher practice: Uncovering connections. *Teaching and Teacher Education*, 26(3), 599-607.

Cohen, L., Lawrence, M., & Keith, M. (2007). *Research Methods in Education*. 6th Edition. Taylor and Francis Group.

Costa, M. C.; & Domingos, A. (2017). Innovating teachers' practices: potentiate the teaching of mathematics through experimental activities. In CERME 10.

Diário da República (2017). Despacho n.º 5908/2017, de 5 de julho. Acedido através de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/despacho_5908_2017.pdf

DGIDC (sem data). Programas do ensino básico. Lisboa: DGIDC. Acedido através de http://www.dge.mec.pt/programas-1o-ciclo

Geiger, V.; Goos; M., Dole, S.; Forgasz, H.; Bennison, A. (2014). Devising principles of design for numeracy tasks. In Curriculum in focus: Research-guided practice: Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,. p. 239 – 246.

Gimeno Sacristán, J. (2000). *O Currículo: uma reflexão sobre a prática*. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed.

Ministério da Educação (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: MEC, DGE.

Murphy, C., Smith, G., Varley, J., & Razı, Ö. (2015). Changing practice: An evaluation of the impact of a nature of science inquiry-based professional development programme on primary teachers. *Cogent Education*, 2(1), 1077692.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. em GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Treacy, P., & O'Donoghue, J. (2014). Authentic Integration: a model for integrating mathematics and science in the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(5), 703-718.

Zehetmeier, S., Andreitz, I., Erlacher, W., & Rauch, F. (2015). Researching the impact of teacher professional development programmes based on action research, constructivism, and systems theory. *Educational action research*, *23*(2), 162-177.

O CONHECIMENTO ESTATÍSTICO DE FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS: UM ESTUDO DE CASO NUMA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

Ana Caseiro, Ricardo Machado, Tiago Tempera

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal
anac@eselx.ipl.pt, rmachado@eselx.ipl.pt, tiagot@eselx.ipl.pt

Resumo. *Na sociedade contemporânea tomar decisões requer a capacidade de analisar e interpretar informação representada de diferentes formas. Tendo esse aspeto em consideração, os dados aqui apresentados têm como objetivo compreender qual o conhecimento estatístico de futuros professores dos primeiros anos, quando estes ingressam no ensino superior e após a unidade curricular de análise de dados. Assim, o presente estudo segue uma abordagem interpretativa, na qual desenvolvemos um estudo de caso. Os participantes foram os estudantes do 2.º ano da licenciatura em educação básica, tendo a recolha de dados sido realizada com base no instrumento de avaliação de conhecimentos estatísticos concebido. Os dados mostram que os estudantes chegam ao ensino superior com diversas lacunas no seu conhecimento estatístico, sendo que algumas foram colmatadas com a frequência na unidade curricular de análise de dados, mas outras continuam a persistir. Perante os dados obtidos, parece-nos importante repensar os conteúdos estatísticos, e a forma como são trabalhados, com os estudantes do ensino básico e secundário e qual o papel da formação inicial para ajudar a colmatar as dificuldades dos futuros professores.*

Abstract. *In contemporary society making decisions requires the ability to analyse and interpret information represented in different ways. Considering this aspect, the data presented here aims to understand the statistical knowledge of future teachers of the first years, when they enter higher education. Thus, the present study follows an interpretative approach, in which we developed a case study. The participants were the students of the 2nd year of the Basic Education course, and the data collection was carried out based on a conceived statistical knowledge assessment instrument. The data shows that students have reached higher education with several gaps in their statistical knowledge, some of which were overcome with the work developed in curricular unit Data Analysis. However, others continue to persist. Concerning the data, it seems to us important to rethink the statistical contents and the way in which they are worked with the students from primary and secondary education. Besides that, it is also important to understand the role of the pre-service education in overcome the difficulties of future teachers.*

Palavras-chave: *Conhecimento estatístico; formação inicial de professores; primeiros anos de escolaridade*

Introdução

Cada vez mais, enquanto cidadãos, deparamo-nos com informação representada de diversas formas. A educação estatística deve promover o desenvolvimento de competências

que permitam identificar o uso adequado, ou abusivo, da Estatística. É necessário que os estudantes construam um significado estatístico, pelo que é preciso ultrapassar rotinas centradas nos procedimentos meramente técnicos, mecanizados, adoptando práticas inovadoras. Desta forma, os dados aqui apresentados fazem parte de um estudo mais alargado que tem como objetivo aceder ao conhecimento em Estatística dos estudantes ao longo da escolaridade obrigatória, bem como dos que integram, pela primeira vez, a Licenciatura em Educação Básica, assim como analisar o percurso realizado pelos estudantes do ensino superior, futuros professores, em termos de desenvolvimento do conhecimento estatístico, durante a realização da referida licenciatura. Mais concretamente com os dados apresentados nesta comunicação é nosso objetivo compreender qual o conhecimento estatístico dos futuros professores antes de frequentarem a Unidade Curricular de Análise de Dados, onde são abordados conteúdos estatísticos, e após a sua frequência.

O ensino e a aprendizagem da Estatística

Uma das preocupações dos atuais currículos é formar cidadãos críticos e participativos (NCTM, 2000, 2014). Os conhecimentos estatísticos são considerados "essenciais quer no exercício da cidadania quer na vida profissional" (Scheaffer, 2000, p. 158), uma vez que, "tomar decisões no mundo de hoje requer com frequência a capacidade de analisar e interpretar informação estatística" (Bright & Hoeffner, 1993, p. 87). Porém, para muitos alunos, os conteúdos de Estatística são lecionados baseando-se na aprendizagem de técnicas, mas dificultando a construção de um significado estatístico (Batanero, 2000).

Em Portugal, o objetivo é começar a desenvolver a literacia estatística em todos os alunos (Ponte & Sousa, 2010), tornando-os cidadãos capazes de tomar decisões relativamente à informação recebida do mundo à sua volta. Martins e Ponte (2010) referem mesmo que, no final do ensino básico, é esperado que os alunos compreendam e utilizem linguagem básica da Estatística, assim como as suas ideias fundamentais. Cobb e McClain (2004) focam o desafio que constitui o *design* de experiências de aprendizagem concebidas para promoverem o desenvolvimento da literacia estatística, do raciocínio e do pensamento, ultrapassando a mera aprendizagem de procedimentos técnicos, algorítmicos ou outros, que pressupõe mecanização, mas não garante a sua mobilização perante novas situações. Também Groth (2006) frisa a importância do trabalho estatístico em sala de

aula, reforçando a argumentação de que, pelo facto de os alunos não realizarem investigações estatísticas no decorrer do seu percurso escolar, poderá originar que em adultos não sejam capazes de interpretar e avaliar criticamente informação estatística com que se deparem, uma vez que este tipo de experiências de aprendizagem permite desenvolver capacidades e competências importantes, tais como, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, o sentido crítico e a argumentação matemática.

Alguns estudos têm sido realizados de modo a perceber fragilidades de professores e futuros professores no processo de ensino e de aprendizagem da Estatística. Nos seus estudos Batanero, Godino e Roa (2004) e Estrada, Batanero, Bazán e Aparício (2009) concluem que os professores demonstram uma preparação pouco aprofundada e sustentada em Estatística. Tal dado sugere que é necessário melhorar a formação inicial de professores (Watson, 2001), especialmente ao nível dos futuros professores dos primeiros anos do Ensino Básico (Chick & Pierce, 2008).

Também em Portugal alguns estudos têm sido realizados nesse âmbito (Caseiro, 2010; Barros, 2003; Fernandes, 2009; Fernandes & Barros, 2003; Rodrigues, 2009). No estudo de Caseiro (2010), é possível concluir que os professores de 1.º ciclo envolvidos na investigação apresentaram dificuldades nalguns tópicos tais como a moda, diagramas de Venn e de Carroll e situações aleatórias. Outro exemplo é o estudo de Rodrigues (2016) no qual a autora refere que "foi evidente uma diferente e deficiente preparação dos professores para o ensino da Estatística" (pp. 316-317). Perante os resultados obtidos, é frisada a necessidade de ser repensada a formação inicial e contínua de professores.

Tendo em conta as dificuldades demonstradas pelos professores e futuros professores nos estudos citados, existem evidências de uma preparação pouco sustentada e aprofundada para o ensino da Estatística, sendo necessário aprofundar o estudo acerca desse tema, compreendendo o verdadeiro conhecimento estatístico dos futuros professores ao longo da sua formação inicial, assim como a influência das Unidades Curriculares do plano de estudos da formação inicial no desenvolvimento do seu conhecimento estatístico.

Metodologia

Este estudo faz parte do projeto *O conhecimento estatístico dos estudantes do ensino básico, secundário e da Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Lisboa*, que tem como principais objetivos aceder ao conhecimento em Estatística dos estudantes ao longo da escolaridade obrigatória, bem como dos que

integram, pela primeira vez, a Licenciatura em Educação Básica, assim como analisar o percurso realizado pelos estudantes do ensino superior, futuros professores, em termos de desenvolvimento do conhecimento estatístico, durante a realização da referida licenciatura.

Assumimos como paradigma o interpretativo (Denzin, 2002), uma vez que pretendemos aceder aos conhecimentos estatísticos dos estudantes da Licenciatura em Educação Básica através da análise das respostas a um instrumento de avaliação de conhecimentos estatísticos. Como *design* de investigação, recorremos a um estudo de caso (Merriam, 1988), que, segundo esta autora, "é o estudo de um fenómeno específico como um programa, um acontecimento, uma pessoa, um processo, uma instituição ou um grupo social" (Merriam, 1988, p. 9), pelo que, o caso em estudo, são os estudantes do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica.

Os participantes deste estudo são todos os atuais estudantes (2017/2018) a frequentar o 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica, num total de 95 estudantes que responderam à primeira fase de aplicação do instrumento de recolha de dados (aplicado aos estudantes presentes na primeira aula da Unidade Curricular de Análise de Dados) e um total de 78 estudantes que responderam à segunda fase de aplicação do mesmo instrumento (aplicado aos estudantes presentes na última aula da Unidade Curricular). Dos participantes da primeira fase, 94 são do género feminino e apenas 1 do género masculino, sendo que as idades variam entre 18 e 37 anos. Dos participantes da segunda fase, todos são do género feminino com idades entre os 18 e 37 anos.

O instrumento de recolha de dados utilizado é o instrumento de avaliação de conhecimentos estatísticos com o qual é nossa intenção compreender qual o conhecimento estatístico dos futuros professores antes de frequentarem a Unidade Curricular de Análise de Dados, onde são abordados conteúdos estatísticos, e após a sua frequência. O instrumento elaborado continha 12 questões, algumas das quais divididas em sub-questões de escolha múltipla (4 hipóteses de resposta cada), contendo: dados em tabelas de frequências, gráficos de barras, pictogramas, diagramas de Venn, Carroll, caule-e-folhas e extremos e quartis, assim como tipos de variáveis estatísticas, e medidas estatísticas (média, moda, mediana, desvio padrão, amplitude e quartis).

Tendo em conta o perfil dos estudantes envolvidos no estudo, a conceção e elaboração do instrumento de avaliação de conhecimentos estatísticos norteou-se pelos seguintes princípios: (i) elaboração de questões sobre aspetos conceptuais adequados ao

ensino básico (nível de ensino que poderão vir a lecionar); (ii) acessibilidade de resolução para todos os participantes, independentemente do seu nível de escolaridade em Matemática; e (iii) estabelecimento de questões de resposta rápida, de modo a manter o interesse e motivação durante a resolução das questões presentes no instrumento de recolha de dados.

O instrumento de avaliação de conhecimentos estatísticos foi aplicado aos estudantes em dois momentos distintos: no início do ano letivo 2017/2018 na Unidade Curricular de Análise de Dados, do 1.º semestre do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica; e após a frequência da mesma Unidade Curricular. Os dados foram analisados estatisticamente com recurso ao software *Excel*, com base na categorização de respostas previamente estabelecidas na fase de concepção do instrumento de avaliação (as hipóteses de resposta colocadas em cada questão foram pensadas de acordo com as dificuldades evidenciadas na literatura, como, por exemplo, confusão entre moda, média e mediana).

Resultados

Relativamente ao conhecimento estatístico demonstrado pelos estudantes, iremos apresentar os resultados relativos às tabelas de frequências, gráficos de barras e pictogramas, medidas de tendência central (média, moda e mediana), amplitude total e desvio padrão.

Tabelas de frequências

Relativamente a este aspeto, foram elaboradas 3 questões, uma das quais que levava à análise de uma tabela de frequências absolutas, outra que pedia para completar o valor em falta numa tabela de frequências relativas e, por fim, a terceira que pedia para determinar o valor da frequência relativa de um determinado acontecimento.

No que se refere, à proposta que envolvia frequências absolutas, 98,9% dos estudantes acertou a resposta, ou seja, apenas 1 estudante não respondeu à questão colocada, o que revela o à-vontade dos estudantes com este tipo de situação. Por outro lado, quando confrontados com uma situação em que lhes era pedido que completassem o valor em falta numa tabela de frequências relativas (ver Figura 1), apenas 52,6% dos estudantes identificou a resposta correta.

8. Na tabela seguinte, estão registadas as frequências relativas dos níveis atingidos pelos alunos de uma turma num teste de Matemática. A frequência relativa do nível 5 não está registada.

Nível	1	2	3	4	5
Frequência relativa	0,123	0,227	0,522	0,078	...

Qual a frequência relativa do nível 5?

A. 0,005
B. 0,05
C. 0,5
D. 5

Figura 1: Tarefa que envolvia a noção de frequência relativa de um acontecimento

Nesta situação é de referir que 18,9% dos estudantes assinalou como resposta o único valor das hipóteses de resposta com o mesmo número de casas decimais que os valores já apresentados das frequências relativas. Tal como nesta situação, também na terceira, apenas 46,3% dos estudantes assinalou a resposta correta. Assim, constata-se que apesar de os estudantes demonstrarem sentir-se confortáveis com situações que envolvem frequências absolutas, diversos estudantes ainda não demonstram conhecimento sobre frequências relativas, não tendo alguns deles respondido e outros tendo selecionado uma resposta incorreta. Estes aspetos podem estar associados ao facto de as frequências absolutas serem das frequências mais utilizadas em sala de aula e, por outro lado, devido ao facto de as frequências relativas não terem aparecido em percentagem (forma e nomenclatura mais usual no quotidiano).

Por outro lado, a análise dos dados recolhidos com a aplicação do instrumento após os estudantes frequentarem a Unidade Curricular de Análise de Dados, mostra que as estudantes melhoraram bastante o seu desempenho e a sua compreensão no que se refere à frequência relativa de um acontecimento. Na tarefa em que lhes era pedido que completassem o valor em falta numa tabela de frequências relativas, 91% dos estudantes assinalaram a resposta correta, enquanto na outra proposta que envolvia frequências relativas foram 97,4% dos estudantes a selecionar a resposta correta.

Gráficos de barras e Pictogramas

Quando solicitados a analisar um gráfico de barras e um pictograma, praticamente todos os estudantes demonstraram conseguir fazê-lo, mais concretamente 96,8% antes da

UC de Análise de Dados e 96,2% após frequência na UC relativamente ao gráfico de barras e 98,9% antes e 97,4% após em relação ao pictograma. Tal como no caso das tabelas de frequências absolutas, o número tão elevado de respostas corretas na análise destas representações está relacionado com o facto de se tratar de representações constantemente presentes no quotidiano e, por outro lado, das mais utilizadas em sala de aula.

Média

Relativamente a esta medida estatística, foram colocadas 4 questões aos estudantes: duas das quais respeitantes ao cálculo de médias aritméticas simples, outra referente à determinação de um valor em falta tendo a média o valor estipulado no enunciado e, por fim, a última referente ao cálculo de uma média ponderada.

No que se refere à determinação de um valor em falta, antes da UC 80% dos estudantes selecionou a resposta correta, sendo que, dessa forma, a tarefa ainda se mostrou difícil para 19 estudantes, 16 dos quais selecionaram uma resposta incorreta e os restantes 3 não responderam. Após frequência na UC de Análise de Dados a percentagem de respostas correta passou para 92,3%.

Quando solicitados a determinar o valor da média de um conjunto de dados, o número de respostas corretas divergiu entre se tratar do cálculo de uma média aritmética simples ou de uma média ponderada. Relativamente ao primeiro caso, a percentagem de respostas corretas dos estudantes na primeira aplicação do instrumento foi de 88,4% numa situação e 92,6% noutra. Por outro lado, quando confrontados com uma situação que remetia para o cálculo de uma média ponderada (ver Figura 2), apenas 37,9% dos estudantes respondeu corretamente. Relativamente à segunda aplicação do instrumento, as percentagens de respostas corretas foram, respetivamente, 94,9%, 98,7% e 70,5%.

12. Há 10 pessoas num elevador, 6 mulheres e 4 homens. A média do peso das mulheres é 60 quilos, e a média do peso dos homens é 80 quilos. Qual a média do peso das 10 pessoas que se encontram no elevador?

A. 60
B. 68
C. 70
D. 80

Figura 2: Tarefa que envolvia a noção de média ponderada

Na situação apresentada na Figura 2 é de referir que, antes de frequentarem a UC de Análise de Dados, 49,5% dos estudantes, e depois de frequentarem a UC 29,5%, selecionaram a opção C como resposta correta, ou seja, realizaram o cálculo de uma média

aritmética simples com os valores que lhes eram apresentados no enunciado da tarefa. A elevada percentagem de estudantes a selecionar essa opção, quer antes quer após frequência na UC de Análise de Dados, revela a dificuldade que existe quando se pretende desconstruir ideias ou conceitos matemáticos que foram adquiridos por processos de mecanização e repetição, sem qualquer atribuição de significados matemáticos. Tal argumentação é também sustentada por Barros (2003) e Fernandes (2009), que afirmam que os estudantes sabem o algoritmo para o cálculo da média, mas que nem sempre utilizam esse conhecimento de forma significativa.

As elevadas percentagens de respostas corretas assinaladas pelos estudantes no cálculo de médias aritméticas simples estão relacionadas com o facto de a média ser a medida de tendência central mais utilizada no quotidiano e mais referida em estudos estatísticos, tendo muitos dos alunos adquirido, por processos de mecanização e repetição, a forma de determiná-la ("a soma de todos os dados a dividir pelo número de dados"). Por outro lado, a média ponderada não é tão utilizada, pelo menos de forma explícita, no quotidiano, o que, juntamente com o referido para a média aritmética simples, poderá ter influenciado a resposta dos estudantes à questão que supunha a determinação de uma média ponderada.

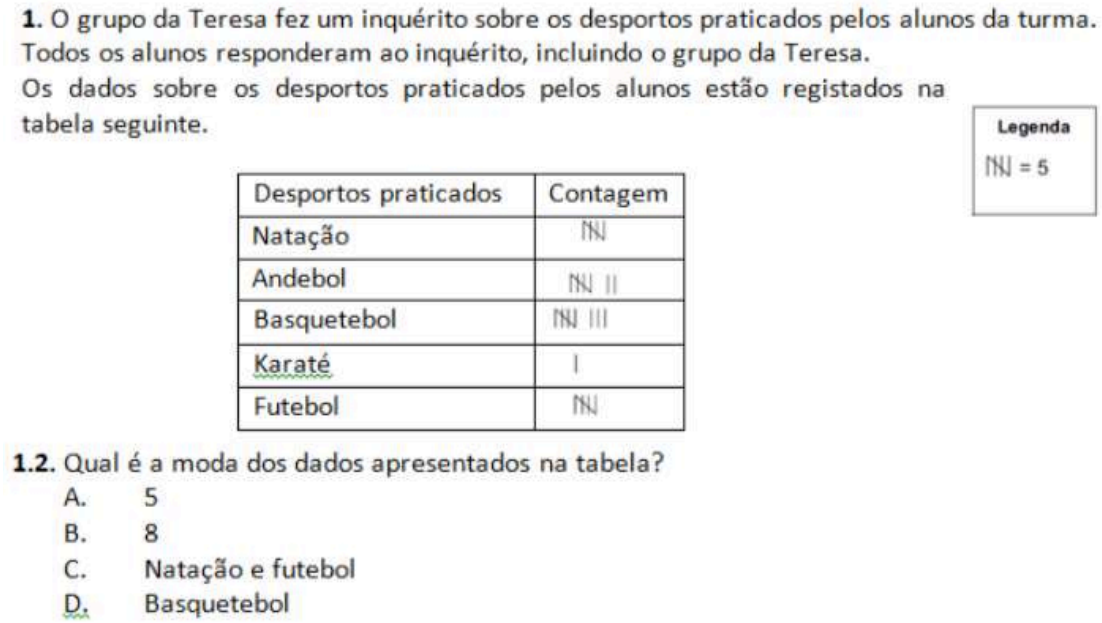
Moda

No que respeita a esta medida de tendência central foram colocadas duas questões: uma respeitante a uma variável quantitativa discreta e outra com dados de uma variável qualitativa.

Relativamente à situação da determinação da moda dos dados de uma variável quantitativa discreta, na primeira aplicação do instrumento, 93,7% dos estudantes selecionou a resposta correta, sendo que 2,1% respondeu não existir moda na situação e os restantes 4,2% não respondeu à questão. É de referir que, após frequentarem a UC de Análise de Dados, a percentagem de respostas corretas passou a 100%. Por outro lado, analisando as respostas obtidas na situação da determinação da moda dos dados de uma variável qualitativa (ver Figura 3), constatamos que, na primeira aplicação, 67,4% dos alunos selecionou a opção correta. No entanto, 21,1% dos alunos deu como resposta a frequência que se repete mais vezes, o que se coaduna com o estudo realizado por Barros (2003), na medida em que os estudantes tendem a procurar um valor numérico para a moda. . Ainda a referir que 3,2% dos alunos respondeu o valor mais elevado das

frequências, o que nos leva a inferir que sabem o significado da moda, mas que não tiveram em consideração a natureza da variável estatística (variável qualitativa). Relativamente à segunda aplicação, 84,6% dos estudantes assinalou a resposta correta, continuando a haver estudantes a selecionar todas as opções apresentadas.

Em suma, os estudantes facilmente determinam a moda de um conjunto de dados de uma variável quantitativa, mas quando confrontados com uma variável qualitativa começam a demonstrar dúvidas entre referir que a moda se trata de um (ou mais) valor(es) dos dados ou da frequência desse(s) valor(es),



1. O grupo da Teresa fez um inquérito sobre os desportos praticados pelos alunos da turma. Todos os alunos responderam ao inquérito, incluindo o grupo da Teresa.
Os dados sobre os desportos praticados pelos alunos estão registados na tabela seguinte.

Legenda
𝍸 = 5

Desportos praticados	Contagem
Natação	𝍸
Andebol	𝍸 II
Basquetebol	𝍸 III
Karaté	I
Futebol	𝍸

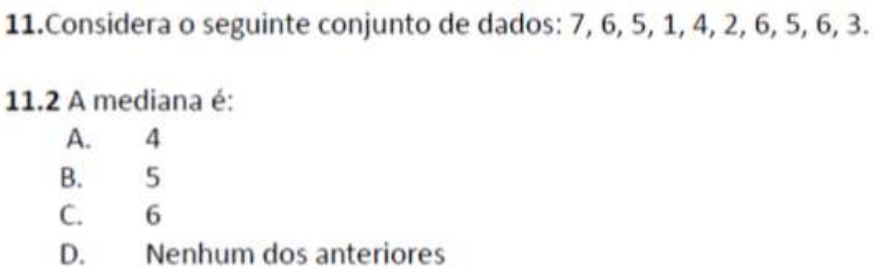
1.2. Qual é a moda dos dados apresentados na tabela?

A. 5
B. 8
C. Natação e futebol
D. Basquetebol

Figura 3: Tarefa que envolvia a noção de moda de um acontecimento

Mediana

Relativamente a esta medida estatística, apenas existia uma questão, na qual se pedia o valor da mediana, dado um conjunto de dados não agrupados (ver Figura 4).



11. Considera o seguinte conjunto de dados: 7, 6, 5, 1, 4, 2, 6, 5, 6, 3.

11.2 A mediana é:

A. 4
B. 5
C. 6
D. Nenhum dos anteriores

Figura 4: Tarefa que envolvia a noção de mediana

Através da análise dos resultados, observou-se que, antes de frequentarem a UC de Análise de Dados, 53,7% dos alunos selecionou a resposta correta. No entanto, 14,7% das respostas obtidas (opção A) estão relacionadas com o facto de os alunos não ordenarem os dados, tendo apenas encontrado o valor central da distribuição pela ordem apresentada. Este tipo de desempenho é comum acontecer, evidenciando dificuldades na apropriação do conceito desta medida estatística (Barros, 2003). Ainda a referir que 3,2% dos alunos parece ter confundido os conceitos de mediana e moda. Na segunda aplicação, a percentagem de estudantes a selecionar a resposta correta foi de 88,5%, tendo 10,3% selecionado a opção D como resposta correta.

Amplitude total

No que respeita a esta medida, apenas foi colocada uma questão (ver Figura 5), na qual era solicitado aos estudantes que referissem qual o valor da amplitude de um conjunto de dados apresentado.

9. Na tabela seguinte, estão os dados relativos ao número de bilhetes vendidos, num determinado mês, para cada uma das cinco salas de cinema de um centro comercial.

Sala de cinema	N.º de bilhetes vendidos nesse mês
Sala 1	8042
Sala 2	6265
Sala 3	8409
Sala 4	7458
Sala 5	9347

9.1. Qual é a **amplitude** deste conjunto de dados?

A. 1305
B. 3082
C. 8042
D. 9347

Figura 5: Tarefa que envolvia a determinação da amplitude

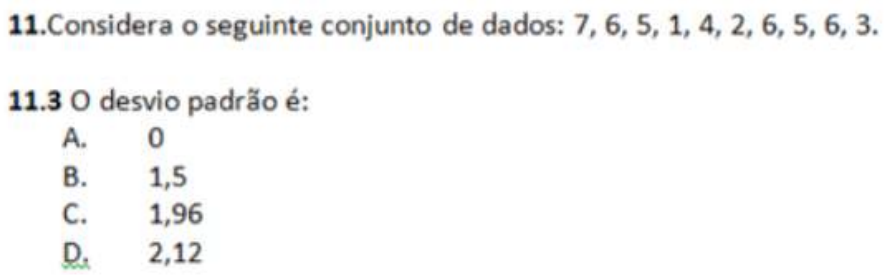
Através da análise dos dados provenientes da primeira aplicação do instrumento, pudemos constatar que apenas 31,6% dos estudantes selecionou a opção correta. Dos restantes, é de salientar que 5,3% selecionou a opção que remetia para a subtração entre o último e o primeiro dado apresentados na tabela, exatamente pela ordem apresentada. Por outro lado, 2,1% dos estudantes selecionou o primeiro valor dos dados a aparecer como

valor da amplitude, enquanto 38,9% selecionou a opção cujo valor se tratava do valor máximo dos dados.

Relativamente à segunda aplicação do instrumento, a percentagem de estudantes a selecionar a opção correta foi de 85,9%. Apesar dessa percentagem ter aumentado, também aumentou a percentagem de estudantes a selecionar a primeira opção como resposta (subtração entre o último e o primeiro dado apresentados na tabela, exatamente pela ordem apresentada). Estes estudantes revelam alguma compreensão acerca de que uma amplitude se trata de uma diferença entre valores, revelando não perceber entre que valores se deve realizar essa subtração e o motivo de tal acontecer.

Desvio padrão

Por fim, relativamente a esta medida estatística, apenas foi colocada uma questão (ver Figura 6), na qual era solicitado que os estudantes determinassem o valor do desvio padrão de um conjunto de dados não agrupados. Como recurso, os estudantes tinham ao seu dispor uma calculadora científica na qual é possível introduzir os dados e solicitar o valor do desvio padrão.


11. Considera o seguinte conjunto de dados: 7, 6, 5, 1, 4, 2, 6, 5, 6, 3.

11.3 O desvio padrão é:

A. 0
B. 1,5
C. 1,96
D. 2,12

Figura 6: Tarefa que envolvia a determinação do desvio padrão

Na primeira aplicação do instrumento, é de salientar a elevada percentagem (48,4%) de estudantes que não respondeu à questão colocada. Esse valor demonstra que apesar de os estudantes se recordarem da designação "desvio padrão" (como referiram lembrar-se na aula antes da aplicação do instrumento de recolha de dados) efetivamente não sabem do que se trata nem de como se determina. Na segunda aplicação do instrumento, outro aspeto que revela ainda a não atribuição de significado matemático associado a essa medida de dispersão, está evidente aquando da seleção por parte de 14,7% dos estudantes da opção "0" como valor do desvio padrão.

É de salientar que, apesar da percentagem de respostas corretas ter aumentado (73,1%), mesmo após frequentarem UC de Análise de Dados (na qual aprenderam/ relembraram a forma de determinação do desvio padrão de um conjunto de dados, com e sem recurso à calculadora, atribuindo-lhe significado num conjunto de dados) 20,5% dos estudantes continua a selecionar uma opção incorreta e 6,4% continua sem responder à questão. Dessa forma, é possível verificar que o desvio padrão se trata de uma medida estatística complexa, mesmo para os estudantes a frequentar o ensino superior.

Considerações finais

O desenvolvimento da literacia estatística assume-se como um elemento importante no processo de ensino e de aprendizagem, na medida em que permite aos estudantes desenvolverem capacidades e competências essenciais a uma sociedade em constante mudança e cada vez mais tecnológica.

Analisando os resultados, podemos constatar que os estudantes se sentem confiantes e revelam uma grande facilidade quando têm que colocar em ação determinados conhecimentos estatísticos, tais como, os relacionados com as tabelas de frequência absoluta, interpretação de gráficos de barras e pictogramas, bem como com algumas medidas de tendência central (média e moda de dados quantitativos discretos). No entanto, quando confrontados com situações que envolvem a aplicação de um conhecimento mais relacional e menos instrumental, menos baseado em processos de memorização e repetição, os estudantes revelam mais dificuldades. É exemplo, os desempenhos associados aos conceitos de frequência relativa, média ponderada, desvio padrão e moda, este último no caso de dados qualitativos, tal como é referido nos estudos realizados por Barros (2003) e Fernandes (2009).

Desta forma, tal como sustentam Caseiro (2010) e Rodrigues (2016), torna-se importante repensar a forma como alguns conceitos estatísticos são apresentados e trabalhados, por parte dos professores ao longo de toda a escolaridade, por forma a que se consigam desenvolver aprendizagens significativas para os alunos. Assim, é essencial adequar a formação inicial e contínua de professores, no que respeita a este domínio, permitindo criar oportunidades de aprendizagem, nas quais os professores e futuros professores possam criar ferramentas que lhes permitam trabalhar de forma diferente com os alunos, em cenários de educação formal.

Referências bibliográficas

Batanero, C. (2000). Dificuldades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. In C. Loureiro, F. Oliveira, & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 31-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística - Associação de Professores de Matemática - Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, *12*(1). Obtido de www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html.

Barros, P. M. (2003). Os futuros professors do 2.º ciclo e a estocástica: Dificuldades sentidas e o ensino do tema. Lisboa: APM.

Bright, G., & Hoeffner, K. (1993). Measurement, probability, statistics, and graphing. In D. T. Owens (Eds.), *Research ideas for the classroom: Middle grades school mathematics* (pp. 78-98). Reston, VA: NTCM.

Caseiro, A (2010). Conhecimento dos professores de 1.º ciclo sobre educação estatística. Lisboa: APM.

Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: Beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Cobb, P., & McClain, K. (2004). Proposed design principles for the teaching and learning of elementary statistics. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 375-396). Dordrecht: KluwerAcademic Publisher.

Estrada, A., Batanero, C., Bazán, J. L., Aparicio, A. (2009). As atitudes em relação à estatística em professores: Um estudo comparativo de países. In C. Costa, E. Mamede, & F. Guimarães (Eds.), *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática, Números e Estatística: Reflectindo no presente, perspectivando o futuro*. Vila Real: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Fernandes, J. A. (2009). Ensino e aprendizagem da Estatística: Realidades e desafios. In C. Costa, E. Mamede, & F. Guimarães (Eds.), *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática, Números e Estatística: Reflectindo no presente, perspectivando o futuro*. Vila Real: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. *Revista Portuguesa de Educação*, *18*(1), 117-150.

Groth, R. E. (2006). An exploration of students' statistical thinking. Teaching Statistics, 28(1), 17-21.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: Ministério da Educação e Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Merriam, S. (1988). Case study research in education: A qualitative approach. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NTCM.

NCTM (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. Reston, VA: NTCM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Rodrigues, A. (2016). Conhecimento e práticas de professores em Educação Estatística: três estudos de caso no 1.º ciclo num contexto de trabalho colaborativo (Tese de doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Scheaffer, R. (2000). Statistics for a new century. In M. Burke, & F. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for the new century 2000 Yearbook* (pp. 158-173). Reston: NTCM.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*, 305-337.

Agradecimentos

Esta comunicação faz parte do Projeto *O conhecimento estatístico dos/as estudantes do ensino básico, secundário e da Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Lisboa* financiado pelo Instituto Politécnico de Lisboa.

INTERPRETAÇÃO POR FUTUROS PROFESSORES DE EDUCAÇÃO BÁSICA DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

Maria Clara Martins, Neusa Branco

[1]UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, mariaclaramartins@ymail.com

[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

Introdução

A formação de professores e educadores deve contemplar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo a lecionar e de como lecionar esse conteúdo. Stacey et al. (2001) apontam a necessidade de se enfatizar na formação inicial o conhecimento matemático a ensinar, em particular no que respeita ao conhecimento numérico, e o conhecimento didático relativo a esses tópicos, incluindo a compreensão de dificuldades mais comuns. Assim, é importante conhecer a compreensão dos formandos e perceber as suas dificuldades de modo a perspetivar formas de apoiar o conhecimento do ensino dos números racionais (Monteiro & Pinto, 2006). Este poster apresenta a análise de futuros professores de resoluções escritas de alunos em tarefas com operações com números racionais, evidenciando o seu conhecimento sobre o aluno e sobre os seus processos de aprendizagem.

Enquadramento teórico

O conhecimento didático dos futuros professores e educadores assume bastante ênfase na formação inicial e abrange vários domínios, nomeadamente o conhecimento do currículo, o conhecimento da Matemática, o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento do ensino em sala de aula (Ponte & Oliveira, 2002). Os formandos devem desenvolver o seu conhecimento sobre os alunos e como estes aprendem um determinado tema matemático, sendo capazes de reconhecer e valorizar os processos de raciocínio e dificuldades que os alunos podem manifestar. Esta vertente do conhecimento do professor envolve para além de aspetos sobre o desenvolvimento global dos alunos, um conjunto de destrezas como interpretar as estratégias dos alunos, aquilo

que compreendem a partir da sua atividade matemática e com base nessa informação decidir modos de atuação (Jacobs et al., 2010).

Metodologia

O presente estudo segue um paradigma interpretativo numa abordagem qualitativa e integra uma investigação mais alargada sobre a formação inicial de futuros professores no âmbito dos números racionais. Os participantes são cinco formandos (P1, P8, P10, P13, P23) do mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclos do ensino básico. O estudo assume uma modalidade de estudo de caso exploratório e os dados aqui apresentados são recolhidos por entrevista, após a experiência de prática pedagógica nos dois ciclos de ensino.

O poster foca a análise de estratégias de resolução de alunos a uma tarefa que envolve a representação pictórica e números racionais (Figura 1).

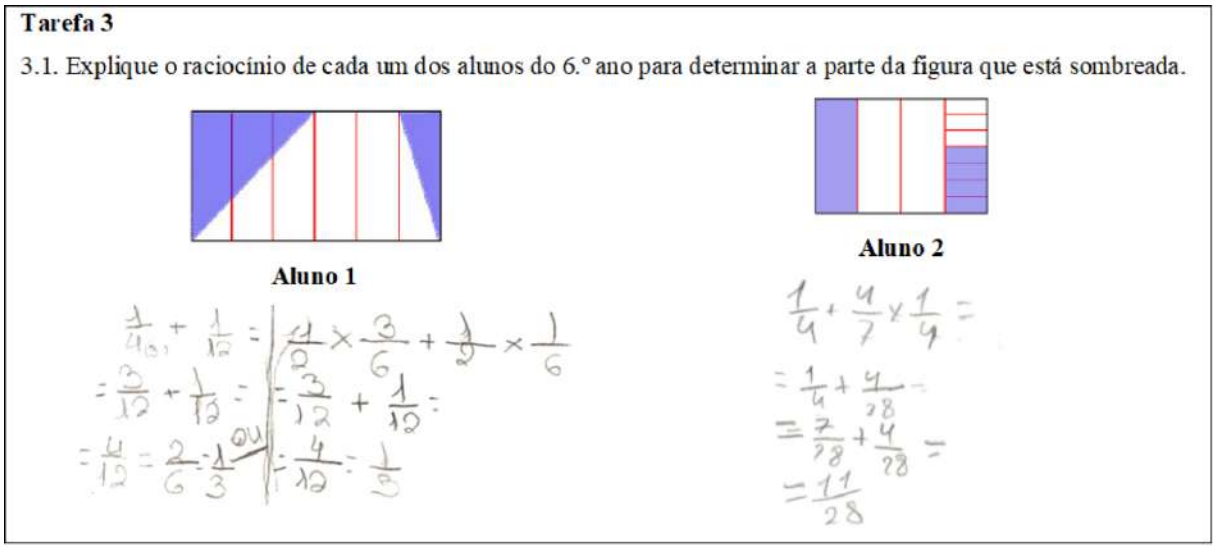


Figura 1. Tarefa 3.1 da entrevista.

Resultados

Três (P1, P8 e P13) dos cinco formandos analisam sem dificuldade os raciocínios subjacentes às expressões numéricas dos alunos 1 e 2, relacionando-as com as respetivas imagens. Para o aluno 1, P10 e P23 não são capazes inicialmente de atribuir significado às expressões numéricas, não conseguindo fazer corresponder as frações escritas às regiões sombreadas. P23 tem dificuldade em fazer corresponder na figura as frações "um quarto" e "um doze avos", uma vez que durante a entrevista não visualiza a divisão da unidade que estas sugerem. Após alguma análise é bem-sucedido. Por sua vez, P10 reorganiza as regiões sombreadas de modo diferente. Apesar disso, pela sua estratégia obtém o mesmo valor do

aluno. Esta sua dificuldade pode comprometer o desenvolvimento do seu conhecimento didático, em particular a sua capacidade de promover a compreensão dos alunos.

Na análise da segunda resposta do aluno 1, P10 não é capaz de a compreender e P23 é capaz apenas após discussão com a investigadora. P23 compreende a representação pictórica dos produtos envolvidos, mas não é capaz de fazer essa correspondência na imagem pois tem dificuldade em identificar a fração "três sextos".

Na resolução do aluno 2, três dos cinco formandos são capazes de interpretar o raciocínio do aluno e os restantes dois (P10 e P23) mostram algumas dificuldades. P10 evidencia uma compreensão errada da expressão numérica face à representação pictórica no que respeita ao produto. No produto "quatro sétimos por um quarto" tenta identificar, isoladamente na figura, os seus fatores, não sendo capaz de explicar o seu significado. P10 reconhece que este tipo de questão é muito difícil por estar perante a representação da multiplicação. Estas dificuldades refletem fragilidades no conhecimento matemático e em aspetos essenciais para a aprendizagem dos alunos dos números racionais como sendo o estabelecimento de relações entre representações.

Conclusão

Os resultados mostram que a maioria dos formandos são capazes de identificar o raciocínio de alunos em tarefas que envolvem a representação pictórica de números racionais. Conseguem interpretar resoluções de alunos com operações de números racionais e representações pictóricas que as representam. Estas situações fomentam a mobilização de conhecimentos matemáticos, bem como promovem o conhecimento didático uma vez que os formandos não pensam sobre as suas resoluções, mas antes tentam validar ou atribuir significado às estratégias dos alunos, analisando os seus raciocínios e lidando com aspetos essenciais para a promoção da aprendizagem dos números racionais como sendo as relações entre diferentes representações. Contudo, nem todos o conseguem, o que reforça a importância de contemplar na formação inicial a análise de resoluções de alunos, identificando estratégias ou erros relativos aos números racionais, particularmente com operações com frações.

Referências

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, 169-202.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-107.

Ponte, J.P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 145-163.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., & Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of mathematics teacher education*, *4*(3), 205-225.

IMPLICAÇÕES DA UTILIZAÇÃO DE SIMULAÇÕES E PROTÓTIPOS NUM PROBLEMA DE MODELAÇÃO: UMA ABORDAGEM DE STEM

Ana Margarida Baioa, Susana Carreira

[1]*Agrupamento de Escolas D. Manuel I – Tavira e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, ambaioa@gmail.com*

[2]*Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt*

Resumo. *Este artigo tem o propósito de explorar e discutir o uso de simulações com modelos físicos e construção de protótipos na atividade de modelação matemática num contexto de ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM). Este estudo visa perceber o papel da simulação e do protótipo na atividade dos alunos. O estudo baseia-se numa experiência de ensino, em duas turmas de 9º ano. A metodologia é suportada pela investigação baseada em Design. Os resultados mostram que os alunos se deparam com obstáculos genuínos que nem sempre surgem noutro tipo de problemas e recorrem aos seus próprios conhecimentos e conceitos intuitivos para alcançar formas de estabelecer a relação entre a matemática e a realidade. A integração da simulação e da construção de protótipos, num contexto STEM, apresenta-se como um fator importante para a atribuição de sentido e também para a concretização das diversas fases do ciclo de modelação matemática.*

Abstract. *This paper aims to explore and discuss the use of simulations with physical models and prototype construction in the mathematical modelling activity in a context of science, technology, engineering and mathematics (STEM). This study aims to understand the role of simulation and prototype in student activity and integrates a teaching experience in two 9th grade classes. A design-based research was adopted as the methodological approach. The results show that students faced genuine obstacles that do not always arise in other types of problems and use their own intuitive knowledge and concepts to find ways to establish a relationship between mathematics and reality. The integration of simulation and prototype construction, in a STEM context, is an important factor for students assigning meaning to the various phases of the mathematical modelling cycle and also for accomplishing them.*

Palavras-chave*: modelação matemática; simulações; STEM; ciclo de modelação; tarefas geradoras de modelos em engenharia.*

Introdução

Na última década, tem vindo a tornar-se cada vez mais presente uma perspetiva de ensino que se afirma pela ênfase na integração e conexão entre saberes, métodos e conceitos de diversas disciplinas sendo hoje mais conhecida por Educação em STEM (acrónimo de Science, Technology, Engineering, and Mathematics). A Educação em STEM pode ser integrada em várias modalidades, como por exemplo a combinação integrada de duas ou mais áreas de conhecimento–Educação iSTEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática integradas).

A Educação iSTEM representa um esforço para combinar as quatro áreas do conhecimento, ainda que não tenham que estar obrigatoriamente presentes ao mesmo tempo (Moore, 2008; Zawojewski, 2010; Michelsen, 2006), assentando nas relações que se podem gerar entre conteúdos e problemas da vida real, Estudos neste campo de investigação, envolvem um ensino de carácter experimental com recurso a simulações, destacando-se o facto de se colocar em prática o processo científico de investigação ou o processo de desenho da engenharia (Stolhmann, Moore, & Roehring, 2012). E ainda, estudos em que as atividades desenvolvidas combinam a engenharia e a matemática e onde o ciclo de modelação matemática é utilizado como o referencial de orientação do trabalho a desenvolver pelos alunos (Mousoulides & English, 2011; Gallegos, 2018).

Neste artigo, damos especial atenção à combinação entre tecnologia, engenharia e matemática, em tarefas geradoras de modelos onde são utilizados modelos físicos de uma situação real; este contexto propõe, especificamente, a resolução de problemas da realidade que envolvem a simulação da situação e a modelação matemática de uma parte da realidade em estudo na criação de um protótipo.

Assim, foram formuladas duas questões de investigação:

1. Qual o papel da simulação na atividade de modelação matemática dos alunos na resolução de problemas em contexto iSTEM?
2. Qual o papel do protótipo na atividade de modelação matemática dos alunos na resolução de problemas em contexto iSTEM?

Tarefas geradoras de modelos que envolvem engenharia (EngMEAs)

Uma tarefa geradora de modelos em situações de engenharia (EngMEA) é formulada a partir de um problema do mundo real orientado para a procura de resposta à solicitação de um cliente com base nas perspetivas contextualizadas de modelos e modelação. (Models and Modelling Perspectives–M&M) (Lesh & Doerr, 2003; Diefes-Dux, Hjalmarson, Miller, & Lesh, 2008). A realização da tarefa requer, normalmente, um ou mais conceitos matemáticos bem como conceitos e processos relacionados com a engenharia, os quais não são explícitos no problema (Mousoulides & English, 2011). O facto de existir um cliente ao qual se deverá fornecer uma resposta ou resultado parece ser um elemento relevante neste tipo de tarefas, contribuindo para a credibilidade do problema para o aluno, sendo que a solução encontrada tem um presumível destinatário (Carreira & Baioa, 2017).

Nesta perspetiva, aquando da resolução da tarefa, os alunos devem utilizar o seu conhecimento para formularem um modelo matemático que possa ser utilizado pelo cliente (Diefe-Dux et al., 2008). Assim, podem ser elencados seis princípios que são considerados como essenciais no desenvolvimento de uma MEA e, por analogia, de uma EngMEA (Tabela 1).

Tabela 1. Princípios para o desenvolvimento de uma tarefa geradora de modelos com engenharia (adaptado de Diefes-Dux et al., 2008)

Princípio	Descrição
Construção do modelo	Requer a construção de uma explicação, descrição ou procedimento para uma abordagem matemática significativa
Generalização	Também conhecido como modelo reutilizável requer a produção de soluções que sejam compartilhadas com outras situações de engenharia parecidas ou do mesmo tipo
Documentação do modelo	Os alunos devem documentar a sua atividade e a sua forma de pensar, de forma explícita, sob a forma de um relatório ou outro.
Realidade	O contexto e a forma da tarefa devem ser credíveis de forma a promover uma interpretação significativa pelos alunos, de acordo com os seus níveis de conhecimento matemático e conhecimento geral.
Auto-avaliação	A tarefa deve conter critérios que os alunos possam ter em consideração aquando da testagem e revisão do modelo encontrado
Protótipo Efetivo	O modelo matemático produzido deve ser tão simples quanto possível, mas apesar de tudo matematicamente significativo para o propósito do problema. Além do modelo matemático, pode ser produzido um protótipo físico que servirá como resultado real e como resposta a um cliente.

A relação entre simulação e protótipo

Pollak (2003) defende que o grande problema relacionado com o uso de modelos e modelação matemática, na sala de aula, está na necessidade de perceber como conectar a matemática com o resto do mundo. Deste modo, uma forma de tentar ultrapassar esse obstáculo poderá passar pela utilização de simulações, uma vez que a simulação está intimamente ligada à capacidade de experimentar, prever, testar, resolver problemas, imaginar soluções alternativas, tornando a situação real, visível e tangível através da sua representação por meio de modelos físicos (Landriscina, 2013).

Os modelos físicos funcionam como veículos para o desenvolvimento da simulação, pois são objetos e mecanismos que podem ser usados de forma a criar conhecimento, no sentido em que materializam teorias, ideias e conceitos (Knuutila, 2005).

Um modelo físico, ao ser utilizado durante uma simulação, suporta a exploração e manipulação da situação até à criação de um modelo final que se poderá chamar de

protótipo. A palavra protótipo pode significar o primeiro exemplar de um modelo em desenvolvimento, que serve de teste antes do fabrico em série, ou ainda, uma versão preliminar de um programa de computador, que será posteriormente testado e aperfeiçoado. A ideia de protótipo está na base do processo de desenho de engenharia onde as simulações e a modelação matemática estão abundantemente presentes.

Modelação matemática e o processo de desenho de engenharia

Na perspetiva de Birta e Arbez (2007), se o objetivo do projeto for a criação de um protótipo, são seis as etapas que sobressaem no processo (Fig.1): (1) A descrição do problema/projeto; (2) A construção de um modelo conceptual do sistema; (3) Simulação com modelos físicos; (4) A criação de um protótipo e de um modelo matemático associado; (5) Validação do protótipo através da credibilidade e estabilidade e (6) Obtenção de um produto final.

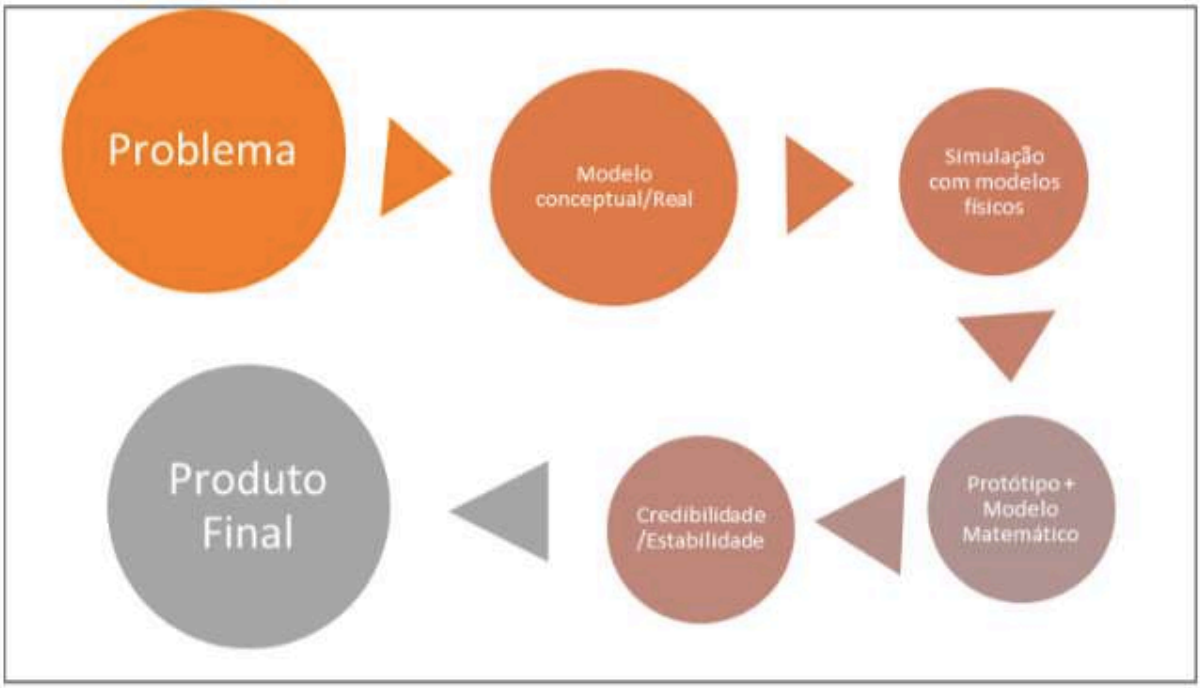


Figura 1. Esquema do processo de modelação matemática com recurso a simulações com modelos físicos (adaptado de Birta & Arbez, 2007)

O esquema anterior remete-nos para a ideia de um ciclo que se repete até à obtenção de um resultado satisfatório. Algo de muito semelhante é tipicamente encontrado na descrição do ciclo de modelação matemática. Neste, são geralmente destacadas as seguintes fases de atividade (figura 2): (1) Compreensão do problema; (2) Simplificação da

situação original; (3) Matematização; (4) Trabalho no domínio matemático; (5) Interpretação do resultado obtido; (6) Validação e (7) Apresentação de resultados.

