# ATAS

# XXVI SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**Escola Secundária Gabriel Pereira**

**ÉVORA 28-29 março 2015**

APM
Associação de Professores de Matemática

## Título

*Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*


## Organização

Ana Paula Canavarro, Leonor Santos, Cláudia Canha Nunes e Hélia Jacinto

## Edição

APM - Associação de Professores de Matemática
Março 2015

*Lisboa 2015*

## Capa

Cláudia Canha Nunes e António Fernandes (Foto)

**ISBN:** 978-972-8768-59-1

## Colaboraram na revisão dos textos das atas

Ana Maria Barbosa, Ana Paula Canavarro, António Borralho, António Domingues, António Guerreiro, Augusta Brito, Celina Aparecida Abar, Cláudia Canha Nunes, Dárida Fernandes, Fátima Paixão, Fátima Regina Jorge, Fernando Luís Santos, Giovana Sander, Helena Martinho, Helena Rocha, Hélia Jacinto, Inês Pinho, Isabel Cabrita, Isabel Rocha, Isabel Vale, Ivete Cevallos, Jaime Carvalho e Silva, Joana Brocardo, Joana Mata-Pereira, João Pedro da Ponte, José Duarte, José Luís Menezes, José Portela, Josete Leal Dias, Leonor Santos, Lina Brunheira, Lucélida Costa, Luciano Veia, Lurdes Serrazina, Mária Almeida, Maria Júlia Alves, Marisa Quaresma, Neusa Branco, Paula Vieira da Silva, Pedro Duarte, Raquel Cerca, Rosa Antónia Ferreira, Rui Candeias, e Valdeni Soliani Franco.

## Agradecimentos

A Comissão Científica do XXVI SIEM agradece o apoio recebido das seguintes instituições e empresas: APM – Associação de Professores de Matemática, Escola Secundária Gabriel Pereira, Universidade de Évora, Câmara Municipal de Évora, Fundação Salesianos, Delta, Casio, Texas Instruments.

# Índice

## Simpósio de comunicações 2 – Formação inicial de professores



## Simpósio de comunicações 3 – Ensino da matemática



## Simpósio de comunicações 4 – Aprendizagem da matemática

## Simpósio de comunicações 5 – Resolução de problemas e programas de matemática



## Simpósio de comunicações 6 – Ensino da matemática



## Simpósio de posters 7 – Tarefas matemáticas no ensino

## Simpósio de posters 8 – Formação inicial de professores



## Simpósio de posters 9 – Desenvolvimento profissional

## Simpósio de posters 10 – Tecnologias e raciocínio

# Introdução

O SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática – é uma iniciativa da Associação de Professores de Matemática (APM), promovida pelo seu Grupo de Trabalho em Investigação (GTI), que se realiza desde 1990, pelo 26.º ano consecutivo. Neste ano de 2015, o seminário ocorre em Évora, na Escola Secundária Gabriel Pereira, contando com quase uma centena de participantes. O seu programa inclui comunicações auto-propostas pelos participantes, onde se contam mais de trinta comunicações orais e comunicações em posters, oriundas de Portugal, Espanha e Brasil. Inclui também sessões convidadas, como as conferências plenárias, os painéis plenários e os workshops. Existe ainda uma sessão dinamizada pelo GTI, designada de Espaço GTI.

Destaca-se que em 2015, o SIEM procurou reforçar a possibilidade de interação, diálogo e reflexão conjunta entre investigadores e professores participantes no ProfMat, encontro nacional de professores que a APM organiza também anualmente. Esse reforço consistiu em duas inovações. Por um lado, a criação de um dia com programa inteiramente comum, integrando sessões propostas pelas comissões científicas dos dois encontros, no qual existem três momentos plenários que reúnem todos os participantes. Por outro lado, a proposta de uma nova modalidade de sessão, os workshops, «Olhares sobre a aula de matemática: contributos da interação entre professores e investigadores», que são dinamizados por equipas de professores e investigadores.

O SIEM é um encontro de investigação não temático, abrangendo diversos focos que resultam da seleção da Comissão Científica do encontro e dos temas presentes nas comunicações apresentadas pelos participantes.

Uma conferência plenária está a cargo de um investigador estrangeiro, recaindo este ano sobre Stéphane Clivaz, da Lausanne University of Teacher Education. O tema abordado, Lesson Study as… From Professional Development to Research in Math Education", é de grande interesse e atualidade, tratando de propor uma alternativa ao desenvolvimento profissional dos professores baseada em estudos de sala de aula.

A conferência a cargo da investigadora nacional é proferida por Célia Mestre, professora do Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada. Baseia-se na sua tese de doutoramento concluída em 2014, e apresenta uma perspetiva transversal para a abordagem da álgebra, intitulando-se: "O desenvolvimento do pensamento algébrico numa perspetiva de integração curricular".

O painel proposto pela CC do XXVI SIEM dá voz ao projeto de investigação "Desenvolvimento da Literacia Estatística" (DSL), coordenado por Hélia Oliveira, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, e intitula-se "Desenvolver a literacia estatística: contributos para uma reflexão em torno da educação estatística". O painel é moderado por Hélia Jacinto, da Escola Básica José Saramago, e conta com a presença de diversos elementos da equipa do projeto.

O painel proposto pela CC do ProfMat 2015 tem por tema "Políticas educativas para a renovação do ensino da matemática em Portugal", e é moderado por Joana Brocardo, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, com a participação de diversos intervenientes.

As comunicações orais e comunicações em posters estão organizados em dez simpósios, centrados nos seguintes temas que emergiram da organização das temáticas abordadas: Tecnologias; Formação inicial de professores; Ensino da Matemática; Aprendizagem da Matemática; Resolução de problemas e programas de Matemática; Tarefas matemáticas no ensino; Desenvolvimento profissional e Tecnologias e raciocínio matemático. A diversidade das propostas oferecidas pelas/os participantes no SIEM é um sinal da vitalidade da comunidade de investigação que se expressa em português.

Este livro de atas inclui os textos relativos às conferências plenárias e os resumos dos painéis plenários, bem como os textos relativos às comunicações. Os últimos foram sujeitos a um processo de revisão cega por pares. Agradece-se a todos os colegas que participaram no processo de revisão e que permitiram elevar a qualidade dos textos que agora se publicam, deixando testemunho deste XXVI SIEM.

Évora, março de 2015

A Comissão Científica

# Lesson Study as…
# From Professional Development to Research in Math Education

*Stéphane Clivaz*[1]
[1]Lausanne Laboratory Lesson Study, Lausanne University of Teacher Education, Switzerland, stephane.clivaz@hepl.ch

## Introduction

This paper is a short summary of our plenary conference about lesson study in XXVI SIEM.

Lesson study is a collaborative model of teacher professional development which originated in Japan. Since the beginning of 21st century lesson study has received growing international attention in terms of both educational research (see WALS annual conferences[1]) and mathematics education research (for eg. Hart, Alston, & Murata, 2011). This multifaceted model can be considered from many points of view and here we present lesson study as teacher training, as resource development, as teacher research, as mathematics education research, as a link between theory and practice, and as a way to connect education professionals. We illustrate our reflections using lesson study projects conducted in Lausanne Laboratory Lesson Study, in particular focusing on our work with a math lesson study group for primary 3 and 4 in-service teachers.

## Lesson study and our projects

The lesson study process can be described as a cycle. The most common sequencing is based on Lewis et al.'s (2006) description (Figure 1).

---

[1] World Association of Lesson Study annual congress brings together researchers, school leaders and teachers from various countries around the world to share their experience and practice of lesson studies. See http://www.walsnet.org

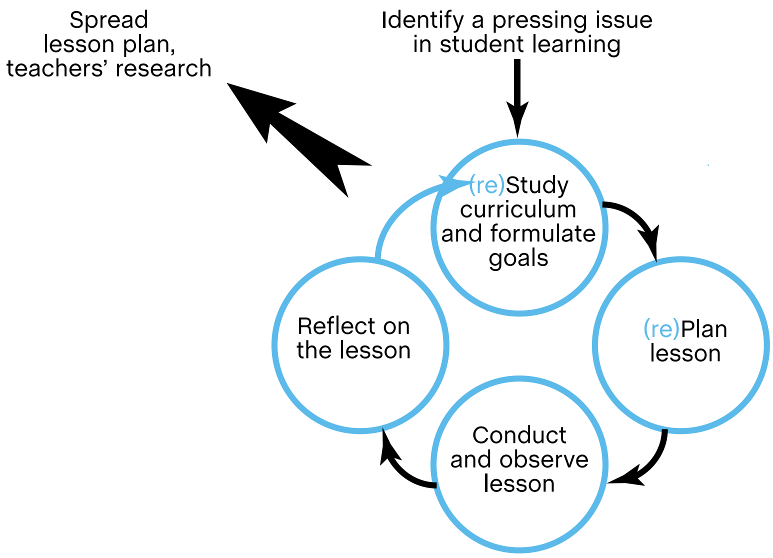



Figure 1: Lesson study cycle, adapted from (Lewis et al., 2006, p. 4)

In Lausanne Laboratory Lesson Study (3LS)[2], several adaptations have been made of this process. One particular group in 3LS focuses on lesson study in math (LSM) for primary 3 and 4 in-service teachers and we will use this group to illustrate particular aspects of lesson study.

**Lesson Study as Teacher Training**

Citing many research studies, Murata synthetizes that "lesson study incorporates many characteristics of effective professional development programs identified in prior research: it is site-based, practice-oriented, focused on student learning, collaboration-based, and research-oriented" (2011, p. 2). Each of these aspects is present in our LSM group, and we have observed the effects of each of these features on the teacher training process.

One of the most noticeable effects was the de-personification of teaching (moving the attention from the teacher to the teaching), linked with the focus on student learning. The development of several kinds of mathematical knowledge for teaching (Ball, Thames, & Phelps, 2008) also occurred in each phase of the process as documented in teachers' final lesson plan generated as part of their engagement in lesson study.

[2] See www.hepl.ch/3LS

**Lesson Study as Resource Development**

After the lesson study cycle, sometimes with several teachings of the lesson, the LSM group produced a *lesson plan*, which was made available online[3] . This plan documented the layout and conduction of the lesson but also contained comments about the process of designing the lesson. While the writing of this lesson plan is a powerful motivation for the group to formalize and synthetize their discussions, it is important to note that this is not the goal of the process. The work on testing textbooks problem to see their effect on student learning, transforming them and spreading the new version (Clivaz, Sous presse) also brings lesson study close to design research (Sack & Vazquez, 2011).

**Lesson Study as Teacher Research**

During the lesson study process, teachers adopt a research' stance. They develop questions about teaching a particular subject, they study existing literature about this subject, they make hypothesis about possible solutions, they design a lesson for testing these hypothesis, they collect data during this research lesson, and they confront their observations with their hypothesis. In our research, LSM teachers felt this researchers' attitude especially during third lesson study circle about problem solving, were the "solutions" for how to teach for and through problem solving where not already available.

**Lesson Study as Mathematics Education Research**

Lesson study is gaining interest in the mathematics education community. A sign of this new interest is the presence of two articles concerning lesson and learning studies (Runesson, 2014; Shimizu, 2014) in the *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2014). When conducted with a math education point of view, as in LSM, lesson study is a great methodological tool to study math teaching and learning. It can be done through several theoretical frameworks, for example mathematical knowledge for teaching (for eg. Ni Shuilleabhain, 2015), anthropological theory of didactics (for eg. Miyakawa & Winsløw, 2013) or theory of didactical situations, as in the LSM project. The data generated within lesson study is especially unique since it provides

---

[3] http://www.hepl.ch/cms/accueil/formation/unites-enseignement-et-recherche/did-mathematiques-sciences-nat/laboratoire-lausannois-lesson-st/plans-de-lecon.html , retrieved February 25, 2015

teachers and researchers with access to teachers' reflection and planning practices. This use of lesson study as a methodological tool brings lesson study close to didactical engineering (Artigue, 1994) despite many differences between these models (Miyakawa & Winsløw, 2009). We advocate that lesson study could lead French speaking *didactique des mathématiques* to produce new and more practice-oriented forms of didactical engineering, in the direction pointed by Perrin-Glorian (2011) about "didactical engineering for development and training" also called "second generation didactical engineering" (Clivaz, Under revision).

In another direction, didactics of mathematics theoretical framework could be a tool to examine more explicitly teachers' principles for lessons, which are often implicit in lesson study, "as regards what aspects of mathematical knowledge are at stake and how different elements in the lesson design could affect students' learning" (Miyakawa & Winsløw, 2009, p. 217).

**Lesson Study as a link between education professionals**

As stated above, lesson study intertwines research, professional development and practice aspect, but also didactic and pedagogic aspects. This interlacing is also particularly powerful since every actor in the process keeps their role when working collaboratively on the same central, visible object: a lesson. This observable object enables actors to discuss their practices together at different levels (from school based lesson study to district based or even nation based lesson study). It also makes possible international congress like WALS where teachers, teacher educators, school administrators and researchers from all over the world gather to discuss about lesson studies and also to observe live research lessons in schools.

**Conclusion**

Spreading of lesson study in Europe, particularly in mathematics, brings many opportunities. But it also brings many questions: What are the necessary adaptations from original Japanese model? How can lesson study professional development be sustainable? What are the necessary theoretical works that need to be done from a didactics point of view…? These questions, and others, make lesson study topic a particularly interesting and challenging theme for future researches.

## References


Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (Vol. 13, pp. 27-39).

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Retrieved January 3, 2015, from http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

Clivaz, S. (Sous presse). Les Lesson Study : Des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Revue des HEP et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin*(18).

Clivaz, S. (Under revision). French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a Profitable Dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies*.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson study research and practice in Mathematics Education*: Springer.

Lerman, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*: Springer Netherlands. Retrieved January 3rd, 2015, from http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher, 35*(3), 3-14. Retrieved January 3, 2015, from http://www.jstor.org/stable/3700102

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218. Retrieved January 3, 2015, from http://www.jstor.org/stable/40284618

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: the paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 185-209. Retrieved January 3, 2015, from http://dx.doi.org/10.1007/s10857-013-9236-5

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. S. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in Mathematics Education* (pp. 1-12): Springer Netherlands.

Ni Shuilleabhain, A. (2015). *Developing mathematics teachers' pedagogical content knowledge through lesson study: A multiple case study at a time of curriculum change.* (Doctor of Philosophy Ph.D.), Trinity College Dublin, Trinity College Dublin Library.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement, développement de ressources et formation des enseignants. *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la 15ème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 57-78.

Runesson, U. (2014). Learning Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 356-358): Springer Netherlands. Retrieved January 3, 2015, from http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_90

Sack, J., & Vazquez, I. (2011). The intersection of lesson study and design research: A 3-D Visualization development project for the Elementary Mathematics Curriculum. In L. C. Hart, A. S. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in Mathematics Education* (pp. 201-220): Springer Netherlands. Retrieved January 3, 2015, from http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_16

Shimizu, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360): Springer Netherlands. Retrieved January 3, 2015, from http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91

# O desenvolvimento do pensamento algébrico numa perspetiva de integração curricular

*Célia Mestre*[1]
[1]Agrupamento de Escolas Romeu Correia, celiamestre@hotmail.com

O desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser entendido numa perspetiva de integração curricular permitindo a exploração do potencial algébrico dos conteúdos matemáticos, nomeadamente dos conteúdos aritméticos. Essa perspetiva pode constituir-se como uma oportunidade para aportar significado, coerência e profundidade à aprendizagem matemática dos alunos, concebendo o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), desde os primeiros anos de escolaridade.

Entendendo o pensamento algébrico como um "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413), podem ser exploradas as relações e regularidades numéricas, as propriedades das operações, a relação de igualdade, sequências numéricas e pictóricas com intencionalidade de promover a expressão e representação da generalização. Desta forma, os conteúdos aritméticos podem tornar-se mais algébricos à medida que a generalização é construída (Kaput, 2008).

Enquadrada na abordagem de investigação denominada Early Algebra, apresenta-se uma visão da relação aritmética-álgebra que revela o caráter algébrico da aritmética e questiona a prática corrente de ensinar primeiro aritmética e depois álgebra (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2003). Neste sentido, pretende-se promover a construção dos conceitos algébricos a partir dos tópicos já existentes no currículo, considerando-se a importância da exploração de problemas contextualizados e a introdução gradual e com significado da notação algébrica formal (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007).

Nesta conferência pretende-se apresentar e discutir os resultados de uma experiência de ensino, implementada durante um ano letivo, com o objetivo de compreender como evoluiu a capacidade de generalização de alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. Foram consideradas duas vertentes do pensamento algébrico: pensamento relacional e pensamento funcional, e procurou-se compreender como evoluiu a capacidade de generalização em contextos que promoviam cada uma destas vertentes.

A experiência de ensino orientou-se por uma conjetura de dupla dimensão (Confrey & Lachance, 2000) que considerou os aspetos de conteúdo do pensamento algébrico e os aspetos didáticos que orientaram a forma como esses conteúdos foram ensinados. A dimensão didática da conjetura assumiu a pertinência de uma metodologia de ensino-aprendizagem de natureza exploratória (Baxter & Williams, 2010; Oliveira et al., 2013; Ponte, 2005), considerando a importância de uma cultura de sala de aula onde os alunos trabalharam a pares, em pequenos grupos e coletivamente e onde as discussões coletivas assumiram um papel predominante.

## Referências

Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education 13*, 7-26.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In Lester, F. (Ed.) *Second Handbook of Mathematics teaching and learning*. (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades.* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Retirado em 18 de Novembro de 2005 de http://www.nctm.org/standards/.

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referencia. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2003). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. *Studies in Mathematical Thinking and Learning Series*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

# O projeto "Desenvolver a literacia estatística": contributos para uma reflexão em torno da educação estatística

*Hélia Oliveira*[1], *Ana Henriques*[2], *Ana Paula Canavarro*[3], *Cristina Roque*[4], *João Pedro da Ponte*[5], *Raquel Santos*[6]

[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, hmoliveira@ie.ulisboa.pt

[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, achenriques@ie.ulisboa.pt

[3]Universidade de Évora, apc@uevora.pt

[4]Escola Secundária Ferreira Dias, cmmroque@gmail.com

[5]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

[6]Instituto Politécnico de Santarém, raquelfms@gmail.com

O projeto Desenvolver a literacia estatística: a aprendizagem do aluno e a formação do professor surgiu com o objetivo de aprofundar conhecimento sobre o desenvolvimento da literacia estatística desde os níveis mais elementares até ao ensino secundário, em duas vertentes: na caracterização de aspetos essenciais da literacia estatística dos alunos, nomeadamente no que diz respeito à capacidade de formular questões e recolher dados e representá-los para responder a essas questões, e na compreensão do desenvolvimento do conhecimento didático e estatístico do professor para ensinar este tema. Paralelamente, o projeto tem vindo a investigar o raciocínio estatístico dos alunos, procurando aprofundar o conhecimento sobre este conceito e das condições necessárias para o seu desenvolvimento em diversos níveis de ensino.

Neste painel apresentamos três linhas temáticas do projeto – literacia estatística, investigação estatística e raciocínio estatístico – introduzindo os principais conceitos que orientaram o trabalho já realizado. A problemática do enquadramento curricular da educação estatística e questões relativas à formação e desenvolvimento profissional do professor que ensina estatística serão também abordadas a partir da atividade desenvolvida pela equipa do projeto. Apresentamos elementos do campo empírico de alguns dos trabalhos realizados e que ilustram resultados do projeto sobre estes temas que gostaríamos de ver discutidos nesta sessão.

# Que políticas educativas para o desenvolvimento sustentado do ensino da Matemática em Portugal?

*Henrique Manuel Guimarães*[1]*, Jorge Paulo Gonçalves*[2]*, Pedro Abrantes*[3]

[1]Professor e investigador em Educação Matemática, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

[2]Professor de Matemática, Escola Secundária de Casquilhos

[3]Sociólogo, Universidade Aberta

Depois de uma intensa atividade de mudança curricular em que, entre nós, muito se debateram e confrontaram ideias e opções expressas no anterior e no atual currículo de Matemática, é bom momento para esclarecer o que de fundamental importa perspetivar para os alicerces de qualquer política educativa, numa perspetiva de contínua melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Mais de um quarto dos alunos que entram no Ensino Básico não concluem o Ensino Secundário, cerca de um terço dos que frequentam o 2.º Ciclo e seguintes tem, pelo menos, um ano de atraso e continuam a ser divulgados estudos que indicam que muitos jovens adultos não adquirem os conhecimentos matemáticos necessários para assumir uma participação ativa e informada na nossa sociedade.

Embora seja fácil reunir unanimidade em torno da ideia de não alterar 'constantemente' a política educativa e os currículos, a verdade é que ela não tem sido seguida na pártica. Nos últimos anos o currículo e os programas são alterados sem que essa mudança assente na avaliação do que estava anteriormente chegando ao ponto de se alterar um programa antes de a a implementação do anterior estar concluída.

Neste painel proponho, a partir da visão de atores diferentes, uma discussão sobre o que se consideram os alicerces 'fundamentais' de qualquer política educativa para desenvolver e apoiar sustentadamente o ensino da Matemática em Portugal. Indico, em seguida, algumas das questões orientadoras do debate:

1. Em Portugal existe uma tradição de desenvolver documentos curriculares oficiais detalhados e longos. Noutros países, pelo contrário, os currículos oficiais são documentos com poucas páginas, que indicam o que de essencial se perspetiva para a educação matemática dos alunos. Como se posiciona em relação a estas duas realidades? Que caminho propõe e porquê em relação ao 'detalhe' do currículo oficial

em Portugal? Ou será que o ‘detalhe’ não é um aspeto importante? Em alternativa o que destacaria?

2. Nos vários currículos oficiais tem havido opções diferentes no que se refere ao lugar e papel do rigor e formalismo no ensino e aprendizagem da Matemática. Como vê este aspeto? Que conjunto de princípios propõe para orientar o ensino da Matemática no que se lhe refere?

3. O princípio de que importa avaliar uma medida educativa antes de a alterar, reúne um grande consenso teórico mas é muitas vezes esquecido na prática. Como interpreta esta contradição e como perspetiva uma forma de a ultrapassar?

4. A necessidade de que todos compreendam matemática deve ser uma ideia central em que assenta o currículo de Matemática. Como perspetivar e concretizar, a este nível, a educação em matemática dos jovens portugueses?

5. O desenvolvimento tecnológico e a efetiva participação numa sociedade democrática, exigem a formação de cidadãos capazes de interpretar e de usar com flexibilidade e espírito crítico a informação, de trabalhar em equipa, de se adaptar a novos contextos, de usar novas tecnologias ou de resolver problemas. Em que medida a matemática escolar deve ter em conta estas exigências sociais?

6. Que aspetos devem ser alterados com vista a melhorar a qualidade da formação em matemática dos jovens portugueses? Se lhe pedissem para indicar dois/três princípios que tivessem de estar presentes em qualquer currículo de Matemática, o que destacava?

7. Numa perspetiva de integração de esforços educativos, importa perceber a visão dos pais sobre qual deve ser a educação matemática dos seus filhos. O que defende a este nível?

O painel organiza-se a partir de dois níveis:

- Intervenções pré registadas em vídeo de participantes que representam diferentes organizações ligadas ao ensino da Matemática ou que se inserem em diferentes setores da nossa sociedade.

- Intervenções presenciais de participantes no painel e que comentam as intervenções pré registadas e avançam a sua visão sobre diferentes aspetos ligados ao tema.

Painel

**Participantes via registo prévio em vídeo:**

Ana Maria Bettencourt (Ex presidente do CNE); António Melo Pires (Presidente do conselho de gerência da Volkswagen Autoeuropa); Beatriz Pedroso (Aluna da Escola Secundária Pedro Nunes); José Pedro Costa (Aluno da Escola Secundária de Palmela); Leonor Santos (Presidente da SPIEM); Lurdes Figueiral (Presidente da APM); Pedro Dominguinhos (Pai); Valentino Silva (Pai); Vasco Lemos (Aluno da Escola Secundária de Palmela).

# O formalismo matemático num contexto de utilização da tecnologia[1]

*Helena Rocha*[1]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

**Resumo**. *A tecnologia e a forma como esta tende a enfatizar o intuitivo e a relegar para segundo plano o formal e a demonstração matemática são o foco deste artigo. As conclusões alcançadas sugerem que é possível colocar aos alunos situações onde estes se possam aperceber da vantagem de recorrer tanto a abordagens mais formais como a abordagens mais intuitivas e isto mesmo quando a tecnologia é uma realidade em sala de aula. Sugere ainda que a realização de demonstrações pode, entre outros aspectos já identificados na literatura, dar um contributo importante para a compreensão de aspectos basilares da Matemática.*

**Abstract**. *The technology and how it tends to emphasize the intuitive and overshadow calculus and mathematical proof are the focus of this paper. The conclusions reached suggest that tasks where students might realize the usefulness of calculus as well as of more intuitive approaches are possible even when the technology is a reality in the classroom. They also suggest that proof may, among other things already identified in the literature, make an important contribution to the students' understanding of fundamental aspects of mathematics.*

**Palavras-chave**: *tecnologia; formalismo matemático; demonstração*

## Introdução

A tecnologia é frequentemente reconhecida pelo seu potencial para o ensino e aprendizagem da Matemática. São em particular bastante valorizadas as possibilidades, que esta vem magnificar, de realizar com os alunos um trabalho de natureza investigativa ou exploratório. Os alunos passam a poder experimentar diferentes relações matemáticas, reflectindo sobre elas enquanto procuram identificar regularidades e formulam conjecturas. A facilidade e rapidez com que se torna possível observar muitos casos de determinada situação vêm, contudo, trazer a convicção quanto à veracidade da conjectura formulada e potenciar um sentimento de que nada mais é necessário para estarmos certos dela. A demonstração matemática tende assim a surgir como algo facilmente dispensável. Também a acessibilidade e simplicidade aparente da

---

[1] Trabalho desenvolvido no âmbito do projecto A noção da demonstração matemática (PTDC/MHC-FIL/5363/2012) financiado pela FCT/MEC.

representação gráfica vem tornar o analítico em algo contornável e cuja necessidade passa a ser possível questionar. O domínio do cálculo, que numa abordagem sem tecnologia era muitas vezes a única opção possível, converte-se assim em algo dispensável. Passa a ser possível questionar o interesse de aprender e ensinar determinadas manipulações algébricas, bem como o nível de fluidez e treino que deve ser exigido aos alunos relativamente a estas. São também inevitáveis as questões em torno da forma como o professor pode mostrar aos seus alunos o interesse e a importância que a linguagem matemática formal e a demonstração matemática continuam a ter actualmente num contexto onde o acesso à tecnologia é uma realidade. Neste artigo abordo estas questões, procurando compreender, no âmbito do estudo das funções:

- Qual o papel do formalismo/demonstração num contexto de utilização da tecnologia, na perspectiva do professor;
- Como é que o professor enquadra o formalismo/demonstração no trabalho da aula e como o procura tornar relevante para os alunos.

**Quadro teórico**

O que é ao certo uma demonstração matemática é algo que, de acordo com Steele e Rogers (2012), não é consensual nem mesmo entre os matemáticos. Segundo este autor a demonstração "é um argumento matemático que é geral para uma classe de ideias matemáticas e estabelece a verdade de uma afirmação matemática baseando-se em factos matemáticos que são aceites ou que tenham sido previamente comprovados" (p. 161). Em contexto de sala de aula, Stylianides e Ball (2008), referem-se-lhe como um argumento matemático que usa conhecimentos matemáticos considerados válidos pelos alunos e que não carecem de justificações adicionais, que adopta raciocínios considerados válidos e já conhecidos pelos alunos ou cuja compreensão se encontre ao seu alcance, e que é comunicada de forma adequada que seja igualmente do conhecimento dos alunos ou cuja compreensão esteja ao seu alcance.

A dificuldade em conseguir que os alunos compreendam a necessidade e a importância da prova em Matemática é, segundo deVilliers (1999), bem conhecida de todos os professores do ensino secundário. Esta dificuldade acentua-se quando a tecnologia está envolvida pois, segundo Hsieh et al. (2012), o carácter dinâmico usualmente oferecido por esta permite a realização de trabalho de natureza experimental, que potencia a descoberta de propriedades e a formulação de conjecturas. Os alunos passam a poder com toda a facilidade experimentar e analisar vários casos, reflectindo em torno de importantes ideias matemáticas e, consequentemente, alcançando um maior nível de compreensão (Goos & Bennison, 2008). Adquirem assim a possibilidade de formular as suas próprias perguntas e de prosseguir formulando hipóteses e testando-as, procurando enquadrar os resultados na *teoria* que estão a tentar formular (Grant & Searl, 1996).

A forma como a análise de diversos casos se torna possível, acaba por originar nos alunos um sentimento de confiança relativamente à veracidade das conclusões que estabelecem com o apoio da tecnologia, que frequentemente é potenciada pela forma como os alunos se habituaram a ver a Matemática validada de forma externa, seja pelo professor, pelo manual ou até pelos pais (Tall et al., 2012). A necessidade de demonstrar a conjectura formulada pode assim não ser sentida. Mas se inferir uma conclusão a partir da reflexão em torno de alguns casos particulares é uma actividade importante, esta é sem dúvida distinta da demonstração (Cabassut et al., 2012). Enfatizar junto dos alunos a necessidade e a importância da demonstração implicará então a procura pela função desta.

DeVilliers (2012) considera que, tradicionalmente, a justificação ou o convencimento sobre a validade de uma conjectura são encaradas como a principal função da demonstração, sendo que Knuth (2002) considera que este é mesmo o único papel que a maioria dos professores lhe reconhece. Nas últimas décadas esta visão estreita do papel da demonstração tem vindo a ser criticado por autores como Reid (2011), que entende que esta tem assumido igualmente outros papéis importantes para os matemáticos e que pode também assumir um papel de grande valor didáctico em sala de aula.

Para Mejía-Ramos (2005), a procura por uma mais profunda compreensão é o que verdadeiramente move os matemáticos e também o que os leva a rejeitar as “alegadas” demonstrações realizadas por via computacional. E isto apesar de, como realça Hanna (2014), a compreensão ser algo cujo entendimento permanece relativamente indefinido. Por seu turno Boavida (2001) refere-se ao papel da demonstração como um meio e não um fim, englobando simultaneamente a validação e a compreensão. Na realidade actual, em que facilmente se encontram acessíveis sistemas com cálculo algébrico simbólico e programas de geometria dinâmica, é frequente que se consiga uma validação da conjectura com um considerável grau de confiança (deVilliers, 2012). Como tal, torna-se difícil apontar a necessidade de validação como a única necessidade.

As tecnologias permitem o convencimento relativamente à validade da conjectura contudo, em geral, não permitem a compreensão da razão porque assim é (deVilliers, 2012). E esta não parece ser uma questão exclusiva dos matemáticos. Com efeito, um estudo conduzido por Healy e Hoyles (2000), no âmbito do ensino da álgebra, sugere que os alunos preferem argumentos que simultaneamente os convençam e justifiquem a relação em causa. Uma conclusão que sugere que a explicação é algo importante para os alunos e que pode mesmo ser um recurso digno de um maior aproveitamento e exploração no ensino da Matemática. Curiosamente, a situação parece ser interpretada de forma um pouco diferente por alguns professores. Com efeito, como referem Biza, Nardi e Zachariades (2010), enquanto todos os professores reconhecem o papel de verificação da demonstração, o mesmo já não acontece relativamente ao seu papel ao nível da compreensão, sendo que: alguns professores tendem a verificar a validade de uma determinada relação matemática com base em exemplos, mesmo quando acabaram de a demonstrar; e consideram que os argumentos baseados em casos concretos ou em representações visuais têm maior potencial para convencer.

Mas existem outros papéis que também são atribuídos à demonstração. Boavida (2001) refere-se à demonstração como um processo de descoberta. Segundo a autora, existem numerosos exemplos, na história da Matemática, de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos; de facto, é completamente improvável que alguns resultados (como, por exemplo, as geometrias não euclidianas) pudessem alguma vez ter sido encontrados por mera intuição. Aborda ainda o papel da demonstração como processo de sistematização, considerando que esta revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que a intuição pura não seria capaz de realizar. Por seu turno Davis e Hersh (1983) encaram a demonstração como um desafio intelectual, considerando que esta cumpre uma função gratificante e de realização própria. A demonstração é portanto um campo de teste para a energia intelectual e o engenho matemático.

**Metodologia**

A investigação que aqui se apresenta faz parte de um estudo mais abrangente e adopta uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, envolvendo a realização de um estudo de caso sobre a professora Teresa. A recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de aulas e recolha documental. Foram realizadas entrevistas semi-estruturadas antes e depois de cada aula observada, com a intenção de conhecer o que preparara e as razões base dessas opções (entrevistas pré-aula) e o balanço que fazia da forma como a aula decorrera (entrevistas pós-aula). Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das aulas observadas e recolhidos documentos como fichas de trabalho e outros materiais disponibilizados pela professora aos alunos. A análise de dados revestiu-se essencialmente dum carácter descritivo e interpretativo.

Teresa é uma professora com mais de 30 anos de experiência profissional, que no decorrer deste estudo leccionava o tema Funções na disciplina de Matemática A a uma turma do 10.º ano de escolaridade de uma escola da grande Lisboa e que possui uma longa experiência de utilização de calculadoras gráficas com alunos e um profundo conhecimento do funcionamento da máquina.

**Resultados**

Nesta secção apresento uma das tarefas (ver anexo) propostas pela professora e onde, para além de formularem uma conjectura relativamente a uma situação matemática, é pedido aos alunos a demonstração da sua conjectura.

Teresa inicia a aula informando os alunos que vão realizar uma investigação e que esse trabalho vai ser realizado a pares. Enfatiza bastante este último aspecto, realçando a importância de o trabalho efectivamente ser conjunto e determinando que escolherá os registos efectuados por um elemento de cada par, que recolherá no final da aula e levará para ver em casa.

Dá depois algumas indicações relativas ao funcionamento da calculadora e que considera que os alunos vão necessitar no decorrer da tarefa, após o que apresenta as suas expectativas para a aula, indicando quais as questões que considera que serão fáceis, quais as que poderão ser consideradas mais difíceis e até onde pretende que todos façam:

> Prof - O objetivo de cada par é fazer tudo até ao ponto 6. Até ao ponto 5 eu acho que é fácil. Devem fazer bem, o mais depressa que conseguirem. O 6 já não será tão fácil, (…) nesta ficha no ponto 6 pretende-se que se prove. Eu penso que a prova não é muito difícil e portanto tenho alguma esperança que muitos consigam fazer a demonstração. O "indo mais longe", que vem nos pontos 7 e 8, também tenho esperança que dois ou três pares ainda consigam fazer. O ponto 7 e o 8 se algum conseguir é óptimo porque eu não tenho esperança que façam, que tenham tempo aqui na aula, mas tenho esperança que depois façam em casa. Portanto, o objectivo é todos fazerem até ao 6, incluindo a demonstração, alguns fazerem o 7 e quem sabe… (aula)

Antes de incentivar os alunos a dedicarem-se ao trabalho, aborda ainda a questão da demonstração e da respectiva importância em Matemática:

> Prof - O 6 (…) é uma demonstração e eu gostava de falar um bocadinho sobre isto. (…) Em Matemática nós muitas vezes experimentamos. Já fizemos isso aqui com as funções. Estudámos famílias de funções e depois, das duas uma, ou o professor dá alguma informação a dizer isso é mesmo verdade em todos os casos e vocês acreditam, também consultam o livro etc., e às vezes provamos. Fazemos aquilo que os matemáticos fazem sempre. Em Matemática a prova, a demonstração, é a essência da disciplina, portanto não podemos esquecê-la. (aula)

A partir deste momento, toda a aula decorre centrada no trabalho dos alunos, com a professora a circular entre os grupos e a corresponder às suas solicitações.

Ao surgirem as primeiras conjecturas, Teresa sente a necessidade de alertar para o número reduzido de exemplos que foram ponderados na sua formulação, mas os alunos não parecem muito sensíveis aos seus comentários e só a dúvida sobre a veracidade da conjectura parece ser suficiente para que estes considerem analisar mais alguns casos:

> Prof- Estão a formular uma conjectura apenas com base em dois exemplos?
> Aluno- Oh stora, mas nós já vimos.
> Prof- E então o que é que repararam?
> Aluno- Que corresponde à multiplicação, só que tem que ser menos este vezes este. (…) Tem que ser menos, depois abre parênteses, -5 vezes 3.
> Prof- Ok, óptimo. É a vossa conjectura.
> Aluno- (…) Mas assim dá -15. Está mal. Por isso é que eles dizem a seguir se os pontos estiverem do mesmo lado do eixo. Não é stora?
> Prof- Não sei. (…) Só experimentaram com dois exemplos, estão a tirar as conclusões apenas com dois… podem fazer mais, se estão com dúvidas. Depois confirmam se isso que estão a fazer está certo ou não.
> Aluno- É quantos pares, stora?

> Prof- Numa investigação não há limite. Fazem alguns, quando conseguirem tirar a conclusão… dois é bem pouco para fazer. Acho eu, não é? (aula)

Nem todos os alunos reagem desta forma. Alguns consideram que quantos mais exemplos fizerem melhor, mas mesmo assim parecem sentir algum desconforto por não lhes ser indicada uma quantidade:

> Aluna - Eram quantos [exemplos] stora?
> Prof - É os que quiserem.
> Aluna - Os que quisermos. Quantos mais melhor… (aula)

Mas em alguns casos, para além do número de exemplos considerado, a conjetura parece ser formulada de uma forma algo irrefletida, levando Teresa a questionar os alunos de modo a que estes sintam a necessidade de ponderar melhor a conclusão a que chegaram:

> Aluno - Já concluí uma coisa. A ordenada na origem é sempre o $x1\times x2$ e depois o declive do segmento é a diferença entre um e outro.
> Prof - $x1\times x2$? Então quando é que é $3\times(-5)$?
> Aluno - Não.
> Prof- Diz lá, quanto é que é?
> Aluno -15.
> Prof - Dá -15 e ali está?
> Aluno - 15.
> Prof - $3\times(-4)$?
> Aluno - Dá -12. Então… pronto, é o inverso.
> Prof - O inverso?
> Aluno - Sim.
> Prof - É o inverso?
> Aluno - Sim. É o módulo?... Pode ser menos. A ordenada na origem é menos ou…
> Prof- Então vamos lá… mas escrevam as conclusões. (aula)

A demonstração foi a fase final do trabalho realizado na aula pelos alunos pois, tal como previsto por Teresa, nenhum conseguiu ir para além desta no tempo disponível.

Esta foi uma fase do trabalho em que surgiram dificuldades, algo que aliás Teresa já antecipava e que, tal como aconteceu, pretendia abordar de forma individual, apoiando os alunos à medida que os problemas surgiam:

> Prof - A prova, mesmo no caso mais simples, ainda não é simples para estes miúdos do 10.º ano. Tenho que ir dando umas dicas no lugar e tal e há-de haver uns que fazem e há-de haver outros que demoram muito tempo. (pré-aula)

Associada à concretização da demonstração surgem, no entanto, outras questões. A primeira delas respeita ao significado do termo conjetura, com diferentes alunos a questionarem o seu significado, mesmo depois de já terem elaborado a sua conjetura:

> Aluna 1 - Oh stora o que é fazer a conjetura?
> Prof - A conjetura é exatamente isso. É o que eu penso que será verdade. Depois a seguir tenho que provar. Penso que é verdade. Com a Geometria fizemos isso. Com isto que temos é verdade (refere-se aos exemplos considerados pelas alunas) e isso permite-me conjeturar, permite-me pensar que será sempre assim. Só quando demonstrar é que tenho a certeza se é mesmo sempre assim ou não.
> (…)
> Prof - O que é a conjetura? O que é que vocês querem conjeturar?
> Aluna 2 - Oh stora pois, o que é que é suposto dizermos com conjetura? (aula)

Mas entender o significado do termo demonstração parece ser ainda mais complexo. Com efeito, alguns alunos parecem não sentir a necessidade do trabalho analítico genérico, quando os casos que analisaram lhes deixam a convicção da veracidade da sua conjetura:

> Aluna - E aqui no 6, se nós já mostrámos aqui os cálculos (aponta os exemplos registados mais acima)… Posso dizer que isto prova a validade da nossa conjetura.
> Prof - Prova?
> Aluna - Não? (aula)

Efetivamente, em vez de procurar demonstrar a sua conjectura, o que muitos alunos fizeram foi executar analiticamente os cálculos para o declive e a ordenada na origem dos casos que tinham considerado graficamente. Ainda assim têm dúvidas se será mesmo isso o pretendido:

> Aluna - Não estamos a perceber a 6.
> Prof - A 6 é a demonstração.
> Aluna - Fazemos as contas? Metemos assim as contas.
> Prof - Claro. Mas puseram para estes três casos. Agora uma demonstração (interrompem)
> Aluna - Ah! Temos que fazer mais!
> Prof - Uma demonstração, é assim, só está demonstrado se eu tiver demonstrado para quantos casos?
> Aluna- Para muitos.
> Prof - Quantos? Quantos?
> Aluna- Infinitos.
> Prof - Infinitos. (interrompe para ralhar com a turma e depois dá uma ajuda às alunas indicando a forma genérica dos pontos)
> Aluna - É complicado, stora.

> Prof - É complicado… mas a gente não desiste do complicado assim à primeira vista. (…) A demonstração tem que ser analítica que aí na calculadora não podem… Podem experimentar muitos, mas não podem experimentar infinitos. (aula)

Teresa considera contudo que esta é uma abordagem natural dos alunos, uma vez que vem na sequência do que têm vindo a fazer:

> Prof - Eu vi não sei quantos, agora vou ver as fichas, mas pronto, houve alguns que na demonstração o que é que eles fizeram? Foram fazer analiticamente, tratar analiticamente os exemplos. (…) Eh pá, e isto corresponde no fundo àquilo que nós temos feito noutras situações. Não lhe chamamos demonstração, evidentemente, mas corresponde a um trabalho que eles têm feito. Eu tenho tido a preocupação de trabalharmos na calculadora e trabalharmos analiticamente e portanto eu acho que eles fizeram uma transposição dessas situações que temos feito, aqui para isto. (pós-aula)

A articulação entre o gráfico e o analítico é, assim, algo a que Teresa afirma dar atenção e que aborda nos desafios que deixa aos alunos no final desta tarefa e que pretende explorar noutra aula. Com efeito, estas últimas questões vêm precisamente colocar o foco sobre a opção entre o gráfico e o analítico. A professora considera que os alunos têm geralmente uma preferência pelo gráfico em detrimento do analítico, achando que este último é apenas cálculo sem grande utilidade. Neste caso, contudo, o analítico vem oferecer a abordagem mais simples e rápida à questão, embora não necessariamente fácil:

> Inv - No “ir mais longe” a parábola passa a ser outra. Achas que é fácil experimentando com a calculadora descobrir a relação?
> Prof - Não, acho que não.
> Inv - É que eu não consegui. Eu encontrei-a, mas encontrei-a analiticamente. Também é verdade que me fartei e que resolvi que fazia analiticamente.
> Prof - Exatamente. Mas a intenção também é um bocadinho essa. É para perceberem que há coisas em que não é preciso irem ao cálculo, mas há outras em que o cálculo tem alguma utilidade. E este cálculo ainda é difícil para eles, não é? Mas eu prefiro ir trabalhando assim o cálculo, que é para eles perceberem que tem alguma vantagem fazer algum cálculo… (pré-aula)

A noção de que para se demonstrar é necessário considerar todos os casos possíveis e não apenas alguns é algo que entende necessitar de ir sendo trabalhado ao longo do tempo:

> Prof - Eu já esperava que eles tivessem dificuldades na demonstração. (…) Pronto, a ideia é exactamente ir fazendo esta discussão com eles… que depois eu, como lhes dei até 4ª feira, portanto provavelmente vai ser na aula

de 4ª feira, devolvo as fichas e ao devolver depois fazemos um bocadinho a discussão outra vez da diferença entre experimentar num, dois, três casos. (…) E vou discutir com eles principalmente esta questão: o que é que significa demonstrar. O facto de terem que incluir os exemplos que já fizeram, mas terem que provar para todos os casos e, neste caso, eram infinitos. (pós-aula)

Neste sentido, expressa mesmo a sua intenção de não encerrar a questão já. Discutindo com os alunos a demonstração no caso mais simples e deixando os desafios em aberto, para serem apresentados mais tarde à turma por algum dos alunos que entretanto os consiga resolver e numa altura em que o cálculo necessário à demonstração esteja a ser alvo de atenção nas aulas:

Prof - Vou fazer a demonstração neste caso, só para o $f(x)=x^2$, e depois estas do "indo mais longe" ainda vou continuar a deixá-las como desafios. Quando eles conseguirem podem-me entregar. (…) Isto exige algum cálculo que eles ainda nunca trabalharam porque no básico não se trabalha o cálculo até este nível. À medida que formos agora estudando os polinómios… É também para os sensibilizar que o cálculo é preciso, em vez de ser só depois nos polinómios o cálculo pelo cálculo. Portanto, mais à frente, daqui a uns tempos, depois de alguns fazerem, até vou pedir a um para fazer a apresentação à turma, logo se vê, quando estivermos a trabalhar o cálculo nos polinómios. (pós-aula)

Depois de tentar levar os alunos a perceberem que para que fique provado é necessário que todos os casos sejam considerados e não apenas alguns, Teresa opta por ir ajudando os alunos a considerar pontos genéricos que lhes permitam efectivamente demonstrar o pretendido:

Prof - Portanto no 6 o que eu estou a perguntar é assim: para estes pontos isto é verdade, então agora seguindo este raciocínio, se o ponto não for este… Tu tens dois pontos, então e se for um ponto 1, por exemplo, de coordenadas (x1, y1) e um ponto 2 de coordenadas (x2, y2). Agora este y1 e este y2 não são quaisquer. Porquê? Estes pontos também pertencem à parábola. E portanto qual é, quanto é que vale o y1? Quanto é que vale o y2? (ajuda o aluno a chegar à resposta) Então este ponto é ($x1$, $x1^2$) e este ($x2$, $x2^2$). (…) Será que agora consegues demonstrar? Ora demonstrar, tu tens que ir usar o que tu sabes. Tu sabes calcular o declive de uma recta a partir dos pontos, certo? Então vamos tentar fazer.
Aluno- Mas aqui, nós aqui em cima já tínhamos mostrado isso.
Prof - Mostraram, mas isso é só para essa. Se tu mostrares para este caso, se fizeres exactamente o mesmo raciocínio, só que os cálculos são um bocadinho mais complexos, tens que fazer com calma, o mesmo raciocínio mas para um ponto que é qualquer, não mostraste para um, mostraste para quantos pontos?
Aluno- Para infinitos. (…)

Prof - Então se tu conseguires fazer exactamente o mesmo raciocínio mas para este caso… (aula)

**Conclusão**

A tecnologia e, concretamente, a calculadora gráfica são amplamente utilizadas pela professora participante neste estudo. Os alunos são confrontados com tarefas em que lhes é pedido que explorem relações e formulem conjecturas e, por vezes, são também confrontados com momentos em que lhes é pedida uma demonstração. Esta última tarefa parece ser proposta com a intenção de permitir aos alunos o contacto com importantes noções matemáticas, como é o caso da de conjectura e demonstração. Um papel que para além da validação da conjectura, como referido por diversos autores, vai para além disso, incluindo o que eu designaria por um papel de compreensão da natureza da Matemática. Trata-se pois de um papel com características um pouco diferentes daqueles que é possível encontrar na literatura, mas que não é menos importante.

A preocupação relativamente ao uso da tecnologia e à convicção da professora de que os alunos acabam por ter uma preferência pelas abordagens gráficas em detrimento das analíticas, conduz também a uma cuidada selecção de tarefas. É assim possível identificar uma reflexão por parte da professora que deliberadamente opta por colocar aos alunos um desafio onde a abordagem gráfica acaba por não ser a mais eficiente. Consegue assim confrontar os alunos com situações onde o cálculo e um trabalho matemático mais formal surgem não só como úteis, mas também como a abordagem mais eficiente.

Assim, este estudo sugere que é possível colocar aos alunos situações onde estes se possam aperceber da vantagem de recorrer tanto a abordagens mais formais como a abordagens mais intuitivas e isto mesmo quando a tecnologia é uma realidade em sala de aula. Sugere ainda que a realização de demonstrações pode, entre outros aspectos já identificados na literatura, dar um contributo importante para a compreensão de aspectos basilares da Matemática.

**Referências**

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2010). Teachers’ views on the role of visualization and didactical intentions regarding proof. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F.

Arzarello (Eds.), *Cerme 6 - Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 261-270). Paris: INRP.

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11-15.

Cabassut, R., Conner, A., Ísçimen, F., Furinghetti, F., Jahnke, H., & Morselli, F. (2012). Concepts of proof – in research and teaching. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (pp. 169-190). Dordrecht: Springer.

Davis, P., & Hersh, R. (1983). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

DeVilliers, M. (1999). *Rethinking Proof with Sketchpad*. NY: Key Curriculum Press.

DeVilliers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras*, 33(3).

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 102-130.

Grant, F., & Searl, J. (1996). Mathematical modelling with a graphics calculator. In P. Gómez & B. Waits (Eds.), Roles of Calculators in the Classroom (pp. 71-86). Retirado a 12 de Abril de 1998 de http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/Base/Abstracts-1.html.

Hanna, G. (2014). The width of a proof. *PNA*, 9(1), 29-39.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 396‒428.

Hsieh, F., Horng, W., & Shy, H. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (pp. 279-304). Dordrecht: Springer.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379‒405.

Mejía-Ramos, J. (2005). Aspects of proof in mathematics research. In D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *25*(2). St. Martin's College, Lancaster: Open University.

Reid, D. (2011). Understanding proof and transforming teaching. *Proceedings of North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Reno, NV: PME-NA.

Steele, M., & Rogers, K. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159-180.

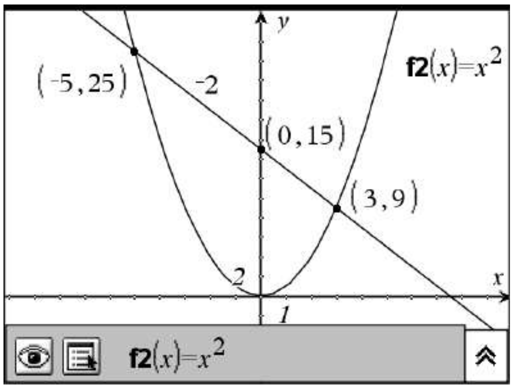
Stylianides, A., & Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307–332.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng,Y. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (pp. 13-49). Dordrecht: Springer.

**Anexo**

NO EIXO DA PARÁBOLA

Considera a função $f(x) = x^2$.




**1.** Representa-a na janela: $x\epsilon[-10, 10]$ e $y\ \epsilon[-8, 30]$.

**2.** Escolhe dois pontos da parábola, um de cada lado do eixo vertical. Por exemplo, os pontos $X_1$ e $X_2$ de abcissas 3 e –5. Traça a recta que une estes dois pontos.

Regista a ordenada na origem e o declive desta recta.

*Nota Ti-nspire:* b 7: Pontos e rectas (Ponto sobre um objecto; Recta; Ponto de Intersecção)

b 1: Acções, 7: Coordenadas e Equações

b 8: Medição, 3: Declive

**3.** Repete o processo para outros pares de pontos com abcissas à tua escolha e preenche esta tabela.

| | |
|---|---|
| Abcissa de $X_1$ | 3 |
| Abcissa de $X_2$ | –5 |
| Declive do segmento | |
| Ordenada na origem | |

**4.** Faz uma conjectura sobre a relação entre o declive do segmento e as abcissas de $X_1$ e de $X_2$.

**5.** Faz uma conjectura sobre a relação entre a ordenada na origem e as abcissas de $X_1$ e de $X_2$.
As conjecturas serão válidas se os dois pontos estiverem do mesmo lado do eixo? Confirma.

**6.** Demonstra a validade das tuas conjecturas.

**Indo mais longe**

**7.** Que aconteceria com a função $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$?

## Ainda mais longe

**8.** E no caso geral da função $f(x) = ax^2 + bx + c$?

# A receptividade de professores e alunos ao uso de tecnologias móveis em sala de aula

*Fábio Aparecido Barbosa*[1], *Valdeni Soliani Franco*[2]
[1]Professor da Educação Básica – Núcleo de Maringá, fabioapbarbosa@seed.pr.gov.br
[2]Universidade Estadual de Maringá – Paraná – Brasil, vsfranco@gmail.com

**Resumo.** *Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa realizada com 33 (trinta e três) professores da Educação Básica em uma cidade ao norte do Estado do Paraná-Brasil, que participaram de um curso denominado "Algumas metodologias para uso das tecnologias móveis em sala de aula", no qual foram apresentados vários sites, ensinando como criar blogs de discussão, bem como foi apresentado aplicativos para smartphones e tablets e possibilidades de trabalho em sala de aula, por meio de suas utilizações. O objetivo da pesquisa foi analisar a receptividade dos professores relativamente ao uso de smartphones e tablets na aula de Matemática, bem como analisar as potencialidades que referem ao uso destas tecnologias móveis com os alunos. Chegou-se à conclusão que todos os professores participantes foram receptivos ao uso das tecnologias móveis, mas ficaram divididos em dois grupos com características de receptividade diferentes. Em um dos grupos, os professores são receptivos, mas ficam na zona de conforto, não arriscando utilizá-las, pelo menos por enquanto, em suas aulas. No outro grupo de professores, percebeu-se que os participantes vão para a zona de risco, utilizam as tecnologias móveis em suas aulas e relatam os resultados obtidos.*

**Abstract.** *This paper presents the survey results of 33 Basic Education teachers at a north of the State of Paraná (Brazil) town who have participated in a course called "Some methodologies for mobile technologies use in the classroom" in which were presented several sites, teaching how to create discussion blogs, and it was also presented smartphones and tablets applications apps and their classrooms works opportunities. The objective of the research was to analyze the receptivity of teachers on the use of smartphones and tablets in the mathematics classroom, and analyze the potential that relate to the use of these mobile technologies with students. Reached the conclusion that all participating teachers were receptive to the use of mobile technologies, but were divided into two groups with different receptivity characteristics. One group, teachers are receptive, but are in the comfort zone, risking not use them, at least for now, in their classes. In another group of teachers, it was noted that the participants go to the danger zone, use mobile technology in their classes and report the results.*

**Palavras-chave**: *Novas tecnologias; tablets e smartphones; uso em sala de aula; recepção de professores e alunos.*

## Introdução

Vivemos hoje numa cibercultura. De acordo com Silva (2008, p. 63), "Cibercultura quer dizer modos de vida e de comportamentos assimilados e transmitidos na vivência histórica e cotidiana marcada pelas tecnologias informáticas, mediando a comunicação e a informação via Internet". Trata-se de uma mudança paradigmática na forma como acedemos à informação e nos relacionamos com o conhecimento, mediado pelo espaço virtual. Conforme Araujo e Rossi (2002, p. 29):

> Dois mil anos depois de Cristo, nos deparamos com o ressurgimento do ágora, não mais um espaço ao ar livre, mas sim um espaço virtual [...]. O novo "ágora eletrônico" agora responde pela alcunha de Ciberespaço [...] um ambiente; não um lugar em particular, mas sim todos os lugares ao mesmo tempo.