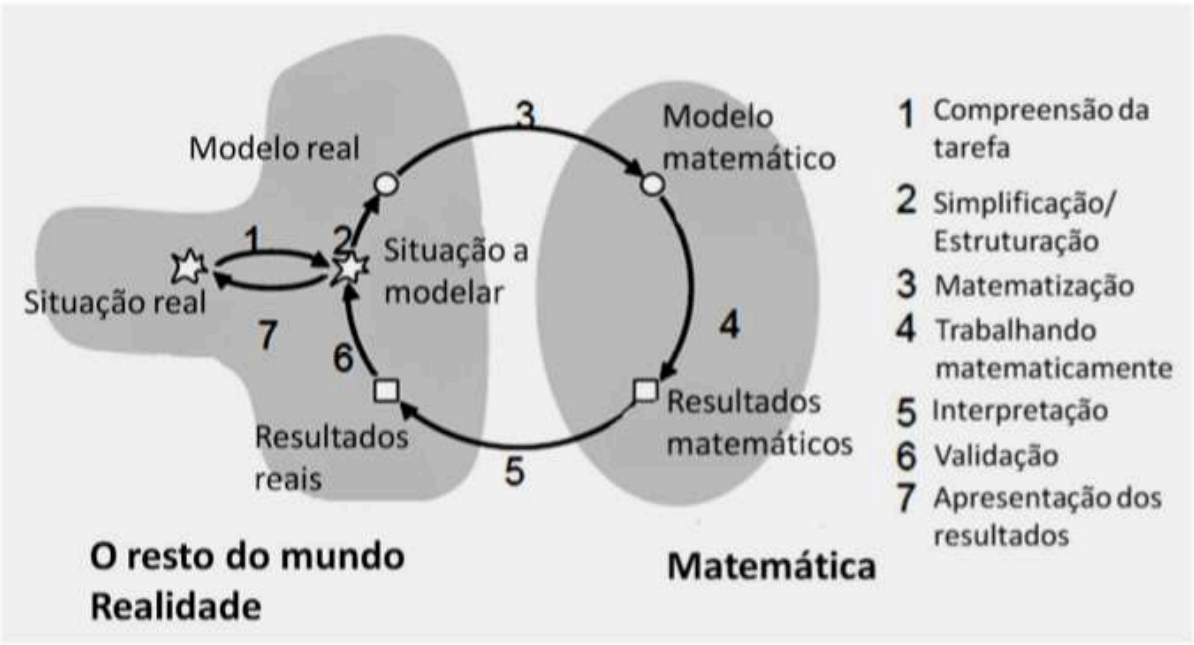


Figura 2. Ciclo de modelação matemática de Blum/Leiss (2005)

São evidentes as semelhanças e os pontos em comum entre estas duas formas de conceptualizar processos que envolvem a realidade e a procura de uma solução para determinado problema. Assim, parece razoável admitir que ambas as descrições se podem compatibilizar e mesmo aglutinar como se sugere nas seguintes fases de atividade:

(1') Compreensão do problema

(2') Identificação das variáveis relevantes na situação a modelar

(3') Desenvolvimento de um modelo conceptual

(4') Recolha de dados através da simulação e formas de matematização

(5') Produção de um protótipo e de um modelo matemático associado

(6') Validação do modelo e do protótipo através da estabilidade e credibilidade

(7') Apresentação do produto final e do modelo matemático final

Tomando este tipo de processos como ideia norteadora, admitimos que no contexto escolar também existe a possibilidade de criar e propor tarefas focadas na busca de soluções/construção de protótipos que lançam os alunos na resolução de problemas que combinam várias disciplinas. Onde a utilização de dados reais obtidos a partir da exploração de modelos físicos e a necessidade de interligação entre conhecimentos e de várias áreas de conhecimento torna-se, além de tudo, visível e materializada na resolução

do problema. As tarefas que envolvem simulação com modelos físicos são, por isso, uma oportunidade de aproximação dos alunos e da aprendizagem escolar à atividade real dos cientistas, dos engenheiros e dos investigadores em ciências, engenharia e matemática.

Metodologia

A metodologia de implementação das tarefas e o seu processo de desenvolvimento foi adotada num estudo mais alargado, no contexto da tese de doutoramento da primeira autora.

Nesse estudo foram utilizados modelos físicos na forma de estruturas (ou engenhos) em tarefas que envolveram a resolução de problemas reais, inspirados no cenário hipotético de por exemplo, uma solicitação de um cliente. Todas as tarefas envolveram algum tipo de simulação, com recurso a diversos materiais, numa lógica de experiência prática. As situações reais consideradas foram escolhidas de modo a envolverem ideias e conceitos de matemática, de engenharia e de outras ciências. De acordo com estudos que partilham elementos similares foi adotada uma investigação baseada em *design* (Cobb, 2000; Kelly, Baek, Lesh, & Bannan-Ritland, 2008). O estudo alargado contemplou dois ciclos de implementação: um primeiro ciclo realizado em 2015-2016, em três turmas do 7.º ano de escolaridade e um segundo ciclo, em 2016-2017, com cinco intervenções em sala de aula, em cada uma das duas turmas do 9.º ano de escolaridade durante o 2.º e o 3.º período. A professora é também a investigadora e as turmas em estudo foram as turmas atribuídas em cada ano letivo à professora (primeira autora).

As duas turmas, compreendem no total 46 alunos, com idades entre 13 e 15 anos.

Os alunos organizaram-se em grupos de trabalho de 4 ou 5 elementos, receberam conjuntos iguais de materiais para o desenvolvimento de simulações. Os dados empíricos selecionados para este artigo, centram-se apenas num dos grupos de trabalho, pois foi um grupo onde os dados foram mais relevantes para dar resposta às questões de investigação colocadas. Os dados foram recolhidos através de captação de vídeo e áudio dos grupos de trabalho e dos documentos escritos produzidos pelos alunos. Cada tarefa de modelação foi desenhada segundo uma estrutura que envolve quatro partes:

1. Introdução da tarefa;
2. Trabalho prático com os modelos físicos, envolvendo recolha de dados;
3. Representação, análise dos dados recolhidos e construção de um protótipo;
4. Elaboração de um relatório escrito e, partilha e discussão dos produtos obtidos.

A tarefa, em foco neste texto, remete para a criação de uma base de dados biométricos e para o desenvolvimento de um sistema de reconhecimento através da geometria da mão, foi introduzida numa fase onde os alunos podiam conjugar conhecimentos sobre medidas, áreas, proporções, valores médios e extremos, equações literais e intervalos. Os alunos tinham à sua disposição um conjunto de imagens em papel das suas próprias mãos (fotocópias) e o objetivo a atingir era o de responder à necessidade de criar um sistema de reconhecimento que validasse os dados biométricos dos elementos do grupo e rejeitasse os de uma pessoa que não pertencesse ao grupo. Para o teste e validação do respetivo protótipo, foi entregue uma nova fotocópia de uma mão, não identificada.

As categorias de análise dos dados obtidos com a implementação desta tarefa referem-se ao propósito geral de perceber como a simulação e a construção de um protótipo interferem na atividade de modelação matemática dos alunos. Assim, as categorias são definidas em termos das fases de atividade desse ciclo em contexto iSTEM, tal como foi descrito do ponto de vista teórico (Tabela 2):

Tabela 2. Categorias de análise dos dados da observação dos grupos

Categorias	**Caráter de EngMEA**		**Fases do ciclo de modelação**
Categoria 1 **(compreensão)**	Realização de Simulação Construção de Protótipo	→	Compreensão do problema e do objetivo a alcançar
Categoria 2 **(exploração)**		→	Identificação das variáveis relevantes na situação
Categoria 3 **(representação)**		→	Desenvolvimento de um modelo conceptual
Categoria 4 **(experimentação)**		→	Recolha de dados e formas de matematização da situação
Categoria 5 **(construção)**		→	Desenvolvimento de um protótipo e modelo matemático associado
Categoria 6 **(validação)**		→	Validação do modelo e do protótipo
Categoria 7 **(comunicação)**		→	Produto final e modelo matemático

Resultados da análise da atividade dos alunos

A análise será realizada tendo em conta a articulação dos dados com o quadro teórico, tendo em mente as questões de investigação e focando os aspetos mais importantes da atividade.

Compreensão

No início da aula foi apresentado aos alunos um vídeo sobre sistemas de segurança que utilizam dados biométricos para reconhecimento de indivíduos. Em seguida, os alunos leram o texto da tarefa e a professora esclareceu dúvidas, com vista a clarificar o objetivo da tarefa.

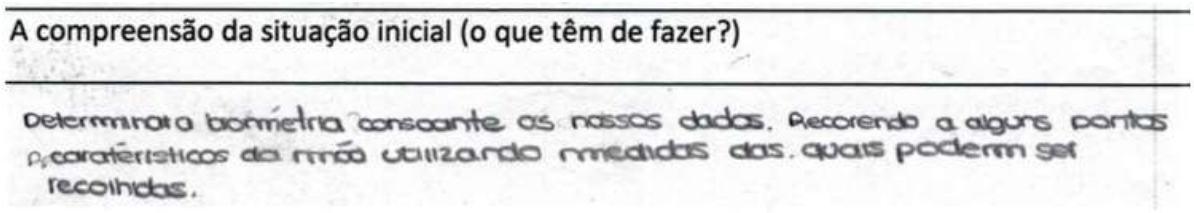
Todos os alunos afirmaram ter compreendido o contexto do problema e o objetivo a alcançar e começaram a explorar os materiais distribuídos.

Professora: Têm alguma dúvida em relação ao que têm que fazer?

Alunos: Não, professora.

Professora: Então, mãos à obra!

A figura 3 ilustra que o grupo revela que entende ser necessário proceder à recolha de dados biométricos das respetivas mãos e que isso implica identificar pontos específicos na palma da mão.


A compreensão da situação inicial (o que têm de fazer?)

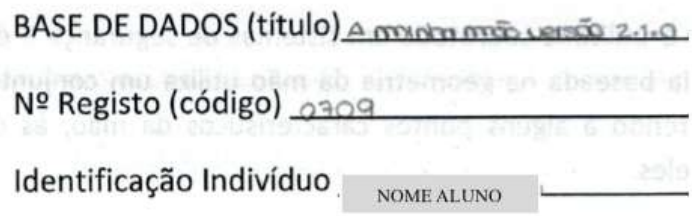
Determinar a biometria consoante os nossos dados. Recorendo a alguns pontos característicos da mão utilizando medidas das quais poderm ser recolhidas.

Figura 3. Extrato do relatório

Em relação a esta fase, podemos dizer que a compreensão do problema e o objetivo a alcançar foi conseguida. Os alunos não demonstraram, assim, dificuldades relevantes na compreensão da tarefa.

Exploração

No desenvolvimento do trabalho, o grupo começou por dar um nome à sua base de dados biométricos e um número de registo a cada elemento (Figura 4) numa ficha individual de registos biométricos.


BASE DE DADOS (título) A minha mão versão 2.1.0

Nº Registo (código) 0309

Identificação Indivíduo NOME ALUNO

Figura 4. Cabeçalho da ficha biométrica de um elemento do grupo

Decidiram, posteriormente, que os comprimentos dos dedos e as larguras das falanges seriam as medidas que iriam utilizar para a criação de um protótipo de reconhecimento biométrico através da palma da mão.

Representação e experimentação

Os alunos recolheram os dados da imagem a 100% da sua própria mão (Figura 5), medindo com uma régua, e registaram os valores obtidos num esquema de uma mão representado em papel (Figura 6), relacionando deste modo, de forma intuitiva, dados numéricos e conceitos básicos da anatomia da mão.

Figura 5. Recolha de dados biométricos

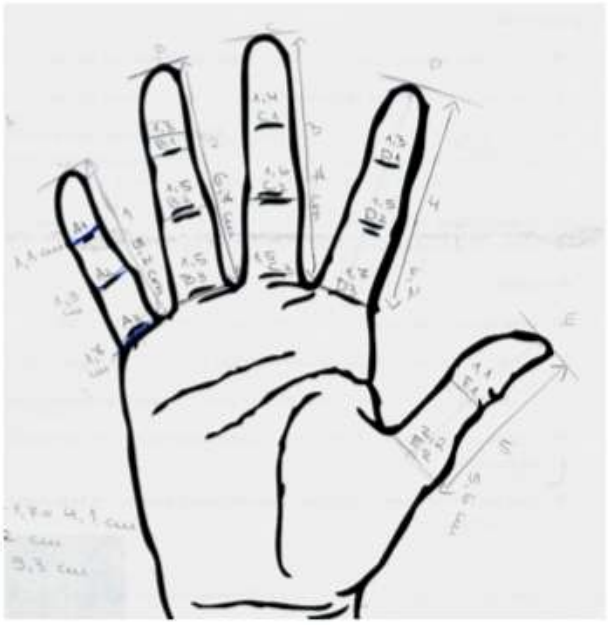


Figura 6. Registo dos dados

Em seguida, os alunos registaram e organizaram os dados obtidos numa tabela, tendo em vista a procura de um modelo matemático concreto. Estas duas ações realizaram-se praticamente em simultâneo. Os vários conceitos envolvidos, tais como, diferenciação dos dedos, comprimento e largura do dedo em vários segmentos, distinção das falanges, medidas de comprimento e sua relação com a configuração da mão, começaram a surgir de forma variável, sem uma regularidade aparente. Os dados foram facilmente obtidos e registados (Figuras 7 e 8).

Figura 7. Registo de dados de cada indivíduo

		Dedo 1		Dedo 2		Dedo 3		Dedo 4		Dedo 5	
Nº	NOME	L	C	L	C	L	C	L	C	L	C
0009	Aluno	1,5	6,4	1,7	7,7	1,9	8,2	1,9	7,1	2	6,5
0806	Aluno	1,5	6,0	1,7	7,5	2	7,9	1,8	6,7	1,7	6,3
2575	Aluno	1,5	6,2	1,8	7,6	2	8,2	1,2	7,2	1,9	6,5

Figura 8. Tabela com os dados biométricos de um grupo

Construção

A fase de construção de um modelo matemático que permitisse comparar dados externos com o padrão de identificação constituiu a parte mais morosa da atividade e aquela em que os alunos revelaram mais dificuldades.

Primeiro, foi alvo de bastante discussão a escolha de um método com o qual se poderiam comparar os dados; depois foi igualmente exigente a generalização de uma regra que tivesse por base a forma de construção da sua base de dados não emergindo imediatamente hipóteses de soluções. Os alunos não encontraram facilmente formas de comparar matematicamente a aproximação ou afastamento entre dados numéricos. A professora teve, assim, um papel facilitador mais ativo, nesta fase, dando pistas por meio de exemplos mais simples, para que os alunos conseguissem avançar na obtenção de um modelo matemático ajustado aos critérios biométricos de identificação que haviam formulado (Figura 9). Um dos pormenores salientados pela professora foi o facto de uma mão não ser sempre igual, pois crescia, engordava e emagrecia, o que provocou mais uma dificuldade aos alunos.

Professora: Explica-me como se pode arranjar, ou não, um desvio para aceitar ou rejeitar um indivíduo. Qual é a forma de medir o desvio? Ou, então, se não querem nenhum desvio...

Aluna: Mas é que... Se... Se não aceitarmos tolerância nenhuma, então vamos ter o risco da mão certa sair dos valores que temos... Mas se aceitarmos tolerância, pode ser qualquer pessoa... Por isso, não sei... Não é bem isso, ser de qualquer pessoa, mas dentro dessa tolerância podem estar três ou quatro mãos.

Muitas das dificuldades giraram em torno da ideia de fiabilidade de um processo para comparação entre dados obtidos experimentalmente e dados teóricos (de uma mão

indeterminada). O facto de os alunos estarem a simular um processo de captura de dados biométricos, usando reproduções fotográficas das suas próprias mãos, e de se aperceberem de muitos detalhes e variações dessa parte do corpo humano, levou-os a refletir longamente sobre o modo de integrar esse conhecimento num sistema de reconhecimento realizado por uma máquina, que tem como objetivo aceitar ou rejeitar dados biométricos.

Figura 9. Alunos comparando as suas mãos em torno da questão da variabilidade

Ao fim de um período intenso de discussão, os grupos foram assumindo a ideia de que não era razoável aceitar apenas indivíduos cujos dados biométricos correspondessem exatamente aos dados empíricos. A forma de superarem essa noção (de correspondência total) foi a de considerarem uma correspondência parcial, o que conduziu àquilo a que alguns alunos designaram como “uma margem de erro” a aceitar na comparação entre os dados cadastrados e os dados teóricos (de um indivíduo desconhecido).

Assim, o modelo matemático que esteve na base de um protótipo de um sistema de reconhecimento biométrico foi baseado na ideia de margem de erro admissível. Por exemplo, na figura 10, o grupo definiu 2 variáveis para cada um dos dedos, num total de 10 medidas e assumiu que a aceitação de um indivíduo seria verificada no caso em que a diferença registada, para qualquer das variáveis, fosse inferior a 0.2 cm. Caso contrário, o sistema rejeitaria o indivíduo como não reconhecido. O valor de 0,2 cm foi escolhido através do espalmar da mão. Os alunos acharam que o facto de espalmarem a mão contra a mesa e observar o que a mão alargava lhes dava uma indicação da dilatação da mão caso esta engordasse.

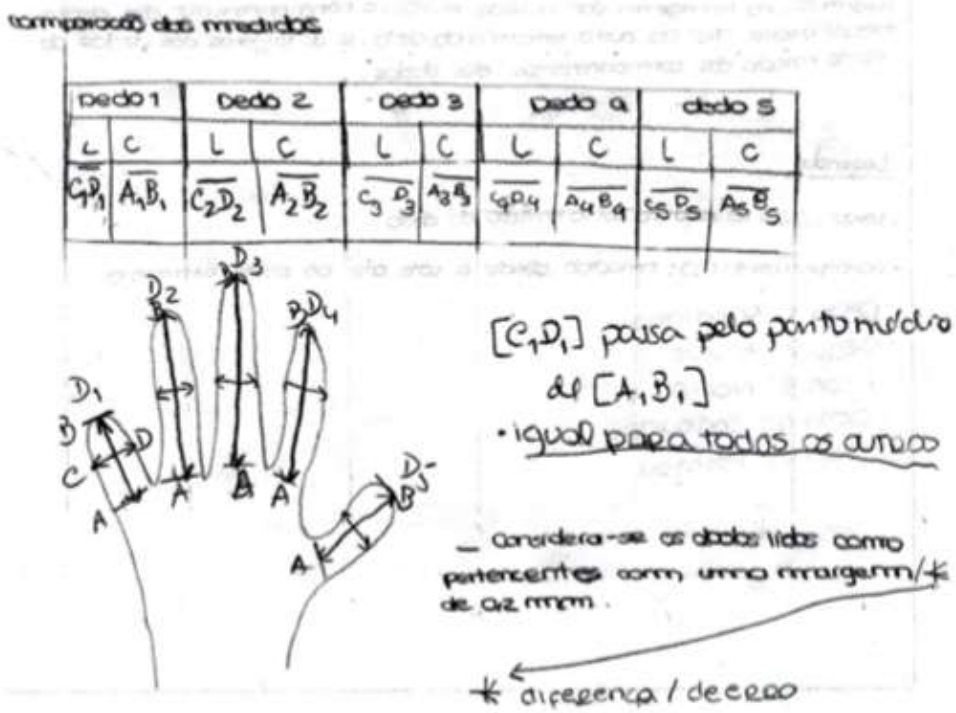


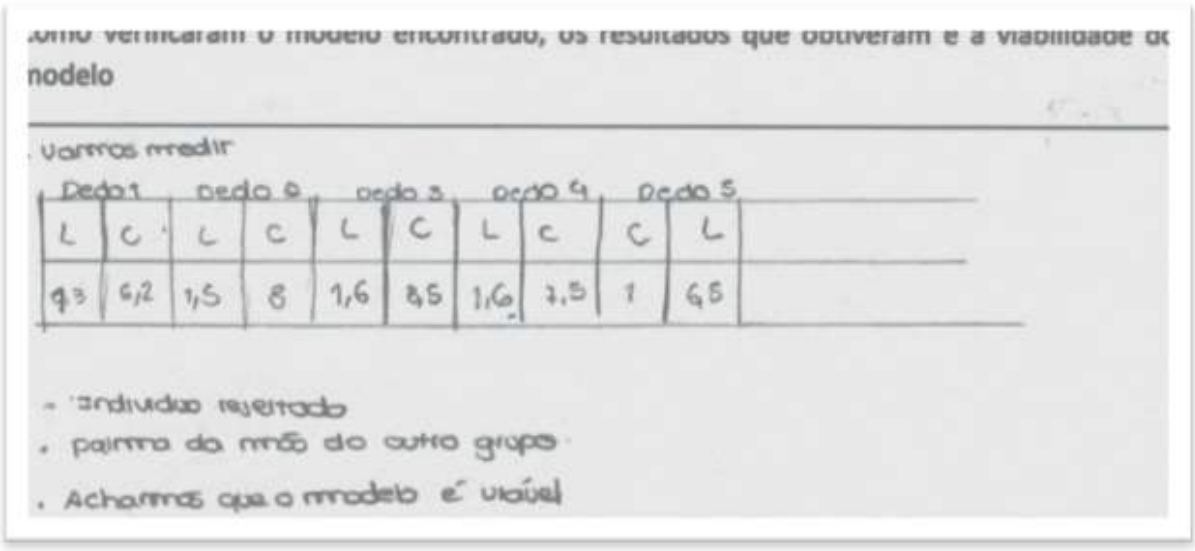
Figura 10. Modelo matemático de base do protótipo

Validação

Para a validação do protótipo que foi concebido pelo grupo, foi distribuída aleatoriamente outra imagem (fotocópia) de uma mão não identificada. Os alunos recolheram então os dados necessários, de acordo com o seu modelo de captura de dados biométricos, para depois verificarem se a mão "lida" ou "padronizada" pelo programa de reconhecimento pertencia ao grupo ou não. Para essa decisão de aceitação/rejeição, usaram os critérios de comparação entre os novos valores capturados e os valores constantes do cadastro do grupo.

Após a aplicação do modelo de comparação que criaram, a mão em teste foi rejeitada, pois não encaixava nos dados da base de dados, mesmo tendo em conta a tolerância de erro de valores, viabilizando o modelo encontrado como válido para a implementação do sistema de reconhecimento biométrico (Figura 11).

Professora:	Então a mão foi rejeitada ou aceite?
Aluno B:	Foi rejeitada.
Professora:	Porquê?
Aluno B:	Porque ao compararmos os resultados finais, mesmo com a tolerância, não batem certo com a nossa base de dados.


nodelo

Vamos medir

Dedo 1		Dedo 2		Dedo 3		Dedo 4		Dedo 5	
L	C	L	C	L	C	L	C	C	L
9,3	6,2	1,5	8	1,6	8,5	1,6	7,5	1	6,5

- Individuo rejeitado
- palma da mão do outro grupo
- Achamos que o modelo é viável

Figura 11. Extrato de relatório

É possível perceber que os alunos utilizam o modelo matemático que construíram para encontrar os resultados finais para comparação com a base de dados elaborada. E que têm conta a utilização do valor da tolerância de erro no caso da mão ter tido alguma alteração de largura e comprimento.

Comunicação

O grupo elaborou um relatório onde descreveu os passos realizados e apresentou os dados recolhidos, o modelo matemático considerado para a comparação de dados e a forma de validação do mesmo. O relato foi muito pouco pormenorizado e os alunos revelaram uma nítida dificuldade em descrever o processo de desenvolvimento das suas ideias, ao longo da tarefa. O relatório mostrou-se, em geral, muito sucinto, apresentando de forma reduzida os pontos essenciais do trabalho.

Discussão e conclusão

As questões de investigação referem-se à influência que a simulação e a construção de um protótipo exercem na atividade de modelação matemática dos alunos na resolução de problemas reais, em contexto iSTEM.

A construção de sistemas de reconhecimento biométrico é atualmente um campo de intensa atividade e investigação na área de engenharia de sistemas. Os peritos dedicam muita da sua atenção ao desenvolvimento de algoritmos, não apenas destinados a encontrar formas fiáveis de captura de dados, mas também a obter modelos que sejam eficientes e precisos na comparação, nomeadamente para evitar os chamados falsos

positivos. É interessante notar que muitos dos alunos manifestaram essa preocupação de obter um modelo que não gerasse falsos positivos, revelando a compreensão de que o controlo a realizar pelo modelo de comparação teria de ser "justo" o suficiente para não permitir que "qualquer mão fosse aceite".

Observando a atividade produzida pelos alunos, os dados mostram que a integração entre várias áreas do conhecimento promove oportunidades de aprendizagem mais relevantes, menos fragmentadas e mais estimulantes para os alunos (Furner & Kumar, 2007). Reconhece-se, além disso, que a construção de ideias e conceitos é parte de uma atividade claramente centrada no aluno e põe em ação a sua capacidade de resolução de problemas (Stohlmann, Moore, & Roehring, 2012). Neste caso, foi evidente uma grande interligação, no decurso da atividade, entre questões e conceitos que envolvem matemática, biologia do corpo humano e engenharia.

O trabalho com modelos físicos, como foi o caso da utilização das imagens reais das palmas das mãos dos alunos, parece ser um elemento facilitador para o reconhecimento da importância da recolha de dados reais (construção de um cadastro de medidas por grupo) e para o desenvolvimento de um modelo conceptual da situação a explorar. A identificação de um conjunto de variáveis a considerar foi, desde o início da atividade, uma fonte importante de exploração da situação. No processo de desenvolvimento do modelo matemático, que funcionaria como suporte à construção do protótipo de um sistema de reconhecimento, os alunos revelaram maior dificuldade, não sendo esta relacionada com a compreensão do objetivo do modelo (fornecer um output de aceitação ou rejeição) mas sim com a idealização de um método matemático de controlo de diferenças obtidas por comparação. Esta noção, que é crítica e central no desenho de um sistema informático de reconhecimento biométrico, está longe de ser trivial e é, pelo contrário, um desafio complexo. É interessante notar, que os alunos chegaram a uma forma de pensar ligada à ideia de "margem de tolerância" que é pertinente para a resolução do problema real, independentemente da sofisticação do modelo matemático encontrado. As ideias de variabilidade e de erro ou desvio constituíram os pontos fulcrais da sua abordagem matemática para a construção de um protótipo de reconhecimento.

O facto de serem colocados na situação de obtenção de um protótipo, isto é, de imaginarem um sistema de captura de dados e um modelo que permitisse aceitar ou rejeitar dados novos por comparação, ajudou os alunos a entenderem que o seu modelo teria de ser fiável, isto é, teria de ser testado com uma nova simulação. Isto deu um

significado acrescido ao processo de nova recolha de dados provenientes de uma mão desconhecida, de modo coerente com as variáveis que definiram previamente para a captura de dados. Portanto, a ideia de construção de um protótipo, como algo cujos desenho e/ou funcionamento precisam de serem ajustados e validados a partir de simulações, revelou-se fundamental para salientar a necessidade e pertinência da validação do modelo construído.

No geral, podemos concluir, provisoriamente, que o uso de modelos físicos e de simulações em tarefas de caráter experimental, que envolvem a construção de um protótipo, promovem a atividade de modelação matemática em condições que revelam um evidente paralelismo com contextos autênticos de procura de soluções para problemas reais. Em particular, os alunos deparam-se com obstáculos genuínos que nem sempre surgem noutro tipo de problemas e recorrem aos seus próprios conhecimentos e conceitos intuitivos para alcançar formas de estabelecer a relação entre a matemática e a realidade. Assim, a integração da simulação e da construção de protótipos, num contexto iSTEM, apresenta-se como um fator importante para a atribuição de sentido e também para a concretização da atividade das diversas fases do ciclo de modelação matemática, de tal modo que se estas se tornam internamente coerentes e não somente convencionais. É de notar que estas conclusões recaem sobre os resultados, algo provisórios, pois os dados carecem de desenvolvimento e conjugação de um estudo que ainda está em curso.

Anexo 1

Biometria da mão

Como viste no vídeo, a geometria da mão é utilizada sobretudo em sistemas de segurança e é dos mais utilizados mundialmente. A **biometria** baseada na geometria da mão utiliza um conjunto de medidas que podem ser extraídas, recorrendo a alguns pontos característicos da mão, às cinco pontas dos dedos e aos quatro vales entre eles.

Assim, o teu grupo vai criar uma base de dados e um sistema de reconhecimento, utilizando a geometria da mão para se poder aplicar, eventualmente, na escola, por exemplo para o acesso ao refeitório ou a alguma sala específica.

Da experiência…

- Têm à vossa disposição um conjunto de imagens (fotocópias) de palmas das mãos
- Decidam as medidas que devem recolher a partir das fotocópias das mãos.
- Criem uma base de dados com as medidas das mãos (Sugestão: Cada elemento do grupo tiras as medidas da fotocópia da sua mão direita. Outro colega de grupo mede novamente a fotocópia da mão direita. Não trocar as fotocópias das mãos!)
- Podem utilizar uma folha de registo para cada mão, como a dada. Podem usar compassos, réguas ou esquadros para efetuar as necessárias medições.

… Ao modelo

- Desenvolvam uma regra em termos matemáticos, de forma que possam:
  - aceitar um exemplar desconhecido que esteja inserido na vossa base de dados; ou
  - rejeitar um exemplar desconhecido que não apareça na base de dados.
- Testem uma mão retirada ao acaso da turma e uma mão retirada ao acaso do grupo[1].
- Para cada "mão" usem a regra que desenvolveram e determinem se pertence ou não à vossa base de dados.

Tópicos para a elaboração do relatório:

- A compreensão da situação inicial
- Hipóteses de medidas a usar, explicando as vossas opções
- As experiências realizadas e os dados recolhidos
- O modelo matemático usado para teste
- A verificação do modelo encontrado e os resultados que obtiveram
- Dificuldades sentidas ao longo da atividade
- Avaliação da proposta de trabalho em relação à motivação,

Imagem retirada de:

http://bip.inesctec.pt/113/noticia07.html

Referências bibliográficas

Birta, L. G., & Arbez, G. (2007). Modelling and simulation–exploring dynamic system behaviour. Londres: Springer.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). "Filling Up"–the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosh (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME. [retrieved from http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG13.pdf].

Carreira, S., & Baioa, A. M. (2017). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. *ZDM-Mathematics Education*. doi.org/10.1007/ s11858-017-0905-1

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–330). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Diefes-Dux, H. A., Hjalmarson, M. A., Miller, T. K., & Lesh, R. (2008). Model-eliciting activities for engineering *education*. In J. S. Zawojewski, H. A. Diefes-Dux, & K. J. Bowman (Eds.), *Models and modeling in engineering education: Designing experiences for all students* (pp. 17–35). Rotterdam: Sense.

Furner, J., & Kumar, D. (2007). The mathematics and science integration argument: a stand for teacher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology*, *3*(3), 185-189.

Gallegos, R. (2018). Building bridges between the math education and the engineering education communities: a dialogue through modelling and simulation. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME 13 Monographs* (pp. 501-519). Cham: Springer.

Kelly, A., Baek, J., Lesh, R., & Bannan-Ritland, B. (2008). Enabling innovations in education and systematizing their impact. In A. Kelly, R. Lesh & J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 3–18). New York: Routledge.

Knuutila, T. (2005). Models, representations, and mediation. *Philosophy of science*, *72*, 1260-1271.

Landriscina, F. (2013). Simulation and learning – A model-centered approach. New York, NY: Springer.

Lesh, R., & Doerr, H. (Eds). (2003). Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Michelsen, C. (2006). Functions: A modelling tool in mathematics and science. *ZDM – Mathematics Education*, *38*(3), 269-280.

Moore, T. (2008). Model-eliciting activities: a case-based approach for getting students interested in material science and engineering. *Journal of Materials Education*, *30*(5/6), 295-310.

Mousoulides, N., & English, L. (2011). Engineering model eliciting activities for elementary school students. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and learning of mathematical modelling, International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling - ICTMA 14* (pp. 221-230). New York, NY: Springer. DOI:10.1007/978-94-007-010-2

Pollak, H. O. (2003). A history of the teaching of modelling. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, pp. 647-672). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stohlmann, M., Moore, T., & Roehring, G. H. (2012). Considerations for teaching integrated STEM education. *Journal of Pre-College Engineering Education Research*, *2*(1), 28-34.

Zawojewski, J. (2010). Problem solving vs modelling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modelling competencies* (pp. 237-243). New York, NY: Springer.

AS ARMADILHAS DO CONSUMISMO: UMA ABORDAGEM PARA EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR

Katyane Anastácia Samoglia Costa Capichoni Massante, Amarildo Melchiades da Silva

[1]Universidade Nova de Lisboa (UNL) e Instituto Superior de Ciências Psicológicas, Sociais e da Vida (ISPA), Programa doutoral em Educação, katyaneanastacia@gmail.com

[2] Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Departamento de Matemática, amarildomelchiades@ufjf.edu.br

Resumo. *Esta comunicação científica é resultado de uma investigação de abordagem qualitativa em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática. A investigação teve como objetivo identificar as armadilhas presentes na mídia e nas estratégias de marketing que induzem o consumismo na sociedade de consumidores. A revisão da literatura direcionou nosso foco para as 'armadilhas de marketing' presentes na mídia. A partir desta identificação, foi elaborado um conjunto de tarefas sobre o tema para sala de aula de matemática. Essas tarefas foram fundamentadas teoricamente a partir do Modelo dos Campos Semânticos e pela concepção de consumismo e sociedade de consumidores propostas pelo sociólogo Zygmunt Bauman (1925-2017). Uma pesquisa de campo foi desenvolvida com os alunos do 2º ano do Ensino Médio com a finalidade de validar as tarefas para uso em sala de aula. A investigação resultou em um produto educacional proposto para sala de aula de matemática, baseado no design de uma proposta de currículo de educação financeira escolar.*

Palavras-chave: *Educação Matemática; Educação Financeira Escolar; Armadilhas de Marketing na mídia; Consumismo; Sociedade de consumidores.*

Abstract. *This scientific communication results from an investigation characterized by qualitative approach in Financial Scholarly Education and Mathematics Education. The goal of this research was to identify the traps in the media and in the marketing strategy which encourage the consumerism in Consumers Society. The literature review guided our focus to the 'marketing traps' in media. From this identification, we developed the tasks' set about this subject to mathematics classes. These tasks were theoretically referenced by Semantic Fields Model and by Consumerism and Consumers Society conception by Zygmunt Bauman (1925-2017). A field research was performed with second- year high school students (15-18 years old) aiming to validate the tasks to be used in classes. This investigation resulted in an Educational Product proposed to mathematics classes based on Financial Scholarly Educational curriculum proposal.*

Keywords: *Mathematics Education; Financial Scholarly Education; Marketing traps, Media; Consumerism; Consumers Society.*

Introdução

A Educação Financeira foi inserida na pauta de discussão da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) no ano de 2003. Como consequência dessa medida, foi criado um projeto intitulado *Projeto Educação Financeira* para ser

desenvolvido nos países membros como também em países convidados, dos quais o Brasil faz parte, com o objetivo de educar financeiramente seus cidadãos.

A etapa seguinte foi pesquisar as iniciativas e programas que já existiam sobre o tema nos diversos países e como cada uma dessas ações era realizada. A pesquisa identificou, ainda, grupos de cidadãos que mais precisavam ser educados financeiramente, como trabalhadores e jovens consumidores. E apontou fatores que aumentavam a importância da Educação Financeira, como a complexidade e a variedade dos produtos financeiros.

Em 2005, foi produzido um relatório intitulado *Recomendações sobre os princípios e boas práticas para Educação Financeira* com a seguinte recomendação: "A Educação Financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras o mais cedo possível em suas vidas" (OCDE, 2005b).

Silva e Powell (2013), a partir da análise das propostas da OCDE para a escola, observaram que o foco está no ensino de finanças pessoais. Discordando desta perspectiva, os autores desenvolveram a proposta de design de um currículo de Educação Financeira para Educação Básica. Esta proposta tem como objetivo educar financeiramente os estudantes. No sentido proposto por Silva e Powell (2013), um estudante é considerado educado financeiramente quando:

> i) Frente a uma demanda de consumo ou de alguma questão financeira a ser resolvida, o estudante analisa e avalia a situação de maneira fundamentada, orientando sua tomada de decisão valendo-se de conhecimentos de finanças, economia e matemática; ii) opera segundo um planejamento financeiro e uma metodologia de gestão financeira para orientar suas ações (de consumo, de investimento, ...) e tomada de decisões financeira a curto, médio e longo prazo; iii) Desenvolveu uma leitura crítica das informações financeiras veiculadas na sociedade em que vivem. (Silva & Powell, 2013, p.12-13).

Este currículo foi organizado por eixos norteadores que vão além de finanças pessoais, com temáticas variadas, para serem discutidas ao longo da formação básica dos estudantes. O eixo I propõe a discussão de noções básicas de finanças e economia; o eixo II: finança pessoal e familiar; o eixo III: as oportunidades, os riscos e as armadilhas do dinheiro numa sociedade de consumidores e o eixo IV: as dimensões sociais, econômicas, políticas, culturais e psicológicas que envolvem a educação financeira (Silva & Powell, 2013).

Desde 2012, estão sendo desenvolvidas pesquisas sobre educação financeira escolar norteadas por esta proposta de currículo. Com temáticas do eixo I, foram desenvolvidas

tarefas para o 6º ano do Ensino Fundamental (11-12 anos; e.g. Campos 2012). Do eixo II, obteve-se o desenvolvimento de tarefas para alunos do 7º ano do ensino fundamental (12-13 anos; e.g. Barbosa 2015). Nossa pesquisa está inserida ao eixo temático III e aborda as armadilhas do consumismo na sociedade de consumidores.

O consumismo é um atributo da sociedade de consumidores que torna inóspito o planejamento e a educação financeira (Bauman, 2010). Um dos influenciadores do consumismo é o marketing e a mídia (Bauman 2010, Barber 2009), que chamamos, nesta pesquisa, de 'armadilhas do marketing' (Solomon, 2016).

Nosso problema de investigação, considerando o projeto citado acima, foi produzir um conjunto de tarefas, referenciadas teoricamente, sobre as armadilhas presentes na mídia e no mercado. Este conjunto de tarefas foi fundamentado em como as estratégias de marketing influenciam as pessoas ao consumismo na sociedade de consumidores (Bauman, 2010). As tarefas foram elaboradas para uso na sala de aula de matemática, para estudantes do 2º ano do Ensino Médio, com o objetivo de discutir e produzir reflexões sobre como os estudantes são expostos diariamente a diferentes apelos para o consumo veiculados na mídia.

Estas tarefas foram aplicadas a um grupo de alunos do 2º ano do ensino médio (16-18 anos) porque são alunos que, na sua maioria, já lidam com dinheiro. O objetivo geral das tarefas é explicitar as armadilhas, tornando-as objeto de atenção dos estudantes, estimulando sua produção de significados (Lins, 1999) e auxiliando nas tomadas de decisão sobre este tema em Educação Financeira.

Metodologia

Esta pesquisa caracteriza-se com uma abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 2013). Ou seja, uma investigação descritiva com uma análise indutiva, na qual a leitura da produção de significados dos estudantes é central. Esta pesquisa foi desenhada para estudantes do 2º ano do Ensino Médio e realizada com 4 alunos: 2 de gênero feminino e 2 de gênero masculino, com idades entre 15 e 18 anos. Foram realizados quatro encontros de cerca 1hora e 30 minutos, cada. Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram uma câmera filmadora, um gravador de áudio, um questionário, e as fichas com as tarefas resolvidas pelos alunos. Os responsáveis dos alunos assinaram um termo de compromisso ético autorizando o uso das imagens na pesquisa. O Universo da pesquisa foi uma escola pública em Juiz de fora, Minas Gerais, Brasil.

As tarefas possuem características para permitir que professores e pesquisadores possam identificar, na fala dos alunos, sua maneira de operar e a lógica de suas operações. Além disso, as tarefas permitem estimular a produção de significados dos alunos e apresentar situações abertas que propiciem vários caminhos de resolução (Loth 2011, Campos 2012). A fundamentação das tarefas foi baseada, principalmente, nas obras: Bauman (2008, 2010). Cada tarefa aborda um tema e discute uma ou mais armadilhas. (Tabela 1)

Tabela 1: Relação as tarefas, suas temáticas e as armadilhas abordadas em cada uma.

Nº da tarefa	Nome da tarefa	Nº de questões	Temática	Armadilhas
1	Ninguém nos conhece tão bem quanto nossa mãe, certo?	3	Como as empresas nos conhecem tão bem.	Database
2	Vaidade ou necessidade?	7	Estética e beleza	Falsas demandas, fidelidade e as mídias sociais
3	Propaganda e produto	1	Tecnologia	Ídolos em propagandas que são grandes produções.
4	De olho nas armadilhas	1	As armadilhas na televisão	Visão geral
5	As armadilhas estão na moda!	3	Moda	Ídolos, tendências de moda.

Fonte: Dados da pesquisa

Cada tarefa tem o objetivo de, apresentar, alertar, e conduzir os sujeitos de pesquisa à reflexão sobre elas, e como estas armadilhas podem influenciar suas atitudes e trazer consequências à sua vida financeira.

A leitura e análise da produção de significados dos estudantes foi realizada com base nas categorias propostas pelo Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 1999, Lins & Gimenez, 1997; Silva, 2003) que é um modelo epistemológico elaborado incorporando ideias do pensamento de Vygotsky e Leontiev.

.

Resultados

Neste artigo mostrarei apenas algumas respostas para exemplificar a produção de significados e a maneira como a análise foi realizada. A tabela 2 é composta de um exemplo para cada tarefa e para qual armadilha o sujeito de pesquisa produziu significado. Esses exemplos foram fundamentais para validar as tarefas para o uso em sala de aula real.

Tabela 2: Exemplos da produção de significado dos sujeitos de pesquisa para as armadilhas.

Tarefa	Armadilha	Exemplos/ respostas que indicam a produção de significado dos sujeitos de pesquisa.
1	Database é como armadilha para o controle do consumo e da satisfação do cliente.	Acho que a consequência é o controle do consumo, né? A empresa acaba tendo aquele controle. No caso do smartphone, por exemplo, eles sempre fazem um celular que nunca é o perfeito. Pra quê? Pra você ter que voltar lá e comprar outro. Você vai ficar viciado nesse ciclo de voltar e comprar outro smartphone, eles nunca vão lançar um perfeito. Um vai ter uma câmera melhor, outro vai ter um gravador melhor [...].
2	Falsa demanda	Por exemplo, se a mulher acha que isso é um problema e a empresa tem a solução para esse problema, a empresa vai ficar lutando, vai falar que é um problema e uma doença e que inventou a solução para isso.
3	Influência de personalidades	Aí eles estimularam as pessoas a comprarem o celular por causa dos seus fãs.
4	Superprodução para propaganda.	Eu busquei na internet. Na propaganda a atriz tá presa e quando se solta precisa do *Iphone* para desarmar uma bomba, ou seja, foi essencial para ela. Ela não fala para você comprar, mas você percebe como é essencial.
5	Influência da moda e de ídolos	A moda me influencia em partes, porque gosto de um cantor famoso e ele está na moda, ele é patrocinado por várias marcas.

Fonte: Dados da pesquisa

A fala do sujeito para tarefa 1, por exemplo, introduz novos objetos como: consumo e a "satisfação do cliente". Observando sua fala: "...eles sempre fazem um celular que nunca é o perfeito, pra que? Pra você ter que voltar lá e comprar outro..." Ele fala na direção do que diz o autor Bauman (2008): "...Um consumidor *satisfeito* não é motivo nem

propósito – e sim a ameaça mais apavorante...", ou seja, o estudante produz significado para o fato de que as empresas sabem o que os consumidores querem, mas não têm o objetivo de deixá-los completamente satisfeitos.

Os resultados sugerem que o conjunto de tarefas estimulou a produção de significados dos sujeitos de pesquisa para 'armadilhas do marketing'. A revisão da literatura aponta as armadilhas que influenciam o consumismo como as armadilhas do marketing. Estas armadilhas usam de outros fatores que podem ser foco de outras pesquisas como fatores sociais, culturais e emocionais. (Barber, 2009; Bauman, 2010; Solomon, 2016).

Considerações finais

A análise das leituras dos significados dos sujeitos indicou que o conjunto de tarefas possui potencialidades na produção de significados para educação financeira de maneira formativa, ou seja, conduz a uma reflexão que auxilia na resolução de problemas e tomadas de decisão. As pesquisas desenvolvidas anteriormente, abordando a temáticas dos outros eixos, apresentavam tarefas que auxiliavam na produção de significados e a tomada de decisão através de problemas com o uso do dinheiro. (Campos, 2012; Barbosa, 2015). Nossa pesquisa, além disso, discutiu questões que encorajam o gasto do dinheiro. Essa pesquisa também mostrou que os estudantes começaram a pensar nas armadilhas do marketing e nas questões financeiras. Acreditamos que a atividade em sala de aula real será ainda mais rica, pois não haverá limitação de tempo e poderá ter a intervenção do professor, que pode conduzir as questões que são abertas e possuem diversas soluções e caminhos (Loth 2011; Campos 2012). Sugerimos a atualização dos exemplos utilizados, pois a armadilhas mudam de acordo com o tempo.

Finalmente, essa pesquisa iniciou a abordagem do tema na educação financeira escolar. Outras pesquisas podem ser desenvolvidas se aprofundando nas questões culturais, sociais e emocionais. Fatores que pertencem ao eixo IV (Silva & Powell, 2013). Junto com outras pesquisas, essa pesquisa propõe uma educação financeira formativa que, no contexto brasileiro, é extremamente relevante, principalmente por causa da inflação e da quantidade de consumidores negativados. Uma vez inserido nas escolas públicas, o currículo proposto permitiria que essa e outras questões fossem abordadas desde a educação básica.

Referências

Barber, B. R. (2009). Consumido: Como o mercado corrompe as crianças e infantiliza os adultos e engole cidadão. Tradução: Bruno Casotti. São Paulo: Editora Record.

Barbosa, G. S. (2015). *Educação financeira escolar: Planejamento financeiro*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Minas Gerais, Universidade Federal de Juiz de Fora.

Bauman, Z. (2008). *Vida para consumo: A transformação das pessoas em mercadorias*. (traduzido por Carlos Alberto Medeiros). Rio de Janeiro: Zahar.

Bauman, Z. (2010). Vida a crédito: conversas com Citlali Rovirosa-Madrazo. Rio de Janeiro: Zahar.

Campos, M. B. (2012). *Educação financeira na matemática do ensino fundamental: Uma análise da produção de significados*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Minas Gerais, Universidade Federal de Juiz de Fora.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.), 75-94. *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP.

Lins, R. C. (1997b.). Gimenez, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

Loth, H. M. (2011). *Uma investigação sobre a produção de tarefas aritméticas para o 6º ano do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Minas Gerais, Universidade Federal de Juiz de Fora.

OCDE.(2005) *Recommendation on principles and good Praticiesnfor financial education and awareness:* Directorade for financial and enterprice affairs. Jul. Disponível em: http:// www.oecd.org/finance/financial-education/35108560.pdf. Acesso: maio de 2017.

Silva, A. M. (2003). Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática: Educação financeira na matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo, Universidade Estadual Paulista.

Silva, A. M.; Powell, A. B. (2013). Um programa de educação financeira para a matemática escolar da educação básica. In: *XI ENEM Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba.

Solomon, M. R. (2016) O comportamento do consumidor: Comprando, possuindo e sendo; tradução: Beth Honorato- 11ª Ed. Porto Alegre: Bookman.

A GÉNESE INSTRUMENTAL COM A CALCULADORA GRÁFICA NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO 8.º ANO DE ESCOLARIDADE

Manuela Subtil, António Domingos

[1]UIED, Agrupamento de Escolas Fragata do Tejo, mm.pedro@campus.fct.unl.pt

[2]UIED, DCSA, FCT da Universidade Nova de Lisboa, Portugal; amdd@fct.unl.pt

Resumo. *Neste artigo abordamos uma experiência de ensino que incidiu na demonstração do Teorema de Pitágoras, no 8º ano do Ensino Básico, integrando a calculadora gráfica. Este estudo está integrado numa experiência de ensino mais ampla nos domínios de Geometria e Medida, Álgebra e Funções, Sequências e Sucessões. Recorreu-se a um ambiente de aprendizagem de índole exploratória e pretendeu-se criar uma dinâmica inovadora neste nível de ensino. Usando como quadro teórico a Teoria da Atividade, procurou-se interpretar como é que os alunos, fazendo parte de uma comunidade de aprendizagem, constroem o conhecimento matemático, através da orquestração da professora na resolução de tarefas específicas com a calculadora gráfica. Mais concretamente, procurámos entender a gênese instrumental desempenhada pela calculadora gráfica no sistema de atividade dos alunos, desenvolvendo esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada. Metodologicamente adotou-se um paradigma qualitativo, com a realização de estudos de caso. Os resultados mostram que a técnica de arrastamento inerente à calculadora gráfica, artefacto mediador, facilitou a construção do conhecimento matemático. Na resolução das tarefas os alunos evidenciaram esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada. Em algumas situações, os esquemas de ação instrumentada criados pelos alunos transformaram-se posteriormente em esquemas de uso para esses mesmos alunos.*

Abstract. *In this article we present an educational experiment that focused on the demonstration of the Pythagorean Theorem, in the 8th year of Basic Education, integrating the graphing calculator. This study is integrated in a broader teaching experience in the fields of Geometry and Measurement, Algebra and Functions, Sequences and Successions. We used an exploratory learning environment and we intended to create an innovative dynamic in this level of education. We use the Activity Theory as the theoretical framework, we try to interpret how the students how students, as part of a learning community, construct mathematical knowledge, through teacher's orchestration in the resolution of specific tasks with the graphing calculator. More specifically, we sought to understand the instrumental genesis played by the graphing calculator in the student activity system, developing use and instrumented action schemes. Methodologically, a qualitative paradigm was adopted, with the production of case studies. The results show that the dragging technique inherent to the graphing calculator, mediator artefact, facilitated the construction of mathematical knowledge. In resolving the tasks, the students showed use and instrumented action schemes. In some situations, the instrumented action schemes created by students later became use schemes for these same students.*

Palavras-chave: *Calculadora gráfica; ambiente exploratório; génese instrumental; esquemas de uso; esquemas de ação instrumentada.*

Introdução

Neste estudo apresenta-se uma experiência de ensino inovadora, que integra a calculadora gráfica num nível de ensino onde tradicionalmente este tipo de abordagem não é privilegiado. No entanto, segundo Lopes e Domingos (2015) é possível no ensino básico, utilizar de forma eficiente esta ferramenta propiciando ambientes ricos e motivadores de aprendizagem.