Associada à internet, a tecnologia dos dispositivos móveis vem conquistando toda sociedade, principalmente jovens e crianças e, consequentemente, nossos alunos. A presença desses aparelhos na escola, smartphones e tablets, é cada dia mais evidente. É comum encontrar alunos relacionando-se por meio de redes sociais, na própria sala de aula. Assuntos antes discutidos nas rodinhas de amigos, agora são socializados na internet, onde fazem seus comentários, "curtem" suas ideias, angústias, suas alegrias, enfim, o que acontece com seu ciclo de amigos da escola e da rede.

Mas será que a escola está a tirar partido da presença desses aparelhos? É importante saber como este recurso tecnológico poderá contribuir no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos pois, no presente, a integração na sala de aula das tecnologias móveis, munidas de fácil acesso à internet, está ainda numa fase muito incipiente e coloca grandes desafios.

E não poderia deixar de ser assim. Recorremos a uma crônica no jornal Folha de São Paulo em 20 de maio de 2010, denominada "A internet e a roda", em que Carlos Heitor Cony conclui com a seguinte frase, "como a roda, a internet apenas nos facilita o caminho, mas não nos aponta um destino" (Cony, 2010, p. 2). A pergunta natural que surge, no contexto da Educação, é a seguinte: encontra-se o professor preparado para indicar o "destino" para seus alunos no que diz respeito a um uso adequado da internet, e, em especial, recorrendo às tecnologias móveis?

Este texto apresenta resultados de uma pesquisa realizada com professores de Matemática que participaram de um curso de formação denominado "Algumas metodologias para uso das tecnologias móveis em sala de aula". O objetivo da pesquisa foi analisar a receptividade dos professores relativamente ao uso de smartphones e tablets na aula de Matemática, bem como as potencialidades que referem ao uso destas tecnologias móveis com os alunos.

**Referencial teórico**

Toschi (2012) observa que atualmente os dispositivos móveis como tablets e smartphones, com acesso à internet, permitem a mobilidade física, o que os distingue dos computadores ou dos microcomputadores de mesa, permitindo assim uma relação entre a realidade virtual e a realidade concreta em tempo real e acessível sem restrições a todos os alunos.

Em relação ao uso das novas tecnologias, Lovis e Franco (2013, p. 151), afirmam que "[...] parece haver uma resistência natural ou certa idolatria. A introdução de toda tecnologia traz consigo novos temores, ansiedades e fantasias". No caso das tecnologias móveis, esta resistência do professor pode ser acentuada, pois as ações e foco dos alunos facilmente podem escapar ao controlo do professor.

Assim, perante novas tecnologias como as móveis, o professor pode não se mostrar receptivo, ou, sendo receptivo, pode sê-lo com diferentes graus de disponibilidade para arriscar a inclusão destes na sua prática de ensino (Borba & Penteado, 2001). Podemos considerar duas situações distintas: as dos professores que aderem mas ficam na sua zona de conforto, na qual quase tudo é conhecido, previsível e controlável; e a dos professores que avançam para uma zona de risco, na qual se atrevem a alterar as práticas instituídas, desenvolvendo efetivamente novas ações que avaliam recorrentemente:

> Conforto aqui está sendo utilizado no sentido de pouco movimento. Mesmo insatisfeitos, e em geral os professores se sentem assim, eles não se movimentam em direção a um território desconhecido [...] esses professores nunca avançam para o que chamamos de uma *zona de risco*, na qual é

> preciso avaliar constantemente as consequências das ações propostas. (Borba & Penteado, 2001, pp. 54-55)

Muitos professores preferem ficar na zona de conforto e são várias as razões que o justificam. Por exemplo, a pesquisa de Lovis (2009) revela que os professores acham importante o uso de softwares nas aulas de Matemática, mas ainda não sentem segurança necessária para que esse uso seja efetivamente aplicado nas escolas. Também Lovis e Franco (2013) referem que na pesquisa que conduziram, muitos professores explicavam a não utilização de softwares específicos da Matemática pelo facto de não os conhecerem ou porque não sabiam como ensinar um conteúdo usando um dado *software*.

Penteado (1999) acrescenta mais fontes de insegurança que justificam uma adesão passiva do professor às tecnologias, nomeadamente a incerteza que criam na dinâmica da aula:

> [...] em geral, o professor enfrenta os desafios impostos pela profissão e busca criar alternativas, porém a introdução do computador na escola altera os padrões nos quais ele usualmente desenvolve sua prática. São alterações no âmbito das emoções, das relações e condições de trabalho, da dinâmica da aula, da reorganização do currículo, entre outras. (p. 298)

Porém, outros professores arriscam o uso das tecnologias, dando possibilidade a que estas se revelem como fator de transformação na sala de aula com os alunos. Conforme afirma Guimarães e Dias (2006, p. 23), “Um novo fazer educativo só será realidade se a tecnologia for incorporada de forma adequada ao contexto de nossas ações educativas”.

Uma das principais consequências da exploração da internet que é apontada para a aula de Matemática tem a ver com a mudança da dinâmica da aula e do papel do professor e do aluno, como nos refere Silva (2008, p. 67):

> A dinâmica e as potencialidades da interface on-line permitem ao professor superar a prevalência da pedagogia da transmissão. Na interface, ele propõe desdobramentos, arquiteta percursos, cria ocasião de engendramentos, de agenciamentos, de significações. Ao agir assim, estimula que cada participante faça o mesmo, criando a possibilidade de co-professorar o curso com os aprendizes.

O autor frisa bem que na cibercultura ocorre a transição da lógica da distribuição (transmissão) para a lógica da comunicação (interatividade). Assim, este autor vê o recurso à internet como uma possibilidade de alterar o tradicional papel de transmissor de conhecimentos assumido em geral pelo professor para um outro papel mais de organizador e regulador das aprendizagens, tendo por base a ideia de diálogo e colaboração que tenha os alunos como intervenientes:

> Na perspectiva da interatividade, o professor pode deixar de ser um transmissor de saberes para converter-se em formulador de problemas, provocador de interrogações, coordenador de equipes de trabalho, sistematizador de experiências e memória viva de uma educação que, em lugar de prender-se à transmissão, valoriza e possibilita o diálogo e a colaboração. (Silva, 2008, p. 64)

Silva chama a atenção de que mais importante do que as condições físicas das escolas, é o papel assumido pelo professor para criar uma dinâmica de aula que se afaste da aula tradicional de transmissão de conhecimentos. Assim, alerta-nos:

> Estar on-line não significa estar incluído na cibercultura. Internet na escola não é garantia da inserção crítica das novas gerações e dos professores na cibercultura. O professor convida o aprendiz a um site, mas a aula continua sendo uma palestra para a absorção linear, passiva e individual, enquanto o professor permanece como o responsável pela produção e pela transmissão dos “conhecimentos”. (Silva, 2008, p. 67).

São várias as interfaces que o professor pode adotar para trabalhar com os alunos recorrendo à internet. Uma delas é o *chat*, por vezes designada de sala de bate-papo, que pode ser usado com intuito de troca de informações on-line entre alunos e professores de uma mesma turma, de turmas diferentes ou ainda, de escolas diferentes, discutindo um mesmo assunto, com hora marcada ou não. Outra interface, semelhante ao *chat*, que pode ser usada de forma assíncrona, é o fórum, onde as mensagens são disponibilizadas por escrito para que as pessoas de um mesmo grupo leiam e discutam entre si um determinado assunto.

Além do *chat* e do fórum, existe também a lista de discussão, que trabalha com mensagens por e-mails entre um grupo de pessoas que discutem um tema escolhido pelo grupo ou outras mensagens paralelas. Outra interface muito utilizada é o *blog*, que funciona como um diário, onde a pessoa posta suas mensagens, imagens, notícias e pensamentos, além de poder liberar seu acesso para que outras pessoas possam acrescentar outras mensagens, podendo ser utilizado como uma ferramenta para escrita colaborativa.

A criação de *blogs* para o ensino é uma boa alternativa para apoiar o novo fazer educativo que as tecnologias móveis potenciam. Barbosa e Franco (2014) oferecem para tal diversas possibilidades para o uso de blogues:

> [...] existem várias formas de organizar o trabalho com blogs, citamos alguns exemplos a seguir:
> Blog da turma: Esta primeira opção poderá ser pensada caso o professor prefira trabalhar determinado conteúdo apenas em uma turma, neste caso os alunos postariam comentários somente entre a turma e o professor;
> Blog por série: O professor poderia propor uma discussão sobre determinado assunto em turmas diferentes, mas de mesma série, esta alternativa é interessante, pois sabemos que, mesmo o conteúdo sendo igual, cada turma desenvolve seu aprendizado de uma forma específica e, a possibilidade de discutir sobre um mesmo assunto, pode enriquecer muita a aprendizagem dos alunos e apontar dúvidas ou sugestões que talvez não tenham sidas trabalhadas em outra turma;
> Blog por escola: Nesta alternativa o professor irá propor uma discussão sobre um tema geral como, por exemplo, a quantidade de verbas repassadas para o Estado do Paraná pelo Governo Federal, disponíveis no Portal da Transparência do Paraná, no site: http://pr.transparencia.gov.br/, e o montante gasto pelo Estado em viagens;
> Blog por tema: Assim como no exemplo anterior o professor pode sugerir a mesma discussão sobre o Portal da Transparência em todas as turmas que trabalha de todas suas escolas. (Barbosa & Franco, 2014, p. 14)

No curso que está na base deste texto, uma das metodologias que foi apresentada aos professores foi precisamente a do uso de *sites* de relacionamento disponíveis na internet. Hoje em dia, uma parcela da população passa uma grande parte do dia na frente de um computador, tablet ou *smartphone* conectados à internet, acedendo a essas páginas. Nossos alunos, desde a pré-adolescência até à fase adulta, utilizam seus aparelhos de telefone celular não mais só para fazer ligações, mas para acessar à internet e principalmente se relacionar com outras pessoas.

O uso destas interfaces possibilita uma nova dinâmica na maneira de trabalhar e discutir com os alunos temas e conteúdos que podem estar disponíveis em livros ou na internet, além de incentivar a produção colaborativa. Porém, observa-se que grande parte dos professores ainda não consegue associar o uso dessas tecnologias com os conteúdos de sala de aula e muitos não aceitam mudar sua maneira de ministrar suas aulas, apesar da consciência que insuficiência do modelo tradicional. É comum ouvirmos frases como a citada por Abreu (2009, p. 41), de que “os alunos são mais inquietos, desatentos, menos motivados, enquanto os professores sentem que o modelo de aula costumeiramente usado já não funciona e exige reformulações”.

Lovis e Franco (2013) afirmam a necessidade de apoiar o professor que se disponibiliza a usar as tecnologias na aula, através de formação continuada que contribua para ajudar a transformar as práticas em favor da educação:

> Para que o professor possa utilizar os recursos tecnológicos presentes nas escolas é preciso que ele conheça as possibilidades educacionais destes recursos, uma vez que a sua disponibilidade não garante que ele será utilizado em benefício da educação. Esse fato aponta para uma necessidade de investir na formação e aperfeiçoamento do professor de forma continuada (Lovis & Franco, 2013, p. 152).

Esta formação para que o professor possa conhecer as diversas formas de utilização da internet e dos aplicativos no ensino e na aprendizagem é tanto mais importante no contexto de uso de tecnologias móveis, celulares e smartphones, ainda pouco explorados na aula de Matemática.

## Metodologia

A pesquisa aqui relatada teve uma abordagem qualitativa, dentro do paradigma interpretativo, concretizando-se através de um estudo de caso, considerando-se como caso um grupo com 33 professores de Matemática que participaram do curso “Algumas metodologias para uso das tecnologias móveis em sala de aula”.

Esses professores atuavam nos anos finais do Ensino Fundamental (6.º ao 9.º ano) e Ensino Médio, em escolas públicas do estado do Paraná, mais especificamente, vinculados ao Núcleo Regional de Maringá, cidade ao norte do Estado do Paraná-Brasil, todos com Licenciatura em Matemática.

A coleta de dados foi feita por meio dum fórum de discussão, em um blog, criado especialmente para o curso, que continha parte dos conteúdos dados em cada dia de aula, bem como espaço para que cada professor fizesse relatos das experiências com o uso do tablet e smartphone em sala de aula. A análise foi feita utilizando os conteúdos escritos pelos professores nesse ambiente, sendo estes os dados aqui considerados. Para a análise adotaram-se essencialmente três categorias relativas à receptividade dos professores relativamente ao uso das tecnologias móveis, conforme referencial teórico exposto: *não receptivo*; *receptivo na zona de conforto*; *receptivo na zona de risco*.

Para entender como se deu a pesquisa, é importante saber como ocorreu o curso. O curso teve uma duração de 24 horas presenciais, distribuídas por seis semanas consecutivas, com sessões de quatro horas, ocorrendo no primeiro semestre do ano letivo de 2014.

No primeiro dia, os professores participantes do curso conheceram vários sites, com uma breve apresentação de seus conteúdos. Os principais foram "Dia a Dia Educação"[1], "Portal do Professor do Ministério da Educação – MEC"[2] e "Só Matemática"[3]. Estes *sites* foram escolhidos por conterem bons recursos (vídeos, jogos, tarefas etc.) para o ensino e aprendizagem da Matemática, tanto para alunos como para professores.

Ainda neste primeiro dia foi discutida a criação de *blogs*, no sentido de como explorar este recurso para a aprendizagem dos educandos. Uma possibilidade seria criar um *blog*, e neste *blog* os alunos iriam "postar" os comentários sobre as aulas com as tecnologias móveis e o que nelas aprenderam.

Para exemplificar a utilização do *blog* na aula de Matemática aos formandos, no curso foi também criado um *blog* que foi usado durante todo o curso pelos professores participantes para postaram seus comentários acerca da receptividade às ideias sobre a utilização destas tecnologias com os alunos e darem testemunho das eventuais experiências que realizaram com os próprios alunos. Por exemplo, após explorar os *sites* "Dia a Dia Educação", "Portal do Professor do MEC" e o "Só Matemática", foi pedido aos professores que fizessem uma primeira postagem incidindo sobre o que aprenderam no primeiro dia de curso e se o que foi proposto ajudaria como sugestão de metodologia para o uso do *tablet* em sala de aula.

No segundo dia do curso foi trabalhado um pouco mais com os *blogs*. Todos os participantes fizeram uma primeira postagem no qual propunham uma tarefa voltada para uma de suas turmas como, por exemplo, propor um vídeo para complementar a aula. Essa postagem deveria ter o link para o vídeo da internet, de modo a facilitar aos

---

[1] Em http://www.matematica.seed.pr.gov.br/, acedido em 08/03/2015.
[2]Em http://portaldoprofessor.mec.gov.br/sobre.html, acedido em 08/03/2015.
[3] Em http://www.somatematica.com.br/, acedido em 08/03/2015.

alunos através do *tablet* ou *smartphone* dentro da sala de aula. Deveria ainda incluir um pedido de comentário aos alunos sobre o conteúdo estudado na aula e o vídeo que assistiram como complemento, e também a sugestão aos alunos que lessem as postagens dos colegas e discutissem sobre o que aprenderam.

A partir do segundo dia do curso e até ao seu final, foram trabalhadas com os participantes a instalação e a exploração de alguns aplicativos que podem ser utilizados de forma pedagógica, a saber, “MyScript Calculator”, “Maths 4 Higt School”, “Mathway”, “GeoGebra”, “Smart Distance” e “Enem Apostila de Matemática”. Os professores foram ensinados em como os utilizar para explorar determinados conteúdos em sala de aula. Destaca-se que dois dos aplicativos foram trabalhados com mais detalhes: os aplicativos “GeoGebra” e “Smart Distance”.

Em cada sessão, foi pedido aos professores para acessarem o blog da turma de formação e postarem suas considerações sobre os aplicativos trabalhados e eventuais utilizações realizadas nas suas próprias aulas.

**Análise e resultados**

Da análise das postagens no *blog* do curso, não se detectou nenhum caso de professor que se mostrasse não receptivo ao uso das tecnologias móveis, tendo que 17 professores referiram a sua adesão ao uso destas tecnologias, ainda que de modo a ficarem na sua zona de conforto.

No entanto, 16 professores deram testemunho dos avanços que fizeram, sendo evidente que avançaram para a sua zona de risco (Borba & Penteado, 2001), vencendo receios diversos relativamente a aulas realizadas com o recurso dos alunos a tecnologias móveis. Isso pode ser observado nos excertos a seguir, em que os sublinhados foram feitos pelos autores:

> Eu <u>confesso que estava com receio</u> dessa aula, pois <u>temia que houvesse baderna</u>, porém foi bem ao contrário, pois o comportamento dos alunos foi maravilhoso e deu tudo certinho. Graças a este curso que estamos fazendo foi possível planejarmos aulas diferentes, <u>vencermos o medo</u> e realizar nosso objetivo. Agora tenho certeza que estamos no caminho certo, temos que dar continuidade em nosso trabalho e continuar nos aperfeiçoando.
> <u>Confesso que eu estava com muito medo dessa aula</u>, mas deu tudo certo, os alunos gostaram muito e pediram para eu passar outros aplicativos para eles.

Os professores que arriscaram fazer aulas manifestaram distintas potencialidades destes cenários educativos. Por um lado, alguns referem-se ao potencial de motivação que se reflete nos alunos e nos próprios professores, muito associado ao fazer novo ou diferente do que é habitual:

> Usei parte da aula de blogs, salvar vídeos para levar em pendrive e usá-los na tvpendrive![4] Foi incrível os alunos gostaram, pois foi a primeira vez que a professora havia feito uma aula na tv".
> Trabalho com jovens e adultos e eles fazem uso da calculadora principalmente para calcular raízes (mais precisamente raiz quadrada), pedi que baixassem o *calculator*, ficaram surpresos "em saber que existem tais aplicativos, assim como eu que também não conhecia".

Outra potencialidade referida em relatos postados no blog do curso de formação foi a possibilidade incremento da autonomia nos alunos, que se pode observar na postagem apresentada a seguir, onde o sublinhado foi feito pelos autores deste texto:

> Trabalhei com meus alunos do 1.º ano o conteúdo de funções utilizando o aplicativo do Geogebra. No começo foi bem tribulado, pois todos queriam tirar dúvidas ao mesmo tempo, mas com o tempo foram fazendo sozinhos. Foi muito proveitoso e os alunos gostaram muito.

Em outros casos, mais raros, professores reportam a realização em aula de um trabalho continuado com os seus alunos, em que colocam a ênfase no uso das tecnologias móveis para promover a comunicação ou da interatividade entre os alunos. É o caso da seguinte professora:

> Tenho 3 turmas de 2.º ano do Ensino Médio e estava trabalhando uma revisão dos Teoremas de Tales e Pitágoras, então resolvi pedir para que eles baixassem o aplicativo Myscript calculator para facilitar os cálculos onde utilizamos em sala de aula e como "tarefa" postei 2 vídeos e duas listas de exercícios no blog para que eles assistissem e resolvessem as listas e depois enviassem por e-mail os resumos dos vídeos e os resultados dos exercícios, e também fizessem algum comentário no blog [...]. Isso valeu como trabalho e revisão de prova, lógico que os exercícios das listas eles tinham que tê-los resolvidos no caderno. Foi muito bacana!!!!".

[4] A tv pendrive é o nome dado a uma televisão que está presente em todas as salas de aula das escolas do Estado do Paraná e que tem uma entrada para pendrives, que podem ser utilizadas em várias extensões computacionais.

A participante da pesquisa que fez esta última postagem criou um blog para os seus alunos, que nele participaram regularmente e fizeram muitos comentários também interessantes. Por exemplo, em relação aos vídeos postados, referidos no excerto anterior, um dos seus alunos afirma: "Adorei, me ajudou a lembrar de muitas coisas. Obrigada por ajudarmos até mesmo fora de sala de aula...".

As postagens do blogue do curso de formação também servem para perceber a receptividade dos professores em relação aos próprios objetos digitais apresentados no curso, nomeadamente os softwares específicos:

> O aplicativo que eu usei foi o Smart Distanc. Foi uma experiência feita com os alunos do 1.° ano [...] nós fomos para o pátio da escola e calculamos a altura de algumas árvores, a altura do portão de entrada dos alunos. Para isso nós medíamos o comprimento da sombra do aluno e depois medíamos o comprimento da sombra da árvore e dai calculávamos a altura das árvores.
> O <u>curso está sendo um grande aliado</u>, pois serviu para mostrar que nós podemos fazer uso desses recursos já que estamos tendo orientações a respeito da utilização de vários aplicativos, o que tem me ajudado muito.

Outra potencialidade assinalada pelos professores tem a ver com a facilidade logística de acesso à internet. Valorizam a utilização dos recursos digitais na própria sala de aula, já que não é necessário sair do ambiente de estudo para poder trabalhar os conteúdos desejados. Vejamos o que diz um dos professores participantes, em relação a isso, em que os sublinhados são dos autores deste texto:

> Como atuo com alunos da Sala de Recursos Multifuncional[5], fiz uma adaptação das propostas apresentadas no curso, para a nossa realidade. A criação do Blog foi de grande auxílio para as atividades desenvolvidas com os alunos, frequentemente usamos jogos para trabalhar raciocínio, memória, concentração... entre outros aspectos, agora eu posto o jogo no Blog, eles entram realizam o que é proposto e fazem comentários (por enquanto essa atividade foi realizada apenas na sala de aula, os comentários foram feitos a partir do meu e-mail, pois os alunos são menores de idade e não tem conta, solicitei autorização para a família a fim de criar o e-mail para fins pedagógicos).

Por último, e embora não seja foco deste texto analisar a percepção que os

[5] São salas com materiais diferenciados e profissionais preparados especificamente para o atendimento às diversas necessidades educativas especiais dos educandos.

participantes do curso dele fazem, as múltiplas postagens no blog do curso de formação mostram, com bastante persistência, uma opinião muito favorável relativamente à necessidade e valor de existirem cursos de formação sobre a temática do uso da internet para a aprendizagem da Matemática:

> O curso serviu para mostrar que nós podemos fazer uso desses recursos. Tenho a certeza que estamos no caminho certo, temos que dar continuidade em nosso trabalho e continuar nos aperfeiçoando.

**Conclusões**

Por meio da análise das postagens no blog criado para o curso, observa-se que todos os professores participantes foram receptivos em relação às tecnologias móveis.

Alguns dos participantes se mostraram receptivos, porém, em suas postagens, não apresentaram aplicações feitas com seus alunos em sala de aula, ou seja, permaneceram na zona de conforto. Fica, neste caso, uma pergunta: será que este professor, apesar de mostrar receptividade às tecnologias móveis, irá avançar para a zona de risco?

Diversos professores apresentaram, entusiasmados, relatos de aplicação das tecnologias móveis em aulas nas quais os seus alunos se lhes mostraram bastante receptivos, na verdade, entusiasmados também com a oportunidade de lidar com algo que consideram novo ou diferente. Também aqui nos podemos interrogar, deixando duas questões: 1) Com o passar do tempo e da motivação inicial, e quando se tornar comum tal metodologia de ensino, será que os alunos também ficarão desmotivados com o uso dos aplicativos em dispositivos móveis e uso de blogs? 2) Os professores que ainda ministram suas aulas como sendo uma palestra para a absorção linear, passiva e individual pelos alunos, de fato, com o uso dessas novas tecnologias, conseguirão mudar o seu comportamento e criarão possibilidades de co-professorar o curso com os aprendizes, com novos papéis para si mesmo e para os alunos?

Entre os professores que revelaram receptividade, estão os que haviam saído da zona de conforto, pois já utilizavam computadores e vídeos para ministrar alguns conteúdos de suas aulas, e o que experimentaram de novo foram mesmo as tecnologias móveis. Pensamos que foram estes professores mais experientes com os aplicativos que são os que foram mais além, promovendo a interação através de blogs que criaram para os alunos ou mesmo utilizando aplicativos que auxiliaram a interatividade dos alunos, uma das potencialidades mais sofisticadas, já assinalada por Silva (2008).

Para finalizar, assinala-se que os participantes no curso valorizaram a possibilidade de o frequentar, considerando-o um contributo essencial para as suas práticas formativas. Lovis e Franco (2013) apontam para a importância de cursos de formação continuada, fato este confirmado com várias postagens no blog do curso de formação, que sublinham o papel do curso a ajudar a superar receios e medos de arriscar, como já tinha sido exposto em Penteado (1999) e também por Lovis e Franco (2013).

Na fase de transição paradigmática para a Cibercultura, na qual estamos aprendendo a mostrar o "caminho" que o professor deve dar para que os alunos cheguem à compreensão de cada conteúdo ("destino") por meio do uso de tablets e smartphones – há sem dúvida uma disposição e uma recepção positiva em relação ao uso desses dispositivos móveis pelos professores pesquisados, devido a duas razões: por um lado, estes dispositivos estão incorporados no dia-a-dia; por outro, constituem bons recursos para a alterar a dinâmica da aula de Matemática, com a necessidade de explorar de forma completa as suas potencialidades para o ensino. Julgamos que a existência de cursos com o foco descrito neste artigo poderão contribuir para que o professor saia da sua da *zona de conforto* e experiencie a sua zona de risco de forma mais apoiada.

## Agradecimentos

Agradecemos a CAPES, pela oportunidade que nos foi dada de poder participar do XXVI SIEM, em Évora-Portugal.

Agradecemos ao Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, do Estado do Paraná-Brasil, que possibilitou a realização do curso oferecido para os professores participantes dessa pesquisa, bem como a realização da pesquisa.

## Referências

Abreu, R. A. S. (2009). Professores e internet: desafios e conflitos no cotidiano da sala de aula. In M. T. A. Freitas (Org.), *Cibercultura e formação de professores* (pp. 41-56). Belo Horizonte: Autêntica.

Araujo, T. C. M., & Rossi, A. M. G. (2002). O real, o virtual e a internet na era da informação, SiGraDk, *In Proceedings of the 6th Iberoamerican Congresso of Digital Graphics* (pp. 28-30). Caracas, Venezuela.

Barbosa, F. A., & Franco, V. S. (2014). Usando tecnologias móveis em sala de aula, EPREM, *Atas do XII Encontro Paranaense de Educação Matemática*. Campo Mourão, Paraná, Brasil. Acedido em Fevereiro 06, 2015, em http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/index.htm.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática* (2.ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Cony, C. H. (2010, ). *A internet e a roda*. Jornal Folha de São Paulo. Acedido em março, 08, 2015, em

http://www1.folha.uol.com.br/fsp/opiniao/fz2005201005.htm.

Guimarães, A. M., & Dias, R. (2006). Ambientes de aprendizagem: reengenharia da sala de aula. In C. V. Coscarelli (Org.), *Novas tecnologias, novos textos, novas formas de pensar***.** (3.ª ed., pp. 23-42). Belo Horizonte: Autêntica.

Lovis, K. A. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores.* (Dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Brasil). Acedido em março, 08, 2015, em http://www.pcm.uem.br/?q=node/80&min=55&max=10.

Lovis, K. A., & Franco, V. S. (2013). Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. *Informática na Educação: teoria e prática, 16* (1), 149-160.

Penteado, M. G. (1999). Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção do computador na profissão docente. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 297-313). São Paulo: Editora UNESP.

Silva, M. (2008). Internet na escola e inclusão**.** In M. E. B. Almeida & J. M. Moran (Orgs.), *Integração das Tecnologias na Educação* (pp. 63-68). Acedido em Fevereiro 06, 2015, em http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/2sf.pdf.

# A estrutura curricular do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e as tendências temáticas das pesquisas realizadas pelos professores da Educação Básica

*Ivete Cevallos*[1]
[1]Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT
ive.cevallos@gmail.com

**Resumo**: *O presente estudo tem por objetivo identificar a influência da matriz curricular do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação da PUC/SP – Brasil sobre as tendências das pesquisas produzidas pelos professores da Educação Básica, no período de 2002 – 2008. O material de análise está constituído por: 135 dissertações; entrevista com duas professoras idealizadoras do curso e o Projeto pedagógico. As questões norteadoras da pesquisa são: Em quais aspetos a matriz curricular do curso de Mestrado Profissional, têm influenciado nas tendências temáticas das pesquisas produzidas pelos professores da Educação básica? Quais as tendências temáticas das pesquisas realizadas pelos egressos? Os dados mostraram que 44% das pesquisas estão voltadas para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática; 26% faz um estudo de análise comparativa de documentos oficiais; livros didáticos e a prática profissional; 12,5% dão destaques à formação continuada, pautando-se na compreensão que o professor tem de alguns conteúdos e nas conceções e saberes docentes. Entende-se, dessa forma, que o perfil do curso e a estrutura curricular têm influencia direta sobre tendências temáticas das pesquisas, tendo em vista que um dos objetivos do curso é a formação do professor, voltada para um repensar das questões postas pela prática.*

**Abstract:** *This study aims to identify the influence of the curriculum of the Master in Professional Teaching of Mathematics from the Graduate Program of PUC/SP –Brazil about trends in researching produced by teachers of basic education in the period of 2002-2008.The analysis material is composed of a total of 135 dissertations; the pedagogical project of the course and na interview with two teachers creators of the course. The guiding research questions are: What aspects of the curriculum Professional from the Master course have influenced the trends in the themes of the research produced by the Basic Education teachers? What are the thematic trends of research conducted by the students? The data showed that 44% of searches are focused on the teaching and learning mathematics; 26% make a study of comparative analysis of official documents, text book sand professional practice; 12.5% have emphasized continuing education, and are based on the understanding that the teacher has about some content and the teaching concepts and knowledge. It is understood, therefore, that the profile of the course and the curriculum have direct influence on the mathematic trends of research, given that one of the* *course objectives is the training of teachers, facing a rethinking of the questions posed by the practice.*

**Palavras-chave**: *Mestrado Profissional; Tendências temáticas; Pesquisa do professor.*

**Introdução**

Atualmente há uma necessidade premente de formação “ao longo da vida” como resposta aos permanentes desafios da inovação e da mudança. No que diz respeito à Educação, tem sido reconhecida, não só na literatura da área específica, mas também no discurso político, a importância da formação e do desenvolvimento profissional como elementos determinantes no contexto das mudanças.

Tentando encarar esses desafios, o professor tem ao longo da sua carreira procurado cursos de curta duração, ou mesmo de especialização. Estes cursos geralmente têm por finalidade atender às carências de professores, ou até alcançar resultados predeterminados, por exemplo, uma metodologia de ensino e a implementação de um currículo. A maioria desses cursos, porém, não é desenvolvida no contexto escolar, portanto, as propostas tendem a ser desarticuladas da realidade profissional: muitas vezes o conhecimento ali desenvolvido não é levado em consideração, assim como as opiniões, experiências e necessidades dos professores.

Formosinho, Ferreira e Silva (1999) assinalam os aspetos que põem em risco uma formação crítica, reflexiva e contextualizada:

> Não faz sentido (porque não produz mudanças) obrigar os professores a frequentar acções isoladas, descontextualizadas, de uma forma uniforme, caótica, cujo objectivo essencial é a obtenção de créditos para a progressão da carreira. Uma formação assim entendida passa a ser (de)formação e emerge de uma lógica de descontextualização da actividade formativa centrada em “pacotes de formação”, paradoxalmente sustentada por um discurso que faz apelo a uma concretização contextualizada e diversificada.(p. 111)

Os cursos de formação continuada, como um processo controlado externamente, geralmente desconsideram a trajetória e a experiência de ensino do professor, bem como suas conceções e crenças. Ferreira (2003) destaca esses aspetos ao referir-se aos professores de Matemática:

> Uma forma de garantir que a reforma seja bem sucedida. Os professores deveriam aprender as novas ideias e implementá-las em suas salas de aula. Essa visão desconsidera, entre outras coisas, que as conceções dos

> professores acerca do que constitui "um bom ensino de Matemática" estão profundamente enraizadas nas crenças subjacentes a tais conceções e na extensa experiência de ensino que as reforça. Deste modo, cursos rápidos, superficiais e/ou verticalmente impostos, geralmente não conseguem influenciar as crenças e conceções dos professores. (p. 33).

Na verdade, a formação contínua deveria ser vista sob o ponto de vista do professor, como um processo de aperfeiçoamento constante, necessário ao desenvolvimento profissional.

Um outro aspeto recorrente da formação refere-se à questão da relação teoria e prática. Para Ponte & Santos (1998), o desenvolvimento profissional abrange aspectos que vão além do teórico:

> A formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional implica o professor como um todo nos seus aspectos cognitivos, afectivos e relacionais. Temos assim que a formação parte invariavelmente da teoria e frequentemente não chega a sair da teoria, ao passo que o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de uma forma interligada. (p. 2)

Ao considerar a relação entre a forma como uma formação é conduzida e a sua relevância para o desenvolvimento profissional, os autores argumentam que essa forma tanto pode favorecer os aspectos relevantes para o desenvolvimento profissional, como também favorecer uma formação "subordinada a uma lógica de transmissão de conhecimentos ou aquisição de competências", reduzindo, dessa forma, a criatividade, a autoconfiança, a autonomia e o sentido de responsabilidade profissional do professor.

Nesse contexto, a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – Brasil, em 2002, procurando atender a essa significativa demanda de profissionais que necessitam ampliar a sua base de conhecimentos e a sua capacidade de atuação, preservando, entretanto, a sua inserção no mercado de trabalho, implantou o curso de Mestrado Profissional. O curso foi implantado procurando atender as orientações e regulamentações da CAPES[1] (2002) quanto aos Mestrados Profissionais, órgão que regulamentou esse tipo de Mestrado por meio da sua Portaria n.º 080/98 e apresenta entre seus objetivos a formação de profissionais qualificados para atuar preferencialmente em ambientes da Educação Básica – Ensino Fundamental e Médio.

[1] CAPES – Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Diante do exposto, a questão que norteou o presente estudo é: Em quais aspetos o curso de Mestrado profissional, por suas características e perfil, tem influenciado nas pesquisas produzidas pelos professores da Educação básica? Quais as tendências temáticas das pesquisas realizadas pelos egressos no período 2002 – 2008?

**Procedimentos metodológicos da pesquisa**

O curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP titulou 167 Mestres no período de agosto de 2002 a abril 2010. O recorte proposto para o presente estudo refere-se às dissertações defendidas no período de 2004 à 2008[2]. O enfoque desta pesquisa é quali-quanti, de caráter bibliográfico, e busca mapear 135 dissertações defendidas no referido período.

Para realizar o mapeamento, inicialmente fez-se a coleta de dados do material disponível, no banco de Teses e dissertações da PUC/SP. Realizou-se o fichamento de cada um dos trabalhos, buscando contemplar informações gerais, como: título, autores, ano e, também, informações específicas, tais como: foco temático, objetivos do estudo, processos metodológicos e resultados obtidos.

Em algumas dissertações não foi possível obter todas as informações supramencionadas,visto que nem todos nos davam a ideia clara dos dados coletados e, assim, foi necessário buscar o trabalho na íntegra. Apoiamo-nos em Bardin (2000) para realização da  análise documental, cuja finalidade era de evidenciar as categorias que emergem dos documentos com o "[...] objetivo de fazer a representação condensada da informação, para consulta e armazenagem" (Bardin, 2000, p. 46). A análise de conteúdo foi o referencial para empreendermos as análises e interpretações do material coletado.

Buscando identificar o contexto em que foi implanto do curso de Mestrado Profissional, realizaram-se entrevistas com duas professoras remanescentes desde a implantação/implementação do curso, e que tivessem atuado diretamente nesse processo. Entendia-se assim que a participação dessas duas profissionais diretamente envolvidas na criação do Mestrado Profissional traria aspectos importantes para a estrutura da investigação. Além disso, essas pesquisadoras poderiam trazer dados, até

[2] O recorte da presente pesquisa se justifica, tendo em vista que curso foi restruturado em 2009, entrando em vigor novo regulamento ditado pelo Decreto Normativo 07/2009
E, portanto, desde então, passou a ser executado outro plano de estudos e outra matriz curricular.

então não identificados, de situações vivenciadas, as quais poderiam não estar contempladas nos documentos da instituição pesquisados até então.

As análises para mapear os trabalhos foram pautadas em focos temáticos, possibilitando melhor a análise dos dados.

**Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP: gênese, princípios e conceção de formação**

Este item apresenta primeiramente a gênese e a construção do **Projeto de Mestrado Profissional em ensino de Matemática da PUC/SP,** tomando como referência os depoimentos de duas professoras[3] do Programa de Pós-Graduação da PUC/SP que participaram do processo de construção e implantação do curso, e que permanecem nele até à presente data, bem como os documentos institucionais orientadores. Para que se compreenda essa gênese, as professoras contextualizaram as circunstâncias em que foi pensado, as necessidades que buscava atender e, especialmente, o público a que se destinava.

***Os primeiros passos para a estruturação do curso de Mestrado Profissional***

As novas exigências impostas aos professores têm-se tornado motivo de preocupação também dos professores da Pós-Graduação, que passam a discutir e estruturar a ideia de um curso com um perfil diferente do Mestrado Acadêmico.

Como evidenciado pelas professoras entrevistadas, havia uma preocupação com as questões da Educação Básica. Esse olhar, em particular, foi aguçado pela vasta experiência de ambas como docentes no curso de licenciatura em Matemática da Universidade, bem como professoras/orientadoras no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu*, e pela experiência em cursos de formação continuada, em nível *Lato Sensu*, com professores da Educação Básica.

A necessidade de implantação de um curso que fosse vinculado à pesquisa da prática profissional foi-se delineando nas discussões travadas pelas duas professoras juntamente com colegas do Programa. A oportunidade de fazer com que o professor pudesse rever sua prática com embasamento teórico seria um avanço muito grande. No entanto, seria preciso ir além, ou seja, produzir conhecimento. Nessa tentativa de encontrar caminhos que respondessem às necessidades apontadas, e que tivesse como princípios norteadores

[3] Os nomes das duas professoras – Mayara e Vera – são fictícios.

as reflexões científicas sobre a prática, delineou-se o Mestrado Profissional como alternativa.

Ao elaborar o projeto, as professoras entrevistadas tinham em mente que não seria possível desvincular o binômio pesquisa e prática ou prática e pesquisa. E deveria ser considerado também que em nível *Stricto Sensu* não faria sentido uma pesquisa sem apoio da teoria. Assim, na elaboração do projeto, as duas professoras que encabeçaram as discussões a respeito da implantação da Pós-Graduação tiveram um cuidado especial ao atrelar essas questões, uma vez que muitos professores buscam qualificação na tentativa de aprimorar o que se aprende na universidade e sua transposição para a sala de aula. Para tal, também foi pensada uma matriz curricular que viesse a atender a essa demanda. Neste sentido, o curso procurou abordar conceitos e temáticas que permitissem aos mestrandos desenvolver ações investigativas a respeito de temas relevantes para o Ensino de Matemática, bem como para questões e inquietações vivenciadas no cotidiano escolar, visando formar alunos com autonomia para aprender continuamente em seu processo de desenvolvimento profissional.

Para formar o professor com esse perfil, a matriz curricular do curso foi pensada e articulada com base em disciplinas específicas, pedagógicas, seminários e em outras atividades realizadas sob orientação e supervisão do corpo docente. Além dessas atividades, ocorre a orientação do trabalho de pesquisa, que, por sua vez, deve preferencialmente estar voltada para aplicação no ambiente educacional. Esse conjunto de ações está previsto na estrutura do curso de Mestrado Profissional da PUC/SP, que compreende um conjunto de 30 créditos (ver tabela 1).

Tabela 1. Matriz curricular

| Disciplinas referentes aos Conhecimentos Matemáticos | CH | Créditos |
|---|---|---|
| Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral | 255 | 03 |
| Tópicos de Álgebra | 255 | 03 |
| Tópicos de Geometria | 255 | 03 |
| Tópicos de Matemática Discreta | 255 | 03 |
| Introdução à Filosofia e à História da Matemática | 170 | 02 |
| Disciplinas referentes aos Conhecimentos Didáticos – Pedagógicos | CH | Créditos |
| Didática da Matemática | 170 | 02 |
| Desenvolvimento Curricular em Matemática | 85 | 01 |
| Aspetos Cognitivos da Aprendizagem Matemática | 85 | 01 |
| Atividades Complementares | CH | Créditos |

| | | |
|---|---|---|
| Seminários Longitudinais: Tendências da Educação Matemática | 170 | 02 |
| Grupo de Estudo: Metodologia de Pesquisa e Análise de Pesquisas em Educação Matemática | 85 | 01 |
| Autoformação pelo uso das TICs | 255 | 03 |
| Prática Docente Supervisionada (articulada à disciplina Didática da Matemática) | 255 | 03 |
| Elaboração e desenvolvimento de Projeto de Pesquisa | 255 | 03 |

Fonte: Projeto do curso de Mestrado Profissional

O desenho curricular do Mestrado Profissional proposto é guiado pelo objetivo de que o professor em formação possa ampliar seus conhecimentos matemáticos e colocar em uso as competências essenciais a seu exercício profissional. Institui tempos e espaços curriculares diferenciados, tais como seminários longitudinais; ciclos de palestra; grupos de estudo; estudo individual com uso de novas tecnologias, debates acerca de trabalhos realizados, e participação em atividades programadas pelo orientador, possibilitando o desenvolvimento de distintas competências.

Diante do que se apresenta como proposta do curso e das circunstâncias em que foi pensado, buscou-se, a seguir, a realização de uma síntese por foco temático, visando melhor análise dos dados.

**Em modo de análise: o que as dissertações nos revelam?**

No presente trabalho optou-se por categorizar as dissertações dos egressos do Mestrado profissional por eixos temáticos e, para tal, recorreu-se à tese de doutorado de Fiorentini (1994), que fez um trabalho abrangente sobre a produção científica em cursos de Pós-Graduação no Brasil. O autor classificou 204 trabalhos apresentando-os num quadro-síntese com as principais áreas e subáreas temáticas enfocadas pelos investigadores, descrevendo as categorias e indicando a quantidade em cada caso. Considerou-se também o trabalho de Melo (2006), em que identificou 188 dissertações e teses, apresentando-as em eixos temáticos.

No presente estudo, foram tomados como referência os trabalhos supracitados no sentido de um norte para a identificação e a classificação das dissertações em eixos temáticos, uma vez que não se pretendia realizar o estado da arte.

A partir da identificação dos eixos, foi elaborado o quadro síntese abaixo que representa a quantidade de produções por eixos de análise.

Diante do panorama apresentado pelos dados do quadro, pode-se verificar que os eixos 1, 2 e 8 relacionam-se ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática e envolvem alunos na pesquisa; o diferencial é que o eixo 2 utiliza ferramentas tecnológicas com o objetivo de favorecer aos usuários no processo de ensino e aprendizagem. Esses três eixos temáticos perfazem um total de 59 trabalhos e equivalente a aproximadamente 44% das pesquisas produzidas no período.

Tabela 2. Produção por eixo temático

| Eixo temático | Nº pesquisas |
|---|---|
| 1- Processo de ensino e aprendizagem da Matemática | 31 |
| 2-Utilização de TICs no ensino e na aprendizagem da Matemática | 21 |
| 3- Materiais didáticos – abordagem dos conteúdos e dos meios de ensino | 20 |
| 4-Currículo relativo ao ensino de Matemática | 15 |
| 5-Conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor | 17 |
| 6-Prática docente, crenças/concepções e saberes. | 10 |
| 7-História do ensino da Matemática | 09 |
| 8-Contexto sociocultural do ensino e aprendizagem da Matemática | 07 |
| 9-Outros | 05 |

* Pelo fato de algumas das pesquisas estarem relacionadas em mais de um eixo, o número não coincide com as pesquisas produzidas no período – 2004-2008

Com relação aos eixos 3 e 4, a tendência maior é a análise comparativa de documentos oficiais ou materiais didáticos e a prática docente. Os dois eixos perfazem um total de 35 trabalhos e representam aproximadamente 26% das pesquisas produzidas no período.

As pesquisas com foco no professor (eixos 5 e 6), tanto no que se refere ao professor das séries iniciais como em outros níveis de atuação profissional, ou mesmo, em processo de formação inicial, equivalem a um total de 17 produções e correspondem a 12,5% do total.

A partir da categorização das pesquisas, como apresentada na tabela 1, elaborou-se uma síntese representativa dos trabalhos produzidos em cada eixo:

**Eixo 1** – Os trabalhos apresentados nesta categoria, em sua maioria, estão direcionados às novas estratégias de ensino procurando identificar os procedimentos desenvolvidos, as técnicas, as abordagens e sua apropriação pelos alunos a partir de conteúdos:

a) Resolução de problemas em atividades desenvolvidas pelos alunos (6)

b) Processo de formação ou construção de conceitos matemáticos (9)

c) Motivação/Significados/observação de conteúdos e generalização de padrões (5)

d) Técnicas, domínio de conteúdo, atitude e procedimentos sobre o Ensino de conteúdos matemáticos e Estatística (11)

**Eixo 2** – Neste eixo, a investigação tinha como foco a apropriação de conceitos; procedimentos; estratégias e interatividade dos alunos a partir de conteúdos específicos e, outros com a intervenção de softwares e outros recursos tecnológicos:

a) Neste item, agruparam-se trabalhos que envolviam conteúdos diversos envolvendo argumentação e provas e Estatística (16)

b) Trabalhos envolvendo calculadora e Webquest (4)

c) Sala de informática (1)

**Eixo 3** – Inserem-se os trabalhos que dizem respeito aos materiais didáticos, mais especificamente ao livro didático e à abordagem dada aos conteúdos específicos de Matemática; da introdução de conteúdos a partir de material manipulativo; da construção de material manipulativo; e de jogo como recurso didático e softwares:

a) Livro didático e a abordagem dada aos conteúdos (7)

b) Conteúdos de Geometria e abordagem nos livros didáticos (5)

c) Estudo da proposta para o ensino de Geometria (2)

d) Introdução de conteúdos específicos a partir de materiais manipulativos (4)

e) Elaboração de material manipulativo (1)

f) Jogo como recurso didático (1)

**Eixo 4** – Os trabalhos neste eixo, em sua maioria, se restringiram à análise comparativa de conteúdos específicos da Matemática contidos nos livros didáticos e nas propostas curriculares e exames oficiais. Os estudos manifestaram a preocupação com a maneira pela qual os conteúdos constantes das propostas vêm sendo desenvolvidos na prática, ou mesmo, são apresentados nos livros didáticos, a saber:

a) Livros didáticos com as propostas oficiais (6)

b) Educação Matemática nos currículos (3)

c) Conteúdos na perspetiva da proposta oficial (6)

Ainda no mesmo eixo de análise comparativa - envolvendo outras propostas:

d) Proposta que visa à interação entre Matemática e Geografia; estudo sobre proposta de formação de professores; documentos oficiais sobre o estágio e sua implementação, prática como componente curricular e sua alocação e projeto pedagógico, ementas e os recursos tecnológicos na inclusão digital. (5)

**Eixo 5** - As pesquisas referentes a este eixo, em grande parte, davam destaques à formação continuada, seja por meio de minicursos, ou mesmo grupos de estudo, pautando-se na compreensão que o professor tem de alguns conteúdos, ou ainda, a respeito da utilização de ferramentas, por exemplo, softwares. A ênfase está no processo de ensino e aprendizagem, na reflexão sobre a própria prática e no desenvolvimento profissional.

Os trabalhos que se referem à formação inicial procuraram explorar as expectativas dos professores com relação ao curso, ou mesmo a identificação de conhecimento matemático ou estatístico.

a) Formação inicial, com licenciandos - expectativa/conhecimento do professor (6)

b) Formação em serviço - identificação de domínio/conhecimento de técnicas de ensino utilizando como recurso softwares; Webquest; tratamento da informação; Etnomatemática e modelagem (7)

c) Foco na ação conjunta, ou seja, grupos de estudos visando o desenvolvimento profissional a partir da reflexão sobre a própria prática e da pesquisa (4)

Este eixo temático aponta que as pesquisas referentes à formação de professores que ensinam Matemática, em grande parte, dão destaque à formação continuada, seja por meio de minicursos ou mesmo grupos de estudo, representando, aproximadamente, 65% do eixo. Desse total, 41,5% vêm se pautando pela compreensão que o professor tem de algum conteúdo, ou mesmo, da utilização de ferramentas como, softwares. Com relação aos grupos de estudos, representam 23,5%. Destaca-se a discussão a propósito do processo ensino e aprendizagem de alguns conteúdos, a reflexão acerca da própria prática e o desenvolvimento profissional.

Os trabalhos que dizem respeito à formação inicial correspondem a 29,0% deste eixo e vêm explorando a expectativa dos alunos com relação ao curso, ou mesmo, a identificação de conhecimento matemático ou estatístico.

Somente uma pesquisa refere-se ao formador de um curso de Pedagogia; 6,0% exploram os saberes matemáticos que importam para as séries iniciais.

**Eixo 6** – As pesquisas envolviam professores das séries iniciais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e professores do Ensino Superior. Os trabalhos procuravam enfocar a resolução de problemas e a conceção e ou prática do professor com os conteúdos de Matemática.

a) Conceção e/ou prática do professor com os conteúdos de Matemática, dentre eles: História da Matemática: uso da calculadora; conceito de fração e Estatística (6)

b) Saberes matemáticos do professor/conhecimentos/procedimentos sobre: leitura e interpretação de tabelas e gráficos; resolução de problemas enfocando desigualdades e inequações logarítmicas; diagnóstico com relação ao nível de conhecimento estatístico do professor e procedimentos ao ensinar conteúdos estatísticos (4).

Neste eixo, dentre as dez pesquisas, três trabalharam com professores das séries iniciais, dois com professores do Ensino Fundamental, três com professores do Ensino Médio, um com professores do Ensino Superior e um com professores do Ensino Fundamental e Médio.

O mapeamento revela que uma quantidade significativa das pesquisas está voltada para os professores, sejam eles ainda em formação (inicial) ou em serviço.

Somando-se os eixos: 5 e 6, totalizam-se 27 trabalhos, que correspondem a 20% das pesquisas produzidas no período.

**Eixo 7** – Os trabalhos deste eixo trataram da abordagem histórica da Matemática:

a) Da Educação Matemática (2)

b) Dos conteúdos segundo os PCN (2)

c) Investigação sociocultural de monumento (2)

d) Livro didático e o surgimento das editoras (1)

e) Do Projeto Minerva e o resgate da disciplina Matemática (1)

**Eixo 8** – Os trabalhos a seguir, representados por esse eixo, procuravam investigar a Matemática informal, ou não escolar, presente em determinados contextos culturais, numa abordagem da Etnomatemática e, apenas um, sobre modelagem.

a) Matemática Financeira (2)

b) Marcenaria em um contexto de formação de professores (1)

c) Conceitos matemáticos usados por pedreiros (1)

d) Regra de três e percentagem em cálculo trabalhista (1)

e) Conceitos de incógnita, variável e equação do 1º grau pautada na modelagem (1)

f) Etnomatemática dos remanescentes do quilombo de Palmares (1)

g) Etnomatemática e a cultura digital (1)

**Eixo 9** – Os estudos deste eixo apresentam algumas particularidades por abranger questões diferenciadas, não se inseriram nas temáticas anteriores e estão representados a seguir:

a) Profissionalidade e identidade do professor (1)

b) O papel do professor perante as atividades investigativas e dificuldades de ensino e/ou aprendizagem (1)

c) Dificuldades individuais dos estudantes com relação ao conhecimento matemático (1)

d) A afetividade no processo ensino e aprendizagem de Matemática (1)

e) Diferença no processo de aprendizagem dos alunos na resolução de tarefas (1)

**Considerações finais**

Alguns aspetos foram relevantes, no presente trabalho, para compreender como a estrutura curricular do curso influi nas tendências temáticas das pesquisas realizadas pelos professores da Educação Básica. Foram levados em consideração, os objetivos específicos do curso; as disciplinas; as diversas atividades integradoras e a pesquisa desenvolvida.