Esta investigação ocorreu num ambiente predominantemente de ensino exploratório, seguindo a perspetiva de Freire (2000), "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção" (p. 25). Pretendeu-se compreender como é que os alunos enquanto membros de uma comunidade de ensino e aprendizagem, através da orquestração da professora, desenvolveram o processo de génese instrumental no seu sistema de atividade, percecionando-se o acesso ao conhecimento. Isto é, como é que se apropriaram da calculadora gráfica, como artefacto mediador, na resolução de tarefas, cujo propósito foi demonstrar o Teorema de Pitágoras.

A presente investigação pretendeu dar resposta às seguintes questões de investigação: Quais os esquemas de uso criados pelos alunos, quando usam a calculadora gráfica? Quais os esquemas de ação instrumentada criados pelos alunos, quando usam a calculadora gráfica? Como é que a calculadora gráfica, através da orquestração da professora, atuou como artefacto mediador, influenciando a aprendizagem dos alunos, na sua comunidade de aprendizagem?

Quadro Teórico

De modo a compreender melhor o processo de apropriação da calculadora gráfica no processo ensino e aprendizagem da Matemática, este estudo é sustentado na Teoria da Atividade, desenvolvida por Engertröm (2001), com base nos trabalhos de Vygotsky. Tratando-se de uma teoria em que o desenvolvimento cognitivo do sujeito resulta da sua interação com o meio sociocultural, mediado por instrumentos e signos (Vygotsky, 1991), procurou-se compreender os processos de génese instrumental desempenhado pelo artefacto, calculadora gráfica no sistema de atividade do aluno, assim como as suas potencialidades.

Teoria da Atividade

Segundo Daniels (2003), a Teoria da Atividade foi concebida a partir da definição de mediação exposta por Vygotsky (1978). A relação mediada pelo artefacto entre o sujeito e o objeto, descrita por Vygotsky pode ser expressa pelo triângulo básico da figura 1. O sujeito é o elemento cujo comportamento se pretende analisar. Os artefactos mediadores[1] são ferramentas (materiais ou simbólicas) utilizados pelo sujeito para atingir o objeto. O objeto refere-se ao objetivo que o sujeito quer atingir, mediado pelos artefactos.

Figura 1. Sistema de mediação segundo Vygotsky (Adaptado de Daniels, 2003, p.114).

Engeström (2001), um seguidor de Vygotsky, considera que o esquema da figura 1 representa a primeira geração da Teoria da Atividade aglutinado ao conceito de mediação. Este autor considerando as limitações do modelo, na medida em que não existe uma alusão ao meio sociocultural em que a atividade se insere, propõe a segunda geração da Teoria da Atividade.

Neste sentido, dá-se uma expansão do triângulo inicial, dando lugar a outros intervenientes no sistema de atividade, como a comunidade, as regras e a divisão do trabalho. O sujeito para atingir os resultados, interage com certos objetos que podem incluir experiências, conhecimento, processos ou produtos físicos. A atividade humana é mediada pelos artefactos mediadores (ferramentas ou signos) que se encontram em relação com a atividade em causa. A atividade também é mediada pela comunidade em que esta se desenvolve, que por sua vez impõe regras aos sujeitos, podendo opor-se ou apoiar, facilitar ou negar o acesso aos recursos. Na medida em que a atividade está envolvida com a comunidade, o sujeito partilha com ela a responsabilidade (divisão do trabalho/esforço). Portanto, a noção de atividade segundo Engeström (2001) envolve mediações múltiplas, na

[1]Podem ser físicos ou cognitivos (signos). Os primeiros estão relacionados com o alcance de determinado objetivo na esfera prática, possuindo uma orientação externa. Os segundos estão ligados às atividades mentais ou psicológicas do sujeito, sendo instrumentos de orientação interna (Vygotsky, 1978).

medida em que todos os elementos se relacionam entre si. A relação entre o sujeito e o objeto é mediada por "artefactos mediadores", a relação entre o sujeito e a comunidade é mediada por "regras" e a relação entre o objeto e a comunidade é mediada pela "divisão do trabalho".

Figura 2. Estrutura do sistema de atividade humana (Adaptado de Engertröm, 2001, p. 135)

Génese Instrumental

O processo de apropriação da calculadora gráfica é compreendido através da abordagem instrumental (Rabardel, 1995), que elucida como se processa o desenvolvimento de esquemas provenientes da interação com a calculadora gráfica, na resolução de tarefas. O autor fundamentando-se nas ideias de Vygotsky, apresentou um modelo em que considera que a construção de um instrumento não é espontânea e ocorre segundo um processo designado por génese instrumental. Um instrumento é encarado como uma entidade mista, na medida em que resulta da apropriação de um artefacto, material ou simbólico, pelo sujeito, através de esquemas de utilização. Um mesmo artefacto pode dar origem à construção de diferentes instrumentos, pois cada sujeito constrói os seus próprios esquemas, construindo o seu próprio instrumento.

Rabardel (1995) introduziu a noção de esquema de utilização de um artefacto, que descreve como sendo um conjunto de procedimentos que organiza a atividade com o artefacto associado à realização de uma determinada tarefa. Para Drijvers e Trouche, (2008) existe a diferenciação entre dois tipos de esquemas de utilização: os *esquemas de uso,* direcionados para a gestão do artefacto, como por exemplo, ligar uma calculadora ou ajustar o contraste do ecrã e os *esquemas de ação instrumentada*, como sendo entidades direcionadas para a realização da tarefa, como por exemplo, calcular o limite de uma função. No entanto, Rabardel (1995) alerta que um esquema de ação instrumentada para um determinado sujeito, pode-se transformar posteriormente num esquema de uso para esse mesmo sujeito.

Segundo Rabardel (1995), quando o sujeito se apropria do artefacto e desenvolve esquemas mentais que proporcionem o uso eficiente do mesmo e por sua vez, reconhece a utilidade do artefacto em determinadas situações, constrói um instrumento que possibilita a realização de determinado tipo de tarefa.

Esta atividade pode ser articulada em dois processos: a instrumentalização, dirigida para o artefacto, operando-se um reconhecimento progressivo das suas potencialidades e limitações (mediante o conhecimento que estabelece, o sujeito apropria-se do artefacto e adapta-o à resolução das tarefas) e a instrumentação, dirigida para o sujeito, está relacionada com a construção e desenvolvimento de esquemas de utilização (as tarefas desenvolvidas são influenciadas pelas potencialidades e pelos constrangimentos do artefacto). Tratam-se de processos que se encontram interligados, sendo por vezes difícil indicar em determinada situação qual deles está em desenvolvimento (Trouche, 2004).

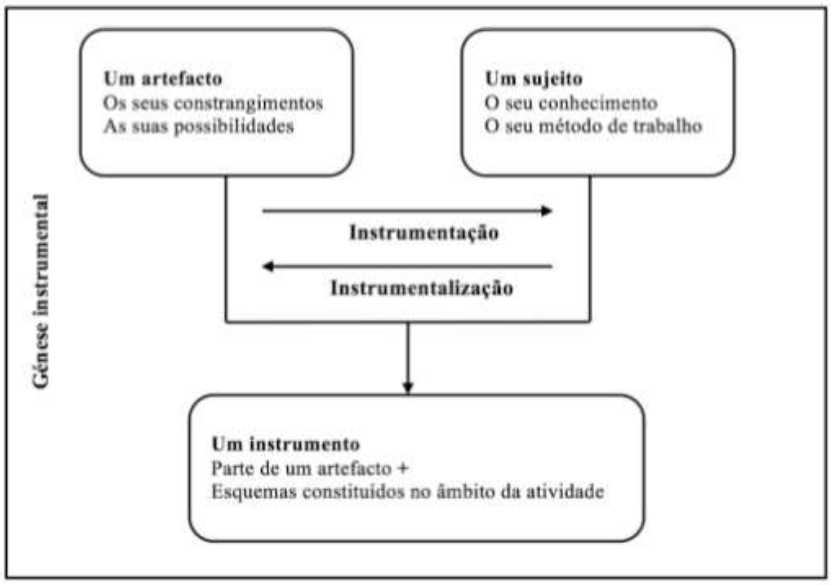


Figura 3. Génese Instrumental (Adaptado de Trouche, 2004, p. 185)

Através da orquestração instrumental que se trata da organização intencional e sistemática de vários artefactos num ambiente de aprendizagem, o professor orienta a génese instrumental dos alunos (Drijvers e Trouche, 2008).

A calculadora gráfica no processo ensino e aprendizagem

A integração da tecnologia, é um dos requisitos importantes para um programa de matemática de excelência, na medida em que ajuda os alunos a aprender e compreender as

ideias matemáticas, raciocinar matematicamente e comunicar o seu raciocínio (NCTM, 2017).

Segundo o NCTM (2007), implementação da tecnologia no ensino da Matemática, nomeadamente computadores e calculadoras, influencia a maneira como esta disciplina é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. Lee e McDougall (2010) partilham da mesma opinião, quando referem que a utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática funciona como uma ferramenta poderosa para os professores, na medida em que facilita a construção da compreensão do conhecimento matemático dos alunos.

A inclusão da calculadora gráfica no desempenho dos alunos de diferentes níveis de rendimento escolar mostra que todos têm benefícios positivos, quando é feita uma abordagem de ensino com esse artefacto (Tan, 2012). Li (2010) vai mais longe, ao concluir que essa ênfase é mais significativa em alunos com necessidades educativas especiais.
São vários os benefícios que enfatizam a incorporação da tecnologia em ambientes didáticos, nomeadamente, aumento da motivação, envolvimento, cooperação, oportunidades de aprendizagem *hands-on*, confiança e habilidades tecnológicas dos alunos (Costley, 2014).

Metodologia

A metodologia adotada nesta experiência de ensino abordagem qualitativa de cunho interpretativo, com recurso a dois estudos de caso.

A experiência realizou-se no segundo período do ano letivo de 2017/18, no decorrer de 2 aulas de 90 minutos e 1 aula de 45 minutos, numa turma do 8º ano de escolaridade, com 23 alunos, de uma escola pública do distrito de Setúbal. Todos os alunos foram participantes e trabalharam individualmente, tendo recaído uma observação mais intensificada sobre dois alunos, que vamos denominar ficticiamente por Maria e José. Essa opção deveu-se ao facto dos mesmos apresentarem características semelhantes no que concerne ao seu percurso académico na disciplina de Matemática, boa capacidade oral e escrita, diversidade de género e excelente comportamento. A primeira autora é professora da turma e conduziu a investigação fazendo o papel de investigadora participante.

As técnicas utilizadas para recolher os dados, relativamente às questões de investigação, tiveram por base a planificação das tarefas, a elaboração de relatórios escritos pelos alunos, imagens das representações gráficas no ecrã da calculadora gráfica e

observação rigorosa, atenta e estruturada de aulas, da investigadora participante (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2012).

A Experiência de ensino

A planificação das tarefas no contexto da aprendizagem

O enquadramento curricular da experiência de ensino foi realizado com base nas Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013). As tarefas que fizeram parte da experiência pertencem ao domínio Geometria e Medida GM8, subdomínio Teorema de Pitágoras e pretenderam dar resposta ao objetivo geral, "Relacionar o teorema de Pitágoras com a semelhança de triângulos". Na medida em que deste objetivo geral fazem parte os descritores 1 e 2, as tarefas foram desenhadas tendo em consideração os mesmos.

1. Demonstrar, dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C, que a altura $[CD]$ divide o triângulo em dois triângulos a ele semelhantes, tendo-se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$.

2. Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C e de altura $[CD]$, que os comprimentos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AD}$, $y = \overline{DB}$ satisfazem as igualdades $b^2 = xc$ e $a^2 = yc$ e concluir que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa e designar esta proposição por «Teorema de Pitágoras».

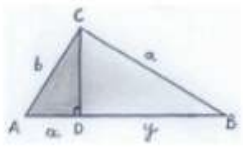
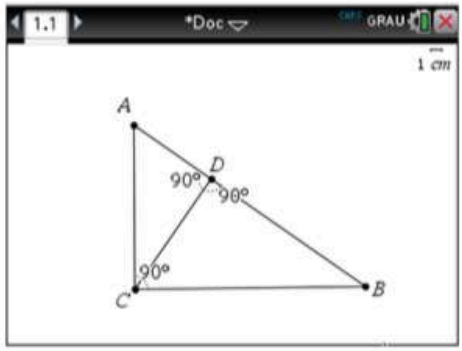


Figura 4. Descritores 1 e 2 do domínio Geometria e Medida GM8 (MEC, 2013, p. 62)

A tarefa 1 (Figura 5) foi elaborada tendo em consideração o descritor 1, cujo objetivo foi os alunos percecionarem que, "a altura referente à hipotenusa decompõe um triângulo retângulo em dois triângulos retângulos semelhantes ao triângulo dado".

1. Recorre à calculadora gráfica e constrói o triângulo [ABC] retângulo em C. Marca o ponto D sobre o segmento de reta [AB], obtendo-se a altura do triângulo relativa à hipotenusa, o segmento de reta [CD].



Nota: A altura de um triângulo relativa à hipotenusa trata-se do segmento de reta com origem num vértice do triângulo e perpendicular ao seu lado oposto.

1.1 Mostra que os triângulos [ABC] e [ACD] são semelhantes e relaciona os comprimentos dos lados correspondentes dos referidos triângulos. Que concluis? Num pequeno relatório regista as tuas conclusões.

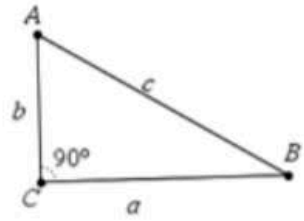
1.2 Mostra que os triângulos [ABC] e [DCB] são semelhantes e relaciona os comprimentos dos lados correspondentes dos referidos triângulos. Que concluis? Num pequeno relatório regista as tuas conclusões.

Figura 5. Tarefa 1

A tarefa 2 (Figura 6) pretendeu dar resposta ao descritor 2, demonstrando-se o Teorema de Pitágoras através da semelhança de triângulos.

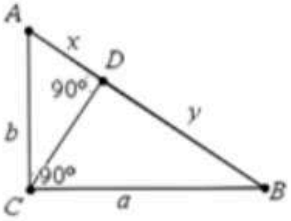
2. Uma demonstração do Teorema de Pitágoras

Considera o triângulo [ABC] retângulo em C, onde o comprimento do segmento de reta [CB] é a, o comprimento do segmento de reta [AC] é b e o comprimento do segmento de reta [AB] é c. Sejam [CD] a altura do triângulo relativa à hipotenusa, tal que o comprimento do segmento de reta [AD] é x e o comprimento do segmento de reta [DB] é y.



2.1 Relaciona os triângulos [ABC] e [ACD] e justifica que $b^2 = xc$.

2.2 Relaciona os triângulos [ABC] e [DCB] e justifica que $a^2 = yc$.



2.3 Observando a figura e tendo em conta as alíneas 2.1 e 2.2, mostra que $a^2 + b^2 = c^2$.

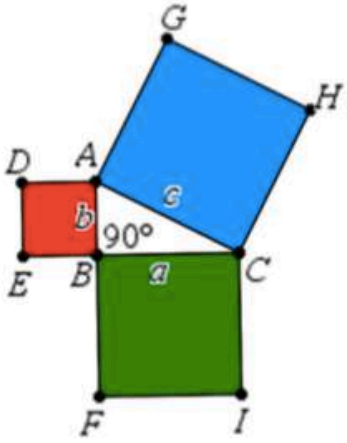
Figura 6. Tarefa 2

A tarefa 3 (Figura 7) objetivou fazer uma generalização da demonstração do teorema de Pitágoras, através do cálculo de áreas. Por outro lado, a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação foram capacidades transversais a desenvolver, indispensáveis ao cumprimento do objetivo elencado anteriormente. No contexto da aprendizagem pretendeu-se responder às questões de investigação.

3. Mais uma demonstração do Teorema de Pitágoras

Com recurso à calculadora gráfica:

- Constrói um triângulo retângulo [ABC].
- Constrói os quadrados [ABED] e [BCIF] sobre cada cateto e o quadrado [ACHG] sobre a hipotenusa, do triângulo retângulo [ABC].
- Determina a área dos quadrados [ABED], [ACHG] e [BCIF].
- Adiciona a área dos quadrados que se encontram sobre os catetos e relaciona essa área com a área do quadrado que se encontra sobre a hipotenusa, do triângulo retângulo [ABC].



O que concluis? Elabora um pequeno relatório que traduza as tuas descobertas.

Sugestão: Para construir os quadrados sobre os lados do triângulo retângulo [ABC], recorre a rotações de 90º ou -90º, consoante o centro de rotação.

Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, _____

_____

Figura 7. Tarefa 3

Desenvolvimento da experiência de ensino

Porque os alunos devem construir e compreender os conceitos através da experiência e conhecimentos prévios (NCTM, 2007), antes da realização da tarefa 1 foi feita uma breve revisão aos critérios de semelhança de triângulos, lecionados no 7º ano de escolaridade. Seguidamente, procedeu-se à distribuição da tarefa 1 e na fase seguinte operacionalizou-se autonomamente a exploração individual da mesma pelos alunos, monitorizada pela professora. A nossa observação recaiu nos alunos Maria e José.

Na primeira parte da tarefa, para construir o triângulo retângulo, ambos recorreram ao editor *Geometria*. O José selecionou *Menu - Pontos e Retas - Segmento* e construiu o segmento de reta [CB]. Posteriormente, com o objetivo de obter um ângulo reto em C, recorreu de novo a *Menu - Ações – Texto* e escreveu 90, de modo a fazer uma rotação de 90º do segmento de reta [CB], associada ao ponto C (*Menu – Transformação – Rotação*). De seguida, colocou um ponto sobre essa reta perpendicular, construindo o segmento de reta [AC] (*Menu – Pontos e Retas – Ponto)*. Para construir o segmento de reta [AB], procedeu, *Menu – Pontos e Retas – Segmento*. Com origem em C, construiu a altura do triângulo referente à hipotenusa [AB] (*Menu – Construção – Perpendicular)*. No final, escreveu todas as letras que eram visualizadas no enunciado (*Menu - Ações – Texto)*. Com o *Touchpad* procedeu ao arrastamento das mesmas, de acordo com o enunciado da tarefa.

No entanto, a Maria teve alguns contratempos na fase inicial, pois começou por construir um triângulo em que segundo ela o ângulo em C teria 90º (*Menu – Formas – Triângulo*), pois estava a construi-lo com a configuração de um triângulo retângulo.

Professora:	Tens a certeza que construindo o triângulo dessa maneira, obténs um triângulo retângulo em A?
Maria:	Hum! Não! Pois, Não tenho a garantia que fique mesmo [90º]...
Professora:	E então? Perpendicular!
Maria:	Ah! Posso fazer um segmento de reta e uma reta perpendicular a esse segmento!

Neste sentido a Maria construiu o segmento de reta [CB] da mesma forma do José e seguidamente, construiu uma reta perpendicular a esse segmento *(Menu – Construção – Perpendicular)*. Posteriormente procedeu do mesmo modo que o seu colega José.

Na segunda parte da tarefa, os dois alunos procederam à medição dos ângulos dos triângulos envolvidos na tarefa (*Menu – Medição – Ângulo*) e verificaram que quando usaram a função de arrastamento, ao manipularem os triângulos, os mesmos mantiveram os ângulos correspondentes iguais. Concluíram então que o par de triângulos [ABC] e [ACD] e o par de triângulos [ABC] e [DCB], eram semelhantes pelo critério AA (Ângulo, Ângulo).

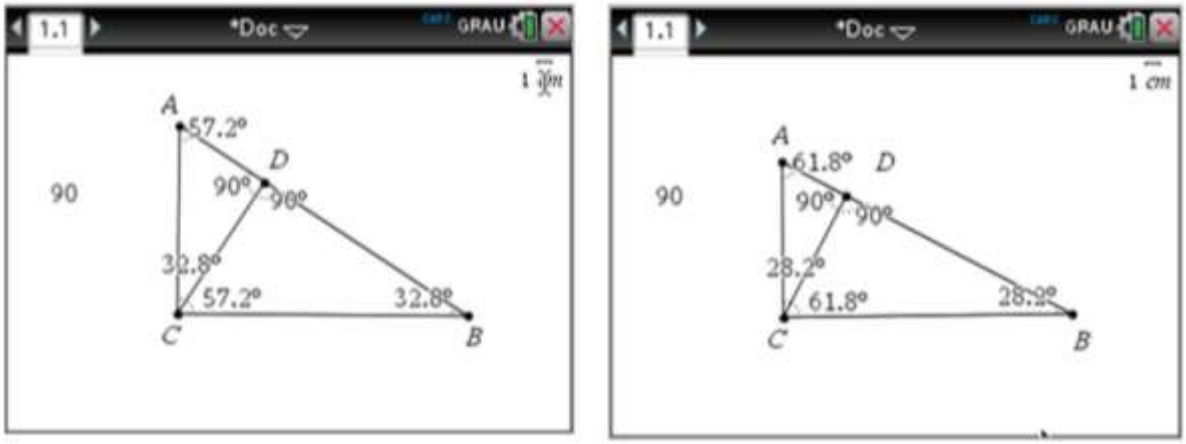


Figura 8. Investigação do José relativamente à amplitude dos ângulos quando usou a função de arrastamento.

Para relacionar os comprimentos dos lados correspondentes dos referidos triângulos, os alunos decompuseram os triângulos pela altura referente à hipotenusa e elaboraram esquemas pictóricos, conforme as figuras 9 e 10. Esta abordagem foi facilitada pelos conhecimentos que apreenderam no 7º ano, sobre Semelhanças de Triângulos.

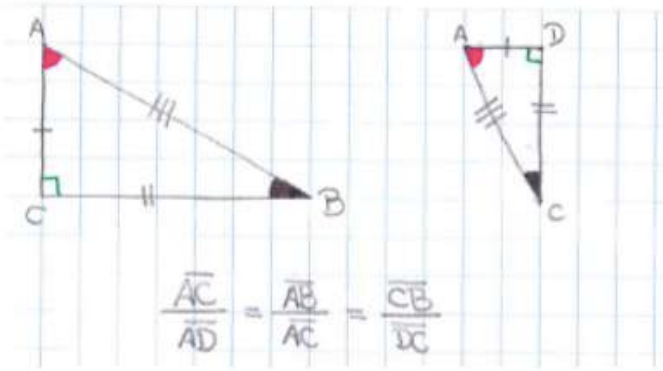


Figura 9. Esquema da Maria para relacionar os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos [ABC] e [ACD] (tarefa 1 – alínea 1.1).

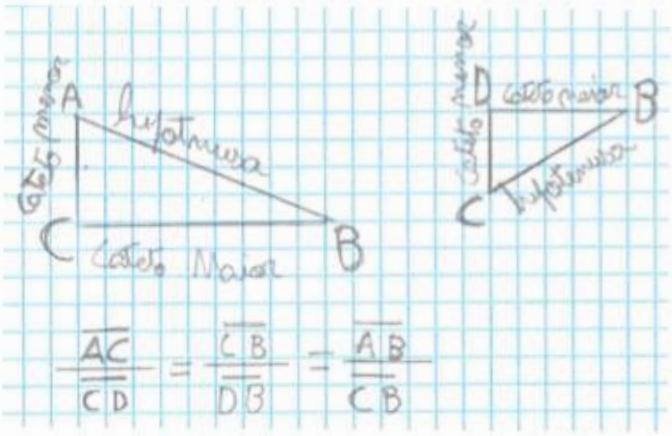


Figura 10. Esquema do José para relacionar os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos [ABC] e [DCB] (tarefa 1 – alínea 1.2).

Por último, fomentou-se a discussão, gerida e incentivada pela professora, em torno das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos. Perante o grupo turma, o José apresentou e explicou no quadro interativo através da aplicação calculadora gráfica TI-nspire, as suas descobertas.

No que concerne à tarefa 2, os alunos utilizaram papel e lápis e tiveram em conta o facto de terem relacionado os lados correspondentes dos triângulos na tarefa 1, tendo facilmente chegado aos resultados $b^2 = xc$ e $a^2 = yc$.

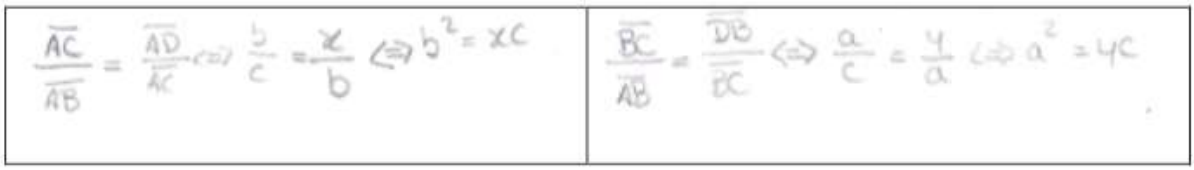


Figura 11. Resolução da tarefa 2 – alíneas 1.1 e 1.2, respetivamente, pela Maria

A maior dificuldade deu-se quando na alínea 2.3, tiveram de demonstrar que $a^2 + b^2 = c^2$. No entanto, a Maria foi quem primeiro percebeu que estava envolvida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e $y + x = c$.

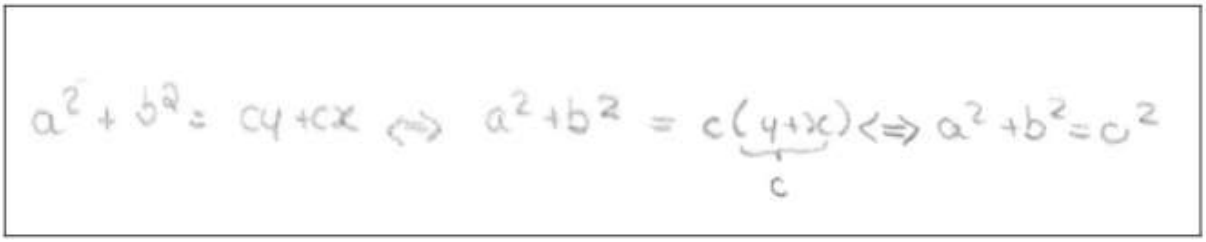


Figura 12. Resolução da tarefa 2 – alínea1.3, pela Maria.

Na aula seguinte, foi feita uma sistematização das aprendizagens, onde os alunos participaram ativamente apresentando as suas conclusões.

No que concerne à tarefa 3, os alunos realizaram-na na calculadora gráfica e não revelaram qualquer dificuldade em construir o triângulo retângulo, pois tratava-se de procedimentos que já tinham feito na tarefa 1. Relativamente à construção dos quadrados sobre os catetos e a hipotenusa, seguiram a sugestão da tarefa. Posteriormente calcularam a área de cada quadrado (*Menu – Medição – Área*). Recorrendo à sua calculadora cientifica, concluíram que a soma das áreas dos quadrados que se encontram sobre os catetos é igual à área do quadrado que se encontra sobre a hipotenusa. Utilizaram a função de arrastamento e concluíram que essa propriedade se mantinha quando alteravam os quadrados. No entanto, na última parte da tarefa 3, a Maria parece não entender o conceito de área e o que escreveu não se coaduna com a representação simbólica

$a^2 + b^2 = c^2$. Naquele momento ela não conseguiu percecionar que o comprimento do lado de um quadrado e a área de um quadrado, são conceitos diferentes. Provavelmente foi influenciada pela tarefa 2, cujo objetivo era mostrar a mesma igualdade, contemplando uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

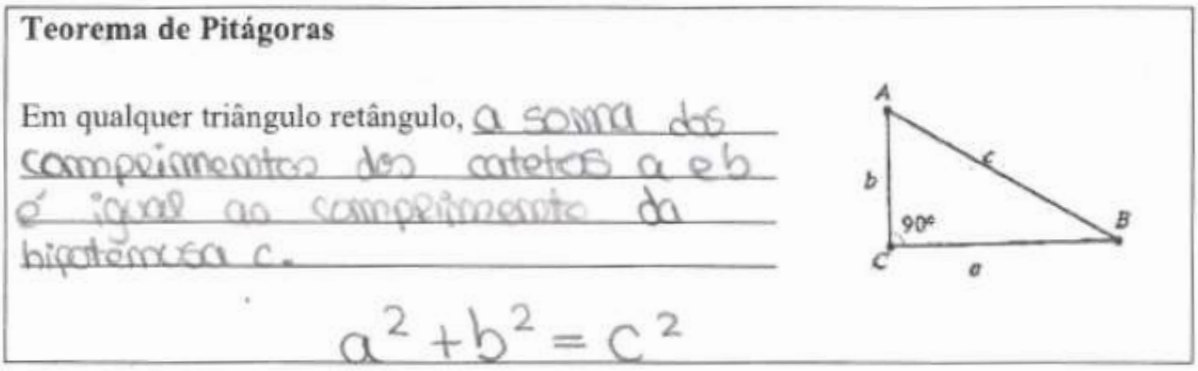


Figura 13. Conclusão da Maria relativamente à tarefa 3.

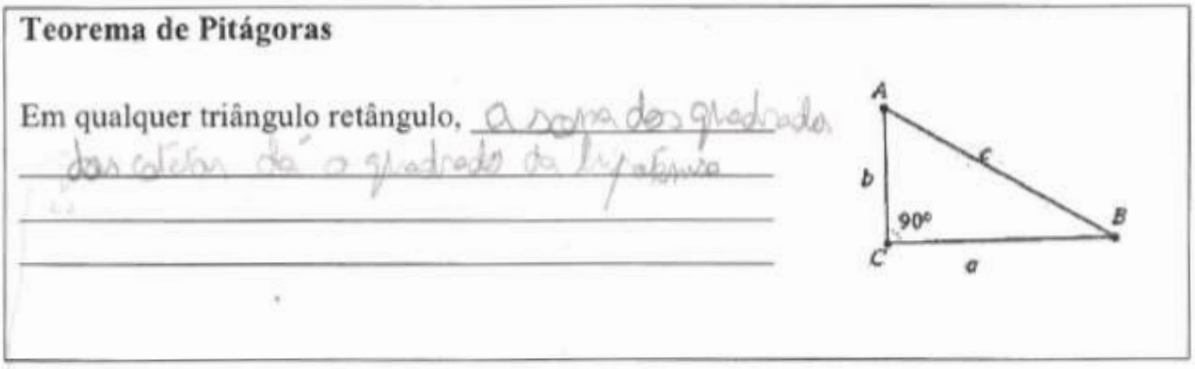


Figura 14. Conclusão do José relativamente à tarefa 3.

Discussão dos resultados

No contexto desta experiência de ensino, é crucial refletir como a aprendizagem se processou, tendo em conta como interagiram todos os intervenientes. Neste sentido, o artefacto mediador foi a calculadora gráfica, o sujeito foram os alunos e o objeto da atividade centrou-se nas respostas dos alunos e no seu pensamento matemático cujo objetivo da aprendizagem foi chegar aos resultados – "a altura referente à hipotenusa decompõe um triângulo retângulo em dois triângulos retângulos semelhantes ao triângulo dado", "demonstração do Teorema de Pitágoras através da semelhança de triângulos" e "demonstração do Teorema de Pitágoras através do cálculo de áreas". A comunidade foi formada pela professora e pelos alunos da turma. As regras foram as normas de funcionamento das aulas e da escola onde se realizou a experiência. A divisão de trabalho

foi feita entre a professora e os alunos, uma vez que a professora orientou o processo de génese instrumental dos alunos, na resolução das tarefas.

O processo de instrumentalização iniciou-se em aulas anteriores à resolução destas tarefas. Os alunos já tinham tido oportunidade de trabalhar com a calculadora gráfica noutras tarefas, tendo sido atribuído sentido a algumas teclas e funções da máquina. Neste sentido, é percetível que os alunos dominavam bem as técnicas básicas de manipulação do artefacto calculadora gráfica, encontrando-se no processo de instrumentação, onde se verifica a construção e desenvolvimento de esquemas de utilização.

Na tarefa 1, os alunos Maria e José evidenciam diferentes esquemas de ação instrumentada, quando constroem o triângulo retângulo. Enquanto o José recorre ao conhecimento das rotações e utiliza uma rotação de 90º de centro num ponto, associada a um segmento de reta, para traçar uma semirreta perpendicular a esse segmento de reta, a Maria recorre à construção de uma perpendicular ao segmento de reta construído inicialmente.

No entanto, numa fase inicial a Maria evidencia esquemas de ação instrumentada errados, ao usar esquemas de uso que não fazem sentido. A aluna foi limitada por um constrangimento do artefacto calculadora gráfica, na medida em que se construísse um triângulo através da função *formas,* não tinha a garantia que um dos ângulos fosse reto, não se verificando essa propriedade em qualquer triângulo, através da função de arrastamento.

Nas alíneas 1.1 e 1.2 da tarefa 1, quando os alunos procedem à medição dos ângulos, estavam claramente a utilizar esquemas de uso, focados na gestão do artefacto. No entanto, por de traz destes esquemas de uso estavam esquemas de ação instrumentada, na medida em que a intenção foi através da técnica de arrastamento, verificar que a amplitude dos ângulos se mantinha inalterável, em qualquer triângulo, concluindo que os triângulos eram semelhantes pelo critério AA.

A tarefa 2 ficou facilitada pelo facto de ter sido mostrado na tarefa 1, que os triângulos envolvidos eram semelhantes. Tendo em conta os procedimentos algébricos realizados pelos alunos, os mesmos evidenciaram esquemas mentais associados a esquemas de ação instrumentada potenciados na tarefa 1.

Na tarefa 3, os alunos mostram esquemas de uso, na construção das várias figuras geométricas envolvidas, pois utilizam processos aplicados anteriormente. No entanto, esses esquemas, são de ação instrumentada, na tarefa 1. Também utilizam esquemas de

uso quando concluem que a soma das áreas dos quadrados que se encontra sobre os catetos é igual à área do quadrado que se encontra sobre a hipotenusa. No entanto, evidenciam esquemas de ação instrumentada, quando recorrem à função de arrastamento e concluem que essa propriedade se mantinha quando alteravam os quadrados.

A Maria quando conclui erradamente o Teorema de Pitágoras evidencia que uma dificuldade conceptual ao nível de objetos matemáticos. A aluna baseou-se em conceções inadequadas e construiu um esquema não apropriado aquilo que escreveu. Naquele momento ela não conseguiu percecionar que num quadrado, o comprimento do lado e a área, são conceitos diferentes. Também, provavelmente foi influenciada pela tarefa 2, cujo objetivo era mostrar a mesma igualdade (), contemplando uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

Conclusão

A Teoria da Atividade permitiu percecionar como os alunos construíram conteúdos matemáticos, quando envolvidos na resolução de tarefas específicas com o apoio do artefacto mediador, calculadora gráfica, e inseridos numa comunidade de aprendizagem, interagindo com os colegas e com a professora.

A técnica de arrastamento inerente ao software de geometria dinâmica, permitiu aos alunos verificar que as suas conjeturas se confirmavam noutros triângulos e quadrados com dimensões diferentes. Esta função da máquina facilitou a construção de conhecimento matemático, tendo este artefacto funcionado como artefacto mediador.

Em algumas situações, os esquemas de ação instrumentada criados pelos alunos transformaram-se posteriormente em esquemas de uso para esses mesmos alunos (Rabardel, 1995).

Na maioria das vezes, os alunos através da resolução das tarefas com o artefacto mediador, calculadora gráfica, desenvolveram esquemas de utilização, criando conhecimento conceptual. Isto é, chegaram aos resultados propostos nas tarefas. No entanto, denota-se uma imprecisão dos aspetos conceptuais do esquema ao invés dos aspetos técnicos, quando a aluna Maria construiu esquemas que não foram apropriados, na conclusão da Demonstração do Teorema de Pitágoras (Drijvers & Trouche, 2008).

Através da Génese Instrumental que foi influenciada pela intervenção da professora, cada aluno reconheceu a utilidade do artefacto mediador, calculadora gráfica,

apropriando-se do mesmo e construindo os seus próprios esquemas que proporcionaram o seu uso eficiente ao realizar o mesmo tipo de tarefa (Rabardel, 1995).

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Costley, K. C. (2014). *The positive effects of technology on teaching and student learning*. Reports-Evaluative. (Documento ERIC nº ED554557). Recuperado de http:// www.eric.ed.gov/contentdelivery/ servelet/ERICServelet?accno=ED554557

Creswell, J. W. (2012). Educacional Research, Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research. (4 th ed.). Boston: Pearson.

Daniels, H. (2003). Vygotsky e a pedagogia. Edições Loyola.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: *Vol. 2. Cases and perspective*s (pp. 363–392). Charlotte, NC: Information Age.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133-156

Freire, P. (2000). Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. (15.ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.

Lee, J. A., & McDougall, D. E. (2010). Secondary school teachers' conceptions and their teaching practices using graphing calculators. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*, 857-872. doi:10.1080/00207391003777889

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*, 215-243. doi:10.1007/ s10648-010-9125-8

Lopes, L., & Domingos, A. (2015). A utilização da calculadora gráfica no currículo do ensino básico: uma experiência no 8º ano. *Educação e Matemática*, *131,* 45-48.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2000).

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a Ação - Assegurar a Todos o Sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2014).

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.

Tan, C. K. (2012). Effects of the application of graphing calculator on students' probability achievement. *Computers & Education, 58*, 1117-1126. doi:10.1016/j.compedu.2011.11.023

Trouche, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 181-197.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind in Society, the Development of Higher Psychological Processes. Cambridge: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1991). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes. Recuperado de http://www.egov.ufsc.br/portal/sites/default/files/vygotsky-a-formac3a7c3a30-social-da-mente.pdf

AS REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS NA PERSPETIVA DE ALUNOS DO 5.º ANO DE ESCOLARIDADE

Sofia Graça, João Pedro da Ponte, António Guerreiro

[1]*UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*, soffiagraca@hotmail.com

[2]*UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*, jpponte@ie.ulisboa.pt

[3]*UIDEF, Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve*, aguerrei@ualg.pt

Resumo. *Este estudo visa conhecer a compreensão dos alunos das diferentes representações dos números racionais e a forma como efetuam conversões entre elas, uma questão importante na aprendizagem destes números. Trata-se de um estudo qualitativo e interpretativo que envolve quatro alunos do 5.º ano de escolaridade. Os dados foram recolhidos através de observação participante, recolha documental e quatro entrevistas semiestruturadas individuais. Os resultados mostram que, apesar dos alunos demonstrarem saber que os números racionais podem ser representados de diferentes formas, de um modo geral não são capazes de efetuar conversões entre as referidas representações. As representações em numeral decimal e percentagem constituem os maiores obstáculos ao contrário da representação fracionária, que para eles parece mais familiar. Na representação em percentagem, os alunos não atribuem qualquer significado ao seu símbolo e relativamente aos numerais decimais demonstram não conhecer o valor posicional dos algarismos.*

Abstract. *This study aims to know the students' understanding of rational numbers representations and how they effect conversions between them, an important issue in learning these numbers. This is a qualitative and interpretative study involving four students from the 5th grade. Data were collected through participant observation, written documents and four individual semi-structured interviews. The results show that although students demonstrate that rational numbers can be represented in different ways, they are generally not able to make conversions between them. Decimal and percentage representations constitute the bigger obstacles, contrary to the fractional representation, which for them seems more familiar. In the percentage representation, the students do not assign any meaning to their symbol and in relation to the decimal numerals they demonstrate that they do not know the numbers positional value.*

Palavras-chave: *Ensino Básico; Números Racionais; Representações; Conversão entre Representações.*

Introdução

Os conceitos de número racional estão entre as ideias matemáticas mais complexas que os alunos encontram no início da sua escolaridade devido aos inúmeros conceitos que envolvem, mas também as mais importantes para o desenvolvimento de estruturas cognitivas importantes para a aprendizagem da Matemática (Lamon, 2007). Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os números racionais permitem-nos compreender e lidar com

situações e problemas do dia-a-dia, fornecem aos alunos uma área rica dentro da qual estes podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para o seu desenvolvimento intelectual/cognitivo, além de que a sua compreensão constitui uma base importante para o posterior desenvolvimento de operações algébricas. No entanto, as investigações em Educação Matemática evidenciam fracos resultados por parte dos alunos na compreensão do conceito de número racional, bem como todo o trabalho envolvendo este universo numérico (Cramer & Post, 1995).

Os números racionais podem ter diferentes representações, nomeadamente a representação fracionária, em numeral decimal ou percentagem. Além disso, têm igualmente diferentes significados: parte-todo, quociente, operador e medida. Um conceito próximo é o de razão, que, sendo um índice comparativo, pode ser representado através de uma fração. Esta complexidade do conceito de número racional é frequentemente apontada como uma das possíveis razões para a dificuldade dos alunos compreenderem o referido conceito. Diversos estudos (Behr et al., 1983; Lesh, Post & Behr, 1987) têm mostrado que as metodologias utilizadas no ensino dos números racionais, com base na aplicação de procedimentos, sem que os alunos compreendam o seu significado, não têm sido as mais adequadas e não promovem a compreensão concetual dos referidos números.

Uma abordagem aos números racionais sem estabelecer uma ponte entre as suas representações e os seus significados, em tarefas devidamente contextualizadas, parece ser uma das principais razões para as lacunas que se verificam na aprendizagem destes números (Guerreiro & Serrazina, 2015; Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993). Deste modo, o presente estudo visa conhecer a compreensão dos alunos das diferentes representações dos números racionais e a forma como efetuam conversões entre elas.

Representações

As representações são fundamentais na Matemática ajudando o aluno a atribuir-lhe sentido, complementando a compreensão do conceito que está subjacente. Para tornar esta disciplina mais acessível aos alunos e proporcionar uma aprendizagem mais significativa, é necessário saber selecionar as que melhor se adequam a cada situação. As representações, bem como o modo como são construídas e utilizadas, tanto por alunos como por professores, têm sido objeto de estudo de vários investigadores da Educação Matemática que, de um modo consensual, sublinham a sua importância. Para Goldin (2008) uma representação é uma configuração que pode representar algo, de alguma maneira. O autor

considera representações externas e representações internas ao indivíduo, salientando as palavras escritas, linhas numéricas ou ambientes de aprendizagem estruturados, que envolvem materiais manipuláveis, exemplos de representações externas.

Para Bruner (1999), existem três tipos de representações – ativas (experiências de vida real e modelos manipuláveis), icónicas (imagens visuais ou diagramas) e simbólicas (palavras faladas ou símbolos escritos), sendo que cada representação está associada a um estádio de desenvolvimento. Segundo o autor, os alunos devem começar com experiências concretas (ativas), mover-se para representações pictóricas (icónicas) e, finalmente, progredir para a compreensão abstrata (simbólicas). No entanto, existem autores que defendem que as diferentes representações devem ser utilizadas em simultâneo para facilitar a aprendizagem dos alunos (Lamon, 2001; Lesh et al., 1987; Ponte & Quaresma, 2012). Por exemplo, para Lesh et al. (1987) é importante utilizar as diferentes representações em paralelo bem como efetuar traduções entre elas e transformações dentro delas, preservando as caraterísticas estruturais e o significado, tal como na tradução de uma linguagem escrita para outra. Deste modo, realçam a importância de trabalhar com tarefas que permitam o estabelecimento de relações de um sistema representacional para outro. Referem que este aspeto pode ser benéfico uma vez que, na resolução de um problema, os alunos raramente trabalham através de um único modo de representação, mas selecionam as representações mais convenientes durante o processo de solução. Um dos estudos realizados pelos autores permitiu concluir que um dos obstáculos com que os alunos se deparam prende-se com a falta de habilidade com modelos e linguagens para representar (descrever ou ilustrar) as suas ideias. Os autores realçam que esta falta de habilidade em efetuar traduções entre representações é um fator significativo que influencia a aprendizagem da Matemática e o desempenho na resolução de problemas.

Uso de representações pelos alunos

Para Cox (1999), as representações externas são cruciais na aprendizagem e podem ser produzidas com dois fins distintos: para uso pessoal ou para comunicar com os outros, sendo que a escolha do aluno da representação a utilizar depende, muitas vezes, da pessoa a quem se destina essa representação. Deste modo, as representações "pessoais" são mais dispersas e apenas parcialmente exteriorizadas, enquanto as representações que se destinam a ser partilhadas são mais corretamente construídas e mais convencionais. Refere ainda que os alunos argumentam através de múltiplas representações pelo que

todas elas constituem bons auxílios ao seu raciocínio e à forma como o exteriorizam, embora alguns alunos atribuam às representações externas um papel mais central para o seu raciocínio enquanto outros atribuem um papel mais secundário.

Para Lamon (2001), quando um aluno resolve as tarefas exatamente da mesma forma que o professor utilizou na sala de aula, poderá estar apenas a reproduzir o que lhe foi apresentado anteriormente, não ficando claro que ele tenha compreendido o(s) conceito(s) em questão. Por outro lado, quando o aluno efetivamente compreende o(s) conceito(s), consegue utilizar representações originais, criadas por ele. Para a autora, basear o ensino numa única representação ou introduzir apenas algumas representações pode deixar o aluno com algumas lacunas na sua compreensão. Nesta sequência, Ponte e Velez (2011) referem que quando os alunos tentam utilizar uma representação, anteriormente abordada, num contexto diferente, nem sempre têm sucesso pelo que reforçam a necessidade dos professores darem uma atenção particular à aprendizagem das representações, sublinhando que nem todas as representações matemáticas são aprendidas naturalmente pelos alunos com a realização das tarefas, ao contrário do que se podia pensar.

Uso de representações pelo professor

Para Kalathil e Sherin (2000), as representações desempenham um papel fundamental em sala de aula na medida em que: (i) ajudam os professores a compreender as ideias dos alunos e a forma como eles pensam; (ii) fornecem informação de padrões e tendências entre os alunos; e (iii) os professores podem usar as representações como objetos de discussão em sala de aula mostrando métodos de solução diferentes, utilizando-as como uma ferramenta didática. Webb, Boswinkel e Dekker (2008) desenvolveram o "modelo iceberg" que distingue as diferentes representações usadas pelo aluno. As representações informais (diagramas e explicações presentes nas experiências dos alunos) e pré-formais (construídas nas representações informais dos alunos, como a linha numérica dupla ou um modelo de área para a multiplicação) constituem a "capacidade flutuante". Por outro lado, a ponta do iceberg é constituída pelas representações formais (algoritmos). Deste modo, o modelo sugere uma formalização progressiva que implica que representações formais se baseiam em representações menos formais.

Representações simbólicas

Os números racionais geralmente estão associados ao termo "fração", mas essa é apenas uma forma de os representar, para além do numeral decimal e da percentagem. Para Lamon (2007), as frações são um dos tópicos do currículo escolar mais difíceis de ensinar e de aprender, no entanto, são os mais essenciais para o sucesso dos alunos no seu percurso matemático escolar. Para compreender o conceito de fração, como referem Llinares e Sánchez (1997), o aluno tem que compreender os seus diferentes significados – parte-todo, medida, quociente e operador, sendo as razões não um número racional, mas uma comparação entre duas grandezas – e a forma como se relacionam, o que se traduz num processo de aprendizagem a longo prazo.

Os números decimais, também muito presentes nos currículos de matemática do ensino básico, são uma das representações que os números racionais podem assumir e com a qual os alunos contactam desde muito cedo. No entanto, os alunos apresentam dificuldades ao trabalhar com estes números (Steinle & Stacey, 2003), devido à influência dos números naturais (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Deste modo, verificam-se erros relacionados com: (i) o zero, uma vez que os alunos tendem a ignorar o zero e pensam que 0,036 é igual a 36; (ii) a leitura e escrita dos números (valor de posição), quando interpretam centésimas como inteiros (Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Resnick et al., 1989). Uma das ideias centrais para a compreensão desta representação é o domínio deste sistema de numeração, sendo fundamental a noção de posição, base e ordem, bem como o papel da vírgula e do zero quando encontrado em diferentes posições (Baturo, 2000).

As percentagens são outra das representações que os números racionais podem assumir, sendo um tópico que tem merecido alguma atenção no campo da investigação. Para Parker e Leinhardt (1995), a percentagem é um dos tópicos mais úteis dos currículos matemáticos sendo, no entanto, um conceito difícil de aprender e de ensinar, e cuja ênfase está na forma como calculá-la rapidamente e não na compreensão do conceito. Para os autores, os alunos ignoram o símbolo da percentagem durante a resolução de uma questão e têm uma forte noção de percentagem como parte-todo, o que leva a incompreensões com percentagens maiores que 100%, uma vez que uma parte não pode exceder o todo. De acordo com os autores, o conceito de percentagem tem muitas interpretações e significados e cabe ao professor e ao aluno determinar qual o sentido de percentagem que melhor se adequa a cada contexto.

Relação entre as diferentes representações

As diferentes representações dos números racionais bem como a flexibilidade de conversão entre elas são fundamentais na aprendizagem destes números (Post et al., 1993). Como tal, o professor deverá proporcionar ao aluno tempo e oportunidade para que tal se concretize através do recurso a diferentes modos de representação no trabalho em sala de aula, demonstrando ao aluno as potencialidades de cada modo. Desta forma, ele pode mais facilmente optar pela representação que melhor se adequa à situação com que se depara. Por outro lado, também pode acontecer que durante a solução de um problema o aluno não recorra apenas a um único modo representacional (Behr et al., 1983), pelo que se torna impossível isolar cada uma das representações, nomeadamente num contexto de resolução de problemas.

Metodologia de investigação

Este estudo, que integra uma investigação mais ampla, em desenvolvimento, segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), dada a natureza do seu objetivo – identificar e compreender o raciocínio de alunos quando fazem conversões entre as diferentes representações do número racional. Os participantes são 4 alunos de uma turma do 5.º ano de uma escola de ensino público, no concelho de Olhão, constituída por 20 alunos. A escola integra um agrupamento que funciona como Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP), inserido num meio socioeconómico e cultural desfavorecido, verificando-se situações de insucesso, indisciplina e pouco envolvimento familiar na vida escolar. Este estudo foi realizado num contexto em que os alunos não estão habituados a partilhar ou discutir ideias, trabalhando sempre de modo individual, onde não se valoriza a comunicação matemática.

A recolha de dados decorreu no ano letivo de 2017/2018 (dezembro) através de recolha documental – um teste de diagnóstico aplicado antes de iniciar uma experiência de ensino, concebida e desenvolvida pela primeira autora do artigo - complementada com a realização de entrevistas semiestruturadas individuais aos 4 alunos, conduzidas igualmente pela primeira autora deste artigo, tendo em vista interpretar os seus raciocínios matemáticos. A seleção dos dados aqui apresentados teve por base a crescente importância atribuída ao papel das representações matemáticas na Educação Matemática, para o desenvolvimento de uma aprendizagem desta disciplina com compreensão, uma vez que potenciam o acesso de todos os alunos a ideias abstratas. Os alunos foram selecionados em

conjunto com o professor da turma, tendo por base a facilidade que apresentam na comunicação oral relativamente aos restantes elementos, resoluções que constituem exemplos do trabalho da restante turma e a diversidade de género. As entrevistas foram gravadas em áudio, num momento posterior à realização do teste, onde os alunos tinham a oportunidade de explicar a forma como pensaram para a resolução de cada uma das questões. A análise dos dados envolveu a organização das informações obtidas em categorias, sendo aqui considerado o domínio das representações.