Considerando o universo de 135 pesquisas, 44%, foram produzidas com foco no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Esse percentual é considerável e reflete a importância para o professor da Educação Básica em repensar a prática pedagógica a partir de suas necessidades e vivencias. Vale ressaltar que os professores, nos últimos tempos têm participado de cursos de formação continuada, os quais, por sua vez, além de não tangenciar os conteúdos específicos e sua didática, em muitos casos, não são desenvolvidos no contexto escolar. Essas propostas tendem a ser desarticuladas da realidade profissional e, muitas vezes, o conhecimento ali desenvolvido não é levado em consideração, assim como as opiniões, experiências e necessidades dos professores.

Entende-se, dessa forma, que o curso, por suas características e como espaço de formação do professor da Educação Básica, tem possibilitado que os professores encontrem respostas às suas indagações ligadas ao cotidiano e à sua prática, uma vez que podem testar em situações reais de sala de aula e refletir sobre os resultados dessa experiência. Este fato revela que há aproximação com um dos objetivos do curso que é: “produzir um trabalho de pesquisa que contribua para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.”.

Outro foco de destaque, apresentado no mapeamento, refere-se à análise comparativa de documentos oficiais; livros didáticos e a prática docente. Essa temática representa um percentual de 26% das pesquisas produzidas no período e totaliza 35 trabalhos. As pesquisas com este foco manifestaram a preocupação na maneira pela qual os conteúdos constantes das propostas oficiais vêm sendo desenvolvidos na prática, ou mesmo, são apresentados nos livros didáticos. O professor ao pesquisar essa temática tem a possibilidade de fazer uma releitura mais crítica sobre os conteúdos dos livros didáticos; das propostas curriculares e, também, como vem sendo desenvolvendo na sala de aula.

Outra abordagem das pesquisas dos egressos, refere-se ao desenvolvimento de cursos de formação continuada, seja por meio de minicursos, ou mesmo em grupos de estudo, pautando-se na compreensão que o professor tem de alguns conteúdos, ou mesmo sobre a conceção e/ou práticas e saberes sobre os conteúdos de Matemática, ou ainda, a respeito da utilização de ferramentas, por exemplo, software. Totalizam-se 17 pesquisas, correspondendo a aproximadamente 12,5% do total.

Essa temática que envolve minicursos ou mesmo a partir de grupos de estudos tem sua relevância, uma vez que proporciona ações conjuntas, possibilitando que o professor reflita sobre sua atuação colaborativamente e de um modo mais eficaz do que se estivesse sozinho, visto que a profissão docente ainda é muito marcada pelo individualismo, e não há uma cultura de trabalho conjunto para gerar um conhecimento que contribua para o próprio desenvolvimento profissional do professor.

Outro aspeto abordado no mapeamento tem como foco a histórica da Matemática, ou a histórica da Educação; na Matemática informal, ou não escolar, presente em determinados contextos culturais, em uma abordagem da Etnomatemática e apenas uma pesquisa a abordagem é em Modelagem. Essas pesquisas totalizam-se 16 produções e corresponde a aproximadamente 12% do total.

Essa temática possibilita que o professor repense as atividades, seja em sala de aula ou em espaços informais, visando a contextualização em uma perspetiva de problematização, ampliando a conceção sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Um fato que vale ressaltar, é que o professor não tem o afastamento físico do trabalho enquanto cursa o Mestrado Profissional, isso pode haver, de forma mais rápida, não só uma valorização e um sentido maior do papel da pesquisa sobre a prática, como também uma repercussão mais imediata sobre o seu desempenho.

Diante do exposto, pode-se, então, considerar que a estrutura curricular do curso de Mestrado Profissional por suas características e especificidade, tanto no que se refere às disciplinas voltadas para os conhecimentos matemáticos; como às disciplinas respeitantes aos conhecimentos didáticos – Pedagógicos; seminários e grupos de estudos – vem proporcionando a realização de pesquisas, em sua maioria, com foco no processo de ensino e aprendizagem e análise comparativa dos documentos oficiais e dos livros didáticos, promovendo, assim, um repensar sistemático sobre as questões postas pelo cotidiano escolar.

O curso com essas características e perfil, muda a perspetiva perpetuada que confere à escola a função de transmissora de conhecimentos, passa a ser, sobretudo, produtiva ao discutir as questões do seu cotidiano com mais autonomia, uma vez que, ao pesquisar, o professor mobiliza ações em torno dos problemas que o circundam e o afligem.

## Referências


Bardin, L. (2000). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70 Lda.

Ferreira, A. C. (2003). Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: uma experiência de trabalho colaborativo. (Tese de doutoramento, Universidade de Campinas)

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da pesquisa brasileira em Educação Matemática*. (Tese de doutoramento, Universidade de Campinas)

Melo, M. V. (2006). *Três décadas de pesquisa em educação matemática na UNICAMP: um estudo histórico a partir de teses e dissertações*. (Tese de doutoramento, Universidade de Campinas)

Ponte, J.P. & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-30.

Silva, J. N. (2003). A formação contínua de professores: contradições de um modelo. In.: M. C. Moraes, J. A Pacheco, & M. O. Evangelista, (Orgs.), *Formação de Professores: perspectivas educacionais e curriculares* (pp. 105-126). Minho, Portugal: Editora Porto.

# Explorando as experiências de fluxo em matemática de estudantes futuros Professores de Educação Básica

*Ana Belén Montoro Medina* [1], *Francisco Gil Cuadra*[2], *Fátima Paixão*[3]
[1]Universidade de Almeria, Espanha, amontoro@ual.es
[2]Universidade de Almeria, Espanha, fgil@ual.es
[3]Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro, Portugal

**Resumo**. *As experiências de fluxo, estados de máxima concentração e desfrute, relacionam-se positivamente com o desempenho académico e com o compromisso com a matéria com a qual se produz. O presente trabalho explora as características das tarefas matemáticas que têm influência nas experiências de fluxo de estudantes futuros Professores do Ensino Básico (6-12 anos) ao trabalharem em grupo. Administrou-se um questionário fechado logo a seguir à conclusão da tarefa para identificar se os 230 estudantes da disciplina de "Ensino e Aprendizagem de Geometria e Medida" experimentaram fluxo. Além disso, gravaram-se alguns grupos de estudantes durante a realização das tarefas e recolheu-se informação sobre a sua experiência prévia em matemática. Os resultados sugerem que estabelecer metas claras, proporcionar feedback imediato, sentir-se capaz de resolver a tarefa, considerá-la interessante e útil são aspetos que favorecem a aparição de fluxo.*

**Abstract**. *Flow experiences are states of deep concentration and enjoyment with the activity which is carried out. So, it is positively related to high performance and engagement with the activity that produced it. This work explore which aspects of mathematical tasks make easier flow to take place or block it to pre-service primary teachers while working in group. For this purpose, a closed questionnaire used to identify flow experiences was administrated to 230 students who attended the course "Teaching and learning of geometry and measure in Primary Education", at the end of each of nine sessions. Moreover, some groups of student were videotaped doing the task and past experiences with mathematics information were collected. Results highlight the importance to flow of relevant and interesting tasks which set clear goals and provide immediate feedback, and having confidence in being able to accomplish the task.*

**Palavras-chave**: *experiências de fluxo; motivação em matemática; tarefas; formação de professores; ensino básico*

## Introdução

Nas últimas décadas evidenciou-se a importância dos fatores afetivos e motivacionais na aprendizagem. A motivação é a força ou impulso que nos conduz a fazer algo e, portanto, regula a direção e intensidade da conduta humana (Kanfer, 1994).

Se o motivo pelo qual se realiza uma atividade lhe é externo (motivação extrínseca), como obter uma recompensa ou evitar um castigo, o comportamento cessa ao eliminar esse estímulo. Ao contrário, quando os motivos pelos quais se realiza uma atividade lhe são internos (motivação intrínseca) como a curiosidade, o interesse ou o desfrute que produz, a atenção está centrada na atividade e a duração da motivação é maior (Deci & Rean, 1985).

A teoria do fluxo, enquadrada nas teorias da motivação intrínseca, surgiu do interesse em conhecer o que o ser humano experimenta quando se implica em atividades por puro prazer e as suas causas (Csikszentmihalei & Csikszentmihalei, 1998). Não obstante, apesar de ter começado nos ambientes dos artistas que passavam muitas horas a pintar e a esculpir com grande concentração, a influência das experiências de fluxo no desempenho académico (Larson, 1998; Heine, 1997) e no compromisso com a atividade na qual se experimenta (Whalen, 1998) despertou o interesse pela sua aplicação aos meios escolares. Em concreto, as investigações de Zhu (2001) sugerem que é mais provável que os alunos experimentem fluxo na aula quando os seus professores estão em fluxo. Preocupados com os altos níveis de ansiedade com a matemática no coletivo de estudantes, futuros Professores do Ensino Básico (em Espanha, Primária - ensino para crianças de 6-12 anos), e as altas taxas de abandono dos cursos relacionados com a matemática (Pérez-Teteca, 2012), estabelecemos como meta determinar as condições para que os estudantes futuros Professores do Ensino Básico tenham maior oportunidade de experimentar fluxo com tarefas matemáticas.

Neste texto apesentamos um estudo exploratório sobre as experiências de fluxo de estudantes futuros Professores do Ensino Básico da Universidade de Almeria, Espanha.

**Quadro teórico**

Ainda que dar uma ideia intuitiva do que sente uma pessoa quando se encontra em estado de fluxo seja relativamente fácil, não existe uma definição universalmente adotada (Rodríguez-Sánchez, Cifre, Salanova, & Åborg, 2008). Depois de uma revisão das definições de fluxo e dos instrumentos utilizados nas investigações anteriores (Montoro, 2014), decidimos adotar a utilizada por Ghani e Deshpande (1994, p. 382), ou seja, descrever o fluxo como "(a) um estado de total concentração na atividade e (b) o desfrute derivado da atividade”; sendo, portanto, estes elementos aspetos chave para a sua operacionalização.

A aparição de estados de fluxo depende da tarefa, da pessoa e do ambiente em que aquela se realiza (Csikszentmihalei & Csikszentmihalei, 1998). Destes três aspetos, as tarefas e a sua organização supõem uma variável controlável pelo professor uma vez que este é o responsável por as selecionar e implementar, pelo que decidimos centrar o nosso interesse na análise do tipo de tarefas que produzem fluxo em estudantes futuros Professores do Ensino Básico.

Nakamura e Csikszentmihalei (2002) afirmam que para que se produza a experiência de fluxo é necessário proporcionar metas claras, *feedback* imediato e um equilíbrio entre as aptidões do sujeito e o desafio que a atividade propõe. Ou seja, uma atividade é gratificante para um sujeito se este a encara como um desafio que acredita que pode superar. Pelo contrário, ainda que o nível de desafio e de aptidões estejam em equilíbrio, se o sujeito não considera a atividade desafiante, sente apatia; se os desafios são demasiado altos, sente frustração e ansiedade; e, se os desafios são demasiado baixos em relação às suas capacidades, sente aborrecimento (Figura 1).

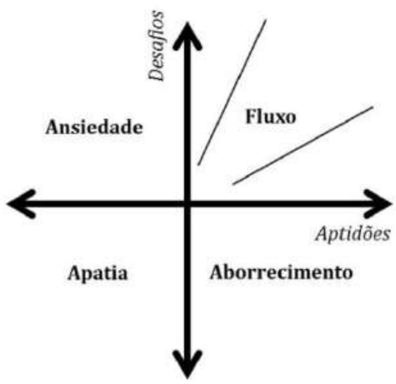



**Figura 1.** Modelo dos quadrantes de fluxo

Este modelo, válido no caso de pessoas com talento e/ou atividades escolhidas livremente, não se adapta bem aos dados recolhidos por Schweinle, Turner e Meeer (2008) ao terminar aulas de matemática obrigatórias de estudantes de 5.º e 6.º anos com aptidões de nível médio. Neste caso, os níveis mais altos de eficiência e de afeto (motivação e emoção) alcançam-se quando os estudantes se confrontam com desafios ligeiramente superiores aos que normalmente enfrentam, mas as suas aptidões são superiores ao nível do desafio. De facto, os desafios podem ser percebidos como uma ameaça à eficácia, sobretudo quando as aptidões são baixas (Nakamura, 1998; Schweinle, Turner, & Meeer, 2008).

**O estudo**

A maioria das investigações anteriores estudou a frequência de fluxo num curso ou ambiente de aulas: um curso de matemática (Heine, 1997); um programa de educação física (González-Cutre, Sicilia, Moreno, & Fernández-Balboa, 2009); com novas tecnologias (Rodríguez-Sánchez *et al.*, 2008). Outras analisaram o fluxo na vida diária (Whalen, 1998), no trabalho, ou na escola sem se centrarem em áreas específicas (Nakamura, 1998; Shernoff, Csikszentmihalei, Schneider, & Shernoff, 2003).

Pelo contrário, Schweinle, Turner e Meeer (2006) recolheram dados de várias aulas de matemática e analisaram-nas para compreender por que se experimentou fluxo numas e não noutras. Da mesma maneira, Egbert (2003) comparou o fluxo produzido em distintas tarefas propostas a estudantes com talento que participavam num curso de língua estrangeira. Nesta segunda perspetiva, no nosso estudo aplicamos a teoria do fluxo para analisar a experiência de estudantes futuros Professores do Ensino Básico (estudantes normais) numa disciplina de matemática e sua didática. Mais concretamente, recolhemos informação em diferentes sessões de trabalho em grupo e comparamo-las para explicar:

a) se estudantes futuros Professores do Ensino Básico, cujo domínio de conhecimentos matemáticos é médio-baixo, experimentam fluxo ao trabalhar em grupo com tarefas matemáticas;

b) os aspetos das tarefas que facilitam o seu aparecimento.

Para responder a estas questões, recolheu-se informação através de questionários (para medir o fluxo, explorar as crenças, a experiência prévia com a matemática e os seus conhecimentos prévios), observações de aulas e gravações em vídeo.

*Amostra*

No estudo participaram 230 professores do ensino básico em formação inicial da disciplina de “Ensino e Aprendizagem de Geometria e Medida no Ensino Básico”, incluída no segundo ano do Curso de Formação de Professores do Ensino Básico da Universidade de Almeria, Espanha. Esta disciplina constitui a sua primeira abordagem à matemática e sua didática, abarcando parte do que Shulman (1986) denomina conhecimento de conteúdo matemático e conhecimento didático do conteúdo.

A turma analisada era muito heterogénea: 45% dos estudantes provêm da área de ciências sociais no ensino secundário (*bachillerato*, em Espanha), 20% da área científica, 8% da área das artes, 20% vêm a partir de cursos de Formação Profissional; e 7% entram por provas de acesso especiais. Este leque faz com que encontremos estudantes com um alto domínio das matemáticas e estudantes que as abandonaram tão cedo quanto lhes foi possível, começando o curso sem sequer um bom domínio de conteúdo da educação básica, como sejam as operações com decimais, a confusão entre perímetro e área e resolução de problemas.

*Tarefas*

Heine (1997) evidenciou que os estudantes com talento matemático que experimentavam fluxo com maior frequência frequentavam cursos onde o trabalho individual e em grupo prevalecia face às exposições do professor e as tarefas tinham um nível de complexidade intermédio, centradas na aplicação de conteúdos conhecidos a situações novas. Por isso, decidimos comparar o fluxo produzido por nove tarefas: cinco dedicadas a conteúdos de medida e cinco a conteúdos de geometria. Para as realizar, os estudantes agruparam-se livremente em grupos de quatro ou de cinco elementos, que se mantiveram inalteráveis em cada quadrimestre. A tabela 1 mostra uma breve descrição das tarefas realizadas.

**Tabela 1**. Descrição das tarefas

| Tarefa | Descrição | Material |
|---|---|---|
| 1 | Ordenar visualmente objetos relativamente ao seu comprimento, massa, capacidade, superfície e volume e comprovar a ordem correta | Prateleiras, cordas, esferas de diferentes materiais, balança, jarras, água, cartolinas de forma diferente, papel, tesoura, duas pedras e um frasco de espuma e cubos. |
| 2 | Medir o comprimento de diferentes partes do corpo e encontrar relações entre elas. Calcular a capacidade de un recipiente, punhado e dos pulmões. Calcular a superfície corporal | Fita métrica, provetas, balões, cubos, agua, balança, papel higiénico. |
| 3 | Estimar e calcular a medida das dimensões de um edifício | Ciclómetro, fita métrica, vídeo explicativo sobre o Teorema de Tales |
| 4 | Obter fórmulas para o cálculo da superfície de diferentes figuras tomando como unidade de medida um triângulo equilátero de lado unitário | Geoplano, papel isométrico |
| 5 | Utilizar diferentes instrumentos para medir objetos da aula | Nónio, medidor laser, espessómetro, micrómetro, inclinómetro e dinamómetro |
| 6 | Obter a fórmula do comprimento da circunferência, da área do círculo, construir polígonos regulares inscritos na circunferência e reproduzir figuras formadas por circunferências | Fita métrica, corda, régua, compasso |
| 7 | Construir todos os poliedros regulares, analisar as suas características e fabricar os seus duais | Modelos truncados e gomas |
| 8 | Truncar poliedros regulares e obter a configuração do poliedro obtido, seu número de faces, arestas e vértices | Modelos estampados, plasticina, palhinhas e fio |
| 9 | Identificar as representações de uma mesma figura, construir todos os bicubos, tricubos e tetracubos possíveis, e representá-los em forma isométrica, ortogonal e topográfica | Policubos, papel isométrico |

*Questionário de fluxo*

O principal instrumento desta investigação é um questionário de elaboração própria que consta de seis itens para identificar experiências de fluxo (dois itens para a concentração e quatro itens para o desfrute) e 10 itens que medem o nível de complexidade, clareza das metas, *feedback*, utilidade e interesse da tarefa (Montoro, 2014). Nas respostas, os participantes indicaram o grau de acordo com cada afirmação numa escala de valoração de cinco pontos, sendo o 1 totalmente em discordância e o 5 totalmente em concordância.

Vale a pena destacar que o questionário conta com itens com sentido positivo e com itens com sentido negativo que permitem detetar possíveis inconsistências nas respostas dos participantes; por exemplo, para a concentração utilizou-se: "A minha atenção estava totalmente em atividade" e "A minha concentração era interrompida por qualquer coisa". Além disso, foi desenhado e validado com outros estudantes do mesmo Curso (Montoro, 2014).

O questionário administrou-se ao finalizar cada sessão de trabalho. Pediu-se aos estudantes para avaliarem a tarefa realizada e como se tinham sentido a realizá-la. Pediu-se sinceridade nas respostas.

*Observações e gravações em vídeo*

Solicitou-se aos grupos de estudantes voluntários para serem gravados em vídeo durante a realização de cada uma das tarefas.

Para analisar as gravações, partimos de um sistema de 16 categorias preestabelecidas baseadas na revisão da literatura prévia. Por um lado, utilizámo-las para identificar experiências de fluxo: concentração, falta de concentração, desfrute, ausência de desfrute, emoções positivas e emoções negativas. E, por outro lado, códigos que refletiam a presença ou a ausência dos aspetos que a literatura associa ao fluxo e que estavam contidos no questionário fechado, atrás descrito, ou seja, complexidade percebida, metas claras, *feedback*, utilidade e interesse. Em resumo, visualizamos as gravações e extraímos fragmentos associados a cada uma destas categorias.

Posteriormente, analisámos se se produziam mudanças no nível de fluxo de cada um dos estudantes, isto é, se deixavam de estar desconcentrados e/ou desmotivados para se mostrarem concentrados e desfrutando ao realizar a tarefa e vice-versa. Quando isto sucedia, voltava-se a visualizar o vídeo na procura de possíveis causas para a mudança: um aumento substancial da complexidade da tarefa, interações entre os estudantes, interações com o professor…

Neste ponto, prestar atenção ao que cada estudante dizia e/ou fazia em cada momento, as suas expressões faciais, os seus gestos, a postura, o tom de voz,… é essencial. Por isso, transcrevemos os fragmentos-chave em duas colunas, uma dedicada a descobrir o que cada estudante dizia e outra para descrever como o dizia e o que que queria dizer em cada momento. Consideramos momentos-chave os que evidenciavam estar carregados de emoções positivas ou negativas assim como a transição entre mudanças de atitudes e/ou emocionais.

## Resultados

Nesta parte, presentamos os resultados obtidos com os instrumentos acima descritos e que dão resposta às questões do nosso estudo:

a) Podem os estudantes do curso de formação de Professores do Ensino Básico, cujo domínio de conhecimentos matemáticos é médio-baixo experimentar fluxo ao trabalhar em grupo com tarefas matemáticas?

Para abordar esta questão, em primeiro lugar, calculamos a pontuação média nas variáveis concentração e desfrute para carda tarefa e para cada estudante.

Tendo em conta que as experiências de fluxo são caracterizadas por altos níveis de concentração e desfrute (Ghani & Deshpande, 1994; Rodríguez-Sánchez *et al*., 2008), consideramos que os estudantes experimentaram com a tarefa quando a pontuação média em cada uma destas duas variáveis era superior a quatro (equivalente a estar de acordo em todas as afirmações positivas).

Deste modo, obtivemos que 66.31% dos questionários recolhidos correspondiam a situações de fluxo. Este resultado não é surpreendente, já que as tarefas avaliadas se centravam na melhoria das destrezas e dos conhecimentos sobre geometria e medida dos estudantes futuros Professores do Ensino Básico, ao mesmo tempo que apresentam materiais úteis e tarefas adaptáveis às aulas do próprio ensino básico. Não obstante, a percentagem de estudantes que experimenta fluxo variou com a tarefa (tabela 2).

**Tabela 2**. Percentagem de estudantes em fluxo em cada tarefa

| Tarefas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % Estudantes em fluxo | 74.2 | 72.1 | 62.7 | 49.7 | 79.6 | 55.6 | 70.5 | 60.3 | 75.0 | 66.31 |

Além disso, dos 230 participantes no estudo, 96% dos estudantes afirma ter experimentado fluxo com, pelo menos, uma tarefa matemática, apenas 4% não experimentou fluxo com nenhuma atividade, o que sugere que não é necessário ter altas capacidades matemáticas para experimentar fluxo durante a sua aprendizagem. Por outro lado, apenas 7.39% dos estudantes declararam ter experimentado fluxo em todas as tarefas, ou seja, 88.61% dos estudantes variam as suas respostas ao questionário dependendo da tarefa que produziu a experiência, o que faz supor que, como destacam Csikszentmihalei e Csikszentmihalei (1998), o aparecimento de fluxo está influenciado, além de por características pessoais também pela tarefa, em si.

As gravações realizadas apoiaram a afirmação anterior. Por exemplo, encontramos um estudante cuja autoconfiança e desempenho na disciplina eram baixos, que afirmou experimentar fluxo e se mostrou muito implicado durante a tarefa 1. Pelo contrário, na tarefa 4 limitou-se exclusivamente a preencher o documento que devia entregar à professora, mostrando-se aborrecido e desmotivado.

b) Que aspetos das tarefas facilitam o aparecimento de experiências de fluxo ao trabalhar em grupo?

Em primeiro lugar, decidimos analisar a influência dos aspetos vinculados/associados ao fluxo em investigações prévias, a maioria delas realizadas com pessoas com talento e/ou em atividades escolhidas voluntariamente.

Para isso, calculamos a média, desvio padrão de cada uma destas variáveis em situações de fluxo e não-fluxo, estudamos a significância das diferenças entre as pontuações médias obtidas por meio do teste U de Mann-Whitmee e o tamanho do efeito destas diferenças utilizando la fórmula de Cohen (tabela 3).

**Tabla 3**. Relação entre diferentes aspetos das tarefas e as experiências de fluxo

| | Fluxo (N=1580) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sim (N=1048) | | Não (N=532) | | | | |
| | $\bar{x}$ | $\sigma$ | $\bar{x}$ | $\sigma$ | TE | DM | P |
| Dificuldade | 2.866 | 0.938 | 3.298 | 0.946 | 0.445 | 0.432 | 0.000 |
| Metas | 4.014 | 0.809 | 3.314 | 0.868 | 0.769 | 0.700 | 0.000 |
| *Feedback* | 4.017 | 0.811 | 3.465 | 0.797 | 0.614 | 0.552 | 0.000 |
| Interesse | 4.633 | 0.471 | 3.879 | 0.771 | 0.997 | 0.755 | 0.000 |
| Utilidade | 4.561 | 0.542 | 3.992 | 0.723 | 0.733 | 0.570 | 0.000 |

Como vemos, aparecem diferenças significativas em todas as variáveis ($p<0.05$). Por outro lado, apesar do tamanho do efeito das diferenças entre a clareza de metas e o *feedback* ter sido elevado ($TE>0.5$), com pontuações superiores nas situações de fluxo, o tamanho do efeito da variável complexidade foi moderado ($0.25<TE<0.5$), percebendo as tarefas como mais fáceis em situações de fluxo. Nakamura e Csikszentmihalei (2002) afirmam que para experimentar fluxo é necessário que o sujeito considere a tarefa como um desafio que pode superar, estabeleça metas claras e proporcione *feedback* imediato. Os nossos dados gravados apoiam parcialmente esta afirmação.

Além disso, confirma-se a importância do interesse e da utilidade no fluxo sublinhada por outros autores que estudam o fluxo com estudantes normais (Shernoff, Csikszentmihalei, Schneider, & Shernoff, 2003; Schweinle, Turner, & Meeer, 2006; e, Rodríguez-Sánchez *et al*., 2008). Os nossos resultados sugerem que estes aspetos são necessários mas não suficientes para sentir fluxo.

Não obstante, para conhecer a importância de cada um destes aspetos na altura de se concentrar e desfrutar com uma tarefa realizamos uma análise descriminante. Esta técnica permite identificar as características que diferenciam os dois grupos e criar uma função capaz de distinguir, com a maior precisão possível, os membros de um grupo e do outro. No nosso caso, queremos conhecer que combinação de variáveis (complexidade, metas claras, *feedback*, interesse e utilidade) diferencia melhor os estudantes que experimentaram fluxo com a tarefa, estavam concentrados mas não desfrutaram, desfrutaram mas não estavam concentrados ou não estavam concentrados e não desfrutaram.

Na figura 2 aparecem representados, com segmentos verticais e horizontais, os intervalos de confiança das pontuações médias dos quatro grupos nas funções obtidas da análise descriminante e que explicam a percentagem de 99,1% da variância dos dados.

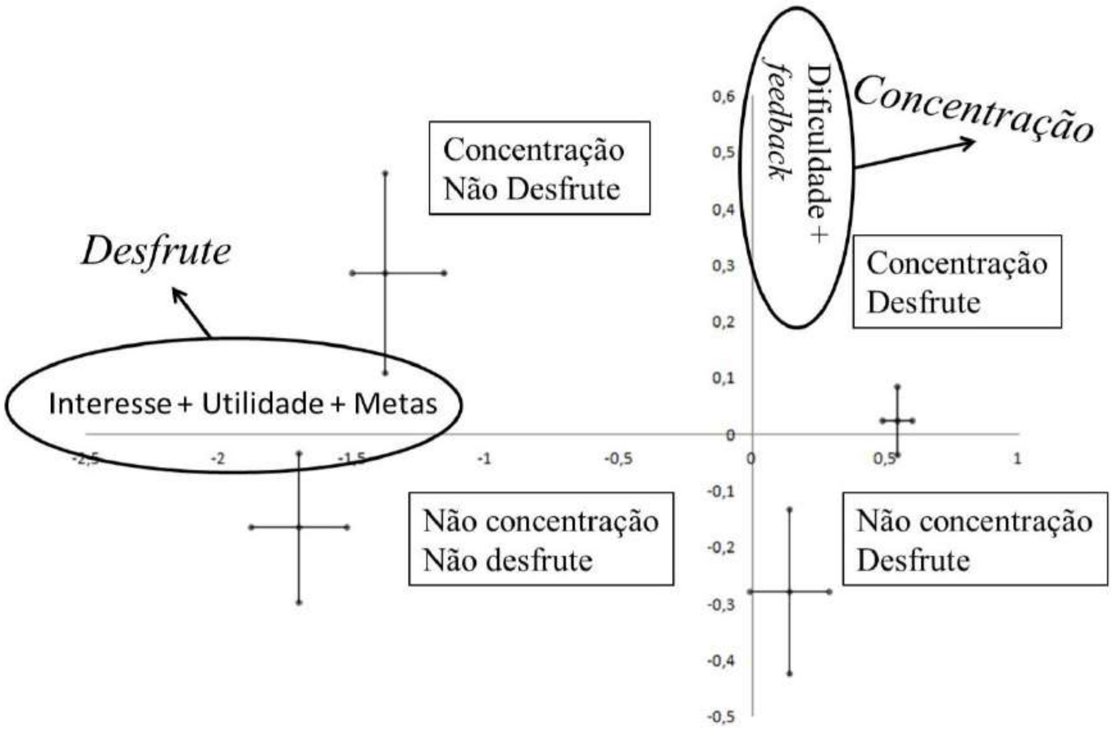



**Figura 2:** Resultado da análise discriminante

A função representada no eixo horizontal permite distinguir entre os estudantes que desfrutam e os que não desfrutam, e inclui principalmente as variáveis interesse, utilidade e clareza de metas. A segunda, composta pela dificuldade e pelo *feedback* e representada no eixo vertical, permite diferenciar se o estudante estava concentrado ou não na tarefa. Fixando-nos na figura 2, percebemos que o limite superior dos intervalos de confiança da função no eixo X dos estudantes que desfrutam está muito próximo do limite inferior dos intervalos de confiança dos estudantes que não desfrutam. Por outro lado, o intervalo de confiança da função representada no eixo Y correspondente aos estudantes que não se concentram nem desfrutam aproxima-se dos que desfrutam. Este aspeto indica que ambas as funções são necessárias para caracterizar os dois grupos. Ou, dito de outra forma, todas estas variáveis influem no aparecimento de fluxo.

A importância da confluência de todas estas variáveis foi observada na análise das gravações. Por exemplo, ao analisar como é que os dois grupos de estudantes encararam a tarefa quatro, ou seja, a que produziu menor percentagem de fluxo nos estudantes, e a tarefa 1, que provocou fluxo a uma percentagem de 74% dos estudantes, apercebemo-nos de que a perceção de complexidade e confiança nas próprias capacidades para resolver as tarefas são muito diferentes.

Na tarefa 1, relativa à comparação de grandezas, todos os estudantes consideraram que é relativamente fácil, partilharam uma linguagem comum e sentiram-se seguros na altura de dar a sua opinião. Ao contrário, a tarefa 4, centrada na obtenção de fórmulas para o cálculo da área tomando como unidade um triângulo equilátero de lado um, foi considerada como muito complexa. Nesta situação, todos começaram a trabalhar na tarefa, os que tinham uma autoconfiança mais elevada levando um pouco as rédeas e o resto tentando compreender as ideias e dando os seus contributos. As diferenças no papel que desempenham os estudantes dentro do grupo, a sua autoconfiança e os seus conhecimentos e destrezas matemáticas fazem com que alguns estudantes se desinteressem.

Neste sentido, as gravações sugerem que, mais ao nível da complexidade, está a confiança nas próprias capacidades para encarar as dificuldades e resolver com êxito a tarefa, o que afeta o aparecimento de fluxo.

Por outro lado, consta-se a importância da clareza de metas e *feedback*. Por exemplo, na tarefa de comparação, todos os estudantes tinham claro o seu objetivo e receberam, em certa medida, *feedback*. Contudo, na tarefa de obtenção de fórmulas aparece um conflito entre as metas da professora e de alguns estudantes do grupo ao começar a trabalhar com o retângulo. Enquanto a professora queria que os estudantes obtivessem uma fórmula para o cálculo de áreas com a qual, medindo com uma régua e substituindo os valores nela se obtivesse o resultado, para muitos estudantes, o objetivo consistia em encontrar um padrão, um modo de calcular a área com o geoplano ou com o papel isométrico. Isto fez com que nestas figuras o geoplano proporcionasse *feedback* enganoso, na medida em que, ao supor que a altura de um triângulo equilátero mede o mesmo que o lado, as suas fórmulas funcionavam perfeitamente. Neste ponto da tarefa, a maioria dos estudantes começou a perder a confiança na sua capacidade para resolver a tarefa e a desistir.

**Conclusões**

Esta investigação mostra alguns exemplos de estudantes futuros professores do Ensino Básico que experimentaram fluxo ao realizar algumas tarefas apesar de a sua experiência prévia com a matemática ser negativa, terem iniciado o curso desmotivados em relação à matemática, produto de más experiências durante a sua aprendizagem no passado, terem baixa autoconfiança nas suas capacidades para a matemática e/ou a crença de que esta é uma matéria compreensível unicamente para poucos. Ou seja, qualquer estudante pode experimentar fluxo durante o processo de aprendizagem da matemática. Para além disso, comprovar que as experiências de fluxo dependem das tarefas propostas incitam ao aprofundamento de aspetos das tarefas que facilitam o fluxo. Deste modo, os professores contarão com uma ferramenta para o desenvolvimento de tarefas que deem lugar a experiências positivas na aula.

Até agora, a maioria das investigações que tinham relacionado estes aspetos com as experiências de fluxo tinha-se centrado no modo como o professor propunha as tarefas e as desenvolvia. Isto é, se se estabelecem metas claras, o nível de desafio, o tipo de *feedback* proporcionado, torna-se a tarefa interessante e outorga-se-lhe utilidade. Nestas tarefas, os estudantes trabalharam de maneira autónoma, contando com a ajuda do professor quando se sentiam com dificuldades. Mesmo que a interação com o professor seja importante, nestas situações torna-se mais evidente que a perceção de todos os sujeitos acerca destas variáveis não tem porque ser similar. Por isso, se recolheu informação, para além do nível de concentração e de desfrute experimentado, também sobre o nível de dificuldade, desafio, clareza das metas, *feedback*, utilidade e interesse percebido por cada sujeito em cada tarefa de trabalho em grupo.

Os resultados mostram que o interesse, a utilidade e o estabelecimento de metas claras facilitam o desfrute com a tarefa. Ao contrário, o nível e complexidade da tarefa e proporcionar *feedback* imediato influenciam principalmente a concentração na tarefa. Isto é, estes resultados confirmam a importância de ter em conta estes aspetos para facilitar o aparecimento de experiências de fluxo na formação de Professores do Ensino Básico. Além disso, corroboram os resultados de Schweinle, Turner, e Meeer (2008) que mostram que nos estudantes com aptidões médias, as melhores experiências produzem-se quando percebem desafios ligeiramente superiores ao normal mas a sua aptidão é muito superior. No nosso estudo, tratou-se de situações em que os estudantes consideraram a tarefa com um nível de dificuldade médio-baixo.

Contudo, a análise das gravações sugere que a autoconfiança nas próprias capacidades para superar a tarefa, mais do que o nível de complexidade da tarefa, é um aspeto-chave para experimentar fluxo. Este aspeto relacionado com a perseverança deveria ser analisado em profundidade. Por outro lado, seria relevante avaliar, em investigações futuras, a influência das interações entre os membros do grupo bem como a sua composição no aparecimento de fluxo ao trabalhar em grupo.

Por último, há que destacar que os nossos resultados se centram exclusivamente em estudantes de formação de professores do Ensino Básico, pelo que seria interessante comprovar se se alargam ou não a outros coletivos e/ou idades.

## Referências

Csikszentmihalei, M., & Csikszentmihalei, I. S. (1998). *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia* (J. Aldekoa. Trad.). Bilbao: Desclée de Brouwer. (Trabajo original publicado en 1998).

Deci, E. L., & Rean, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior.* Nueva Eork: Plenum.

Egbert, J. (2003). A study of flow theory in the foreign language classroom. *The modern Language Journal*, 87, 499-518.

Ghani, J. A., & Deshpande, S. P. (1994). Task characteristics and the experience of optimal flow in human-computer interaction. *The Journal of Psychology*, *128*, 381-391.

González-Cutre, D., Sicilia, A., Moreno, J.A. & Fernández-Balboa, J.M. (2009). Dispositional flow in physical education: Relationships with motivational climate, social goals, and perceived competence. *Journal of Teaching in Physical Education*, *28*, 422-440.

Heine, C. A. (1997). *Tasks enjoyment and mathematical achievement*. (Tese doutoramento não publicada, Universidade de Chicago, Illinois)

Kanfer, R. (1994). Motivation. In N. Nicholson (Ed.), *The black well dictionary of organizational behavior* (pp. 1-53). Oxford: Blackwell publishers.

Larson, R. (1998). Flujo e escritura. In M. Csikszentmihalei & I.S. Csikszentmihalei (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Montoro, A. B. (no prelo). *Motivación e matemáticas: Experiencias de flujo en estudiantes de Maestro de Educación Primaria*. Editorial Universidad de Almería. España.

Nakamura, J. (1998). Experiencia óptima e las aplicaciones del talento. In M. Csikszentmihalei & I.S. Csikszentmihalei (Eds.*), Experiencia óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia* (pp. 71-90). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Nakamura, J., & Csikszentmihalei, M. (2002). The concept of flow. In C. R. Sneder & S. J. Lopez (Eds.), *Handbook of Positive Psychology* (pp. 89-105). Oxford: Oxford University Press.

Pérez-Teteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras*. (Tese doutoramento não publicada, Universidade de Granada)

Rodríguez-Sánchez, A.M., Cifre, E., Salanova, M., & Åborg, C. (2008). Techno flow among Spanish and Swedish students: a confirmatory factor multigroup analysis. *Anales de Psicología*, *24*, 42-48.

Schweinle, A., Turner, J. C., & Meeer, D. K. (2006). Striking the right balance: Students´ motivation and affect in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*, *99* (5), 271-293.

Schweinle, A., Turner, J. C, & Meeer, D. K. (2008). Understanding young adolescents` optimal experiences in academic settings. *The Journal of Experimental Education*, 77 (2), 125-143.

Shernoff, D. J., Csikszentmihalei, M., Schneider, B., & Shernoff, E. S. (2003). Student engagement in high school classrooms from the perspective of flow theory. *School Psychology Quarterly, 18* (2), 158-176.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4–14.

Whalen, S. P. (1998). Flow and the engagement of talent: Implications for secondary schooling. *NASSP Bulletin*, *82*, 22-37.

Zhu, N. (2001). *The effects of teachers' flow experiences on the cognitive engagement of students.* (Tese doutoramento não publicada, Universidade de San Diego e Universidade estatal de San Diego)

# Desenvolver o conhecimento para ensinar matemática na interação entre contextos formais e não formais

*Fátima Paixão*[1], *Fátima Regina Jorge*[2]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, mfpaixão@ipcb.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, frjorge@ipcb.pt

**Resumo**. *A prática de ensino supervisionada ocupa um tempo privilegiado na formação para o ensino da matemática, promovendo o desenvolvimento de competências associadas à profissão docente, mormente aquelas que serão indispensáveis para a formação de futuros cidadãos responsáveis, ativos e implicados na construção de uma sociedade da qual a matemática é parte indissociável. Para tal, a escola deve ser uma instituição aberta à comunidade, em sintonia com a realidade, renovadora, capaz de proporcionar bem-estar pessoal, físico e social aos jovens e prepará-los harmoniosamente para o futuro.*
*Naturalmente que, se os estagiários não experienciarem situações de planificação, implementação e avaliação de percursos de ensino e aprendizagem e a construção de recursos didáticos ajustados ao ensino de conteúdos curriculares em contextos não formais, fica dificultada a ação de futuros professores no sentido da abertura da escola à comunidade e ao meio envolvente.*
*Com o estudo aqui apresentado, sustentado nas premissas e na problemática expostas, propusemo-nos desenvolver e avaliar uma estratégia formativa que proporcionasse aos nossos estagiários a oportunidade de se iniciarem no ensino da matemática, numa perspetiva integradora com outras áreas do currículo do 1.º CEB, na interação entre contextos formais e não formais. Os resultados, ao longo dos últimos três anos têm sido muito positivos.*

**Abstract.** *The supervised teaching practice occupies a privileged time in the training for teaching mathematics, promoting the development of skills associated with teaching profession, especially those that will be essential for the education of future citizens, responsible, active and engaged in building a society in which mathematics is an integral part. To this end, the school should be an open institution to the community, in tune with the surrounding reality, renewing, capable of providing personal, physical and social well-being of young people and prepare them harmoniously for the future.*
*Of course, if trainees have not experience in practice teaching, planning situations, implementation and evaluation of teaching and learning routes and the construction of teaching resources adjusted to the teaching of*

*curricular contents in non-formal contexts, is hampered their action as future teachers opening the school to the community and the environment. With this study, based on presented assumptions and problematic, we took as objective to develop and evaluate a training strategy that gives to our trainees the opportunity to engage in mathematics teaching in non-formal contexts. The results over the last three years have been very positive.*

**Palavras-chave**: *Formação de Professores; Ensino Básico; Contextos não formais; Matemática*

**Introdução**

Partimos de vários pressupostos para sustentar a intervenção que temos tido na orientação de estudos de investigação que integram os relatórios da prática de ensino supervisionada (PES) do mestrado em educação pré-escolar e ensino do 1.º ciclo do ensino básico (1.º CEB). O primeiro é que a PES ocupa um tempo privilegiado na formação dos professores uma vez que é nesse tempo que se desenvolvem acentuadamente as competências associadas à profissão docente. Um segundo pressuposto centra-se no facto de a escola persistir em se manter como um espaço fechado em que aos pequenos alunos não é proporcionada a possibilidade de estabelecerem conexões entre o saber escolar e o meio envolvente de modo a construírem um saber integrado e, portanto, mais útil. Do nosso ponto de vista, este segundo pressuposto apela a que, na formação de professores, os estagiários experienciem situações de planificação, implementação e avaliação de percursos de ensino e aprendizagem e a construção de recursos didáticos ajustados ao ensino em contextos formais mas também em contextos não formais articulados com o primeiro. Tal aspeto permite-lhes fazer a ponte para tornar a escola num espaço aberto. Por fim, num terceiro pressuposto tomamos as cidades e as suas regiões envolventes como locais em que abunda património natural e cultural rico de ideias matemáticas com elevado potencial educativo, que importa conhecer com vista a preservar e a explorar das mais diversas formas (Paixão, 2006).

Dos pressupostos enunciados, emerge a problemática de como transformar a formação dos professores que vão ensinar matemática no 1.º CEB numa oportunidade de compreenderem e usarem o património local e regional como recurso educativo. Vários estudos evidenciam que a preparação destes professores tem sido muito deficiente, pela falta de oportunidades para planificar, implementar e avaliar visitas de estudo

(Rodrigues, 2011), menos, ainda, de visitas de estudo que aproveitem os locais mais próximos da escola e das vivências dos alunos e se articulem intencional e explicitamente com os conteúdos curriculares da matemática.

O objetivo perseguido no estudo aqui apresentado foi o de desenvolver e avaliar uma estratégia no âmbito da formação inicial de professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico para o ensino da matemática centrada na interação entre contextos formais e não formais.

**Fundamentação teórica**

Educação formal e educação não formal são conceitos que não têm definições inequívocas e muito menos únicas. A UNESCO (2006) apresentou a educação formal como a que conduz a uma aprendizagem intencional que ocorre no seio de instituições inseridas em contextos organizados e estruturados e que pode conduzir a um diploma e ou certificação. Já a educação não formal é a que consiste na aprendizagem decorrente de atividades educativas planeadas, organizadas e sustentadas, fora das instituições educativas.

Entre os investigadores de educação em ciência e matemática, aumenta o consenso relativamente ao papel dos contextos não formais, considerando mesmo que esta tem lugar principalmente nesses ambientes (Domñinguez-Sales & Guisasola, 2010; Morentin, 2010; Nogueira, 2014; Osborne & Dillon, 2007). Assim, não faz sentido opor educação formal a educação não formal (Nogueira, Tenreiro-Vieira & Cabrita, 2014) e a escola não pode alhear-se deste potencial educativo que está fora das suas paredes. Do mesmo modo, as instituições de formação de professores também não o podem ignorar. É por esse motivo que Morentin (2010) evidencia a complementaridade dos dois contextos relevando o valor do não formal como recurso educativo e cultural, tanto na aprendizagem dos alunos como no desenvolvimento profissional dos professores.

Há diversos estudos e também orientações nacionais e internacionais que explicitam o valor educativo dos contextos não formais e incentivam a sua exploração como um recurso valioso (CEC, 2000; UNESCO, 2006). Contudo, há também que ter em conta que a maior parte das instituições nacionais de formação de professores não proporciona aos seus estudantes-futuros docentes formação para lidarem adequadamente com os contextos não formais de educação tirando partido deles na educação das crianças e jovens. Efetivamente, vários autores evidenciam que a preparação dos futuros professores é muito deficiente, não sendo dada oportunidade para planificarem, implementarem e avaliarem as três fases articuladas da utilização educativa de um contexto não formal (pré-visita; visita; pós-visita) (e.g. Guisasola & Morentin, 2005; Kisiel, 2006; Morentin & Guisasola, 2014; Rodrigues, 2011). Em geral, as visitas de estudo escolares a locais exteriores à escola, quando existem, restringem-se ao programa pré-estabelecido ou ocasional, guiado pelos responsáveis do local visitado (Ortigão de Oliveira, 2013). Contudo, tratando-se, em geral, de espaços temáticos contextualizados e inseridos num local concreto, as visitas de estudo tornam possível uma abordagem integradora dos saberes. Aliás, o seu âmago é o potencial para proporcionar a desejável integração curricular. E é, de facto, importante, que os futuros professores se apercebam do potencial destas como boas experiências de aprendizagem para as crianças e jovens (DeWitt & Osborne, 2007).

A educação em espaços não formais articulada com o trabalho em sala de aula pode favorecer aprendizagens de âmbito curricular e, simultaneamente, maior motivação e cooperação na realização de atividades. É já consensual que é imprescindível implicar os professores na organização cuidada das visitas de estudo escolares e integrá-las na planificação didática de modo a que estas enriqueçam, de modo explícito, as aprendizagens curriculares. Ajustando a ideia de Morentin (2010, p. 1), a escola necessita integrar os contextos não formais para melhorar a aprendizagem e os espaços extraescolares necessitam de potenciar a sua ação educativa.

Em síntese, a investigação sobre interação entre contextos formais e não formais aponta para o seu impacto positivo nas múltiplas experiências de aprendizagem dos alunos, para a necessidade de encorajar os professores a tornarem-se familiares com os locais a visitar, para a exigência de planear as atividades das visitas de forma alinhada com os objetivos curriculares e para dar tempo aos alunos para a exploração orientada do local.
Como requisito do que se acabou de referir, a formação de professores representa a oportunidade de inverter as dificuldades sentidas pelos professores e de promover aprendizagens profissionais relevantes que venham a traduzir-se nas desejadas aprendizagens significativas, ativas e socializadoras dos seus futuros alunos.

**Metodologia da Investigação**

O estudo que desenvolvemos seguiu uma metodologia qualitativa de índole analítica, descritiva e interpretativa. O delineamento da estratégia de incluir na PES dos futuros professores a formação para o ensino da matemática na interação dos contextos formais e não formais resultou do alargamento do quadro teórico já validado para o ensino e a aprendizagem e atrás referido. Os dados foram recolhidos através da reflexão ao longo da orientação dos Relatórios bem como por análise de conteúdo a esses documentos. Trata-se assim de uma investigação sempre em aberto, na qual a recolha de dados se vai ampliando com a sucessiva orientação de estudantes que aceitam o desafio de acrescentar à sua prática em sala de aula a experiência de ensino na interação entre os contextos formais e não-formais. Não são muitos!

Até este momento, orientámos 13 Relatórios nesta temática. Os resultados aqui apresentados referem-se a quatro Relatórios referentes a Projetos desenvolvidos no Horto de Amato Lusitano· Aqui apenas nos referiremos a situações relacionadas com o Horto de Amato Lusitano, para garantir maior homogeneidade aos resultados e às conclusões apresentadas.

Apresenta-se, de seguida, a caracterização geral dos Estudos desenvolvidos pelas estagiárias, o que converge para a explicitação da estratégia de formação.

**As investigações desenvolvidas na PES: Relação – Interação entre contextos de educação formal e não formal**

Na senda do que a obtenção de um grau de mestrado implica e da consideração da profissão de professor como de alta exigência, conceptual e técnica/prática, a exploração do património na formação de professores passa por proporcionar-lhes a oportunidade de desenvolver o trabalho de iniciação à investigação, que decorre integrado na PES, em ligação entre a escola em que a realizam (contexto formal) e um contexto não formal (da cidade). De facto, perante a complexidade da profissão docente, exige-se um saber próprio especializado que ultrapassa em muito o domínio dos conceitos de áreas disciplinares isoladas, interpretado por Shulman (1987) como conhecimento didático do conteúdo. Necessariamente, o tempo de PES deve, entre outros requisitos habitualmente presentes, proporcionar a ampliação da formação para "contextos alargados e multidisciplinares" (Decreto-Lei n.º 74/2006).

*Problemática geral das investigações*

A problemática geral das investigações conduzidas pelos estagiários tem sido centrada no potencial educativo da interação entre os contextos de educação formal e não formal e a possível contribuição dos segundos como impulsionadores de aprendizagens curriculares significativas e ativas dos alunos do 1.º CEB.

*Principais questões de investigação*

Os estudos desenvolvidos têm sido construídos na base das seguintes questões de investigação centrais:

(i) Em que medida as aprendizagens realizadas em contexto não formal promovem aprendizagens de âmbito curricular, significativas, ativas, integradas e socializadoras, nos alunos do ensino básico?

(ii) De que modo se estabelece, a nível didático, a relação entre os contextos formais e não formais (ou seja, como planificar, implementar e avaliar propostas de ensino e aprendizagem)?

*Objetivos dos projetos de investigação*

Com vista a dar resposta às questões de investigação formuladas, os estagiários definem objetivos identificados com:

(i) Pôr em evidência o valor dos contextos de educação não formal para a aprendizagem de conceitos, competências e atitudes.

(ii) Conceber atividades e recursos a utilizar na prática educativa que, explícita e intencionalmente, permitam apreender o valor dos contextos não formais para atingir os objetivos curriculares (focamo-nos na educação em ciências e matemática mas sempre na perspetiva da integração das áreas curriculares).

(iii) Implementar e avaliar na escola e nos espaços fora da escola, articuladamente, as atividades planeadas.

(iv) Analisar o contributo das atividades realizadas para a aprendizagem dos alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico.

*Metodologia geral dos projetos de investigação*

A metodologia geral das investigações conduzidas pelos estagiários integra-se em perspetivas qualitativas, por serem as que melhor se ajustam a estudar ambientes e problemas complexos nos quais se incluem os fenómenos educativos. As investigações são predominantemente de âmbito descritivo e interpretativo.

O enfoque qualitativo verte-se, nestas situações, num *design* de investigação-ação (Latorre, 2003). Está em jogo a exploração e a compreensão de situações que se desenvolvem na prática educativa do futuro professor, com a intenção de a descrever e interpretar de modo a contribuir para uma maior compressão e consequente melhoria da sua *praxis*. Os futuros professores desenvolvem um ciclo de investigação-ação que é planeado, refletido e modificado enquanto hipótese de prática, implementado e observado e, de novo, refletido, e que se espera que seja seguido por novos ciclos, quando forem profissionais. São envolvidos neste processo, o estagiário, o seu professor cooperante (titular da turma de 1.º CEB onde se desenvolve a PES) e as orientadoras do estudo a integrar no Relatório Final do Mestrado (neste caso, as autoras deste texto).

*Instrumentos e técnicas de recolha de dados*

Dada a complexidade do processo educativo, em particular quando se trata de professores em formação, a recolha de dados, com vista a obter respostas para as questões formuladas tem, efetivamente, que se assumir e desenvolver como multifacetada e multifocada. Assim sendo, evidenciam-se como adequados e necessários alguns instrumentos e técnicas associados às metodologias descritivas e interpretativas, usados de forma conjugada, como sejam: (i) Observação participante; (ii) Registos escritos das crianças (textos; desenhos…); (iii) Questionários às crianças e outros elementos de avaliação; (iv) Notas de campo; (v) Registos fotográficos; (vi) Diário (reflexão continuada sobre a prática de ensino); (vii) Entrevista semiestruturada (à professor cooperante - titular da turma); Como fomos dizendo, as investigações desenvolvem-se na PES no 1.º CEB e implicam o desenho de planos de ação didática que envolvem o planeamento de atividades e a construção de recursos didáticos e a sua implementação e avaliação seguidas de análise e reflexão. Os planos de ação didática são desenhados tendo em mente a valorização da interação dos contextos de educação formal e não formal para proporcionar aprendizagens significativas, ativas, integradas e socializadoras.

*Sobre o Espaço – Horto de Amato Lusitano*

O Horto de Amato Lusitano ocupa uma área de cerca de 1000 $m^2$ no espaço exterior envolvente da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco, situando-se no centro da cidade.

É constituído por três zonas contíguas, distintas pelo tipo de cultura (arbóreas e arbustivas, hortícolas e aromáticas). Há também um espaço amplo, de caminhos cimentados com um pavimento de largos quadrados, que permite a realização de atividades, como jogos de diversa natureza (Fig. 1).

Figura 1. Espaço do Horto de Amato Lusitano

O lugar rende homenagem à vida, ao trabalho e ao espírito científico do célebre médico, homem de ciência e humanista, nascido em Castelo Branco em 1511. Foi criado em 1998, através de um Projeto Ciência Viva (Salvado & Cardoso, 2004), mas acabou votado ao abandono como espaço educativo. A celebração, em 2011, dos 500 anos do nascimento do seu patrono foi o impulso para a renovação e para o reforço da sua utilização interativa com os contextos formais, em vários âmbitos, incluindo na PES dos futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico.