Resultados

Numa das questões apresentadas aos alunos, estes teriam que partir de uma representação, pictórica ou simbólica, e fazer as restantes. Ao longo das entrevistas, os quatro alunos demonstraram saber que os números racionais podem ser representados de diferentes formas, no entanto, a maioria não conseguiu efetuar conversões entre elas. A resolução de Nádia (figura 1), apresentada de seguida, bem como a de Rute e Miguel, mostra a forma como os alunos pensaram acerca do modo como convertem entre as diferentes representações do número racional.

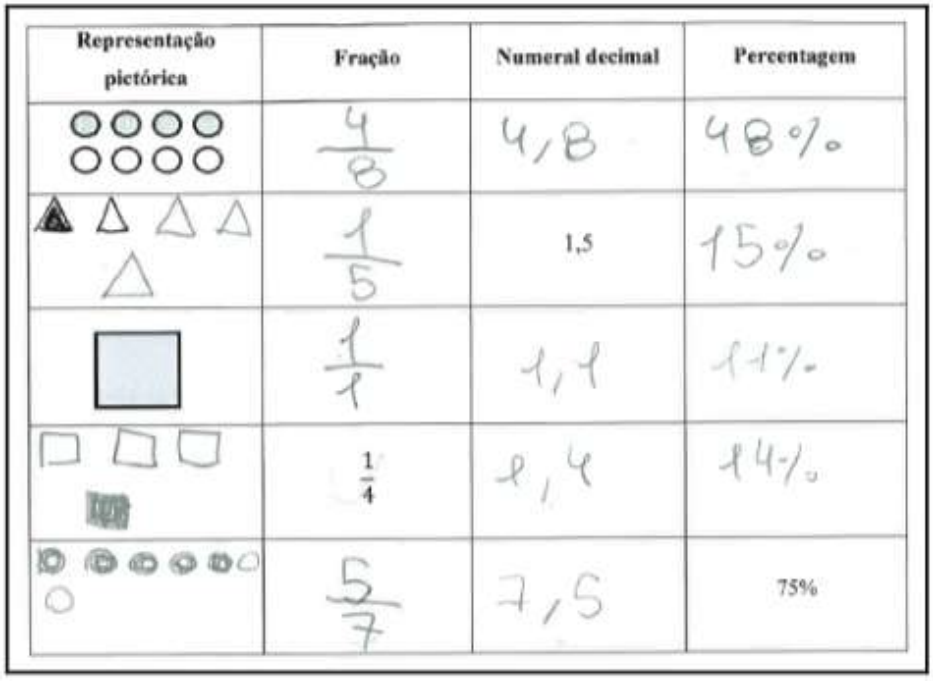


Figura 1. Resolução de Nádia.

Apesar de envolver valores considerados de referência, os alunos não conseguiram estabelecer relações elementares, como "metade" corresponder a 50% ou a 0,5 ou uma unidade inteira, representada pictoricamente, corresponder a 100%. A partir da

representação pictórica, os alunos conseguem obter a representação fracionária com alguma facilidade, tendo-se verificado as maiores dificuldades em especial nas conversões entre percentagem, numeral decimal e fração. Para converter uma fração num numeral decimal, Nádia substituiu o traço de fração por uma vírgula, colocando o numerador da fração na parte inteira do numeral e o denominador na parte decimal. A partir desta representação, efetuou a percentagem retirando a vírgula ao numeral decimal e acrescentando o símbolo da percentagem a seguir ao número. Quando questionada acerca do seu raciocínio, na primeira situação, referiu que "como isto é um quatro e isto é um oito, pensei que podia passar para 48 por cento. Pus só [o símbolo da] percentagem e tirei a vírgula! Fiz todas assim!". Em percentagens como 75%, começou por fazer o processo inverso. Obteve o numeral decimal 7,5 e a fração , no entanto, acabou por inverter os termos da fração, passando a ficar , demonstrando mais familiaridade e conhecimento de frações próprias. A afirmação de Nádia "como sete não dava por cinco, fiz cinco por sete", deixa perceber que, para a aluna, o número de partes consideradas tem que ser inferior ao número de partes em que se dividiu a unidade. Miguel parece ter seguido o mesmo raciocínio e explica a sua resolução:

Miguel:	Na fração fiz cinco de sete.
Professora:	Tu primeiro tinhas sete no numerador e depois trocaste. Porquê? É curioso porque nos outros casos tens o número que está antes da vírgula em cima e o que está depois da vírgula, em baixo.
Miguel:	Porque pensava que o número mais pequeno tinha que estar sempre em cima. E sete não dá por cinco, por isso, fica cinco por sete.

Quanto à representação em fração, os discursos demonstram familiaridade com o significado parte-todo apenas para frações próprias. Dos quatro alunos entrevistados, apenas David (figura 2), revelou compreensão e flexibilidade na conversão entre as diferentes representações do número racional, mesmo para percentagens superiores a 100%.

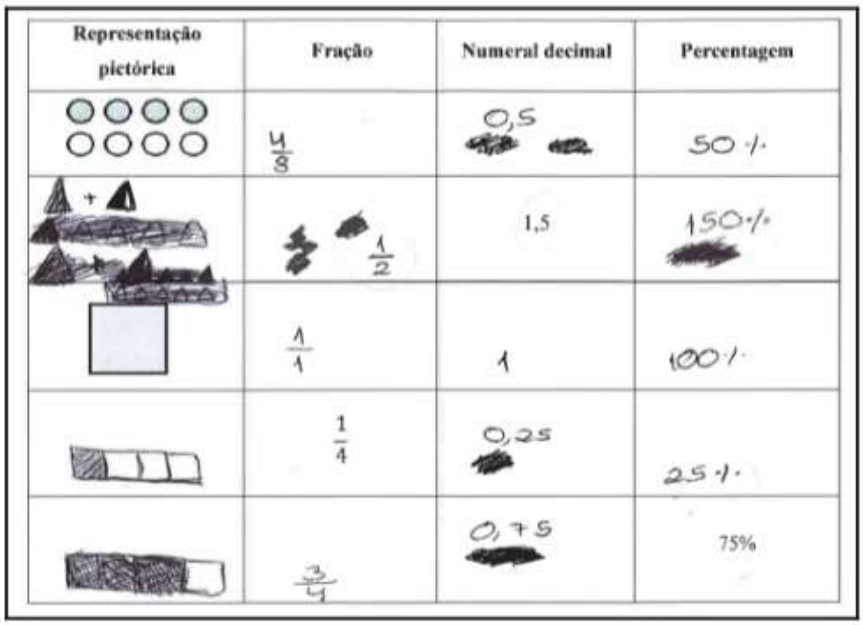


Figura 2. Resolução de David.

O aluno demonstrou conhecer alguns valores de referência como 0,5 e 50% corresponder a metade e 1 ou 100% corresponder a uma unidade inteira e utilizou esse conhecimento com alguma flexibilidade ao longo da questão. Na situação em que é fornecido o numeral 1,5, o aluno referiu de imediato que "uma unidade é isto (aponta para um triângulo todo pintado) e metade é mais um triângulo pintado, mas metade do triângulo". No entanto, não conseguiu efetuar corretamente a representação fracionária deste numeral, referindo não se lembrar do raciocínio que o levou a tal representação.

Outra das questões apresentadas aos alunos envolvia a ordenação de numerais decimais, no sentido de tentar perceber como o sistema de numeração decimal é compreendido pelos alunos. Na resolução desta questão verificaram-se três tipos de erros entre os alunos entrevistados. Rute ordenou os numerais de acordo com o número de algarismos (figura 3). Para a aluna, o numeral decimal que representa uma menor quantidade é aquele que tem menor número de algarismos, quer seja à direita ou à esquerda da vírgula, independentemente do valor da parte inteira. Explica que "este [0,5] é o mais pequeno de todos, tem só o zero e o cinco. Os outros números todos são maiores porque têm mais números e aqui tem menos". Nas situações em que o número de algarismos coincidiu, a aluna considerou apenas o valor da parte decimal, fazendo a sua leitura como se fosse um número inteiro, referindo que "aqui é o 2,329 e depois é o 0,459. Eu acho que só estes aqui [parte decimal] é que contam, não é?".

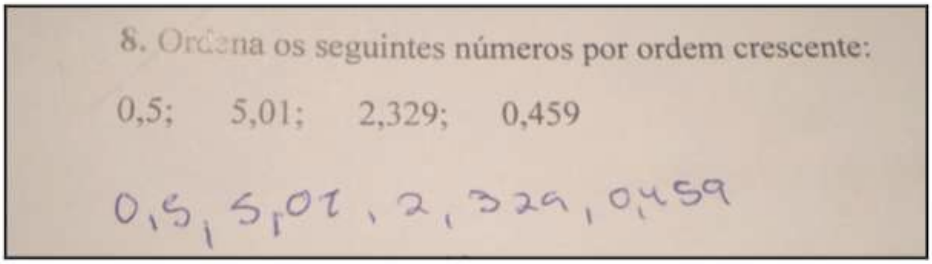


Figura 3. Resolução de Rute.

Nádia (figura 4) ordenou os numerais de acordo com o número total de algarismos referindo que "primeiro é o 0,5 porque tem menos casas lá daquele lado! Depois é o 5,01 porque os outros têm uma, duas, três, quatro casas decimais e este só tem três!". Nas situações em que este coincidiu, considerou a parte inteira e justificou que "depois pus o 0,459 porque o outro [2,329] tem três casas decimais também só que tem um dois e ali tem zero".

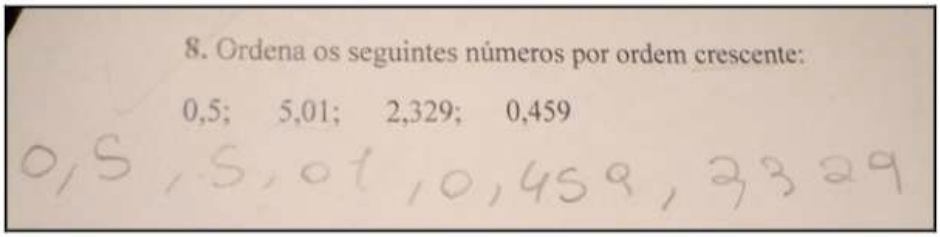


Figura 4. Resolução de Nádia.

Miguel demonstrou saber ler corretamente a parte decimal, e foca a sua atenção apenas nesta parte para a sua ordenação. O episódio seguinte refere-se ao momento em que o aluno tentou resolver a questão, durante a entrevista, onde procurou justificar o seu raciocínio:

Professora: Qual achas que é o número mais pequeno?
Miguel: É 459 milésimas porque eu lembro-me bem que a minha professora disse que este aqui [0,5] pode ser o mais pequeno só que é décimas e as décimas é maior do que as milésimas.
(…)
Professora: E dos outros, qual é o mais pequeno?
Miguel: É o 5,01 porque é centésimas e o 0,5 é décimas e a décima é maior do que a centésima.

A estratégia de ordenação seguida por Miguel através da leitura das partes decimais mostra que o aluno não está a considerar corretamente o valor de posição dos algarismos, o que pode induzi-lo em erro na comparação de numerais como, por exemplo, 0,325 e 0,12 pois nesta situação irá pensar que 0,12 seria maior que 0,325.

David ordenou corretamente os numerais apresentados, expondo a sua justificação: "Estes dois têm zero mas a seguir, aqui é quatro e aqui é cinco e quatro é menor que cinco. Depois pus o 2,329 porque o dois aqui é menor do que este cinco aqui". O aluno comparou os algarismos um a um, tendo em conta o valor posicional de cada algarismo que constitui o numeral, evidenciando várias ideias sobre números decimais.

Outra das questões apresentadas aos alunos e aqui analisada envolvia a reconstrução pictórica da unidade, sendo dada a informação na representação fracionária, decimal ou percentagem, acompanhada pela representação pictórica. Este foi um aspeto particularmente difícil, nomeadamente quando envolvia numerais decimais, percentagens ou frações que representam grandezas discretas. Na reconstrução da unidade envolvendo numerais decimais, dos quatro alunos entrevistados nenhum conseguiu realizar a questão com sucesso. David, Miguel e Nádia, perante o numeral decimal 0,6 e uma figura constituída por três triângulos, acrescentaram mais três, considerando 6 décimas como 6 unidades (figuras 5a, 5b e 5c).

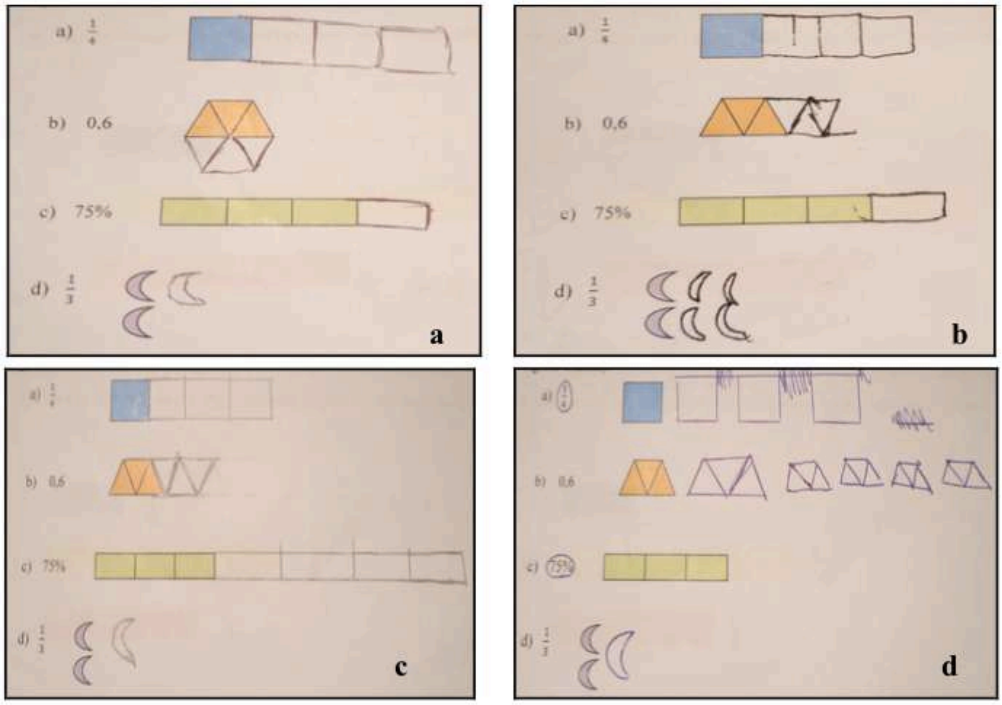


Figura 5. Resoluções de David (a), Miguel (b), Nádia (c) e Rute (d).

Quando questionado acerca da sua resolução, Miguel respondeu que "no início, eu pensei que estes três aqui mais estes três aqui equivaliam a estes seis aqui!". Rute considerou igualmente 6 décimas como 6 unidades, mas que cada unidade era constituída por um conjunto de três triângulos pelo que representou mais cinco figuras iguais (figura

5d). Uma vez mais verifica-se que os alunos têm tendência a ignorar o zero e consideram que 0,6 é o mesmo que 6 unidades, pelo que demonstram não compreender a estrutura global do número e encaram-no como um número inteiro.

Na reconstrução da unidade envolvendo percentagens, David e Miguel (figuras 5a e 5b, respetivamente) verificaram que deveriam acrescentar mais um retângulo à figura, que representava 25%, a quantidade que necessitavam para obter 100%. David dividiu os 75% pelos três retângulos atribuindo 25% a cada um e Miguel foi por tentativas começando por atribuir 15% a cada retângulo.

Miguel:	Eu de momento pensei que tinham de ser sete retângulos, mas depois de pensar acrescentei só um.
Professora:	Porquê só um?
Miguel:	Eu pensei quanto é que valia cada um para dar 75%. Pensei em quinze, mas não dava. Tinha de ser um bocadinho mais de quinze. Então é vinte e cinco mais vinte e cinco mais vinte e cinco mais vinte e cinco. Só precisava de mais um.

Nádia pensou que o número sete correspondia ao número total de retângulos da figura, deste modo, desenhou mais quatro retângulos iguais (figura 6). Justificou que "aqui já estava três… mais…. 1, 2, 3, 4, dava sete!". Rute (figura 6) não conseguiu resolver a questão.

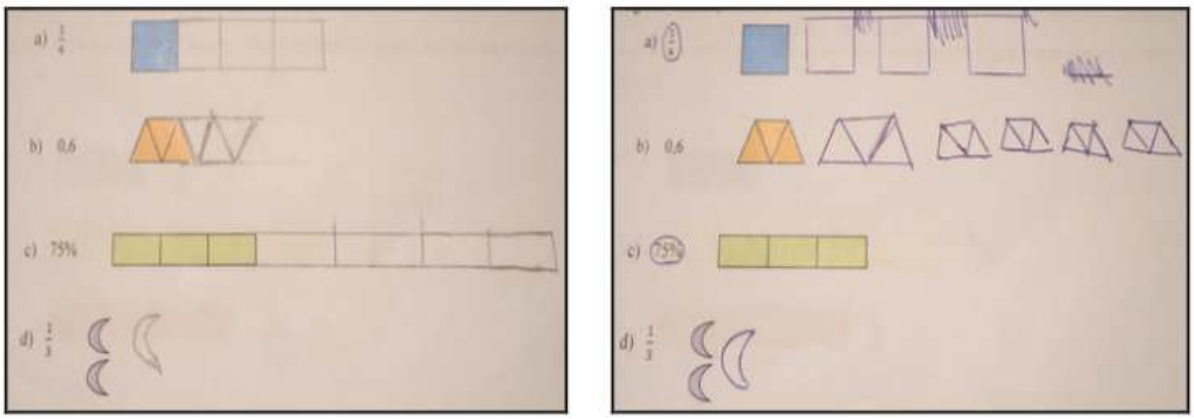


Figura 6. Resoluções de Nádia e Rute, respetivamente.

Quanto à reconstrução da unidade envolvendo grandezas contínuas (primeira situação), de um modo geral os alunos demonstraram um desempenho adequado. Compreenderam que o denominador representava o número de partes iguais em que deveria estar dividida a unidade, das quais tinham apenas uma, pelo que acrescentaram mais três. Já com grandezas discretas, David, Nádia e Rute consideraram que o denominador 3 representava o total de luas, assim, desenharam apenas mais uma.

Referiram que, quando as grandezas são discretas, é mais confuso porque " não podem ser duas coisas". Ana Rita justificou que "acrescentei uma lua porque era uma de três. Eu não percebi muito bem porque está aqui um 1 e estão duas pintadas…". Miguel resolveu a questão corretamente, no entanto, quando questionado acerca da sua resolução, a sua justificação demonstrou uma conceção errada relativamente ao significado parte-todo envolvendo grandezas discretas. O aluno considerou que o denominador indicava o número total de luas na parte inferior, pelo que acrescentou mais duas para obter três, e que o numerador indicava o número de luas pintadas na parte superior, pelo que acrescentou novamente mais duas, ficando apenas pintada uma delas.

Considerações finais

Os resultados apresentados evidenciam que a fração parece constituir a representação mais familiar aos alunos, que facilmente associam a uma representação pictórica e vice-versa. Contudo, isto é apenas verdade para a fração própria. As representações em numeral decimal e percentagem constituem grandes obstáculos, demonstrando não serem compreendidas concetualmente. Relativamente ao numeral decimal, a forma como esta representação é obtida a partir de outra, ou os erros evidenciados na sua ordenação sugerem que o sistema de numeração decimal não é compreendido pelos alunos. Estes demonstram não reconhecer o valor dos algarismos nem o papel do zero em diferentes posições nesta representação. Ao considerar que é maior o número que tem mais algarismos na parte decimal, acabam por ser induzidos em erro na ordenação de numerais como 0,5 e 0,459, sendo este um dos erros mais frequentes no trabalho com estes números (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Os alunos demonstraram ainda desconhecer o significado associado ao símbolo da percentagem ao adicioná-lo ou removê-lo ao longo das questões como se não tivesse qualquer valor. Além disso, não consideram percentagens maiores que 100%, o que demonstra uma noção de percentagem como parte-todo, pois consideram que uma parte não pode exceder o todo (Parker & Leinhardt, 1995). Dos alunos entrevistados, David foi o único que demonstrou conhecimento acerca do valor de posição dos números.

No que diz respeito à conversão entre representações, este aspeto mostrou-se particularmente difícil. Apesar da reconhecida importância de efetuar conversões entre as diferentes representações dos números racionais para o desenvolvimento do sentido de número racional e do sentido de operação (Huinker, 2002; Lesh et al., 1987; Vos, 2012), as

justificações relativas à forma como foram efetuadas bem como a falta de conhecimento de valores de referência, sugerem que este domínio poderá não ter sido bem compreendido aquando da sua instrução ou que as diferentes representações do número racional podem ter sido abordadas isoladamente, o que leva o aluno a não conseguir estabelecer uma ponte entre elas (Lesh et al., 1987). Isto evidencia a necessidade de um trabalho em sala de aula que promova a conversão de um sistema representacional para que o conhecimento do aluno não se construa de forma fragmentada.

Agradecimentos

Este trabalho foi elaborado com o apoio financeiro da Universidade de Lisboa no âmbito de uma bolsa individual de doutoramento com a referência – bd2016#86639.

Referências bibliográficas

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.) *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95–103). Fremantle, WA: MERGA.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

Bruner, J. (1999). Para uma teoria da educação. Lisboa: Relógio d'Água.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*, 343-363.

Cramer, K., & Post, T. (1995). Facilitating children's development of rational number knowledge. In D. Owens, M. Reed, & G. Millsaps (Orgs.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of PME-NA* (pp. 377-382). Columbus, OH: PME.

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21–29.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Guerreiro, H. G., & Serrazina, L. (2015). A construção do conceito de número racional através de múltiplas representações. In: M. Pires, R. Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martino, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, T. Pimentel, & L. Santos (Eds.), *Atas do Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp. 99-113). Bragança: SPIEM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-203). New York, NY: Routledge.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller, & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Kalathil, R., & Sherin, M. G. (2000). Role of students' representations in the mathematics classroom. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (pp. 27-28). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In F. R. Curcio (Ed.), *The roles of representation in school mathematics*: *2001 Yearbook* (pp. 146-165). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Greenwhich, CT: Information Age.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones: La relacion parte-todo*. Madrid: Sintesis.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-482.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 22(1), 55-81.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim GEPEM*, *59*, 53-68.

Post, T, Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Learning, teaching, and assessing rational number concepts: Multiple research perspectives* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8–27.

Steinle, V. & Stacey, K. (2003). Grade-elated trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 259–266). Honolulu, Hawaii: PME.

Vos, K. E. (2012). Fractions, decimals, and percents: Development and intervention guide. Wisconsin Rapids, WI: Renaissance Learning.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110-113.

UM PANORAMA DOS PROGRAMAS DE ARITMÉTICA DOS GRUPOS ESCOLARES DE SANTA CATARINA, BRASIL: 1911 E 1946

Thuysa Schlichting de Souza, David Antonio da Costa

[1]Universidade Federal de Santa Catarina, prof.thuysa@gmail.com

[2]Universidade Federal de Santa Catarina, david.costa@ufsc.br

Resumo. *Analisaremos as determinações oficiais para a matéria de Aritmética nos Programas de Ensino dos Grupos Escolares de Santa Catarina durante as reformas "Orestes Guimarães" e "Elpídio Barbosa". Busca-se evidenciar as continuidades e as rupturas entre os conteúdos e os métodos prescritos em ambas as reformas. Como fontes de análise são utilizadas as legislações que consubstanciaram as reformas, em especial os Programas de Ensino dos Grupos Escolares de 1914 e 1946. Observamos que o ensino intuitivo representou uma inovação no pensamento pedagógico e permaneceu influenciando o currículo do ensino primário em tempos de escolanovismo.*

Abstract. *We will do an analysis of state policies applied to teaching programs on Arithmetic's subjects regarding school groups during reforms "Orestes Guimarães" and "Elpídio Barbosa". We intend to analyze continuities and breakthroughs on subjects and methods recommended on both reforms, evidencing pedagogic movements, which were present at the moment. Regarding research sources, mainly legislations that contributed to these reforms were used, especially Primary School teaching programs of 1914 and 1946. Programs analysis states that intuitive teaching represented an innovation on pedagogic thinking and remained influencing primary school curriculum during the new school movement.*

***Palavras-chave**: História da educação matemática; aritmética escolar; método intuitivo; escola ativa.*

Breve contextualização do cenário educacional

Durante o período que os historiadores brasileiros denominam de Primeira República (1889-1930), o governo federal empreendeu várias reformas no campo da educação no Ensino Secundário. Já o Ensino Primário se encontrou sobre a influência dos governos estaduais até a instauração das reformas realizadas durante o período que se convencionou chamar de Era Vargas (1930-1964).

Diante da falta de uma orientação nacional, surgiram diversas propostas estaduais de reforma na educação. Nesta comunicação, estamos interessados nas transformações educacionais ocorridas no Estado de Santa Catarina, mais precisamente nas reformas Orestes Guimarães, em 1911, e Elpídio Barbora, em 1946.

A primeira foi motivada pelo interesse das elites republicanas em reorganizar a instrução pública a partir do modelo adotado em São Paulo. A Reforma determinou

mudanças no ensino em nível estrutural e pedagógico. Destacamos a implantação dos Grupos Escolares como uma das maiores inovações desta reestruturação educacional no Estado.

Segundo Nóbrega (2003), os Grupos Escolares inauguraram um modelo de cultura escolar específico que utilizou de uma forma de organização administrativa, programática, metodológica e espacial baseada nas concepções educacionais da Pedagogia Moderna. Pressupunha a uniformização e a seriação dos conteúdos, distribuídos racionalmente no tempo de curso.

Nas primeiras décadas do século XX, o ensino público catarinense foi reorganizado algumas vezes, mas os aspectos básicos propostos pela Reforma Orestes Guimarães continuaram presentes nos programas dos Grupos Escolares (Souza, 2016). A Reforma Elpídio Barbosa procurou instituir mudanças mais efetivas no curso primário, endossadas por uma nova política de ensino.

As motivações dessa reorganização estavam nas Leis Orgânicas Federais, as quais fizeram parte de um movimento de centralização e uniformização do sistema educacional do País. Em âmbito estadual, a promulgação da Lei Orgânica do Ensino Primário do Estado de Santa Catarina (Decreto S.C., 1946) adequou o curso primário às renovações educacionais e às ideias da Escola Nova.

Convém salientar que os dois modelos pedagógicos – a Pedagogia Moderna e a Escola Nova – evidenciados nas referidas reformas se configuraram nos estados brasileiros durante as cinco primeiras décadas republicanas, inclusive em Santa Catarina.

Em suma, o primeiro modelo surgiu em oposição ao excessivo intelectualismo da Pedagogia Tradicional e, dessa maneira, defendia veementemente o “ensino ativo”. Já a Escola Nova propunha uma “escola ativa” com ênfase na atividade e no interesse da criança. Vidal (2005) explicita as principais ideias de ambos modelos, realçando as diferenças entre ensino ativo e escola ativa:

> ..., ensino ativo e escola ativa distinguiam-se na fala dos escolanovistas pela própria concepção de atividade. Se a primeira acepção concernia à maneira como o conteúdo deveria ser trazido ao aluno e supunha a atividade dos professores na realização de experiências e no oferecimento de imagens e objetos que concretizassem a aula; a segunda deslocava para os alunos a feitura das tarefas. Era pela ação dos métodos de projeto e centros de interesse que as crianças deveriam solucionar problemas e construir experimentos, ainda que sempre orientadas pelos docentes. (p. 11)

Mediante tais considerações e focalizando o objeto deste estudo, surge o seguinte questionamento: como os conteúdos de Aritmética e a forma de ensiná-los se

caracterizavam diante dos referidos modelos pedagógicos? Evidenciam-se, dessa forma, os conteúdos de Aritmética que foram suprimidos ou mantidos de uma reforma para outra e os métodos que deveriam ser utilizados tendo em vista as vagas pedagógicas vigentes. Para tal intento, privilegiamos como fontes de análise as legislações que consubstanciaram ambas as reformas, em especial os Programas de Ensino dos Grupos Escolares de 1914 e 1946.

A Aritmética na Reforma Orestes Guimarães: por um ensino ativo

O decreto de 22 de abril de 1911 (Decreto S. C., 1911) aprovou o Programa de Ensino dos Grupos Escolares em Santa Catarina para atender à Reforma no Estado. Este programa foi dividido em quatro anos e os conteúdos prescritos categorizados em matérias. Os saberes matemáticos foram separados entre as matérias de Aritmética, Geometria e Desenho, contempladas em todos os anos do curso primário.

O Programa de Ensino dos Grupos Escolares de 1914, em relação à matéria de Aritmética, apresenta os conteúdos a serem ensinados em cada ano escolar de forma detalhada, além de explicitar os passos metodológicos e descrever as fases de ensino minuciosamente. Focalizando os conteúdos aritméticos indicados no programa, a Tabela 1 sintetiza os assuntos por cada ano de escolarização.

Tabela 1. Síntese do Programa dos Grupos Escolares Estado de Santa Catarina (Aritmética) - 1914

Ano escolar	Prescrições
1º	A ideia de número antes de algarismo. As quatro operações simultaneamente. Os números até 20. Cópia e leitura do quadro de Parker até a página 1211 (seção C), página 16 (seção B) ou página 20 (seção A). Contar, somar, diminuir, multiplicar e dividir até 100 (apenas para a seção A).
2º	Recapitulação do programa do 1º ano. Cálculos mentais do quadro de Parker das páginas 20 a 24. Formação dos números entre as dezenas, centenas e milhares; quadro de Parker da página 25 a 32. Tabuada de multiplicar e dividir até cem pelo Quadro de Parker. Divisão da unidade em décimos, centésimos, milésimos. Definição de soma e subtração e conhecimento de suas partes. Multiplicação e divisão com até três algarismos no multiplicador e divisor. Moeda brasileira. Conhecimento prático do metro, seus submúltiplos e múltiplos.

3º	Multiplicação e divisão de inteiros, casos completos e casos de abreviações. Problemas sobre a multiplicação e divisão, conjuntamente. Valor absoluto e relativo dos algarismos. Numeração romana. Ideia da divisão da unidade. Leitura, representação e termos da fração ordinária. Conhecer as frações próprias e impróprias, homogêneas e heterogêneas. Leitura e escrita das frações decimais. Redução de decimais a mesma espécie. Transformar frações ordinárias em decimais e vice-versa. As quatro operações sobre decimais. O metro, múltiplos e submúltiplos. Medidas derivadas do metro, múltiplos e submúltiplos. Conhecimento das medidas de superfície. Adição e subtração de frações homogêneas. Processos de redução à unidade. Conhecer os números simples, compostos, primos, múltiplos e primos entre si. Reconhecimento dos números primos. Características da divisibilidade.
4º	Recapitulação do 3º ano. Divisão por cancelamento. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum. Números inteiros, fracionários e mistos. Valor das frações conforme seus numeradores e seus denominadores. Redução de frações. Extração de inteiros. Transformar os números inteiros e os mistos em fração. As quatro operações sobre frações ordinárias. Dízimas periódicas – geratrizes. Unidades principais do sistema métrico. Adição, subtração, multiplicação e divisão métrica. Redução métrica. Números complexos. Razão. Princípios de proporção. Regra de três simples. Divisão em partes proporcionais. Porcentagem. Juros, juros simples.

Nota: Decreto S. C., 1914a.

A seleção e a disposição dos saberes aritméticos no programa, conforme indicado na Tabela 1, suscitam algumas questões. Primeiramente, observa-se que os conteúdos se desenvolvem pelo aumento crescente de dificuldade e são aprofundados progressivamente, de maneira que os conhecimentos exigidos nos anos mais avançados dependam essencialmente daqueles aprendidos nos anteriores.

Seguindo este princípio, é notório o fato de que a quantidade de conteúdo prescrita para os dois primeiros anos de curso era significativamente menor do que nos posteriores. No caso do primeiro ano, era indicado basicamente o ensino dos rudimentos da Aritmética, em especial da noção de número e das quatro operações básicas. Destacam-se as seguintes recomendações:

> O professor muna-se de collecções de objetos iguaes, bem sensiveis á vista dos alumnos, pelas suas dimensões – lugar em que estejam colocados – e estabeleça palestras encaminhando o ensino, de modo que, apresentada uma collecção – ora de tres, ora de quatro, de seis, sete, etc., dez objetos – eles divulguem e digam quantos são, ex:
> - Paulo, quantas taboinhas tenho aqui?
> - Quatro taboinhas.
> - (Retirando as mãos atraz das costas e apresentando a coleção augmentada).
> - E agora?
> - Nove taboinhas.
> - ...

> (Pratiquem bem estes exercicios variando o emprego das quantidades das collecções de objetos e augmentando-as paulatinamente até 20). (Decreto S.C., 1914a, p. 21)

As orientações evidenciadas no trecho anterior mostram que o método adotado nessa etapa dá ênfase ao empírico, à observação, ao ver, ao tocar e ao sentir. As "palestras" proferidas pelos professores objetivavam despertar o sentido da observação no aluno. Esperava-se que ele descobrisse por si mesmo as primeiras ideias do número por meio do contato com os objetos disponibilizados. Apesar disso, as indicações ainda eram voltadas às ações do professor, para aquilo que o docente deveria ou não realizar nas fases educativas. Ou seja, as práticas de ensino permaneciam centradas no protagonismo do professor e não no da criança.

Além disso, observa-se que para o ensino dos números e das quatro operações eram realizados processos de união e separação dos objetos de uma coleção. Esse modo é semelhante à estrutura das atividades apresentadas em Palestras sobre o ensino, de Francis Parker. Para o autor, as primeiras ideias de número e de suas relações devem ser obtidas diretamente pelos sentidos e, quanto às quantidades, pelas repetidas limitações de números de coisas. Considera ainda que as operações aritméticas se reduzem a um dos processos de unir ou separar: reunindo números desiguais (fazendo deles um todo) obtém-se a adição; reunindo números iguais pratica-se a multiplicação; o inverso desses constituem a subtração e a divisão, respectivamente.

A aprendizagem dos números de um a vinte exigiria primeiramente a compreensão das quantidades iguais que formam ou que se contêm em um número, depois as partes iguais de um número, e finalmente, quantidades quaisquer que formam ou que se contêm em um número. Isto implica diretamente em dois fatos: o ensino dos números e suas operações tornam-se demorados; as quatro operações básicas devem ser ensinadas simultaneamente.

Embora seja disponibilizado um tempo expressivo para o ensino dos números e suas relações nos dois primeiros anos do curso primário, parece que há uma ruptura no processo sugerido por Parker nas prescrições do terceiro e do quarto ano. Nessas séries, eram abolidos os exemplos de exercícios e as notas explicativas para os professores, já os conteúdos apareciam em maior quantidade e apresentavam um caráter mais abstrato e complexo.

As questões ressaltadas até o momento permitem compreender que o trabalho pedagógico esperado pelos reformadores da instrução pública catarinense para a matéria

de Aritmética estava relacionado à atividade prática que o aluno deveria realizar sobre os objetos pela observação direta dos fatos: o conhecimento passa pela percepção do aluno diante objeto e não pela memorização desse conhecimento pelo aluno. Assim, o método basilar desse programa investe no ensino concreto, racional e ativo, denominado lições de coisas ou ensino intuitivo (Teive, 2014).

O Regimento Interno dos Grupos Escolares de 1914 também realçava as concepções do método intuitivo como orientadoras para o ensino de Aritmética: "O ensino de arithmetica terá em vista desenvolver o raciocinio, ministrar noções necessárias á vida pratica. As denominações e as definições, ... que se façam necessarias, serão deduzidas dos exemplos, pelos alunos". (Decreto S. C., 1914b, p.18)

É possível verificar que as finalidades almejadas pelos reformadores catarinenses para o ensino de Aritmética eram desenvolver o raciocínio e proporcionar conhecimentos necessários à vida prática. Parker (1909, p. 96) argumenta em seu livro que a Aritmética tem as funções de exercitar o poder de calcular com exatidão e rapidez, e de desenvolver logicamente o poder de raciocinar.

Cabe ressaltar que os materiais didáticos difundidos para uso em sala de aula, em tempos de Pedagogia Moderna no estado, compreendiam os objetos concretos, como pedrinhas e *taboinhas*, e os Quadros de Parker, em substituição aos livros de textos para memorização. De acordo com Valente (2014), os Quadros de Parker integram um conjunto de gravuras organizado e técnico, cuja finalidade é facilitar a condução metódica do ensino pelo professor. As gravuras são acompanhadas de orientações e instruções aos docentes, indicando a maneira de utilizá-las para o ensino dos conteúdos aritméticos.

A Aritmética Na Reforma Elpídio Barbosa: por uma escola ativa

A Reforma no sistema de ensino público de Santa Catarina, em 1946, visava conformar o estado com as renovações educacionais que passaram a vigorar no País, as quais eram representadas pela expressão Escola Nova. Sendo assim, investiu-se na adequação do currículo da escola primária aos postulados do novo pensamento pedagógico e instituiu-se o Programa para os Estabelecimentos de Ensino Primário.

Nesse programa, uma nova proposta quanto à organização das matérias foi inaugurada: os saberes escolares foram agrupados por eixos temáticos que reúnem um conjunto de matérias afins a serem ensinadas. Cada eixo foi dividido em três itens: o primeiro explicitava os objetivos do ensino para cada ano escolar; o segundo apresentava

um sumário da matéria com os conteúdos de ensino; e por fim, o último fornecia sugestões práticas em relação aos conteúdos indicados no sumário.

Especificamente quanto aos conteúdos matemáticos, estes estão incluídos na matéria denominada “Programa de Iniciação Matemática”. O sumário para cada série é disposto em três áreas temáticas: Aritmética, Geometria e Problemas e exercícios. Em relação aos conteúdos específicos de Aritmética, os assuntos são distribuídos em subtópicos numa ordem sequencial de desenvolvimento, conforme se observa na Tabela 2:

Tabela 2 - Síntese do Programa para os Estabelecimentos de Ensino Primário SC (Aritmética) - 1946

Série escolar	Prescrições
1ª série	**Numeração:** noção de unidade e coleção. Representação gráfica das coleções – símbolos numéricos até 9. Subtração sucessiva de um elemento ou unidade. O símbolo zero. Comparação de coleções. Noção de ordem numérica até nove. Noção de número par e ímpar. Coleções de dez e de doze objetos. Representação gráfica até 50. Estudo dos números até 100. Números romanos até XII. **Operações fundamentais:** Adição e subtração de números simples. Sinais dessas operações e o de igualdade. Cálculos dispostos em colunas. Noção de dobro e de metade do número. Meia dezena e meia dúzia. **Moedas:** O cruzeiro e suas divisões. Troco.
2ª série	**Numeração:** Recapitulação do programa do 1º ano. Centenas. O zero - valor e utilidade. Noção de milhar. Composição e decomposição de números de 3 e 4 algarismos. Série natural dos números inteiros até 10.000. Ordem crescente e decrescente. Números pares e ímpares. Numeração romana até XXX. **Operações fundamentais:** Adição e subtração de números compostos de 2 e 3 algarismos. Noção de multiplicação - repetição de parcelas iguais. Multiplicação com o multiplicador simples. Divisão por números simples. Simplificação da divisão por múltiplos de 10. Divisibilidade por 2, 5 e 10. Prova real. **Frações:** Fração ordinária. Décimos e centésimos em forma decimal. Soma e subtração de centésimos. **Unidade de medida:** Conhecimento prático do metro, litro, quilo e hora. **Moedas:** O cruzeiro e sua subdivisão.
3ª série	**Numeração:** Recapitulação do programa do ano anterior. Formação dos números compreendidos entre duas dezenas de milhar consecutivas. Leitura, escrita, composição e decomposição de números até centena de milhar. Numeração romana até C. **Operações fundamentais:** Adição e subtração (números inferiores a 100.000). Multiplicação e divisão de números composto. Provas reais. Multiplicação e divisão por potências de 10. Divisibilidade por 2, 3, 5 e 9. **Frações:** Frações ordinárias e decimais. Equivalência de frações ordinárias. Frações como parte do inteiro. O número decimal. As quatro operações sobre frações e números decimais. **Unidades de medida**: Metro, litro, quilograma. Aplicação do estudo das frações decimais às medidas de comprimento, capacidade e massa. **Moedas:** moedas e cédulas.

4ª série	**Numeração:** Revisão do estudo feito na série anterior. Formação dos números até bilhões – leitura e escrita. Conhecimento dos símbolos romanos D e M através das datas históricas. Valor absoluto e relativo do número. **Operações fundamentais e potenciação:** Estudo completo das quatro operações. Prova dos nove. Noção de potência. **Propriedades dos números**: Números primos e múltiplos. Decomposição do número em fatores primos. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. **Frações:** Fração ordinária própria, imprópria, redutível, irredutível, homogêneas e heterogêneas. Números mistos. Simplificação e comparação de frações. As operações sobre frações ordinárias. **Unidade de medida**: Noção de escala. Unidades de área e ângulo. Minutos e segundos - tempo e ângulo. Temperatura. **Sistema monetário brasileiro:** moedas e cédulas.

Nota: Decreto S. C., 1946.

A organização dos saberes aritméticos, conforme indicado na Tabela 2, possibilita a aprendizagem gradual e progressiva dos conteúdos, incorporando gradativamente novos conceitos àqueles já trabalhados. A indicação da revisão do estudo realizado na série anterior, antes da introdução de novos conhecimentos, é um indício da permanência de certas práticas estabelecidas no programa de 1914.

O sumário destacado na Tabela 2 foi prescrito visando à normatização dos conteúdos a serem estudados em cada série escolar. Apesar de o Programa apresentar algumas indicações de ordem metodológica, a forma como o professor deveria ensinar os conteúdos era esclarecida minuciosamente no item “sugestões práticas” e “observações finais”. Em linhas gerais, orientava-se que o ensino fosse dado intuitivamente e por processos ativos (Decreto S. C., 1946, p. 12). O ensino por meio da intuição ficava a cargo da utilização de materiais concretos, como madeiras e grãos diversos, já os processos ativos eram atingidos por meio de jogos, modelagem, problemas práticos, entre outros.

A manutenção do método intuitivo, principalmente para os dois primeiros anos, sugere mais uma vez uma sólida herança pedagógica da Reforma Orestes Guimarães no programa de 1946. No entanto, é possível identificar também a influência das concepções escolanovistas no currículo do curso primário mediante indicação de processos ativos, além da estreita relação entre ensino e prática.

Lourenço Filho (1978), um dos principais intelectuais escolanovistas do país, defendia o papel ativo do aluno no processo educativo, pois os alunos aprenderiam “observando, pesquisando, perguntando, trabalhando, construindo, pensando e resolvendo situações problemáticas apresentadas” em relação a um ambiente de coisas e ações práticas ou em situações de sentido social e moral, reais ou simbólicos (p. 151), por isso a importância dada às atividades variadas.

Além desses aspectos, a Escola Nova propunha um novo olhar sobre a criança e sua inserção na sociedade, pois compreendia que a escola não poderia estar alheia aos problemas sociais, como salienta Lourenço Filho (p. 249), "a dimensão própria da ação educativa é de ordem social e cultural" (p. 249). Dessa forma, a escola deveria formar a criança para viver em sociedade, conformando as necessidades de cada indivíduo ao meio social. Esta ideia pode ser verificada no Programa da 4ª série:

> por meio de palestras a respeito de visitas a escolas industriais, às oficinas da Estrada de ferro, ..., a outros centros de trabalho onde os alunos possam coletar dados para organização de problemas e planejamento de atividades em classe, procurar-se-á entrever as preferências dos escolares para uma profissão adequada às suas tendências naturais, afim de orientá-los na escolha de uma atividade, após o curso primário. (Decreto S. C., 1946, p. 17)

Cabe ressaltar que os objetos manipuláveis foram os únicos materiais didáticos indicados para o ensino da Aritmética escolar, pois não foram encontradas recomendações explícitas para a utilização dos Quadros de Parker, nem de qualquer outro impresso didático. Em seu lugar foram sugeridos os objetos concretos, os jogos educativos (como, jogo de bolas, corrida de automóveis, dominó e feira), os trabalhos manuais com desenhos e modelagem, os quadros estatísticos publicados em noticiários, os problemas sobre dados da vida real, e outros. Inaugurava-se, assim, uma retórica afinada com as renovações educacionais advindas do Movimento da Escola Nova brasileiro, representado, sobretudo, por Lourenço Filho.

Contudo, De Paula e Teive (2014) identificaram em seus estudos que o manual Didática da Escola Nova, de Alfredo M. Aguayo, foi uma das obras de maior circulação no estado nos anos de 1946, 1948 e 1949. Esse manual não se configura propriamente como um livro didático de Matemática, mas, por tratar das várias matérias do ensino primário, contempla orientações para o ensino de Aritmética.

É interessante observar que Aguayo fez severas críticas ao método Grube – base para o médoto de Parker, como fica evidenciado no trecho destacado:

> Os partidários do método de Grube pretendem que a aprendizagem das operações fundamentais se faça simultaneamente ... ; esse processo, porém, não é recomendável. É preferível dividir as dificuldades do cálculo, e ensinar primeiro uma só operação durante certo tempo, depois outra e assim sucessivamente . (Aguayo citado por Valente, 2014, p. 73)

Contraditoriamente, nas observações finais do programa de iniciação matemática para o primeiro ano, é indicado que "fornecendo aos alunos objétos fáceis de manusear..., o

professor ensinar-lhes-á simultaneamente todas as operações que se pódem efetuar com um dado número, fazendo-os descobrir todas as combinações possíveis entre êle e os números menores" (Decreto S. C., 1946, p. 17). Nesse sentido, existia certa contradição entre o que era prescrito na esfera normativa para os docentes e o manual didático utilizado como orientador das aulas.

Destacamos que Aguayo defendia em seu livro o princípio da atividade discente como eixo central da prática docente. O professor deveria restringir sua atuação apenas para estimular, dirigir e auxiliar os alunos, quando fosse necessário. Essas orientações são fundamentadas nos ideais escolanovistas e vão de encontro com a proposta dos Quadros de Parker e com a prática das lições de coisas.

Considerações finais

A análise dos Programas de Ensino 1914 e 1946 permitiu-nos delinear dois cenários: o primeiro, no qual a matriz pedagógica do tipo "moderna", alicerçada pelo método intuitivo e pela prática das lições de coisas, caracterizou uma renovadora formatação para o ensino da Aritmética nos grupos escolares; e o segundo, no qual as ideias advindas da Escola Nova, especialmente no que se refere ao princípio da escola ativa, introduziram, de forma associada às antigas práticas intuitivas, novos modos de conceber o ensino dos conhecimentos aritméticos nos cursos primários.

Nas primeiras décadas do período republicano, o método intuitivo representou a modernidade pedagógica mais evidente dos grupos escolares catarinenses, identificado não apenas pela importância dos sentidos na aprendizagem inicial dos números, das operações, do cálculo e do raciocínio, mas também pela possibilidade de um ensino ativo, levando a mente da criança a ficar comprometida com a experiência sensorial. A Aritmética escolar em meio à vaga intuitiva tornou-se, pelo menos em âmbito normativo, mais prática e concreta. E a circulação dos materiais didáticos mais modernos, como os Quadros de Parker, sugere que essa mudança seguiu o caminho de uma progressiva intervenção nas práticas tradicionais de ensinar a Aritmética primária em Santa Catarina.

A partir da década de 1940, efetivou-se maior aproximação da escola primária catarinense com os princípios escolanovistas. O novo programa de 1946 apresentou uma série de inovações de caráter estrutural e didático-pedagógico. Destaca-se que houve considerável redução no rol de conteúdos, quando comparado ao Programa de Ensino de 1914, buscando romper com o viés enciclopédico defendido pela Pedagogia Moderna para

implantar um currículo que possibilitasse o contato das crianças com os conhecimentos úteis à vida prática e social por meio da inserção de experiências sociais no próprio meio escolar.

Por fim, vale ressaltar que se objetivou neste estudo abordar aspectos relacionados ao ensino de Aritmética num período marcado por movimentos educacionais que buscavam estabelecer o que era velho e o que era novo em termos de concepções pedagógicas. No caso aqui analisado, a representação do velho e tradicional foi atribuída ao método intuitivo, e a representação do novo estabeleceu-se sobre as propostas renovadoras da Escola Nova que se desejava consolidar. Compreende-se que o método intuitivo não foi abolido das práticas escolares de um dia para o outro, assim como a pedagogia ativa não foi introduzida definitivamente nas escolas primárias numa data marcada. As duas concepções pedagógicas coexistiram e foram apropriadas de diversas formas pelos legisladores catarinenses, pelos diretores e pelos próprios professores.

Referências bibliográficas

De Paula, M. F. B. F. W., & Teive, G. M. G. (2014). Disciplina em tempos escolanovistas: relações de autoridade e liberdade no cotidiano dos grupos escolares catarinenses (1946-1949). In Anais do 10º Congresso Luso Brasileiro de História da Educação. Curitiba: PUCPR.

Lourenço Filho, M. B. (1978). *Introdução ao estudo da Escola Nova* (13a ed.). São Paulo: Melhoramentos.

Nóbrega, P. de. (2003). Grupos escolares: modernização do ensino e poder oligárquico. In N. Dallabrida. *Mosaico de escolas: modos de educação em Santa Catarina na primeira república* (pp. 253-280). Florianópolis: Cidade Futura.

Parker, F. (1909). Palestras sobre Ensino. Campinas: Typ. "Livro Azul" – A.B. Castro Mendes. Retirado em 06 de março de 2016, de <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96571>.

Souza, T. S. De. (2016). *Entre o ensino ativo e a escola ativa: os métodos de ensino de aritmética nos Grupos Escolares catarinenses (1910-1946)*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Teive, G. M. G. (2014). Pedagogia moderna no Brasil: primeiras discussões e experiências práticas (final do século XIX – início do XX). *Revista Mexicana de Historia de la Educación*, 2(4), 153-172.

Valente, W. R. (2014). Lourenço Filho e o moderno ensino de aritmética: produção e circulação de um modelo pedagógico. *História da Educação*, 18(44), 61-77.

Vidal, D. G. (2005). Culturas escolares: estudo sobre prática de leitura e escrita na escola pública primária (Brasil e França, final do século XIX). Campinas: Autores Associados.

Decreto S.C. n. 587, de 22 de abril de 1911. Programa dos grupos escolares e das escolas isoladas do estado de Santa Catarina. Joinville: Typ. Boehm, Acervo: APESC. Retirado em 16 de março de 2018, de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99196

Decreto S.C. n. 796, de 2 maio de 1914. (1914a). Programa dos grupos escolares e das escolas isoladas do estado de Santa Catarina. Joinville: Typ. Boehm. Acervo: APESC. Retirado em 16 de março de 2018, de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/105101

Decreto S.C. n. 795, de 2 maio de 1914. (1914b). Regimento Interno dos Grupos Escolares de 1914. Joinville: Typ. Boehm .Acervo: APESC. Retirado em 16 de março de 2018, de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/105191

Decreto S.C. n. 3.732, de 12 dezembro de 1946. Programa para os estabelecimentos de ensino primário do estado de Santa Catarina. Florianópolis: Gap. Typ. D'O dia. Acervo: APESC. Retirado em 16 de março de 2018, de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99620

O QUESTIONAMENTO DA PROFESSORA NA PROMOÇÃO DA ESTRUTURAÇÃO NUMÉRICA

Margarida Rodrigues, Lurdes Serrazina, Ana Caseiro

[1]ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

[2]ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt

[3]ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, anac@eselx.ipl.pt

Resumo. *Nesta comunicação apresentamos a resolução de uma tarefa numa turma do 1.º ano, mostrando como os alunos a partir da composição do número 13 em duas parcelas e do questionamento da professora (tanto durante a exploração da tarefa como na discussão coletiva) chegam à estruturação do número e ao reconhecimento de pares comutativos, mostrando flexibilidade na identificação dos diferentes pares. Os dados foram recolhidos através de recolha documental e da observação participante das autoras apoiada pela videogravação e posterior transcrição da atividade desenvolvida. Na análise de dados procurámos compreender como é que os alunos conseguem organizar numa tabela as várias composições do número (no caso o 13) e o papel do questionamento da professora na promoção da compreensão da exaustão das possibilidades. Da análise feita concluímos que o questionamento da professora contribuiu para a estruturação numérica, sendo que, com exceção de um par, todos os alunos foram capazes de chegar à organização na tabela de sequências crescente/decrescente e deste modo compreender não apenas que têm todas as possibilidades, mas também a propriedade comutativa da adição.*

Abstract. *In this communication we present the resolution of a task in a 1st grade classroom, showing how the students, from the composition of number 13 into two parts and the teacher's questioning (during the exploitation of the task and in the collective discussion) reach the structuring of the number and the recognition of commutative pairs, showing flexibility in identifying the different pairs. The data were collected through document collection and participant observation of the authors, supported by video recording and subsequent transcription of the developed activity. In the data analysis, we tried to understand how the students can organize in a table the various compositions of the number (in this case 13) and the role of teacher's questioning in promoting the comprehension of the exhaustion of the possibilities. From the analysis done we conclude that the teacher's questioning contributed to the numerical structuring and, with the exception of a group of two students, all the students were able to arrive at the organization in the table of increasing/decreasing sequences and thus understand not only that they have all the possibilities, but also the commutative property of addition.*

***Palavras-chave**: Composição de um número; propriedade comutativa; pares comutativos; flexibilidade.*

Introdução

Esta comunicação insere-se no projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo*, cujo objetivo é caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos desde os 6 aos 12 anos e descrever e analisar as práticas dos professores que facilitam esse desenvolvimento. Neste texto centramo-nos na prática de uma professora a lecionar o 1º ano que propôs aos seus alunos uma tarefa cujo objetivo era trabalhar as diferentes composições do número 13, através de uma adição com duas parcelas, de modo a que os alunos avançassem na estruturação do 13.

Enquadramento teórico

A gestão da discussão coletiva

Sendo a comunicação uma capacidade transversal a toda a Matemática, a gestão da discussão coletiva constitui um aspeto essencial das práticas dos professores (Fey, 1981; Boaler, 2003). É através dessa discussão que os alunos podem "transmitir as suas ideias, soluções, problemas, verificações e conjeturas aos restantes colegas, transformando-as em verdades perante a comunidade envolvida" (Castro, 2014, p. 36). Dessa forma, trata-se de "muito mais do que apenas uma partilha perante um grande grupo" (Fosnot & Dolk, 2001, p. 29), na medida em que o trabalho dos alunos é significativamente valorizado, bem como a sua forma de pensar, promovendo ainda a construção de estratégias de resolução que, consequentemente, desenvolvem a edificação de capacidades cognitivas dos alunos. Assim, é da responsabilidade do professor o estabelecimento de "condições favoráveis ao desenvolvimento normal do processo de negociação de significados matemáticos na sala de aula. Ele deve estimular os alunos a falar e contribuir com frequência" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 124).

Para que a negociação de significados ocorra, os diferentes intervenientes têm de saber respeitar as perspetivas uns dos outros (Alro & Skovsmose, 2006). A mesma opinião é defendida por Bishop e Goffree (1986) quando referem que, por esse motivo, a negociação de significados é mais frequente em aulas inovadoras, sendo que, em contrapartida, vai diminuindo à medida que as aulas vão seguindo uma estrutura mais tradicional. Este aspeto relaciona-se com o que é mencionado por Ponte, Oliveira, Cunha, e Segurado (1998), quando referem que durante a discussão coletiva o professor terá o papel fundamental de orientador, moderador e desafiador, "levando os alunos a refletirem, a

pensarem matematicamente e a desenvolverem os seus mapas mentais" (Castro, 2014, p. 38). De acordo com esta autora, a comunicação matemática é uma dinâmica desafiante e diferente que promove "o diálogo e a discussão constante de ideias, permite aos alunos ampliarem o seu interesse e motivação e, em simultâneo, o seu gosto pela Matemática" (p. 39).

A regulação da comunicação na sala de aula é parte importante do papel do professor já que ele tem de conseguir entender as ideias dos alunos, pedindo-lhes que as justifiquem e fazendo com que todos participem nas discussões com as suas opiniões. Tal como é referido por Ponte e Serrazina (2000), "o professor deve conduzir a comunicação na aula de Matemática de modo a que os alunos oiçam, respondam, comentem e façam perguntas uns aos outros" (p. 122), sendo que, deste modo, o professor deve garantir que a comunicação se realize em diferentes sentidos: "dele para os alunos, dos alunos para si e entre os próprios alunos. Para isso, deve fomentar interações entre todos os intervenientes na aula, estabelecendo as regras adequadas" (p. 123). Para além desse constante questionamento por parte do professor, também a importância de processos como redizer, interrogar o significado e apoiar o desenvolvimento da linguagem dos alunos são sublinhados por Franke, Kazemi, e Battey (2007) como aspetos fundamentais do discurso da sala de aula.

A estruturação numérica: Componente essencial da flexibilidade de cálculo

Os alunos que se iniciam na aritmética começam por aprender os factos básicos, por exemplo da adição. Tradicionalmente, esses factos básicos eram aprendidos isoladamente e através da repetição. Diferentes estudos sustentam que uma melhor aprendizagem acontece quando ela tem como foco a estrutura, isto é, subjacentes padrões e relações (Baroody, 2006; Gravemeijer, Muurling, Kraemer, & Stiphout, 2016). Assim, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número (McIntosh, Reys, & Reys, 1992), os factos básicos devem ser aprendidos integrados numa rede de ideias, princípios e processos.

Baroody (2006) defende que a fluência nos factos básicos só é alcançada através do que denomina de memorização significativa onde a aprendizagem relacional tem um papel chave. Assim, é importante que os alunos compreendam a ideia da combinação – isto é, que um número pode ser composto pelas suas partes de diferentes formas. Por exemplo, se sabem que 8+1, 7+2, 4+5 constituem diferentes formas de representar o 9, são capazes de

reconhecer que 1+8, 2+7 ou 5+4 são factos relacionados pois também "dão" 9. Deste modo, estes factos passam a estar relacionados entre si constituindo uma rede de ideias interrelacionadas. Para que esta rede de ideias possa ser criada, os alunos devem, de acordo com Baroody (2006), passar por uma fase inicial – fase 1 – onde usando materiais de contagem ou contagens verbais desenvolvem estratégias de contagem, seguida de uma fase 2 onde, usando a informação que já têm de factos conhecidos e de relações, conseguem obter o valor de um novo facto até aí desconhecido. Através destes processos, os números deixam de estar ligados a objetos concretos passando a imagens mentais que podem ser manipuladas de modo a atingir uma fase 3, de mestria, onde as respostas surgem de uma forma rápida e eficiente evidenciando flexibilidade na sua obtenção. Mas, para o autor, as fases 1 e 2 são essenciais para se chegar com compreensão à fase 3 de mestria, onde as propriedades das operações são utilizadas de modo eficiente e flexível.

O reconhecer e saber que a adição é comutativa leva que o aluno seja capaz de obter uma combinação desconhecida a partir de uma conhecida (por exemplo, para calcular 3+5=? pode fazê-lo a partir de 5+3 que sabe que é 8). Se o aluno domina a ideia de dobro (por exemplo, 7+7=14), pode utilizar o raciocínio do dobro mais 1 (e fazer por exemplo, 7+8=7+7+1=14+1. Deste modo, as estratégias de raciocínio são automatizadas, constituindo uma base para a fluência de cálculo.

Descobrir os pares de números que correspondem à decomposição de um dado número é uma forma de trabalhar os factos básicos, que correspondem a esse número, mas se isso for feito de modo estruturado conduz à descoberta dos "pares comutativos" (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997). Uma compreensão da propriedade comutativa leva o aluno não só a aprender todos os factos básicos, mas também a perceber que pode apenas memorizar metade deles e ainda a compreender que as duas representações (por exemplo 5+3 e 3+5) podem ser consideradas apenas uma.

Para Baroody e Rosu (2004), a evolução da fluência de cálculo implica a crescente integração dos conhecimentos factual, conceptual e procedimental. Os alunos que aprendem os factos básicos deste modo são capazes de usar esse conhecimento básico corretamente e rapidamente, de modo eficaz, aplicando-o quer em situações familiares quer não familiares, evidenciando flexibilidade.

Assim, os professores devem ajudar os alunos a construir ideias fortes (*big ideas*), como as de composição e decomposição de números em duas parcelas, utilizando materiais, sempre que necessário. Deste modo, os números tornam-se objetos mentais e os

diferentes modos de compor e decompor os números formam a base para uma aritmética flexível (Gravemeijer et al., 2016). Na memorização dos factos básicos, os professores devem encorajar os seus alunos a olhar para padrões e relações, usando estas descobertas para construir estratégias de raciocínio, partilhando, justificando e discutindo essas estratégias.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo. O projeto, onde se insere, utiliza uma metodologia de investigação baseada em design, visando produzir teorias locais de ensino que possam constituir materiais de trabalho para o professor.

Os dados aqui apresentados foram recolhidos numa turma do 1.º ano com 25 alunos de uma escola pública de um bairro de Lisboa. A professora da turma é uma professora experiente, empenhada no seu desenvolvimento profissional, que tem uma boa relação com a matemática, respondendo sempre de modo afirmativo a propostas que ela considere que a enriquecem profissionalmente. Nesta perspetiva, voluntariou-se para colaborar com a equipa do projeto, discutindo as tarefas com a equipa e aplicando-as na sua sala de aula ao ritmo de uma por semana.

A tarefa aqui analisada, designada por *Pintainhos* (Figura 1) foi concebida por Jean Marie Kraemer, membro da equipa do projeto, e resolvida na turma em 5 de março de 2015.

A tarefa era a terceira de uma sequência de cinco tarefas em que a primeira correspondia à estruturação do número 5 e a segunda a do número 9. Na fase de resolução da tarefa, os alunos trabalharam a pares ou trios, tendo a atividade de três pares sido videogravada, bem como a discussão coletiva com toda a turma.

Os dados foram recolhidos pelas autoras desta comunicação através de recolha documental (trabalhos escritos dos alunos) e da observação participante, complementada pelas transcrições das gravações. A análise de dados foi realizada através da análise de conteúdo.

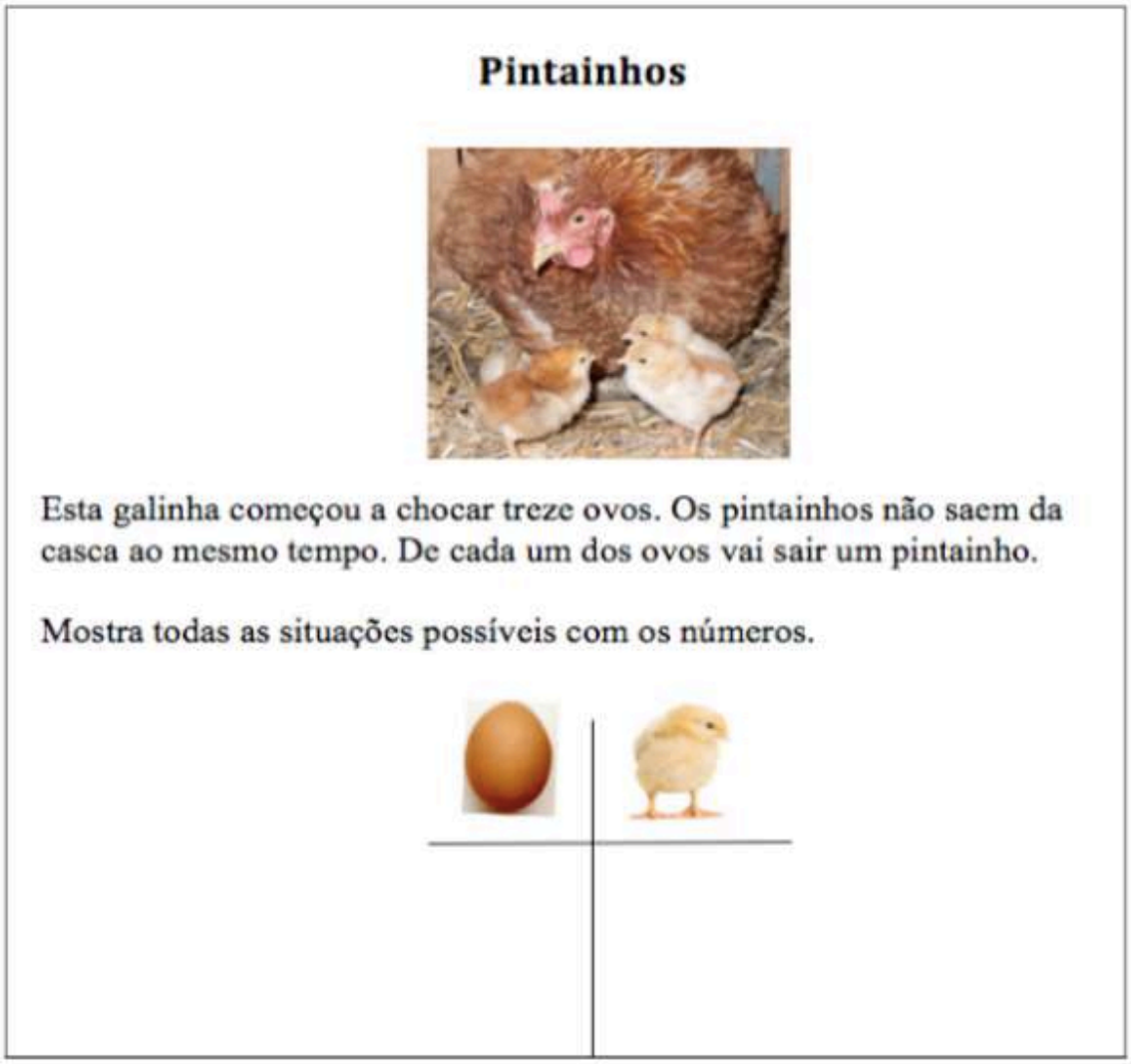


Figura 1. Tarefa *Pintainhos*

Estruturando o 13

Exploração da tarefa

A professora começou por disponibilizar 13 círculos, colocando-os nas mesas de trabalho. Na introdução da tarefa feita pela professora, constatou-se que o contexto não era nada familiar àqueles alunos. Apenas uma aluna, Maria, afirmou já ter vivenciado essa situação, tendo mais dois referido já ter ouvido falar e visto pintainhos pequeninos. Curiosamente, Maria teve muita dificuldade em compreender e iniciar a tarefa, pois parece ter considerado como situação real aquilo que estava representado no desenho. Daí começar por registar 13 ovos e 3 pintainhos, já que estavam representados 3 pintainhos na figura presente no enunciado da tarefa. Esta situação não foi ultrapassada facilmente, embora se trate de uma aluna que normalmente não tem problemas de compreensão. Só quando a professora se aproximou e a questionou focando a sua atenção de que não

poderia ser mais do que 13 ("Se sai um pintainho de cada ovo, quantos pintainhos pode haver ao todo? Quanto é que isto pode dar, ovos e pintos ao mesmo tempo, no máximo?") é que Maria conseguiu retificar os números colocados na tabela.

Cinco pares de alunos começaram por registar 13 ovos e 0 pintainhos, parecendo atender ao contexto, uma vez que na situação inicial ainda nenhum pintainho eclodiu dos ovos. Seguidamente, registaram corretamente a sequência decrescente dos ovos até ao 0 e a sequência crescente dos pintainhos até ao 13 (Figura 2).

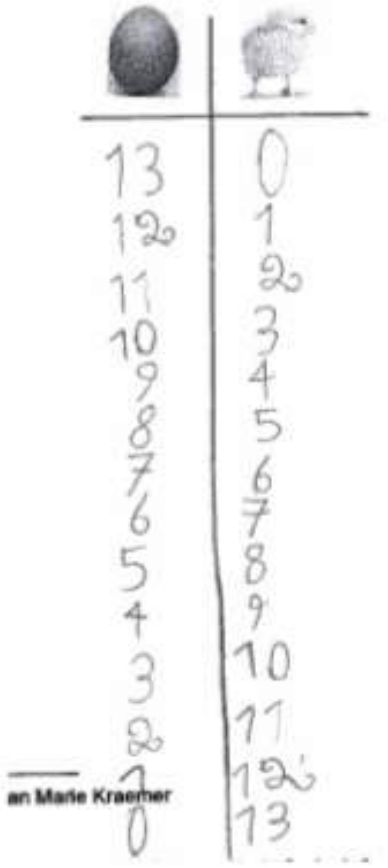


Figura 2. Estratégia das sequências decrescente e crescente.

Provavelmente esta estratégia foi seguida, não tanto pela necessidade de modelar a situação de eclosão gradual dos ovos, mas sim pelo facto de, numa tarefa anterior (que envolvia a decomposição do 9 em duas parcelas), terem concluído, no final da discussão coletiva, que a forma de não se esquecerem de nenhum par de números era escreverem os números em sequência, uma decrescente e a outra crescente. A maior parte dos pares que seguiram esta estratégia dispensou o uso dos círculos. Por exemplo, o par do Luís e Lúcia concretizou a tarefa (Figura 2), sem os círculos, com facilidade e rapidamente (em quatro minutos), parecendo manipular os números como objetos mentais. Quando a

investigadora se aproximou do par questionando como é que sabiam que tinham feito todas as possibilidades, Luís justificou a exaustão das decomposições com a ordem decrescente/crescente das sequências, apontando para os números registados na tabela, do 13 ao 0, e inversamente do 0 ao 13. No entanto, um outro par, Ilda e Joana, adotou esta estratégia com o apoio da manipulação dos círculos. Ilda começou por separar para o lado direito um círculo e procedeu depois à contagem dos círculos restantes, fazendo depois o registo na tabela. Em seguida, juntou mais um círculo ao círculo anterior, totalizando agora 2, e contou os restantes, e assim sucessivamente até terminar toda a sequência. A aluna revelou dificuldade em estabelecer a relação numérica de N-1 pois insistentemente sentiu necessidade de contar cada vez que retirava um círculo do conjunto situado à esquerda, chegando a repetir várias vezes as contagens. Por sua vez, Joana não acompanhou a colega no processo de contagem. Por vezes, manipulou os círculos, contando-os após separá-los em dois grupos, mas sem um critério de ordem nessa separação. Por fim, copiou a tabela pela Ilda, começando pela possibilidade 12-1 e terminando na possibilidade 6-7.

Um trio começou pela possibilidade 12-1, colocando algum critério de ordenação mas nem sempre de forma sistemática, tendo alcançado 12 possibilidades (Figura 3). Uma outra aluna (não pertencente aos pares videogravados) apresentou uma tabela diferente dos restantes colegas (Figura 4), seguindo as sequências decrescente/crescente até ao 8-5 e invertendo então as sequências para crescente/decrescente até 5-8, marcando com uma linha divisória essa inversão. Escreveu ao lado 12, como correspondendo ao total de possibilidades encontradas. Surge na sua folha uma nova linha a separar as duas últimas possibilidades que provavelmente teriam sido escritas durante a discussão da tarefa, uma vez que com estas, o número de possibilidades passa a totalizar 14.

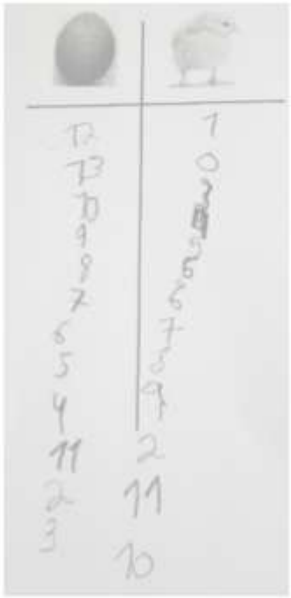


Figura 3. Tabela do trio com alguma ordenação.

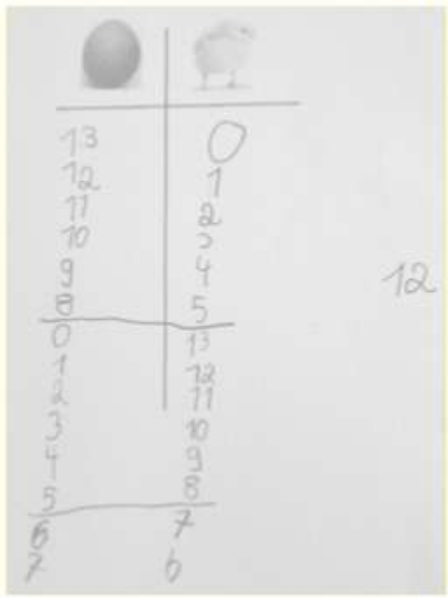


Figura 4. Estratégia da inversão da sequência.

Cinco grupos (quatro pares e um trio) desligaram-se do contexto e representaram um par de números e o seu comutativo --"contrário" na linguagem destes alunos -- (Figura 5). Estes pares trabalharam com os números como objetos mentais, dispensando o uso dos círculos.

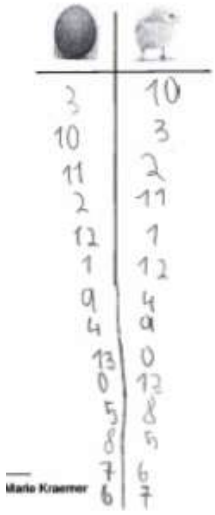


Figura 5. Estratégia dos pares comutativos.

Esta estratégia é reveladora da consciência dos alunos da propriedade comutativa da adição (por exemplo, 11+2=13 e 2+11=13) e de que a comutatividade corresponde, no contexto do problema, a situações diferentes (ter 11 ovos e 2 pintainhos já nascidos é

diferente de ter apenas 2 ovos e 11 pintainhos nascidos) e que por esse motivo, têm de ser contempladas como possibilidades diferentes.

Discussão da tarefa

Na fase de discussão da tarefa, a professora começou por pedir aos alunos para indicarem o número pelo qual tinham iniciado o registo na tabela e para explicarem o motivo da escolha desse número. Vários alunos explicaram a razão de terem começado pelo 13:

Jaime - Porque era o número de ovos e queríamos fazer a sequência.
Marta - Porque eram 13 ovos.
Nélia - Porque primeiro ainda não tinha nascido nenhum ovo.

Jaime apresenta uma justificação de natureza matemática, a pretensão de fazer uma sequência que facilitaria a perceção da exaustão das possibilidades, e as outras alunas apresentam um motivo de natureza contextual. Ao indagar sobre a razão de outros terem começado pelo 12 e 1, a professora ainda questionou:

Professora - Mas o total tem de ser quantos, ovos e pintos?
Alunos - 13.

A focalização da questão na constância da soma assume importância na consciencialização pelos alunos da decomposição do número em causa, o 13.

Os alunos que começaram pela possibilidade 3 e 10 tiveram dificuldade em explicar a razão, tendo alguns verbalizado que era por serem “números amigos”. Esta expressão provavelmente foi utilizada para referir os números que resultam da decomposição decimal de um número. Estes alunos explicaram que tinham feito "ao contrário", querendo reportar-se à estratégia dos pares comutativos. A professora colocou à consideração da turma a escolha da organização a colocar na tabela do quadro: "Quem é que sugere fazer ao contrário? Quem é que sugere fazer outra organização?". A professora foi pedindo novas possibilidades a cada um dos grupos, registando-as no quadro. Apesar de alguns se terem manifestado no sentido de fazer de modo diferente, os vários pares de alunos foram indicando as novas possibilidades, seguindo o critério das sequências decrescente/ crescente, mesmo que não tivesse sido essa a estratégia utilizada na exploração autónoma. Após o registo de 11 e 2, a professora interpelou:

Professora - O que diriam a seguir? Eu sei que a vossa sequência não é esta. O que vocês fariam a seguir? O que faz mais sentido agora ali?

Guilherme - Pode ser 6 mais 7.
Nádia - Nos ovos, 10 e nos pintainhos 3. (*a professora regista no quadro*)
Professora - Porquê, Nádia, esta, e não a do Guilherme, 6 em ovos e 7 em pintainhos? Porquê Nádia? Porquê? Essa do 6 e do 7 não está correta, Nádia?
Nádia - Está.
Professora - Está. Então porque é que agora faz mais sentido esta?
Nádia - Porque os ovos estão a diminuir. Menos um.
Professora - Menos um. E o que acontece do lado dos pintainhos?
Nádia - Está a crescer.
Professora - Quanto?
Nádia - Um.

Assim, a professora direcionou a participação dos alunos no sentido de não atenderem simplesmente à correção das possibilidades correspondentes às múltiplas decomposições do 13 em dois grupos, mas de atenderem à sequenciação lógica presente no contexto da situação proposta. Após um dos pares indicar a possibilidade 6 ovos e 7 pintainhos, vários alunos reagiram reparando tratar-se de um par comutativo ao da linha anterior:

Alunos - Está ao contrário!
Professora - Porquê?
Luís - Porque vai mudar.
Professora - O que é que vai mudar? Vem cá explicar, Luís.
Luís – Este número (aponta para o 5 da coluna dos pintainhos) vai passar para aqui (aponta para o local à esquerda na coluna dos ovos).
Professora - Porquê?
Luís - Porque… porque vai passar a ser cinco ovos.
Professora - Mas porque é que a partir daqui (*marca com a mão o espaço entre 7-6 e 6-7*) começa a mudar?
Luís - Porque aqui é o meio. (aponta para o espaço entre 7-6 e 6-7)
Professora - Porque aqui é o meio do quê?
Luís - Dos números.
Professora - Da sequência. (dirige-se para a turma, mantendo a mão a marcar o local identificado pelo Luís como meio). Há mais alguma hipótese de que apareçam outros números, sem ser ao contrário?
Alunos - Não.
Alunos - Sim. O 4. (a professora aponta para o 4 na coluna dos pintainhos)
Aluna – Tem que ser o contrário… já não há mais hipóteses.
Professora - Já não há mais hipóteses?
Alunos – Há!
Professora - Só que a partir daqui… a partir daqui, já não há mais nenhuns números que possam usar e que não estejam aqui sem ser trocar. Então se calhar podemos separar aqui a sequência. (*a professora traça com uma linha a divisória entre 7-6 e 6-7*).

Apesar da tabela apresentar apenas 8 das possibilidades, Luís já consegue explicar a simetria das possibilidades existentes, correspondendo à comutatividade das

possibilidades de 13 a 7 ovos/0 a 6 pintainhos, identificando o meio da sequência. A professora questiona a turma com a preocupação de socializar a descoberta do Luís de modo a que os restantes alunos compreendam que já têm registados no quadro todos os números de 0 a 13. A marcação da simetria com um traço por baixo da possibilidade 7 ovos e 6 pintainhos (Figura 6) reforça a ideia de que por baixo ficarão os 7 pares comutativos, garantindo assim a exaustão das possibilidades.

Após os diferentes pares dizerem as 14 possibilidades, e de terem sido todas registadas no quadro, a professora questionou a turma sobre o significado contextual da última hipótese:

Professora - Se isso acontecesse, queria dizer o quê? Os pintainhos...
Alunos- Já estavam todos fora.

Seguidamente, a professora incidiu a discussão sobre a organização da tabela registada no quadro:

Professora - Quem é que seguiu esta organização?
Alunos – (pondo o braço no ar) Eu.
Professora - Qual é que acham que é mais fácil? Esta, para não nos perdemos, ou a outra que vocês usaram de trocar, logo a seguir?
Aluno – Trocar...
Professora - A de trocar?
Alunos - Sim.

(...)

Professora - Diz lá porquê, Paulo. Qual é a que faz mais sentido? Está alguma errada? Ou estão ambas certas?
Paulo – Estão todas certas.
Professora - Estão ambas certas. Qual é a que faz mais sentido?
Paulo - (impercetível)
Professora - Ó Paulo, lembras-te que eu fui aí ao teu grupo e vocês estavam com dificuldade em descobrir mais uma das hipóteses? Porquê Paulo?
Paulo – Porque estávamos a usar a troca.
Professora - Vocês estavam a fazer a troca, e depois estavam com dificuldade em descobrir aquela que faltava. Se eu usar esta sequência, seria mais fácil?
Paulo - Sim.
Professora - Penso que sim, Paulo. Olhem, o Luís diz que tem uma descoberta, Luís.

Depois da professora orientar para a conclusão de a estratégia das sequências decrescente/crescente ser mais eficaz para não se esquecerem de nenhuma das possibilidades, o Luís foi ao quadro partilhar a regularidade identificada: "Aqui os números iguais estão na diagonal". Depois de justificarem esta regularidade com a ordenação inversa das duas colunas, foi a vez de Maria partilhar a sua descoberta: a

localização dos pares comutativos. A professora traçou arcos nos pares identificados pela aluna (Figura 6) que comentou, no final "Parece um arco-íris!".

Por fim, a professora concluiu a discussão da tarefa com uma incidência na paridade dos números:

Professora -	Olha lá Jaime, há alguma hipótese em que o número de ovos seja igual ao número de pintainhos? Ao mesmo tempo? Porquê Jaime?
Jaime –	Porque 13 um número ímpar. É um quase dobro.
Professora -	É um quase dobro. Então não pode acontecer haver o mesmo número de ovos e o mesmo número de pintainhos.
Dario -	Só se fosse o 26 é que ficava 13 num lado e 13 no noutro.
P-	E o que é que é o 26 que não é o 13?
Dario -	É par.
Professora -	Não querem colocar mais nenhuma questão? Olhem, para terminar, quantas são as hipóteses?
Alunos -	14! (*a professora regista 14 no quadro*) É mais um do que os ovos.
Professora -	É mais um do que o número de ovos.

O registo final no quadro encontra-se na Figura 6.

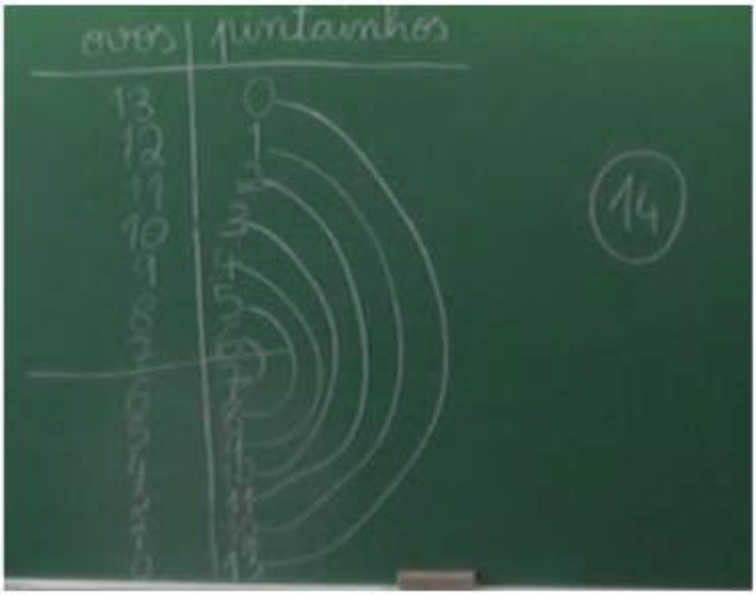


Figura 6. Registo final no quadro da exaustão das possibilidades.

Os alunos, além da estruturação numérica do 13, estabeleceram outro tipo de relações como a impossibilidade de decomposição em dois grupos iguais por ser um número ímpar e relacionaram o número total de possibilidades com o número objeto de decomposição, embora não tivessem explorado a justificação para esse facto.

Conclusão

Todos os alunos estruturaram corretamente o número 13, sendo que apenas um dos pares se apoiou totalmente na contagem dos círculos, o par Ilda e Joana, que manifestamente ainda se encontrava num nível rudimentar de estruturação numérica pois nem a relação N-1 parece dominar. Os restantes pares, além de evidenciarem um bom domínio das múltiplas decomposições do 13 em dois grupos, parecendo manipular os números como objetos mentais (Gravemeijer et al., 2016), colocaram uma organização na forma como foram gerando as diferentes possibilidades de decomposição, o que facilitou a perceção do momento em que alcançavam o número máximo de possibilidades, revelando a sua mestria (Baroody, 2006).

O questionamento da professora, quer no momento da exploração da tarefa, quer na fase de discussão, evidencia a promoção da reflexão dos alunos, incidindo em diferentes aspetos matemáticos (Castro, 2014, Ponte & Serrazina, 2000). O facto de insistentemente pedir a justificação ("Porquê?") aos alunos do que diziam é um fator determinante na promoção dessa reflexão que tem, por isso, implicações no aprofundamento da compreensão das relações numéricas estabelecidas.

Quando a professora coloca a questão de focalização na constância da soma do número de ovos e do número de pintainhos torna explícito para os alunos que a tarefa se traduz na decomposição do 13 em duas parcelas, uma vez que essa soma não aparece explicitamente representada no enunciado da tarefa. Foi este aspeto que causou dificuldades a Maria quando esta se encontrava a realizar a tarefa. E foi o questionamento da professora, nessa altura, que fez com que Maria compreendesse o objetivo da tarefa e conseguisse, depois, rapidamente retificar o que tinha escrito antes e concluir a tabela, usando a estratégia das sequências decrescente/crescente, tendo aparentemente alcançado a fase de mestria referida por Baroody (2006).

A discussão não incidiu propriamente nas diferentes decomposições, já que a totalidade dos alunos conseguiu determiná-las corretamente, mas sim no tipo de organização da tabela. A professora, embora considerando que qualquer ordem estaria correta, do ponto de vista da decomposição numérica, questionou os alunos sobre qual faria mais sentido. A interpelação sobre este sentido pode remeter para o critério temporal pois o contexto do problema sugere a ordenação 13-0 até 0-13. No entanto, a professora parece focar-se mais num critério matemático, elevando o nível de discussão desta turma de 1.º ano para qual a organização que seria mais eficaz na certeza dos alunos de obtenção

da exaustão das possibilidades de decomposição do 13. Não obstante as opiniões dos alunos se dividirem relativamente à comparação da eficácia de cada uma das organizações usadas na turma, a das sequências e a dos pares comutativos, a professora direcionou para a conclusão de a organização das sequências ser mais eficaz na disponibilização da totalidade das possibilidades.

Um outro aspeto que mereceu a focalização do questionamento da professora foi a paridade dos números, levando os alunos a identificar o 13 como número ímpar e por isso ser impossível decompô-lo em dois grupos iguais.

A professora valorizou as descobertas dos alunos, dando-lhes espaço de expressão e questionando os alunos, com a preocupação de as socializar na turma, de modo a serem compreendidas por todos. É de salientar a simetria identificada na tabela pelo Luís e o modo como a professora orientou o questionamento, levando os alunos da turma à compreensão da exaustão das possibilidades bem como da comutatividade das mesmas. As relações numéricas estabelecidas no âmbito de um cálculo flexível, adaptado aos números em causa, são construídas com base na estruturação numérica (Baroody & Rosu, 2004; Gravemeijer et al., 2016), pelo que justificar a exaustão das decomposições de um número (Cobb et al., 1997) torna-se um elemento essencial no processo de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo.

Referências bibliográficas

Alro, H., & Skovsmose, O. (2006). Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. São Paulo: Autêntica.

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics* August 2006, 22-31.

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations – the number sense view. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. San Francisco, CA. April.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education (pp. 309-365)*. Dordrecht: Reidel.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the dance of agency. In N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-16). Honolulu: PME.

Castro, A. (2014*). A Matemática para além da sala de aula: um congresso matemático no 2º CEB*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação. Consultado a 12 de março de 2017 em http://repositorio.ipvc.pt/bitstream/20.500.11960/1588/1/Ana_Castro.pdf

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research of Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Fey, J. T. (1981). Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys. Reston,VA: NCTM.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). Young Mathematicians at Work - Constructing Fractions, Decimals, and Percents. Portsmouth: Heinemann.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of mathematics teaching and learning (pp. 225-256)*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J. M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in The Netherlands: A paradigm case? *Mathematical thinking and learning, 18*(1), 25-44.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

PROBLEM BASED LEARNING NUM CURSO PROFISSIONAL: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO MÓDULO OTIMIZAÇÃO (A10)

Alexandra Sofia Rodrigues, Corália Pimenta

[1]Instituto de Gouveia — Escola Profissional, UIED, alexsofiarod@gmail.com

[2]Agrupamento Gualdim Pais, coraliapimenta@gmail.com

Resumo. *No âmbito de um curso profissional é fulcral estimular nos alunos a capacidade de aprender a aprender, analisar, gerir e comunicar sobre um problema, enquanto cidadãos intervenientes num mundo global. Aplicou-se o modelo Problem Based Learning (PBL), no ensino do módulo "Otimização", numa turma do Curso Técnico de Restauração, procurando aferir se o modelo seria adequado para o ensino profissional de nível secundário e que implicações teria ao nível da motivação e do desempenho dos alunos. Para analisar os resultados obtidos, utilizou-se a metodologia de desenvolvimento de competências para cursos de Educação Profissional e Tecnológica. Os resultados sugerem que o modelo é adequado e que os alunos apreciam este modelo de ensino, revelando aproveitamento, motivação e empenho na consolidação da sua aprendizagem de forma autónoma.*

Abstract. *In the context of vocational training, it is crucial to stimulate in students the ability to learn to learn, analyse, manage and communicate about a problem, as citizens involved in a global world. The Problem Based Learning (PBL) model was applied to teach the "Optimization" module, in a Technical Course, trying to verify if the model is adequate for secondary education and what implications would it have to the level of student motivation and performance. In order to analyse the obtained results, was use the methodology of competence development for Professional and Technological Education courses. The results suggest that the model is adequate and that students appreciate this teaching model, revealing the use, motivation and commitment to consolidate their learning autonomously.*

Palavras chave: *Problem Based Learning (PBL); construção do conhecimento; ensino profissional.*

Introdução

Podemos definir ensino profissional como um ensino desenhado para permitir o desenvolvimento de capacidades, conhecimentos e competências necessários ao exercício de uma profissão, combinando a formação em contexto profissional com a escolar. Um curso profissional é uma alternativa a um percurso académico de nível secundário, que permite aos alunos uma dupla certificação, no final dos três anos do curso. Estes cursos são maioritariamente escolhidos por alunos que pretendem ingressar o mundo do trabalho.

De acordo com as orientações curriculares para o ensino profissional, a Matemática poderá fomentar nos alunos o desenvolvimento da autonomia, a aquisição de independência empreendedora, a responsabilização e a tomada de consciência das relações

em que está envolvido e do ambiente em que vive (ME, 2007). Considerando os fundamentos do ensino profissional e as exigências sociais e profissionais que hoje se impõem, será necessário repensar as práticas pedagógicas utilizadas na aula de Matemática, adequando e reestruturando os seus fundamentos teórico-metodológicos, para melhorar o processo ensino e aprendizagem (Zorzan, 2007).

O modelo de ensino aprendizagem Problem Based Learning (PBL) dá relevância à aprendizagem, na medida em que a solução de um problema exige a concretização de processos estruturados, baseados em conhecimentos anteriores, reconhecidos como importantes para a resolução do problema. Esta abordagem não nega a importância da aprendizagem, mas coloca a ênfase da aprendizagem na necessidade que o aluno tem de os integrar para a resolução do problema (Fernandes, 2010). Assim, altera-se o papel do professor, cujo objetivo principal será o de facilitar a aquisição do conhecimento, privilegiando a autonomia e a tomada de decisões pelo aluno (Kolmos, 1996).

Considerando os fundamentos do ensino profissional, o interesse em estimular a capacidade de aprender a aprender, analisar, gerir e comunicar sobre um problema, aplicou-se o modelo de ensino PBL, aos alunos de uma turma do terceiro ano do Curso Técnico de Restauração (equivalente ao 12.º ano). Procurou-se, através da aplicação do modelo, averiguar a sua pertinência no ensino profissional. Definiram-se as questões de investigação: "Aplicar o modelo PBL no módulo Otimização tem implicações ao nível das motivações e desempenho dos alunos?" e "Será exequível a aplicação de um modelo de ensino reconhecidamente usado no ensino superior (PBL), para lecionar Matemática a alunos de um curso profissional de nível secundário?"

O estudo decorreu no ano letivo 2017/2018 e a proposta metodológica foi implementada pela professora da turma, que também assume o papel de investigadora neste estudo. O espaço escolhido para lecionar o módulo foi a biblioteca escolar, por ser um espaço com computadores e acesso à Internet e por ter uma disposição diferente da sala de aula tradicional. O tema selecionado corresponde ao módulo *Otimização* do currículo do ensino profissional, procurando-se munir os alunos de ferramentas matemáticas para resolverem problemas de programação linear. Para analisar os resultados, fez-se uso da metodologia dos sete passos, descrita por Killer e Rodrigo (2012) e mencionada por Santos, Salgado, Barreto, Martins e Dores (2010), associada à metodologia PBL.

O modelo de ensino Problem Based Learning (PBL)

O PBL constitui um modelo de ensino aprendizagem alternativo e inovador, capaz de promover a rutura com o ensino tradicional, estimulando a reorganização dos papéis na sala de aula e centrando o ensino no aluno (Santos et al., 2010). A planificação do problema é determinante na aplicação do modelo, uma vez que se intenciona promover a autonomia na tomada de decisões para permitir a aquisição de novos conhecimentos.

O desenvolvimento da autonomia é importante para que o aluno aceite ter um papel ativo na sua própria aprendizagem. Porém, o aluno só assume este papel se o professor lhe delegar tarefas e lhe exigir o cumprimento das mesmas (Palha, 2006). O professor deverá oferecer experiências matemáticas diversificadas que estimulem o interesse e a capacidade de aprender a aprender, de analisar, gerir e comunicar sobre um problema. O professor poderá ser visto como um supervisor do processo, bem como mediador da aprendizagem (Kolmos, 1996).

De acordo com Santos et al. (2010), este modelo trabalha o desenvolvimento de competências e a aquisição de novos conhecimentos a partir da vivência de experiências significativas, devendo o processo de ensino aprendizagem encontrar-se estruturado em módulos e não em disciplinas, enquadrando-se no ensino profissional, pois as disciplinas estão estruturadas em módulos e pretende-se adequar os ritmos de ensino e aprendizagem às capacidades e características dos alunos, permitindo que a evolução ocorra de acordo com os percursos individuais personalizados (Rodrigues, 2015).

Relativamente à avaliação, o modelo PBL poderá contemplar a sumativa modular, a formativa e contínua ou formas diversificadas de avaliações informais, em que se observa o comportamento do estudante (Santos et al., 2010).

Alguns autores (Kolmos, 1996; Pinheiro, 2008; Santos et al., 2010) entendem que o modelo PBL estabelece maior compromisso sobre o currículo, pelo que se torna difícil cumprir planos curriculares extensos. Para colmatar a redução da componente letiva, investe-se no trabalho autónomo a desenvolver pelos alunos, exigindo aos mesmos maior envolvimento, compromisso e responsabilidade. A interdisciplinaridade, a diferenciação pedagógica e a proliferação dos recursos didáticos mostram-se igualmente compatíveis com o modelo, contribuindo para o desenvolvimento de competências profissionais.

Metodologia de desenvolvimento de competências no ensino profissional

A metodologia de desenvolvimento de competências para cursos de Educação Profissional e Tecnológica, proposta por Killer e Rodrigo (2012), organiza-se em sete passos: i) *Contextualização* e *Mobilização*; ii) *Atividade de Aprendizagem*; iii) *Organização da Atividade de Aprendizagem*; iv) *Coordenação* e *Acompanhamento*; v) *Análise e Avaliação da Atividade de Aprendizagem*; vi) *Outras Referências* e vii) *Síntese* e *Generalização*. Estes passos metodológicos podem ser aplicados sempre que a atividade de aprendizagem esteja centrada no aluno, quer se trate de um projeto profissional, de uma pesquisa dirigida na Internet ou de qualquer outro método ativo com outra estratégia pedagógica.

No primeiro passo, *Contextualização* e *Mobilização*, o aluno enquadra o problema no contexto de aprendizagens anteriores e compreende a essência e a importância da situação de aprendizagem. No segundo passo, *Atividade de Aprendizagem,* encara o desafio e envolve-se na resolução do problema, encetando a pesquisa e o trabalho autónomo necessário. Em *Organização de Atividade de Aprendizagem,* o aluno compreende as orientações para enfrentar o desafio. Em *Coordenação e Acompanhamento,* recebe *feedback* e incentivo do docente sobre a atividade que está a desenvolver. Em *Análise* e *Avaliação da Atividade de Aprendizagem*, a atividade de aprendizagem e os resultados obtidos serão alvo de reflexão individual ou de partilha em pequenos grupos de trabalho. Em *Outras Referências* são veiculadas algumas recomendações práticas e disponibilizadas, através de recursos didáticos (multimédia ou outros), formas de ampliar a experiência e de aplicar os conhecimentos adquiridos. No último passo, *Síntese e Aplicação*, as referências existentes são integradas no universo cultural, permitindo a elaboração de propostas para situações iguais ou semelhantes. Segundo os autores deste modelo, a sequência de passos descritos não é rígida, sendo apenas fundamental que a atividade de aprendizagem conduza ao desenvolvimento da competência, de acordo com o objetivo definido.

Metodologia e recolha de dados

O estudo assumiu uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), atendendo à natureza dos dados e ao significado das ações. Para aferir a funcionalidade do modelo PBL no desenvolvimento de competências de *Otimização*, e dar resposta às questões de investigação, utilizou-se a metodologia de desenvolvimento de

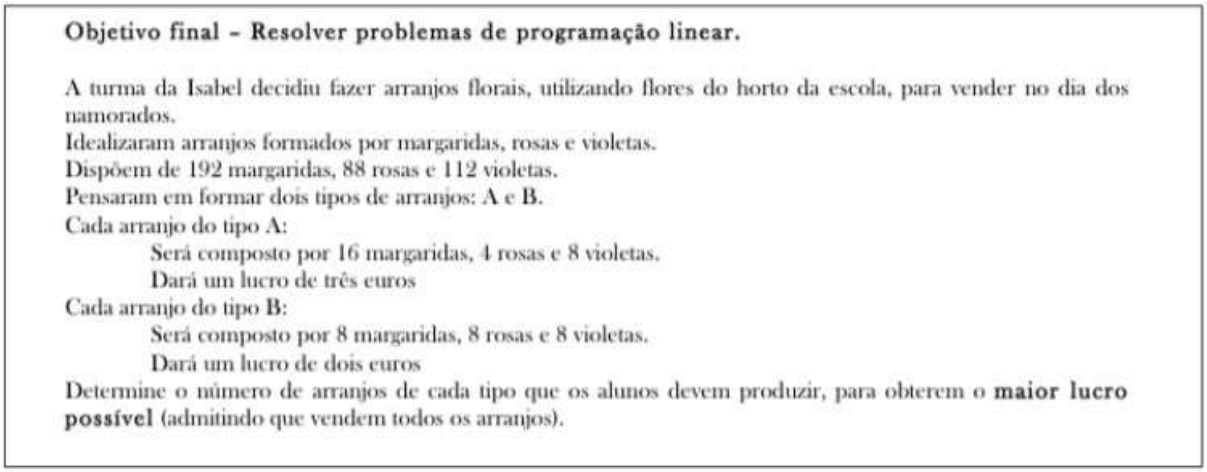
competências para cursos de Educação Profissional e Tecnológica, proposta por Killer e Rodrigo (2012). Justifica-se a seleção da investigação interpretativa pelo facto de a ideia central ser a da atividade desenvolvida pelos alunos durante a construção do novo conhecimento matemático, na resolução de problemas de programação linear, para analisar se o PBL pode ser aplicado com alunos do ensino profissional.

Foram definidos problemas de programação linear e valorizados os objetivos delineados no módulo *Otimização*, construindo-se um guião para aplicação dos fundamentos do modelo PBL. Posteriormente, o guião desenvolvido pela primeira investigadora foi aplicado aos seus alunos do Curso Técnico de Restauração. Na sua construção teve-se em consideração o contexto da turma, a aquisição das competências delineadas e os objetivos de investigação.

Salienta-se que a professora (primeira investigadora deste estudo) acompanha os alunos desde que ingressaram o referido curso, no décimo ano. Na sua globalidade, não frequentaram o ensino básico regular, tendo concluído o nono ano de escolaridade através de um curso vocacional ou de um curso de educação formação. Encontram-se a concluir o décimo segundo ano de escolaridade, têm idades compreendidas entre os dezoito e os vinte e três anos e a maioria espera ingressar no mercado de trabalho. A componente técnica do seu curso encontra-se dividida em duas áreas: treze alunos encontram-se a fazer a certificação em Restaurante/Bar e quinze alunos em Cozinha/Pastelaria.

Relativamente à aprendizagem da Matemática, quando ingressaram o curso, vinte e um destes alunos manifestaram ter muitas dificuldades na disciplina de Matemática. Face às baixas expetativas dos alunos, foi necessário estimular o interesse pela disciplina, procurando novas abordagens e diferenciando as metodologias de trabalho. Valorizou-se o desenvolvimento da autoconfiança e da autonomia no desenvolvimento dos problemas propostos, estendendo-se o processo de responsabilização por três anos.

Na figura seguinte poder-se-á analisar o problema de programação linear proposto. Este problema foi adaptado do exame nacional de Matemática B, do ano 2006.



Objetivo final – Resolver problemas de programação linear.

A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no dia dos namorados.
Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas.
Dispõem de 192 margaridas, 88 rosas e 112 violetas.
Pensaram em formar dois tipos de arranjos: A e B.
Cada arranjo do tipo A:
Será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas.
Dará um lucro de três euros
Cada arranjo do tipo B:
Será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas.
Dará um lucro de dois euros
Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o **maior lucro possível** (admitindo que vendem todos os arranjos).

Figura 1 — Extrato do Guião passo a passo, elaborado para o módulo A10 – Otimização.