**Exemplos de atividades desenvolvidas no âmbito da PES**

Algumas atividades já organizadas/experienciadas pelos estagiários a quem orientámos o estudo de investigação no âmbito da PES, prendem-se com:

(i) Sementeiras e plantações - atividade central dada a natureza do espaço e o entusiasmo sempre revelado pelas crianças

(ii) Resolução de problemas - conceptual e ou através de simulação com recurso ao uso de materiais manipuláveis

(iii) Medição de massas, volumes e comprimentos (por exemplo, usando antigas unidades de medida do tempo de Amato Lusitano)

(iv) Colheita e ou observação de plantas/partes de plantas - com vista a descrição morfológicas e ou organização de plantas (por exemplo, elaboração de herbários)

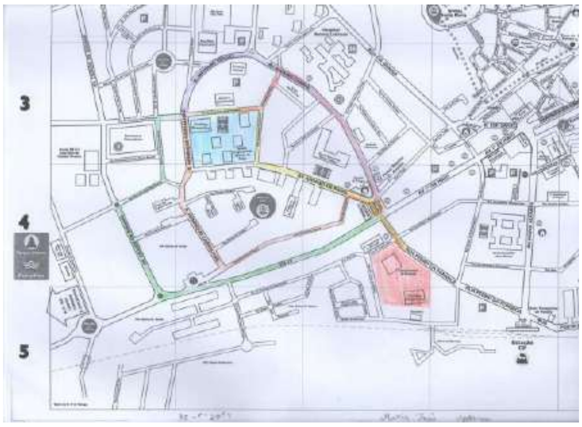
(v) Preparação de xaropes, infusões, decocções ou outras mezinhas que exigem determinação de massas e volumes (adaptações de prescrições das curas do médico albicastrense que são realizadas em ambiente laboratorial)

(vi) Jogos diversificados (seja de estratégia conceptual seja de destreza física, seja, ainda, conjugando os dois aspetos).

Damos particular relevo, a título de exemplo, a um dos estudos desenvolvidos que explora conceitos matemáticos na sua ligação com outras áreas, nomeadamente com o estudo do meio – ciências naturais de modo a evidenciar o uso do meio local na formação dos futuros professores (Heitor, 2013). Nele esteve implicada a utilização do espaço ao ar livre do Horto como local apelativo para aprendizagens ativas e significativas.

O estudo, intitulado “Aprender para além da escola… à descoberta da Matemática e das Ciências nas plantas do Horto de Amato Lusitano!” e desenvolvido numa turma de 2.º ano de escolaridade, incluiu a planificação de tarefas para os três momentos: pré-visita, visita e pós-visita de estudo. De entre as atividades realizadas pelos alunos na sala de aula, destacamos a identificação do local da visita, letra a letra, através do uso de espelhos (fig. 2), a leitura do mapa da cidade através da identificação das coordenadas da Escola Básica e da ESE e da exploração de itinerários possíveis entre os dois locais (fig. 3 e 4).


Figura 2. Atividade pré-visita – simetrias com espelhos



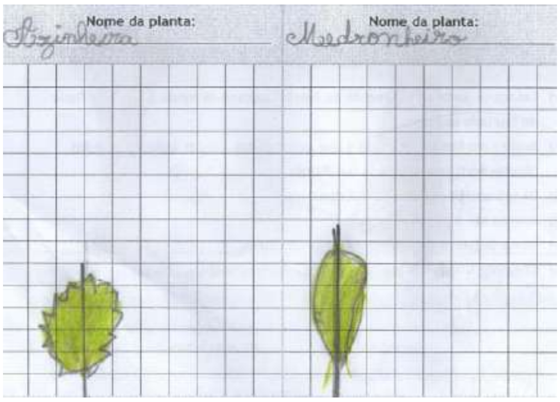
Figuras 3 e 4. Atividade pré-visita – exploração do mapa da cidade

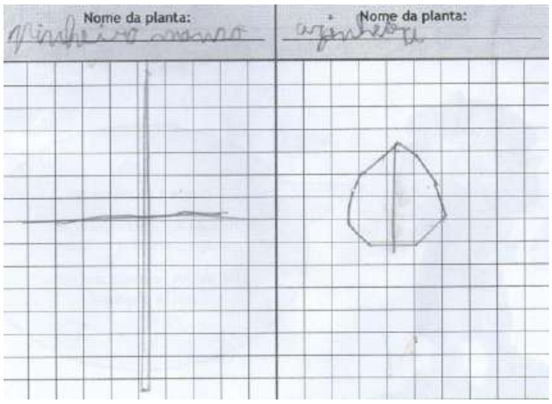
Já no Horto foi lançado o desafio “Será que as folhas que observas nas plantas do Horto de Amato Lusitano são simétricas?”. Para responder, as crianças andam livremente pelo espaço, recolhendo folhas de diferentes plantas e, por dobragem pela nervura central, reconhecem a presença ou não de simetria axial. De seguida, desenham as folhas em papel quadriculado, traçando o respetivo eixo de simetria.

Chama-se a particular atenção para o interesse das crianças na resolução da tarefa proposta e a concentração da criança que desenha "à vista" uma das folhas recolhidas (figs. 5 e 6).

Figuras 5 e 6 – Alunos a representar as folhas recolhidas

As figuras 7 e 8 mostram os desenhos das crianças, a identificação de cada folha pelo nome da planta e os eixos de simetria. Curioso é o eixo de simetria (grosseiramente) identificado na folha do pinheiro manso (fig. 8).




Figuras 7 e 8 – Representações das folhas recolhidas e respetivos eixos de simetria

No pós-visita, a partir da projeção dos desenhos realizados no Horto gerou-se um momento de discussão crítica e de autoavaliação realizado em grupo turma, tendo os alunos identificado os desenhos que estavam bem elaborados (respeitando as quadrículas e o traçado de figuras com simetria de reflexão) e os que não estavam tão bem, nomeadamente foi analisada a adequação dos eixos de simetria e identificadas outras possibilidades. Além da projeção dos desenhos, foi também pedido que observassem com atenção algumas das folhas recolhidas no dia anterior, para que pudessem confirmar se de facto tinham ou não simetria (fig. 9).

Figura 9. Aluno a averiguar existência de eixo de simetria de uma folha

**Reflexão Final**

O objetivo da partilha das nossas reflexões relativas à orientação de projetos de investigação-ação alavancados na PES e sua relevância no desenvolvimento profissional de futuros professores foi evidenciar uma estratégia formativa que se fundamenta no reconhecido valor da interação entre contextos formais e não formais para aprendizagens matemáticas das crianças.

Na sequência da orientação de um conjunto de investigações para conclusão do Mestrado dos futuros professores que, partindo de problemáticas associadas à Prática e delas emergentes, as transformaram em questões de investigação e partiram para a construção de percursos didáticos que implementaram e avaliaram. O traço inovador, para os futuros professores, foi o envolvimento de contextos não formais na exploração de conteúdos curriculares, neste caso, da matemática.

A avaliação feita pelos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico, pelas futuras professoras, e professoras cooperantes aos percursos desenvolvidos sustenta a nossa avaliação positiva da estratégia de formação delineada. As crianças evidenciaram envolvimento cognitivo, motor e afetivo nas atividades propostas, manifestando permanente entusiasmo e envolvimento na aprendizagem. Aspetos que também transparecem nos textos escritos sobre a visita: “Lá diverti-me muito e aprendi coisas novas (…) Eu gostei mais de apanhar folhas simétricas” (Heitor, 2013, p. 227); “aprendi que há folhas simétricas” (ibidem, p. 232).

No que respeita às futuras professoras, revelaram entusiasmo e um envolvimento crescentes na condução das investigações reconhecendo o valor da interação dos contextos formais e não formais, tal como ressalta das suas reflexões:

> A nossa prática ficou ainda mais enriquecida, até porque acabou por conduzir os nossos alunos numa busca pelo conhecimento, fazendo deles os principais construtores das suas aprendizagens e conduzindo-os a profundas reflexões. Assim, podemos afirmar que a exploração de espaços não formais de educação em articulação com o trabalho realizado em sala de aula poderá assumir-se como um recurso educativo repleto de potencialidades, nomeadamente na promoção de atividades integradoras das diversas áreas curriculares. (Heitor, 2013, p. 239)
>
> (...) a nossa investigação (…) pretendeu encontrar outras formas de melhorar a aprendizagens das crianças/alunos, colmatando, dessa forma, algumas das suas dificuldades e enriquecendo as suas aprendizagens. (…) Ajudou-nos a perceber o quão importante é a articulação entre os espaços formais e não formais de educação para a aprendizagem das crianças, sendo essencial proporcionar às mesmas esta articulação, para os mais diversos conteúdos. (Taborda, 2013, p. 258)

Quanto às professoras cooperantes, apreciaram o interesse das propostas didáticas concebidas e desenvolvidas pelas estagiárias e o seu valor educativo, tanto na aprendizagem da matemática, como na perspetiva de aprendizagens transversais, tal como é evidenciado nas opiniões manifestadas*:*

> (…) não é só na sala de aula que se aprende. O espaço exterior promove mais a aprendizagem porque os alunos estão mais interessados. (…) saíram do espaço da sala de aula e isso entusiasmou-os imenso. (…) Depois de se realizar uma visita de estudo é muito importante fazer-se a sistematização dos conteúdos abordados durante a visita (…) Nesta faixa etária o concreto deve ser privilegiado em detrimento da abstração, pois o facto de abordarmos determinados conteúdos em situações concretas ajuda os alunos a adquiri-los melhor. (Heitor, 2013, p. 234)
>
> (…) o trabalho da sala de aula ficou enriquecido com o trabalho da visita (…) [os alunos] tiveram a oportunidade de aplicar e aprofundar alguns conteúdos quer da Matemática, quer do Estudo do Meio (Santos, 2013, p. 113); a aprendizagem formal (…) tem de ser necessariamente complementada com a educação não formal, em que a aquisição do conhecimento é feita com base na motivação, pesquisa, observação, análise, registo, experimentação e reflexão, porque só assim os alunos fazem aprendizagens corretas e completas. (Marques, 2013, p. 195)
>
> (…) aprendizagens em vários domínios (…) desses conhecimentos, capacidades e atitudes resultaram competências ao nível do saber (conhecimentos cognitivos), do saber-fazer (observações, consultas de mapas, interpretações de códigos), do saber ser (respeito pelo ambiente e manifestações de solidariedade). (Dordio, 2013, p. 124)

Concluímos que é desejável e necessário integrar esta estratégia de formação nos estágios dos futuros professores de 1.º Ciclo do Ensino Básico com vista ao seu desenvolvimento profissional e que o meio local se tem vindo a afirmar como um contexto não formal com um elevado potencial formativo e de aprendizagens.

## Referências


CEC (2000). *A memorandum of lifelong learning.* Commission of the European Communities. SEC: Brussels.

DeWitt, J., & Osborne, J. (2007). Supporting teachers on science-focused School Trips: Towards an integrated framework of theory and practice. *International Journal of Science Education*, *29* (6), 685-710.

Domñinguez-Sales, C., & Guisasola, J. (2010). Diseño de visitas guidas para manipular y pensar sobre la ciencia del mundo clásico grecolatino. El taller “Logos et Physis” de Sagunto. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *7*(2), 473-491.

Dordio, S. (2013). *Jogos matemáticos no 1.º Ciclo do Ensino Básico: do Horto de Amato Lusitano à sala de aula*. (Relatório de estágio, ESE – I P Castelo Branco).

Guisasola, J., & Morentin, M. (2005). Museus de ciencias y aprendizaje de las ciencias: una relación compleja. *Alambique, Didáctica de las Ciencias Experimentales, 43*, 58-66.

Heitor, A. F. (2013). *Aprender para além da escola… à descoberta da matemática e das ciências nas plantas do horto de Amato Lusitano*. (Relatório de estágio, ESE – I P Castelo Branco).

Kisiel, J. (2005). Understanding elementary teacher motivations for science fieldtrips. *Science Education*, *86*(6), 936-955.

Latorre, A. (2003). *La investigación-Acción*. Barcelona: Graó.

Marques, A. C. (2013). *Aprender matemática e ciências em espaços não formais no 1.º Ciclo do Ensino Básico – das plantas aos remédios de Amato Lusitano*. (Relatório de estágio, ESE – I P Castelo Branco)

Morentin, M. & Guisasola, J. (2014). La visita a un museo de ciencias en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *11*(3), 364-380.

Morentin, M. (2010). *Los museos interactivos de ciências como recurso didáctico en la formación inicial del professorado de Educación Primaria*. Bilbao: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Nogueira, S. (2014). *Exploração Matemática de módulos interativos de ciências: um estudo de caso no “Jardim da Ciência” em articulação com a sala de aula com alunos do 1.º ciclo do ensino básico.* (Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro)

Nogueira, S., Tenreiro-Vieira, C., & Cabrita, I. (2014). A promoção da capacidade de resolução de problemas através da articulação de contextos de educação formal e não formal de ciências. *Investigar em Educação – II série*, *1*, 141-161.

Ortigão de Oliveira, M. M. M. (2013). *Gestão Sustentável dos Recursos – Educação CTS na interação entre contextos formais e não formais*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro)

Osborne, J. & Dillon J. (2007). Research on learning in informal contexts: Advancing the field? *International Journal of Science Education*, *29*(12), 1441-1445.

Paixão, M. F. (2006). (Coord.). *Educação em Ciência Cultura e Cidadania. Encontros em Castelo Branco*. Coimbra: Alma Azul.

Rodrigues, A. (2011). *A educação em ciências no ensino básico em ambientes integrados de formação*. (Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro).

Salvado, A. & Cardoso, M. L. (2004). *O Horto de Amato Lusitano – Uma ponte para Cultura, Educação e Cidadania.* Castelo Branco: Semedo – Soc. Tipográfica, Lda.

Santos, J. C. (2012). *Horto de Amato Lusitano - Matemática em estado vivo*. (Relatório de estágio, ESE – I P Castelo Branco)

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1): 1-21.

Taborda, A. R. (2013). *Aprender para além da escola… explorar os cinco sentidos no Horto de Amato Lusitano*. (Relatório de estágio, ESE – I P Castelo Branco)

UNESCO (2006). *Synergies between formal and non-formal education: an overview of good practice*s. Paris: UNESCO.

# Ações do professor na condução de uma discussão matemática sobre sequências

*Joana Mata-Pereira*[1] e *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, joanamatapereira@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

**Resumo**. *O estudo apresentado nesta comunicação tem por objetivo analisar as ações do professor na condução de uma discussão matemática, bem como os processos matemáticos envolvidos. Trata-se de um estudo qualitativo e interpretativo, que decorre numa turma de 8.º ano com 28 alunos em Matemática. A recolha de dados inclui a observação e videogravação de aulas, complementadas por conversas com a professora e registos em diário de bordo. Os resultados mostram que, nas questões em que todos os alunos obtiveram a resposta correta, a professora faz sobretudo ações de guiar para os ajudar a apresentar as suas resoluções. Nas questões em que alguns alunos não conseguiram chegar a uma estratégia de resolução, as ações da professora são mais frequentemente estruturadas por um desafio.*

**Abstract**. *The study presented in this communication aims to understand the teacher's actions while conducting a mathematical whole class discussion, and to analyze the related mathematical processes. This study is qualitative and interpretative, and takes place in a grade 8 class with 28 students in mathematics. Data collection includes lesson observation and video recording, complemented with conversations with the teacher and a researcher's journal. The results show that, in questions where all the students achieved the right answer, the teacher mostly guides them to present their solving processes. In questions where some students did not figure out a solving process, the teacher's actions are more often structured by a challenge.*

**Palavras-chave**: *Ações do professor, Prática profissional, Discussão matemática, Raciocínio matemático*

## Introdução

Nos últimos anos, o ensino de cunho exploratório na sala de aula de Matemática tem sido fortemente valorizado pela investigação em educação matemática. No ensino exploratório, o professor apresenta tarefas para as quais os alunos não dispõem de um método imediato de resolução, tendo de interpretar a tarefa e formular uma estratégia recorrendo aos seus conhecimentos prévios. Esta abordagem difere significativamente da prática usual do professor, na qual este começa por expor ideias matemáticas e métodos de resolução e, de seguida, apresenta aos alunos exercícios para resolver usando métodos iguais ou semelhantes aos anteriormente expostos. Esta diferença na prática do professor é bem visível em momentos de discussão coletiva. Uma aula em que são propostas tarefas de natureza exploratória, onde podem surgir os mais variados métodos de resolução, um momento de discussão tem um grau de imprevisibilidade bastante maior que numa aula onde se faz a correção de exercícios para os quais o método é bem conhecido dos alunos. Assim, e com o intuito de melhor compreender a prática do professor de Matemática em momentos de discussão coletiva em aulas de cunho exploratório, este estudo tem por objetivo analisar as ações do professor e os processos matemáticos envolvidos nestes momentos.

**Ações do professor na discussão na aula de Matemática**

Numa sala de aula marcada pelo ensino exploratório, os momentos de discussão coletiva surgem como potencialmente favoráveis para a aprendizagem (Ponte, 2005). Estes momentos, muitas vezes desencadeados pela realização de tarefas desafiantes, podem incluir a apresentação pelos alunos de uma variedade de respostas inesperadas. Assim, cabe ao professor articular estas respostas e promover uma discussão que leve os alunos a uma compreensão mais aprofundada das ideias matemáticas envolvidas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Contudo, a condução destas discussões representa um aspeto particularmente complexo da prática profissional de um professor de Matemática. Uma forma de analisar estes momentos coletivos de discussão é através das ações do professor na sala de aula.

São vários os autores que destacam aspetos da prática do professor durante as discussões coletivas. Wood (1999) identifica como um aspeto central das discussões coletivas a exploração de desacordos, destacando a importância de envolver os alunos na apresentação das suas resoluções e na discussão destas resoluções com os colegas. Para a criação deste contexto de trabalho é não só necessário que o professor consiga levar os alunos a apresentar o seu pensamento e resoluções, mas também que os incentive a prestar atenção aos colegas. Já Potari e Jaworski (2002) destacam a importância que as questões do professor nos momentos de discussão coletiva envolvam um certo desafio matemático. Também Sherin (2002) valoriza o desenvolvimento do conhecimento matemático nos momentos de discussão, destacando a importância de equilibrar os aspetos relativos a este conhecimento com o incentivo à participação dos alunos. Esta autora sublinha a necessidade de filtrar as ideias dos alunos e focar a sua atenção nas ideias fundamentais e nos processos matemáticos. Além da ênfase nas ideias e processos matemáticos essenciais para a aprendizagem do conhecimento matemático estabelecido, é igualmente relevante considerar o desenvolvimento de aspetos relacionados com capacidades matemáticas transversais.

Com um outro foco, Stein et al. (2008) indicam que o professor deve dar atenção a dois aspetos centrais para que as discussões coletivas sejam produtivas: (i) apoiar-se no pensamento dos alunos e (ii) avançar ideias matemáticas importantes. Assim, estes autores sublinham a necessidade de estruturar a informação sobre o trabalho dos alunos como ponto de partida para dar início a discussões matemáticas produtivas. Para tal, apresentam um modelo de ações do professor que considera antecipar respostas dos alunos, monitorizar estas respostas, selecionar alunos para apresentarem as suas respostas, sequenciar essas respostas e estabelecer conexões entre respostas de alunos e ideias matemáticas centrais. Para esta última ação é essencial dar forma às ideias incompletas e mal formuladas dos alunos com o intuito das transformar em ideias mais precisas e poderosas, dando coerência às ideias dispersas que estes apresentam e enquadrando-as no conhecimento matemático estabelecido. Paralelamente, estes autores consideram ainda fundamental valorizar a autoridade dos alunos e promover a sua responsabilização.

Também Cengiz, Kline e Grant (2011) identificam ações do professor que visam criar oportunidades para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Estes autores apresentam um modelo centrado em três categorias de ações: (i) *eliciting*, com o objetivo de que os alunos apresentem os seus métodos, (ii) *supporting*, que visa apoiar a compreensão concetual dos alunos, e (iii) *extending*, que pretende ir além do pensamento inicial dos alunos. Neste mesmo estudo, as ações dos professores diferenciam-se dependendo do momento da discussão e de outros fatores, sendo de relevar que os objetivos dos professores se integram essencialmente em duas categorias: construir conexões matemáticas e atender a conceções incorretas dos alunos. De modo idêntico, Scherrer e Stein (2013) apresentam um guia para analisar as ações do professor (que designam por *moves*) na condução de discussões coletivas sobre tarefas cognitivamente desafiadoras. Este guia inclui ações para (i) iniciar a discussão, (ii) dar continuidade à discussão com o intuito de aprofundar o conhecimento dos alunos, (iii) obter informações, e (iv) outras ações, como fornecer informações ou pensar em voz alta.

Pelo seu lado, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) apresentam um modelo de análise das ações do professor na condução de discussões matemáticas que considera dois grandes tipos de ações: "ações diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e . . . ações que têm sobretudo a ver com a gestão da aprendizagem" (p. 59). Quanto às ações relacionadas com os processos matemáticos, distinguem entre convidar, informar/sugerir, apoiar/guiar e desafiar. As ações de convidar são, geralmente as que dão início à discussão coletiva ou a um segmento desta discussão, onde o professor incentiva os alunos a participar e a partilhar as suas resoluções. No decorrer da discussão o professor recorre essencialmente aos restantes três tipos de ações, que são centrais na condução de discussões matemáticas que visam a aprendizagem por parte dos alunos. Nas ações de informar/sugerir o professor disponibiliza informação aos alunos ou valida as suas afirmações, enquanto nas ações de apoiar/guiar conduz os alunos a apresentar informação. Já nas ações de desafiar, os alunos são incentivados a ir além do seu conhecimento prévio. Nestes três tipos de ações centrais na discussão, os autores consideram ainda diversos processos matemáticos envolvidos, não necessariamente disjuntos: (i) representar, que inclui fornecer, redizer, usar ou alterar uma representação (incluindo procedimentos), (ii) interpretar, que inclui interpretar um enunciado ou uma ideia e fazer conexões, (iii) raciocinar, que inclui levantar questões sobre uma afirmação ou justificação, generalizar um procedimento, um conceito ou uma propriedade, justificar e apresentar argumentos, e (iv) avaliar, que inclui avaliar um método ou uma resolução e comparar diferentes métodos. Este modelo que relaciona as ações do professor na condução de discussões coletivas com os processos matemáticos envolvidos pode ser observado na Figura 1.

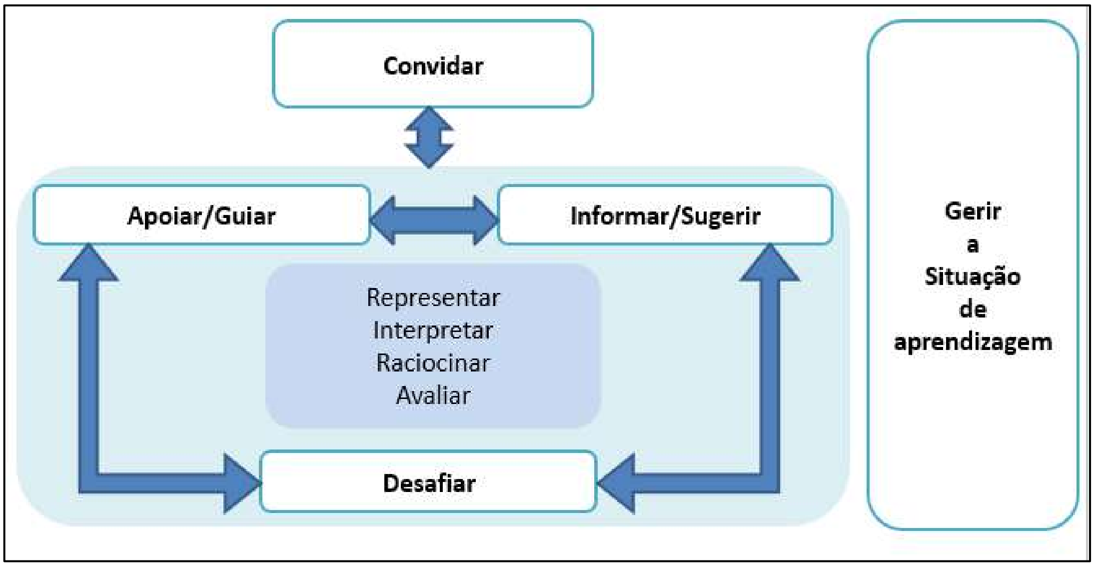



Figura 1. Modelo para analisar as ações do professor (adaptado de Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013)

**Metodologia de investigação**

Este estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa dado que o seu objetivo respeita a fenómenos relacionados com as ações e interpretação dessas ações por parte de uma professora de Matemática. É realizado numa turma de 8.º ano de uma professora convidada a participar em função da sua experiência e empenhamento profissional, uma vez que tem 13 anos de serviço e faz um forte investimento na sua formação contínua com o objetivo de melhorar a sua prática profissional. A turma tem 30 alunos, mas apenas 28 frequentam as aulas de Matemática. Destes 28 alunos, 16 são raparigas e 12 são rapazes e, segundo a professora, perto de metade têm um desempenho regular, 7 alunos têm muito bom desempenho e os restantes 8 têm algumas dificuldades. A turma tem um ambiente de trabalho produtivo, ainda que exista uma disparidade significativa entre o trabalho desenvolvido pelos bons alunos e pelos alunos com maiores dificuldades na disciplina.

Este estudo tem por principal processo de recolha de dados a observação com videogravação de aulas, complementada por conversas com a professora, conduzidas num registo informal, audiogravadas e registadas em diário de bordo. Esta comunicação tem por base dados recolhidos numa conversa inicial com a professora (CI), no momento de discussão coletiva de uma aula sobre sequências (DC) e numa conversa com a professora posterior à aula (CF). A aula tinha por objetivo introduzir o tópico sequências e a análise foca-se num momento de discussão coletiva da tarefa proposta (Figura 2). A própria professora descreve assim o modo como pensou a tarefa: "É em simultâneo [uma tarefa] de introdução, mas também para mim [professora] de diagnóstico, porque eu não fui professora [da turma no ano anterior]" (CI).

**1.** Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

**Fig. 1** **Fig. 2** **Fig. 3**

**1.1.** Indica o número total de pontos da figura 4.

**1.2.** Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

**1.3.** Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

**1.4.** Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

**1.5.** Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura n.

Figura 2. Tarefa proposta aos alunos.

Os dados são analisados com o apoio do software NVivo, considerando as ações da professora durante a discussão da tarefa apresentada e relacionadas com tópicos e processos matemáticos classificadas em quatro categorias propostas por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013): (i) convidar, (ii) apoiar/guiar, (iii) informar/sugerir, e (iv) desafiar. São ainda analisados os processos matemáticos envolvidos de acordo com as seguintes categorias não disjuntas: (a) representar, (b) interpretar, (c) raciocinar e (d) avaliar.

## Resultados

A professora começa por propor aos alunos a resolução de duas tarefas envolvendo sequências, sendo a primeira a apresentada na Figura 2. Considerando as características da turma e das tarefas propostas, decidiu que este momento de trabalho autónomo seria realizado em pares. Ao propor as tarefas, a professora não estabelece um tempo para a sua realização, procurando deixar que a maioria dos alunos termine a primeira tarefa. Os pares trabalham na tarefa solicitando esporadicamente o seu apoio, e quando terminam a tarefa avançam para a tarefa seguinte. Assim, o tempo de trabalho da turma é de cerca de 25 minutos, variando o trabalho dos pares nesta tarefa entre 10 e 25 minutos. Considerando os diferentes ritmos de trabalho dos alunos, a professora avança para a discussão coletiva quando verifica que todos os pares "já pensaram no primeiro exercício [questão] da tarefa 1" (DC). Toma esta decisão porque entende que "há alunos que [não chegam ao final da tarefa] ... E, ou eu estou ali com eles individualmente a tentar, ou avanço um bocadinho, não se justifica [mais tempo de trabalho em pares]" (CF).

Assim, a professora começa por convidar os alunos a partilhar as suas respostas, alertando para a possibilidade de poder existir uma variedade de estratégias de resolução. Seleciona então um dos pares de alunos que se voluntariam a participar:

> *Professora:* O que é que vocês responderam? Maria e Irina?
> *Maria:* Que a figura tinha 17 pontos.
> *Professora:* 17 pontos. Porque é que responderam isso?
> *Maria:* Porque nós desenhámos a figura e…
> *Professora:* Contaram?
> *Maria:* Sim.
> *Professora:* OK. Foi a estratégia delas. Desenharam e contaram. Quem usou uma estratégia diferente?

Ainda que a professora selecione um par que indica a resposta correta à questão 1.1, não avança de imediato para outra questão, optando por guiar Maria a interpretar a sua própria resposta. Reforça ainda essa interpretação ao informar a restante turma da estratégia deste par.

Na questão 1.2, tal como na anterior, vários pares apresentaram a sua resposta e a sua estratégia, sendo as ações da professora maioritariamente de guiar e de informar. Estas ações têm por objetivo que a turma compreenda as representações e interpretações associadas a cada estratégia.

Para a questão 1.3, a professora torna a convidar os alunos a participar, selecionando o par Duarte e Marisa:

> *Professora:* Lê. Explica-me. O que é que tu conseguiste fazer com a Marisa?
> . . .
> *Duarte:* Nós fizemos 86 que é o número de pontos.

*Professora:* Sim…
*Duarte:* A dividir por quatro, menos um.
*Professora:* Assim [escreve no quadro $\frac{86-1}{4}$]? Só fala o Duarte.
*Duarte:* Foi, 86 menos um a dividir por quatro.

Para que a turma acompanhe com mais facilidade o que diz Duarte, a professora representa a resposta do aluno no quadro. Contudo, ao fazê-lo, interpreta a representação do aluno de um modo diferente do que ele disse inicialmente, guiando-o a redizer a sua resposta. Considerando as duas versões da resposta, a professora opta por explorar um pouco mais a situação, desafiando o aluno a interpretar a expressão selecionada:

*Professora:* Assim Duarte [referindo-se a $\frac{86-1}{4}$ ]? Está bom para ti? Não sei se é isto, estou a perguntar, é isto? É isto ou é isto [escreve $\frac{86}{4} - 1$]?
*Duarte:* Primeira.
*Professora:* [Um aluno intervém.] Espera, espera, deixa-o concluir. Explica.
*Diogo:* Vai dar a mesma coisa.
. . .
*Professora:* Só para perceber, Diogo. Não tem mal dizer que é a mesma coisa, só quero perceber. Para ti isto é a mesma coisa?
*Diogo:* Sim, porque se nós pusermos um sobre… Não, não, não é nada a mesma coisa . . . Só se fosse menos quatro.

Diogo interrompe a resposta de Duarte apresentando uma conclusão errada. Com o apoio da professora, que o leva a justificar a sua afirmação, consegue rapidamente compreender o seu erro. Contudo, na sequência, torna a fazer uma intervenção errónea referente ao cálculo de expressões numéricas, também superada com ações de guiar e apoiar por parte da professora.

Resolvida esta situação, a professora retoma a estratégia de Duarte:

*Professora:* Duarte, perdi-me, explica-me.
*Duarte:* É isso.
*Professora:* Mas é isto, o que é isto?
*Duarte:* Então, é o número de pontos que é 86 . . . Depois subtraímos um que é o ponto do meio . . . E depois a dividir por quatro que é o que vai sempre aumentando.
*Professora:* Este quatro é sempre o que vão aumentando?
*Duarte:* Não, é o número de lados.
*Professora:* Ah, o número de lados. Quanto é que deu Duarte?
*Duarte:* 21,25.

Atendendo a que Duarte dá a sua resposta por concluída, a professora questiona-o para que interprete a expressão que apresentou e posteriormente guia o aluno na identificação de um erro dessa mesma interpretação.

Perante a afirmação de Duarte, a professora continua a apoiar a resposta do aluno, pedindo-lhe uma interpretação do valor obtido e levando-o a justificar essa interpretação:

> *Professora:* E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?
> *Duarte:* Que não existe nenhuma.
> *Professora:* Porquê?
> *Duarte:* Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.
> *Professora:* Número inteiro. Este número não é inteiro.

A professora dá a intervenção de Duarte por terminada ao informar a turma de que o valor que o colega obteve não é um número inteiro, interpretando a resposta do aluno.

A professora convida os alunos a apresentarem mais estratégias e António apresenta a sua, que a professora valida:

> *Professora:* Quem pensou de outra forma? . . .
> *António:* À medida que pensámos, mais quatro, os números iam ser sempre ímpares. Então, o número ia ter sempre mais quatro unidades.
> . . .
> *Professora:* OK. Eles foram somando. A sequência é uma sequência de números ímpares. . . Na sequência não aparecem [números pares]. Justifiquem, acrescentem esta justificação, OK? Que era outra forma de justificar. Não aparecem números pares.

Neste momento da discussão, não surgem outras estratégias por parte dos restantes alunos e a professora avança com um convite para apresentarem respostas à questão 1.4. João é um dos alunos que apresenta a sua resolução:

> *João:* Então "stôra", como é que eu fiz? Então, nós fizemos assim, 65 menos um que é o ponto central.
> *Professora:* Que é o ponto central.
> *João:* Igual a 64.
> *Professora:* Igual a 64 [escreve 65-1=64] . . . Só para garantir… Aos pontos todos, eles tiraram o central. Ficaram 64. A seguir.
> *João:* Sobre quatro.

Enquanto João apresenta a sua resolução, a professora rediz algumas das suas afirmações e representa a sua resposta no quadro, apoiando a turma no acompanhamento da resolução do aluno. Contudo, Alice intervém:

> *Alice:* Não, não é sobre quatro. 64 sobre 4, faça isso. Ele queria pôr o sobre 4 naquele 64, só que isso não está certo.
> *Professora:* Então, posso pôr aqui [na expressão já escrita no quadro] ou não?
> *Alice:* Não, não pode.
> *Professora:* Porque é que não posso?
> *Alice:* Porque 64 não é igual a 64 a dividir por 4.
> *Professora:* Sim. E então?
> *João:* Igual a 16.
> *Professora:* 16. E…
> *João:* Portanto é a décima sexta figura.
> *Professora:* Décima sexta figura.

Perante a intervenção de Alice, a professora opta por desafiar a aluna a justificar a sua afirmação. Como a aluna responde prontamente ao desafio, a professora valida a sua justificação e prossegue com a resolução de João, continuando a apoiar a turma no acompanhamento da resolução do aluno.

Ainda que a discussão tenha avançado para a questão 1.4, Joaquim tenta retomar a questão 1.3, o que é aceite pela professora:

> *Joaquim:* Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.
> *Professora:* Então diz.
> *Joaquim:* Nós fizemos… Nós justificámos que não era múltiplo de 4.
> *Professora:* Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Perante a proposta de resolução de Joaquim, a professora desafia os alunos a avaliar a validade desta resolução. Direciona primeiramente a questão para a turma, mas depois questiona diretamente um par que ainda não tinha participado:

> *Bianca:* Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos um, que é o ponto central.

> *Professora:* Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu.

Bianca indica implicitamente que a resposta dos colegas não é válida e justifica a sua opinião. Contudo, a sua justificação não é suficiente para Joaquim e Guilherme compreenderem que a sua resposta é inválida. Perante esta situação, a professora poderia sugerir uma interpretação da justificação de Bianca, mas opta por desafiar a aluna a reformular a sua justificação:

> *Bianca:* O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.
> *Professora:* Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?
> *Bianca:* Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.
> *Professora:* Sim ou não, Guilherme?
> *Guilherme:* Acho que sim, porque o do meio nunca… Era como se estivéssemos a cortar o do meio.
> *Professora:* Aqui era como se estivessem a cortar o do meio . . . A soma destes quatro braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos quatro braços com o ponto central.

Não obstante a validade da afirmação de Bianca, a professora desafia novamente a aluna para que justifique parte dessa afirmação. Neste momento, a professora confirma se Guilherme compreendeu a justificação de Bianca e informa a turma da representação destacada pelo aluno, apresentando uma interpretação do que este diz.

De seguida, a professora avança para a discussão da questão 1.5, que alguns pares não tinham ainda conseguido resolver, seja por falta de tempo ou por lacunas na compreensão do tópico sequências. Convida António a participar:

> *Professora:* António, como é que vocês pensaram?
> *António:* Nós não… Eu não sei de vai estar certo.
> *Professora:* Não faz mal, eu também não.
> *António:* Nós metemos $n$ igual a $x$ mais 4.
> . . .
> *Professora:* [Escreve no quadro $n = x + 4$] Maria, isto parece tirado de ti, se ele não estivesse tão longe… António, o que é isto? Isto [$n$] e isto [$x$], explica-me.
> *António:* O $n$ era a figura.
> *Professora:* O $n$ é o quê? O quê da figura? O número da figura? Ou o número de pontos da figura?
> *António:* O número de pontos da figura.
> *Professora:* É que são coisas diferentes. Isto é o número de pontos da figura. Número de pontos, certo. O que é o teu $x$?

> *António:* É a figura. O número.
> *Professora:* De quê? É o número de quê? Representa o quê?
> *Mário:* Representa o número da figura

Para que a turma possa acompanhar a discussão da resposta de António, a professora representa no quadro a expressão dita pelo aluno. Seguidamente, coloca várias questões com o intuito de guiar o aluno a interpretar e justificar a sua própria resposta. Perante as respostas de António e de Mário, a professora sugere uma interpretação destas respostas e guia os alunos na validação da resposta de António:

> *Professora*: O *n* ele definiu como sendo o número de pontos e diz que o *x* é o número da figura. Se eu somar, ao número da figura, 4, ele diz-me que eu obtenho o número de pontos. Vou experimentar. Qual é a tua segunda figura? Quantos pontos tem a tua segunda figura?
> *António:* Nove.
> *Professora:* Nove. Então, olha para cá António. Segunda figura, significa que o meu *x* vale…
> *Ivone:* Dois.
> *Professora:* Dois mais quatro…
> *António:* Seis.
> *Professora:* Quantos pontos tem a figura?
> *Turma:* Nove.
> *Professora:* Sim ou não, António? Esta expressão serve ou não?
> *António:* Eu acho que não.
> *Professora:* Não serve.

No final desta intervenção, António afirma que a sua expressão não está correta, o que é reforçado pela professora. De seguida, Mário apresenta um termo geral válido

$$n = x \times 4 + 1$$

(sendo $n$ o número de pontos da figura $x$). Perante a resposta de Mário, as ações da professora são em tudo idênticas às que utilizara perante a resposta de António, ainda que uma das respostas seja inválida e a outra válida. Assim, a professora começa por representar no quadro a resposta de Mário, leva-o a interpretar as suas variáveis e conduz um processo de verificação utilizando uma das figuras da sequência. Confirmada a validade do termo geral apresentado por Mário, Ivone intervém:

> *Ivone:* Eu acho que a expressão do António podia ser-nos útil, mas *x* não representaria o número da figura, mas sim o número de pontos da figura anterior.
> *Professora:* Muito bem. Faz sentido ou não? A Ivone disse assim, esta expressão aqui não serve como está definida pelo António. Ou seja, em que

isto [*n*] é o número de pontos e isto [*x*] é o número da figura. A Ivone disse que era assim, em vez do *x* representar o número da figura, que nós já vimos que não pode ser, a Ivone sugere que isto seja o número de pontos da figura anterior. Certo? Ivone, concordo contigo. Agora faço-te uma pergunta: É fácil trabalhar com as duas? Ou seja, vou reformular a minha pergunta. A minha pergunta é: Tanto a partir desta como a partir desta eu consigo saber rapidamente quantos pontos tem uma figura?
*Ivone:* Não, porque há duas incógnitas. Eu simplifiquei e pus 4 *n* mais 1. A minha expressão algébrica era 4 *n* mais 1. Ou seja, que é quatro vezes o número de pontos da figura, mais um que é o ponto central.
*Professora:* Mas não te agarraste a esta, porquê? Porque tem duas incógnitas?
*Ivone:* Exatamente.

A adaptação que Ivone faz à resposta de António torna-a correta, pelo que a professora opta por destacar para a turma a diferença entre a resposta inicial de António e a versão de Ivone, interpretando as palavras desta aluna e validando a sua resposta. Assim, a professora, ainda que tivesse a possibilidade de solicitar uma justificação a Ivone ou à turma para validar a nova resposta, toma a decisão de desafiar a aluna a comparar os dois termos gerais da sequência, avaliando a utilidade de ambas as expressões.

**Conclusão**

Ao longo desta discussão coletiva identificamos uma variedade de ações do professor. A discussão de cada questão da tarefa é iniciada por uma ação de convidar por parte da professora e é de seguida estruturada por uma ação central. Nas duas primeiras questões, atendendo a que todos os alunos obtiveram a resposta correta, a professora apoia-se em ações de guiar para os ajudar a apresentarem as suas resoluções. Na terceira questão, como alguns alunos não conseguiram formular uma estratégia de resolução, as ações da professora são estruturadas por um desafio. A questão quatro é bastante semelhante à questão anterior e, atendendo a que a discussão desta questão foi bastante produtiva, neste segmento, a ação central da professora é uma ação de guiar. Já a questão cinco, por envolver um processo de generalização, é bastante mais exigente, pelo que a ação estruturante neste segmento volta a ser uma ação de desafiar. Ao longo da discussão, quando a ação estruturante de um segmento é uma ação de guiar, os processos matemáticos envolvidos são essencialmente de representar e de interpretar. Se a ação central é de desafiar, o processo matemático mais comum é também interpretar, contudo, nestas situações as ações do professor tendem a considerar também processos mais complexos como justificar e avaliar.

O modelo utilizado para analisar as ações do professor (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013) ajuda a compreender as práticas do professor na condução de discussões matemáticas com toda a turma. A análise que realizámos sugere ainda que a natureza exploratória da tarefa influencia as ações do professor visto que as questões da tarefa mais complexas levam a questões orais mais desafiantes por parte do professor. Tal como num estudo anterior com a mesma professora (Mata-Pereira, Ponte, & Quaresma, 2015), as ações do professor parecem depender do conhecimento dos alunos. No entanto, neste estudo, a estrutura das ações do professor evidencia aspetos distintos. No estudo anterior, a tarefa é proposta durante a própria discussão coletiva, sendo todos os segmentos estruturados por uma questão de desafiar. Em contrapartida, neste estudo, apenas alguns segmentos são marcados por um desafio, sendo a maioria dos segmentos estruturados por ações de guiar/apoiar. Estas diferenças evidenciam a necessidade de continuar a investigação sobre a prática do professor na condução de discussões matemáticas tendo em vista compreender melhor em que situações os professores sentem apropriado colocar questões desafiantes e em que condições consideram necessário dar informações ou validar as respostas dos alunos.

## Referências


Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 355–374.

Mata-Pereira, J., Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2015, fevereiro). *Teaching actions conducting mathematical whole class discussions.* Paper presented at the meeting CERME 9, Prague.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teacher development: Using the teaching triad as a tool for reflection and enquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(4), 351-380.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(2), 105–124.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205–233.

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for help teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

# Comunicação e processos de raciocínio: Aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula

*Marisa Quaresma*[1]*, João Pedro da Ponte*[2]
[1,2]*Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*
[1]*mq@campus.ul.pt;* [2]*jpponte@ie.ulisboa.pt*

**Resumo.** *Analisamos as aprendizagens sobre a comunicação e o modo de promover os processos de raciocínio matemático dos alunos feitas num estudo de aula por uma professora do 5.º ano. Os dados foram recolhidos através de uma entrevista individual e outra em grupo focal e da reflexão final da professora. O estudo de aula, conjugando o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos professores, realizado num contexto colaborativo e explorando situações de reflexão sobre a prática relativamente à comunicação em sala de aula e aos raciocínios por vezes inesperados dos alunos, representou um contexto favorável para o desenvolvimento profissional da professora, nomeadamente sobre questões relacionadas com a comunicação e os processos de raciocínio no ensino-aprendizagem da Matemática.*

**Abstract.** *We analyze the learning about communication and ways to promote students' mathematical reasoning processes made by a grade 5 teacher in a lesson study. Data were collected through an individual and a focus group interview as well as the teacher's final reflection. The lesson study, combining knowledge from research with teachers' experiential knowledge, carried out in a collaborative context and exploiting situations of reflection on practice regarding students' communication and reasoning (sometimes unexpected), represented a favorable context for this teacher professional development, notably on issues relating to communication and reasoning processes in the teaching and learning of mathematics.*

**Palavras-chave:** *Desenvolvimento profissional; Estudo de aula; Comunicação; Raciocínio.*

## Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores centrado na sua prática letiva que tem vindo a ser posto em prática em muitos países. Uma marca fundamental dos estudos de aula é a sua natureza reflexiva e colaborativa (Fernández, Cannon & Chokshi, 2003; Perry & Lewis, 2009). Nesta atividade formativa, os professores trabalham em conjunto identificando dificuldades dos alunos, considerando alternativas curriculares e preparando cuidadosamente uma aula que depois observam e analisam. Trata-se, portanto, de um processo muito próximo de uma pequena investigação sobre a sua própria prática profissional, realizado em contexto colaborativo, e que é usualmente informado pelas orientações curriculares e pelos resultados da investigação relativa a um dado tema dos programas escolares.

Um estudo de aula proporciona oportunidades para os professores participantes refletirem sobre as possibilidades de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática. A abordagem exploratória representa uma mudança significativa em relação ao ensino de cunho tradicional, em que o professor primeiro demonstra o método de resolução e depois apresenta exercícios para o aluno resolver. Em contrapartida, o trabalho exploratório na aula de Matemática cria oportunidades para os alunos construírem ou aprofundarem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Os alunos são aqui chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que apresentam e justificam no final aos seus colegas e ao professor. Este, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, propõe aos alunos um trabalho de descoberta, ao mesmo tempo que promove momentos de discussão coletiva. Deste modo, procura levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio, mas também a sua compreensão da Matemática bem como a sua capacidade de a usar nas mais diversas situações. A realização deste tipo de ensino tem demonstrado potencial para conduzir os alunos numa melhor aprendizagem da Matemática (Ponte, 2005). No entanto, constitui um forte desafio para os professores, exigindo conhecimentos específicos, competência e investimento que podem ser desenvolvidos através da sua participação em estudos de aula.

A partir de um trabalho realizado com cinco professoras do 1.º ciclo, Baptista et al. (2012) referem que os estudos de aula podem proporcionar aos professores um olhar mais atento sobre a natureza das tarefas a propor em sala de aula e levá-los a valorizar mais os processos de raciocínio dos alunos e as discussões coletivas. Esta comunicação tem como objetivo analisar de modo mais aprofundado as aprendizagens de uma professora num estudo de aula sobre a comunicação e o modo de promover os processos de raciocínio matemático dos alunos na sala de aula.

**Comunicação e raciocínio**

A comunicação em sala de aula marca de modo decisivo as oportunidades de aprendizagem dos alunos (Bishop & Goffree, 1986; Franke, Kazemi, & Battey, 2007). Esta comunicação pode ser *unívoca*, quando é dominada pelo professor, ou *dialógica* quando a contribuição dos alunos é valorizada (Ponte, 2005). O professor tem um papel-chave na definição dos padrões de comunicação, na proposta de tarefas a realizar e no estabelecimento dos modos de trabalho na sala de aula, fazendo-o em permanente negociação (explícita ou implícita) com os alunos. Neste contexto, o professor pode assumir em exclusivo o papel de *autoridade matemática* ou partilhá-lo com os alunos, procurando estimular a sua capacidade de raciocínio e argumentação. Uma forma particular de comunicação caraterística da abordagem exploratória são as discussões matemáticas, em que diversos intervenientes assumem, todos eles, um papel de autoridade em relação às suas ideias.

Desenvolver o raciocínio matemático é um objetivo central da abordagem exploratória. Como indicam Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), raciocinar consiste em realizar inferências baseadas em razões, ou seja, inferências fundamentadas. Raciocinar não é apresentar ideias ao acaso, mas sim usar informação dada para obter nova informação que possa ser aceite como válida num dado domínio de conhecimento. De acordo com o NCTM (2000), é necessário valorizar o raciocínio matemático na sala de aula de modo a que os alunos possam ir além da mera memorização de factos, regras e procedimentos. O foco no raciocínio pode ajudá-los a ver que a Matemática é lógica e pode ser compreendida. Lannin, Ellis e Elliott (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve essencialmente fazer generalizações e justificações matemáticas. Para os autores, a “grande ideia” sobre o raciocínio matemático é que este é um processo dinâmico de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos. Deste modo, o raciocínio matemático envolve processos dedutivos, indutivos e abdutivos (Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012). Para promoverem o desenvolvimento do raciocínio dos seus alunos, os professores têm de tomar decisões, definir percursos educativos e selecionar tarefas de forma cuidadosa, considerando os aspetos do raciocínio a dar atenção.

**Aprendizagens dos professores em estudos de aula**

Para Day (2001) e Ponte (1998) o desenvolvimento profissional refere-se aos processos de aprendizagem relacionados com o exercício da docência, decorre ao longo da vida profissional do professor e pressupõe o seu investimento em questões diversas, incluindo as que se prendem diretamente com o ensino das disciplinas que ensina. Marcelo (2009) refere-se ao desenvolvimento profissional do professor como "um processo individual e coletivo que se deve concretizar no local de trabalho do docente: a escola; e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais, através de experiências de índole diferente, tanto formais como informais" (p. 7).

Os estudos de aula constituem um contexto de desenvolvimento profissional do professor. Decorrem dentro do ambiente escolar e neles os professores desempenham um papel central. Normalmente, um estudo de aula começa com a identificação de um problema relevante relacionado com a aprendizagem dos alunos. Depois, os participantes planeiam uma aula, considerando as orientações curriculares. Preveem dificuldades dos alunos, antecipam questões que podem surgir na aula, definem estratégias, constroem materiais de ensino e preparam instrumentos para a observação. A aula, muitas vezes designada por "aula de investigação", é lecionada por um dos professores enquanto os restantes observam e tiram notas com especial atenção à aprendizagem dos alunos. Em seguida, os professores analisam e refletem sobre o que observaram. A análise pode levar à reformulação do plano de aula, com alterações nas estratégias e materiais utilizados, nas tarefas propostas, nas perguntas feitas aos alunos, etc… Muitas vezes, a aula reformulada é lecionada novamente, proporcionando nova oportunidade de reflexão e de aprendizagem (Lewis, Perry, & Hurd, 2009; Murata, 2011).

Um aspeto central dos estudos de aula é o facto destes se centrarem nas aprendizagens dos alunos e não no trabalho dos professores. Isto distingue-os de outros processos de formação que envolvem observação de aulas mas que se centram, principalmente, na atuação dos professores. Ao participar em estudos de aula, os professores podem aprender questões importantes em relação aos assuntos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos e à dinâmica da sala de aula. Além disso, os estudos de aula proporcionam múltiplas oportunidades para um trabalho de cunho exploratório para os próprios professores envolvidos. Trata-se, por consequência, de um processo formativo com grandes potencialidades, desde que se tenha em atenção os interesses e necessidades dos professores envolvidos.

Atendendo às suas virtualidades como processo de desenvolvimento profissional, os estudos de aula, originários do Japão, têm-se difundido em países como o Brasil, EUA, Indonésia, Irlanda, Israel e Reino Unido, sofrendo, naturalmente, várias adaptações. Por exemplo, Perry e Lewis (2009) apresentam um estudo de caso realizado nos EUA, onde se desenvolviam estudos de aula há mais de quatro anos com a participação de 63 professores. Os participantes consideravam que os estudos de aula favoreciam (i) o uso de tarefas que promovem o raciocínio dos alunos; (ii) a antecipação de dificuldades dos alunos; (iii) a discussão e comparação de respostas dadas pelos alunos às tarefas, incluindo análise de respostas incorretas; e (iv) e a recolha de dados dos alunos para tomar decisões. Noutro estudo realizado nos EUA, Puchner e Taylor (2006) referem que a realização de estudos de aula levou os professores a reconhecerem que depende de si o envolvimento dos alunos na aula e a melhoria da sua aprendizagem. Sobre as discussões coletivas, Olson, White e Sparrow (2011) e Robinson e Leikin (2012) indicam que os professores passaram a partilhar mais a responsabilidade das intervenções com os seus alunos, tornando-se as discussões mais abertas e claras, com consequências bastante positivas na aprendizagem dos alunos. Já o estudo de Alston, Pedrick, Morris e Basu (2011), realizado com professores dos 2.º e 3.º ciclos, refere que estes foram, gradualmente, demonstrando maior valorização do raciocínio matemático dos alunos, dando uma maior atenção às suas estratégias e representações durante a resolução das tarefas.

Estudos de aula realizados em Portugal (Baptista et al., 2012; Ponte et al., 2012), com professores do 3.º e do 7.º ano, mostram que os professores podem realizar aprendizagens profissionais relativamente à seleção de tarefas a propor, à atenção a dar aos processos de raciocínio dos alunos e às suas dificuldades, bem como à comunicação na sala de aula, em especial na condução de discussões coletivas. Os professores que participaram nestes estudos de aula referem que esta atividade formativa lhes permitiu acompanhar com mais pormenor o pensamento e as estratégias de resolução dos alunos ao longo da realização das tarefas. Apontaram ainda que o estudo de aula foi benéfico para o seu desenvolvimento profissional através do seu envolvimento em atividades de investigação e reflexão, dando-lhes oportunidade para aperfeiçoar a antecipação de possíveis dificuldades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, e prever possíveis soluções. Além disso, os resultados evidenciam possibilidades formativas dos estudos de aula no que se refere à sua visão da colaboração e da reflexão profissional. Os estudos realizados mostram também que as aprendizagens efetuadas pelos professores se relacionam estreitamente com a abordagem seguida nos estudos de aula, nomeadamente durante fase de preparação da aula de investigação.