Este problema consta do guião de resolução de problemas de programação linear distribuído aos alunos, em suporte papel. Para seleção do problema e elaboração do referido guião, a professora teve em consideração os conteúdos adquiridos durante o ensino dos módulos *Funções Polinomiais* e *Taxa de variação*. Os alunos seguiram as indicações transmitidas no guião elaborado, fazendo uso de instrumentos de comunicação digital, vídeos e exercícios da plataforma *Khan Academy*[1]. Reconheceram e representaram modelos de aplicação ao mundo do trabalho (indústria, comércio ou do mundo empresarial), utilizando funções afins. Analisaram o comportamento de funções, relacionando valores e sinais das taxas de variação em pontos do domínio, reconhecendo numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função. Esclarece-se que para além do problema colocado (figura 1) foi apresentado um segundo problema de programação linear e respetiva resolução, sugerindo-se que para resolução do primeiro, os alunos acompanhassem a proposta apresentada. Incentivou-se a aquisição de aprendizagens e a aplicação de conhecimentos através da resolução de tarefas na plataforma *Khan Academy*, promovendo-se a reflexão, a discussão e a formulação partilhada de uma resposta para o primeiro problema colocado. Por fim, os alunos foram confrontados com dois problemas de programação linear distintos dos apresentados anteriormente, cujo intuito seria o de averiguar se o conhecimento adquirido com a resolução do primeiro problema contribuiria, ou não, para a resolução autónoma.

A professora criou uma turma na plataforma *Khan Academy,* registando os alunos participantes na investigação. Através da atribuição de tarefas observou, monitorizou e

[1] Plataforma on-line (gratuita) com conteúdos digitais de diferentes disciplinas, incluindo a Matemática.

percecionou a ação e o desempenho dos alunos durante a fase inicial de aprendizagem. Permitiu que escolhessem entre o trabalho individual e o desenvolvido em pares e que selecionassem as ferramentas tecnológicas que melhor se ajustassem aos seus interesses. Apenas dois pares de alunos decidiram trabalhar em conjunto, todos os restantes optaram por resolver os problemas individualmente. Face às decisões tomadas, a professora solicitou que, no caso de optarem por trabalhar a pares, gravassem o áudio com uma ferramenta digital (p. e. telemóvel) enviando-o, posteriormente, para a professora. Os recursos selecionados e utilizados foram diversificados, variando entre computadores portáteis, tabletes, telemóveis com acesso à Internet e calculadoras gráficas.

Para planificar este módulo, a docente disponibilizou 12 aulas de 50 minutos, contemplando momentos para pesquisa e consolidação. Um par de alunas utilizou apenas 10 aulas para concluir a proposta, enquanto 7 dos restantes alunos envolvidos necessitaram de 14 aulas para a concluir. Considerou-se que a avaliação assumiria carácter formativo e contínuo, sendo a resolução correta do problema classificada com 10 valores. A avaliação sumativa possibilitaria aos alunos a obtenção de resultados superiores, obtidos através da resolução de uma ficha de avaliação.

No início do módulo, discutiu-se com os alunos quais os objetivos da abordagem metodológica. Posteriormente, a docente apresentou o problema ilustrado na figura 1, pedindo que refletissem sobre o seu conteúdo e apresentassem uma proposta de resolução. Intencionou-se, através deste procedimento, promover a *Contextualização* do problema e a *Mobilização* para a aprendizagem. Destaca-se que a proposta metodológica para o módulo foi aceite por todos os alunos e que estes se organizaram por forma a conseguirem dar resposta ao problema apresentado.

Para recolha dos dados, recorreu-se à observação direta e participante que se concretizou através do acompanhamento e do diálogo mantido com os alunos no seu ambiente natural. Foram efetuados registos no diário de bordo da primeira investigadora (professora da turma), os quais contemplaram aspetos relacionados com o comportamento, postura, dificuldades e desempenho dos intervenientes durante a resolução e discussão das tarefas. Foram ainda recolhidos os registos escritos dos alunos, bem como os registos áudio dos pares que trabalharam em conjunto. Por último, foi aplicado um questionário final de avaliação do módulo, solicitando uma reflexão sobre a aplicação do PBL.

Os dados recolhidos foram interpretados de acordo com a experiência profissional, conhecimento e convicções das investigadoras, procurando-se aferir a motivação dos alunos durante a resolução dos problemas colocados, bem como a pertinência do modelo PBL no ensino profissional de nível secundário.

Para procurar dar respostas às questões de investigação definidas serão apresentados os resultados respeitantes ao par de alunas (C+S), que conseguiu concluiu a tarefa em menos tempo, bem como os registos de dois alunos (J e F) que apresentaram resoluções individuais, mas que registaram resultados díspares na avaliação sumativa.

Resultados

Os resultados analisados permitiram constatar que em situações diferenciadas, os alunos enquadraram os problemas com que se depararam ao contexto das novas aprendizagens, quer na visualização dos vídeos da *Khan Academy*, quer no guião de resolução, e mobilizaram conhecimentos adquiridos para os resolverem. Destaca-se o excerto de um áudio apresentado pelas alunas C+S, o qual permite constatar de que forma as alunas trabalharam uma equação afim e como a escreveram na forma de equação reduzida, aplicando os conhecimentos que tinham adquirido em módulos anteriores.

> "Então é assim: se aqui está negativo, aqui vai passar a positivo, nove... este corta, com corta (...) Fica $\frac{5y}{5}$, é igual a $\frac{45-9x}{5}$. O cinco corta com o cinco, fico com o y sozinho $y = \frac{45-9x}{5}$."

Figura 2 — Extrato do áudio do par C+S.

Evidencia-se, também, uma resolução gráfica apresentada pela aluna J, obtida com auxílio da calculadora gráfica, e através da qual ela procurou dar resposta a um problema da plataforma *Khan Academy*. Esta resolução exigiu a representação gráfica de três equações lineares e a determinação dos pontos de interseção com os eixos coordenados e entre os gráficos das duas funções, competências matemáticas já adquiridas pelos alunos em aprendizagens anteriores.

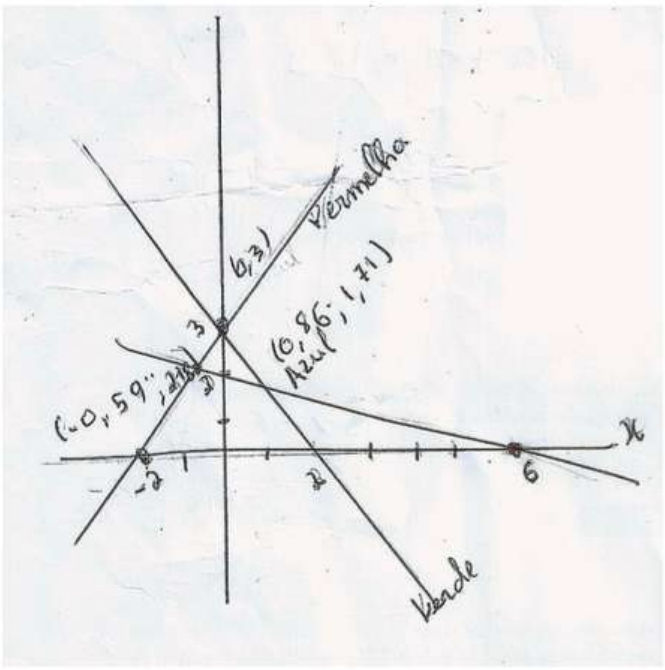


Figura 3 — Representação gráfica de três equações lineares pela aluna J.

Face aos resultados apresentados e ao conhecimento global das resoluções apresentadas, entende-se ter-se verificado o cumprimento do passo *Contextualização* e *Mobilização* do modelo PBL. Relativamente ao cumprimento do passo *Atividade de Aprendizagem,* constatou-se que os alunos aceitaram o desafio da aprendizagem, envolvendo-se na resolução do problema proposto, fazendo uso dos recursos disponibilizados pela professora. Apesar das abordagens diferenciadas ao problema de programação linear proposto no início do guião, a globalidade dos alunos utilizou como metodologia de resolução a tentativa e erro. A dificuldade que sentiram em resolver o problema levou-os a criar uma conta na plataforma *Khan Academy* com o intuito de adquirirem ou relembrarem conhecimento que contribuísse para a resolução. A partir desse momento iniciaram um trabalho de pesquisa e de trabalho autónomo que foi, gradualmente, contribuindo para a resolução do primeiro problema proposto.

Na *Organização da Atividade de Aprendizagem* refletiu-se sobre os problemas e orientações transmitidas. A propósito do trabalho a desenvolver, não se exigia que o aluno resolvesse todos os passos ou visualizasse todos os vídeos propostos, mas antes reunisse um conjunto de conhecimentos prévios ou que selecionasse outras ferramentas digitais que o auxiliassem na resolução do problema. A análise dos registos recolhidos permitiu constatar que os alunos compreenderam as orientações transmitidas e percecionaram o que fazer para obter resposta para o problema colocado.

No que respeita ao cumprimento do passo *Coordenação e Acompanhamento,* denota-se que os alunos foram incentivados a seguir as orientações transmitidas, quer verbalmente, quer através do guião de resolução. A professora permitiu que os alunos colocassem dúvidas, refletissem e que dialogassem sobre as suas dificuldades e resultados. No desenvolvimento da atividade, destaca-se o interesse e a autonomia progressiva evidenciada pelo par C+S, as dificuldades registadas pela aluna J, que solicitou apoio da professora, e o desempenho do aluno F, que não procurou auxílio durante a realização da tarefa.

Todos os alunos tiveram oportunidade para consultar *Outras Referências,* para além das propostas, podendo esses optar pela consulta de manuais escolares ou livros disponíveis no espaço em que se encontravam. Poderiam, ainda, recorrer à pesquisa através de acesso à Internet. Por opção, nenhum dos alunos consultou livros ou manuais escolares.

No cumprimento do passo *Análise e Avaliação da Atividade de Aprendizagem*, apenas uma reduzida percentagem de alunos não conseguiu atingir os objetivos delineados. Tal aconteceu, por exemplo, com o aluno F, aquando do desenvolvimento de uma das propostas sugeridas no guião. A tarefa implicava a mobilização de conhecimentos adquiridos e deveria conduzir à representação de três equações lineares e à identificação dos pontos de interseção, quer dessas retas com os eixos coordenados, como das retas, entre si. Tal como se poderá verificar na figura 4, o aluno F não conseguiu resolver corretamente o problema colocado:

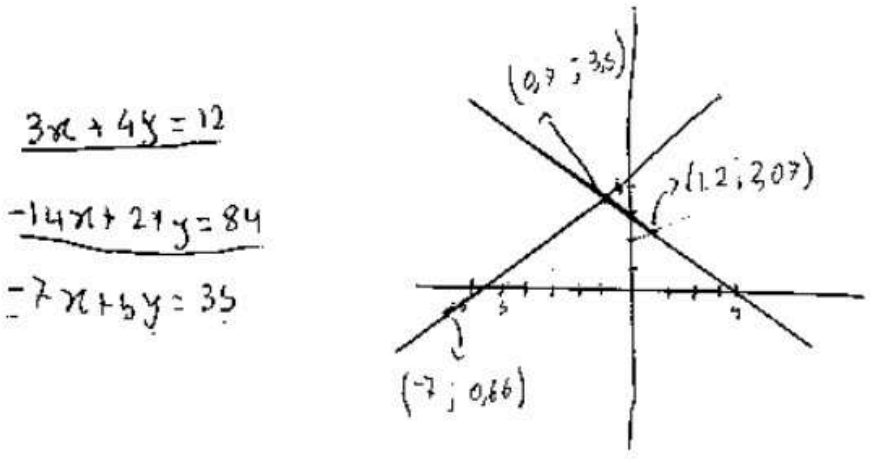


Figura 4 – Resolução do aluno F a uma proposta de mobilização de conhecimentos anteriores.

Uma análise mais pormenorizada dos resultados apresentados permite atestar que o aluno F não resolveu corretamente o problema colocado, porque não conseguiu

representar a equação linear . Relativamente ao trabalho desenvolvido durante o módulo *Otimização*, registaram-se dificuldades na aplicação de aprendizagens adquiridas, bem como na aquisição de novas competências. Analogamente, o trabalho desenvolvido pelo aluno ficou aquém do desejado, pois este obteve dois valores, na ficha de avaliação que lhe foi aplicada.

Por outro lado, o envolvimento das alunas C+S permitiu constatar maior assertividade ao nível da pesquisa e do desenvolvimento da compreensão, comparativamente com os seus colegas. As alunas seguiram as orientações transmitidas no guião e apresentaram uma resolução correta para o problema apresentado. Através da figura 5 será possível verificar como apresentaram as restrições do problema, representaram a região crítica e obtiveram as soluções pretendidas.

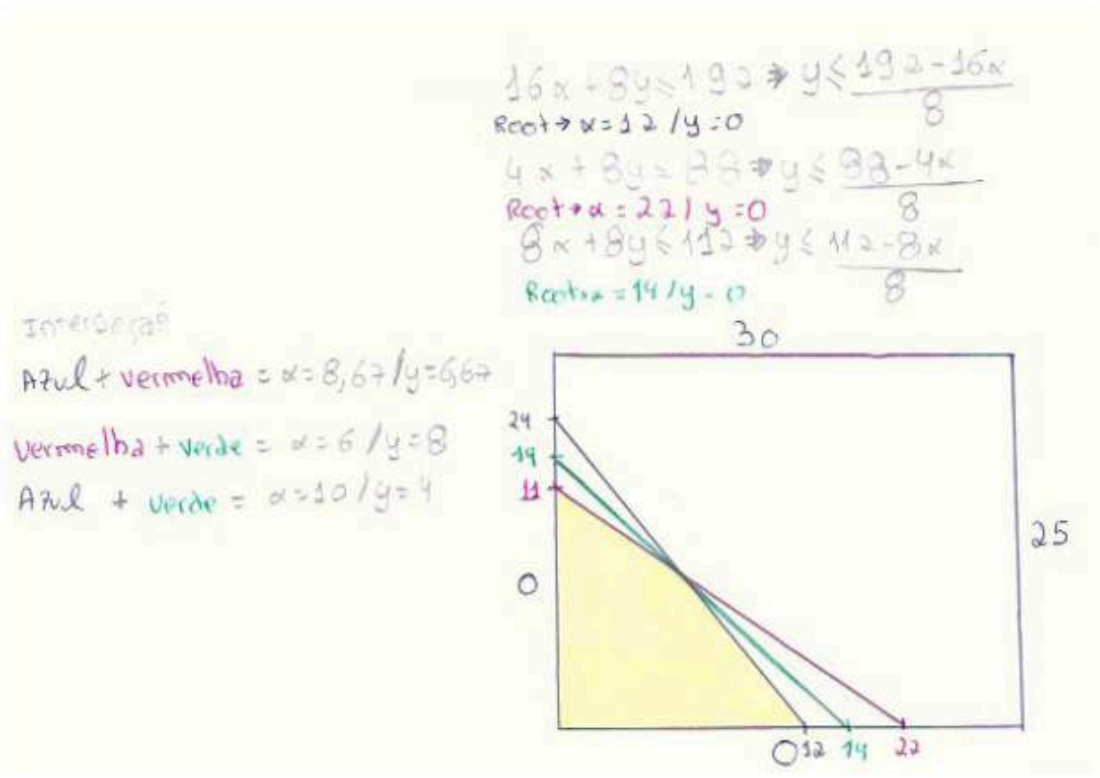


Figura 5 – Parte da resolução do problema proposto (alunas C+S).

Acrescenta-se que desenvolveram a sua atividade de forma autónoma, não requerendo a intervenção da professora. Utilizaram oito tempos letivos para desenvolverem a aprendizagem e resolverem os problemas. Para concluírem os dois problemas suplementares, utilizaram mais dois tempos de aula. Nas fichas de avaliação sumativa obtiveram, respetivamente, 15,5 e 14 valores.

Ainda a propósito da *Análise e Avaliação da Atividade de Aprendizagem,* registam-se os resultados apresentados pela aluna J. Esta resolveu todas as atividades propostas, utilizando catorze tempos para desenvolver aprendizagens na plataforma *Khan Academy* e para apresentar solução para o primeiro problema do guião. Apesar de ter usufruído desta experiência, alcançou apenas 9,5 valores na ficha de avaliação, resultado que não difere do aproveitamento registado em outros módulos avaliados.

Em súmula, apenas um aluno não conseguiu resolver o primeiro problema, não entregando qualquer proposta de resolução. Dez alunos da turma propuseram-se a avaliação sumativa, sendo que apenas um desses registou classificação inferior a 9,5.

Os restantes vinte e sete alunos não só resolveram com êxito o primeiro problema, como também generalizaram a sua aprendizagem ao apresentarem resposta aos dois outros problemas apresentados. Evidenciaram estar perante o último passo descrito no modelo-– *Síntese e Aplicação* – pois aplicaram aprendizagens adquiridas para dar resposta a situações semelhantes.

Para aferir a motivação e perceção dos alunos quanto à aplicação do PBL, a docente realizou um questionário final de avaliação do módulo, solicitando uma reflexão sobre a aplicação do PBL num módulo da disciplina de Matemática. A análise das respostas revelou um conjunto de aspetos relacionados com a forma como os conteúdos foram abordados, bem como com os conhecimentos adquiridos. Uma das questões prendia-se com a perceção dos alunos quanto à utilidade da metodologia PBL, aplicada nas aulas de Matemática. Apenas um aluno transmitiu "Não gostei muito porque gosto quando a professora explica e a maneira como o faz." (JG). Os restantes declararam sentir maior autonomia e liberdade no processo de aprendizagem, ainda que tenham investido maior esforço e dedicação: "eu acho que este método nos obriga a desenrascarmos mais e a pensarmos mais". Porém, consideraram que "foi mais divertido." (SA).

Quanto à perceção dos alunos acerca da aprendizagem, estes consideraram ter aprendido por si mesmos, ainda que tenham feito uso do computador. Já no que concerne à perceção dos alunos quanto ao papel da docente, estes não conseguiram discernir diferenças entre a forma desta atuar entre este módulo e os anteriores, considerando apenas que a professora esteve sempre presente e disponível para os ajudar. A respeito da relação que os alunos poderiam fazer entre a atividade proposta e os propósitos para o ensino profissional, apenas uma aluna (C) estabeleceu relações: "basicamente foi fazer

uma série de comparações ao resolver exercícios, para também vermos o lucro que ganhamos, o que é fundamental para o nosso mundo de trabalho".

Considerações finais

Verificou-se que o processo de aprendizagem adequa-se melhor ao ritmo de trabalho individual e as aquisições tornam-se mais significativas, características que parecem adequar-se ao perfil e necessidades do aluno que frequenta o ensino profissional.

O desempenho evidenciado e transmitido na seção anterior permite constatar que os alunos apreciaram a metodologia adotada, iniciando um processo autónomo de aprendizagem. Os resultados sugerem que a aplicação do modelo PBL também pode ocorrer e promover sucesso no ensino profissional. Parece, como tal, ser possível dar resposta à questão de investigação *será exequível a aplicação de um modelo de ensino reconhecidamente usado no ensino superior* (PBL), *para lecionar Matemática a alunos de um curso profissional de nível secundário?*

Apenas um aluno não se envolveu na realização da atividade proposta, sendo que os restantes se mostraram motivados e empenharam-se na resolução dos problemas. Este resultado foi igualmente verificado, uma vez que declararam, através do preenchimento do questionário aplicado, ter gostado de usufruir de maior autonomia e liberdade no processo de aprendizagem. Considera-se que esta experiência foi muito positiva, na perspetiva dos alunos e da professora, pois promoveu nos alunos menos interventivos maior interesse e motivação pela resolução dos problemas. Entende-se ter sido possível dar resposta à primeira questão de investigação colocada: *aplicar o modelo PBL no módulo Otimização tem implicações ao nível das motivações e desempenho dos alunos?*

Considera-se que as principais limitações associadas a esta experiência prendem-se com o facto de ter sido aplicada em condições particulares, designadamente por uma professora que conhecia bem os alunos da turma e com alunos que, no seu percurso, desenvolveram autonomia na resolução de tarefas propostas. A segunda é que este modelo de aprendizagem foi pensado para ter transversalidade interdisciplinar que não foi possível oferecer-lhes nesta experiência. Como recomendação, entende-se que os alunos do ensino profissional poderiam beneficiar da aplicabilidade do modelo PBL e/ou conceber-se um projeto interdisciplinar centrado na flexibilidade e autonomia das escolas, criando pares pedagógicos e domínios de autonomia em torno de um projeto, através da metodologia PBL.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Referências

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora.

ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Profissional de nível Secundário. Lisboa: ME-DGIDC.

Fernandes, S. R. G. (2010). Aprendizagem baseada em projetos no contexto do ensino superior: avaliação de um dispositivo pedagógico no Ensino de Engenharia. Tese de doutoramento em Ciências da Educação. Universidade do Minho: Instituto de Educação, Minho, Portugal.

Killer, J. A. & Rodrigo, N. F. (2012). Uma metodologia de desenvolvimento de competências. *Boletim Técnico do SENAC,* 38(1). 5-15.

Kolmos, A. (1996). Reflections on Project Work and Problem Based Learning. *European Journal of Engineering Education,* 21(2)*,* 141 – 148.

Palha, S. (2006). *Educar para autonomia*. 16 – 24. EIEM 2006, Monte Gordo.

Pinheiro, M. M. (2008). Metodologias PBL (Project-Based Learning): um desafio para a melhoria do desempenho no ensino superior profissionalizante? Conferência Internacional Modelos de Governação e Gestão do Ensino Superior – Uma perspectiva Global, Coimbra.

Rodrigues, A. S. C. (2015). *A matemática no ensino profissional. Os programas e as representações dos professores*. Tese de doutoramento em didática da matemática. Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal.

Santos, A. M., Salgado, A., Barreto, J. F, Martins, H. & Dores, A. R. (2010). *Problem-Based Learning e suas implicações: Breve revisão teórica*. 1º ICH, Gaia.

Zorzan, A. S. L. (2007). Ensino-aprendizagem: algumas tendências na educação matemática. *Educar pela pesquisa: formação e processos de estudo e aprendizagem com pesquisa*, 77 -93. Acedido em novembro, 10, 2017 em: http://www.sicoda.fw.uri.br/revistas/artigos/1_7_76.pdf

UMA ABORDAGEM AOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES NO 8.º ANO

Luís Bernardino [1], *António Guerreiro* [2]

[1]Escola Básica Rio Arade, Parchal, Lagoa, bernluis@gmail.com

[2]UIDEF, ESEC, Universidade do Algarve, aguerrei@ualg.pt

Resumo. *Esta comunicação visa apresentar resultados de alunos do 8.º ano de escolaridade num itinerário de aprendizagem dos sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, em que se partiu de uma abordagem visual, se progrediu para a resolução de problemas e se finalizou com a resolução de sistemas de equações na linguagem tradicional da álgebra. A comunicação integra as perceções expressas por professores do 3.º ciclo do ensino básico num contexto formativo de um encontro regional de professores de matemática. Os dados empíricos foram recolhidos em duas turmas do 8.º ano, no final do ano letivo 2016/17, numa escola do distrito de Faro. Os dados são constituídos pelas produções dos alunos em diferentes tarefas matemáticas. Os resultados apontam para a transferência de estratégias informais utilizadas em ciclos anteriores de ensino e nas resoluções das tarefas matemáticas com uma representação visual para a resolução dos problemas e dos sistemas de equações, representados na linguagem matemática formal.*

Abstract. *This paper aims to present the results of eighth-grade students in the process of learning two first–degree equations in two variables, a process that started off with a visual approach, evolved towards problem solving and ended in the solution of equation systems using the traditional language of algebra. The paper integrates the perceptions expressed by teachers of the 3rd cycle of basic education in a formative context of a regional meeting of teachers of mathematics. Empirical data were collected in two eighth-grade classes in end of the school year of 2016/2017 at a school in the district of Faro, Portugal. The data came from the students' productions for the completion of different mathematical tasks. Results show that there was a transference from informal strategies used in previous stages of formal education to solve mathematical tasks based on a visual representation to problem solving and to the solution of equation systems, as represented in formal mathematical language.*

***Palavras-chave**: sistemas de equações; pensamento algébrico; práticas de sala de aula.*

A álgebra apoia-se em duas ideias basilares: "a noção de variável como entidade abstrata que pode ser representada de várias formas (simbólicas e não simbólicas) e a noção de estrutura envolvendo relações, operações e suas propriedades" (Ponte, 2017, p. 27). A aprendizagem da álgebra decorre assim da capacidade do aluno entender a sua linguagem abstrata, de a usar na resolução de problemas e de situações matemáticas e de formalizar o seu pensamento algébrico, através da generalização de relações e propriedades em matemática. O ensino da álgebra extravasa o foco do cálculo algébrico e exige uma centralidade no conhecimento dos conceitos de modo a proporcionar o

desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual inclui os objetos, comummente utilizados na álgebra, mas resulta do estudo das relações existentes entre estes, de forma geral e abstrata, como forma do aluno fazer, pensar e comunicar matematicamente.

Neste artigo, pretendemos apresentar um itinerário de aprendizagem dos sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, no 8.º ano de escolaridade, partindo de uma abordagem visual, progredindo para a resolução de problemas, com enunciado em língua materna, e finalizando na resolução de sistemas de equações, expressos em linguagem matemática usualmente utilizada na álgebra. Esta comunicação integra as perceções expressas por um grupo de professores do 3.º ciclo do ensino básico no contexto de um encontro regional de professores de matemática, a propósito da relevância desta abordagem à resolução de sistemas de equações.

Pensamento algébrico e sistemas de equações

O pensamento algébrico inclui as vertentes da generalização da aritmética e raciocínio quantitativo, que diz respeito ao reconhecimento das propriedades e relações das operações numéricas, incluindo a respetiva tradução simbólica; do estudo das funções, relações e variações, que conjuga o relacionamento dos objetos com a generalização das relações; e da modelação matemática a par de outros problemas matemáticos e de outros domínios de conhecimento (Kaput, 2008). O pensamento algébrico contrasta com a álgebra escolar: (i) ao considerar que a notação algébrica convencional não é o único modo de expressar as ideias algébricas e (ii) ao colocar a ênfase do ensino da álgebra nos significados e compreensão das ideias matemáticas (Canavarro, 2007).

Neste sentido, o pensamento algébrico inclui as vertentes de representar, raciocinar e resolver problemas, conjugando a capacidade de cálculo algébrico e de estudo das funções com o uso das relações de equivalência e de ordem, na interpretação e resolução de problemas matemáticos, a par com a utilização dos símbolos na descrição das situações e na resolução dos problemas, tendo por princípio o raciocínio matemático e a generalização das relações (Branco & Ponte, 2011; Ponte, Branco & Matos, 2009).

Nesta ótica, o ensino da álgebra deve habilitar os alunos para: (i) compreender padrões, relações e funções; (ii) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; (iii) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) analisar a variação em diversos contextos (NCTM, 2007).

Para a concretização destes objetivos, é importante que os professores ajudem os alunos a dar significado aos símbolos, que lhes proporcionem a construção e o uso da linguagem algébrica, favorecendo a comunicação matemática, e que sustentem o processo de ensino e de aprendizagem na resolução de problemas e na comunicação das diferentes estratégias e resoluções (De la Fuente, Deulofeu & Rowland, 2016).

O ensino da álgebra abrange a resolução de equações do 1.º grau, de equações literais do 1.º grau e de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. Neste contexto, Nobre, Amado e Ponte (2012) mencionam que alguns alunos resolvem equações do 1.º grau com uma incógnita, mas não resolvem sistemas de equações com duas incógnitas, manifestando dificuldades na utilização da *transitividade do sinal de igual*, quando se deparam com duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. Num outro estudo, a propósito da resolução de problemas traduzíveis num sistema de equações, Matos, Branco e Ponte (2005) concluem que os alunos conseguem solucionar os problemas utilizando processos de tentativa-erro, com e sem recurso às condições dos problemas, e outros processos intuitivos, mas não tentam *algebrizar* as condições do problema.

Ainda no contexto da resolução de sistemas de equações, Nobre (2016) alerta para as dificuldades dos alunos na utilização do método de substituição, realçando que os alunos concebem a substituição de uma variável por valores numéricos específicos, mas que não o fazem quando se trata de uma expressão algébrica. A mesma autora afirma que "o recurso ao método de substituição implica um conhecimento sólido da escrita de equações, da sua resolução e da substituição de variáveis" (Nobre, 2016, p. 410), apontando para a importância da resolução de equações do 1.º grau com uma incógnita e de equações literais do 1.º grau.

Sistematizando, Ponte, Branco e Matos (2009) apontam três categorias de dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas: (i) a compreensão da noção de sistema e da natureza da sua solução; (ii) compreensão e execução dos procedimentos de cálculo; e (iii) resolução de problemas através de sistemas de equações. Contudo, Ponte (2017) realça que, para a aprendizagem dos conceitos algébricos, as "tarefas de natureza desafiante, como problemas, investigações e explorações mostram-se fundamentais para levar o aluno a desenvolver uma atividade matemática produtiva e construir novos significados" (p. 31)

Intervenção educativa e apresentação dos resultados num encontro regional

O processo utilizado para a introdução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas aos quarenta e três alunos de duas turmas de 8º ano de escolaridade, de uma escola básica do distrito de Faro, foi feito com recursos a três etapas, sendo que cada uma destas se baseou na exploração de uma tarefa matemática distinta, nas quais os alunos eram convidados a resolverem problemas, dado que não conheciam previamente os procedimentos *standard* para resolvê-los, no entanto, tinham recursos suficientes para tentar solucioná-los e determinar uma solução matemática.

As atividades decorreram ao longo de seis aulas de cinquenta minutos cada, em cada uma das turmas, sendo que cada uma das três tarefas matemáticas foi explorada em duas aulas: a primeira aula estruturada em duas partes, apresentação da tarefa e trabalho autónomo dos alunos em pares ou pequenos grupos, e a segunda aula dedicada à discussão das diferentes resoluções e síntese das estratégias apresentadas pelos alunos. Na segunda aula de cada ciclo, os alunos foram incentivados a analisar as diferentes estratégias, com distintos graus de eficácia, de modo a construírem as suas heurísticas para a resolução de problemas destas tipologias.

Cada ciclo de duas aulas foi dinamizado recorrendo ao ensino exploratório, caracterizado por três fases: fase de apresentação da tarefa, na qual o professor introduziu o problema, procurando garantir que todos os alunos compreendessem a tarefa matemática proposta; fase de exploração da tarefa, na qual os alunos trabalharam o problema, por vezes discutindo, em pares ou em pequeno grupo; e fase de discussão e sistematização, na qual foram analisadas várias propostas de resolução elaboradas pelos pares (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

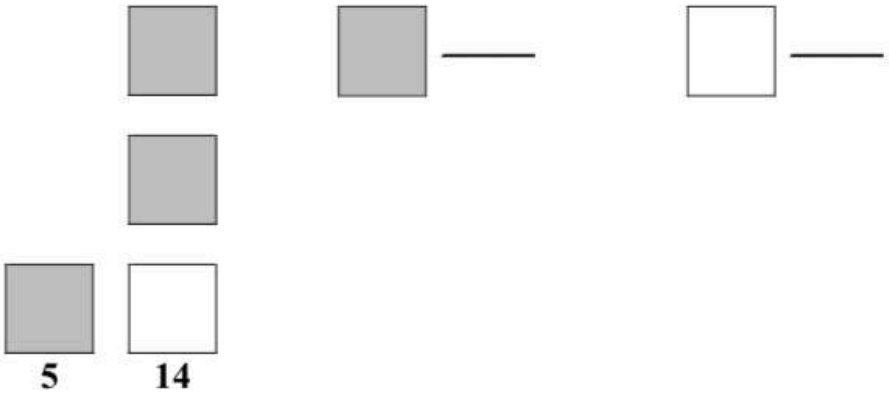
As tarefas matemáticas propostas estão enquadradas no Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013), o qual refere que a aprendizagem da Matemática, nos anos iniciais, deve partir do concreto, pelo que é fundamental que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é característico. O mesmo documento refere também que os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares.

A primeira tarefa matemática (tarefas 1.1., 1.2. e 1.3.) incluiu três problemas visuais, nos quais eram apresentadas duas sequências formadas por dois tipos de elementos, em

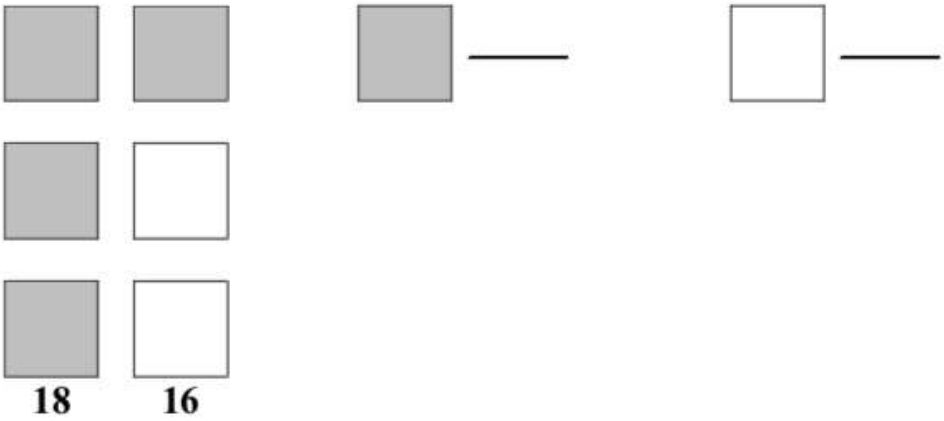
número variável, sendo atribuído um valor a cada uma dessas sequências e convidando o aluno a determinar o valor de cada um dos símbolos.

Em cada situação, determina o valor de cada um dos quadrados, de modo a que a soma, por coluna seja o valor indicado.

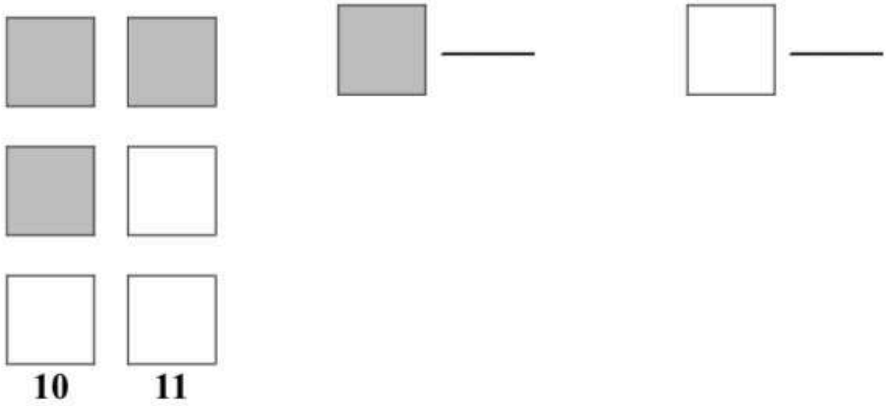
Tarefa 1.1.



Tarefa 1.2.



Tarefa 1.3.



No primeiro problema, tendo em conta o valor do quadrado cinza, era previsto que os alunos determinassem o valor do quadrado branco. No segundo problema, era provável que os alunos determinassem o valor do quadrado cinza, dado que todos os quadrados da primeira coluna eram iguais, e, após a obtenção desse valor, determinassem o valor do quadrado branco. No terceiro problema, era possível que as estratégias apresentadas tivessem naturezas distintas, como a comparação das duas colunas ou tentativa e erro.

A segunda tarefa matemática (tarefas 2.1. e 2.2.) compreendeu dois problemas, que podiam ser traduzidos por sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, os quais seriam resolvidos da forma que os alunos considerassem mais adequada.

> Tarefa 2.1.
> Na sua rua, o André observou que havia 20 veículos estacionados, entre motos e carros. Ao baixar-se, ele conseguiu visualizar 54 rodas.
> Qual é a quantidade de motos e de carros estacionados na rua do André?
> Tarefa 2.2.
> O seguinte problema foi inventado na Índia, por Mahavira, há mais de mil anos: "O preço de 9 limões e 7 maçãs é 107. O preço de 7 limões e 9 maçãs é 101. Diz-me rapidamente qual o preço de um limão e uma maçã". E quanto custa uma maçã?

O primeiro problema aborda uma situação comum em aulas do 1.º ciclo do ensino básico, deste modo era provável que os alunos recorressem a representações informais, como o desenho e outras que já teriam explorado ao nível dos ciclos anteriores, tendo por intuito estimular a apreensão de uma solução válida para as duas condições do sistema.

O segundo problema tem, matematicamente, a mesma estrutura que o terceiro problema da etapa anterior, deste modo era expectável que os alunos conseguissem fazer a transferência das estratégias utilizadas anteriormente para a resolução deste problema.

A terceira tarefa matemática envolveu cinco exercícios sobre sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas (tarefas 3.1. a 3.5.), sendo que os primeiros três sistemas representavam problemas equivalentes aos visuais propostos na primeira etapa, no quarto sistema uma das variáveis encontrava-se isolada e o quinto sistema era apresentado na forma canónica, com todos os coeficientes diferentes de zero. Aproveitando o conhecimento que os alunos já possuem, quer da modulação através de uma expressão algébrica quer da resolução de equações de 1.º grau, o propósito principal foi orientá-los de modo a que se apropriassem da linguagem algébrica própria dos sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Resolve cada um dos seguintes sistemas de equações:

Tarefa 3.1. $\begin{cases} x = 4 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$ Tarefa 3.2. $\begin{cases} 3x = 18 \\ x + 2y = 17 \end{cases}$

Tarefa 3.3. $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$ Tarefa 3.4. $\begin{cases} x = y + 10 \\ x + y = 20 \end{cases}$

Tarefa 3.5. $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 5x - y = 17 \end{cases}$

Nas aulas seguintes, os alunos resolveram exercícios, mais ou menos tipificados no estudo deste conteúdo programático, bem como a resolução de um instrumento de avaliação pelos alunos.

Apresentação dos trabalhos dos alunos no AlgarMat2017. Uma primeira análise dos resultados da implementação desta abordagem foi apresentada no AlgarMat2017, num espaço de comunicação. Neste encontro regional de professores de matemática, o primeiro autor começou por fazer uma breve apresentação das linhas centrais do pensamento algébrico que serviu de base à planificação da unidade *resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas*, nomeadamente à elaboração das tarefas matemáticas anteriormente referidas.

Assim, foi referido que, nos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, a álgebra tem como propósito principal de ensino, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, e que os tópicos sistemas de equações, equações do 2.º grau e inequações do 1.º grau constituem o culminar do trabalho em álgebra nestes ciclos de ensino. Neste encontro, o primeiro autor, apresentou algumas notas sobre o pensamento algébrico, referindo a sistematização de Kaput (2008).

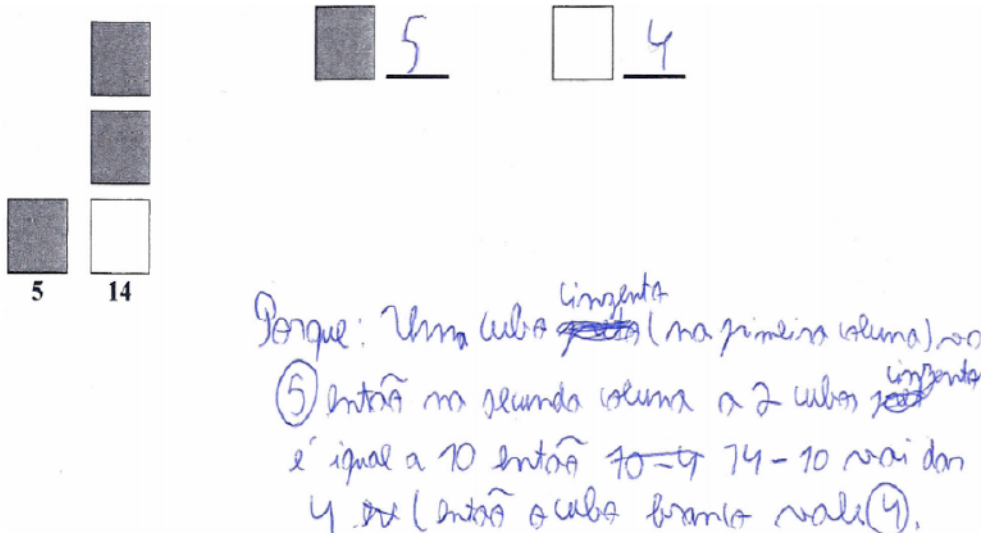
Após a introdução de natureza teórica, foi apresentada a sequência de tarefas matemáticas, referidas anteriormente, seguida de diversificadas resoluções dos alunos, tarefa a tarefa. O destaque da apresentação incidiu nas estratégias de resolução dos problemas visuais, dos problemas de texto e dos sistemas de equações. A apresentação anteriormente referida foi sendo acompanhada por alguns comentários que culminaram com um debate de ideias, entre todos os participantes, com o qual se finalizou esta sessão.

No âmbito do processo de creditação da ação de formação, dos quarenta e cinco relatórios apresentados por professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino

secundário, dezanove professores (identificados aqui de 01 a 19) explicitaram opinião sobre a comunicação *Sistemas de Equações: uma possível abordagem*, manifestando na sua maioria vontade em implementar a sequência de tarefas, com a existência de vozes discordantes, as quais rejeitam esta abordagem à resolução de sistemas de equações.

Os desempenhos dos alunos e as perceções dos professores

Tarefa 1.1. Como se previa a generalidade dos alunos identificaram o valor do quadrado cinza e por multiplicação e subtração obtiveram o valor do quadrado branco (figura 1):



[Porque: Um cubo cinzento (na primeira coluna) ser 5 então na secunda (segunda) coluna a 2 cubos cinzentos é igual a 10 então 14 – 10 vai dar 4 então o cubo branco vale 4.]

Figura 1. Resolução de um aluno da tarefa 1.1.

Todos os alunos apresentam resoluções do mesmo tipo, sempre a partir da identificação do valor do quadrado cinza. Neste caso, o aluno atribui ao objeto representado a denominação de cubo, apesar do enunciado referir quadrado, revelando dificuldades no campo da geometria.

Tarefa 1.2. Os alunos começaram por determinar o valor do quadrado cinza por divisão e obtiveram o valor do quadrado branco por subtração e divisão (figura 2):

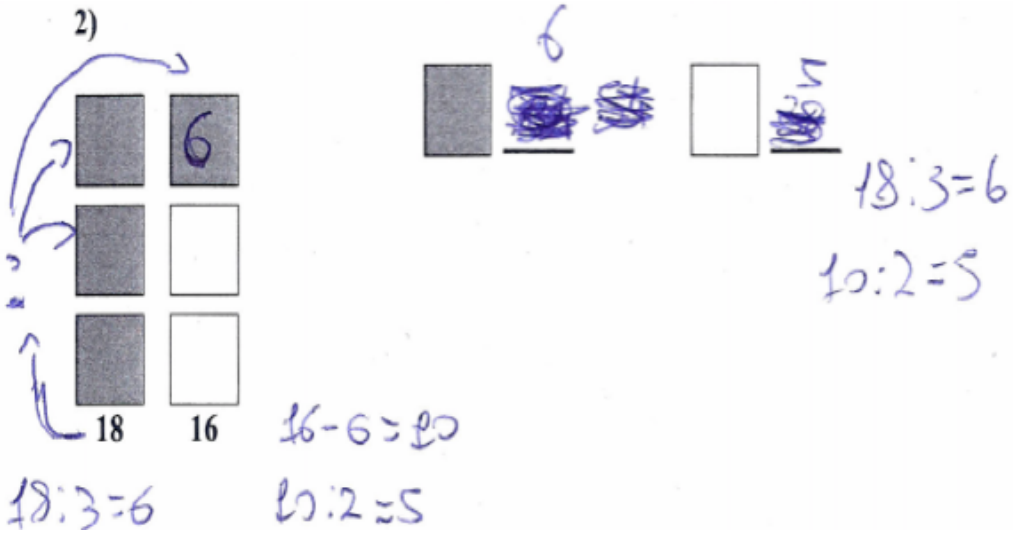
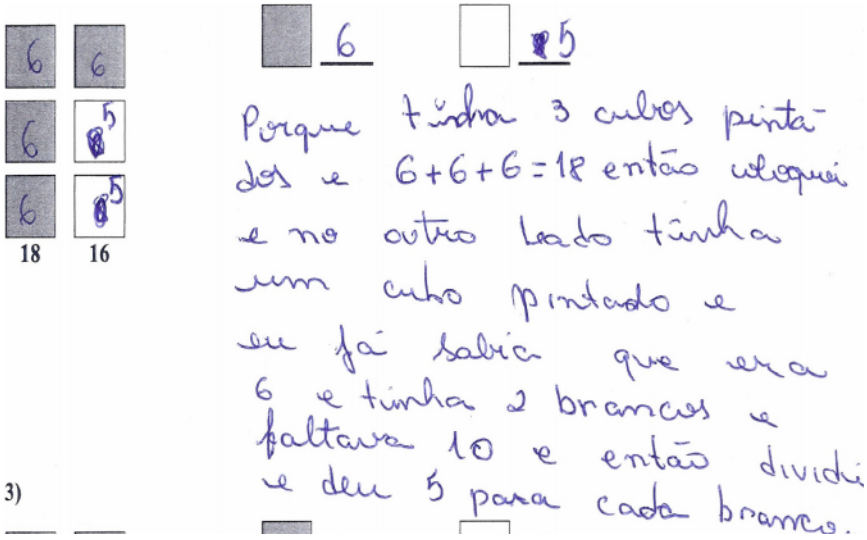


Figura 2. Resolução de um aluno da tarefa 1.2.

Os alunos apresentam a solução da tarefa justificando-a por um processo de validação (figura 3):



[Porque tinha 3 cubos pintados e 6+6+6=18 então coloquei e no outro lado tinha um cubo pintado e eu já sabia que era 6 e tinha 2 brancos e faltava 10 e então dividi e deu 5 para cada branco]

Figura 3. Resolução de aluno da tarefa 1.2.

Neste caso (figura 3), o aluno acrescenta uma justificação escrita, valorizando a explicação sobre os resultados obtidos, ao contrário do aluno anterior (figura 2) que recorre apenas à apresentação dos cálculos matemáticos.

Tarefa 1.3. Todos os alunos apresentaram os valores dos quadrados, cinza e branco, na sequência de um processo de tentativa e posterior verificação (figura 4):

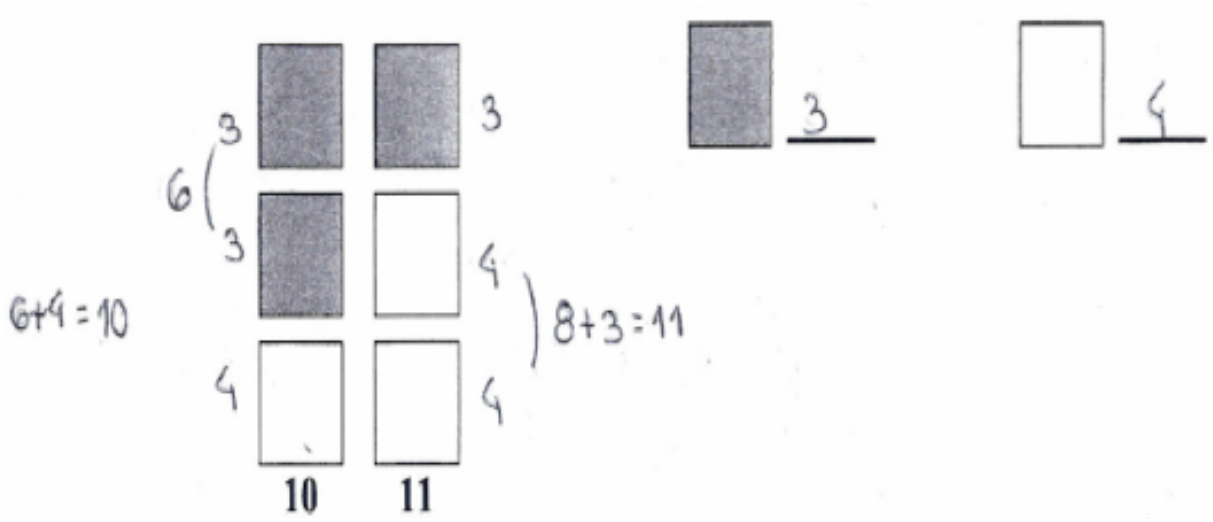
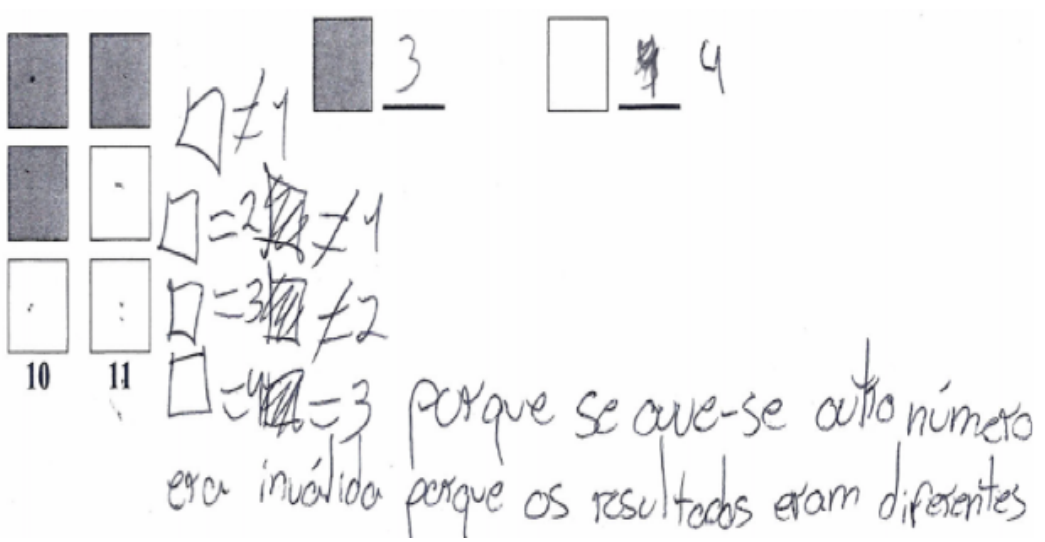


Figura 4. Resolução de um aluno da tarefa 1.3.

Um aluno apresentou uma resolução distinta de todas as restantes (figura 5) em que evidência que a diferença de valores das colunas decorre da diferença de valores da linha central, pelo que o quadrado cinza vale menos uma unidade que o quadrado branco:



[porque se ouve-se (houvesse) outro número era inválido porque os resultados eram diferentes]

Figura 5. Resolução de um aluno da tarefa 1.3.

Assim, o quadrado branco não poderia ser uma unidade, pois o cinza teria de ser zero, o que o aluno não considera como hipótese. Para o caso do quadrado branco ser dois, o cinza seria um, o que não verifica as condições. Para o caso do quadrado branco ser três, o cinza seria dois, o que também não verifica as condições. Para o caso do quadrado branco ser quatro, o cinza será três, o que verifica as condições. O aluno ainda refere que outros

valores também não são solução. Esta estratégia foi apresentada e discutida em grupo turma permitindo uma apropriação da mesma na resolução de situações similares, conforme se justificará na sequência das restantes tarefas.