**Metodologia de investigação**

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), resulta da realização de um estudo de aula no ano letivo de 2013-14 numa escola de Lisboa. O estudo de aula envolveu cinco professoras do 2.º ciclo. As professoras participantes foram selecionadas pela Direção do Agrupamento e constituíam todo o grupo disciplinar de Matemática e Ciências da Natureza daquela Escola. Nesta comunicação apresentamos o caso de Luísa, licenciada no curso de professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza há dez anos. Naquele ano letivo entrou na escola como professora contratada com horário incompleto, lecionando Matemática apenas a uma turma de 5.º ano, tendo as restantes horas distribuídas pela lecionação de Ciências da Natureza e assessorias. Luísa foi escolhida para caso deste estudo por ter sido a professora que lecionou a aula de investigação, tendo vivido de um modo particularmente intenso todas as fases do estudo de aula.

O estudo de aula teve 8 sessões de trabalho, a que se seguiram 4 sessões de *follow-up*. A sessão 1 teve por objetivo apresentar o estudo de aula a todas as professoras e as sessões 2 a 6 pretenderam aprofundar o seu conhecimento sobre comparação e ordenação de números racionais e preparar uma aula sobre esse tópico. A sessão 7 consistiu na observação de uma aula tendo por base a tarefa selecionada e adaptada pelas professoras. A sessão 8 foi dedicada a refletir sobre a aula de investigação e sobre todo o estudo de aula. Nas 4 sessões de *follow-up* as professoras foram convidadas a planear e a refletir sobre duas aulas. As 12 sessões de trabalho constituíram uma formação creditada. Os dados aqui analisados foram recolhidos através de uma entrevista individual (EI) semiestruturada feita após a sessão 8, uma entrevista de grupo focal realizada na sessão 12 e da reflexão individual que Luísa realizou no final da formação. As entrevistas foram vídeo e áudio gravadas e posteriormente transcritas na íntegra.

A análise dos dados começou por identificar momentos significativos nas entrevistas e na reflexão final, olhando para as transcrições, para a reflexão e, quando pertinente, para a gravação vídeo. Em seguida, identificaram-se os episódios respeitantes às aprendizagens referidas pela professora sobre comunicação e processos de raciocínio e classificaram-se estes episódios de acordo com características que considerámos de interesse sobre as aprendizagens da professora. Desses episódios selecionámos para esta comunicação aqueles que nos pareceram mais reveladores das aprendizagens da professora sobre comunicação e processos de raciocínio, mais concretamente, sobre o uso de generalizações e justificações.

## Reflexão e aprendizagens sobre comunicação

*Valorizar a voz dos alunos.* Na entrevista individual pedimos a Luísa que nos indicasse as aprendizagens que tinha feito no estudo de aula. A professora referiu que não aprendeu nada de novo sobre números racionais mas que aprendeu bastante sobre comunicação na sala de aula numa perspetiva de abordagem exploratória. Indicou, ainda, que essa aprendizagem decorreu tanto das sessões de trabalho como de leituras que fez por sua iniciativa:

> Acho que não foi só no tópico, foi mesmo em presença na aula, tentar que sejam mais os alunos a gerir a aula, não ser só eu o centro. Tentar que sejam eles a participar mais, dar-lhes mais possibilidades de resposta. Isso foi uma das coisas que eu aprendi mais. Principalmente porque eu estive a fazer várias leituras de documentos que vocês publicaram dentro desta área e achei muito interessante as discussões que foram tendo com os alunos, e aprendi imenso com isso. (EI)

Ao invés de um tipo de interação em que existe uma voz (a do professor) que se sobrepõe às demais (as dos alunos), Luísa passou a valorizar e a dar espaço aos alunos para terem um papel mais ativo na aula, levando-os a participar em discussões coletivas e a explicar as suas resoluções à professora e aos colegas.

Apesar de manifestar interesse por este estilo de comunicação de cunho dialógico, Luísa referiu também as dificuldades que sentiu quando o tentou aplicar na sala de aula:

> Valorizar foi... Eu já valorizava a opinião dos alunos. […] Valorizo mais isso apesar de tudo, que já valorizava um bocadinho. Mas também o problema é que nós não temos muito tempo na aula para fazer isso tudo. E mesmo hoje, por exemplo, os miúdos que vinham dizer: "Ah! Eu fiz assim e fiz assado", eu não consigo, tenho de andar para a frente. Mas pronto, lá discutimos três casos e agora tenho de andar para a frente. (EI)

Deste modo, Luísa passou a valorizar mais a voz dos alunos. Ao mesmo tempo, indicou que essa prática implica uma cuidada gestão do tempo e que percebeu da sua experiência, que não era possível ouvir todos os alunos.

*Discussão coletiva.* Quando questionada sobre como, na sua perspetiva, tinha corrido a discussão coletiva na aula de investigação, Luísa não hesitou em avaliar de forma bastante positiva a prestação de alguns dos seus alunos, que considerou mesmo surpreendente. A professora ainda não conhecia as capacidades que os seus alunos eram capazes de mostrar naquela situação e, por isso, ficou admirada com a sua participação e as suas explicações na aula de investigação. Como exemplo, salientou o caso de um aluno que apesar de ter fraco aproveitamento na disciplina, a surpreendeu com a qualidade da sua participação na discussão coletiva:

> Muitas vezes aproveito as opiniões dele para explicar aos colegas; também porque são diferentes. No início, por exemplo, eu achava que ele era um aluno que… Que metia os pés pelas mãos. E acho que não, acho que se nota… Se nós o deixarmos falar, e deixamos explicar, acho que ele consegue ser, consegue trazer momentos de discussão muito interessante para a turma. (EI)

A expetativa inicial de Luísa em relação ao aluno não era elevada. No entanto, o facto de lhe ter dado oportunidade para participar ativamente e explicar as suas resoluções permitiu-lhe descobrir que as suas intervenções podiam, afinal, enriquecer a aula e ajudar os colegas. Tendo por base esta reflexão sobre a participação dos alunos na discussão coletiva, Luísa acabou por concluir que "foi uma ótima aula, acho que aprendi imenso com eles também" (EI).

Como balanço das suas aprendizagens neste campo, Luísa referiu as alterações que fez na sua prática e os benefícios que obteve em relação às práticas anteriores que tinham um cunho mais tradicional:

> Foi a forma como nós trabalhamos com os… A forma como nós trabalhamos e os deixamos explicar como eles chegaram lá, acho que é

> muito importante e eu aprendi imenso com estas sessões de discussão. Se calhar perco mais aulas, não é? Perco mais aulas nisto, mas acho que é muito mais importante do que se calhar estar ali a debitar matéria e depois eles não chegam lá, acho que é mais interessante. (EI)

*Abordagem exploratória.* A professora salientou a importância de usar práticas ancoradas numa abordagem exploratória onde os alunos são chamados a ter um papel mais ativo na sua própria aprendizagem em contraponto com uma abordagem tradicional onde o professor expõe o conteúdo que os alunos apenas têm de ouvir e reproduzir. Na sua reflexão final, Luísa voltou a referir essa aprendizagem sobre o modo como conduzir aulas seguindo uma abordagem mais exploratória: "Nesta formação reaprendi uma forma diferente de estar em sala de aula e de a dirigir. Tem a ver com a necessidade dos alunos serem os elementos principais em sala de aula. Dar-lhes possibilidade de intervir sobre cada assunto tratado na aula".

As propostas de trabalho feitas durante o estudo de aula deram às professoras oportunidade para experimentarem práticas de ensino diferentes, com características exploratórias, e isso parece ter influenciado de forma positiva as aprendizagens de Luísa: "A necessidade de explorar tarefas em sala de aula, durante a formação, foi importante para treinar diferentes formas de organizar a aula e de a conduzir." Na sua perspetiva, esta alteração da sua prática teve reflexos positivos no envolvimento dos seus alunos: "Uma das mais-valias que retirei da formação foi mesmo a aprendizagem de outras estratégias de condução da aula e reconhecer que os alunos apresentam mais interesse e a atenção". Segundo nos diz, os alunos foram demonstrando mais interesse nas aulas, pois sentiam-se mais envolvidos no processo de ensino-aprendizagem: "Depois da aula, os alunos referiram gostar mais das aulas, em que tinham um papel mais ativo." Na entrevista focal, realizada no final da formação, a professora fez um balanço dessa aprendizagem:"[aprendi a] deixar que deem mais a sua opinião, perder um bocado de tempo nisso… Não é perder a aula, nós não perdemos, eles estão a aprender imenso. É desmistificar um bocado isso." Nesta reflexão vê-se a mudança da perspetiva da professora em relação à participação ativa dos alunos na sala de aula. Inicialmente via a participação dos alunos como envolvendo o risco de "perder tempo" e no final reconheceu que essa participação pode ser aproveitada de forma positiva e significativa na construção de conhecimento pelos próprios alunos.

**Reflexão e aprendizagens sobre raciocínio**

*Raciocínio e tarefas.* Quando passou a valorizar a participação dos alunos na sala de aula, Luísa passou também a olhar de forma diferente para as tarefas, procurando que pudessem ter diferentes modos de resolução: “Existem tarefas diferentes e eu se calhar pego mais naquelas que [admitem] formas diferentes que os miúdos podem vir a raciocinar” (EI).

A tarefa selecionada e adaptada pelas professoras para a aula de investigação foi essencialmente proposta por Luísa, e evidencia uma clara intenção de levar os alunos a fazer generalizações e justificações. A professora referiu que já antes do estudo de aula tinha a preocupação em desenvolver o raciocínio dos alunos. No entanto, mostrou ter desenvolvido uma conceção um pouco diferente de raciocínio, especialmente no que diz respeito à possibilidade de levar os alunos a fazerem generalizações:

> Marisa: Já trabalhava com generalizações e justificações.
> Luísa: Não tanto, mas sim.
> Marisa: Mas acha que é de valorizar isso, que sejam os alunos a fazer generalizações?
> Luísa: Assim são eles… Eu acho que eles sentem que são eles que estão… Como é que hei-de explicar? Não parte da professora, não tem de estar a professora ali a dizer… Sentem-se importantes, foram eles que descobriram. É uma coisa importante… Parece que foram eles os primeiros a descobrir porque é que aquilo acontece e eu acho que é importante, acho que é ótimo para eles. Eles sentem-se muito felizes e muito envolvidos na sua aprendizagem (…) Acho que se tornam muito mais autónomos e muito mais interessados no que estão a fazer. Mais pelas generalizações, sim. (EI)

Antes do estudo de aula, Luísa já tinha alguma preocupação com o desenvolvimento do raciocínio dos seus alunos, mas não dava especial atenção às generalizações e justificações. Durante o estudo de aula, pôde explorar e compreender melhor estes processos de raciocínio, o que fez com que propusesse tarefas de exploração promotoras de generalizações para a aula de investigação. Essa experiência levou-a a valorizar e adotar nas suas aulas uma abordagem mais exploratória, dando aos alunos um papel ativo no que respeita à comunicação (apresentando e explicando aos colegas a forma como pensaram) e também ao raciocínio (descobrindo regras e conceitos que anteriormente eram apenas expostos pela professora). Concluiu que, por terem oportunidade para fazerem generalizações, os alunos ficaram mais envolvidos e interessados nas tarefas propostas.

*Análise crítica das tarefas*. Luísa referiu que a tarefa selecionada para a aula de investigação tinha como principal objetivo promover o raciocínio dos alunos, em particular promover o uso de generalizações e justificações. Convidada a refletir sobre as reais possibilidades que a tarefa proporcionou aos alunos para generalizar e justificar, foi mais positiva em relação à justificação do que em relação à generalização. Referiu mesmo que ficou surpreendida com o facto de alguns alunos terem conseguido fazer justificações:

> Ele [Marcos] justificou… Na questão "2". Quando eu fui ter com ele e ele justificou-me, disse-me que estava mais longe, portanto, só faltavam dois nos cinco e aqui faltavam mais para chegar aos oitavos. Hum… Há determinadas coisas que eles disseram que eu não estava à espera. Foi o caso dele…

A admiração de Luísa com o facto de o aluno ter feito uma justificação, decorre do seu maior conhecimento das capacidades dos seus alunos no que respeita aos processos de raciocínio, talvez porque, como afirmou anteriormente, não valorizava muito este processo antes do estudo de aula.

## A concluir

Os momentos de reflexão analisados indiciam diversas aprendizagens da professora em vários momentos do estudo de aula. Assim, referiu ter aprendido ou reaprendido a dar um papel mais ativo aos alunos, levando-os a apresentar, explicar e argumentar o seu trabalho perante toda a turma. Para si passou a reservar um papel mais discreto de dinamização das discussões coletivas tal como se verificou nos estudos de Olson, et al. (2011) e Robinson e Leikin (2012). Esta abertura para ouvir mais os alunos proporcionou-lhe diversas surpresas e um conhecimento mais profundo dos seus alunos que revelaram maior conhecimento quando tiveram oportunidade para participar de forma mais ativa nas discussões na sala de aula.

Do mesmo modo que os professores dos estudos de Alston et al. (2011), Baptista et al. (2012), e Ponte et al. (2012)), Luísa também referiu aprendizagens sobre os processos de raciocínio. Considera que já se preocupava com o raciocínio dos alunos antes do estudo de aula, mas não na perspetiva nele abordada. Assim, teve oportunidade de conhecer e aplicar em sala de aula dois processos de raciocínio, a justificação, com que já se preocupava na sua prática anterior, e a generalização, a que não dava muita atenção. Considerou interessante a possibilidade de serem os alunos a descobrir regras e conceitos que anteriormente era ela que apresentava, pois passaram a ser mais valorizados pelos alunos, o que fez com que manifestassem mais interesse e envolvimento nas aulas.

Ao participar no estudo de aula, Luísa teve oportunidade para se envolver em momentos de trabalho exploratório mas também de refletir com outras professoras sobre discussões coletivas e resoluções de alunos envolvendo processos de raciocínio, em especial, justificações e generalizações. Estes aspetos levaram-na a envolver-se e a apreciar este modelo de formação que, inicialmente, lhe causou reservas. Conduziram-na também a refletir e integrar elementos da abordagem exploratória na sua prática letiva, como a comunicação dialógica, realizando momentos de discussão coletiva, e a criação de oportunidades para promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Para esta professora, o estudo de aula, realizado num contexto colaborativo e explorando situações de reflexão sobre a prática e sobre dificuldades e raciocínios por vezes inesperados dos alunos, conjugando conhecimento proveniente da investigação com conhecimento experiencial dos próprios professores, representou um contexto favorável para o seu desenvolvimento profissional, nomeadamente sobre questões relacionadas com a comunicação e processos de raciocínio no ensino-aprendizagem da Matemática.

**Agradecimento**

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT–Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de uma bolsa atribuída a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013).

**Referências**

Alston, A., Pedrick, L., Morris, K., & Basu, R. (2011). Lesson study as a tool for developing teachers’ close attention to students’ mathematical thinking. In L. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 135-152). New York, NY: Springer.

Baptista, M., Ponte, J. P., Costa, E., Velez, I., & Belchior, M. (2012). Lesson study na formação de professores do 1.º ciclo do ensino básico. In *Actas do XXIII SIEM* (pp. 11-30). Coimbra: APM.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Fernández, C., Cannon, J., & Chokshi, S. (2003). A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*, 171-185.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: Passado e futuro. *Sísifo: Revista de Ciências da Educação, 8*, 7-22.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Olson, J., White, P., & Sparrow, L. (2011). Influence of lesson study on teachers' mathematics pedagogy. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 39-58). New York, NY: Springer.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10*, 365-391.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática, 5*, 7-24.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Puchner, L., & Taylor, A. (2006). Lesson study, collaboration and teacher efficacy: Stories from two school-based math lesson groups. *Teacher and Teaching Education, 22*, 922-934.

Robinson, N., & Leikin, R. (2012). One teacher, two lessons: the lesson study process. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 139-161.

# Práticas de comunicação em contexto de organização e tratamento de dados

*Luciano Veia*[1], *Joana Brocardo*[2], *João Pedro da Ponte*[3]
[1]Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, lveia@ualg.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, joana.brocardo@ese.ips.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

**Resumo**. *Esta comunicação reporta-se às práticas de comunicação matemática de uma professora do 1.º ciclo do ensino básico na condução de tarefas de organização e tratamento de dados. Trata-se de um trabalho desenvolvido num contexto de trabalho de natureza colaborativa que segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, na modalidade de estudo de caso. As práticas de comunicação da professora, caracterizadas pelo questionamento dos alunos, desafiando a sua participação nas discussões de sala de aula e valorizando o seu conhecimento matemático, assumem predominantemente o modo de comunicação reflexiva e o padrão de interação de discussão.*

**Abstract.** *This paper refers to mathematical communication practices of a primary school teacher leading with tasks involving data handling. This is a work carried out on a collaborative context that follows a qualitative and interpretative methodology with a case study design. The communication teacher practices, characterized by the questioning of students, challenging their participation in classroom discussions and developing their mathematical knowledge, predominantly assume the reflective form of communication and the interaction pattern of discussion.*

**Palavras-chave**: *Comunicação matemática; práticas; tarefas; organização e tratamento de dados.*

## Introdução

A comunicação que se desenvolve na sala de aula constitui um elemento estruturante das práticas profissionais dos professores. Neste contexto, o discurso entendido como englobando formas de representar, falar, pensar, concordar ou discordar (NCTM, 1991), pode ser revelador de valores acerca do conhecimento matemático e da autoridade que são considerados na sala de aula. Para o NCTM (1991) "os professores, através da forma como conduzem o discurso, transmitem mensagens acerca de qual o conhecimento e as formas de pensar e conhecer que são valorizadas, de quem é considerado capaz de contribuir, de quem tem estatuto num grupo" (p. 22).

São várias as recomendações para que as experiências estatísticas em sala de aula se concentrem menos na aprendizagem de cálculos e procedimentos e mais em atividades que ajudem os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda dos processos e ideias estatísticas. O desenvolvimento do raciocínio estatístico requer igualmente que os alunos experimentem o processo de recolha e exploração de dados. Estas experiências devem incluir discussões sobre a forma de produção dos dados, seleção das medidas estatísticas apropriadas e como formular e defender conclusões a partir dos dados (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Nesta comunicação apresentamos dois episódios de sala de aula, relacionadas com o ensino da organização e tratamento de dados (OTD) no 1.º ciclo do ensino básico, procurando compreender a forma como uma professora conduz a comunicação na sala de aula, em particular durante a fase de discussão das tarefas.

**Da estatística à organização e tratamento de dados**

A importância da informação na sociedade tem tornado cada vez mais exigente a participação de cada cidadão, produzindo imensa informação, requerendo tomada de decisões com base nessa mesma informação ou a partir de dados que o próprio cidadão recolhe e analisa. Para enfrentar os desafios com que se depara, o cidadão comum necessita de instrumentos e de saber utilizá-los convenientemente (Batanero, Arteaga, & Contreras, 2011).

Vários educadores defendem a inclusão da estatística desde os primeiros anos de escolaridade, proporcionando o desenvolvimento de competências relacionadas com a utilização e interpretação de dados e a promoção de uma cultura estatística como parte integrante duma cidadania crítica (Batanero, 2013). As abordagens tradicionais do ensino da estatística, baseado em competências, procedimentos e cálculos, não permitiam que os alunos raciocinassem estatisticamente (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Em vários países, as orientações curriculares apontam para que a promoção do desenvolvimento do raciocínio estatístico vá mais além do conhecimento matemático e da compreensão dos conceitos e procedimentos (Batanero, Contreras & Arteaga, 2011). Valorizando o trabalho estatístico na sala de aula, sugere-se o desenvolvimento de investigações estatísticas, permitindo que os alunos identifiquem um tema de estudo e formulem perguntas para definição dum problema; recolham dados relevantes para o tema a estudar; analisem os dados e interpretem os resultados em função das perguntas formuladas (Franklin & Garfield, 2006; Martins & Ponte, 2010).

A realização de investigações ou projetos estatísticos investigativos permite que os alunos trabalhem com contextos significativos, nomeadamente com o recurso a dados reais recolhidos por si e desenvolvam competências de comunicação, através da realização e discussão de tarefas em pequeno e grande grupo (Martins & Ponte, 2010). Na perspetiva de Garfield e Ben-Zvi (2008), a sala de aula de estatística deve constituir um ambiente de aprendizagem que permita o desenvolvimento de uma profunda e significativa compreensão da estatística e ajude os alunos a desenvolver as suas capacidades de raciocinar estatisticamente.

**A comunicação na sala de aula**

Na caracterização do processo comunicativo em sala de aula, Brendefur e Frykholm (2000) apresentam quatro modos de comunicação matemática, que vão desde o discurso unívoco, onde a voz do professor prevalece sobre todas as outras até ao discurso de características dialógicas, onde os vários interlocutores podem igualmente participar. Estes autores propõem quatro modos de comunicação matemática: *unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva.*

A comunicação unidirecional está associada ao ensino tradicional, centrado no professor, que domina o discurso da aula através da apresentação de conceitos e de procedimentos de resolução de exercícios. Ao aluno está reservado o papel de ouvinte, tendo como objetivo reproduzir, da forma mais aproximada possível, os ensinamentos do professor, respondendo a questões de natureza fechada, tendo poucas oportunidades para partilha de estratégias e ideias matemáticas. Na comunicação contributiva, embora os alunos tenham uma maior participação, o professor continua a ser a autoridade matemática na sala de aula, a quem cabe a validação do conhecimento matemático. A participação dos alunos concretiza-se através de intervenções curtas, cognitivamente pouco exigentes, normalmente como resposta a perguntas de confirmação colocadas pelo professor. A comunicação reflexiva caracteriza-se pela importância do discurso na aula como objeto de reflexão, envolvendo professor e alunos. Os alunos envolvem-se na discussão, refletindo sobre as tarefas propostas e processos de resolução, defendendo as suas ideias. Para além da partilha de ideias e processos matemáticos, pretende-se que a participação dos alunos contribua para aprofundar a sua compreensão matemática. Finalmente, a comunicação instrutiva vai mais além da interação entre alunos e professores, caracterizando-se pela integração das ideias dos alunos através de processos de comunicação. A comunicação instrutiva "é aquela em que o curso da experiência da sala de aula é alterado como resultado da conversação" (Brendefur & Frykholm, 2000, p. 148). Numa mesma aula, podem ocorrer os diferentes modos de comunicação matemática, sendo que, para categorizar a comunicação da aula, deverá ser considerado o tipo de comunicação predominante (Menezes, Tomás Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014).

A natureza das interações entre o professor e os alunos é caracterizada por padrões de interação representando regularidades que se observam no decorrer da atividade matemática da aula. Na educação matemática, referem-se os seguintes padrões de interação: *funil, focalização, extração e discussão* (Menezes, Tomás Ferreira, et al., 2014).

No padrão de funil, através da formulação de questões, cada vez mais fáceis e direcionadas, o professor procura conduzir os alunos para a resolução do problema. Neste padrão de interação, as exigências cognitivas para os alunos são de baixo nível. O padrão de focalização começa por ser semelhante ao anterior, mas, neste caso, em vez de resolver o problema, conduzindo os alunos, o professor reformula a questão clarificando os aspetos relacionados com o problema não compreendidos pelos alunos, de modo a levá-los a ultrapassar as dificuldades e a encontrar uma solução. No padrão de extração, o professor coloca um conjunto de questões tendo como objetivo validar o conhecimento do aluno. No padrão de discussão, após a resolução dum problema, o professor procura publicitar as várias ideias e estratégias matemáticas ao grupo turma, de modo a surgir uma solução conjunta que seja válida e aceite por todos (Menezes, Tomás Ferreira, et al., 2014).

Durante as discussões, o professor desempenha um papel importante na estruturação do discurso produzido na sala de aula, recorrendo a vários tipos de perguntas. Partindo da categorização de Mason (2000), distinguem-se três tipos de questões: *de focalização, de confirmação e de inquirição*.

As perguntas de focalização têm como principal objetivo centrar a atenção do aluno num aspeto específico. Surgem em situações em que o aluno responde com hesitação ou não chega a responder. Com as perguntas de confirmação o professor pretende testar o conhecimento dos alunos. São questões que surgem frequentemente na rotina diária da sala de aula, que induzem respostas curtas e imediatas. Através das perguntas de inquirição, por muitos consideradas as perguntas genuínas, o professor procura informação que permita aceder ao pensamento e estratégias dos alunos. Os três tipos de questionamento podem ter lugar na sala de aula de Matemática. No entanto, a tendência dos alunos poderá ser de considerar que as questões formuladas servem para avaliar os seus conhecimentos pelo que tentam adivinhar a resposta pretendida pelo professor. Importa, pois, que o professor clarifique as funções dos vários tipos de questões (Menezes, Guerreiro, Martinho, & Tomás Ferreira, 2013).

## Metodologia

Este estudo faz parte de um trabalho de investigação mais amplo desenvolvido num contexto de trabalho colaborativo, em que participam o primeiro autor e três professores que lecionam os 3.º e 4.º anos, tendo como propósito analisar as suas práticas profissionais relativamente ao ensino da organização e tratamento de dados. As sessões de trabalho conjunto incluem a preparação de tarefas e a discussão e reflexão sobre a sua exploração em sala de aula. Nestas sessões o investigador é um parceiro, dinamizando as sessões, colaborando na preparação das tarefas e na reflexão sobre a sua realização, em que a ideia de colaboração é assumida como uma partilha de conhecimentos com benefícios comuns para todos os participantes. O grupo colaborativo decide trabalhar tarefas de OTD, envolvendo investigações estatísticas ligadas ao quotidiano dos alunos, de natureza diferente daquelas que surgem normalmente nos manuais e que apenas requerem a leitura e construção de gráficos.

O estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa de natureza interpretativa na modalidade de estudo de caso (Stake, 2007). Nesta comunicação, analisamos dois episódios de sala de aula, referentes a momentos das práticas letivas de Ana Maria, um dos casos de estudo, tendo como pressuposto que estes episódios são significativos para ilustrar a forma como esta professora conduz a discussão. Como formação inicial, Ana Maria, possui o curso do Magistério Primário, tendo complementado a sua formação com o curso de Estudos Superiores Especializados na área de Computadores no Ensino. No início do estudo tinha 33 anos de serviço, 24 dos quais na escola onde lecionava. Durante o seu percurso profissional, apenas frequentou módulos de estatística na formação contínua.

Os dados foram recolhidos através da observação de aulas, com gravação em áudio e vídeo, complementada com a realização de entrevistas, participação nas sessões de trabalho e materiais produzidos pelos alunos. A análise de dados tem por base o enquadramento teórico incidindo nos modos de comunicação, padrões de interação e tipo de perguntas formuladas durante os vários momentos de discussão.

## As práticas de comunicação de Ana Maria

As tarefas trabalhadas nas aulas de Ana Maria contemplam as fases do ciclo investigativo estatístico, envolvendo a colocação de uma questão investigativa, recolha dos dados necessários para o estudo, organização, representação e análise dos dados e formulação de conclusões. Esta professora valoriza os momentos de discussão porque considera que "levam ao esclarecimento dos conceitos" e "têm a ver com o entendimento das coisas". Muitos dos episódios que analisamos referem-se a estes momentos que ocorrem com maior frequência e naturalidade na fase de interpretação de resultados, mas também se verificaram nas restantes etapas do ciclo investigativo.

*Tarefa 1. Preferências televisivas*

Nesta tarefa os alunos pretendiam conhecer qual o programa preferido, tendo formulado como questão de estudo: "Quais são os nossos programas preferidos?" Depois de registarem, no quadro, o nome do seu programa de televisão preferido, decidem proceder ao agrupamento por tipo de programas (animação, séries juvenis, telenovelas, concursos e séries de ficção). Constroem uma tabela de frequências e um gráfico de barras e inicia-se a fase de formulação de conclusões.

O episódio seguinte refere-se ao momento em que a professora convida os alunos para formularem as suas conclusões a partir da análise do gráfico de barras [Figura 1]:

Professora: Olhando para aquele gráfico (…) vão-me dizer, vão pensar primeiro, quais são as conclusões que vocês tiram. Pensem primeiro.

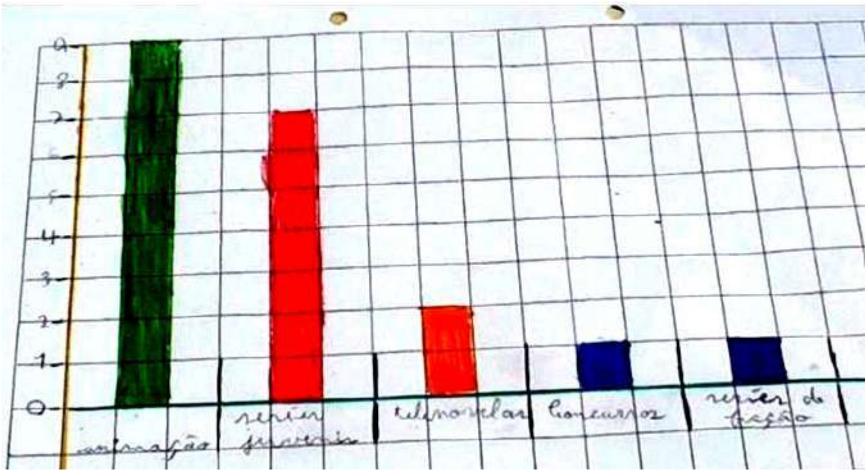



Figura 1. Gráfico relativo às preferências televisivas da turma

Segue-se um período em que alguns alunos apresentam os seus argumentos. Perante a intervenção dum aluno, Ana Maria estabelece o seguinte diálogo:

Bento: Cheguei à conclusão que o gráfico ficou bonito.

Prof: Porquê?

Bento: Porque alguns fizeram às cores e ficou giro.

Prof: E isso responde à tua pergunta? Qual era a tua pergunta, Bento?

Bento: Quais são os programas de televisão preferidos?

Prof: E quando tu olhas para as cores, estar giro ou não estar giro, diz-te quais são os programas que preferes? Qual é o que preferes? É o cor-de-rosa, o azul, o verde?

Bento: Não, eu não tenho, eu tenho outras cores.

Prof: Tens outras cores. E qual é a cor que mostra qual é o programa preferido?

Bento: O laranja.

Prof: Laranja. E é por ser laranja que é o programa preferido? Então, porque é que é o preferido?

Bento: O preferido é por, é por…

Prof: Toda a gente tem esse gráfico. Porque é que sabes que é preferido? É por ser laranja?

Bento: Não.

Prof: Então?

Bento: É por ser mais a … é por ser mais … aaa … não sei explicar bem professora.

Prof: Então olha para o gráfico.

Bento: Sim, já olhei. É por ser de animação.

Prof: Como é que sabes que o [programa] preferido é de animação? O que é que te mostra aí?

Bento: Porque tem muitos quadradinhos.

Prof: Quantos?

Bento: 9.

Prof: É o que tem mais ou o que tem menos?

Bento: Mais.
Prof: E é por isso (…) não é pela cor?
Bento: Não.
Prof: Porque os teus colegas puseram o azul, puseram o verde, não é por essa cor que sabes, pois não? É pelo número de registos que puseste lá. Contaste e puseste nove.
Bento: Nove.

Este episódio evidencia uma prática de comunicação de características reflexivas em que a professora estabelece um diálogo com o aluno procurando ajudá-lo a clarificar o seu pensamento. Na sua primeira intervenção a professora convida os alunos para formularem conclusões a partir da análise do gráfico. Este sentido de partilha de ideias insere-se no padrão de discussão. Em vários momentos do diálogo, a professora recorre a perguntas de inquirição quando questiona o aluno "Porquê?" ou quando pergunta "Como é que sabes que é o preferido que é de animação?" Este tipo de perguntas permite ao professor aceder ao pensamento dos alunos. Recorre igualmente a perguntas de confirmação quando procura "testar" o conhecimento do aluno sobre a identificação do programa preferido a partir da análise do gráfico: "E qual é a cor que mostra qual é o programa preferido?" No entanto, a professora utiliza maioritariamente perguntas de focalização ao tentar que o aluno situe a sua atenção nos aspetos essenciais da análise. As intervenções: "E isso responde à tua pergunta? Qual era a tua pergunta, Bento?" e "O que é que te mostra aí?" constituem exemplos de perguntas formuladas pela professora no sentido de apoiar e orientar o aluno para que utilize informação que lhe permita responder à questão de estudo. Em termos de padrões de interação a focalização parece predominar. A professora coloca questões que permitem ao aluno centrar-se na questão de estudo ("Quais são os programas de televisão preferidos?") e identificar o tipo programa preferido como sendo aquele a que corresponde a classe de maior frequência ("É o que tem mais ou o que tem menos?"). Paralelamente com o padrão de focalização, a professora utiliza o padrão de funil quando coloca questões mais simples para que o aluno conclua que não é pela cor que identifica o programa preferido, mas sim pelo número de "quadrados". As respostas "nove", "mais" e "não" são esclarecedoras do tipo de respostas esperado pela professora. Este tipo de questionamento é igualmente revelador dum modo contributivo de comunicação. Em alguns momentos do diálogo, Ana Maria procura ajudar o aluno a refletir sobre as respostas dadas solicitando que clarifique as suas afirmações. São exemplos deste tipo de questões "E quando tu olhas para as cores, estar giro ou não estar giro, diz-te quais são os programas que preferes? Qual é o que preferes? É o cor-de-rosa, o azul, o verde?" ou "Porque é que sabes que é preferido? É por ser laranja?". Com estas duas questões, enquadradas no padrão de extração a professora procura avaliar o conhecimento do aluno permitindo igualmente uma reflexão sobre a validade das suas respostas.

*Tarefa 2. Gostos Musicais*

Esta tarefa [Anexo 1] pretendeu estudar os gostos musicais dos alunos a partir da apreciação das músicas de quatro artistas. Na aula, ouvidas as músicas, segue-se uma acesa discussão sobre o processo de votação, em que se decide ordenar os artistas por ordem de preferência. Depois de recolhidos e registados os dados, coloca-se a questão de saber como encontrar o artista de que a turma gosta mais. Como resultado da discussão ocorrida, os alunos decidem atribuir pontos de acordo com as posições em que os artistas são votados: 1 ponto para o primeiro lugar, 2 pontos para o segundo, 3 para o terceiro e 4 para o quarto. O artista que obtiver menos pontos ficará em primeiro lugar. No final, construíram gráficos para os artistas classificados em primeiro e quarto lugar e compararam-se os resultados. O episódio seguinte refere-se ao momento de discussão onde se procura decidir qual o critério a seguir para encontrar o artista preferido:

| | |
|---|---|
| Professora: | Vamos lá ver. Como é que nós vamos registar isto? Estamos à espera de ideias. |
| Duarte: | A minha ideia é saber quantos pontos tinha cada um, o *Wiz Khalifa* já se vê que ganhou porque tem sempre 1. |
| Prof: | Portanto a tua ideia era contar os pontos? |
| Duarte: | Sim. Quem tivesse menos pontos, ganhava. |
| Prof: | O que tu dizias era: o 1 vale um ponto, o 2 vale dois pontos? |
| Duarte: | Sim, mas quem tivesse menos pontos é que ganhava. |
| Prof: | Quem tivesse menos pontos? |
| Duarte: | Porque o 1 só vale 1 e é o primeiro lugar deles. |
| Prof: | Ok. Quem tivesse menos pontos ganhava. Estão a perceber a ideia? Vamos ver, o que é que tu achas da ideia do Duarte, Luís? |
| Luís: | Então, o Duarte está juntar os [pontos] do *Wiz Khalifa* e no fim somamos os pontos todos. Depois vai comparar com os outros. |

No quadro, Duarte procura calcular os pontos de *Wiz Khalifa*. Tendo como referência a tabela com o registo dos dados, escreve todas as pontuações obtidas por este artista.

Entretanto, outro aluno (António) propõe a construção de uma tabela de frequências [Figura 2], para cada artista, com indicação da frequência para cada posição.

A partir desta tabela, Duarte reformula o seu processo de contagem dos pontos de *Wiz Khalifa* e passa a multiplicar a frequência pelo número de pontos: 6 terceiros lugares, 6×3=18, 11 primeiros lugares, 11 pontos (o primeiro lugar vale 1); 18+11=29. Ana Maria pede ao aluno que explique o seu procedimento e pergunta aos restantes alunos se perceberam a explicação. Alguns respondem afirmativamente enquanto outros dizem não perceber o procedimento do colega. Ana Maria decide clarificar esta fase da aula:

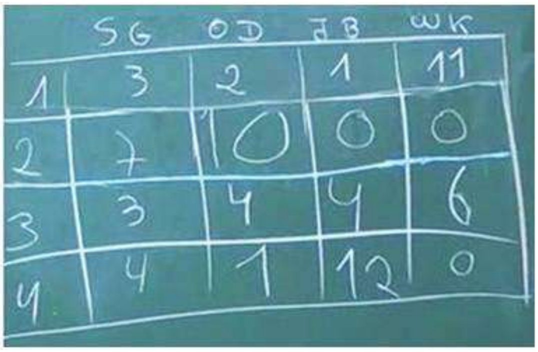



Figura 2. Tabela de frequências (conjunta) relativa às classificações dos 4 artistas

Prof: O que ele dizia era: somamos os pontos, por exemplo, da *Selena Gomez* e damos aqui uma pontuação, partindo do princípio que o 1 (primeiro lugar) valia um ponto, o 2, dois pontos, o 3, três pontos e o 4, quatro pontos. Depois íamos ao *One Direction* o mesmo e o *Wiz Khalifa* o mesmo e por isso ele começou a fazer a conta, adicionando. Certo? E aqui o que e é que estávamos a adicionar? Quantos 1 tinha, quantos 2 tinha, quantos 3 tinha e quantos 4 tinha (…) vamos olhar para o trabalho do Duarte. Estão a perceber o que o Duarte está a fazer?

Sandra: Eu não.

Prof: Porquê?

Sandra: Ele ali pôs 3×1. Onde é que ele foi buscar o 3?

Prof: Duarte, explica, 3x1.

Sandra: Depois 7×2, 3×3 e 4×4 [pontuação de *Selena Gomez*].

Duarte: Como o 4 são as pessoas.

Prof: Votaram 4 vezes …

Duarte: No quarto lugar.

Prof: Vou explicar melhor, porque vocês sabem que o Duarte tem dificuldade em explicar. Partindo do princípio que 1 vale 1 valor, o 2 vale 2, o 3 vale 3 e o 4 vale 4 ele foi ver quantos pontos tinha a *Selena Gomez*. Como é que ele fez? 3 pessoas que votaram num ponto (1.º lugar), 7 pessoas que votaram em 2 pontos. Depois no fim o que é que ele fez?

Paulo: Juntou.

Prof: Somou isto tudo. E agora qual é o resultado?

Duarte: 42, professora.

Note-se que a intervenção de Ana Maria para clarificar a estratégia de Duarte surge por ele ser considerado um aluno com Necessidades Educativas Especiais e que embora tendo um bom desempenho na área da Matemática, manifesta algumas dificuldades em expressar-se oralmente. Após este esclarecimento, os alunos calculam a pontuação de cada artista e vão completar a tabela [Figura 3] que está no quadro.

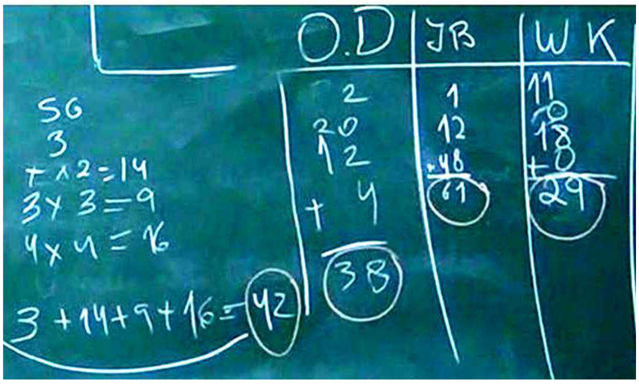



Figura 3. Cálculo da pontuação obtida por cada artista

Com base na análise dos dados os alunos concluem que o artista melhor classificado foi *Wiz Khalifa* e que *Justin Bieber* ficou em quarto lugar:

Prof: Bom, está na hora de analisarmos a questão. Olhando para a nossa tabela quantos pontos tem a *Selena Gomes*?
Alunos: 42.
Prof: 42. O *One Direction?*
Alunos: 38.
Prof: *Justin Bieber?*
Alunos: 61.
Prof: *Wiz Khalifa?*
Alunos: 29.
Prof: Então afinal quem é que ganhou?
Alunos: *Wiz Khalifa*.
Prof: Porque…
Luís: Porque tem menos e a gente foi fazer por menos. Professora, normalmente as pessoas contam quem tem mais, neste caso a gente somou o *Wiz Khalifa* para menos.
Prof: Ou seja, nós atribuímos o valor 1, que é o valor mais baixo, àquele que era mais preferido. Daí os resultados serem ao contrário, como dizia há bocado o Duarte. Certo? Então quem ganhou?
Luís: *Wiz Khalifa*.
Prof: Quem ficou em último lugar?
Alunos: *Justin Bieber*.

Durante este episódio, Ana Maria convida os alunos a participarem na discussão solicitando propostas que permitam encontrar o artista preferido da turma. Começa por colocar uma questão de inquirição: "Como é que nós vamos registar isto?"; a que acrescenta "Estou à espera de ideias", procurando conhecer opiniões dos alunos na resolução desse problema. Perante a intervenção de Duarte, que sugere a contagem de pontos recolhidos por cada artista, Ana Maria coloca outras questões de inquirição no sentido de perceber o pensamento do aluno. As questões "Portanto a tua ideia era contar os pontos?", "O que tu dizias era: o 1 vale um ponto, o 2 vale dois pontos?" e "Quem tivesse menos pontos?" solicitam respostas do aluno que permitam clarificar a sua estratégia e aceder à forma como pensou para resolver o problema. As intervenções de Ana Maria, que surgem após o cálculo da pontuação de *Selena Gomez,* procuram confirmar se os alunos tinham percebido a estratégia do colega Duarte. A questão "Estão a perceber o que o Duarte está a fazer?" ilustra este momento do episódio. A professora recorre, igualmente, a questões de confirmação, quando pergunta o número de pontos recebido por cada artista. As questões formuladas, em que a professora pretende *extrair doses de conhecimento,* são características do padrão de extração. Por outro lado, a questão "Vamos ver, o que é que tu achas da ideia do Duarte, Luís?", procurando alargar o debate a outros alunos da turma, insere-se no padrão de discussão.

Neste episódio, a professora proporciona oportunidades para que os alunos se envolvam nos vários momentos de discussão, promovendo a reflexão sobre o processo de resolução e a defesa das suas ideias, a partir das estratégias e ideias dos colegas. Trata-se de um modo de comunicação de características reflexivas embora assuma, em alguns casos, características de comunicação contributiva. Ana Maria nem sempre consegue orquestrar a discussão, permitindo que os alunos clarifiquem as ideais e expliquem o que pensam, 'caindo na tentação de explicar': "Vou explicar melhor porque vocês sabem …", "O que ele dizia era: somamos os pontos, …", "Ou seja, nós atribuímos o valor 1…".

**Conclusão**

Embora existam algumas características comuns no modo como Ana Maria conduz a discussão nos dois episódios, podemos identificar igualmente aspetos que os diferenciam. Como característica comum podemos apontar o carácter de desafio com que convida os alunos a participar nas discussões: "vão-me dizer, vão pensar primeiro, quais são as conclusões que vocês tiram" no caso do episódio relativo à tarefa "Preferências televisivas" e "Como é que nós vamos registar isto? Estamos à espera de ideias" no episódio relativo à tarefa "gostos musicais". Nestes momentos as práticas de comunicação de Ana Maria podem ser caracterizadas pelo modo de comunicação reflexiva e pelo padrão de discussão.

As diferenças que se manifestam no modo como Ana Maria conduz a discussão nos dois episódios poderão estar relacionadas com o momento da resolução da tarefa em que ocorre. Assim, na tarefa "Preferências televisivas", o episódio reporta-se à fase da formulação de conclusões. Perante uma intervenção incorreta de Bento, Ana Maria procura apoiar e orientar o aluno para que utilize informação que lhe permita responder à questão de estudo, focando a sua atenção nos dados que o possam ajudar na identificação do programa preferido. Para esta situação, em que utiliza maioritariamente questões de focalização, aproxima-se do modo de comunicação contributiva e tem características de interação que se enquadram nos padrões de focalização e de funil. Por outro lado, na tarefa "Gostos musicais" o primeiro momento de discussão ocorre na fase de análise de dados, quando os alunos discutem a forma de organizar os dados para definição de um critério para encontrar o artista preferido. Nesta fase, Ana Maria questiona Duarte para que clarifique a sua estratégia, procurando, deste modo, aceder à forma como o aluno pensou para resolver o problema. Recorre a questões de inquirição, enquadradas pelo padrão de extração e modo reflexivo de comunicação. Ainda nesta tarefa, ao pretender alargar o debate a outros alunos, solicitando que se pronunciem sobre propostas apresentadas por outros colegas, nas suas práticas de comunicação recorre a elementos característicos do padrão de discussão.

Os dois episódios analisados referem-se apenas a alguns momentos das práticas desta professora, em que assume uma comunicação de características dialógicas, procurando "dar voz aos seus alunos" nas várias tomadas de decisão e formulação de conclusões. Uma análise da condução de outras tarefas de OTD, por esta e por outros professores poderá fornecer elementos que permitam ter uma perspetiva mais global sobre a condução de momentos de discussão durante as várias fases do ciclo investigativo. No entanto, este estudo mostra desde já como é possível, no 1.º ciclo, desenvolver um trabalho em OTD envolvendo a exploração de tarefas de cunho investigativo, ligadas ao quotidiano dos alunos e alunos e assumindo um modo de comunicação reflexiva e características do padrão de interação de discussão.

## Referências


Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *Probabilidad Condicionada: Revista de Didáctica de la Estadística, 2*, 55-61.

Batanero, C., Arteaga, P., & Contreras, J. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educacao Matematica e Tecnologica Iberoamericana*, *2* (2). Disponível em http://emteia.gente.eti.br/

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

Franklin, C., & Garfield, J. (2006) The GAISE Project: Developing statistics education guidelines for grades Pre-K-12 and college courses. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 345-375). Reston, VA: NCTM.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning*. The Netherlands: Springer.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: Ministério da Educação. DGIDC.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International journal of mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sisyphus, Journal of Education, 1*(3), (44-75)

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-161). Instituto de Educação: Lisboa.

NCTM. (1991). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulhenkian.

## Anexo 1. Tarefa “Gostos musicais”

### Gostos musicais

Numa aula do 4.° ano os alunos estavam muito entusiasmados a discutir os seus gostos musicais.

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| **Selena Gomez** | **One Direction** | **Justin Bieber** | **Wiz Khalifa** |
| | | | |

Maria: Eu gosto muito do Justin Bieber e do One Direction.

Ricardo: Eu gosto do One Direction mas também gosto da Selena Gomez.

Sofia: Eu por mim vou pelo Wiz Khalifa.

Vanda. Pois eu gosto dos quatro.

Vanessa: Eu também gosto dos quatro mas do que gosto mais é do Justin Bieber.

Bernardo: Podíamos fazer uma votação para saber qual o artista de que a turma gosta mais.

Beatriz: Mas se votarmos só num estamos a dizer que não gostamos dos outros.

Diniz: Poderíamos arranjar outro processo de votação.

Tânia: Já sei. Colocamos os artistas por ordem dos nossos gostos.

Afonso: Então e depois como é que decidimos quem é o artista de que a turma gosta mais?

Se a vossa turma fizesse esta votação como chegavam à conclusão sobre o artista de que gostam mais?

Juntamente com os teus colegas pensa numa forma de tomar uma decisão.

Adaptado de:

Haller, S. (2008). CandyJudging. *Online Resources for K-12 Statistics Teachers*. STatistics Education Web (STEW). On line: http://www.amstat.org/education/stew/pdfs/CandyJudging.pdf

# Representações matemáticas e suas funções na generalização

*Maria da Luz Infante*[1], *Ana Paula Canavarro*[2]
[1]Escola EB 2, 3 de Moura, luxainfante@hotmail.com
[2]Universidade de Évora e UIDEF/UL, apc@uevora.pt

**Resumo**. *O foco deste artigo é o uso das representações matemáticas pelos alunos com vista à identificação e expressão de generalizações no contexto da exploração de tarefas com carácter algébrico. Procuramos responder a duas questões concretas: i) Como representam os alunos as suas ideias algébricas relativas à procura e à expressão de generalizações? ii) Que funções assumem as diferentes representações que adotam?*

*Apresentamos um estudo de caso de uma turma de 6.º ano de escolaridade realizado no quadro de uma experiência de ensino envolvendo uma sequência de doze tarefas, que apelavam à generalização, eram contextualizadas na realidade, e foram exploradas no contexto de uma cultura de aula onde se valorizou a comunicação matemática.*

*Os alunos revelaram ser capazes de usar todas as representações simbólicas mas com predominância distintas e funções diferentes. Assim, concluímos que os alunos recorrem com muita eficácia a tabelas quando se trata de representar e organizar dados relativos a variáveis de modo a procurar identificar relações entre as mesmas. Por sua vez, para expressarem generalizações encontradas, recorreram quase sempre a expressões algébricas compostas por símbolos numéricos, sinais e letras, complementadas com a palavra em linguagem natural. Sublinha-se ainda que a maior parte das vezes, a expressão geral em linguagem formal foi obtida por paralelismo, depurada através de análise da estrutura das expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares, salientando-se assim a importância do estabelecimento de pontes entre a Aritmética e a Álgebra.*

**Abstract**. *The focus of this article is the use of mathematical representations by the students for the identification and expression of generalizations when solving tasks with algebraic character. We aim to answer two specific questions: i) How do students represent their algebraic ideas regarding the search and expression of generalizations? ii) What functions assume the different representations that adopt?*

*We present a case study of a class of 6th grade students, developed in the context of a teaching experiment involving a sequence of twelve task. The tasks called for generalization, were contextualized in reality, and were explored in the context of a culture of mathematical communication in class.*

*Students were able to use all symbolic representations but with different prevalence and different functions. Thus, we conclude that students use very effectively the tables when it comes to representing and organizing data for variables in order to seek to identify relationships between them. In turn, to* *express generalizations they found, often used algebraic expressions consisting of numerical symbols, signs and letters, complemented with words in natural language. It is also emphasized that frequently, the general expression in formal language was obtained by parallelism, through analysis of the structure of the numeric expressions used in the study of particular cases, stressing the importance of building bridges between the arithmetic and Algebra.*

**Palavras-chave:** *Pensamento algébrico; Generalização; Representações; letras; tabelas*

## Introdução

Este artigo ancora-se num estudo mais abrangente (Infante, 2014) relacionado com o pensamento algébrico e o uso das representações matemáticas pelos alunos com vista à identificação e expressão de generalizações no contexto da exploração de tarefas com carácter algébrico. Procuramos aqui responder, em concreto, a duas questões: i) Como representam os alunos as suas ideias algébricas relativas à procura e à expressão de generalizações? ii) Que funções assumem as diferentes representações que adotam?

Nos últimos anos, cresceu a atenção relativamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A discussão em torno da Álgebra escolar tem apontado, como sua essência, lidar com o que é geral, de um modo transversal e aberto, e não de um modo restrito e baseado na aplicação de procedimentos, como foi usual durante décadas (Ponte, 2006). A importância de se utilizarem formas de expressão que não sejam limitadoras e que ampliem o horizonte dos símbolos convencionais da Matemática tem vindo a ser reconhecida e justifica a pertinência da investigação neste domínio.

## Revisão da literatura

### *A centralidade da generalização*

A literatura de investigação tem vindo a associar o pensamento algébrico àquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Mason (2005) considera que a Álgebra é muito mais do que um conjunto de procedimentos que envolvem os símbolos em forma de letra, e sublinha a importância do desenvolvimento de recursos para representar o que é geral nas relações matemáticas. Assim, a generalização algébrica não tem de ser necessariamente sintetizada através de linguagem matemática simbólica, podendo inclusivamente ser expressa por linguagem natural (Canavarro, 2009; Carraher & Schliemann, 2007;

Kieran, 2007).

Kaput (1999) aponta caminhos que podem culminar numa Álgebra acessível a todos e em fusão com os outros temas do currículo. Defende a generalização e a expressão dessa generalização desde o início, independentemente da representação usada, utilizando linguagens progressivamente mais formais – quando se começa a generalizar em Aritmética, em situações de modelação, na Geometria e em praticamente toda a Matemática, a partir dos primeiros anos de ensino e atravessando os diferentes temas do currículo.

Kieran apresenta uma visão semelhante, destacando a importância da generalização e encarando a Álgebra como uma forma de pensamento:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (Kieran, 2007, p. 5)

Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) dão também uma visão alargada sobre o pensamento algébrico, referindo-o como a capacidade de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. Esta visão encontra-se longe da perspetiva tradicional em que a Álgebra é encarada como a simples manipulação de expressões e equações (Ponte, 2006).

Kieran (2007) dá ênfase ao facto de, a generalização, em crianças muito jovens, surgir a partir de pontes que se estabelecem entre a Aritmética e a Álgebra, e à importância que as tarefas assumem neste processo. Quando as tarefas são suficientemente ricas, incentivam abordagens de resolução generalizáveis e abrem portas a momentos de discussão em que se estabelecem conexões entre diferentes representações e processos de resolução. Esta autora considera ainda crucial, no processo de generalização, a observação da estrutura sequencial das operações, geradas a partir do estudo de casos particulares, abrindo caminho à generalização.

***A diversidade de representações***

As representações são consideradas instrumentos essenciais que possibilitam representar, organizar e comunicar ideias matemáticas, servindo como meio à compreensão dos conceitos e das relações matemáticas. A comunicação dos processos e as conexões que se estabelecem têm como suporte as representações que sustentam a argumentação dos conhecimentos matemáticos. Assim, é importante sublinhar que as representações não constituem tanto finalidades em si mesmas, mas um meio para a compreensão e trabalho com os conceitos (NCTM, 2008).

Os diagramas, os gráficos e as expressões algébricas são representações convencionais há muito usadas para representar ideias matemáticas. Contudo, e essencialmente nos primeiros anos de ensino, os alunos devem ser incentivados a criar as suas próprias representações às quais atribuem sentido (NCTM, 2008). Ponte e Serrazina (2000) afirmam que há uma estreita ligação entre as representações usadas pelos alunos e a forma como as compreendem e utilizam nas suas resoluções.

Bruner (1999) distingue três tipos de representações que se inter-relacionam e que contribuem para o processo de desenvolvimento e aprendizagem de cada indivíduo: representações ativas, sustentadas na ação, como seja a manipulação de um material; representações icónicas, sustentadas na imagem, que podem surgir, por exemplo, na forma de desenho ou esquema com o qual se procura reproduzir uma dada situação; e representações simbólicas, que recorrem a símbolos que não são necessariamente os formais partilhados por quem domina a linguagem matemática, podendo até ser idiossincráticos, criados pelos alunos e plenos de significados próprios, eficazes na comunicação de ideias matemáticas associadas a situações (Pinto & Canavarro, 2012).

Um aspeto essencial da Álgebra nos primeiros anos de ensino é a transição entre a linguagem natural e a notação algébrica. Blanton e Kaput (2011) consideram a existência de uma fase pré-conceptual de formação dos conceitos. Estes autores alegam a importância de dar às crianças a oportunidade de começar a usar representações simbólicas nos anos iniciais, possibilitando-lhes criar um maior espaço cognitivo para explorar posteriormente ideias mais complexas.

O NCTM (2008) sugere que a utilização dos símbolos, como meio de representar ideias matemáticas, deve surgir após o contacto com outras formas de representação menos convencionais que irão facilitar a compreensão dos conceitos. Será mais fácil, posteriormente, estabelecer conexões entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, criando oportunidades para que os símbolos surjam com significado.

As estruturas aritméticas geradas para analisar casos particulares constituem, por vezes, o ponto de partida para expressar generalidades através da notação algébrica. Carraher e Schliemann (2007) defendem que a notação convencionalmente utilizada, em que são geralmente empregues as últimas letras do alfabeto, não é o único meio de expressar o geral. A linguagem natural, os diagramas, as tabelas, as expressões numéricas e os gráficos constituem meios igualmente válidos. A utilização de tabelas e gráficos, por exemplo, são consideradas por Blanton e Kaput (2011) preciosas para encontrar relações e compreender situações, desde o início da escolaridade. Estas ferramentas irão constituir auxiliares poderosos em anos posteriores, na resolução de tarefas mais complexas, quando os alunos tiverem necessidade de simbolizar funções, pois possibilitam comparar e encontrar relações entre as variáveis.

As representações assumem um papel fundamental na comunicação e compreensão das ideias matemáticas. Assim, os alunos devem ser incentivados, desde cedo, a representar o seu raciocínio, utilizando, inicialmente processos originais, que revelam o modo como interpretam a situação e compreendem os conceitos. Os processos formais como tabelas, gráficos e expressões simbólicas, devem surgir de forma natural e ser integrados nas rotinas, para que os alunos percebam as suas potencialidades e os adotem como meios que lhes possibilitam compreender os conceitos. Canavarro e Pinto (2012) dão testemunho destas ideias, revelando como alunos de 1.º ano de escolaridade usam, de forma eficaz, as representações diversas para raciocinar e comunicar as suas descobertas no contexto de problemas.

## Opções metodológicas

Considerando a natureza do objetivo de investigação, optámos por uma metodologia que se inscreve num paradigma interpretativo, com uma abordagem qualitativa, onde os processos e significados criados pelos participantes assumem um papel crucial (Bogdan & Biklen, 1994).

Estudámos o caso duma turma de 6.º ano de uma escola básica do interior alentejano, com alunos entre os onze e os quinze anos. A investigadora primeira autora deste artigo era a professora de Matemática desta turma pelo segundo ano consecutivo. Os dados foram recolhidos em ambiente natural de sala de aula, no decurso do ensino regular de Matemática, em 2013/2014.

O estudo apoiou-se numa experiência de ensino com uma sequência de doze tarefas, incidindo sobre proporcionalidade direta e regularidades. As tarefas apelavam à generalização, eram contextualizadas na realidade, e foram exploradas segundo uma cultura de aula onde se valorizou a comunicação matemática e onde se contemplaram quatro momentos de um modelo exploratório para a organização do ensino (Canavarro et al., 2012). Os alunos estavam organizados em cinco grupos e a dinâmica da aula integrava momentos de trabalho autónomo e momentos de apresentação e discussão plenária.

Com vista a uma análise sustentada em evidências de qualidade, reunimos diversos dados complementares: as produções escritas dos alunos resultantes da exploração das tarefas, as gravações vídeo e áudio das discussões coletivas, e as anotações de um diário de bordo.

A análise de dados foi realizada considerando categorias emergentes da revisão da literatura, sintetizadas na tabela 1:

Tabela 1 - Categorias consideradas na análise de dados

| Tipos de representações Bruner (1999); Canavarro & Pinto (2011) | |
|---|---|
| Ativas (baseadas em ações) | - Dramatizações, manipulação de materiais; |
| Icónicas (baseadas em imagens) | - Diagramas, esquemas, desenhos; |
| Simbólicas (baseadas em símbolos) | - Formais: Tabelas, Gráficos, expressões algébricas, expressões numéricas, linguagem natural;<br>- Informais: símbolos idiossincráticos. |

Os episódios relatados neste artigo referem-se a quatro tarefas selecionadas da sequência realizada, correspondendo às 3.ª, 4.ª, 8.ª e 12.ª tarefas, pois a sua análise é suficiente para ilustrar os resultados e sustentar as conclusões.

## Resultados

Para cada tarefa, apresentamos a análise das representações usadas pelos alunos para expressar a generalização e as funções que assumem no contexto das resoluções produzidas.

**Um percurso pedestre**

Na manhã seguinte teve lugar um percurso pedestre, era a oportunidade dos escuteiros conhecerem a zona envolvente do acampamento. O percurso incluía trilhos muito estreitos e devido à dimensão do grupo, trinta escuteiros, o chefe propôs que se dividissem em dois grupos. O grupo dos Exploradores e o grupo dos Pioneiros. Todos se prepararam para iniciar a caminhada levando consigo água e alguns alimentos. O grupo dos Exploradores foi o primeiro a partir tendo iniciado o percurso às 10 horas e 45 minutos, o grupo dos Pioneiros partiu meia hora depois.

O esquema mostra o percurso pedestre realizado pelos grupos dos Exploradores e Pioneiros.

1. Compara o tempo gasto por cada um dos grupos ao longo do percurso pedestre. Investiga se encontras alguma relação entre a distância percorrida e o tempo que foi gasto para a percorrer? Regista as tuas conclusões.
2. Se o percurso pedestre tivesse 6000 m, seria possível prever o tempo que cada um dos grupos precisaria para o concluir? Explica como pensaste.
3. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o tempo gasto pelos grupos, num percurso pedestre com qualquer número de metros? Explica como pensaste.

Figura 1 – 3ª tarefa: Um percurso pedestre (Inspirada em Silvestre, 2012)

Nesta 3ª tarefa da sequência (fig. 1), todos os grupos optaram por representar os dados em tabelas, estabelecendo posteriormente relações entre as variáveis.

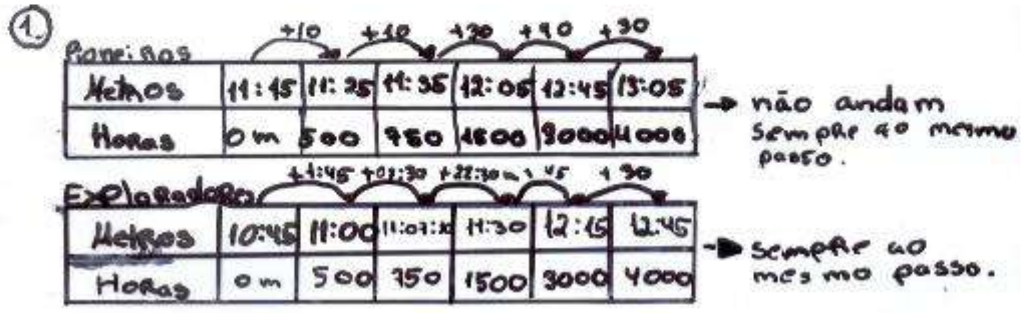



Figura 2 – Evidência do uso de tabelas

No episódio seguinte, os alunos descrevem as relações entre as variáveis que identificaram nas tabelas representadas na Figura 2. Foi identificada a relação de covariação entre as variáveis no caso dos Exploradores e a sua ausência no caso dos Pioneiros.

> **Tó** – (...) para os Pioneiros, vimos que começaram às 11:15 que era mais meia hora que as 10:45, depois fizemos uma tabela e vimos que eles demoravam o mesmo tempo a percorrer 500m do que 250m, (...) não andavam sempre ao mesmo passo. Aqui (tabela referente aos Exploradores) estivemos a relacionar e vimos que demoravam 15 minutos a percorrer 500m, e metade de 15 minutos é 7,5 minutos, então percorreram, nesse tempo metade de 500m que eram 250m.

> **Inês** – Chegámos à conclusão que os Pioneiros não dava para calcular quanto tempo demoravam a percorrer um certo caminho porque eles não andavam sempre ao mesmo passo.

Para representar a generalização apenas um grupo fez uso de expressões algébricas. De salientar o facto do contexto da situação proposta não ter sido esquecido, dado que as letras escolhidas mantêm uma relação com o mesmo, surgindo como abreviaturas.

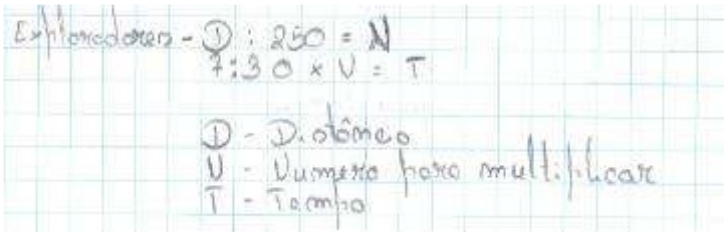



Figura 3 – Evidência do uso da expressão algébrica

Dois grupos expressam a generalização através de uma expressão numérica, ficando a um pequeno passo duma generalização formal (y = kx; tempo = 0,03× distância). À constante de proporcionalidade é atribuído significado no contexto do problema.

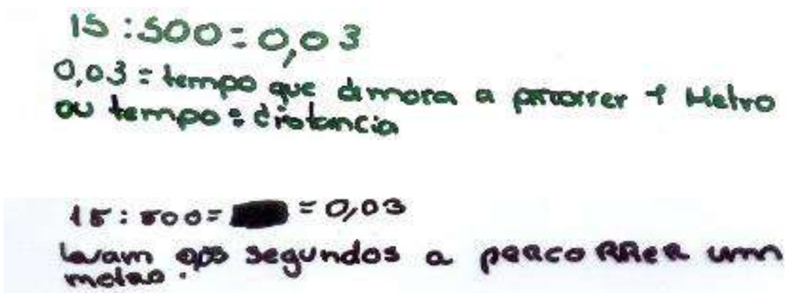



Figura 4 – Evidência do uso de expressões numéricas

No episódio seguinte, após Maria justificar os procedimentos adotados pelo seu grupo (fig. 4), André acrescenta que o seu grupo utilizou os mesmos procedimentos, quer para os Exploradores, quer para os Pioneiros, e conclui que o quociente entre o tempo e a respetiva distância, no caso dos Pioneiros, não é sempre o mesmo, dado que não se deslocam a uma velocidade constante.

> **Maria** – Dividimos o tempo pela distância e deu-nos a constante de proporcionalidade que era o tempo que eles demoravam a percorrer 1m.
> **André** – O meu grupo fez de outra maneira, fizemos assim para os Exploradores e fomos fazer para os Pioneiros, só que não deu. Nos Pioneiros quando fizemos 10÷500, deu 0,02, e 10÷250, não dá o mesmo, porque eles levaram o mesmo tempo a percorrer 500m e 250m, se eles

fossem sempre ao mesmo passo, os 250m tinham que ser percorridos em 5 minutos, porque é metade de 500m.

Um dos grupos procura expressar a generalização através do uso da linguagem natural. Verifica-se uma tentativa de descrição das expressões numéricas utilizadas para prever o tempo gasto num percurso com 6000 metros de distância.

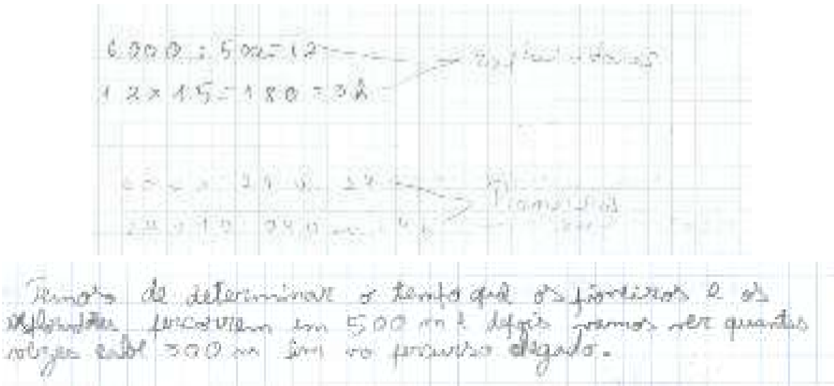



Figura 5 – Evidência do uso de expressões numéricas e linguagem natural

Os alunos recorreram essencialmente a representações simbólicas, como tabelas, expressões numéricas e algébricas, para expressar ou procurar expressar a generalização. Verificou-se que os alunos usaram, em simultâneo, linguagem natural, com o intuito de atribuirem significado às suas ações e estabelecerem conexões entre as representações usadas e o contexto das situações apresentadas. As tabelas foram usadas para organizar e representar os dados relativos às variáveis e permitiram identificar relações entre as mesmas. Quanto às expressões numéricas e à expressão algébrica, usada por um dos grupos, foram empregues para procurar expressar a generalização.

**Aluguer de canoas**

No dia seguinte teve lugar um passeio de canoas pelo grande lago de Alqueva, alguns membros do grupo estavam muito entusiasmados com a oportunidade que tinha surgido. Finalmente iam poder experimentar e praticar canoagem...

Consultaram as tabelas de preços de duas empresas:

| Momentos de Aventura | |
|---|---|
| Tempo (minutos) | Preço (euros) |
| 30 | 5 |
| 45 | 7,5 |
| 60 | 10 |
| 90 | 15 |

| Amieira Desportos | |
|---|---|
| Tempo (minutos) | Preço (euros) |
| 40 | 5 |
| 60 | 10 |
| 90 | 16 |
| 180 | 28 |

1. Será possível prever, com exatidão, o preço a pagar pelo aluguer das canoas, durante cinco horas, para cada uma das empresas? Justifica a tua resposta.
2. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o preço a pagar para qualquer número de minutos, para cada uma das empresas? Explica o teu raciocínio.

Figura 6 – 4.ª tarefa: Aluguer de canoas

A representação da generalização assume, nesta tarefa (fig. 6), um caráter mais formal, tendo três dos cinco grupos utilizado a expressão algébrica e reconhecido que a regra só se podia aplicar à empresa Momentos de Aventura, onde identificaram a relação de proporcionalidade direta.

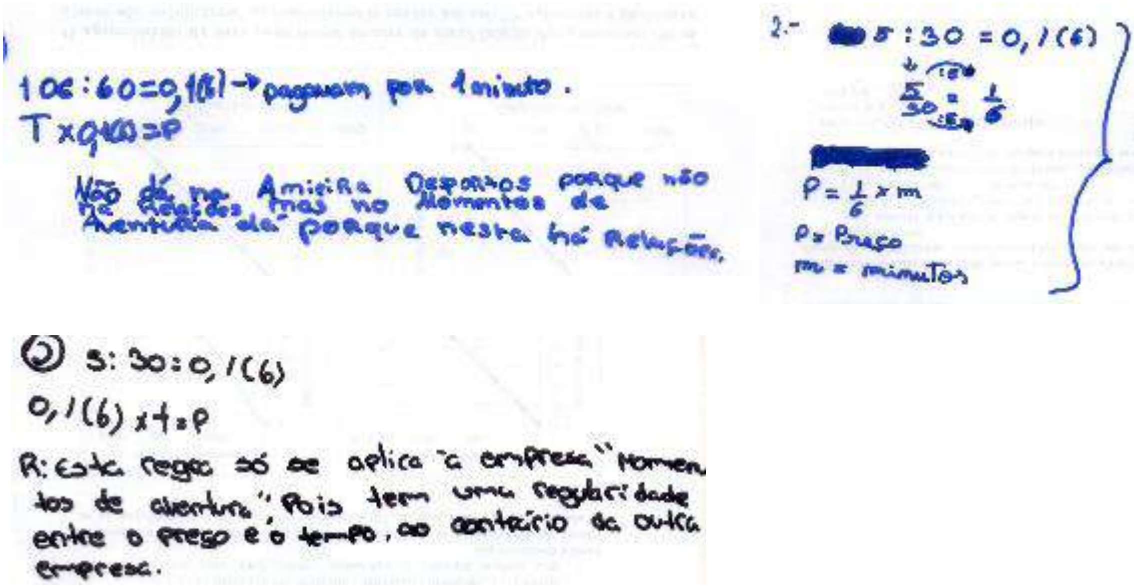



Figura 7 - Evidência do uso da expressão algébrica

Outras produções dos alunos evidenciam o recurso a representações distintas.

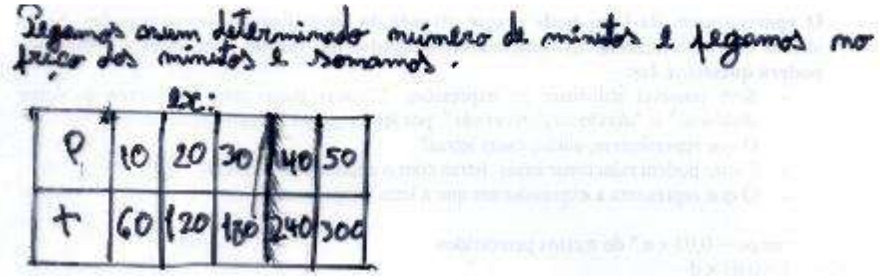



Figura 8 - Evidência do uso da tabela e linguagem natural

No episódio seguinte os alunos procuram justificar os procedimentos empregues (fig. 8) para expressar a generalização, recorrendo a uma estratégia recursiva:

> **André** - Também se pode fazer 60+60; 60+60+60; 60+60+60+60, (...) como fizemos lá em cima (referindo-se à tabela)
> **Tó** - Também podíamos olhar para a tabela desde o princípio e irmos continuando...

Na tentativa de expressar a generalização, os alunos estabeleceram, com recurso a tabelas, relações multiplicativas, entre o preço e o tempo em cada uma das empresas, o que lhes permitiu identificar a relação de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura, onde o quociente entre as variáveis é um valor constante.


Figura 9 - Evidência do uso de tabelas

Para provar a existência da relação de proporcionalidade direta este grupo recorre à representação gráfica, demonstrando a existência desta relação na empresa Momentos de Aventura e a sua ausência na Amieira Desportos.

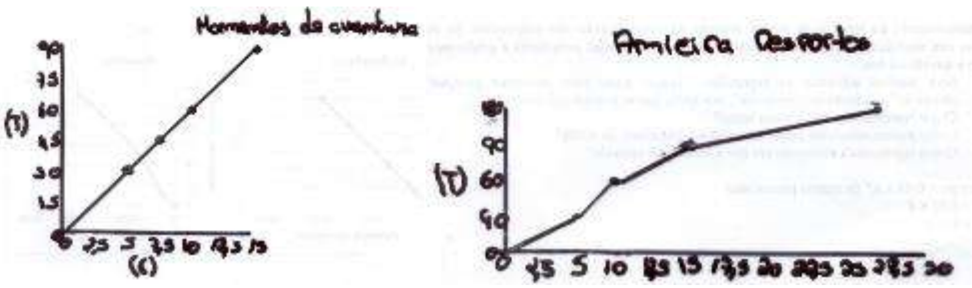


Figura 10 – Evidência do uso da representação gráfica que permitem observar o comportamento das funções

À semelhança do que sucedeu na tarefa anterior, a regra adquiriu significado, uma vez que os alunos atribuem sentido às letras e à própria expressão, relacionando-as com o contexto da situação:

> **Rui** – Fizemos o preço a dividir pelos minutos que dava o preço de um minuto, nos Momentos de Aventura, porque na Amieira Desportos não havia relação, então não dava para ver (5 : 30 = $\frac{5}{30}$)
> **Marta** – ... passámos para fração para achar o número exato $\frac{1}{6}$
> **Rui** - ... isto (indica o m) é os minutos que queremos, $\frac{1}{6}$ é o preço de um minuto, se queremos andar 100 minutos fazemos $\frac{1}{6} \times 100$

No episódio seguinte, as questões colocadas pelo André e, posteriormente, pela Professora, dirigem o olhar da situação sobre outro ponto de vista e induzem à manipulação simbólica.

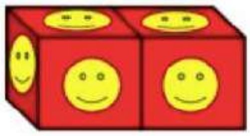
> **Matilde** – Nós multiplicávamos o preço de um minuto vezes o tempo que nos pediam, que nos ia dar o preço que nós pagávamos.
> **André** (elemento não pertencente ao grupo) – E se quisermos saber o tempo?
> **João**– Não podia ser assim, tinha que ser 30 a dividir por 5, que ia dar 6, e 6 vezes o preço que tu querias ia dar o tempo.
> **Professora** – E usando este valor (indicou-lhes o valor 0,1(6)) seria possível determinar o tempo?
> **Matilde**– Podia ser o preço a dividir por 0,1(6), e ia dar o tempo.

Nesta 4.ª tarefa surgem evidências do uso das diferentes representações simbólicas: tabelas, gráficos, expressões numéricas e algébricas. A linguagem natural surge a par das restantes representações, usadas pelos alunos para representar dados, demonstrar a existência da relação de proporcionalidade direta e procurar expressar a generalização.

**Um jogo com cubos e autocolantes**

O grupo dos Pioneiros está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Unem os cubos por uma das faces e formam filas de cubos. Depois colam um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que fizeram com 2 cubos. Nessa construção usaram 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes os Pioneiros usaram numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.
2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes os Pioneiros usaram numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 11 – 8.ª tarefa: Um jogo com cubos e autocolante (Oliveira, Canavarro, & Menezes, 2012)

Na 8.ª tarefa (fig. 11) todos os grupos utilizaram expressões numéricas no estudo de casos particulares e expressões algébricas para representar a generalização. O estabelecimento de pontes entre a Aritmética e a Álgebra foi notório, dado que as expressões algébricas, na maioria dos casos, mantêm uma estrutura idêntica às expressões numéricas, usadas no estudo de casos particulares.

| | |
|---|---|
| 5+(4x998)+5=4002 | 5+(4x[c-2])+5=nº de a |
| 4x10+2=42 | [illegible] |

Figura 12 - Evidência da existência de pontes entre a Aritmética e a Álgebra

Quando os alunos recorreram a uma sequência de expressões para representar o seu raciocínio, verificou-se a mesma tendência, mantendo-se a estrutura sequencial das operações geradas no estudo de casos particulares.

| | |
|---|---|
| $2 \times 5 = 10$<br>$50 \times 4 = 200$<br>$10 + 200 = 210$ | 2x5=10<br>[illegible]<br>[illegible] |

| | |
|---|---|
| $5+5=10$<br>$4 \times 8 = 32$<br>$10+32=42$ | 5 +5 = 10<br>4 x m = a<br>m = ao número de cubos -2<br>a = número de autocolantes |
| $123 \times 6 = 738$<br>$123 - 1 = 122$<br>$122 \times 2 = 244$<br>$738 - 244 = 494$ | n×6=e<br>(n-1)×2=d<br>e-d=c |

Figura 13 - Evidência da identidade entre a estrutura sequencial das expressões numéricas e algébricas

A situação da tarefa sofre interpretações distintas, gerando expressões algébricas que demonstram diferentes pontos de vista:

> **Manel** - Nós para 3 cubos, desenhámos os 3 cubos e vimos que o primeiro cubo e o último tinham 5 (autocolantes) nos 10 cubos fizemos : $5 + (4 \times 8) + 5$, que era para não estarmos a repetir o 4,(...)
> **José** – Na dois demos um exemplo com 1000 cubos.
> **Ana** – Depois fizemos os 5 da ponta mais $4 \times (c - 2)$ mais os outros 5, e deu-nos o número de autocolantes, o c-2, (indica para o 998) é como se fosse isto.
> **Tino** – Não percebi bem o c-2...
> **Manel** – (indicando a expressão algébrica explica) 5 +5 já fazia os 2 cubos das pontas, mas como não tínhamos o número exato tivemos que colocar o "c" e tirar esses 2.
>
> **André** – (...) se nós repararmos, entre 5 cubos, por exemplo, há quatro sítios em que se juntam. Portanto há 5 cubos e quatro locais em que se unem, o que dá 8 faces invisíveis, porque entre 2 cubos há sempre duas faces invisíveis.
> **Professora** – E se tivéssemos um número qualquer de cubos, como poderíamos generalizar?
> **André** - Fazíamos: n×6=e, depois do "n" que é um número qualquer tenho que ver o número anterior que é $(n - 1)$, depois fazemos $(n - 1 \times 2 = d)$ e, e-d=c
>
> **Tó** – Vimos que na figura eram os 2 cubos vezes 4, mais os 2 laterais, então fizemos: $3 \times 4 = 12$, mais os 2 laterais, dava 14, (...)

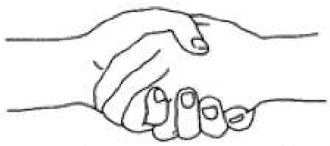
> **Inês** – Para sabermos o número de autocolantes para um número qualquer de cubos, fizemos o número de cubos vezes as 4 faces, mais as 2 laterais, que ia dar o número de autocolantes nas faces que estão á vista.

Nesta tarefa os alunos recorreram essencialmente a representações simbólicas. Contudo, verificou-se pontualmente o recurso à representação icónica, quando um dos grupos usou o desenho no estudo do caso particular de três cubos. As representações ativas surgiram, muitas vezes, associadas às simbólicas, sempre que os alunos manipularam os dois cubos que tinham disponíveis para justificar procedimentos e demonstrar pontos de vista.

**A hora da despedida**

Prestes a terminarem esta maravilhosa aventura, em que se viveram momentos bem passados, se ultrapassara desafios e em que a amizade e a solidariedade estiveram sempre presentes, eis que chega a hora da despedida em que todos se cumprimentam como é habitual entre os escuteiros, apertando a mão esquerda, entrelaçando os dedos mindinhos, e deixando assim a mão direita livre para a saudação.

O cumprimento é feito com a mão esquerda porque é a mão do lado do coração, que é o símbolo da amizade. O dedos mindinhos entrelaçados permitem um aperto de mão mais forte, sinal de maior união, e simbolizam um abraço trocado entre escuteiros, como sinal de profunda amizade.



1. Considerando que todos se cumprimentaram entre si, os 30 escuteiros e o respetivo chefe, quantos apertos de mão houve no total?

2. Consegues encontrar um processo que nos indique o número total de cumprimentos para qualquer número de escuteiros que pudesse estar no acampamento? Explica-o.

Figura 14 – 12.ª tarefa: A hora da despedida (Inspirada em Saraiva, Pereira & Berrincha, 2010)

Nesta 12.ª e última tarefa da sequência (fig 14), mais uma vez a utilização de tabelas facilitou o estabelecimento de relações numéricas entre as variáveis. Assim, e a partir dos dados disponíveis nas tabelas, os alunos testaram hipóteses e generalizaram uma regra que lhes permitia obter o número de cumprimentos a partir do número de escuteiros.

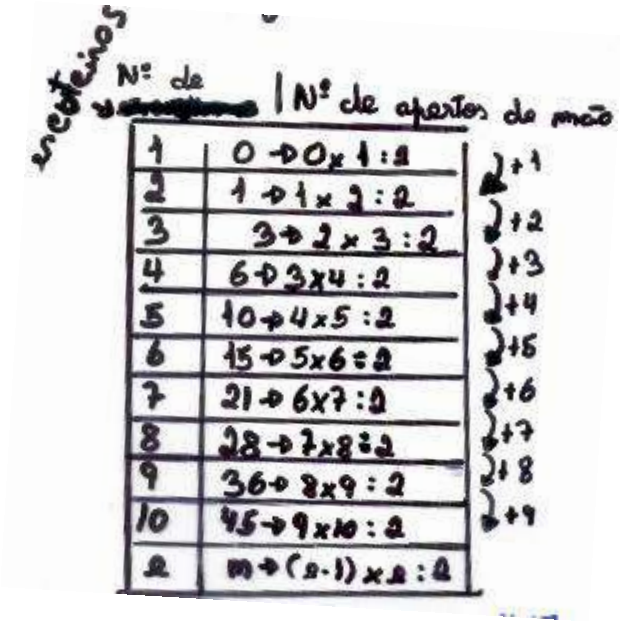



Figura 15 - Evidência da utilização da tabela

Analisando o trabalho dos grupos, conclui-se que todos estabeleceram relações numéricas entre as variáveis e identificaram a estrutura matemática da situação. A generalização da regra foi expressa através de expressões numéricas e algébricas, verificando-se, uma vez mais, o estabelecimento de pontes entre a Aritmética e a Álgebra, uma vez que as expressões apresentam estruturas idênticas.

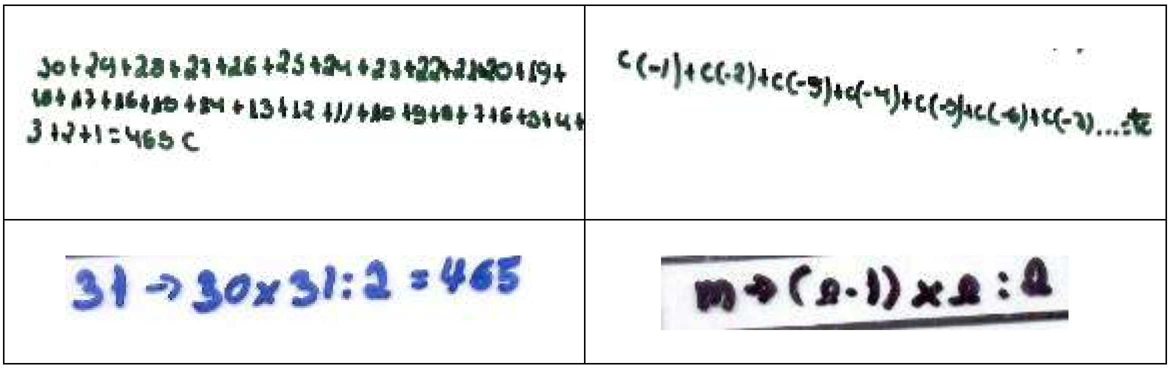



Figura 16 - Evidência da identidade entre a estrutura das expressões numéricas e algébricas

A mesma tendência verificou-se quando a generalização foi expressa através de uma sequência de expressões relacionadas, dado que se mantinha a mesma estrutura sequencial das expressões numéricas geradas durante o estudo de casos particulares.

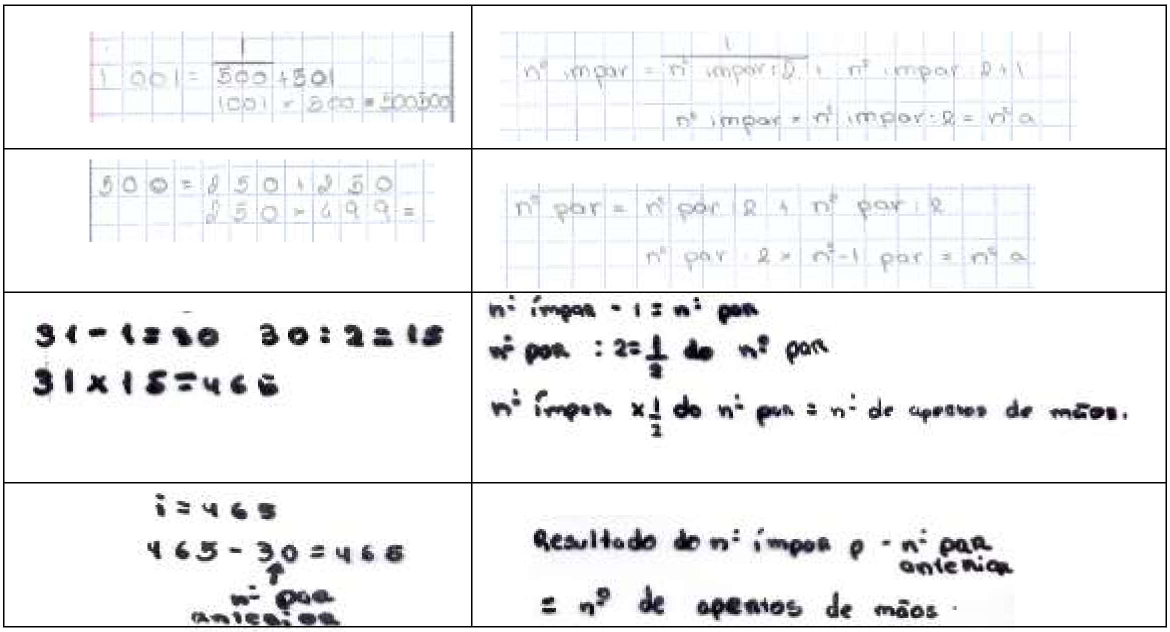



Figura 17 - Evidência da identidade entre a estrutura sequencial das expressões numéricas e algébricas

Na exploração desta última tarefa, os alunos recorreram à utilização de tabelas para organizar os dados e procurar estabelecer relações entre as variáveis, e metade dos grupos expressou algebricamente a generalização. O recurso a representações ativas teve lugar na apresentação da tarefa quando, por sugestão da professora, os alunos dramatizaram a situação proposta.

## Conclusões

Concluímos que os alunos recorreram, maioritariamente, a representações simbólicas formais, como a linguagem natural, tabelas, gráficos, expressões numéricas e algébricas. Contudo, nos momentos de discussão coletiva verificou-se, com frequência, o recurso simultâneo a representações ativas quando isso foi oportuno – por exemplo, na tarefa Um jogo com cubos e autocolantes, manipularam os cubos e utilizaram-nos durante a descrição dos procedimentos adotados, usando este meio como complementar do discurso, permitindo-lhe outra dinâmica e o preenchimento de lacunas vocabulares.

A maioria dos grupos recorreu a tabelas para representar dados e procurar relações entre as variáveis. Blanton e Kaput (2011) apontam as vantagens da utilização de tabelas, referindo que esta representação permite estabelecer, facilmente, relações entre casos particulares, criando condições para a descoberta da expressão algébrica e para a atribuição de significado às letras. Nas tarefas de proporcionalidade direta, a partir da observação das tabelas, os alunos conseguiram identificar a relação de covariação entre variáveis. A mesma tendência foi evidente na tarefa A hora da despedida, em que estava em causa uma função quadrática. Aqui, o recurso à tabela revelou-se igualmente um meio importante, facilitando o estabelecimento de relações numéricas entre as variáveis em causa.

O uso do gráfico para representar a relação entre as variáveis aconteceu apenas numa situação pontual, por parte de um grupo, na tarefa Aluguer de canoas. O recurso a este meio de representação surgiu após o trabalho realizado na tarefa anterior, em que os alunos usaram a folha de cálculo para representar os dados e testar as suas conjeturas. A representação gráfica permitiu comparar o comportamento de uma função de proporcionalidade direta com uma situação em que essa relação não se verifica. Blanton e Kaput (2011) reconhecem a importância desta representação na busca e compreensão de relações e defendem a sua utilização a partir dos primeiros anos.

Alguns grupos optaram por expressões numéricas, a par da linguagem natural ou das expressões algébricas, para procurar expressar a generalização. O recurso à linguagem natural, presente em todos os momentos de exploração das tarefas, permitiu estabelecer pontes entre a Aritmética e a Álgebra (Kieran, 2007; Johanning, Weber, Heidt, Pearce, & Horner, 2009). A utilização generalizada de expressões numéricas no estudo de casos particulares na tarefa Um jogo com cubos e autocolantes, esteve na origem das expressões algébricas usadas por todos os grupos para expressar a regra. O que ocorreu na tarefa A hora da despedida confirma esta tendência, pois todos os grupos utilizaram expressões numéricas no estudo de casos particulares que serviram posteriormente ao emergir da regra, expressa por três grupos, através da linguagem natural e, por outros três, através de expressões algébricas, com uma estrutura idêntica à das expressões numéricas. Já Kieran (2007) aponta que a observação da estrutura das sequências de operações geradas a partir do estudo de casos particulares, evidencia a estrutura geral e facilita o encontrar da generalização e a sua expressão.

Notou-se uma tendência crescente para o uso das expressões algébricas para expressar a generalização. Assim, na 3.ª tarefa da sequência, apenas um grupo recorreu à utilização de expressões algébricas para expressar a generalização da relação de proporcionalidade direta. Na 4.ª tarefa, três dos cinco grupos utilizaram a expressão algébrica para explicitar a regra e com o aspeto formal e simplificado da relação de proporcionalidade direta, com recurso ao valor da constante de proporcionalidade. Na 8.ª tarefa, a generalidade dos grupos recorreu à expressão algébrica para representar a regra. Na 12.ª tarefa, apenas metade dos grupos fez uso da expressão algébrica para explicitar a generalização. Esta diminuição do uso da expressão algébrica está provavelmente associado à complexidade da função (quadrática), em que as relações em causa são menos evidentes.

Importa referir a importância que a linguagem natural assumiu na construção dos significados e na clarificação dos conceitos, mantendo um caráter transversal a todas as representações usadas pelos alunos para expressar, ou procurar expressar, a generalização. Alguns autores como Kaput (1999) e Blanton e Kaput (2011), consideram crucial, nos primeiros anos de ensino, a transição entre a linguagem natural e a notação algébrica, e defendem uma ligação permanente entre elas.

## Referências


Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebrization, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23). Berlin: Springer-Verlag.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, *21*(2), 51-79.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática: Atas do EIEM2012* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Infante, M. L. (2014). *Desenvolvendo o pensamento algébrico no 2.º ciclo do ensino básico: O* *sentido dos símbolos e da generalização.* Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa.

Johanning, D., Weber Jr., Heidt, C., Pearce, P., & Horner, K. (2009). The polar express to early algebraic thinking. *Teaching children mathematics, December 2009/January 2010*, 300-307.

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Consultado a 10 de setembro de 2008 em, http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DATEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, Vol. XVI*, 1, 5-26

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII (*pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (Orgs.), *Práticas de investigação em Educação.* Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Saraiva, M. J., Pereira, M., & Berrincha, R. (2010). *Sequências e Expressões Algébricas: Aprendizagem da resolução de Equações a partir de Igualdades Numéricas*. Lisboa: APM.

Silvestre, A. I. (2012). O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557-628). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

# As interações de um grupo de alunos do 9.º ano de escolaridade ao longo da realização de uma tarefa em Geometria

*Maria Júlia Alves*[1], *Maria Helena Martinho* [2]
[1] Universidade do Minho, mariara362@gmail.com
[2] CIEd – Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt

**Resumo**. *O presente estudo reveste-se de uma natureza qualitativa, e tem por base dados recolhidos, relativos aos comportamentos naturais dos alunos e resultou de uma intervenção pedagógica supervisionada, realizada no ano letivo de 2012/2013, em torno de duas questões de investigação: (1) Quais os padrões de interação entre os alunos ao longo da realização do trabalho de grupo? (2) Quais as perceções dos alunos sobre o funcionamento do grupo. Nesta comunicação averiguam-se quais os padrões de interação entre os alunos de um grupo, ao longo da realização de uma tarefa de Geometria, assim como algumas das suas perceções sobre o trabalho de grupo recolhidas através de uma entrevista ao grupo. Em termos de resultados obtidos verificou-se que os padrões de interação do grupo foram diferentes de acordo com as fases da tarefa. Na fase exploratória, verificaram-se vários padrões de interação, e na fase de justificação apenas se verificou o padrão de colaboração semi-direta.*

**Abstract**. *This research has a qualitative nature, and is based on data collected from the natural behaviour of students. This research is the result of a supervised pedagogical intervention carried out in the academic year of 2012/2013, around two main questions: (1) What are the patterns of interaction among students throughout the completion of group work. (2) What are the perceptions of students about the functioning of the group. In this communication, we verified which were the patterns of interaction among students in a group, while performing a geometry task, as well as some of their perception of group work gathered through an interview with the group. In terms of results obtained it was found that the group interaction patterns were different according to the phases of the task. In the exploratory phase there were various patterns of interaction, in the the justifying phase we just found the pattern of semi-direct collaboration.*

**Palavras-chave**: *Trabalho de grupo; Padrões de interação; Geometria; Tarefas.*

## Introdução

A motivação para este estudo surgiu na sequência da observação da prática pedagógica do professor titular de uma turma do 9.º ano, de uma escola do distrito de Braga, em que os alunos se encontravam organizados em grupo nas aulas de Matemática. A tarefa que se apresenta neste trabalho incorporou a intervenção pedagógica supervisionada, em torno da Geometria, de uma das aulas da intervenção da primeira autora deste artigo.

O trabalho de grupo permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir as ideias dos seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar os argumentos alheios (APM, 2009). Em grupo, os alunos têm a oportunidade de interagir entre si. Estes ambientes, caracterizados pela interação dos alunos, "contribuem para a *assimilação de conceitos*, uma vez que os obriga a defender os seus pontos de vista face a desafios propostos pelos seus colegas" (APM, 2001, p. ix). Uma vantagem relevante, das interações sociais, é o facto de estas permitirem utilizar os outros como fonte de trabalho e partilhar os nossos raciocínios, construindo em conjunto novas aprendizagens (Smith & Stein, 2012). Contudo, colocar simplesmente os alunos em grupo permitindo que interajam ao longo da elaboração da(s) tarefa(s) proposta(s), pode não significar maximizar as suas oportunidades de aprendizagem (Johnson & Johnson, 1994). Do mesmo modo que os alunos podem ser encarados como um veículo facilitador da aprendizagem uns dos outros, podem também dificultá-la, ou mesmo impedirem o sucesso (Johnson & Johnson, 1994). Nesse sentido, o papel do professor é essencial e comporta alguma complexidade. Uma das dificuldades usualmente sentidas pelo professor quando os alunos resolvem tarefas em grupo, é o desconhecimento do que cada grupo faz na sua ausência e o envolvimento dos diferentes elementos do grupo (Martinho, 2011). Saber como interagem os alunos em grupo é importante, para que o professor esteja consciente do que pode acontecer no decurso do trabalho em grupo, e não existirem fortes discrepâncias com os resultados que são expectáveis. Além disso, esse conhecimento contribui para que o professor possa atuar de modo a serem maximizadas as aprendizagens dos alunos. As interações entre alunos do mesmo grupo, ocorridas sem a presença do professor, durante a realização de uma tarefa, são as estudadas no presente trabalho.

Nas linhas que se seguem, apresenta-se o referencial teórico que suporta o estudo das interações, a metodologia seguida, os resultados e uma reflexão final.

## Referencial Teórico

Webb (1982, 1991) apresenta as seguintes funções das interações verbais: *dar ajuda*, *receber ajuda* e *pedir ajuda*. Assim, se um aluno explica a outro, o primeiro *está a dar ajuda* e por sua vez, o outro *está a receber ajuda*. A autora divide estas funções em categorias que se complementam. Nove das categorias de interação consideradas pertinentes encontram-se evidenciadas na tabela 1.

Tabela 1. Categorias de interação consideradas de Webb

| Nível de ajuda | Categoria de interação | Descrição |
|---|---|---|
| Pedir ajuda | Questão sem resposta | O aluno coloca uma questão mas não recebe resposta do(s) seu(s) colega(s) de grupo |
| | Questão | São questões que estão relacionadas com a tarefa mas não diretamente com o processo de resolução ou solução da mesma |
| | Questão específica (Webb,1991) | O aluno pretende um esclarecimento acerca de uma parte de todo o processo de resolução da tarefa. Também pode ser uma questão de modo a esclarecer algum aspeto específico da tarefa. |
| | Pedir Instruções | O aluno pretende receber uma instrução acerca do que é para fazer |
| Dar ajuda | Expor | O aluno expõe um procedimento ou uma expressão |
| | Explicar | É mais do que expor um procedimento ou dizer como se faz, consiste numa descrição de como resolver a tarefa. Parte de uma tarefa que inclui alguma elaboração do processo de solução |
| | Resposta Adaptado de categoria *sem explicar (*Webb, 1982, 1991 | Apenas é dada a resposta ou a uma parte da tarefa ou à tarefa. |
| | Confirmar a reposta (adaptado de Webb (1991)) | O aluno confirma a resposta dada pelo (s) seu (s) colega (s). |
| | Verificar resposta | O aluno pede ou para ver a resposta do colega ou pergunta-lhe qual resultado que obteve de modo a poder comparar com o seu ou pergunta-lhe se o resultado que obteve está correto. |

Para além das categorias apresentadas na tabela 1, da observação das gravações audiovisuais surgiu a necessidade de criar uma categoria de interação não-verbal, que se denominou por *observar com registo*. Assim, sempre que é explícito na gravação audiovisual que um aluno A observa a resolução do aluno B, e logo de seguida efetua o registo na sua tarefa, é sinalizada essa interação na transcrição da aula.

Artzt e Armour-Thomas (1992) consideram que numa sala de aula diferentes grupos interagem de maneira diferente, e diferentes cenários podem surgir ao longo da realização do trabalho de grupo. As mesmas autoras apresentam quatro cenários: *trabalho independente*; *trabalho interdependente*; *combinação entre trabalho independente e interdependente*; *um aluno mostra como se faz*. No caso do *trabalho independente*, cada aluno trabalha independentemente dos restantes membros do grupo.

No cenário de *trabalho interdependente*, todos os elementos do grupo interagem entre si e o trabalho individual é quase inexistente. O cenário de *combinação destes dois modos de trabalho*, combina alunos que interagem ao longo da elaboração da tarefa, e outros que trabalham independentemente dos outros elementos do grupo. Por fim, o cenário em que *um aluno mostra o que* faz, evidencia-se na fig. 1.

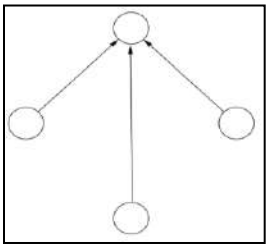


Fig. 1. Um aluno mostra "como se faz".

Este diagrama representa uma situação em que um único aluno é o responsável por fazer a maior parte do trabalho, estando os restantes elementos do grupo com a sua atenção direcionada para ele, observando-o e ouvindo-o (Artzt, comunicação pessoal, 2013, junho 27). Este aluno é assim o líder explícito do grupo.

Cobb (1995) fala de diferentes padrões de interação entre pares. Para este autor, existem dois níveis de análise de interação entre os alunos do mesmo grupo, a saber: ao nível do processo e ao nível do resultado. Ao nível do processo, o autor distingue a *colaboração direta* e a *indireta*. Na *colaboração direta*, os alunos constroem a solução em conjunto, partilhando as suas interpretações e as suas atividades matemáticas. Este tipo de colaboração contrasta com a *colaboração indireta* (Cobb, 1995). Nestas situações em que os alunos colaboram indiretamente verbalizando seus pensamentos, enquanto aparentemente resolvem a tarefa individualmente, as oportunidades de aprendizagem podem surgir quando, ao verbalizar os seus raciocínios, o resultado do processo possa ser útil para o que o colega está a fazer. Quanto ao resultado, Cobb (1995) considera que este pode ser *univocal* ou *multivocal*. O resultado diz-se *univocal* quando são apenas as ideias de um aluno que dominam. Por outro lado, o resultado diz-se *multivocal* quando todos os alunos do grupo exprimem as suas opiniões, tentando gerar um consenso entre os diferentes pareceres (Cobb, 1995). No primeiro caso revela-se a presença de um líder, uma autoridade e no segundo caso a autoridade está diluída.

**Metodologia**

O presente estudo seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa, assente no facto de ser o tipo de investigação mais adequado para o estudo das interações. A investigação qualitativa é por vezes designada por naturalista, porque o investigador frequenta os locais onde naturalmente se verificam os fenómenos que lhe interessam estudar, "incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 17). O paradigma interpretativo valoriza a explicação e compreensão holística de situações considerado o carácter complexo e humano da atividade de interpretação do real. Apesar de existirem questões de investigação pré-definidas, a recolha de dados privilegia essencialmente a compreensão dos comportamentos dos participantes do estudo e as estratégias mais representativas da investigação qualitativa são a observação participante e a entrevista (Bogdan & Biklen, 1994).

*Intervenção*

A intervenção com uma turma do 9.º ano decorreu durante o mês de Janeiro de 2013. Nesta comunicação, apenas se apresentam os padrões de interação entre os alunos do grupo estudado, ao longo da realização da primeira tarefa da aula. Após a aula, foi solicitado aos alunos que exprimissem por escrito as suas perceções sobre as diferentes fases da tarefa.

Para este trabalho, foram analisados episódios de um dos grupos da turma constituído por quatro alunos, durante uma aula de cunho exploratório. Todo o trabalho de grupo foi áudio e vídeo gravado. Com o auxílio destas gravações, foi possível observar e ouvir cada aluno do grupo e categorizar as interações de cada um, na tentativa de identificar padrões de interação entre os diferentes elementos do grupo ao longo das diferentes tarefas.

Foi ainda realizada uma entrevista semi-estruturada ao grupo no final do ano letivo, no sentido de esclarecer alguns episódios das aulas, e aproveitou-se para aferir algumas das perceções dos alunos sobre o trabalho do grupo. Para esclarecer os respetivos episódios, os alunos foram confrontados com o extrato da gravação audio-visual que se pretendia ver esclarecido, e as suas respetivas resoluções.

*Tarefa*

A tarefa (em anexo) que se estuda neste trabalho encontra-se dividida em duas fases. Numa primeira fase da tarefa, f~~ase~~ em que assume contornos exploratórios, procurava-se que os alunos estabelecessem uma relação entre o número de lados de um polígono convexo com $n$ lados, e a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos. Assim, pretendia-se que os alunos deduzissem a fórmula que permite encontrar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados: $(n-2)\times 180°$. Numa segunda fase, fase em que a tarefa assume contornos de um problema, pretendia-se que os alunos utilizassem a língua materna para sintetizar as conclusões a que chegaram com o preenchimento da tabela, desenvolvendo dessa forma a sua compreensão matemática.

Na tabela 2 apresentam-se características das duas fases da tarefa, segundo o referencial de Stein e Smith (1998).

Tabela 2. Caracterização das tarefas

| Fases | Características |
|---|---|
| Exploratória | Sugere explicitamente que o aluno efetue um determinado procedimento, preenchendo a tabela. |
| Justificação | Envolve a elaboração de uma justificação escrita. |

Neste trabalho, apresentam-se episódios da sala de aula que correspondem ao momento em que os alunos trabalhavam na resolução da tarefa, sem a presença da professora. Os sete episódios que se apresentam encontram-se codificados com um número seguido de uma letra. O número indica a ordem com que os episódios são apresentados e a letra [A ou E], indica se o episódio ocorreu em aula ou entrevista respetivamente.

*Análise das interações*

O grupo alvo do estudo das interações é composto por quatro rapazes, com 14 anos de idade, e heterogéneo quanto ao nível de desempenho à disciplina de matemática. Este foi o grupo que evidenciou um maior número de interações entre os seus elementos, sem se dispersar com conversas não relacionadas com a tarefa. Quanto ao nível de desempenho destes alunos à disciplina de matemática: André e Zeca mantiveram-se sempre no nível 5 desde o 7.º ano; Celso permaneceu sempre no nível 4 desde o 7.º ano; Luca obteve nível 3, também desde o 7.º ano.

Neste trabalho, adotaram-se as categorias sugeridas por Webb (1982, 1991) e os padrões de interação apresentados por Artzt e Armour-Thomas (1992) e por Cobb (1995), considerando-se que o resultado é *multivocal* quando as ideias de pelo menos dois alunos dominam, e que se trata de um padrão de *colaboração semi-direta* perante o cenário em que *um aluno mostra como se faz*. Acrescentou-se ainda o padrão de *interação oculta* para representar situações em que um aluno resolve a tarefa de modo aparentemente individual, não evidenciando interagir com os colegas que falam e resolvem a tarefa.

Após uma primeira observação das gravações audiovisuais, foi necessário criar uma categoria de interação não-verbal que se denominou por *observar com registo.* Assim, sempre que é explícito na gravação audiovisual que um aluno A observa a resolução do aluno B, e logo de seguida efetua o registo na sua tarefa, é sinalizada essa interação na transcrição da aula.

**Resultados**

Nesta secção, apresentam-se episódios ocorridos em sala de aula e em entrevista relativos à tarefa em estudo do grupo da turma. No início do ano letivo, o professor sugeriu que os alunos da turma se juntassem em grupo por afinidade. Na entrevista realizada ao grupo com o objetivo de os compreender melhor, questionaram-se os alunos sobre como se decidiram juntar em grupo. A revelação de como foi constituído o grupo é visível no episódio 1E (fig. 2).

| | |
|---|---|
| André: | Eu no ano passado e até desde o 7.º [ano], ficava sempre ao lado do Celso nas aulas de matemática (…). No início do ano, quando o professor disse que íamos trabalhar em grupos, eu que estava à beira do Celso, lá atrás, lembro-me de lhe ter perguntado para (…) ficarmos com o Zeca. |
| Zeca: | Sim |
| André: | E depois perguntámos ao Lúcio, pelo menos são as pessoas que eu admito que gosto mais de trabalhar em grupo (…). |

Fig. 2. Episódio 1E.