Tarefa 2.1. Alguns alunos adotaram uma representação visual para o problema dos carros e das motas, com uma estratégia recorrentemente utilizada no 1.º ciclo do ensino básico (figura 6):

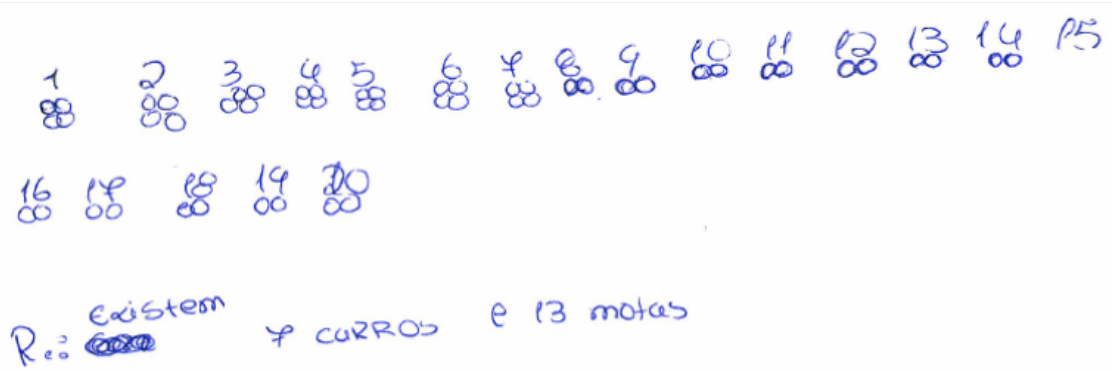


Figura 6. Resolução de um aluno da tarefa 2.1.

A estratégia utilizada carece de método generalizável para grandes números, no entanto a disposição das duas rodas nos 20 veículos e, posteriormente, o completar das rodas colocando de novo duas a duas é facilmente generalizável.

A maioria dos alunos optou por uma lógica de função, independentemente da configuração, experimentando alguns valores, em que a variável independente foram os 20 veículos, distribuídos por carros e motas, e a variável dependente, o número de rodas dos veículos (figura 7), valorizando a natureza das soluções de um sistema de equações:

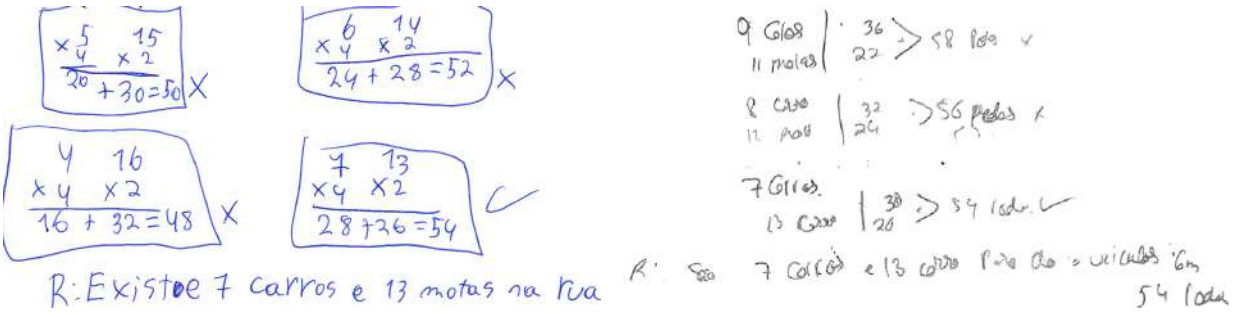
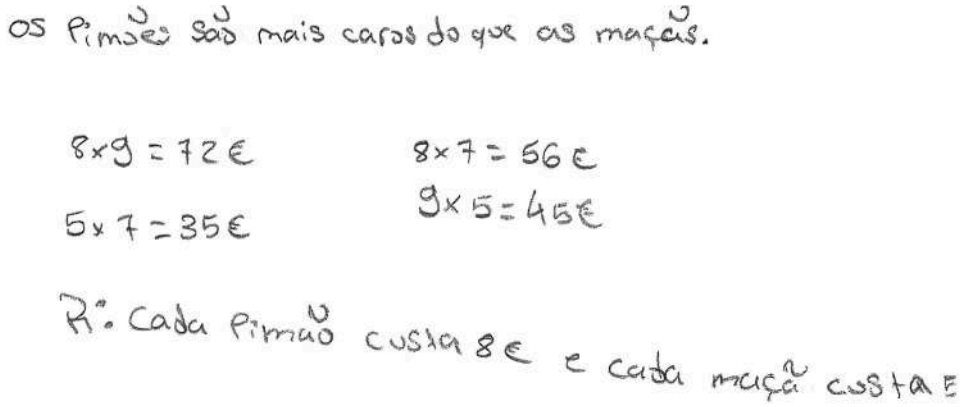


Figura 7. Resoluções de dois alunos da tarefa 2.1.

Os alunos apresentam uma estimativa da quantidade de carros e motas, em função dos dados do problema, e efetuam o cálculo do número de rodas, selecionando como solução do problema, a relação que verifica ambas as condições.

Tarefa 2.2. Os alunos compreenderam que os limões eram mais caros que as maçãs (figura 8):



[os limões são mais caros do que as maçãs. R: cada limão custa 8 € e cada maçã custa 5]

Figura 8. Resolução de um aluno da tarefa 2.2.

Neste caso, o aluno apresenta os valores dos preços dos limões e das maçãs sem justificar completamente, mas organiza os dados em dois grupos correspondentes às duas condições do problema. Nenhum aluno respondeu ao desafio inicial do preço de um limão e uma maçã, explanando o preço dos limões e das maçãs. A relação do mesmo número de frutos, em cada uma das condições, originou a apresentação da estratégia descrita na tarefa 1.3., por alguns alunos, inclusive através da representação visual do problema com quadrados vazios e preenchidos (figura 9):

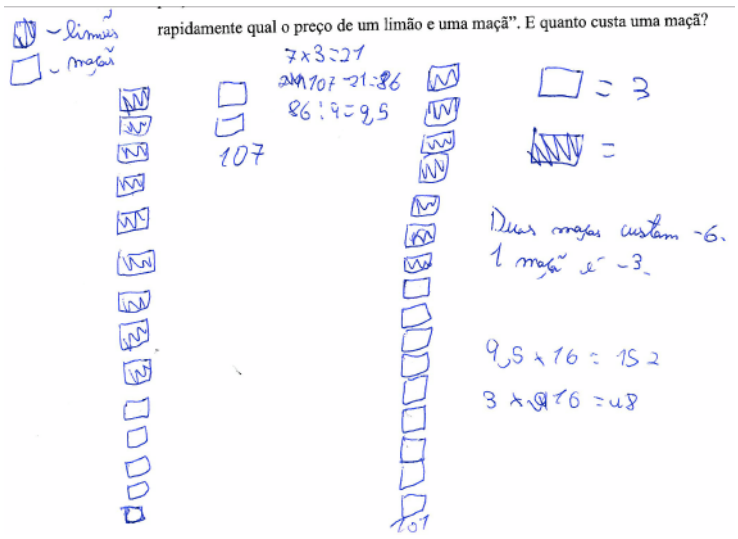


Figura 9. Resolução de um aluno da tarefa 2.2.

Nesta resolução, o aluno começa por identificar que «duas maçãs custam – 6» do que dois limões, então «1 maçã é – 3», depois multiplica 7 por 3 (7 maçãs por 3) para obter o valor de diferença das maçãs (3 x 7 = 21). Neste caso, o aluno teria de adicionar 21 aos 107 e dividir os 128 por 16 para obter o valor do preço dos limões. No caso, o aluno considerou as maçãs a valerem 3 e não a diferença do valor do preço em relação aos limões. A mesma estratégia foi utilizada por outro aluno, desta vez com sucesso (figura 10):

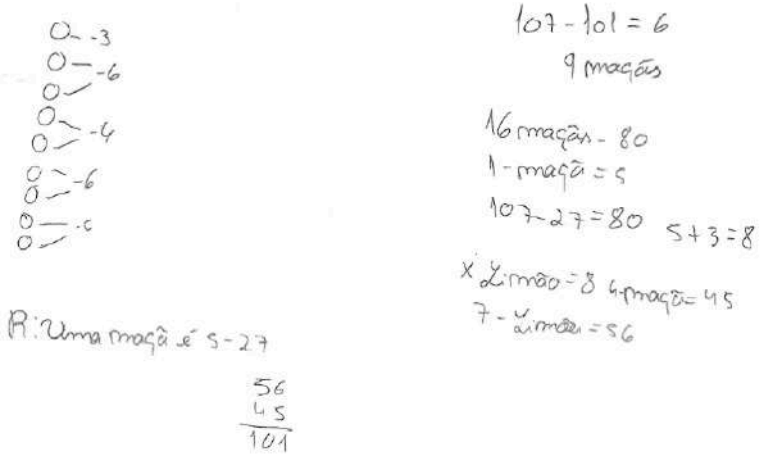


Figura 10. Resolução de um aluno da tarefa 2.2.

O aluno começa por identificar a diferença entre os preços de duas maçãs e de nove maçãs de forma visual. Identifica a diferença dos valores e subtrai vinte e sete ao total de cento e sete, obtendo oitenta, como o valor de dezasseis maçãs, determinando o valor da unidade. Adiciona cinco unidades a três unidades e determina o preço dos limões. Um outro aluno apresentou a mesma estratégia com uma representação exclusivamente numérica e com indicação das duas condições do problema (figura 11):

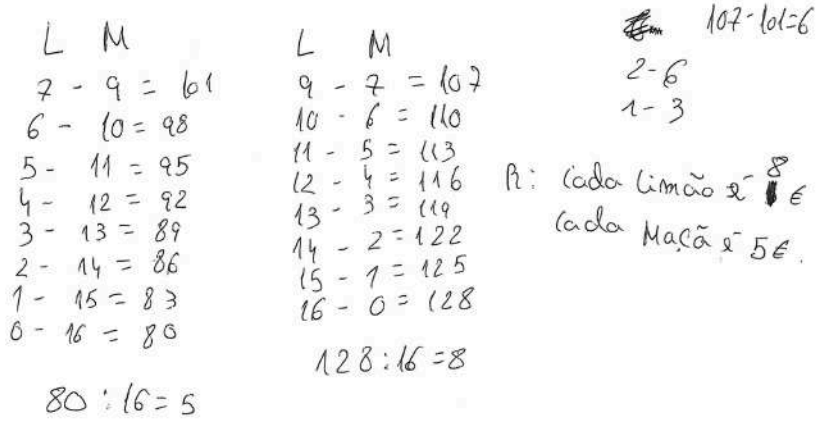


Figura 11. Resolução de um aluno da tarefa 2.2.

O aluno apresenta uma resolução bem estruturada com base na estratégia anteriormente referida para os sistemas na forma canónica em que os coeficientes das variáveis estão alternados.

Tarefa 3.1. Os alunos fizeram a transferência da estratégia utilizada na tarefa 1.1. na resolução da tarefa 3.1., apenas com identificação dos valores (figura 12) ou resolvendo a segunda condição como uma equação do 1.º grau com uma incógnita, após a substituição da outra variável (figura 13):

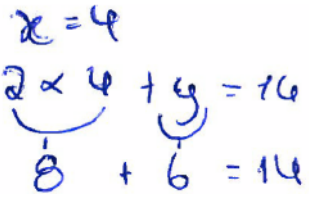


Figura 12. Resolução de um aluno da tarefa 3.1.

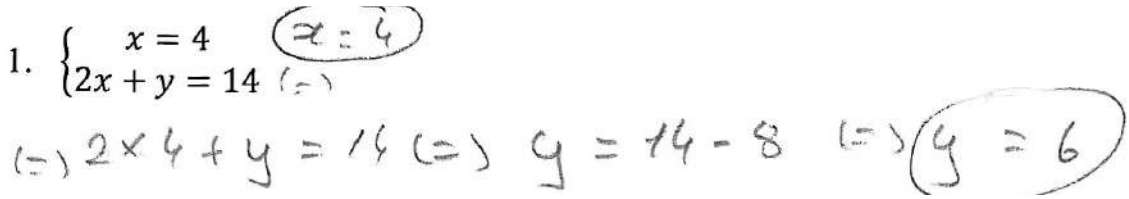


Figura 13. Resolução de um aluno da tarefa 3.1.

Tarefa 3.2. Na tarefa 3.2. os alunos resolveram igualmente adotando a estratégia utilizada na tarefa 1.2. que conduziu à resolução de duas equações de 1.º grau com uma incógnita (figura 14):

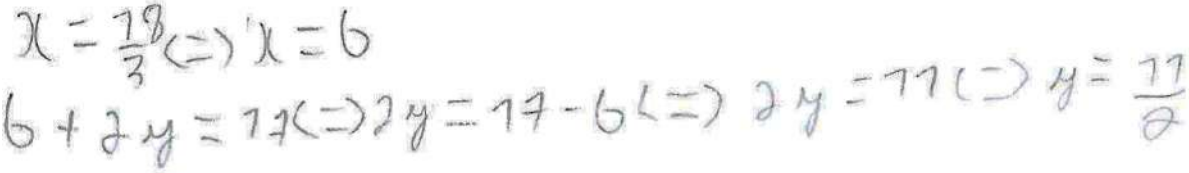


Figura 14. Resolução de um aluno da tarefa 3.2.

A maioria dos alunos que utilizaram este tipo de estratégia evidenciaram capacidades para resolver equações do 1.º grau com uma incógnita e compreenderam a substituição de uma incógnita por um valor numérico específico.

Tarefa 3.3. Alguns alunos adotaram a estratégia iniciada com a tarefa 1.3. na resolução deste tipo de condições com apoio visual (figura 15):

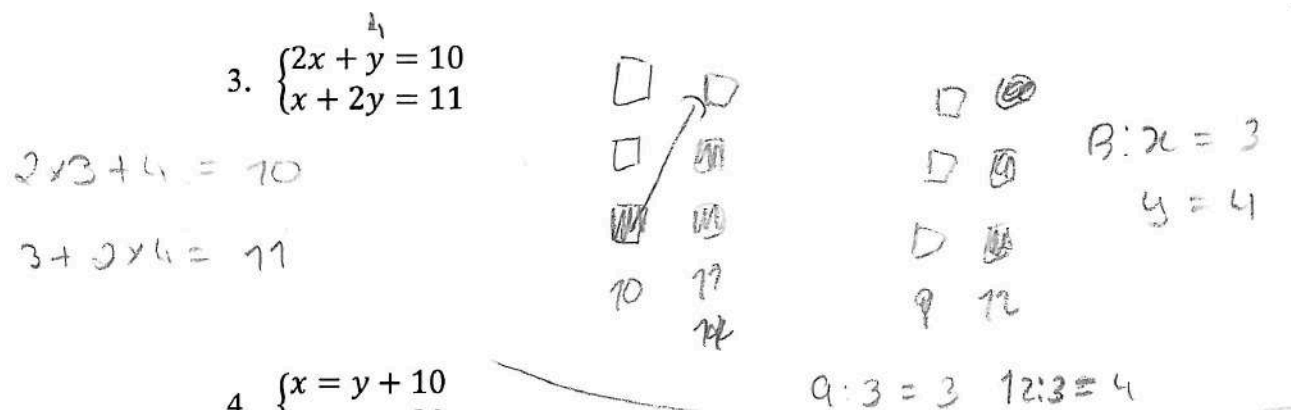


Figura 15. Resolução de um aluno da tarefa 3.3.

Neste caso, o aluno troca dois quadrados entre as colunas de modo a obter duas colunas apenas com um tipo de variável, adaptando os dados. Deste modo, obtém o valor de cada incógnita por divisão do valor pelo número de quadrados.

Tarefa 3.4. Os alunos manifestaram muita dificuldade na substituição da incógnita *x*, na segunda equação, pela expressão algébrica da primeira equação, ao contrário do que acontecera com um valor numérico, sendo que o número de alunos que solucionaram o sistema com sucesso foi bastante reduzido.

Tarefa 3.5. Do mesmo modo, os alunos não conseguiram isolar uma das incógnitas e, consequentemente, obter uma equação do 1.º grau com uma incógnita e determinar a solução do sistema de equações.

As perceções dos professores. Os professores aderiram na sua maioria à abordagem proposta – «será sem dúvida uma abordagem a explorar» [professor 09] – por considerarem que fomenta o raciocínio dos alunos e a resolução de problemas, especialmente «em situações em que sejam evidentes limitações e/ou dificuldades de aprendizagem nos nossos alunos» [professor 07]. Um dos professores partilha a sua metodologia, neste tema matemático, explicando que «começava sempre a resolver um sistema algébrico muito simples, seguia para os mais complexos e só depois tratava os problemas» [professor 13], concluindo que irá experimentar a abordagem apresentada na comunicação.

Alguns professores mais hesitantes realçam que a abordagem é útil para iniciar a temática – «considero que esta estratégia deve ser utilizada apenas como forma de

introduzir a temática, sendo depois necessário avançar para processos mais algébricos, em que o aluno aprende a usar o método de substituição na resolução de sistemas» [professor 12] – ou a rejeitam – «não me parece uma perspetiva adequada à minha prática docente» [professor 14] – em resultado das estratégias informais dos alunos e das orientações para as avaliações externas – «critico a ausência de rigor e informalismo nas respostas apresentadas pelos alunos e alerto ainda para a desvalorização deste tipo de respostas nas provas nacionais de final de ciclo, à luz dos critérios de correção que têm sido comuns e públicos» [professor 11].

Os professores identificam que esta metodologia tem por suporte a passagem do concreto para o abstrato – «[tomei] consciência da importância de passar gradualmente do concreto para o abstrato» [professor 07] –, articulando conhecimentos anteriores dos alunos – «a simplicidade com que podemos abordar conteúdos de ciclos mais avançados recorrendo a esquemas do primeiro ciclo» [professor 10]. Nesta relação entre as situações concretas e abstratas, a linguagem matemática assume uma maior formalidade em resultado da construção do conhecimento matemático pelos alunos – «a utilização de diferentes metodologias, seguida da discussão de diferentes processos de resolução, leva os alunos a apropriarem-se de técnicas cada vez mais sofisticadas e a expressarem-se através de linguagens cada vez mais formais» [professor 04].

Neste sentido, os alunos constroem o seu conhecimento matemático, neste particular algébrico, de uma forma intuitiva, com recurso à resolução de problemas – «uma abordagem metodológica no estudo dos sistemas de equações com recurso à resolução de problemas, de uma forma intuitiva» [professor 04] –, baseada em diferentes representações – «assente numa associação pictórica das incógnitas» [professor 06] –, e sem utilização de cálculos algébricos formais – «determinação das soluções sem recurso ao cálculo algébrico» [professor 01]. Para os professores, esta abordagem apela à compreensão dos conceitos em detrimento da exclusiva memorização de procedimentos – «sendo dado grande ênfase à perceção do conceito de sistema e de solução de um sistema e não apenas a mecanização de procedimentos, por parte do aluno» [professor 05].

Considerações finais

Os alunos reconheceram a natureza da solução de um sistema de equações ao considerarem como solução válida os valores que verificavam ambas as condições. Particularmente, conseguiram resolver os sistemas quando uma das equações se restringia

a uma expressão com uma incógnita, em situação do tipo $x=a$ ou do tipo $ax=b$, em termos visuais e algébricos, reafirmando os resultados de Nobre (2016). Os alunos mostraram desembaraço na resolução de equações do 1.º grau com uma incógnita, solucionando o problema ou o sistema de equações.

Quando os sistemas de equações surgem com as duas incógnitas em ambas as equações, os alunos não conseguiram resolver o sistema por substituição de uma das incógnitas, aparentemente por pouca agilidade na resolução de equações literais. Nos casos, em que os dados resultavam em valores inteiros e pequenos, os alunos conseguiram resolver o sistema de equações por tentativa e erro, reconhecendo a natureza da solução como um par ordenado de números, em termos visuais e algébricos.

No problema dos veículos, um dos alunos utilizou uma resolução visual característica do 1.º ciclo do ensino básico, mas a maioria atribuiu valores aos carros e às motas, num total de vinte veículos, calculando o número de rodas, até determinar a solução que verificava, ao mesmo tempo, o número de veículos e o número de rodas. As soluções encontradas denotaram um reconhecimento da natureza da solução de um sistema de equações. No problema dos limões e das maçãs, alguns alunos adotaram uma resolução com suporte visual ou numérico, baseada na comparação entre as situações com o reconhecimento das diferenças dos valores totais e das quantidades parciais. Os alunos reconheceram a eficácia da estratégia informal nas situações em que os coeficientes das duas incógnitas se alternavam em sistemas de equações na forma canónica e fizeram transições entre linguagens visuais e algébricas.

Os professores participantes no encontro de matemática realçaram a passagem do concreto para o abstrato como uma abordagem facilitadora para os alunos, apesar de não considerarem as estratégias informais como válidas, devido à pressão dos critérios nacionais utilizados nas provas de avaliação de final de ciclo de ensino. Neste contexto, defendem a compreensão da natureza da solução de um sistema de equações em contraponto com a memorização, sem compreensão, de procedimentos matemáticos, mas sem a utilização de estratégias informais.

Os dados apontam para a necessidade do trabalho com os alunos em diversos contextos, visuais, problemas e algébricos, e para um conhecimento sustentado na resolução de equações do 1.º grau com uma incógnita e de equações literais do 1.º grau, com o propósito de resolver sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Referências bibliográficas

Canavarro, A. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, XVI (2), 81-118

De la Fuente, A.; Rowland, T. & Deulofeu, J. (2016) Developing algebraic language in a problem solving environment: the role of teacher knowledge. In Adams, G. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 36 (1) (pp. 25-30). London: BSRLM.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W.; Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates,

MEC – Ministério de Educação e Ciência (2013). Programa e Metas Curriculares Matemática – Ensino Básico. Lisboa: MEC.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nobre, S. (2016). O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Nobre, S.; Amado, N.; & Ponte, J. P. (2012). Uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. In Afirse (Ed.). *Revisitar os estudos curriculares: onde estamos e para onde vamos? Atas do XIX Colóquio da Secção Portuguesa da AFIRSE 2012* (pp. 2160-2171). Lisboa: AFIRSE

Ponte, J. P. (2017). A aprendizagem da Álgebra: resultados de estudos portugueses. *Educação e Matemática*, 144-145, 27-32.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2005). Como vai o pensamento algébrico dos alunos? *Educação e Matemática*, 85, 54-59.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Ponte, J. P. & Branco, N. (2010). A Álgebra na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos: uma experiência de formação. In *Desafios teóricos e metodológicos – IENJIE Encontro nacional de jovens investigadores em educação*. Aveiro: UA.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

PERCEBER O PENSAMENTO ALGÉBRICO DAS CRIANÇAS: UM ESTUDO COM FUTUROS EDUCADORES E PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS

Joana Cabral, Hélia Oliveira, Fátima Mendes

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, joanacabral@campus.ul.pt
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, hmoliveira@ie.ulisboa.pt
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, fatima.mendes@ese.ips.pt

Nos últimos anos, a capacidade de *noticing* dos professores tem sido estudada por vários autores (e.g. Callejo & Zapatera, 2017; Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010), em contexto de formação inicial e contínua, sendo reconhecida a sua importância para as práticas letivas. Embora esta capacidade não tenha uma caracterização única, Sherin, Jacobs e Phillip (2011) afirmam que, em geral, a investigação tem considerado que a capacidade de *noticing* do professor envolve duas componentes essenciais: *atender* a eventos particulares de sala de aula, isto é, para que o professor consiga gerir a complexidade da sala de aula é necessário que preste atenção a algumas situações excluindo outras, e *dar sentido* a estes eventos, interpretando os episódios e caracterizando-os em termos do processo de ensino-aprendizagem.

O principal objetivo do estudo a apresentar neste poster é compreender o desenvolvimento da capacidade de *noticing* (perceber) de futuros educadores e professores relativamente ao pensamento algébrico de crianças dos 4 aos 10 anos e como esta se relaciona com o seu conhecimento matemático no domínio da *Early Algebra*, no decurso de uma experiência de formação, num curso da Licenciatura em Educação Básica (LEB). Tendo em conta este objetivo foram elaboradas três questões de investigação: Como se caracteriza a capacidade dos futuros educadores e professores de reconhecer e interpretar o pensamento algébrico de crianças, ao longo da experiência de formação? Como se desenvolve o seu conhecimento matemático no domínio da *Early Algebra,* no decurso da experiência de formação? Que relações se evidenciam entre a capacidade dos futuros educadores e professores de reconhecer e interpretar o pensamento algébrico das crianças e o seu conhecimento matemático no domínio da *Early Algebra*?

A experiência de formação a realizar será orientada por uma abordagem que visa promover, em simultâneo, a capacidade de *noticing* e o pensamento algébrico dos futuros educadores e professores dos anos iniciais, uma vez que um dos grandes desafios para a

formação inicial de professores é coordenar as várias dimensões do conhecimento profissional, por exemplo, a relação entre o *conhecimento matemático* e o *conhecimento dos alunos* e ao mesmo tempo a forma como o professor identifica e interpreta elementos relevantes do ensino de matemática (Llinares, 2013). Em particular, a análise de excertos de episódios de aula (vídeo ou transcrições) e das resoluções de tarefas matemáticas por alunos dos anos iniciais serão centrais na formação, dada a sua importância para o desenvolvimento da capacidade de *noticing* (e.g., Sherin & van Es, 2005).

A experiência de formação, com a duração de 20/25 horas, decorrerá numa unidade curricular intitulada Padrões e Álgebra do 3.º ano de uma LEB, incidindo sobre o tema da *Early Algebra*, uma proposta curricular que consiste na integração de modos de pensamento algébrico desde os primeiros anos da educação básica (e.g., Kaput, Blanton, & Moreno, 2008). A experiência de formação incidirá nos dois primeiros temas da unidade curricular sendo estes *Da aritmética à álgebra: Desenvolver o pensamento algébrico* e *Padrões e funções*.

O estudo assenta numa perspetiva de *design research* com a metodologia de experiência de formação (e.g. Cobb et al., 2003), em que a primeira autora será, simultaneamente, formadora e investigadora. Os métodos de recolha de dados serão a observação participante, a recolha documental e entrevistas.

No presente ano letivo foi realizado um estudo exploratório, num conjunto de três aulas, para experimentar algumas tarefas e estratégias pensadas para a experiência de formação e em que se procurou identificar aspetos do conhecimento matemático dos formandos no domínio da *Early Algebra* e a sua capacidade de reconhecer e interpretar o pensamento algébrico de crianças. A análise preliminar dos dados do estudo exploratório sugere que os formandos com maiores limitações quanto ao conhecimento matemático, caracterizados de acordo com o diagnóstico realizado, registaram, neste domínio, algum progresso. No que diz respeito à interpretação do pensamento das crianças, os formandos evidenciaram, inicialmente, bastantes dificuldades mas revelaram uma melhoria desta capacidade ao longo destas aulas. Embora estes resultados se revelem positivos, são necessariamente parciais, uma vez que foram analisados apenas os dados dos estudantes assíduos às aulas, que são, de acordo com a docente da UC, os que apresentam menores dificuldades neste domínio. Serão apresentadas no poster algumas das produções dos estudantes que fundamentam aspetos da análise preliminar dos dados relativos ao estudo exploratório.

Referências bibliográficas

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 309–333.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19– 55). New York: Routledge.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional noticing. *Sisyphus Journal of Education, 1*(3), 76–93.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *13*(3), 475-491.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3–13). New York: Routledge.

DIFICULDADES DE ALUNOS DO 2.º CICLO NA CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Paula Vieira da Silva, Leonor Santos

[1]Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), paulasilva@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mlsantos@ie.ul.pt

Resumo. *Este estudo tem como objetivo a análise de tarefas que envolvem a construção de triângulos e que constam das provas de avaliação externa do 2.º ciclo. Mais concretamente, analisam-se os processos mentais a que fazem apelo, os processos mentais utilizados pelos alunos, as dificuldades sentidas e os erros cometidos na resolução dessas tarefas. O estudo segue uma metodologia de natureza interpretativa, com recolha de dados a partir das próprias provas, das produções dos alunos e de entrevistas gravadas em áudio. Em síntese, os resultados obtidos evidenciam que, relativamente à medição linear, os alunos demonstraram um nível de sofisticação bastante aceitável e que na construção de ângulos as causas das suas dificuldades parecem ser a ausência de componentes estruturais adequadas.*

Abstract. *This study aims to analyze tasks that involve the construction of triangles and which are included in external assessment tests of the 2nd cycle. More specifically, we analyze the mental processes which they appeal, the mental processes used by the students, the difficulties experienced and the mistakes made in solving these tasks. The study follows a methodology of an interpretative nature, with data collection from the own tests, of the productions of the students and of interviews recorded in audio. In summary, the results show that, in linear measurement, students demonstrated a level of sophistication quite acceptable and in the construction of angles, the causes of their difficulties seem to be the absence of adequate structural components.*

Palavras-chave: *Pensamento geométrico; Construção de triângulos; Material didático.*

Introdução

Uma das fontes de informação utilizadas pela tutela no que se refere às aprendizagens da Matemática no 2º ciclo são, desde 2003, as Provas de Aferição (PA) ou as Provas Finais (PF). As tarefas destas provas desempenham outros papéis para além daquele que inicialmente lhe foram atribuídos e, por isso, a sua análise reveste-se de maior importância. As características das tarefas propostas nas PA e nas PF, sobrevalorizando certos conteúdos curriculares e certos processos mentais, podem induzir as metodologias de ensino utilizadas pelos professores e influenciar as aprendizagens dos alunos.

Na construção de um currículo escolar é necessário fazer escolhas, e esta necessidade de escolher é precisamente o que torna tão difícil decidir sobre um currículo coerente e equilibrado durante todo o período de aprendizagem na escola, um currículo

que deve ser adequado, em termos de conteúdos, métodos e motivações, para os diferentes alunos (Mammana & Villani, 1998). Essas escolhas, como já foi referido, são também visíveis na enfase que é dada a determinados conteúdos nas provas de avaliação externa do 2.º ciclo. Nestas provas, desde 2010 a 2015, foi sempre apresentada uma tarefa que envolve a construção de triângulos. Se, relativamente ao tema dos triângulos, os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico –PMEB (ME, 2007), consideraram que no final do 2.º ciclo os alunos deveriam saber: identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos; classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados; construir triângulos e compreender os casos de possibilidade na construção de triângulos; compreender relações entre elementos de um triângulo e usá-las na resolução de problemas; compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo, já, passados seis anos, os autores do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico – PMCMEB (MEC, 2013) apresentam como conteúdos a lecionar: ângulos de um triângulo: soma dos ângulos internos; relação de um ângulo externo com os internos não adjacentes e soma de três ângulos externos com vértices distintos; triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos; hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo; ângulos internos de triângulos obtusângulos e retângulos; critérios de igualdade de triângulos: critérios LLL, LAL e ALA; construção de triângulos dados os comprimentos de lados e/ou as amplitudes de ângulos internos; relações entre lados e ângulos num triângulo ou em triângulos iguais; desigualdade triangular.

Dado o facto de, nos dois programas referidos e nas provas de avaliação externa, a construção de triângulos ter uma evidente centralidade, as questões de investigação que orientam este estudo são: A que processos mentais fazem apelo as tarefas de geometria da PA de 2010 e da PF de 2012 que envolvem a construção de triângulos? Que processos mentais foram utilizados pelos alunos? Que dificuldades foram apresentadas? Que erros efetuaram os alunos na resolução dessas tarefas?

A construção de triângulos

No processo de internalização de experiências espaciais, que é característico do estudo da geometria, a abstração desempenha papel fundamental (Battista, 2007). Também num aspeto muito particular do estudo da geometria, como é a construção de triângulos, a abstração do conceito de ângulo e de medida são essenciais, uma vez que alguns dos erros produzidos pelos alunos na resolução de tarefas estão relacionados com a

construção de ângulos com uma dada amplitude e com a medição de segmentos de reta. Essas dificuldades, por vezes também se devem à falta de experiência e destrezas no uso dos materiais necessários a essa construção (Van de Walle, 2009). Os materiais didáticos convencionais como o transferidor, o compasso e a régua devem auxiliar o aluno na construção do conceito de ângulo e de triângulo e, não pelo contrário, sejam elementos que possam provocar obstrução a essa construção.

A construção de triângulos obriga os alunos a conceber representações bidimensionais em que a visualização desempenha um papel importante na descodificação e transformação da informação matemática em representações bidimensionais. Portanto, a combinação e coordenação de capacidades motoras e visuais na utilização dos materiais didáticos é muito relevante na resolução de tarefas de construção de triângulos no papel.

A medição de comprimentos

O conceito de medida é construído ao longo da conceptualização geométrica, raciocínio e aplicação. Desde o começo da história da geometria como "medida da Terra", a medição desempenha um papel central no raciocínio sobre todos os aspetos do nosso ambiente espacial (Battista, 2007). No entanto, Battista (2007), fundamentando-se em outros autores, considera que apesar da importância da medida geométrica, o desempenho dos alunos em tarefas de medição é baixo. Ou seja, muitos alunos não estabelecem adequadamente a conexão entre medições numéricas e o processo de iteração de medidas unitárias. Por exemplo, os alunos que medem incorretamente o comprimento de um objeto quando uma de suas extremidades não está alinhada com o "zero" em uma régua graduada não conceptualizam claramente como as marcas numéricas da régua indicam a iteração dos comprimentos da unidade.

Muitos currículos tradicionais ensinam prematuramente procedimentos numéricos para a medição geométrica, os alunos têm pouca oportunidade de pensar sobre a adequação dos procedimentos numéricos que aplicam e não possuem oportunidades suficientes para desenvolver habilidades com unidades de medição espacialmente estruturantes (Battista, 2007).

Joram, Subrahmanyam e Gelman (1998) alegaram que mesmo que os alunos mais novos possam aprender algumas habilidades de medição simples, a medida física real, como a determinação de comprimentos, por exemplo, com clipes, é desafiadora para muitos. Estes autores, referem que tanto investigações mais antigas, como outras mais

recentes sugerem que o conhecimento dos alunos sobre a medição linear pode ser mais superficial do que parece.

Battista (2007), tentou integrar investigações que descrevem níveis de sofisticação no desenvolvimento de conceitos sobre o comprimento e a medição de comprimentos e desenvolveu uma caracterização mais ampla da construção do significado dos alunos. Nessa caracterização existem dois tipos de raciocínio fundamentalmente diferentes sobre o comprimento. O *raciocínio sem medição* que não usa números. Este raciocínio envolve inferências visuo-espaciais baseadas em comparações diretas ou indiretas, transformações imaginadas, de propriedades geométricas. O *raciocínio de medição* envolve iteração de unidades de comprimento, ou seja, determinando o número de unidades de comprimento fixas que se encaixam de ponta a ponta ao longo do objeto, sem lacunas ou sobreposições. O raciocínio de medição inclui não apenas o processo de medição, mas o raciocínio sobre medidas numéricas (por exemplo, adicionando comprimentos para encontrar o perímetro de um polígono, fazendo inferências sobre medidas de comprimento com base nas propriedades das figuras). Embora os alunos normalmente desenvolvam estratégias sem medição antes das estratégias de medição, o raciocínio sem medição continua a desenvolver-se em sofisticação, mesmo após o raciocínio de medição aparecer. Além disso, o raciocínio mais sofisticado sobre o comprimento envolve a integração do raciocínio sem medição e de medição. No *raciocínio sem medição*, o autor estabelece três níveis: *Nível 0* – O raciocínio dos alunos sobre o comprimento é baseado na aparência e é holístico; *Nível 1* – Os alunos usam sistematicamente a decomposição/recomposição para comparar os comprimentos; *Nível 2* – Os alunos comparam os comprimentos do percurso deslizando, girando e invertendo partes de peças de forma que lhes permita inferir, com base em propriedades de forma e movimento, que uma forma transformada seja congruente com outra. *No raciocínio de medição,* o autor estabelece cinco níveis: *Nível 0* – Os alunos usam contagem para encontrar comprimentos; no entanto, a sua contagem não representa a iteração de uma unidade de comprimento fixa.; *Nível 1* – Os alunos tentam iterar o que consideram ser uma unidade de comprimento para um objeto ou caminho. No entanto, porque os alunos (a) não entendem completamente qual é a unidade de comprimento, ou (b) não coordenam adequadamente unidades iteradas entre si, as suas iterações contêm lacunas, sobreposições ou unidades de comprimento diferentes e incorretas; *Nível 2* – Os alunos não só entendem o que é uma unidade de comprimento, quando iteram a unidade de comprimento, eles coordenam adequadamente a posição de cada unidade com a

posição da unidade que precede, de modo que as lacunas, as sobreposições e as variações nos comprimentos das unidades sejam eliminadas; *Nível 3* – Os alunos determinam algumas medidas de comprimento sem iterar explicitamente o comprimento de cada unidade; *Nível 4* – Os alunos operam numericamente e inferencialmente em medidas de comprimento sem iterar qualquer comprimento de unidade. Neste raciocínio de maior nível de medição, os estudantes integram completamente e aplicam os processos do nível 2 de não medição com o seu raciocínio de medição. A pesquisa feita por vários autores sugere que os alunos constroem uma compreensão significativa da medida do comprimento à medida que eles abstraem e refletem sobre o processo de iteração de comprimentos de unidades (Battista, 2007).

A compreensão dos ângulos

Considera-se que o ângulo é um conceito multifacetado, uma vez que se observa uma grande variedade de definições apresentadas nos manuais escolares e em livros didáticos destinados à formação de professores (Mitchelmore & White, 2000).

Numa investigação sobre o desenvolvimento do conceito abstrato de ângulo padrão em alunos do 2.º ao 8.º ano, Mitchelmore e White (2000) começaram por estudar a forma como os alunos reconhecem profundamente e progressivamente as semelhanças em experiências com ângulos físicos, classificando-os primeiro em situações específicas, depois em contextos mais gerais e, finalmente, em domínios abstratos. Semelhante a vários outros investigadores em aprendizagem de geometria, Michelmore e White (2000) usam uma teoria da abstração para analisar o pensamento dos alunos. De acordo com os autores, o conceito de ângulo é abstraído de cada classe em cada etapa de desenvolvimento, sendo que o conceito de ângulo mais geral é o conceito de ângulo padrão. Estes autores descrevem três etapas de abstração. Na *etapa 1*, as semelhanças entre as situações que se parecem relacionadas com os ângulos, que envolvem ações semelhantes e são experimentadas em circunstâncias semelhantes, levam à abstração do *conceito de ângulo situado*. Por exemplo, situações que envolvem colinas seriam um único conceito de ângulo situado. Na *etapa 2*, as semelhanças entre diferentes conceitos de ângulo situados são abstraídas para formar conceitos contextuais de ângulos. Por exemplo, os alunos podem abstrair a semelhança entre colinas e telhados em um conceito de ângulo contextual de "declive". Na *etapa 3*, as semelhanças entre diferentes conceitos de ângulo contextual são abstraídas para formar conceitos de ângulo abstrato. Por exemplo, os alunos podem

abstrair a semelhança entre as interseções de linhas, cantos, curvas em caminhos e encostas. Michelmore e White (2000) sugeriram que a construção de uma formulação matemática formal para o conceito de ângulo abstrato padrão de dois raios com ponto comum pode ser considerada, argumentando ainda que quando os alunos estão a formar o seu primeiro conceito de ângulo abstrato, eles podem estar no processo de formar conceitos adicionais de ângulos contextuais. Além disso, eles alegaram que os conceitos de ângulo são constantemente generalizados à medida que novas situações e contextos são reconhecidos como similares. O reconhecimento de semelhanças entre diferentes contextos de ângulo é, portanto, um processo construtivo exigindo abstração reflexiva.

Michelmore e White (2000) sugeriram que a dificuldade que os alunos têm em aprender a usar um transferidor pode resultar do fato de que, em um transferidor, várias linhas podem ser escolhidas para o lado inicial de um ângulo, mas o lado terminal deve ser imaginado. Por outro lado, a causa das dificuldades dos alunos parece ser a ausência de componentes angulares estruturais, o que leva à falha no estabelecimento de mapeamentos estruturais adequados.

Metodologia

A presente investigação segue a metodologia qualitativa de natureza interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994).

Neste estudo participaram, nos quatro anos de recolha de dados, alunos que estavam a terminar o 6.º ano de escolaridade. A seleção destes alunos foi intencional e teve em conta a proximidade e confiança entre a investigadora e os participantes, uma vez que assim se sentiram mais encorajados a expor as suas ideias. Além disso, um outro critério tido na seleção dos participantes diz respeito aos seus níveis de desempenho. O facto de os alunos manifestarem diferentes níveis de desempenho pôde permitir aceder a uma maior diversidade de estratégias de resolução e, consequentemente, a diferentes processos mentais e erros. A resolução das tarefas efetuou-se após ter sido feita a avaliação interna, o que diminui muito a probabilidade de haver fatores de interferência no estudo.

A recolha de dados foi feita em contexto escolar, baseando-se fundamentalmente no seguinte: (i) na recolha documental (tarefa da PA de 2010 e da PF de 2012 do 2.º ciclo, e resoluções dessas tarefas pelos alunos); e (ii) em entrevistas semiestruturadas, gravadas em vídeo. As entrevistas realizaram-se em cada ano, no dia seguinte ao da resolução das

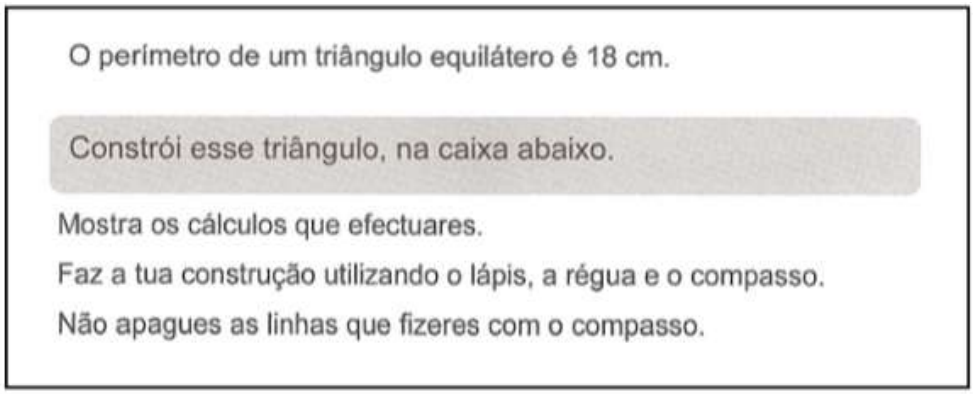
tarefas. Cada um dos alunos entrevistados teve em mãos a ficha com a resolução produzida por si e, após ler cada pergunta, explicou a forma como chegou à resposta.

A análise dos dados, para este estudo, envolveu, inicialmente, a organização das informações obtidas pelas produções escritas dos alunos e pelas entrevistas efetuadas.

Apresentação e análise dos dados

As duas tarefas seguintes têm em comum o facto de que o produto final requerido ser a construção de um triângulo. No entanto, o método de construção dos triângulos é diferente. Em relação a cada tarefa analisaremos os processos mentais necessários à sua resolução, os processos mentais utilizados pelos alunos, as dificuldades sentidas e os erros cometidos.

Seguidamente analisaremos a tarefa 20 da PA de 2010.


O perímetro de um triângulo equilátero é 18 cm.

Constrói esse triângulo, na caixa abaixo.

Mostra os cálculos que efectuares.

Faz a tua construção utilizando o lápis, a régua e o compasso.

Não apagues as linhas que fizeres com o compasso.

Figura 1. Tarefa 20 da PA de 2010

Nesta tarefa, primeiramente, o aluno deverá saber que num triângulo equilátero o comprimento dos três lados é igual. Logo, se dividir o perímetro (18 cm) pelo número de lados (3) obtém o comprimento de cada lado, ou seja, 6 cm. Após este procedimento, o aluno poderá construir o triângulo equilátero. Seguidamente, com a ajuda da régua, o aluno tem que traçar um segmento de reta com 6 cm. Depois, recorrendo novamente à régua deve abrir o compasso em 6 cm e colocar a ponta seca em cada um dos extremos do segmento de reta traçado, e traçar os arcos de circunferência até que se cruzem, marcando o ponto de interseção dos dois arcos. Por último, o aluno deverá traçar dois segmentos de reta que unem as extremidades do semento de reta já traçado e o ponto obtido pela interceção dos dois arcos e obtêm assim o triângulo equilátero. Não é pedido para marcar a designação dos pontos.

Esta tarefa foi dada a resolver a 171 alunos, tendo sido construído corretamente o triângulo pedido por 106, ou seja, cerca de 62% (Tabela 1). Destes 106 alunos, só 80 fizeram um registo do cálculo do comprimento dos lados do triângulo.

Tabela 1. Valores absolutos relativos aos sujeitos envolvidos na resolução da tarefa 20 da PA de 2010 e resultados obtidos

Ano em que foi resolvida	Número de alunos			
	Participaram no estudo	Construíram o triângulo pedido	Calcularam o comprimento dos lados do triângulo	Entrevistados
2012	20	19	19	13
2013	45	22	13	10
2014	63	37	29	12
2015	43	28	19	-------
TOTAL	171	106	80	35

Dos 106 alunos que construíram corretamente o triângulo pedido, só um não utilizou o processo de construção de triângulos com régua e compasso. Todos os 35 alunos entrevistados efetuaram a divisão e construíram o triângulo recorrendo à régua e ao compasso, à exceção do aluno A1. O aluno A1 construiu o triângulo com o transferidor, como ele próprio explica:

> A1: Eu dividi em primeiro 18 por 3 e deu-me 6, porque é um triângulo equilátero que tem os lados todos iguais. Então, um triângulo equilátero tem os ângulos todos iguais de 60º. Então, tracei uma reta [o aluno estava a referir-se a um segmento de reta] de 6 cm e coloquei aqui o transferidor [o aluno assinala a extremidade esquerda do segmento de reta horizontal que ele tinha traçado] e tracei um ângulo de 60º. Depois, tracei uma reta [uma vez mais, o aluno estava a referir-se a um segmento de reta] de 6 cm. Aqui [o aluno assinala a outra extremidade] fiz a mesma coisa e uni com as retas [o aluno estava a referir-se às duas semirretas que são os lados dos ângulos].
> E: Construiu o triângulo com a régua e o transferidor usando a amplitude dos ângulos internos. Não podia ter feito, como é pedido, com a régua e o compasso?
> A1: Podia.
> E: Então porque não fez?
> A1:Porque só me lembrei deste método.

Dos 65 alunos que não resolveram corretamente a tarefa, 19 não efetuaram qualquer tipo de registo. Estes alunos, à exceção do aluno A21, não pertenceram ao grupo dos alunos entrevistados e, por isso, não foi possível saber qual a razão de não terem resolvido a tarefa. O aluno A21 justificou não ter resolvido a tarefa do seguinte modo:

> E: Não resolveu esta tarefa, porquê?
> *A21: Não tinha material* [o aluno estava a referir-se à régua e ao compasso].

E: Mas sabia fazer?
A21: [o aluno leu o enunciado e explicou passo por passo o que deveria de fazer para resolver a tarefa corretamente]. Tinha *que dividir 18 por 3, (…).*
E: Então, porque não registou o cálculo da medida de cada lado?
A21: Pensei que só era para desenhar só o triângulo.

Este aluno, apesar de saber resolver a primeira parte da tarefa, para o qual não era necessário o material de desenho, e estar escrito no enunciado "Mostra os cálculos que efetuares", não fez qualquer registo.

Dos 46 alunos (65-19) que tentaram resolver a tarefa, mas não conseguiram construir o triângulo pedido, 7 registaram os cálculos necessários para obter o comprimento de cada lado do triângulo. Parece-nos que estes alunos compreendiam que num triângulo equilátero o comprimento dos seus três lados é igual e que o perímetro do triângulo é igual à soma do comprimento dos seus lados. Contudo, quando passaram à construção do triângulo utilizaram outros comprimentos. Por exemplo, um aluno utilizou os comprimentos 6,5 cm, 5,5 cm e 5,5 cm e regista 6 cm em cada lado do triângulo. Neste caso parece ter havido algum problema com a medição dos comprimentos. O segmento de reta medido com a régua tem 6,5 cm e os outros dois, que foram obtidos com a abertura do compasso, têm 5,5 cm. Um outro aluno construiu uma circunferência com 3 cm de raio e, seguidamente, inscreveu um triângulo com 5,5 cm, 5 cm e 5,2 cm. Este aluno parece não se ter lembrado do método de construção de um triângulo equilátero com régua e compasso.

Ainda, destes 46 alunos, 10 construíram triângulos equiláteros cuja soma dos comprimentos dos lados não é 18 cm. Por exemplo, triângulos equiláteros com 4, 5 cm em cada lado, 5 cm, 5,5 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm e 10,5 cm. Parece-nos que estes alunos compreendem o que é um triângulo equilátero, mas não conseguiram, com o perímetro dado, calcular corretamente o comprimento dos três lados. Esta dificuldade pode atribuir-se ao facto de que alguns alunos, neste ciclo de ensino, ainda não conseguirem operacionalizar o algoritmo da divisão ou à dificuldade no calculo mental de quocientes entre números inteiros simples.

Ainda desses 46 alunos, 6 construíram triângulos com perímetro de 18 cm. Por exemplo, um aluno construiu um triângulo com um lado de 2 cm e dois lados de 8 cm, um outro construiu com um lado de 4 cm e dois de 7 cm, dois construíram com um lado de 5 cm, outro de 6 cm e o outro de 7 cm e um outro construiu com um lado de 8 cm e dois de 5 cm. Parece-nos que a principal dificuldade enfrentada por estes alunos é a de entender que num triângulo equilátero os três lados têm o mesmo comprimento.

Dos 171 alunos, 80 registaram a divisão de 18 cm por 3 e obtiveram 6 cm. No entanto, 7 desses alunos não chegaram a construir o triângulo ou construíram um triângulo com outros comprimentos.

Dos 106 alunos que construíram o triângulo com 6 cm em cada lado, 28 não registaram os cálculos que fizeram, tal como era pedido no enunciado da tarefa. No entanto, alguns destes alunos escreveram nos lados do triângulo 6 cm. O aluno A16 é um exemplo dos que não registaram os cálculos:

A16: Eu primeiro dividi e deu-me 6 cm.

E: Ah!
A16: Só que eu fiz de cabeça.
E: Ou seja, dividiu por quanto?
A16: Por 3, porque é o número de lados do triângulo.
E: Mas nem sempre os triângulos têm os lados todos iguais.
A16: Mas aqui diz que que é equilátero. Logo, os lados são todos iguais.
E: Sim, têm o mesmo comprimento. E depois?
A16: Fiz 6 cm com a régua. Depois abri o compasso com este comprimento e marquei isto.
E: O arco.
A16: Depois fiz aqui [o aluno assinala o outro extremo do segmento de reta e o outro arco marcado]. *E depois uni este ponto a este e depois a este* [o aluno assinala o ponto de interseção dos dois arcos e os pontos extremos do segmento de reta que tinha traçado].

Foram, ainda, encontradas outras construções em que, não havendo evidências da utilização do compasso, os alunos tentam construir um triângulo somente com a régua. Para o conseguir, traçam um segmento de reta e a partir das extremidades desse segmento de reta tentam traçar dois outros segmentos de reta que se intersetam nas outras extremidades. Esta é uma estratégia utilizada quando os alunos não se conseguem lembrar do método de construção com a régua e o compasso.