É notória uma preocupação de André em escolher o seu grupo, mostrando que liderou o processo de seleção do mesmo. Não obstante, os seus colegas de grupo deram-lhe essa liberdade de escolha do grupo. Ter a possibilidade de escolher o seu grupo, é uma característica de um líder. Assim, desde o início do ano letivo que André evidenciou ser o líder do grupo.

*Padrões evidenciados ao longo da realização da tarefa*

Na tabela 4 apresentam-se os padrões de interação demonstrados pelos alunos ao longo da realização da tarefa, distinguindo-se as duas fases.

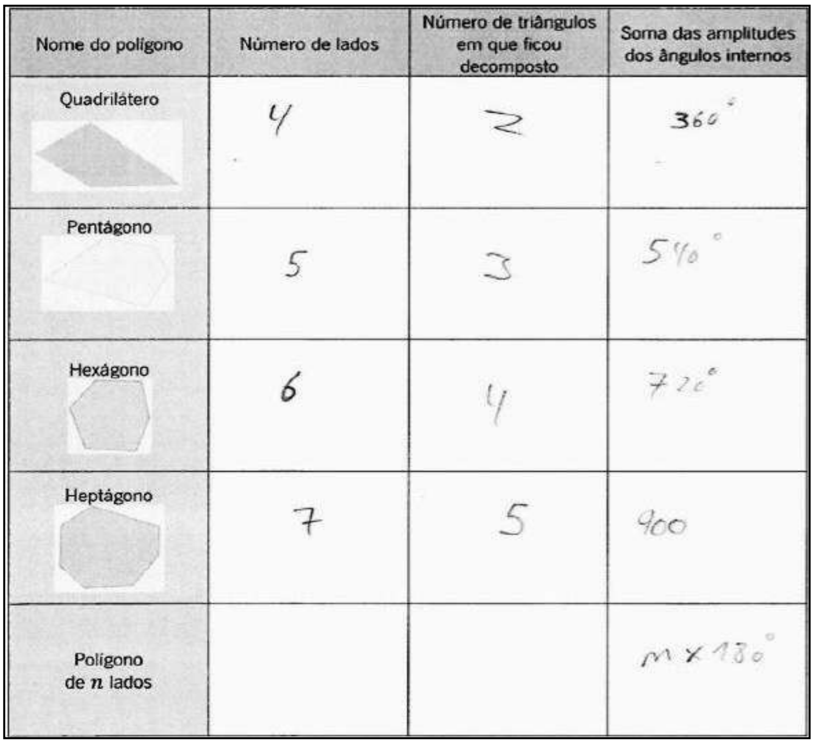
Tabela 4. Padrões evidenciados no grupo

| Fase da Tarefa | Padrões evidenciados | |
|---|---|---|
| | Nível do processo | Nível do resultado |
| Fase exploratória dos polígonos | Colaboração indireta<br>Colaboração semi-direta<br>Interação oculta | Univocal |
| Fase da justificação escrita | Colaboração semi-direta | |

Tal como se pode verificar na tabela 4 ao *nível do processo de resolução*, a fase de exploração dos polígonos, ao contrário da de justificação escrita, propiciou a emergência de diferentes padrões de interação entre os alunos. Contudo, ao *nível da solução*, o padrão evidenciado foi o *univocal* nas duas fases. Nas subsecções que se seguem apresentam-se, por fase, episódios da aula que evidenciam os padrões revelados na tabela 4.

*Fase de exploração dos polígonos*

Esta fase da tarefa propiciou e evidencia diferentes padrões de interação entre os alunos do grupo, tendo havido discussões paralelas entre eles. No momento de obtenção da solução surgiram duas soluções diferentes, apresentadas por André e Zeca. Após ambos terem confrontado as suas soluções, foi André que apesar de apresentar uma solução errada convenceu os seus colegas, uma vez que foi a sua resposta que todos os alunos registaram. Na fig. 3, apresenta-se a resposta defendida por André.



| Nome do polígono | Número de lados | Número de triângulos em que ficou decomposto | Soma das amplitudes dos ângulos internos |
|---|---|---|---|
| Quadrilátero | 4 | 2 | 360° |
| Pentágono | 5 | 3 | 540° |
| Hexágono | 6 | 4 | 720° |
| Heptágono | 7 | 5 | 900 |
| Polígono de $n$ lados | | | n × 180° |

Fig. 3. Resposta de André à fase exploratória dos polígonos.

Zeca trabalhou em *interação* oculta pois trabalhou aparentemente sozinho, não se sabendo até que ponto aquilo que os seus colegas diziam ou faziam o influenciou no seu processo de resolução. Os outros elementos do grupo interagiram mais uns com os outros do que Zeca. André foi quem mais interagiu. Lúcio e Celso tiveram vários momentos em que *observaram e registaram* o que viam na resolução de André (*colaboração semi-direta*). No entanto, apesar de Lúcio *observar e registar* aquilo que via na resolução de André, ele mostrou que dava sentido ao que o colega escrevia. No episódio 2A (fig. 4), enquanto André expunha uma sequência de números que correspondia às somas das medidas das amplitudes dos ângulos internos de polígonos com 4, 5 e 6 lados respetivamente, e Lúcio *observava* a tarefa de André *e registava* na sua tarefa aquilo que via na resolução de André, quando este parou de verbalizar a sequência por não ter a certeza do resultado da última soma, Lúcio ajudou-o verbalizando “900”, evidenciando que estava a dar sentido ao raciocínio seguido por André para calcular as referidas somas.

| Interações | | Categoria |
|---|---|---|
| André: | 360, 540, agora 720, e agora mil duzentos e tal…não por acaso tenho a certeza. | Expor |
| Lúcio: | 900. | Resposta |
| André: | Sim 900. | Confirmar resposta |

Fig. 4. Episódio 2A.

Apesar desta capacidade de interação demonstrada, Lúcio e Celso tiveram momentos em que evidenciaram ter trabalhado individualmente. No episódio 3A (fig. 5), no momento em que Lúcio tinha de preencher o espaço da tabela correspondente ao número de lados de um polígono com *n* lados, colocou uma questão. Nesse momento, André partilhou a sua resposta (“É *n*”), tendo de seguida Celso partilhado a sua (“Eu pus *n* vezes lado.”), e em sequência, André repetiu-a novamente parecendo estar a questionar-se a si próprio se a mesma fazia sentido (“*n* vezes lado?”).

| Interações | | Categoria |
|---|---|---|
| Lúcio | E isto? | Questão específica |
| André | É *n*. | Resposta |
| Celso: | Eu pus *n* vezes lado. | Expor |
| André | *n* vezes lado? | Questão específica |

Fig. 5. Episódio 3A.

Neste episódio, Celso apresentou uma resposta diferente da de André, demonstrando que foi elaborada por si. No entanto, apesar de estar errada e depois de André a ter verbalizado, parecendo colocar a questão a si mesmo e de ninguém ter respondido, todos prosseguiram com a resolução das suas tarefas, não havendo negociação de significados.

Os episódios 2A e 3A revelam que, apesar dos alunos terem momentos em que aparentemente trabalharam sozinhos (3A), a forma de como Lúcio reagiu ao que André verbalizava (2A), mostra que estava atento ao que ele estava a fazer e a dizer. Precisamente por Lúcio e Celso evidenciarem estar atentos ao que André dizia enquanto resolviam aparentemente sozinhos a tarefa, podemos considerar que ao *nível do processo*, o padrão verificado no grupo foi de *colaboração indireta.*

*Interações dos alunos ao nível da solução.*

No momento de obtenção da solução, Lúcio e Celso tiveram um papel mais passivo do que André e Zeca, pois estes evidenciaram que receberam ajuda, mais especificamente, que escreveram a solução que foi ditada por André. No entanto, Zeca apresentou uma solução diferente da apresentada por André. Zeca explicou primeiro o seu raciocínio a Celso, como se pode ver no episódio 4A (fig. 6), e Celso *confirmou a resposta*. Posteriormente, Zeca pediu para *verificar a resposta* de André. Após ter verificado que André havia escrito *n triângulos vezes 180*, e sendo esta solução diferente da sua, Zeca explicou-lhe a sua solução.

| | Interações | Categoria |
|---|---|---|
| Zeca: | O n refere-se aos (s) [número de] lados do polígono. Se 3 lados é um triângulo, 4 lados tens dois triângulos, 5 lados tens 3 triângulos, 5 lados tens 3 triângulos. Tens sempre mais dois lados [do] que [o número de] triângulos. | Explicar |
| Celso: | Acho que sim | Confirmar resposta |
| Zeca: | André deixa ver a tua<br>(Pausa)<br>André eu acho que é (n-2) vezes 180. (Pausa) Repara que dentro de um polígono há sempre mais dois lados que um triângulo. Precisas de três lados para ter um triângulo e precisas de 4 lados para ter dois triângulos (…) | Verificar resposta<br>Explicar |
| André: | Mas é o que nós fizemos. *n* triângulos porque são os triângulos de dentro, vezes 180. | Explicar |

Fig. 6. Episódio 4A.

Zeca verbalizou o seu pensamento dirigindo-se especificamente a Celso *explicando-o*. Após a explicação verbal por palavras suas, que a variável *n* representava o número de lados de um polígono, Zeca explicou ter verificado que o número de triângulos em que cada polígono foi decomposto era sempre de menos dois do que o número de lados do polígono. Depois de Celso ter concordado, Zeca *explicou* a sua solução a André. No entanto, desta vez não explicou claramente o que representava a variável *n*, dando origem a uma resposta de André que revela concordância com o raciocínio de Zeca, mas não se tendo apercebido da diferença da representatividade do *n*. Quando Zeca expôs a sua solução passaram a existir duas soluções diferentes, e com diferentes interpretações do que a incógnita *n* representa, não tendo este facto sido esclarecido entre os alunos. Na solução apresentada por Zeca, a incógnita *n* representa o número de lados de um polígono, e na solução apresentada por André, *n* representa o número mínimo de triângulos em que um polígono convexo pode ser decomposto. Após Zeca ter *explicado* a sua solução, André explicou por palavras suas que a solução pode ser obtida multiplicando o número *n* de triângulos em que o polígono é decomposto por 180, e os seus colegas de grupo não o confrontaram. A solução apresentada por Zeca era a que correspondia ao que era esperado que os alunos obtivessem. Contudo, os alunos deste grupo aceitaram a resposta de André sem a questionar. Celso, que tinha concordado com a explicação de Zeca, também não se manifestou após a explicação de André. Note-se que André e Zeca foram os únicos alunos com interações da categoria *explicar*.

*Perceções dos alunos acerca do episódio 4A.*

Com o intuito de compreender melhor os comportamentos dos alunos do grupo, durante a entrevista, foram-lhes mostradas as resoluções das tarefas e o extrato da gravação audiovisual correspondente ao episódio 4A. Foram questionados ainda acerca do raciocínio seguido relativo à solução apresentada pelo grupo (n triângulos vezes 180) e acerca do motivo dessa escolha. Um extracto do diálogo entre a professora estagiária e os alunos deste grupo acerca do modo como estes pensaram encontra-se no episódio 5E (fig. 7).

| | |
|---|---|
| Professora: | Aqui como é que pensaram? Escreveram *n* triângulos vezes 180º. |
| André: | Lembro-me que [eu] estava certo mas que tinha errado na fórmula. Eu agora já sei como é que é (…) |
| Professora: | Mas tu não lhe deste a razão. |
| André: | Sou capaz de não ter dado porque eu em parte também estava certo e ele também estava. Mas a [resposta] dele estava mais correta porque dava para qualquer um mas na minha tinha sempre de ir ver o [número de triângulos em que ficou decomposto o polígono] que estava atrás. |

Fig. 7. Episódio 5E.

André respondeu prontamente, admitindo lembrar-se que Zeca estava certo mas ele também estava, contudo tinha apresentado uma fórmula errada. Ao afirmar “Eu agora já sei (…)”, André evidencia que depois do momento de realização da tarefa pensou na solução, e percebeu que a solução apresentada por Zeca era a que correspondia ao pedido. No entanto, no momento em que foi confrontado, defendeu a sua solução pois referiu que “Em parte eu também estava certo”.

Na tentativa de perceber o motivo pelo qual nenhum elemento do grupo questionou André, a professora estagiária questionou-os. Nesse momento, Zeca mostrou-se muito ansioso por revelar o motivo. A revelação desse motivo encontra-se no episódio 6E (fig. 8).

| | |
|---|---|
| Professora: | Todos escreveram a resposta do André porquê? Porque é que todos escreveram a resposta do André apesar da resposta do Zeca ser a correta? |
| Zeca: | Porque o André tem um historial a matemática muito superior ao resto dos alunos do grupo e como é o André está sempre certo. |
| André: | Não, não é sempre às vezes também te digo... |
| Zeca: | Um bocado sim… é mais ou menos a nossa mentalidade. |

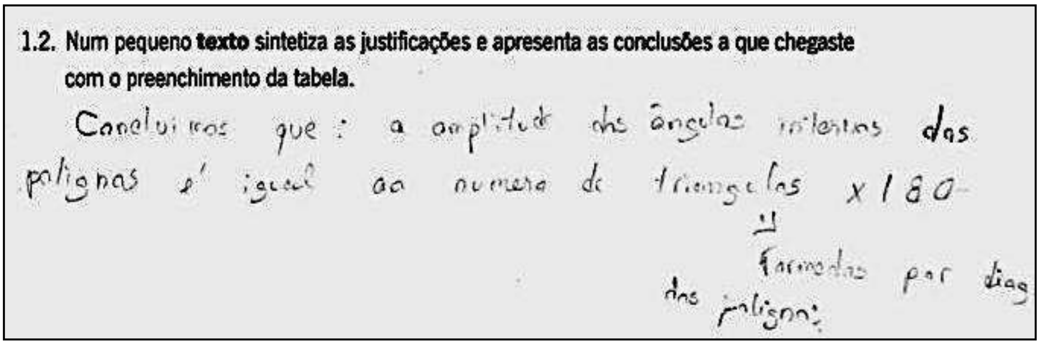
Fig. 8. Episódio 6E.

Na perspetiva de Zeca, André, devido ao seu historial a matemática, é reconhecido pelo seu grupo como o melhor, e utilizando as suas palavras, "Como é o André está sempre certo". Contudo, André evidenciou não ter a perceção de que os colegas o veem assim.

Nos episódios 5E e 6E, torna-se claro que André representa uma autoridade matemática no grupo. Uma autoridade que lhe é reconhecida pelos seus colegas de grupo e que pode ser explicada por ser considerado o melhor aluno da turma, além de ter tido sempre um bom desempenho em Matemática. Tal como refere Cobb (1995), episódios que envolvem interações *univocais* podem ilustrar situações em que um aluno foi constituído a autoridade matemática do grupo. Segundo Cobb (1995), o aluno que constitui uma autoridade matemática no grupo é levado a julgar que o seu colega ou não está a compreender, ou está a cometer um erro. No entanto, nesta situação parece que André não assumiu que o colega cometeu um erro, e uma vez que referiu "Mas foi o que nós fizemos" manteve a sua solução, uma vez que a achou igualmente válida. É importante referir que a existência de autoridade matemática se revela pelas interações estabelecidas. Independentemente do que o próprio aluno acredita, ele só é uma autoridade matemática do grupo se os seus colegas aceitarem as suas soluções como válidas (Cobb, 1995), é o que acontece neste grupo em relação a André.

*Fase da justificação escrita*

A discussão que se segue é sobre a segunda fase da tarefa. Na fig. 9 apresenta-se a resolução de André enquanto uma das respostas elaboradas no grupo.



**1.2. Num pequeno texto sintetiza as justificações e apresenta as conclusões a que chegaste com o preenchimento da tabela.**

Concluimos que: a amplitude dos ângulos internos dos poligonos e' igual ao numero de triangulos x 180
formados por diag dos poligonos

Fig. 9. Resposta de André à fase da justificação escrita.

Nesta tarefa, os alunos tinham de elaborar uma justificação escrita. Após terem lido o enunciado, André começou desde logo a ditar a referida justificação, não dando espaço para uma elaboração conjunta da resposta. Lúcio e Celso ouviram a resposta e escreveram no seu papel à medida que esta era ditada. Zeca também mostrou que foi ouvindo, mas nem sempre acompanhou a resposta que André ditou pois *pediu* duas vezes *instruções*. A resposta que André ditou aos seus colegas e o modo como Zeca pediu instruções encontram-se evidenciadas no episódio 7A (fig. 10).

Nesta fase, Zeca começa por assumiu um papel passivo, recebendo a resposta ditada por André. No entanto, depois de *pedir instruções* e repetindo em voz alta aquilo que conseguiu escrever do que ouviu da resposta de André, eventualmente à espera que André completasse, Zeca acabou por completar a sua resposta de forma independente.

| | Interações | Categoria |
|---|---|---|
| André: | As conclusões a que chegamos com o preenchimento da tabela é que a amplitude[s] dos ângulos internos é igual ao número de triângulos vezes 180º. | Resposta |
| Zeca: | Concluímos que amplitudes dos ângulos internos. (Pausa) | Pedir instruções |
| | Já sei, n vezes 180 é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos | Resposta |

Fig. 10. Episódio 7A.

Pode-se afirmar que Zeca, após ter ouvido a resposta ou parte da resposta de André, foi capaz de a reformular por palavras suas. Repare-se que a resposta que elaborou vai no sentido da de André, o que evidencia que a explicação de André o convenceu. No entanto, apesar de Zeca ter reformulado a resposta de André, foram as ideias de André que dominaram no momento de obtenção da solução. Nesse sentido, ao nível do *resultado* diz-se que este é *univocal.*

*Perceções dos alunos acerca da tarefa*

Os alunos deste grupo, quando questionados sobre a sua preferência, pela fase exploratória dos polígonos ou da justificação escrita foram unânimes na sua preferência pela fase exploratória. Destaca-se a justificação de Zeca, na fig. 11.

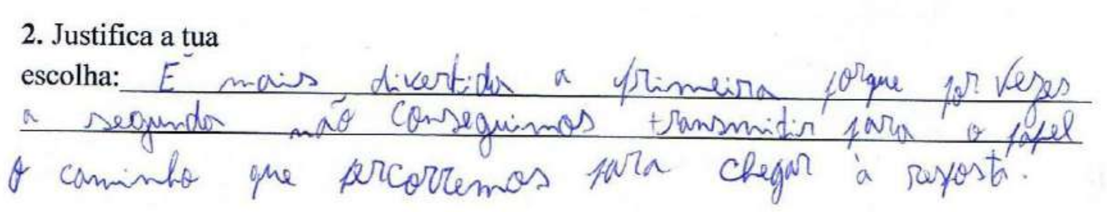

**2. Justifica a tua escolha:** É mais divertida a primeira porque por vezes a segunda não conseguimos transmitir para o papel o caminho que percorremos para chegar à resposta.

Fig. 11. Justificação da preferência de Zeca

Zeca, com a sua justificação, evidencia a sua preferência pela exploração dos polígonos, salientando que na mesma está explícito o processo de resolução, e que na justificação escrita não consegue transmitir para o papel esse mesmo processo.

## Reflexão final

Desde o início do ano letivo, momento em que foi dada aos alunos a oportunidade de se juntarem em grupos, segundo as suas preferências, André evidenciou ser o líder do grupo. André liderou as escolhas e os seus colegas deixaram que ele selecionasse os elementos do grupo. Este aluno admitiu em entrevista, que os escolheu por serem as pessoas com quem gosta de trabalhar. Esta liderança, foi visível aquando da resolução da tarefa: (i) evidenciou-se o padrão de *colaboração semi-direta*, sendo André que *mostrava como se faz* aos seus colegas; (ii) evidenciou-se ao nível da solução com o padrão *univocal*, sendo as suas ideias que dominaram.

Quando na *fase exploratória dos polígonos*, Zeca apresentou a solução correta e diferente da apresentada por André, que estava incorreta, André considerou que a sua solução também estava correta, mantendo o seu ponto de vista. Nessa situação, como André constitui uma autoridade matemática no grupo, os seus colegas não contra-argumentaram e escreveram a solução ditada por André. Tal como refere Cobb (1995) quando um aluno é constituído autoridade matemática do grupo, são as ideias deste as que dominam no momento de obtenção da solução, tal como aconteceu neste grupo na realização das duas fases da tarefa. Contudo, ao nível do processo de resolução, foi na *fase exploratória* que se evidenciaram outros padrões de interação entre os alunos e que está em sintonia com as perceções dos alunos, pois foi esta a fase que os alunos consideraram "mais divertida". De facto, esta fase da tarefa proporcionou um maior envolvimento dos alunos dos grupos, e favoreceu a emergência do padrão de *colaboração indireta* uma vez que os alunos resolviam a tarefa, aparentemente sozinhos, enquanto verbalizavam os seus pensamentos e/ou prestavam atenção ao que os seus colegas diziam.

Os dados recolhidos através da entrevista evidenciam que para estes alunos, é importante que o grupo integre pessoas com as quais se goste de trabalhar, e que essa composição pode afetar os padrões de interação no grupo. De facto, o líder admitiu que escolheu os colegas com quem gostava de trabalhar, e tal como os alunos referiram em entrevista, a introdução de um novo elemento do grupo com quem estes demonstraram não gostar de trabalhar, afetou os padrões de interação provocando a sua divisão, em dois subgrupos de trabalho. No entanto, este elemento não se encontra presente neste artigo, fazendo parte de um estudo mais amplo.

Apesar da entrevista se ter realizado no final do ano letivo e a intervenção já se ter realizado durante o mês de janeiro, ter-se mostrado aos alunos o extrato da gravação audiovisual assim como uma cópia das suas resoluções da tarefa pareceu ser suficiente para que eles revivessem esses momentos. Este procedimento permitiu assim recolher respostas coerentes. Contudo, se a entrevista tivesse sido realizada antes do final do ano letivo, esta poderia ter propiciado uma reflexão sobre o comportamento deles em grupo e possivelmente uma alteração de comportamento, no sentido de valorizar o contributo individual de cada um para a resolução da tarefa. Cada grupo tem características muito particulares e foi possível conhecer e relatar em pormenor o comportamento de cada um deles perante uma tarefa. Este estudo demonstra que conhecer os alunos e a forma como interagem em grupo é uma questão importante na sala de aula, pois com esse conhecimento, o professor percebe como deve atuar em cada caso para poder maximizar as oportunidades de aprendizagem dos alunos.

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade–COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT no âmbito do projeto FCOMP-01-0124-FEDER-041405 (FCT, EXPL/MHC-CED/0645/2013).

## Referências

APM (2001). Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Geometria dos 2.º e 3.º ciclos. Lisboa: APM.

APM (2009). A natureza e organização das atividades de aprendizagem e o novo papel do professor. In APM, *Renovaçao do Currículo de Matemática. Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988* (pp. 37-56). Lisboa: APM.

Artzt, A., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. *Cognition and instruction*, *9*(2), 137-175.

Cobb, P. (1995). Mathematics Learning and Small Group Interaction: Four case Studies. In P. Cobb & H. Baursfeld, *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classrooms Cultures*, pp. 25-129. N.J.: Erlbaum.

Johnson, D., & Johnson, R. (1994). *Learning together and alone: cooperative, competitive, and individualistic learning* . Boston.

Martinho, M. H. (2011). *A comunicação na sala de aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do Ensino Básico*. Braga: CIEd, UMinho.

Smith, M., & Stein, M. K. (2012). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* USA: NCTM.

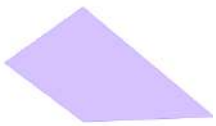
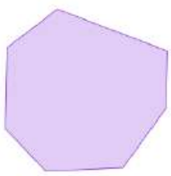
Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. In NCTM, *Mathematics Teaching in middle school*, vol. 3, pp. 268-275. USA: NCTM.

Webb, N. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 366-389.

**Anexo – Enunciado da Tarefa**

Qualquer polígono convexo com mais de três lados pode ser decomposto em triângulos.

1. Considera os polígonos convexos da folha anexa. Decompõe cada polígono em triângulos, traçando todas as suas diagonais a partir de um dos seus vértices. De seguida, preenche os restantes espaços da tabela.

| Nome do polígono | Número de lados | Número de triângulos em que ficou decomposto | Soma das amplitudes dos ângulos internos |
|---|---|---|---|
| Quadrilátero  | | | |
| Pentágono  | | | |
| Hexágono  | | | |
| Heptágono  | | | |
| Polígono de n lados | | | |

2. Num pequeno texto sintetiza as justificações e apresenta as conclusões a que chegaste com o preenchimento da tabela.

# As tarefas de geometria nas provas de avaliação externa de matemática do 2.º ciclo

Paula Vieira da Silva[1], Leonor Santos[2]
[1]Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), paulasilva@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mlsantos@ie.ul.pt

**Resumo**. *O ensino e aprendizagem da Matemática no 2º ciclo são, desde 2003, avaliados externamente por provas de aferição até 2011 e por provas finais desde então. Este estudo apresenta dados parcelares de uma investigação em curso, e tem como objetivo a análise das características das tarefas de geometria que constam da prova de aferição (2011) e da prova final do 2.º ciclo (2012). Mais concretamente, analisam-se os tópicos de geometria que convocam, os processos mentais a que fazem apelo, o peso relativo das questões de geometria nestas provas e a evolução que se verifica de uma para a outra. O estudo segue uma metodologia de natureza interpretativa, com recolha documental das próprias provas. Os resultados obtidos evidenciam algumas diferenças entre as duas provas. O número de tarefas de reprodução e de conexão é idêntico na prova de 2011, mas na prova de 2012 o número de tarefas de reprodução é muito maior do que as de conexão, o que corresponde a níveis de exigência cognitiva muito diversa.*

**Abstract**. *The teaching and learning of Mathematics in the 2nd cycle of basic education are, since 2003, externally assessed by admeasurement tests by 2011 and finals tests since then. This study presents partial data of an ongoing investigation, and aims to analyze the characteristics of the geometry tasks contained in the admeasurement tests (2011) and finals (2012) of the 2nd cycle. More specifically, we analyze the geometry of content that summon the mental processes that appeal, the relative weight of geometry issues in these tests and the evolution that has taken place in them. The study follows a methodology to interpretation, with data collection from their own tests. In general, the results of the task analysis show some discrepancies between the two tests. The number of tasks reproduction and connection is identical in the test of 2011, but in the test of 2012, the number of tasks of reproduction is much larger than the connection, which correspond to different levels of cognitive demands.*

**Palavras-chave**: *Avaliação externa; tarefas de geometria; processos mentais; tipo de itens.*

## Introdução

O papel das tarefas, no processo de ensino-aprendizagem da matemática é preponderante na aprendizagem dos alunos. A ênfase dada a determinados conteúdos, a certos processos mentais e ao próprio modo de construção dessas tarefas pode influenciar e, até mesmo, condicionar as metodologias de ensino utilizadas pelos professores e, consequentemente, as aprendizagens dos alunos. Durante uma década, a conceção das provas de aferição, o seu grau de exigência e a forma como o conhecimento matemático foi avaliado foram aspetos que suscitaram polémica, com visibilidade, nomeadamente, na comunicação social. No cerne dessa polémica incluía-se, entre outros aspetos, a escolha do tipo de tarefas. Não podemos deixar de referir que estas provas são atualmente muito valorizadas pela administração do sistema educativo, e assumidas (ou percecionadas) como instrumentos indispensáveis para o conhecimento do desempenho académico dos alunos, por parte dos professores, das escolas e da sociedade em geral (Ceia, Filipe & Santos, 2011). Acresce a inquestionável influência da avaliação externa nas práticas dos professores. O tipo de tarefas proposto nas provas nacionais, no que concerne nomeadamente aos conceitos que são valorizados, pode influenciar o trabalho dos professores (e os próprios autores de livros didáticos), os quais, por sua vez, influenciam as aprendizagens dos alunos (Boesen, Lithner & Palm, 2010).

Deste modo, este estudo tem como objetivo compreender as características das tarefas de geometria que constam das provas de aferição (2011) e das provas finais do 2.º ciclo (2012). As questões de investigação formuladas foram as seguintes: Que tópicos de geometria convocam as provas de aferição (2011) e nas provas finais do 2.º ciclo (2012)? A que processos mentais fazem apelo? Qual o peso relativo das questões de geometria nestas provas? Que evolução se faz sentir? Foram selecionadas as provas de aferição de 2011 e da prova final de 2012 por terem sido as de transição entre uma avaliação externa, sem repercussões na avaliação final dos alunos, e a primeira a ter repercussões na avaliação final dos alunos, tendo tido em 2012 uma ponderação de 25%. O foco do estudo recaiu nas tarefas de Geometria por este ser o tópico matemático que tradicionalmente é menos trabalhado pelos professores.

## Fundamentação teórica

*O ensino da geometria no ensino básico*

Nas últimas décadas, há uma consciência crescente de que a geometria desempenha um papel fundamental na matemática e na aprendizagem da matemática, A pesquisa em geometria floresceu com novas ideias matemáticas que surgiram do interior de outras disciplinas (Mammana & Villani, 1998a). Na mesma linha, em 1989, o NCTM (1991), publicou as diretrizes para o ensino da Matemática para os níveis não universitários dos EUA, as quais tiveram uma enorme repercussão internacional. Mais recentemente, esta organização retomou esse documento, ajustando-o em alguns aspetos considerados menos atuais. No que diz respeito à geometria, o NCTM (2007) refere que, os alunos, ao longo da escolaridade, deverão desenvolver competências para: (i) "Analisar as caraterísticas e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas"; (ii) "Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação"; (iii) "Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas"; (iv) "Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas" (idem, pp. 45-47). Estando de acordo com os princípios do NCTM (2007), o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, prevê o ensino e a aprendizagem da geometria ao longo dos três ciclos e "tem como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos" (ME, 2007[1], p. 7). O estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais "começa no 1.º ciclo. No 2.º ciclo os alunos são já chamados a relacionar propriedades geométricas, e no 3.º ciclo surgem situações de raciocínio hipotético-dedutivo proporcionando aos alunos um primeiro contacto com este modo de pensamento. Uma alteração de relevo em relação ao programa anterior é que se estuda logo desde o 1.º ciclo diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização" (ibidem).

De uma forma geral, Jones (2012) considera que "o ensino da geometria ao longo da escolaridade precisa garantir um foco sustentado sobre os aspetos geminados de geometria: os aspetos espaciais, e os aspetos que se relacionam com o raciocínio e com a teoria geométrica. (…) Cada um destes aspetos dá origem ao outro e cada um só existe em relação ao outro" (p. 9).

[1] Este programa manteve-se em vigor no 6.º ano até 2013/2014.

*O pensamento geométrico*

Numa conceção mais atual, a geometria é considerada como “uma rede complexa e interligada de conceitos, formas de raciocínio, e sistemas de representação que é usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários” (Battista, 2007, p. 843). Uma componente do pensamento geométrico e do pensamento matemático em geral, considerada nas últimas décadas cada vez mais relevante, é a *visualização*. A visualização é geralmente considerada como "a capacidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre a informação visual" (Hershkowitz, 1989, p.75). Arcavi (2003) acrescenta dizendo que a “visualização é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de representar e comunicar informações, pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e compreensões avançadas” (p. 217). Assim, considera-se que a visualização desempenha um papel, por um lado, muito complexo no contexto de formação dos conceitos geométricos básicos e, por outro, muito poderoso no ensino e aprendizagem da geometria.

A informação visual produzida (imagens) pode ser tanto física (figuras ou diagramas) como mental (imagens mentais). A análise de informação visual refere-se tanto às imagens produzidas pelo próprio aluno como às recebidas desde o exterior (de alunos, professor, textos, etc.). As transformações podem fazer-se entre uma imagem e informação verbal (oral ou escrita) ou de uma imagem em outra. A comunicação pode ser gráfica, verbal ou mista (Gutiérrez, 2006).

O complexo papel da visualização pode também manifestar-se em níveis mais elevados do pensamento geométrico. De acordo com Hershkowitz (1993), a rigidez de perceção pode atuar como distrator, “afetando mesmo a capacidade de provar teoremas”. Segundo esta autora, esta dificuldade deve-se também ao facto de algumas competências geométricas, como a capacidade de visualização, terem "uma natureza altamente individual e pessoal" (Hershkowitz, 1993, p. 94), apesar de haver distratores visuais que agem amplamente da mesma forma em indivíduos e populações diferentes.

A visualização funciona como âncora para o pensamento matemático, uma vez que possibilita o estabelecimento de relações entre diferentes representações e a construção de imagens mentais. Por conseguinte, a visualização, desempenha um papel vital não só na aprendizagem da geometria, mas também, mais amplamente, na aprendizagem da matemática.

Ainda, relativamente aos processos de visualização, Gutiérrez (2006) salienta dois deles: a *interpretação da informação figurativa* - processo que ocorre ao tentar ler, analisar, compreender e interpretar uma imagem para extrair informação sobre ela, e o *processamento visual da informação* - processo que ocorre ao converter informação não visual em imagens ou ao transformar uma imagem já formada em outra.

Del Grande (1990), fundamentando-se em vários autores, selecionou sete capacidades espaciais tendo estas absoluta relevância para o estudo da matemática e da geometria em particular. Estas capacidades são: a) *Coordenação visual-motora*; b) *Perceção figura-contexto*; c) *Conservação da perceção*; d) *Perceção da posição no espaço*; e) *Perceção de relações espaciais;* f) *discriminação visual*; g) *Memória visual*.

É de fazer notar que a aprendizagem da geometria tem sido difícil para os alunos devido à ênfase dada aos aspetos dedutivos dos diferentes conteúdos e à negligência das capacidades espaciais subjacentes, adquiridas através de atividades práticas, que são pré-requisitos necessários para a compreensão e domínio de conceitos geométricos (Del Grande, 1990). As capacidades de perceção visual e os conceitos geométricos podem ser apreendidos em simultâneo, uma vez que a geometria exige que os alunos reconheçam as figuras geométricas, as suas relações e as suas propriedades.

*As tarefas matemáticas e suas características*

As tarefas matemáticas podem ser analisadas tendo em conta os conceitos matemáticos nelas tratados, o seu nível de complexidade cognitiva, a liberdade que é permitida aos alunos nas respostas, a metodologia usada para a sua classificação, entre outros aspetos.

O antigo GAVE, atualmente IAVE, na esteira de Tenbrink (1988, p. 314), a partir de 2011 uniformizou a terminologia adotada na classificação dos itens[2] das provas de

[2] O termo “item” era utilizado pelo GAVE, atualmente IAVE, referindo-se às tarefas matemáticas apresentadas nas provas nacionais.

avaliação externa discriminando dois tipos de itens de acordo com a liberdade que é dada aos alunos nas suas respostas: *itens de seleção* e *itens de construção*. Os itens de seleção são aqueles em que é permitido ao aluno selecionar de entre várias alternativas, a resposta correta. Por seu lado, nos itens de construção devem ser os alunos a elaborar a resposta correta. Nos itens de seleção estão incluídos os *itens de escolha múltipla*, de *associação/correspondência* e *ordenação* e nos de construção estão incluídos os itens de *resposta curta*, *resposta restrita* e *resposta extensa*. Nos itens de resposta curta faz-se uma pergunta simples e pede-se ao aluno que dê uma resposta curta. Os itens de resposta restrita permitem ao aluno mostrar toda a informação que pode recordar através da memória de factos, da enumeração de acontecimentos ou da lembrança de passos a seguir num procedimento concreto. Os itens de resposta extensa permitem ao aluno uma grande amplitude na sua resposta, apelando à capacidade criativa, à capacidade para organizar e apresentar ideias originais ou à defesa de uma posição. O mesmo autor considera, ainda, nos itens de seleção os de verdadeiro/falso, e nos itens de construção inclui os de completamento.

O nível de complexidade de uma tarefa depende da exigência cognitiva que é solicitada aos alunos. No sentido da sua categorização, a OCDE (2005), considera três tipos de itens: de *reprodução* que "demandam essencialmente a reprodução de conhecimentos praticados, como o conhecimento de factos e de representações comuns de problemas, reconhecimento de equivalentes, memorização de propriedades e objetos matemáticos conhecidos, desempenho de procedimentos rotineiros, aplicação de habilidades técnicas e algoritmos padronizados, manipulação de expressões contendo símbolos e fórmulas em um formato padrão conhecido e a realização de cálculos diretos" (p. 40); de *conexão* que se baseiem "em reprodução para a resolução de problemas que não são simplesmente rotineiros, mas que ainda envolvem contextos de certa forma conhecidos, ou que se estendem e se desenvolvem além de contextos conhecidos em grau relativamente menor. Tipicamente, o desenvolvimento de uma solução necessita de maior interpretação e a elaboração de ligações entre diferentes representações da situação, ou de ligações entre diferentes aspetos da situação do problema" (p. 40-41). Por último, itens de *reflexão* que "demandam um certo *insight* e reflexão por parte do estudante, assim como criatividade para identificar conceitos matemáticos relevantes ou para fazer a ligação com conhecimentos relevantes para criar soluções. Os problemas que implicam este agrupamento de competências envolvem mais elementos do que outros, e tipicamente surgem demandas adicionais para que os estudantes generalizem e expliquem ou justifiquem seus resultados" (p. 41). Na mesma linha, Stein e Smith (2009) consideram que as tarefas podem apresentar exigências de *nível cognitivo reduzido* e *nível cognitivo elevado*. No primeiro caso, as tarefas podem ser de *memorização* quando os alunos respondem baseando-se na memorização de algum conceito ou de procedimentos sem conexões quando se pede aos alunos a execução de um procedimento memorizado. No segundo caso, as tarefas são denominadas de *procedimentos com conexões*, quando os alunos, usando procedimentos, realizam conexões com os significados matemáticos ou fazendo matemática, quando os alunos exploram, por exemplo, relações entre várias representações.

## Metodologia

Tendo em conta as questões do estudo, optou-se por uma investigação de natureza *interpretativa* (Bogdan & Biklen, 1994).

A recolha de dados foi feita baseando-se fundamentalmente: (i) na recolha documental (tarefas da prova de aferição do 6.º ano, relativas a 2011 e da prova final do 2.º ciclo de 2012); e (ii) nos relatórios finais do GAVE, relativos a 2011 e 2012. A análise dos dados envolveu, inicialmente, a organização das informações obtidas. Foram tidos em consideração os seguintes domínios: os tópicos matemáticos a que as tarefas apelam, os possíveis processos mentais que requerem para a sua resolução, as tipologias dos itens no que diz respeito ao nível de complexidade cognitiva (OCDE, 2005) e ao grau de liberdade que é dada aos alunos nas respostas (Tenbrink, 1988).

Para validação da análise desenvolvida respeitante aos níveis de complexidade cognitiva recorremos a um perito externo, a Profª. Doutora Alexandra Gomes, da Universidade do Minho.

## Apresentação e análise dos dados

*Itens da prova de 2011 e de 2012 e os tópicos de geometria do PMEB (2007)*

Na prova de aferição de 2011 apresentam-se onze itens da área da geometria que correspondem a 38% dos itens e na prova final de 2012 apresentam-se nove que correspondem a 37,5% dos itens. Na prova de 2011 não há nenhum item que se reporte ao tópico dos *Volumes*[3] e há um que se reporta a dois tópicos.

Da análise de cada item constatam-se diferenças na incidência entre os diferentes tópicos e os objetivos específicos. No quadro seguinte apresenta-se o número de itens de cada prova em cada tópico de geometria do 2.º ciclo (ME, 2007).

Tabela 1. Correspondência entre o número de itens das provas de 2011 e 2012 e os tópicos de geometria

<table>
<tr><th>TÓPICOS DE GEOMETRIA</th><th colspan="2">Nº DE ITENS NA PROVA DE AFERIÇÃO 2011</th><th>Nº DE ITENS NA PROVA FINAL 2012</th></tr>
<tr><td>Sólidos geométricos</td><td colspan="2">6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Figuras no plano</td><td colspan="2">2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Reflexão, rotação e translação</td><td colspan="2">1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Perímetros</td><td>1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Áreas</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Volumes</td><td colspan="2">0</td><td>2</td></tr>
</table>

Na prova de 2011, o item 11 incide sobre dois tópicos diferentes, *Perímetros* e *Áreas*. Verifica-se que este é um dos itens que obteve pior resultado a nível nacional – 28, 2 % (GAVE, 2011a). Ainda nesta prova, verifica-se que seis dos itens que incidem sobre o tópico *Sólidos Geométricos* incidem sobre mais do que um dos objetivos específicos deste tópico. Este é, por exemplo, o caso do item 18 da prova de aferição de 2011:

*18. As pirâmides têm características geométricas que as distinguem dos prismas; por exemplo:*
*O número de arestas das pirâmides é sempre um múltiplo de 2, enquanto o número de arestas dos prismas é sempre um múltiplo de 3.*
*Escreve outra característica geométrica das pirâmides que as distinga dos prismas.*

Para responder a este item os alunos necessitam de ter atingido, pelo menos os dois primeiros, dos seguintes objetivos específicos: Descrever sólidos geométricos e identificar os seus elementos; Compreender as propriedades dos sólidos geométricos e classificá-los; Relacionar o número de faces, de arestas e de vértices de uma pirâmide e de um prisma, com o polígono da base. (identificando as características geométricas que

[3] Este tópico não consta da prova de aferição pelo facto das provas serem realizadas no mês de maio e o tópico dos volumes, como era o último que constava no programa, poder não ter sido ainda lecionado.

distinguem as pirâmides dos prismas) (ME, 2007). Os alunos podiam responder utilizando uma das seguintes características: a) as pirâmides têm uma base e os prismas duas bases, que são opostas, paralelas e congruentes; b) as faces laterais nas pirâmides são triângulos com um vértice comum e nos prismas são paralelogramos; c) o número de vértices nas pirâmides é igual ao número de lados do polígono da base mais um e nos prismas é o dobro do número de lados do polígono da base; e d) nas pirâmides o número de faces é igual número de lados do polígono da base mais um e nos prismas é igual ao número de lados do polígono da base mais dois. A primeira e a segunda característica exigem que os alunos conheçam e saibam relacionar o número de bases e a forma das faces laterais dos prismas e das pirâmides. Enquanto a terceira e a quarta características vão mais além, exigem que os alunos saibam relacionar o número de faces e de vértices de uma pirâmide e de um prisma, com o polígono da base.

Na prova de 2012 não existe nenhum item que incida sobre mais do que um tópico e sobre mais do que um dos objetivos específicos de qualquer tópico.

*Itens de geometria das provas finais de 2011 e 2012 e os processos mentais a que apelam*

Os processos mentais a que as tarefas estudadas fazem apelo são muito variados e um dos fatores de que dependem é do contexto da própria tarefa, uma vez que a significação dos conceitos depende dos contextos. Algumas tarefas mobilizam o desempenho de procedimentos rotineiros, como seja a realização de cálculos diretos, a utilização de algoritmos padronizados, a aplicação de habilidades técnicas, a memorização de propriedades de objetos matemáticos conhecidos, a manipulação de expressões contendo símbolos e fórmulas em um formato padrão conhecido, a reprodução do conhecimento de factos e de representações comuns. Por exemplo, o item 1 da prova de aferição de 2012, o qual se encontra referido mais à frente, faz apelo ao uso das fórmulas do volume do cubo e do paralelepípedo e à comparação entre dois valores, ou seja, a processos rotineiros neste nível de ensino.

Outras, um pouco mais complexas, invocam contextos menos conhecidos pelos alunos, requerem uma maior interpretação e elaboração de ligações entre diferentes representações da situação, ou de ligações entre diferentes aspetos da situação da tarefa. Um exemplo desta situação é o que acontece muitas vezes quando os alunos têm de interpretar a informação figurativa e efetuar o processamento visual da informação, isto é, relacionar os dados do enunciado com os elementos da figura. Ao analisar uma figura os alunos têm que percecionar as relações espaciais existentes e descriminar visualmente todos os aspetos necessários à resolução da tarefa, tal como acontece no item 6 da prova final de 2012 (GAVE, 2012a), em que é pedido aos alunos que classifiquem um polígono representado por uma subfigura da figura dada:

*6. No quadrado representado na Figura 6, estão desenhadas duas linhas a tracejado.*

*Imagina que recortas o quadrado pelas linhas a tracejado e que eliminas as partes sombreadas.*
*Qual o nome do polígono que obterias?*

Neste item os alunos têm que visualizar a subfigura que resulta do corte dos dois triângulos já selecionados no quadrado apresentado, e de discriminar e classificar a figura depois de operarem uma reconfiguração da inicial, ou seja, de visualizarem um polígono com seis lados representado isolado dos dois triângulos que estão salientados a sombreado e cujo nome é hexágono.

*Itens da prova de 2011 e de 2012 quanto à liberdade dada aos alunos nas suas respostas.*

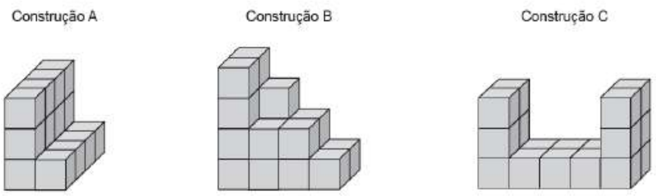
No quadro seguinte apresenta-se a distribuição dos itens segundo a tipologia utilizada pelo GAVE (s/d) quanto à liberdade dada aos alunos nas suas respostas.

Quadro 2 – Distribuição dos itens da prova de 2011 e de 2012 segundo a liberdade que é dada aos alunos nas suas respostas

<table>
<tr><th></th><th colspan="5">ITENS DE SELEÇÃO</th><th colspan="3">ITENS DE CONSTRUÇÃO</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">Escolha múltipla</th><th colspan="2">Ordenação</th><th>Associação/ Correspondência</th><th>Resposta curta</th><th>Resposta restrita</th><th>Resposta extensa</th></tr>
<tr><td>Nº de itens da Prova de aferição de 2011</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Nº de itens da Prova final de 2012</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td></tr>
</table>

Nas duas provas há um maior número de itens de construção do que de itens de seleção. Na prova final de 2012, entre os itens de seleção, há um item que é, simultaneamente, de *escolha múltipla* e de *ordenação*. Neste item é pedido aos alunos que escolham, de entre quatro hipóteses, a que está correta, mas os volumes das figuras têm que estar ordenados por ordem crescente.

13. *Observa as construções A, B e C representadas na Figura 8, feitas com cubos congruentes empilhados uns sobre os outros.*




*Os volumes das construções A, B e C designam-se por $V_A$, por $V_B$ e por $V_C$, respetivamente.*
*Assinala com X a opção em que os volumes das construções estão corretamente ordenados.*

- ☐ $V_A < V_B < V_C$
- ☐ $V_A < V_C < V_B$
- ☐ $V_B < V_A < V_C$
- ☐ $V_B < V_C < V_A$

Um exemplo de item de resposta restrita é o 11 da prova de aferição de 2011. Neste item são necessários vários procedimentos e é pedido que os alunos mostrem como chegam à sua resposta.

*11. No chão da sala da Matilde há um tapete com a forma de um quadrado.*
*O perímetro do tapete é 10 m. A área do chão da sala é 31,6 $m^2$.*
*Calcula a área da parte do chão da sala que não está coberta pelo tapete.*
*Mostra como chegaste à tua resposta.*

A resolução deste item requer o conhecimento de um procedimento para o cálculo da medida do lado de um quadrado, quando é dado o seu perímetro. Ou seja, os alunos têm que calcular o quociente da medida do perímetro por quatro. Em seguida, os alunos têm que conhecer a expressão que permite calcular a área de um quadrado e calcular a área do tapete com o valor da medida do lado que obtiveram. Por fim, têm que subtrair a área do tapete à área da sala. Neste item, os alunos podem mostrar toda a informação que recordam através dos passos a seguir num procedimento concreto.

Nas duas provas não há itens de resposta extensa, uma vez que nenhum permite ao aluno uma grande amplitude na sua resposta, nem apelam à capacidade criativa, à capacidade para organizar e apresentar ideias originais ou à defesa de uma posição (Tenbrink, 1988).

*Itens da prova de 2011 e de 2012 e o nível de complexidade cognitiva*

A média nacional da prova de aferição de 2011 em geometria foi 58,6% e da prova final de 2012 foi de 51,9%.

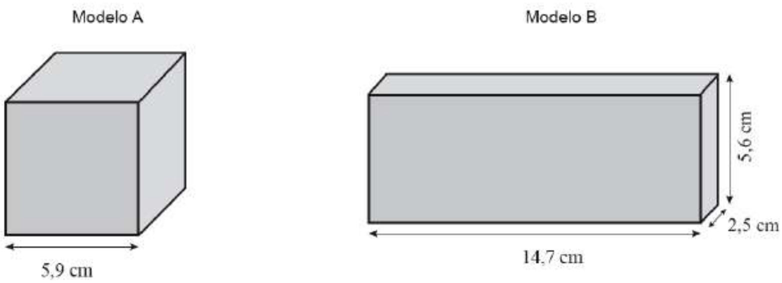
Da análise dos itens constantes na prova de 2011, verifica-se que há um certo equilíbrio entre o número de itens de reprodução e o número de itens de conexão. Na prova de 2012 esse equilíbrio já não existe, como é evidenciado no quadro que se segue.

Quadro 2 – Distribuição dos itens da prova de 2011 e de 2012 segundo ao nível de complexidade cognitiva.

| | NÍVEL DE COMPLEXIDADE COGNITIVA | | |
|---|---|---|---|
| | Item de reprodução | Item de conexão | Item de reflexão |
| Número de itens da Prova de aferição de 2011 | 6 | 5 | 0 |
| Número de itens da Prova final de 2012 | 8 | 1 | 0 |

Na prova de aferição de 2012 encontramos oito itens considerados de *reprodução*, de que o item 1 é um exemplo.

*1. Uma fábrica de chocolates encomendou um novo modelo de embalagem com um volume próximo de 200cm$^3$. Foram apresentados dois modelos, A e B, ambos representados na Figura 1.*
*O modelo A é um cubo com 5,9 cm de aresta. O modelo B é um paralelepípedo com 14,7cm de comprimento, com 2,5 cm de largura e com 5,6 cm de altura.*

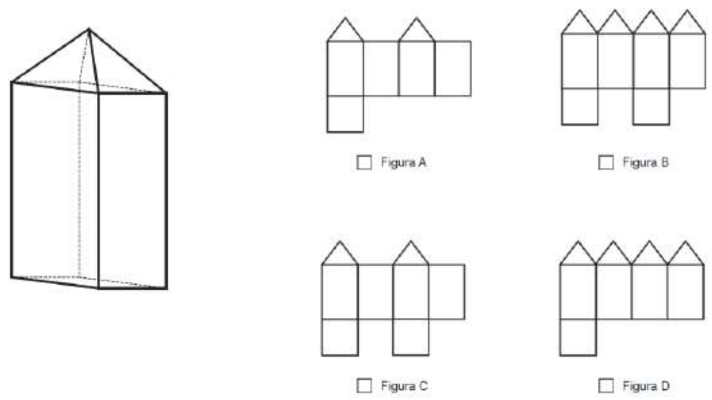



*Qual é o modelo cujo volume é mais próximo de 200 cm$^3$?*
*Mostra como chegaste à tua resposta.*

Neste item os alunos devem calcular o volume de um cubo e de um paralelepípedo, podendo recorrer à calculadora. Por último, os alunos devem comparar os volumes obtidos e identificar o que tem um volume mais próximo de 200 $cm^3$. Tanto o cálculo do volume do cubo como o do volume do paralelepípedo implica o uso de "fórmulas em um formato padrão conhecido e a realização de cálculos diretos" (OCDE, 2005, p. 40). A comparação entre dois valores, um representado até às milésimas e outro até às décimas, neste nível de ensino, deve ser um processo rotineiro. Por todos estes aspetos, este item é considerado de *reprodução*.

Na prova de aferição de 2011, o item 4.3 requer que os alunos escolham, das quatro hipóteses apresentadas, a planificação que corresponde ao sólido geométrico apresentado. Este sólido não é habitualmente conhecido pelos alunos desta faixa etária. Ele resulta da junção de uma pirâmide quadrangular com um prisma quadrangular.

*4.3. Qual das figuras seguintes pode corresponder à planificação do sólido?*




Para responder acertadamente, os alunos devem identificar no sólido as faces e transpor a posição de cada uma para a planificação, podendo imaginar o sólido a ser "fechado" ou "aberto" para não haver sobreposição das faces. Este item requer uma "maior interpretação e elaboração de ligações entre diferentes representações" (OCDE, 2005, p. 40) e por isso é considerado um item de *conexão*.

## Conclusões

As tarefas apresentadas nas duas provas nacionais selecionadas para este estudo, como era espectável, só abordam tópicos e conteúdos previstos no programa em vigor, e a percentagem de itens da área de geometria é idêntica. Na prova de 2011, o que não acontece na prova de 2012, há itens que se reportam a mais do que um tópico. Estas situações exigem uma maior flexibilidade cognitiva e são situações de maior complexidade que evidenciam ou não a compreensão de relações geométricas.

Os processos mentais em que é necessário interpretar a informação figurativa e efetuar o processamento visual da informação, ou seja, relacionar os dados do enunciado com os elementos da figura são de uma grande complexidade cognitiva. Nas duas provas existem itens em que estes processos mentais são necessários, mas na prova de 2011, o item 20, é ainda mais complexa, porque nenhum dado numérico, necessário à resolução da tarefa, se encontra na própria figura e por isso os alunos têm que percecionar as relações espaciais existentes e descriminar visualmente todos os aspetos necessários à resolução da tarefa.