Seguidamente analisaremos a tarefa 12 da PF de 2012.

Constrói um triângulo $[ABC]$ que obedeça às seguintes condições:

- $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$
- $B\hat{A}C = 30^\circ$
- $C\hat{B}A = 120^\circ$

Utiliza o material de desenho adequado.

Figura 2. Tarefa 12 da PF de 2012

Em primeiro lugar, os alunos devem traçar o segmento de reta AB, marcando os pontos A e B nas suas extremidades. Depois, com o transferidor, devem marcar, com vértice em A um ângulo de 30º e com vértice em B um ângulo de 120º. Em seguida devem traçar uma semirreta de origem em A e que passa pelo ponto marcado com a ajuda do transferidor e outra de origem em B e que passa pelo outro ponto marcado com a ajuda do transferidor, até que estas se encontrem. Com a interseção das semirretas obtêm o outro vértice do triângulo, o ponto C, o qual deve ser marcado.

Esta tarefa foi dada a resolver a 126 alunos, tendo sido construído corretamente o triângulo pedido por apenas 40, ou seja, cerca de 32% (Tabela 2).

Tabela 2. Valores absolutos relativos aos sujeitos envolvidos na resolução da tarefa 12 da PF de 2012 e resultados obtidos

Ano em que foi resolvida	Número de alunos			
	Participaram no estudo	Construíram o triângulo pedido	No vértice B traçaram um ângulo com amplitude de 60^0	Entrevistados
2012	18	13	5	9
2014	63	13	14	12
2015	45	14	11	-------
TOTAL	126	40	30	21

Como se pode verificar na tabela 2 um número significativo de alunos, mais precisamente 30 (24%), seguiram todos os passos necessários para a construção do triângulo, mas quando tentaram traçar o ângulo de 120º cometeram um erro, como é o caso do aluno A3:

A3: Com a régua medi 6 cm e pus o A e o B. Depois pus o transferidor aqui.
E: Em A.
A3: Em A e medi 30º. Em B pus 120º e depois uni [o aluno traçou um ângulo com 60º]. E: Acha que esse ângulo tem de amplitude 120º?
A3: [o aluno olhou atentamente para o ângulo] *Não!!*
E: O que terá acontecido?
[o aluno fica em silêncio a observar a figura]
E: Respondeu que não, porquê?
A3: Porque nem chega a 90º [o aluno assinala os lados de um ângulo com 90º no ponto B].
E: E então?
A3: Porque eu medi daqui para aqui [o aluno assinala do lado direito do transferidor para o lado esquerdo].
E: Mas o ângulo que é dado tem 120º, portanto é?
A3: Obtuso.
E: E é maior que ...?
A3: 90º!

E: Não viu que este [o angulo de 60º traçado pelo aluno] era menor que 90º? Se tivesse verificado acha que talvez pudesse corrigir o erro?
A3: Sim.
E: Então como tinha que traçar o ângulo de 120º?
A3: Deveria começar de 0º e contar da esquerda para a direita.

Alguns alunos demonstraram bastante dificuldade na utilização do transferidor. Essas dificuldades são manifestadas logo no primeiro passo, que é o de colocar o ponto de referência do transferidor no ponto que será o vértice do ângulo (extremo do segmento de reta) e o 0º no prolongamento do lado do ângulo ou do segmento de reta traçado. O aluno A33 manifestou essa dificuldade na resolução da tarefa e foi confirmada pela entrevista:

A33: Pus aqui os 6 cm e ... [o aluno fica algum tempo a olhar para a figura e para o enunciado sem conseguir explicar o que fez].
E: Os outros lados também tem 6 cm e aqui estão os arcos feitos pelo compasso. Não viu no enunciado os dois ângulos do triângulo?
A33: Vi!
E: Não tinha transferidor?
A33: Tinha!
E: E então?
A33: Não me lembro.
E: Este ponto marcado no meio do segmento de reta AB para que serviu?
A33: Para colocar o transferidor.
E: E como mede os ângulos a partir desse ponto?
A33: Não sei!

Outros alunos, num total de 11 (cerca de 9%), não efetuaram qualquer trabalho, nem mesmo traçaram o segmento de reta AB com 6 cm. Dos outros alunos, apesar de terem tentado produzir algum trabalho, traçaram segmentos de reta com comprimento diferente do que era dado. Portanto, ainda cerca de 13,5% dos alunos não conseguiram representar geometricamente o segmento de reta que era pedido.

Conclusões

A principal dificuldade na aprendizagem da construção dos triângulos começa pelo uso da régua, esquadro, compasso e transferidor, e pela compreensão das suas propriedades.

Verificou-se que a grande maioria dos alunos não sente grande dificuldade na utilização da régua para traçar segmentos de reta com um dado comprimento. No que respeita ao *raciocínio de medição* (Battista, 2007), e em relação à medição linear, estes alunos demonstraram um nível de sofisticação bastante aceitável. Contudo, relativamente ao perímetro de um triângulo, o nível de sofisticação de estes alunos ainda é bastante

insipiente, uma vez que um grande número de alunos não foi capaz de obter a medida do lado de um triângulo equilátero através do seu perímetro. Este terá sido o aspeto da tarefa que exigiu um desafio cognitivo mais elevado.

No que se refere à construção de triângulos sendo necessário recorrer ao transferidor para traçar ângulos, verificou-se que houve um grande número de alunos que sentiu dificuldade em traçar ângulos obtusos. A causa das dificuldades dos alunos parece ser a "ausência de componentes estruturais adequadas" (Mitchelmore & White, 2000).

Esta tarefa exigiu um desafio cognitivo elevado no que se refere à interpretação dos enunciados, devido em parte à carga simbólica da matemática que é apresentada aos alunos.

Referências

Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. Em F. Lester, *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-907). Reston VA: NCTM.

Bogdan, & Biklen. (1994). Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora.

Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Mesurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research, 68 (4)*, 413-449.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). Geometry and Geometry-teaching through the ages. Em C. Mammana, & V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 1-4). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ME. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação.

MEC. (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mitchelmore, M., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. . *Educational Studies in Mathematics, 41(3)*, 209-238.

Van de Walle, J. (2009). Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed.

CRENÇAS DOS DOCENTES DO 1.º CICLO SOBRE A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA FORA DA SALA DE AULA

Alexandra Souza, Margarida Rodrigues

[1]Escola Ciência Viva, Pavilhão do Conhecimento, paralexandra@gmail.com

[2]ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. *Este artigo tem como objetivo identificar as crenças dos docentes do 1.º CEB sobre as aprendizagens em Matemática fora da sala de aula e quais os aspetos positivos e constrangimentos que os mesmos indicam existirem na implementação de situações de aprendizagem fora do contexto de sala de aula. Utilizou-se uma metodologia quantitativa, tendo os dados sido recolhidos através da aplicação de um questionário. Os resultados encontrados permitem-nos concluir que os docentes valorizam as aprendizagens matemáticas fora da sala de aula, na medida em que consideram que estas consolidam e reforçam o trabalho desenvolvido dentro da sala de aula e contribuem para a formação geral do aluno, diversificando os contextos de aprendizagem. De igual modo, consideram que as conexões estabelecidas são mais fortes porque resultam das interações realizadas e os conceitos desenvolvidos passam a estar associados às práticas e contextos em que foram negociados, tornando-se em aprendizagens contextualizadas.*

Abstract. *This article aims to identify primary school teacher's beliefs about mathematics learning outside of classroom and what are the positive aspects and limitations that those teachers indicate to exist in the implementation of those learning situations. We used a quantitative methodology approach, with a survey to collect the data. We may conclude that teachers value mathematics learning outside classroom, considering that it reinforces the work developed inside the classroom and contributes for general education of the students, diversifying the learning contexts. They also consider that the established connections are stronger because they result of interactions and the developed concepts are associated to specific practices and contexts, which become in contextualized learning.*

***Palavras-chave**: crenças dos docentes; aprendizagem matemática; aprendizagem situada.*

Introdução

Após cerca de seis anos em que vigorou o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (ME, 2007), no qual foi feito um investimento significativo por parte da tutela, das instituições e dos docentes de Matemática dos diferentes níveis de ensino, surgiu um novo programa de Matemática (MEC, 2013) que veio confrontar os docentes com novos desafios, nomeadamente com o cumprimento rigoroso de Metas Curriculares específicas para cada ano de escolaridade.

Face a estas orientações normativas considerámos que o papel do professor, enquanto gestor do currículo, podia estar limitado pelas exigências determinadas pela tutela, pois o objetivo passou a ser o alcance das metas e estas podiam influenciar e condicionar as suas decisões e atuação, no que concerne às situações de aprendizagem, designadamente propostas de atividades passíveis de serem implementadas em contextos fora do espaço físico da sala de aula. Foram estas as motivações que nos levaram a desenvolver um estudo (Souza, 2017) com o objetivo de identificar as crenças dos docentes do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) sobre as aprendizagens em Matemática fora da sala de aula.

Deste objetivo, decorreram as seguintes questões que ajudaram a conduzir a investigação:

- Como valorizam as situações de aprendizagem na aula de Matemática?
- Como valorizam as aprendizagens matemáticas fora da sala de aula?
- Que práticas afirmam levar a efeito para promover as aprendizagens realizadas fora da sala de aula?
- Quais os aspetos positivos que identificam na implementação de atividades que valorizam a aprendizagem fora do contexto de sala de aula?
- Quais os possíveis constrangimentos?

O levantamento feito sobre as situações de aprendizagem na sala de aula apenas pretendia recolher elementos que permitissem caracterizar melhor a forma como os docentes encaram o ensino e a aprendizagem matemática e não incidir sobre a aprendizagem dos alunos. Assim, essa caracterização permite enquadrar as crenças dos docentes sobre a aprendizagem matemática fora da sala de aula, isto é, em contextos menos habituais.

O presente artigo apresenta um enquadramento teórico focado em dois eixos distintos: a aprendizagem situada e as crenças dos docentes. Embora este estudo não incida na aprendizagem dos alunos, o primeiro eixo justifica-se pela relevância do caráter situado e contextual da aprendizagem, fornecendo elementos teóricos que permitem interpretar as crenças dos docentes sob este prisma. O segundo eixo visa discutir o papel das crenças no ensino da Matemática. Seguidamente, são apresentados e fundamentados os procedimentos metodológicos adotados. O artigo apresenta, depois, os resultados que permitem responder às questões colocadas.

Enquadramento teórico

Aprendizagem situada e aprendizagem matemática – comunidades de prática

A primeira comunidade de que a criança faz parte é a família e é aqui que ela começa a construir a imagem de si própria na relação com os outros, ou seja, através da sua própria experiência num contexto social. Este processo alarga-se à medida que a criança cresce e vai participando, gradualmente, noutros contextos: creche, jardim-de-infância, escola, associação, clube… - outras comunidades.

Na teoria sociocultural de Vigotsky (1978/1988), a construção do "eu" depende sobretudo das interações que as crianças desenvolvem com as pessoas que as rodeiam e, também, das interações com as ferramentas culturais que dão suporte ao pensamento. Por outras palavras, as ideias das crianças, o seu conhecimento, as suas atitudes e valores desenvolvem-se através das interações com os outros.

Barab e Duffy (1998) também realçam a importância da construção do "eu" nas comunidades de prática, alegando que ser um participante de uma comunidade é uma componente essencial do processo educativo de cada um, na medida em que vai contribuir para a formação do indivíduo, enquanto ser social. Reforçando esta ideia, Vadeboncoeur (2006) preconiza uma aprendizagem situada, na qual a construção do significado e das identidades é feita a partir de interações que, por sua vez, são influenciadas pelo contexto em que residem. Ou seja, o significado daquilo que foi aprendido foi construído na situação, isto é, o conhecimento é associado à experiência vivida num dado contexto; está situado.

Em Lave e Wenger (1991), o ponto de partida na análise da aprendizagem é a prática social e não a própria aprendizagem, sendo esta entendida como "um aspecto integral e inseparável da prática social" (p. 31). As atividades não existem isoladamente, fazem sentido naquele contexto social, para aquela comunidade e para aqueles participantes, pois este conjunto forma um sistema de relações que atribuem significado ao todo. O participante, enquanto membro de uma comunidade, está a construir a sua identidade de pertença, considerando que aprender envolve a construção de identidades. Mas aprender não é meramente uma condição de pertença, "é ela mesmo uma forma evolutiva de pertença" (Lave & Wenger, 1991, p. 53).

Esta característica de "situado" constitui a base para justificar o caráter negociado de conhecimento e aprendizagem, ou seja, os significados são produto da relação entre as

pessoas envolvidas e a atividade (Lave & Wenger, 1991). Isto implica o envolvimento global da pessoa na atividade “no e com o mundo social” e arrasta a visão de que “agente, atividade e mundo constituem-se mutuamente” (p. 33). É neste sentido que o chamado conhecimento geral só tem sentido e poder em circunstâncias específicas. “A generalidade é muitas vezes associada a representações abstratas, a descontextualização” (p. 33). Mas, a menos que possam ser tornadas específicas para as situações, as representações abstratas não têm qualquer significado.

Em síntese, podemos considerar que o conceito de aprendizagem situada é utilizado para explicar a aprendizagem como um processo sociocultural, de prática social, ancorado em atividades do dia-a-dia, em determinado contexto, que conjuga a aprendizagem por meio do fazer e envolve aprendizes em interação com pessoas e ações, localizadas num espaço e num tempo.

Nesta perspetiva, o objetivo muda do ensino de conceitos para o envolvimento do aluno em atividades autênticas que são suscetíveis de exigir o uso desses conceitos ou habilidades. O foco passa a ser em situar os conteúdos a lecionar em atividades reais. Os conceitos passam a ser encarados como ferramentas que só podem ser compreendidas através da sua utilização (Barab & Duffy, 1998).

Assim sendo, arquitetar um ambiente de aprendizagem começa com a identificação do que está a ser aprendido, para depois poder reconhecer os contextos do mundo real em que a atividade pode ocorrer. Um desses contextos é então escolhido para a criação da atividade de aprendizagem. Deste modo, a ênfase passa a ser sobre a criação de "atividades" circunscritas a contextos apropriados ao seu desenvolvimento ou a "experiências" contextualizadas para o aluno.

Em sintonia com Resnick (citada por Barab & Duffy, 1998), essas atividades devem ser autênticas, apresentando a maioria dos requisitos cognitivos que o aluno iria encontrar no mundo real, com o propósito que este possa fazer conexões entre as atividades realizadas e os conceitos aprendidos. Por esta razão, a necessidade de ancorar as atividades de aprendizagem em situações reais assume maior relevância; caso contrário, é provável que o resultado seja um conhecimento inerte, ou que o conhecimento só seja reconhecido como aplicável àquele contexto, mas não aplicado aos demais (Whitehead, citado por Barab & Duffy, 1998). As referências à vida real são necessárias para que os alunos consigam estabelecer conexões e possam fazer uma reflexão detalhada sobre a importância da Matemática no seu quotidiano, mas, também, sobre o seu contributo como suporte da

democracia. Nesta linha de pensamento, parte-se do pressuposto que um sujeito crítico é também um sujeito reflexivo.

Neste processo, "aprender" passa a ser "conhecer" e este conhecimento é assente na descoberta, na resolução de problemas, na construção e desconstrução de significados pessoais, ou seja, a aprendizagem é intrínseca à situação em que se desenvolve, isto é, situada. Conhecer é também ser capaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos e aplicá-los a diferentes situações. Por esta razão, sendo o contexto de aprendizagem determinante neste processo, não devemos cingi-lo ao meio envolvente do aluno.

Esta ideia de alargar os contextos de aprendizagem para fora do contexto de proximidade do aluno remete-nos para outras comunidades e também para diferentes formas de aprendizagem, nomeadamente para aquelas que põem em evidência as diferenças entre a aprendizagem escolar e fora da escola.

O papel desempenhado pelas crenças dos docentes no ensino da Matemática

A investigação produzida nos últimos anos trouxe um reconhecimento explícito do papel que as crenças desempenham nas práticas educativas dos docentes, nomeadamente identificando aspetos favoráveis e restritivos (Goldin, Rösken & Törner, 2009). Em particular, as crenças dos docentes sobre a natureza da matemática influenciam o modo como os mesmos ensinam esta disciplina (Beswick, 2012). De acordo com Philipp (2007), crenças são as premissas psicológicas, compreensões ou proposições acerca do mundo que são entendidas como verdadeiras, existindo diversos graus de convicção. As crenças desenvolvem-se num longo período de tempo (Goldin et al., 2009). Tornou-se consensual que, dada a sua essência, a maioria das crenças está incorporada em estruturas complexas de natureza afetiva e cognitiva, que se ligam entre si, formando sistemas estruturados.

Considerando que o papel dos docentes é crucial na realização dos objetivos do currículo e que as suas crenças influenciam as decisões que tomam ao ensinar Matemática (Akinsola, 2009), é fundamental conhecer os fatores que as influenciam e como podem elas influenciar.

A este respeito, a investigação reconhece que as experiências escolares têm um papel notável no nascimento de crenças associadas à Matemática e que estas podem ser influenciadas por fatores externos como o contexto e as prescrições das instituições que tutelam o ensino, mas também, por fatores internos como as experiências que ocorrem durante a prática letiva. Diversos autores (Akinsola, 2009; Forgasz & Leder, 2007)

defendem que as crenças e as expetativas da eficácia dos docentes são parte de um sistema de crenças individual, construído a partir das experiências pessoais anteriores e das influências que se foram manifestando ao longo do percurso profissional de cada um, nas quais se incluem a sua própria formação e as experiências vividas, as experiências com diversos alunos, a assunção de diferentes papéis como aprendente dentro das comunidades e suas diferentes culturas, bem como o conhecimento de estratégias pedagógicas apropriadas.

Segundo Akinsola (2009), estas crenças e expetativas influenciam as práticas educativas dos docentes de Matemática, em aspetos tão importantes como as práticas de ensino, o envolvimento dos alunos, ou a gestão da sala de aula, podendo afetar a aprendizagem dos alunos. Com base no trabalho de Forgasz e Leder (2007), identificámos alguns aspetos pertinentes para o nosso estudo e que passamos a enunciar:

- Os docentes do 1.º ciclo relacionam frequentemente a Matemática com experiências de vida quotidiana dos alunos e reconhecem a sua relação intrínseca com outras dimensões do currículo, fazendo uma abordagem holística da educação neste nível de ensino;
- As alterações das crenças dos docentes são, na sua maioria, uma consequência das próprias experiências de sala de aula;
- As crenças dos docentes sobre os estudantes e as capacidades destes podem afetar as práticas dos docentes em diferentes contextos;
- As crenças dos docentes de Matemática sobre a Matemática não podem ser separadas das suas crenças sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

Face ao exposto, os resultados dos estudos evidenciam que as crenças influenciam a tomada de decisões pedagógicas dos docentes, afetando as experiências escolares dos seus alunos. Ou seja, em determinado contexto podem ser precursoras de mudança (ex: reforma educativa) e noutro, um fator de conservação/manutenção.

Observando o papel crucial que os docentes desempenham na obtenção de altos padrões de educação, importa salientar também a sua influência na construção das crenças das gerações vindouras, pois não só influenciam os próprios alunos como também os futuros docentes.

Abordagem metodológica

Neste estudo, recorremos a uma abordagem metodológica de caráter quantitativo, utilizando técnicas de estatística descritiva para organizar e analisar os dados obtidos.

Como circunscrevemos a investigação ao espaço fora da sala de aula, definimos um critério que garantia que os respondentes tinham participado numa experiência de aprendizagem neste contexto. Ora, estando a investigadora, a primeira autora deste artigo, a exercer as funções de coordenadora da Escola Ciência Viva (ECV) – um projeto educativo promovido pela Ciência Viva, que funciona no Pavilhão do Conhecimento – Centro Ciência Viva, e que recebe anualmente 60 turmas do 1.º CEB de escolas públicas de Lisboa, entendemos que este era o universo de docentes participantes no estudo. Por um lado, garantíamos que cumpriam o critério definido e por outro, acreditávamos que seriam docentes com características diferenciadoras, na medida em que se tinham inscrito para participar no projeto ECV. Neste pressuposto, definiu-se que a população a estudar seria constituída por todos os docentes titulares de turma que tivessem participado no projeto ECV no ano letivo de 2014/2015.

A dimensão da população envolvida no estudo levou-nos a optar por um inquérito por questionário como instrumento de recolha de dados e permitiu definir que o mesmo iria ser respondido *online*, facilitando a recolha de informação e reduzindo o tempo e os custos. Portanto, procurámos conceber um instrumento capaz de recolher as informações adequadas e necessárias para conseguir responder às questões do estudo, respeitando as condições éticas e deontológicas (Almeida & Freire, 2000; Carmo & Ferreira, 1998). Para o efeito, o questionário foi estruturado em três partes distintas, sendo precedido de uma nota introdutória que contextualizava a investigação e na qual se solicitava a colaboração dos convidados a participar, assegurando a confidencialidade e o anonimato e agradecendo a sua participação no estudo. Na primeira parte do questionário (A), formularam-se perguntas fechadas, que forneceram dados pessoais relevantes para caracterizar a população. As questões da segunda parte do questionário (B) possibilitaram conhecer algumas das práticas letivas relativas às situações de aprendizagem na aula de Matemática, considerando o que os docentes afirmaram realizar. A terceira parte, a mais extensa, incluía diferentes aspetos: recolhia as opiniões dos inquiridos face a situações de aprendizagem fora da sala de aula, relativamente à área da Matemática (C); auscultava sobre as práticas letivas que os inquiridos afirmavam implementar neste contexto, convidando-os a descrever experiências de aprendizagem matemática (D), elencando

aspetos positivos (E) e possíveis constrangimentos, que considerassem como limitadores das suas práticas (F). Nestas secções do questionário, adotámos a formulação de questões fechadas para as questões que tinham como enfoque recolher a opinião dos inquiridos e nas quais usámos uma escala de Likert com 5 níveis (B e C), e a formulação de questões abertas, possibilitando liberdade de resposta, para aquelas em que solicitámos a descrição (D, E e F). As secções C e D apresentavam situações formuladas pela positiva e pela negativa que foram misturadas, de modo a não induzir as respostas.

Para garantir que servia os propósitos definidos, procedemos à validação da primeira versão do questionário, através da aplicação em pequena escala. Posteriormente, submetemos a segunda versão a uma nova pilotagem com um grupo de docentes que também tinha participado no projeto ECV, mas que não fazia parte da população anteriormente definida. Cumpridos estes requisitos, considerámos que tinha sido feita a validação e pilotagem do instrumento e, como tal, podíamos avançar para a sua aplicação.

O questionário foi aplicado entre os meses de março e maio de 2016, através de um convite endossado por correio eletrónico aos 60 docentes selecionados para participarem, convidando-os a responderem ao questionário apenso ao email enviado.

Foram usadas técnicas de estatística descritiva para as questões fechadas e técnicas de análise de conteúdo para as questões de resposta aberta.

A consistência interna foi calculada através do Alpha de Cronbach (α), que apresentou um excelente valor de fiabilidade (0,904), acima, portanto, de 0,90 para as 38 questões com escala de Likert.

Apresentação de resultados

Os respondentes (n=52) são todos docentes do 1.º CEB, de nacionalidade portuguesa e com mais de 30 anos, dos quais mais de 80% tinham mesmo 40 ou mais anos. Destes, 10% (5 docentes) são do género masculino. Todos são licenciados, sendo que 22% possui um grau académico superior à licenciatura em domínios diversos, um dos quais com doutoramento. Esta é uma população de docentes considerada experiente, na medida em que 75% dos respondentes tem mais de 15 anos de serviço, dos quais quase 30% já completou mais de 25 anos de docência e apenas 25% (13 docentes) têm entre 6 e 15 anos.

Refira-se que 77% dos respondentes indicaram a sua participação em ações de formação contínua e acreditada no domínio da Matemática.

Passando a analisar os dados da segunda parte do questionário (B), a Figura 1 indica-nos níveis de frequência concentrados entre os 3,7 e os 4,4 numa escala de 1 a 5, pelo que podemos inferir que os respondentes implementam estas práticas na sala de aula com grande regularidade.

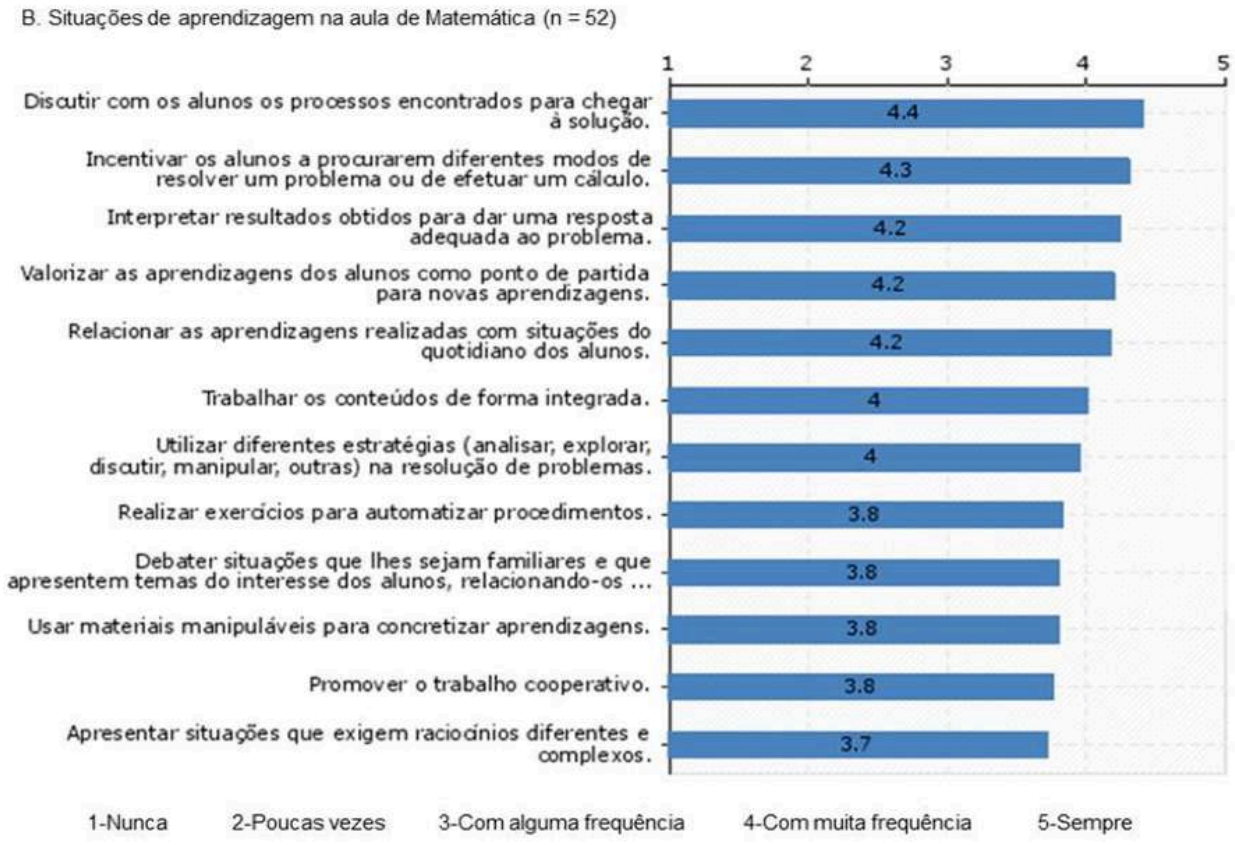


Figura 1. Resposta dos inquiridos à parte B

Na terceira parte do questionário, as questões centram-se nas situações de aprendizagem matemática, fora da sala de aula. A Figura 2 apresenta os resultados relativos à parte C, e constatamos uma divisão em dois grupos distintos: um grupo em que a média é igual ou superior a 3,4 e que concentra as questões expressas pela afirmativa, e um outro grupo que agrega as questões enunciadas pela negativa e que obtém médias com valor igual ou inferior a 1,8.

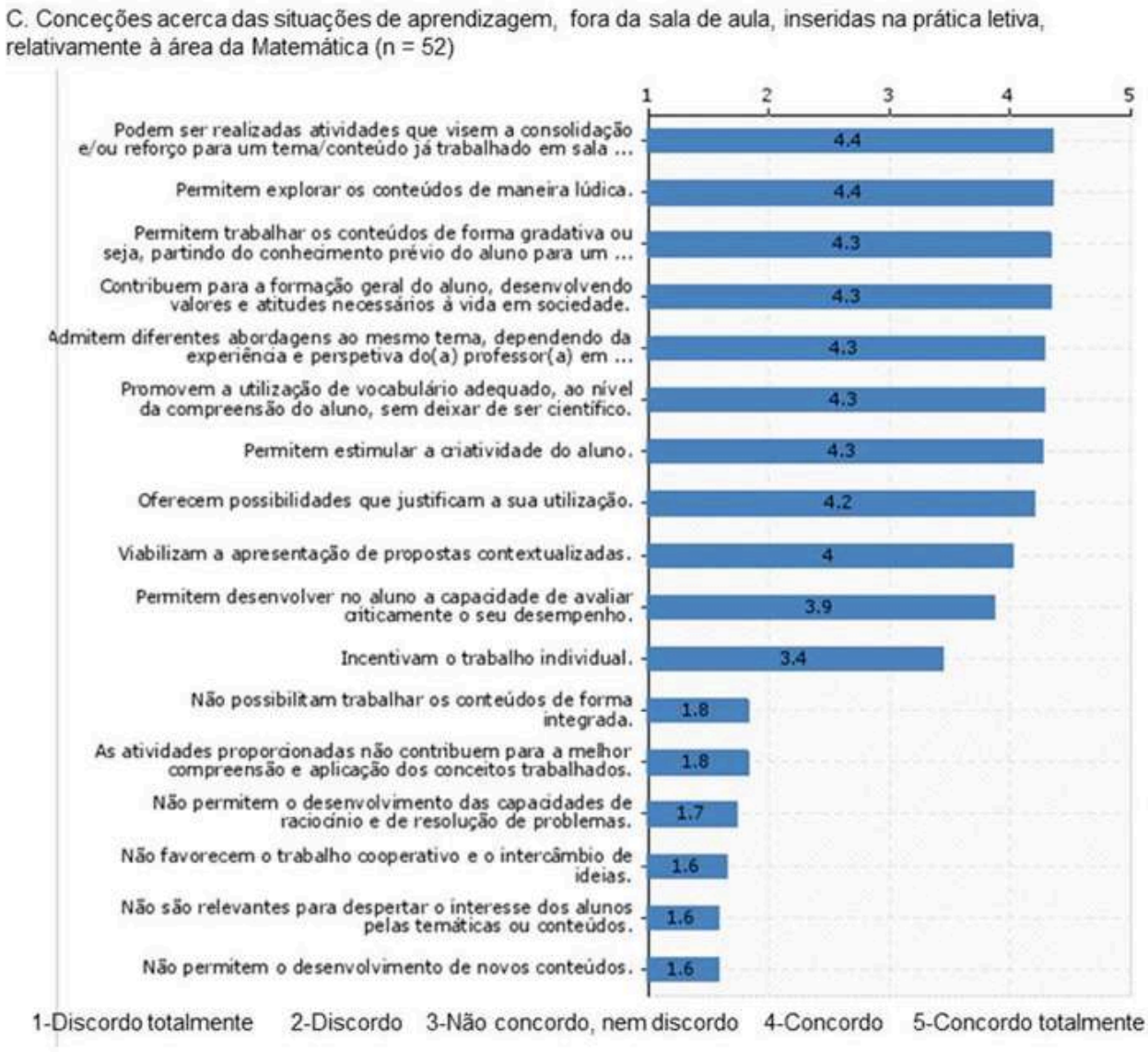


Figura 2. Resposta dos inquiridos à parte C

A observação da Figura 3 permite-nos dizer que os respondentes valorizam na sua própria prática letiva a implementação de situações de aprendizagem matemática fora da sala de aula.

Nas partes C e D, fizemos a inversão da escala de valores para as questões enunciadas pela negativa e obtivemos valores médios muito semelhantes aos outros parâmetros, representando um elevado grau de concordância com as afirmações expressas. Daqui inferimos que os inquiridos foram maioritariamente concordantes com situações de aprendizagem em Matemática fora da sala de aula, reconhecendo-lhes potencialidades que justificam a sua utilização, e valorizando-as nas suas práticas letivas.

Figura 3. Resposta dos inquiridos à parte D

A partir da descrição das experiências de aprendizagem matemática fora do contexto de sala de aula foram identificadas 4 grandes categorias: Domínios de conteúdos; Local onde ocorrem; Conexões com outras áreas e Motivação.

Figura 4. Distribuição das experiências de aprendizagem matemática fora do contexto de sala de aula no decurso da prática letiva por domínios de conteúdos

Na Figura 4 é evidente a predominância do domínio da Geometria e Medida (GM) em relação aos outros dois, com uma percentagem superior a 50% das respostas.

Dentro desta categoria, Domínios de conteúdos, emergiram duas subcategorias, em que se identificaram os conteúdos trabalhados (Figura 5) e a natureza das tarefas desenvolvidas (Figura 6).

Figura 5. Distribuição das experiências de aprendizagem matemática fora do contexto de sala de aula no decurso da prática letiva por conteúdos

A Figura 5 mostra-nos a distribuição das experiências de aprendizagem matemática, por conteúdos, reforçando uma clara preferência por conteúdos do domínio da GM, com uma representação equilibrada entre a Geometria e a Medida.

Figura 6. Distribuição das experiências de aprendizagem matemática, relatadas no questionário, por natureza das tarefas

Considerando esta distribuição, e observando a Figura 6 podemos dizer que relataram um maior número de atividades de consolidação (46%). Menos presentes são as

atividades que envolvem a resolução de problemas (13%) e pouco relevantes, ainda que mencionadas, as atividades investigativas (2%).

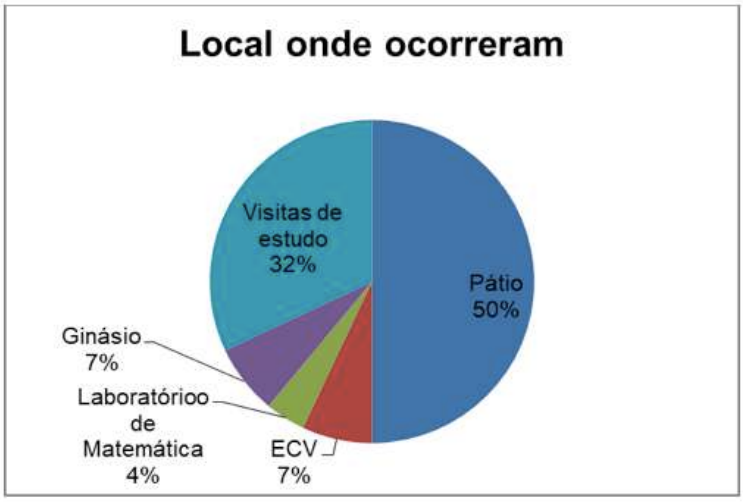


Figura 7. Distribuição das experiências de aprendizagem matemática, relatadas no questionário, por local onde ocorreram

Quando categorizámos as respostas de acordo com o local onde referem que ocorreram as experiências de aprendizagem matemática (Figura 7) verificámos que a grande maioria (50%) aconteceu no pátio ou recreio da escola, ou durante visitas de estudo (32%).

Em certos relatos apurámos que, para além da Matemática, algumas atividades têm conexões com outras áreas curriculares ou uma ligação à vida real, contextualizando aprendizagens transversais ao currículo, como se pode observar na Figura 8.

Figura 8. Conexões das experiências de aprendizagem matemática relatadas no questionário com outras áreas

Da análise à Figura 9, concluímos que as visitas de estudo são a principal motivação para a implementação destas atividades.

Figura 9. Motivação para a realização das atividades fora do contexto da sala de aula

Os aspetos positivos mais valorizados na implementação de atividades fora do contexto da sala de aula (Figura 10) foram a "Contextualização" das situações de aprendizagem em atividades, a "Aprendizagem mais significativa" e a "Ligação ao quotidiano", mencionada quando o professor tira partido de situações reais.

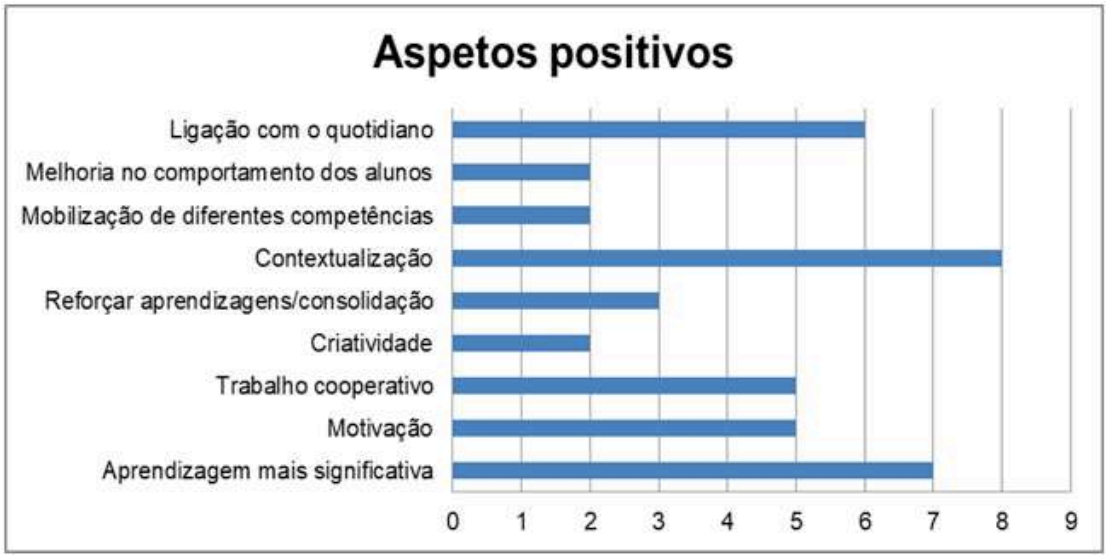


Figura 10. Aspetos positivos valorizados na implementação das atividades fora do contexto da sala de aula

Quanto a constrangimentos na implementação das atividades fora do contexto da sala de aula foram identificados os resultantes de contingências inerentes às decisões do macrocontexto (elevado número de alunos por turma, burocracia exigida para sair da escola, extensão do programa ou a obrigatoriedade de cumprir metas curriculares) e,

também, de circunstâncias decorrentes do microcontexto, muitas delas consequências de situações do momento (falta de pessoal, espaço exterior, tempo atmosférico). Com um peso muito significativo nesta tomada de decisões, foram assinalados outros 3 fatores: o comportamento dos alunos, o tempo despendido pelo professor na preparação deste tipo de atividades e o facto de não serem bem vistas pelos pares ou incompreendidas pelos encarregados de educação.

Por último, assinalam-se dois relatos que afirmam a inexistência de constrangimentos.

Os resultados aqui descritos encontram-se na Figura 11.

Figura 11. Constrangimentos identificados na implementação das atividades fora do contexto da sala de aula

Quando confrontámos os resultados encontrados relativamente às motivações que os docentes referem como subjacentes à implementação destas práticas com os aspetos que identificam como positivos, compreendemos que alguns têm uma ligação forte ao quotidiano, nomeadamente quando suportam uma aprendizagem mais significativa, ou a aprendizagens contextualizadas em situações que podem ocorrer no meio mais próximo, outros espaços da escola, ou mais longínquo, proporcionado pelas visitas de estudo.

Quando observámos os constrangimentos referidos, compreendemos também que os docentes identificaram dificuldades sentidas, mas não encontrámos situações que inviabilizem por completo a implementação destas práticas.

Conclusões

Quando comparámos os resultados encontrados para as questões relativas às situações de aprendizagem matemática dentro e fora da sala de aula, observámos uma coerência nos resultados obtidos em itens similares, o que nos levou a concluir que estes professores valorizam a criação de ambientes em que os intervenientes, alunos e professor, funcionam como membros de uma comunidade, em que a individualidade e o coletivo são contemplados nas suas práticas, como defendem Lave e Wenger (1991).

As vivências dos alunos, a necessidade de concretizar situações em contextos reais, a aprendizagem cooperativa e o trabalho de conteúdos de forma integrada são aspetos que os docentes valorizam e fatores que influenciam a tomada de decisões relativamente às dinâmicas de sala de aula e fora dela. Foi esta diversidade de estratégias que identificámos nos resultados obtidos que nos permitem afirmar que os docentes defendem abordagens contextualizadas, reconhecendo vantagens nas situações de aprendizagem matemática fora da sala de aula, que valorizam, pois consideram que estas contribuem para o enriquecimento do ambiente escolar e consolidam e reforçam o trabalho desenvolvido dentro da sala de aula, facilitando um conhecimento progressivamente mais aprofundado.

Em relação às práticas que os docentes afirmam levar a efeito, os resultados demonstram que os docentes valorizam a importância dos alunos trabalharem em diversos contextos, considerando estes como um suporte para a aprendizagem da Matemática. Os resultados encontrados também evidenciam que há uma maior preponderância de uns temas/conteúdos sobre outros na diversidade de atividades realizadas fora do contexto da sala de aula, o que nos leva a crer que algumas temáticas são mais favoráveis para que tal aconteça.

Estes resultados estão em sintonia com algumas crenças identificadas por Forgasz e Leder (2007), designadamente quando relacionam a Matemática com as vivências diárias dos alunos e valorizam uma abordagem holística da educação. Podemos também inferir que as crenças destes docentes influenciam as suas práticas e que estas, as crenças, na sua globalidade, resultam das suas experiências de sala de aula, passadas e presentes.

Foram relatadas situações que parecem indiciar alguma pressão por parte dos pares, outros docentes, que criticam ou desvalorizam iniciativas que saem dos modelos tradicionais, causando algum desconforto e insegurança em quem as implementa. A possibilidade de haver incompreensão por parte dos encarregados de educação também foi referida. Estes são fatores que podem influenciar e condicionar as práticas docentes.

Assim sendo, entendemos que a aprendizagem preconizada por estes inquiridos no contexto fora da sala de aula pode ser considerada como uma aprendizagem situada, na medida em que o significado foi construído na situação, isto é, o conhecimento está associado à experiência vivida naquele contexto, formando um sistema de relações que atribuem significado ao todo. (Lave & Wenger, 1991).

Referências bibliográficas

Almeida, L., & Freire, T. (2000). Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação (2ºed.). Braga: Psiquilíbrios.

Akinsola, M. K. (2009) Comparison of prospective and practicing teachers' mathematics efficacy beliefs regarding mathematics teaching and classroom management. In J. Maa & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Result*s (pp. 119-129). Rotterdam: Sense Publishers.

Barab, S., & Duffy, T. (1998). From practice fields to communities of practice. CRLT Technical Report.

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 127-147.

Carmo, H., & Ferreira, M. (1998). Metodologias da Investigação: Guia para a Auto-Aprendizagem (2ª ed.). Lisboa: Universidade Aberta.

Forgaz, H., & Leder, G. (2008). Beliefs about mathematics and mathematics teaching. IN P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *International handbooks of mathematics teacher education*: *Knowledge and Beliefs in Mathematics*. (vol. 1, pp. 173-192). Rotterdam: Sense Publishers.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maa & W.Schlöglmann, (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results* (pp. 1-18). Rotterdam: Sense Publishers.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – Direcção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ministério da Educação e Ciência (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: MEC, DGE.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-317). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Souza, A. (2017). *A aprendizagem matemática fora da sala de aula*. (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa).

Vadeboncoeur, J. (2006). Engaging young people: Learning in informal contexts. *Review of Research in Education, 30*, 239-278.

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO:UM ESTUDO NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Joana Conceição, Margarida Rodrigues

[1]UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, conceicaoj@campus.ul.pt

[2]ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Pertinência e problemática do estudo

Nos primeiros anos de escolaridade, as experiências em Geometria devem privilegiar o desenvolvimento do raciocínio espacial, através da exploração de formas variadas para descobrir propriedades e relações (De Villiers, 2017). Os materiais manipuláveis constituem-se como recursos determinantes para a construção de representações mentais e para a mediação da comunicação matemática (Sfard, 2008). No entanto, o ensino da Geometria tem incidido pouco nas capacidades visuais, nomeadamente como suporte para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos para níveis de desempenho mais sofisticados (De Villiers, 2017).

Os van Hiele (1986) entenderam como um obstáculo ao desenvolvimento do raciocínio geométrico a diferença entre o nível de discurso dos professores e o dos alunos. Alguns estudos evidenciam a importância da comunicação matemática e da natureza das interações para a progressão dos alunos (Wang, 2016).

Este estudo tem como objetivo compreender como é que os alunos do 1º ciclo do Ensino Básico desenvolvem o seu raciocínio geométrico. Partindo da estruturação espacial, no âmbito do desenvolvimento de uma experiência de ensino, com recurso à resolução de tarefas de natureza exploratória que envolvam figuras bidimensionais e tridimensionais em trabalho colaborativo, procura-se responder às seguintes questões de investigação: i) Que estratégias usam os alunos na exploração de figuras bidimensionais e tridimensionais?; ii) Qual o papel dos recursos (materiais manipuláveis, dispositivos tecnológicos e sequências de tarefas) no desenvolvimento das capacidades visuais?; iii) Como se caracteriza a comunicação matemática entre professor e alunos e alunos entre si durante a atividade de exploração de figuras bidimensionais e tridimensionais?; iv) De que forma a evolução do raciocínio geométrico dos alunos se relaciona com a comunicação matemática e os recursos utilizados?

Enquadramento teórico

Battista (2007) define raciocínio geométrico como a "invenção e uso de sistemas concetuais formais que permitem investigar as figuras e o espaço" (p. 843) e propõe que o raciocínio geométrico se desenvolve em três níveis de sofisticação: (i) estruturação espacial; ii) estruturação geométrica; e iii) a estruturação lógica/axiomática (Battista, 2008). O raciocínio espacial, associado à componente visual do raciocínio geométrico, está relacionado com a visualização espacial.

Para Arcavi (2003), a visualização é a capacidade, o processo e o produto de gerar e interpretar imagens e diagramas mentais que pretendem representar informação. Van Nes e Lange (2007) referem que a visualização espacial envolve a capacidade para imaginar movimentos de objetos e figuras.

A estes movimentos mentais Bruce e Hawes (2015) chamam de *geometria transformacional dinâmica* que definem como a capacidade de imaginar "como é que as formas se movem, mudam, interagem com o espaço e como nos movemos em relação às figuras" (p. 331). Este aspeto está relacionado com o raciocínio espacial.

Metodologia

Este estudo enquadra-se no paradigma interpretativo (Erickson, 1986) e tem uma natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). A modalidade de investigação é a Investigação baseada em Design (IBD), realizada em dois ciclos de investigação, pois pretende-se aprofundar o processo de aprendizagem no seu contexto.

Este estudo será desenvolvido com duas turmas do 1º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico, uma em cada ciclo de investigação, recorrendo à: (i) observação participante, com registo áudio e vídeo de dois pares de alunos, em momentos de exploração das tarefas, e de toda a turma, em momentos de discussão coletiva; e (ii) recolha documental de produções de alunos.

Antes da experiência de ensino, será desenvolvido um estudo piloto, numa turma de 1º ano, implementando as sequências de tarefas que se prevê propor, nos dois ciclos da IBD. Com base nos resultados deste estudo, proceder-se-á a adaptações justificadas das tarefas. O poster apresentará a sequência de tarefas incidentes na composição e decomposição de bidimensionais e tridimensionais.

Referências bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. 2, pp. 131-56). Charlotte: Information Age.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)

Bruce, C.D. & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM*, *47*, 331-343.

De Villiers, M. (2017). Revisiting the van Hiele theory. Investigação em Educação Matemática 2017: O ensino e a aprendizagem da geometria, 11-26.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.

van Nes, F., & Lange, J. (2007). Mathematics Education and neurosciences: Relating spatial structures to the development of spatial sense and number sense. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(2), 210-229.

van Hiele, P.M. (1986) Insight and Structure. Orlando, Fla.: Academic Press

Wang, S. (2016). Discourse Perspective of Geometric Thoughts. Springer Spektrum.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora pela mesma fundação (referência da bolsa SFRH/BD/130505/2017).

Painel plenário

CURRÍCULO E AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA

Cecília Monteiro, António Borralho, António Teodoro, Teresa Moreira, Helena Silva

[1]ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
[2]Universidade de Évora
[3]Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias
[4]Associação de Professores de Matemática
[5]Externato Fernão Mendes Pinto

A situação atual do ensino da Matemática tem vindo a merecer muitas críticas da parte de professores que dificilmente conseguem cumprir os programas e que os seus alunos tenham sucesso, isto é, se sintam motivados para a disciplina e obtenham os conhecimentos indispensáveis para transitar de ano. De acordo com o relatório ”O Estado da Educação” de 2016 do CNE, a Matemática é a disciplina que apresenta as maiores percentagens de níveis inferiores a 3 e é nesta disciplina que mais alunos retidos revelam mais dificuldades em recuperar. A avaliação continua a ser uma preocupação de alunos e pais que recorrem (os que podem) a ajudas externas e dos próprios professores que têm de mostrar “resultados”. A promoção de estratégias de sucesso escolar em curso ainda não revelaram conclusões relevantes no combate ao insucesso em Matemática. Neste painel teremos oportunidade de conhecer alguns resultados de investigações e experiências que abordam questões relacionadas com o currículo de Matemática, a avaliação e o seu papel na exclusão/integração sociais, contribuindo para uma problematização de questões que, a todos nós, ligados de um modo ou de outro à aprendizagem da Matemática, dizem respeito.

Espaço GTI

THIRD WAVE PROJECT – WIFITOO

Apresentado por: *Ana Isabel Silvestre, Moderado por:* Hélia Pinto

O Third Wave Project é uma comunidade internacional de investigadores interessados em conhecer como ensinar e aprender matemática, recorrendo ao potencial dos valores em educação matemática.

"WIFI" refere-se a "What I Find Important (na aprendizagem em matemática)". WIFI too" é o 5.º ciclo de estudos deste projeto e foi conceptualizado para conhecer a natureza dos valores dos professores que emergem da sua prática e podem influenciar a atividade matemática dos alunos e os seus valores. Neste sentido, "too" foi usado para sugerir que os professores "também" possuem valores, não sendo estes exclusivos dos alunos.

Este estudo pretende conhecer a forma como os professores que leccionam 7.º e 10.º anos alinham os diferentes valores no trabalho com as suas turmas, de modo a que alunos aprendam matemática de forma significativa.

O estudo compreende duas fases: um questionário, no qual os alunos e os seus professores de matemática respondem a questões para mapear a natureza dos valores em cada país, a partir dos quais se desenvolve uma ideia da diversidade de estratégias que os professores desenvolvem para alinhar valores e para identificar os participantes para a fase seguinte do estudo; observação de salas de aula e entrevista ao professor.

O Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática, é um dos onze parceiros deste projeto, tendo para o efeito constituído uma equipa de trabalho que agrega professores investigadores de várias instituições e diferentes níveis de ensino.