Nas duas provas há dois *itens de seleção* e os restantes distribuem-se em proporções idênticas em *itens de construção*, distribuídos por *itens de resposta curta* e *resposta restrita*. Não foram encontrados itens de resposta extensa o que poderá ser justificado por se tratar de provas de avaliação realizadas em tempo limitado. No entanto, questionamos até que ponto a ausência de itens deste tipo não levará os professores a também não os utilizarem na sua própria prática de ensino.

No que concerne à análise segundo o nível de complexidade cognitiva, na prova de 2011 verifica-se que o número de *itens de reprodução* é idêntico ao número de *itens de conexão*, mas na prova de 2012, o número de *itens de reprodução* é muito maior que os de *conexão*. Podemos então verificar que a prova de 2011 em relação à de 2012, na geometria, exige uma complexidade cognitiva maior. Uma possível explicação para esta diferença pode estar na mudança da natureza e dos objetivos destes dois tipos de avaliação externa. O desenvolvimento deste estudo poderá permitir aprofundar esta questão.

**Referências**

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-907). Reston VA: NCTM.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 75-89.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Ceia, M., Filipe, A., & Santos, C. (2011). Provas de aferição e exames: a qualidade das questões de álgebra. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, pp. 149-171.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37(6)*, 14-20.

GAVE. (2011a). *Prova de Aferição de Matemática - 2.º Ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

GAVE. (2011b). *Provas de Aferição: 2.º ciclo - Matemática: Relatório.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

GAVE. (2012a). *Prova Final de Matemática - 2º Ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

GAVE. (2012b). *Provas Finais de Ciclo, Exames nacionais: Relatório 2012.* Lisboa: Ministério da Educação.

GAVE. (s/d). *Terminologia adoptada na classificação de itens de instrumentos de avaliação externa*. Retrieved janeiro 15, 2010, from GAVE: http://www.acessibilidade.gov.pt/accessmonitor/dir/see/?cD00MHxvPXRhYmxlfHM9ODMzfHY9cGFnZQ,,

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometria. In P. Flores, F. Ruiz, & M. Fuente, *Geometría para el siglo XXI* (pp. 14-58). Andaluzia: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas e Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Hershkowitz, R. (1993). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition : a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Jones, K. (2012). Geometrical and spacial reasoning: Challenges for research in mathematics education. *Atas SIEM* (pp. 3-12). Coimbra: APM.

Kirrane, D. E. (1992). Visual learning. *Training and Development, 46 (9)*, 58-63.

Mammana, C., & Villani, V. (1998a). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM (trabalho original em inglês, publicado em 1989).

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

OCDE. (2005). *Aprendendo para o mundo de amanhã: Primeiros resultados do PISA 2003.* São Paulo: Moderna Ltda.

Stein, M. H., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da reflexão à prática. *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

Tenbrink, T. D. (1988). *Evaluacion. Guia pratica para professores.* Madrid: Narcea.

# Os programas de matemática do ensino primário elementar e complementar no período do Estado Novo (1926-1974)[1]

*Mária Cristina Almeida*[1], *Rui Candeias*[2],
[1]UIED- FCT-UNL/Agrupamento de Escolas de Casquilhos,
*ajs.mcr.almeida@gmail.com*
[2]UIED-FCT-UNL/Agrupamento de Escolas Terras de Larus,
*ruicandeias1@sapo.pt*

**Resumo.** *Com o objetivo de conhecermos as propostas emanadas centralmente para o ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade, durante o Estado Novo, neste artigo analisamos os programas de Matemática do ensino primário elementar e complementar no período em estudo. As principais fontes utilizadas são os Diários do Governo. O estudo situa-se no âmbito da história do ensino da matemática, perspetiva que permite aprofundar o conhecimento sobre o ensino desta disciplina. A análise centra-se nos conteúdos a trabalhar, a sua sequência de ensino, o conhecimento matemático desejável, os métodos a utilizar e os materiais recomendados para o ensino dos conteúdos matemáticos. Da análise efetuada foi possível constatar a existência de dois períodos distintos. No primeiro, que vai de 1926 ao pós-guerra, assiste-se a uma diminuição da escolaridade obrigatória e a sucessivas simplificações dos conteúdos definidos nos programas, e em particular nos conteúdos de matemática. Este primeiro período também é caracterizado pela tónica colocada na memorização e repetição recomendada para o ensino da matemática. No segundo período, que tem início no pós-guerra, e em particular a partir de 1964, o regime desenvolve iniciativas visando uma melhoria da escolarização nacional. Estas ações passam por alterações aos programas que incidem no ensino primário elementar, mas principalmente no ensino primário complementar.*

**Abstract.** *Aiming to know the centrally issued proposals for the teaching of mathematics in the early years of schooling during the New State regime (Estado Novo), in this article we analyze the mathematics programs of basic and complementary primary education during the study period. The main sources used are the Government Diaries. The study is located within the history of mathematics teaching, perspective that allows to deepen the knowledge about the teaching of this subject. The analysis focuses on the content to work, teaching sequence, the desirable mathematical knowledge, the methods to be used and the recommended materials for the teaching of mathematical content. The performed analysis it was established that there are two distinct periods. In the first, which runs from 1926 to the post-war, we are witnessing a decrease of compulsory education and the successive*

[1] Excerto aprofundado do texto Almeida, M. & Candeias, R. (2014). *Os programas de Matemática do Ensino Primário, da Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em Portugal*, publicado em Almeida, J. & Matos, J. (Eds.) (2014). A Matemática nos programas do ensino não superior 1835-1974. Lisboa: UIED e APM.

*simplifications of the contents defined in the programs, particularly in mathematics content. This first period is also characterized by the emphasis on memorization and repetition recommended for the teaching of mathematics. In the second period, beginning after the war, and particularly since 1964, the regime develops initiatives aiming at improving the national schooling. These actions go through changes to programs that focus on basic primary education, but mainly in the complementary primary education.*

**Palavras-chave:** *programas; ensino primário elementar; ensino primário complementar; matemática.*

## Introdução

O texto aqui apresentado decorre de um trabalho mais amplo do *Grupo de Trabalho sobre História e Memórias do Ensino da Matemática*, da Associação de Professores de Matemática (APM), que recolheu e disponibilizou para consulta num portal, os programas de matemática do ensino não superior de 1835 a 1974. Esse trabalho, coordenado por António José Almeida e José Manuel Matos, foi recentemente editado em livro pela APM (Almeida e Matos, 2014).

Nesta comunicação é feita uma análise dos programas de matemática do ensino primário elementar e do primário complementar, no período compreendido entre 1926 e 1974. São analisados os programas, entendidos aqui como documentos que pretendem regular os conteúdos que são lecionados nas escolas e que são emanados de uma entidade oficial, neste caso, o Ministério da Educação. A análise aqui apresentada centra-se no ensino primário elementar e primário complementar. Embora estes graus de ensino sofram algumas alterações ao longo do período em estudo, de uma forma geral o primário elementar corresponde aos quatro primeiros anos de escolaridade e o primário complementar corresponde ao que seria hoje o quinto e o sexto ano de escolaridade.

A análise centra-se nas disciplinas que contêm os conteúdos que hoje em dia associamos à matemática e que nestes programas se encontram em aritmética, geometria e o sistema métrico, ou ainda na disciplina de desenho.

## Breve contextualização teórica

Os conteúdos de matemática que ensinamos hoje são por vezes questionados não só por professores e por alunos, mas também por outros setores da sociedade. Tais conteúdos constituem parte essencial da disciplina Matemática que, segundo Chervel (1990) “ainda que pareça imune por todos os lados, não é uma massa amorfa e inerte.” (p. 198).

O presente artigo situa-se no campo da História do Ensino da Matemática. Tratando-se da história de uma disciplina escolar, apoiamo-nos em Chervel (1990), que nos diz que uma disciplina escolar é uma combinação de vários constituintes, "um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e de um aparelho docimológico, os quais, a cada estado da disciplina, funcionam em estreita colaboração, do mesmo modo que cada em deles está, à sua maneira, em ligação directa com as finalidades" (Chervel, 1990, p. 207). As grandes finalidades educacionais variam segundo as épocas e emergem das necessidades da sociedade global cuja evolução acaba por determinar os conteúdos de ensino. Assim, a função das disciplinas escolares "consiste em cada caso em colocar um conteúdo de instrução ao serviço de uma finalidade educativa" (Chervel, 1990, p. 191). Neste contexto, a história dos conteúdos constitui uma componente que possibilita a compreensão da finalidade de uma disciplina escolar. O estudo dos programas ajuda a compreender algumas dimensões que constituem a matemática escolar contemporânea, como por exemplo, os temas, os métodos, os materiais.

**Metodologia**

As fontes que constituíram a base deste trabalho são os Diário de Governo. Neste documentos procurou-se localizar essencialmente os programas do ensino primário. Os programas são normalmente acompanhados por instruções ou indicações de carácter metodológico. Por isso, para além de revelarem os temas e conteúdos matemáticos que deveriam ser abordados no ensino primário, a sua sequência de ensino, a integração no todo do programa e quando surgem ou são suprimidos dos programas determinados temas, mostram-nos também aspetos relacionados com o conhecimento matemático desejável, os métodos a utilizar e os materiais recomendados para o ensino dos conteúdos matemáticos. Estes são os aspetos que serão objeto de uma análise descritiva ao longo do trabalho que aqui apresentamos.

**O ensino primário do Estado Novo**

A mudança de regime que ocorreu com o golpe de estado de 28 de maio de 1926, teve uma forte influência no ensino primário. Algumas disposições que regem o ensino primário[1] são alteradas em 1927. Este nível de ensino passa a dividir-se em três categorias: infantil, primário elementar e primário complementar. Só o ensino primário elementar (quatro anos) é obrigatório, sendo adotado o regime de separação de sexos.

Esta alteração reduz o ensino obrigatório de 5 para 4 anos, que estava em vigor desde 1919. Em 1930 decide-se uma nova redução da escolaridade obrigatória[2] dividindo o ensino primário elementar num 1.º grau obrigatório com três classes e num 2.º grau com a 4.ª classe. Em 1938, são apresentadas as bases da reforma do ensino primário, na Lei n.º 1.969[5]. Com esta Lei, o ensino primário passa a compreender dois graus: elementar, com 3 classes, e complementar, com 2 classes. Só o ensino primário elementar é obrigatório.

A política educativa do Estado Novo, com Leite Pinto como Ministro da Educação Nacional, reverte algumas das medidas que marcaram o período inicial do regime. Em 1956[6] a estrutura do ensino primário é alterada passando a ter apenas um grau, designado por ensino primário elementar e constituído por quatro classes. Numa primeira fase esta alteração representa o alargamento da escolaridade obrigatória de três para quatro anos, para os menores do sexo masculino, sendo posteriormente estendida ao sexo feminino em 1960[7]. O ensino primário é ampliado em 1964[8], passando a compreender dois ciclos, um *elementar*, correspondente às quatro classes já existentes, e outro *complementar*, constituído por duas novas classes: *5.ª e 6.ª classes*. A escolaridade obrigatória passa a ser de seis anos para ambos os sexos, dos sete anos aos catorze anos de idade. O aluno tinha que frequentar obrigatoriamente o ensino primário complementar ou o primeiro ciclo do ensino liceal ou o ciclo preparatório do ensino técnico (Almeida, 2013).

**A matemática nos programas do ensino primário elementar**

Nos programas do ensino primário elementar de 1927[9] não existe uma disciplina designada por matemática. Os conteúdos de matemática são apresentados nas disciplinas de *Aritmética*, na 1.ª classe, e *Aritmética e sistema métrico*, nas 2.ª, 3.ª e 4.ª classes, assim como na de *Desenho, Geometria* e *Trabalhos Manuais* nas 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª classes. Nestes programas a disciplina de *Aritmética* ou *Aritmética e sistema métrico* surge após a disciplina de *Leitura, escrita, redação e gramática*. Nas 1.ª e 2.ª classes é a última disciplina do programa, nas 3.ª e 4.ª classes antecede as disciplinas *Ciências físico naturais* e *Geografia*. Os conteúdos de cada uma destas disciplinas são apresentados numa lista, sem instruções de caráter pedagógico. Na disciplina de *Aritmética*, na 1.ª classe, os primeiros conteúdos referem-se aos números inteiros inferiores a 100. Este estudo continua na 2.ª classe até ao 1 000 000, acrescentando-se o estudo das quatro operações. Na 3.ª classe é feito o estudo dos números primos e a decomposição em fatores primos e na 4.ª classe é trabalhado o máximo divisor comum e o menor múltiplo comum. A 1.ª classe inclui as frações cujos termos não excedam 10. O estudo das frações continua na 2.ª classe, com frações cujos termos não excedam 100 e frações decimais, e na 3.ª classe com as frações ordinárias, frações decimais com execução das quatro operações e números mistos. O estudo das quatro operações é alargado às frações ordinárias na 4.ª classe. A partir da 2.ª classe os programas incluem o estudo do sistema métrico que se inicia com as medidas de comprimento e de peso. Na 3.ª classe alarga-se o estudo às unidades de área mais vulgares e na 4.ª classe às unidades de volume e de capacidade. A numeração romana, os números ordinais e a leitura da hora indicada por um relógio, e o número complexo[10] resultante, são trabalhados a partir da 2.ª classe. A resolução de exercícios e problemas é um conteúdo comum às quatro classes desta disciplina. A disciplina de *Desenho*, *Geometria* e *Trabalhos Manuais* continha conteúdos relacionados com a geometria, como as figuras geométricas simples ou os sólidos geométricos. Nestes programas de 1927, os materiais mencionados na lista de conteúdos estão na sua maioria relacionados com a geometria, como a régua, as figuras geométricas simples, o esquadro, o compasso e o transferidor. Na disciplina de *Aritmética e sistema métrico*, a partir da 3.ª classe um dos conteúdos é o ensino da utilização de um livro de aritmética. Estes programas de 1927 são aprofundados através de Instruções Pedagógicas publicadas quase de seguida[11]. Nelas, o conhecimento dos números é considerado uma base essencial. Em *Aritmética* é recomendado um especial cuidado no ensino da 1.ª classe, que deverá ser feito de maneira muito concreta. Os exercícios de cálculo mental devem ser iniciados logo que os alunos conheçam os números dígitos e devem prosseguir em sessões curtas e repetidas, para levar à fixação das tábuas das operações, ao conhecimento dos números e ao fortalecimento mental dos alunos. A escrita de números e algarismos só deve ser feita depois de o professor ter a certeza que os alunos conhecem os números a escrever, concretizando-os ou figurando-os por meio de fichas. Na 1.ª classe são recomendados os exercícios muito numerosos para a fixação das tábuas de somar e de subtrair, assim como os problemas simples envolvendo apenas as operações já aprendidas. Na 4.ª classe recomenda-se que o ensino tome um carácter bastante formal.

Em 1928 são publicados novos *Programas*[12] para o ensino primário elementar. Nestes programas, os conteúdos de matemática são apresentados na disciplina de *Aritmética* e na disciplina de *Geometria,* que é uma disciplina autónoma. Estas disciplinas estão presentes nas quatro classes e aparecem logo a seguir ao programa de *Língua Materna*. Estes programas, para além de apresentarem a lista de conteúdos a trabalhar em cada uma das classes, incluem no final um conjunto de instruções para cada uma das disciplinas. Na disciplina de *Aritmética*, o programa da 1.ª classe inclui os números inteiros até 100 e depois até 1000. São ainda incluídos nesta classe a representação do dinheiro português e as quatro operações no limite indicado. Na 2.ª classe, o programa é claramente simplificado relativamente ao anterior, sendo retirados os conteúdos relacionados com o sistema métrico, que passam a constar apenas nas 3.ª e 4.ª classes. Na 2.ª classe, os números inteiros são estudados até à centena de milhar e são trabalhadas as frações ordinárias cujos termos não excedam 10. Nas 3.ª e 4.ª classes também são reduzidos os programas, onde deixam de constar conteúdos como as potências, números primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, regra de três simples. Em *Geometria* são trabalhadas noções simples de volume, superfície, linha e ponto, polígonos, arcos e circunferências e sólidos geométricos. Embora muitos destes conteúdos já constassem da disciplina de *Desenho*, *Geometria* e *Trabalhos Manuais* do programa anterior, a *Geometria* surge neste programa como disciplina autónoma e com um maior número de conteúdos. Os materiais relacionam-se na sua maioria com a geometria, como a régua, o esquadro, o transferidor e o compasso, ou com o sistema métrico, como as balanças e as medidas de capacidade. As *Instruções* que acompanham a publicação dos programas contêm uma descrição da forma como devem ser abordados os conteúdos nas diferentes classes das disciplinas. Nas instruções de *Aritmética* para a 1ª classe recomenda-se um ensino fundado em base concreta com elevação posterior ao domínio abstrato. A noção de número inteiro ou natural é dada ao aluno “ (...) primeiro por colecção de objetos ou sinais idênticos, depois na de sons e por fim na repetição de fenómenos da mesma natureza” (Programas do Ensino Primário Elementar, 1928, p.2217). A iniciação às operações deverá ser sempre feita com recurso à concretização. Nos problemas, recomenda-se que sejam simples, práticos e numerosos, referindo-se que as crianças devem ser levadas a raciocinar sobre cada enunciado e não recorrendo à memorização. O estudo da *Geometria* começa pela noção intuitiva de volume e dessa base concreta se elevará às noções abstratas. O cubo ou o paralelepípedo são usados como exemplo na abordagem à noção de volume. Na 4.ª classe é feito o estudo do círculo e da circunferência e a avaliação prática da área do triângulo ou de qualquer polígono regular ou irregular pela soma das áreas dos triângulos ou dos triângulos e trapézios em que se decomponha.

Nos *Programas* de 1929[13] consideram-se as três primeiras classes como a base do ensino primário elementar, sendo a 4.ª classe um ensino complementar para aqueles que não possam continuar os estudos. Nestes programas os conteúdos matemáticos fazem parte de duas disciplinas, *Aritmética* e *Geometria*. A *Aritmética* inicia-se na 1.ª classe e a *Geometria* tem início na 3.ª classe. Estas disciplinas estão nos programas logo após a disciplina de *Língua Materna*. Os conteúdos de *Aritmética* são simplificados logo desde a 1.ª classe, que fica reduzida à concretização dos números até 100 e à concretização das quatro operações. Os programas das 2.ª, 3.ª e 4.ª classes desta disciplina mantêm-se quase inalterados, sendo apenas retirados os números ordinais na 2.ª classe. No entanto, é de realçar que os conteúdos de *Aritmética* que correspondem à escolaridade obrigatória são significativamente reduzidos, já que a 4.ª classe se torna complementar, sendo ensino não obrigatório. A disciplina de *Geometria* passa a constar apenas nos programas das 3.ª e 4.ª classes. O programa da 3.ª classe mantém os conteúdos que já constavam no programa da anterior 3.ª classe, com os antigos conteúdos dos programas das 1.ª e 2.ª classes desta disciplina e ainda vai conter alguns conteúdos que constavam anteriormente no programa da 4.ª classe, como o trabalho com a circunferência, o transferidor e a avaliação prática da superfície dos polígonos. O programa de *Geometria* da 4.ª classe fica praticamente reduzido a uma revisão dos conteúdos da 3.ª classe. As instruções pedagógicas destas duas disciplinas não introduzem alterações significativas relativamente ao programa anterior.

Em 1937 publicam-se novos programas para o *Ensino Primário Elementar* agora constituído pelas três primeiras classes[14], continuando em vigor o programa da 4.ª classe, publicado em 1929. Apesar das alterações anteriores terem procedido a simplificações nos programas, é nesta remodelação que os conteúdos de matemática são reduzidos, principalmente nos três primeiros anos de escolaridade, que entretanto passam a constituir a escolaridade obrigatória. Os conteúdos de matemática estão integrados na disciplina de *Aritmética*, que é a segunda disciplina, logo após o programa de *Língua Materna*. Esta disciplina passa a incluir o sistema métrico e o conhecimento da geometria prática, apenas na 3.ª classe. A redução é particularmente significativa na 3.ª classe, de onde são retirados conteúdos como as condições de divisibilidade por 2, 3, 5, 9 e 10, as frações decimais e as operações com frações decimais. Na geometria também é significativa a redução de conteúdos, deixando de ser trabalhadas na 3.ª classe noções como retas perpendiculares e paralelas, decomposição de polígonos em triângulos ou em quadriláteros e em triângulos, corda, tangente secante, segmento, sector e coroa circulares. Nestes programas não existem referências explícitas a materiais a utilizar no ensino. Estes programas incluem um conjunto de *Observações* para as três classes. No estudo dos números, refere-se que "o conhecimento da formação dos números é o saber contar e a origem do desenvolvimento lógico e progressivo do raciocínio" (*Programas do ensino primário elementar,* 1937, p. 288). Pretende-se que o ensino da numeração comece com "objetos facilmente manuseáveis e partindo de um deles – uma unidade —, os alunos farão repetidos exercícios de composição e decomposição dos números, juntando e tirando primeiro um e depois mais objetos, aliando a estas diferentes operações, o nome dos números resultantes" (Programas do ensino primário elementar, 1937, p. 288). Só depois deste processo seria feito o registo, com a utilização de algarismos. Realçando-se que "no equilíbrio no emprego sucessivo destes processos se põe à prova o tato pedagógico do professor: nem demasiada materialização, que origine preguiça mental, nem demasiada abstração que deixe lacunas intransponíveis para a sequência lógica e dedutiva do raciocínio" (Programas do ensino primário elementar, 1937, p. 288). Estas *Observações* incentivam a repetição e memorização, referindo-se que "todas as crianças devem fazer repetidas vezes, para fixação perfeita do cálculo, a construção das tábuas da adição e da multiplicação", no entanto, também se destaca a importância dos "problemas simples, interessantes, tirados da vida real infantil, que as próprias crianças poderão enunciar, dar-lhes-ão o sentido do valor utilitário da aritmética" (Programas do ensino primário elementar, 1937, p. 288).

Em 1960 são publicados novos programas para o ensino primário[15]. Reconhece-se que os programas em vigor — de 1937 para as três primeiras classes, e de 1929, para a quarta classe — eram já pouco adequados e "não podem corresponder à evolução da vida portuguesa e das técnicas pedagógicas do último quarto de século" (Decreto-Lei n.º 42.994, 1960, p. 1.271). Nestes programas de 1960 os conteúdos de matemática estão incluídos em *Aritmética*, presente nas quatro classes deste grau de ensino, e *Geometria*, nas 3.ª e 4.ª classes e surgem logo após os programas de *Língua Portuguesa*. Salienta-se a extensão dos conteúdos e o pormenor com que são apresentados. Alguns conteúdos retirados anteriormente são retomados, nomeadamente na geometria. O sistema métrico volta a ser trabalhado logo desde a 1.ª classe, contendo algumas alterações como o trabalho com unidades de medida não convencionais. O trabalho com as frações e a relação destas com os números decimais e com as percentagens é outro aspeto que se destaca neste programa. Em relação aos materiais, são mencionados os objetos para contagens, os instrumentos de medida, as moedas e o relógio. O pormenor das *Instruções* para a abordagem dos conteúdos propostos é também relevante. Nas instruções é salientado o papel dos problemas no ensino da aritmética: "[o]s problemas devem considerar situações vividas pelos alunos ou que, pelo menos, estejam ao alcance da sua observação e do seu interesse. As próprias crianças os poderão trazer da vida para a escola, embora seja em geral mais conveniente que o professor os proponha de acordo com o seu critério" (Decreto n.º 42 994, p. 1276).

Ao contrário dos programas de 1937, onde a memorização e a repetição eram considerados aspetos centrais no ensino da aritmética, os programas de 1960 destacam a importância dos alunos resolverem problemas que apresentem reais dificuldades para o nível de desenvolvimento dos alunos. Estas instruções salientam também que não deverá existir uma excessiva repetição.

> Um problema representa normalmente para a inteligência da criança uma real dificuldade. (...) Na resolução de problemas dê-se, quanto possível, preferência ao cálculo mental sobre o cálculo escrito.
> Não se repita desnecessariamente um problema já resolvido pelos alunos. Repetir um problema vale tanto como repetir operações (Decreto n.º 42 994, p. 1276).

Os programas do ensino primário elementar são de novo modificados em 1968[16]. Entre o programa de 1960 e o de 1968, não existem muitas alterações nas disciplinas de *Aritmética* e de *Geometria.* No entanto, é de realçar que as *Instruções,* que existem no final dos programas de *Aritmética* e de *Geometria* de 1960, passam a constituir um conjunto de *Observações* nestes programas de 1968. Para além desta mudança de designação, existe apenas uma alteração da terminologia utilizada na multiplicação e na divisão. Onde se utilizava a palavra "grupos" no programa de 1960, passa-se a utilizar a palavra "conjuntos" em 1968 e uma alteração ao nível de conteúdo, deixando-se de trabalhar as percentagens. A substituição da palavra "grupos" pela palavra "conjuntos" poderá estar relacionada com o significado que a palavra "grupo" tinha adquirido no contexto da Matemática Moderna, movimento que viria a influenciar muito os *Programas do ensino primário para o ano lectivo 1974-1975* (Candeias, 2007).

**A matemática nos programas do ensino primário complementar**

A estrutura do ensino primário complementar aprovada em 1927 compreende duas classes, ambas compostas pelas seguintes disciplinas: Português, Francês, História, Geografia, Matemática e Noções de Escrituração Comercial, Ciências Físico-Químico-Naturais e Desenho e Trabalhos Manuais Comuns[17]. Os conteúdos de matemática estão incluídos nas disciplinas de *Matemática e Noções de Escrituração Comercial* e *Desenho e Trabalhos Manuais Comuns*.

Os Programas do ensino primário complementar e as respetivas Instruções são publicados em 1928[18]. Nos programas do ensino primário complementar de 1928 é salientada a nova natureza deste ensino, mais prático em contraste com o anteriormente ministrado, por exemplo em matemática, o aluno destas escolas "não demonstrará os teoremas das operações algébricas, mas saberá efetuá-las, como saberá pôr um problema simples em equação e resolvê-la; não demonstrará as relações dos elementos de um triângulo, mas determinará uma superfície e um volume, quaisquer que eles sejam" (Decreto n.º 14.900, p. 120). Nas Instruções para a execução destes programas é reforçado que o ensino da matemática tem como intenção preparar o estudante para problemas de ordem prática que lhe apareçam no dia-a-dia. Deve ser um ensino utilitário devendo deixar de se fazer exercícios cujo principal objetivo é exercer a designada "ginástica mental". O professor deve ser bastante claro não deixando que os alunos adquiram a atitude da dúvida sistemática, que consideram ser o alicerce da ciência especulativa. Nestas instruções o professor fica a conhecer claramente o que deve, e como deve ensinar em cada classe. Os programas das 1.ª e 2.ª classes do ensino primário complementar são fundamentalmente uma lista de conteúdos a tratar, ressaltando da sua leitura função utilitária da matemática e a importância dada à atividade de resolução de exercícios e problemas. Com efeito, podemos ler nestes programas:

> Revisão dos conhecimentos adquiridos acerca dos números inteiros e fraccionários, das operações executadas sobre os mesmos, das proporções, das noções de geometria. Exercícios muito numerosos, embora simples, de cálculo mental. Exercícios e problemas. (…) Seno, coseno, tangente e cotangente de ângulos não excedentes a 180º. Resolução de triângulos rectângulos. Exercícios: construções e problemas numéricos. (…) Progressões aritméticas e geométricas. Logaritmos vulgares. Exercícios numerosos e problemas. Traçados e emprego de gráficos. Exemplos de resolução gráfica do problema e do emprego de ábacos. Conhecimento e uso

> de regras de cálculo bastante simples. Percentagem. Bónus. Descontos. Juros simples e compostos. Anuidades. Fundos públicos. Regas: conjunta da divisão em partes proporcionais, de companhia e de liga ou mistura. Conhecimento do emprego de tabelas de juros. Exemplos do estabelecimento de orçamentos simples e de determinação de preços de fabrico e de venda. Exame de algumas tabelas e gráficos de estatísticas demográficas, comerciais, industriais e agrícolas. (Decreto n.º 14.900, pp. 122-4)

Com a ampliação do ensino primário efetuada em 1964, foi necessário elaborar novos programas para o ensino primário complementar. Os programas do *Ciclo Complementar do Ensino Primário* são aprovados em 1967[19] a título experimental, referindo-se que dos resultados da sua aplicação poderiam guiar futuros aperfeiçoamentos. A estrutura do Ciclo Complementar do Ensino Primário compreende duas classes, ambas compostas pelas seguintes disciplinas: Língua Portuguesa, História de Portugal, Matemática, Ciências Geográfico-Naturais, Desenho e Trabalhos Manuais Educativos, Moral e Religião, Educação Física e Educação Musical. O ensino da matemática neste ciclo pretendia a aquisição de conhecimentos de aplicação prática, o desenvolvimento das faculdades do espírito, a integração dos alunos na realidade da época e da sociedade e eventual prosseguimento de estudos. Cabia ao professor, "estudando o programa na sua letra e no seu espírito, ver até que ponto cada assunto pode servir para se atingirem aqueles objectivos" (Portaria n.º 22.966, p. 1841)

Apesar de não haver referência a escrituração comercial no nome da disciplina continuam a aparecer alguma terminologia e noções comerciais nos novos programas. Os programas da disciplina de Matemática estão divididos em secções, sendo onze em cada classe. A 5.ª classe seria em grande parte revisão de assuntos já antes aprendidos no ciclo elementar, salientando-se que esta revisão devia ser um desenvolvimento que evidenciasse aspetos não conhecidos dos alunos, incluindo novas justificações e novas aplicações. Na 6.ª classe, há uma separação da *Aritmética* e da *Geometria*, sendo o professor aconselhado a alternar as lições destes assuntos como se se tratasse de duas disciplinas separadas. É referida como novidade deste programa o aparecimento no estudo da Aritmética da noção de equação, e da resolução de problemas por meio de equações. Um outro aspeto a destacar é o desaparecimento do estudo das proporções, as ´regras de três' passariam a ser resolvidas pelo método de redução à unidade, enquanto em problemas em que pudessem aparecer proporções ou ´regras de três' estes seriam resolvidos por meio de equações. Manteve-se apenas a noção de proporção. Também desaparece o conteúdo relativo às razões trigonométricas e resolução de triângulos rectângulos, polinómios, resolução de equações do segundo grau e sistemas de equações. Aparecem as propriedades das operações e as frações. Nas observações ao programa recomenda-se ao professor que relacione a matemática com a matéria de outras disciplinas, sendo dadas sugestões de aplicações ao Desenho, às Ciências Naturais e ao Português. Para esta última, com vista à utilização de uma linguagem clara e precisa por parte dos alunos, recomenda-se que eles deveriam efetuar pequenos exercícios escritos que podiam ser, por exemplo, enunciados de problemas da invenção dos alunos e descrição de construções geométricas. Na abordagem de algumas noções de Geometria aconselha-se que sejam utilizadas situações tiradas do ambiente envolvente ou da experiência do aluno e refere-se que o que importa do estudo das propriedades das operações é a sua aplicação ao cálculo mental, cuja prática é recomendada. Preconiza-se ainda que no estudo de alguns assuntos o grau de dificuldade dos exercícios não devia exceder o dos exemplos aí apresentados.

**Conclusões**

No que diz respeito aos conteúdos a trabalhar no ensino primário elementar, no período em análise destacam-se dois momentos. Dos programas de 1927 até aos programas de 1937 assiste-se a uma redução dos conteúdos a trabalhar, que é particularmente evidente nos programas de 1937, contribuindo para isso o facto da 4.ª classe deixar de pertencer ao ensino primário elementar e obrigatório. Em 1960 é aprovado um novo programa para o ensino primário elementar que retoma alguns conteúdos que tinham sido retirados no programa anterior e acrescenta novos conteúdos. Neste programa de 1960 os conteúdos são apresentados de uma forma mais pormenorizada, constituindo muitas vezes sequências didáticas para o desenvolvimento do trabalho com um determinado conteúdo. Em relação às metodologias e indicações para o ensino os primeiros programas analisados destacam a necessidade da concretização dos conteúdos, principalmente na 1.ª classe. Os programas de 1937 colocam a tónica na memorização e na necessidade da repetição. Com os programas de 1960 dá-se algum destaque à resolução de problemas do dia a dia, embora estes tenham como objetivo trabalhar as quatro operações aritméticas. As referências aos materiais para o trabalhar os conteúdos mantêm-se quase constantes ao longo do período em estudo. Estes materiais relacionam-se muitas vezes com a geometria, ou com o sistema métrico e a utilização de instrumentos de medida. Também são comuns aos vários programas, as referências, mais ou menos explícitas, à utilização de materiais de contagem não estruturados para a iniciação aos números inteiros.

No que concerne ao ensino primário complementar, observa-se nos programas de 1967 relativamente aos de 1928 uma maior compartimentação e especificação dos conteúdos. Algumas das novas noções e conteúdos, bem como os conteúdos retirados, são justificados pelas suas aplicações. No que respeita a indicações para o ensino, ambos os programas salientam que deve procurar-se relacionar a matemática e a matéria de outras disciplinas. Em 1967, para além da anterior, destacam-se as recomendações relativas ao cálculo mental. Nos programas de 1928, os materiais aconselhados são ábacos e réguas de cálculo, enquanto que em 1967 não há referências a materiais a utilizar no ensino.

## Notas

1 Decreto n.º 13.619, D. G.,100, 17/5/1927, 770-2 e Decreto n.º 13.791, D. G., 125, 17/6/1927, 999-1.002 que não diferem para efeitos desde trabalho.
2 Decreto n.º 18.140, D. G., 72, 28/3/1930, 577-8.
3 Decreto n.º 20.604, D. G., 283, 9/12/1931, 577-8.
4 Decreto n.º 21.712, D. G., 235, 7/10/1932, 2.004.
5 D. G.,115, 20/5/1938, 845-7.
6 Decreto-Lei n.º 40.964, D. G.,284, 31/12/1956, 2.076-87.
7 Decreto-Lei n.º 42 994, D. G.,125, 28/5/1960, 2.165-207.
8 Decreto-Lei n.º 45.810, D. G.,, 160, 9/7/1964, 876-7.
9 Decreto n.º 14.417, D. G, 225, 12/10/1927, 1.967-73.
10 O número incomplexo é aquele que se refere a uma única unidade, e o complexo, a mais de uma unidade, no contexto das medidas de tempo.
11 Portaria n.º 5.060, D. G., 233, 21/10/1927, 2.047-65.
12 Decreto n.º 16.077, D. G., 247, 26/10/1928, 2.211-27.
13 Decreto n.º 16.730, D. G., 83, 13/4/1929, 896-908.
14 Decreto n.º 27.603, D. G., 72, 29/3/1937, 286-90.
15 Decreto-Lei n.º 42.994, D. G., 125, 28/5/1064, 2.165-207.
16 Portaria n.º 23.485, D. G., 167, 16/7/1968, 1.019-36.
17 Decreto n.º 13.791, D. G., 125, 17/6/1927, 999-1.002.
18 Decreto n.º 14.900, Programas de Ensino Primário Complementar D. G.,12, 16/1/28, 119-25 e Portaria n.º 5.155, Instruções para a execução dos programas do Ensino Primário Complementar, D. G., 12, 16/1/28, 125
19 Portaria n.º 22.966, D. G., 242, 17/10/1967, 1.834-59 e retificados pela Declaração, D. G., 284, 7/12/1967, 2.239-46.

## Referências

Almeida, J. & Matos, J. (Eds.) (2014). *A Matemática nos programas do ensino não superior 1835-1974*. Lisboa: UIED e APM.

Almeida, M. (2013). *Um olhar sobre o ensino da Matemática, guiado por António Augusto Lopes*. (Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa).

Almeida, M. C., & Candeias, R. (2014). Os programas de matemática do ensino primário, da

Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. In A. Almeida & J. M. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974).* Caparica: UIED e APM.

Candeias, R. (2007). *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário: João António Nabais e o ensino da matemática no Colégio Vasco da Gama*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Carvalho, R. (2006). *História do ensino em Portugal: desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar – Caetano.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria e Educação. *Pannonica, 2,* 177-229.

Nóvoa, A. (1996). Ensino primário. In F. Rosas & J. M. Brito (Eds.), *Dicionário de história do Estado Novo. Volume I.* Venda Nova: Bertrand Editora.

Sampaio, J. (1975). *O ensino primário 1911 – 1969. Contribuição monográfica. Volume II, 2.º período 1926 – 1955.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

# Resolver problemas no ecrã: o recurso à visualização para resolver-e-exprimir

*Hélia Jacinto*[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Escola Básica José Saramago, Poceirão, helia_jacinto@hotmail.com
[2]Faculade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve, scarrei@ualg.pt
[1,2] Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

**Resumo**. *O principal propósito desta investigação é compreender a atividade de resolução de problemas com ferramentas digitais do dia-a-dia, no âmbito de uma competição matemática, SUB14, que decorre fora da sala de aula. Seguindo uma abordagem qualitativa, observámos a atividade de um jovem, Marco, aquando da resolução de um problema geométrico, com o intuito de descrever e analisar a sua atividade. Os resultados mostram que as inscrições digitais existentes no enunciado despertam as capacidades de visualização do jovem que, por sua vez, têm um papel relevante na compreensão do problema, na seleção das ferramentas, no planeamento e na implementação de uma estratégia. A partir do caso deste jovem-com-computador discutimos ainda o papel das tecnologias do quotidiano na atividade de resolver-e-exprimir os problemas da competição.*

**Abstract**. *The main goal of this research is to understand the problem solving activity with everyday digital technologies, within the context of a beyond school mathematical competition, SUB14. Following a qualitative approach, we observed the activity of a young student, Marco, when solving a geometrical problem, aiming at describing and analysing his activity. The results show that the digital inscriptions presented in the statement trigger his visualization abilities which, in turn, have a relevant role in understanding the problem, selecting a technological tool, planning and implementing a strategy. Based on the case of this student-with-computer we discuss the role of the everyday digital tools in the activity of solving-and-expressing the problems of the competition.*

**Palavras-chave**: *Humanos-com-media; Resolução de problemas de matemática; Resolver-e-exprimir; Tecnologias do quotidiano; Visualização.*

## Introdução

As capacidades de resolução de problemas e de pensamento matemático necessárias para fazer face aos desafios atuais estão a transformar-se com a crescente sofisticação das tecnologias digitais. Além de existir pouca investigação centrada nas atividades matemáticas extraescolares, o interesse da comunidade de investigadores pela resolução de problemas como tópico de pesquisa tem decrescido (English, Lesh, & Fennewald, 2008), embora ainda muito esteja em aberto sobre o papel e o impacto das tecnologias digitais no desenvolvimento de pensamento matemático, em particular, nos processos envolvidos na resolução de problemas (Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2007). Combinando estas duas vertentes, este estudo visa descrever a atividade de resolução de problemas não rotineiros com tecnologias digitais do quotidiano, no contexto de uma competição extraescolar. Neste artigo procuramos compreender o papel das ferramentas tecnológicas na atividade de um concorrente ao resolver e exprimir a solução de um problema geométrico.

*As competições de resolução de problemas*

O SUB14® é um campeonato de resolução de problemas extraescolar que se destina aos alunos do Algarve e Alentejo que frequentem o 7.º ou o 8.º ano de escolaridade. A *fase de apuramento* é organizada em torno de 10 problemas que são colocados numa página *web*, um por quinzena. Os participantes devem enviar as suas resoluções, isto é, a resposta e uma explicação detalhada do seu raciocínio, através de correio eletrónico ou recorrendo às ferramentas de comunicação eletrónica disponíveis no *website*. A comissão organizadora analisa as respostas e devolve um *feedback* personalizado a cada concorrente a elogiar a prestação ou a incentivar uma revisão do trabalho. As regras do campeonato permitem que os participantes recorram à ajuda de amigos, familiares ou professores, durante esta fase. Os participantes apurados são convidados a participar na fase final que decorre na Universidade do Algarve.

## Enquadramento teórico

Nesta secção organizamos as perspetivas e os conceitos indispensáveis a uma discussão sobre a resolução de problemas com tecnologias levada a cabo pelos participantes no SUB14. Assumindo a impossibilidade de separação entre o sujeito e a tecnologia com que resolve problemas, argumentamos que a seleção da ferramenta assenta numa simbiose entre a perceção das suas possibilidades de ação e as capacidades matemáticas do indivíduo, considerando o papel do pensamento visual como central na resolução e na expressão da solução.

*Resolver-e-exprimir com tecnologias digitais*

Os problemas *não-rotineiros* propostos no SUB14 visam estimular intelectualmente os concorrentes supondo-se que, no imediato, os mesmos não disporão de um procedimento que lhes garanta encontrar a solução. Os desafios não são alinhados com o currículo pelo que a sua resolução envolve o *desenvolvimento de formas produtivas de pensar* acerca da situação desafiadora (Lesh & Zawojewski, 2007), com recurso a conhecimentos informais e incorporando elementos descritivos da abordagem seguida.

Esta atividade é encarada como um processo síncrono de matematização e de expressão do pensamento matemático (Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, no prelo), pelo que responder a um dado problema requer encontrar a solução e reportar o processo utilizado. Não só a fase de resolução está fortemente ligada à fase de relatar a estratégia, como essa relação ganha visibilidade na presença de ferramentas digitais que suportam a expressão do pensamento matemático. Esta conjetura encontra suporte nas regras do SUB14 que determinam a comunicação eletrónica das soluções e o envio de uma justificação, ou seja, os concorrentes ponderam conscientemente o modo como exprimem o raciocínio e os conhecimentos matemáticos usados. É então oportuno considerar que as ilustrações, os esquemas, a utilização de cores, por exemplo, permitem traçar um roteiro do pensamento matemático desenvolvido:

> Descrições, explicações e construções não são simplesmente processos que os alunos usam a caminho de produzir 'a resposta' e não são simplesmente pós-scripts que os alunos apresentam após 'a resposta' ter sido produzida. Estes SÃO os componentes mais importantes que são necessários nas respostas (Lesh & Doerr, 2003, p. 3).

Uma vez que esta atividade inclui necessariamente uma descrição do pensamento matemático desenvolvido, marcado pelo uso de ferramentas digitais, procuramos compreender o utilizador e a ferramenta digital como uma única entidade e focamo-nos na forma como esta entidade resolve-e-exprime problemas de matemática.

Borba e Villarreal (2005) argumentam que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana, propondo que o conhecimento resulta de uma simbiose entre os seres humanos e as tecnologias com que atuam. Esta relação simbiótica origina uma nova entidade que os autores designam por *humanos-com-media* – uma metáfora que explica como o uso de ferramentas digitais transforma os processos de pensamento. De uma forma sumária, as ferramentas que são usadas para comunicar, produzir ou representar ideias matemáticas influenciam o tipo de pensamento matemático produzido. Assim, a introdução de uma ferramenta específica no sistema 'humanos-com-media' desencadeia alterações concretas na atividade consoante o tipo de media que incorpora; por exemplo, a matemática produzida por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquela que humanos-com-folha-de-cálculo ou humanos-com-GeoGebra produzem (Villarreal & Borba, 2010).

Na origem da produção de diferentes tipos de conhecimento parece estar o reconhecimento, pelo sujeito, das *affordances* (Gibson, 1979) da ferramenta digital, pelo que este contraste entre os modelos conceptuais que suportam as produções analisadas pode assentar na relação entre a *aptidão* do participante e a sua *perceção* das potencialidades de ação (Greeno, 1994) com a tecnologia que escolhe utilizar.

*Visualizar na resolução de problemas com tecnologias digitais*

A resolução de problemas de matemática é, com frequência, acompanhada por esquemas, diagramas, ilustrações (Lavy, 2007; Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013; Presmeg, 1986), na medida em sustentam a *visualização* dos conceitos envolvidos (Zimmermann & Cunningham, 1991). Esta é uma evidência muito presente nas soluções apresentadas pelos participantes no SUB14, cujas produções são marcadas pelo recurso a uma variedade de *inscrições* (Presmeg, 2006). A visualização é aqui entendida como a capacidade de construção de imagens de conceitos matemáticos – que podem ser mentais, escritas com papel e lápis ou com recurso a ferramentas tecnológicas – e da sua utilização eficaz na produção de pensamento matemático (Hershkowitz, 2014; Presmeg, 1986; Zimmermann e Cunningham, 1991).

Está documentado que a visualização e a resolução de problemas são capacidades fortemente relacionadas, sobretudo quando se trata de problemas não rotineiros (Wheatley, Brown & Solano, 1994). Além de apoiar a fase inicial de compreensão da situação, a coordenação e organização de elementos matemáticos incorporados nas figuras ou nos enunciados, também suporta a transição da situação contextualizada para um pensamento abstrato (Lavy, 2007), i.e., o processo de matematização.

Presmeg (1986) propôs a resolução de problemas, que admitiam estratégias visuais e não visuais, a alunos do ensino secundário e focou-se nos estudantes que preferiam recorrer aos *métodos visuais* sempre que essa escolha lhes era permitida – os *visualizadores*. Vários estudos (Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013; Rösken & Rolka, 2006) têm procurado compreender as características dos visualizadores por oposição aos verbalizadores, cujas preferências recaem sobre métodos analíticos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, Kozhevnikov, Hegarty e Mayer (2002) mostraram que os visualizadores com elevadas capacidades espaciais obtêm sucesso na resolução de problemas porque preferem fazer inscrições esquemáticas das relações espaciais existentes entre os objetos, o que facilita a obtenção da solução.

Sem pretender discutir em profundidade estas categorizações, parece oportuno distinguir os *visualizadores espaciais*, i.e., as pessoas com capacidade para processar informação relativa a relações espaciais, manipular e transformar imagens espaciais complexas com destreza, dos *visualizadores icónicos*, i.e., os que revelam capacidade para lidar com informação relativa à aparência visual de objetos e às suas propriedades pictóricas (Blazhenkova & Kozhevnikov, 2010). Para além disso, os visualizadores espaciais utilizam imagens espaciais mais flexíveis e maleáveis do que as imagens usadas pelos visualizadores icónicos, manipulam imagens dinâmicas e têm melhor desempenho em tarefas que requerem transformação mental dos objetos. Por outro lado, também possuem a capacidade de analisar um objeto parte-por-parte, pelo que o apreendem de forma mais clara e explícita, o que lhes permite proceder a uma diversidade de transformações (Kozhevnikov, Kosslyn, & Shephard, 2005).

Presmeg (2006) listou algumas linhas de investigação que merecem aprofundamento no campo da visualização na educação matemática e, em particular, registou a necessidade de uma maior compreensão sobre a forma como os aspetos (i.e., *affordances*) visuais das tecnologias transformam o pensamento matemático. Na verdade, diversos ambientes digitais potenciam a visualização de determinadas propriedades matemáticas aquando da construção de figuras e da sua transformação, permitindo refletir sobre elas e utilizá-las para comunicar. Arcavi e Hadas (2000) afirmam que o dinamismo implícito às tecnologias digitais pode influenciar

> a formação do hábito de transformar (mentalmente ou por meio de uma ferramenta) uma instância particular, a fim de estudar as variações, sugerir invariantes visualmente e, possivelmente, fornecem a base intuitiva para justificações formais de conjeturas e de proposições (p. 26).

Assim, as características de um indivíduo visualizador poderão contribuir, em primeira mão, para a escolha da ferramenta tecnológica que melhor se adequa ao desenvolvimento de métodos visuais e, também, para a identificação de um conjunto de possibilidades relevantes de ação com a ferramenta.

Compreender a resolução de problemas de matemática com ferramentas digitais, no contexto desta competição, envolve analisar o modo como jovens-com-media desenvolvem formas produtivas de pensar visualmente sobre os problemas não rotineiros, atividade esta que é mediada pela utilização de ferramentas digitais que geram, suportam ou ampliam o pensamento matemático visual.

**Metodologia**

Neste estudo assume-se uma perspetiva interpretativa, informada por uma combinação de ideias teóricas e dados empíricos recolhidos e analisados segundo uma abordagem qualitativa (Quivy & Campenhoudt, 2008). Pretende-se aprofundar a compreensão dos processos de resolução de problemas com tecnologias, no âmbito do SUB14, pelo que se reporta o caso de um participante, de nome fictício Marco, que recorria com frequência a uma variedade de ferramentas tecnológicas para resolver os problemas de edições anteriores e ainda devido à qualidade das suas descrições ou justificações, o que indicava a sua qualidade de bom informante.

Este trabalho centra-se na análise da atividade de resolução de problemas do jovem, no seu ambiente doméstico, pelo que a principal fonte de dados foi a observação participante suportada na vídeo-gravação deste episódio, obtida com a devida autorização do encarregado de educação. Foram selecionados três problemas propostos em Finais do SUB14 anteriores à participação do Marco, que variavam em termos dos conceitos matemáticos envolvidos. Os três problemas foram disponibilizados no *website* da competição, próximo do momento de observação, e com formato semelhante aos problemas propostos no SUB14. Ao concorrente foi-lhe solicitado que acedesse à página da competição e que selecionasse um desses problemas para resolver, simulando, tanto quanto possível, os processos que seguia habitualmente durante a sua participação no SUB14. Também lhe foi solicitado que verbalizasse ou explicasse os passos dados pelo que a observação foi complementada com questões de clarificação.

Na organização dos dados e na transcrição das falas recorreu-se ao programa NVivo, onde também se registaram aspetos singulares da atividade, por exemplo, gestos, alternância entre ferramentas do computador ou sequências de operações em cada programa usado. Estes dados são agora analisados com recurso às noções teóricas discutidas a fim de que a reconstituição dos processos de resolução de problemas com tecnologias deste jovem permita uma maior compreensão do papel das ferramentas digitais do dia-a-dia para solucionar problemas matemáticos.

## Resolver-e-exprimir no ecrã: o caso de Marco

Nesta secção reportamos o processo de resolução seguido pelo participante Marco, desde a seleção do problema, passando pela busca de uma estratégia adequada, à produção da resposta que viria a submeter ao SUB14.

### *Exploração visual da figura*

Marco começa por analisar atentamente os três problemas disponibilizados na página da competição e escolhe resolver o problema "Motivo decorativo" (Figura 1), por ser o seu favorito. Quando questionado sobre os motivos da sua preferência, explica:

*Marco:* *Tem mais a ver com triângulos e essas coisas e foi no sétimo ano onde eu tive 100 nos dois testes.*

*Investigadora:* *Em geometria?*

*Marco:* *Sim, estudei congruência de triângulos e isso...*

A sua escolha assenta numa identificação inicial dos assuntos matemáticos que poderão ser necessários para a resolução do problema e, simultaneamente, na familiaridade e até mesmo na autoconfiança para lidar com esses conceitos.

**Motivo decorativo**
Na figura está representado um motivo que irá ser usado para construir um vitral.
O triângulo é equilátero e tem de altura 12 cm. Os círculos são tangentes ao triângulo e também tangentes dois a dois.
Qual é o comprimento do raio de cada círculo pequeno?

**Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.**

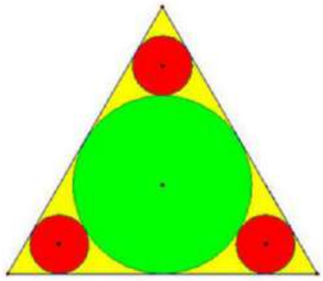


Figura 1. Enunciado do problema escolhido por Marco

Focado na leitura do problema, vai explicando: “Eu estou a tentar, estou ainda a tentar... ver como fazer isto. Hum... como o triângulo é equilátero... chegando ao círculo do meio se calhar consegue-se chegar aos outros...” Então, em silêncio, fixa o ecrã.

A compreensão da situação começa a desenvolver-se em estreita relação com a interpretação da imagem fornecida no enunciado e uma primeira estratégia vai ganhando forma. Rapidamente passa a explorar, visualmente e no ecrã, várias decomposições do triângulo equilátero: deslizando o dedo pelo ecrã, ‘traça’ uma bissetriz do ângulo inferior direito do triângulo mas continua a pensar em voz alta enquanto ‘traça’ outra bissetriz, agora a do ângulo superior:

> Como é que hei-de dizer? Como se dividisse ao meio. E dividia-se em cada vértice para o meio de cada aresta e tentar descobrir […]. Se conseguisse dar... mas eu ainda estou a ver como é que vou fazer isso...

As tentativas para descortinar um método visual de abordar o problema sucedem-se e, ao fim de algum tempo, avança outra análise da situação:

> Ele tem 12 cm. Ao meio do triângulo não é 12 de certeza. Mas é capaz de ser 4. Ele dividindo estas partes... [com o dedo indicador e o polegar fixa uma distância e percorre a altura do triângulo 3 vezes]. Sim, se calhar. Porque eles são tangentes. [silêncio] Nota-se que... são iguais. O problema é que se não diz aqui nada...

Marco reconhece que o baricentro deste triângulo não coincide com o ponto médio da sua altura pois avança a possibilidade do raio do círculo maior ter comprimento 4cm, valor que resulta de uma intuição visual suportada numa medição rudimentar através de uma distância fixa pelos dedos. Embora conclua que o raio do círculo maior corresponde a 1/3 da altura do triângulo equilátero, percebe que essa afirmação carece de justificação rigorosa, embora não encontre informações suficientes no enunciado.

Apercebe-se então que já enunciou diferentes perspetivas – "agora estou a pensar, há muitas [formas] mas... não sei se dão certo, é esse o problema" – e decide enveredar por uma estratégia que envolve a decomposição do triângulo equilátero em duas figuras, obtendo um triângulo mais pequeno no topo e um trapézio abaixo. Estas diversas abordagens correspondem a manipulações e transformações mentais, ou seja, ainda não foram materializadas pelo Marco para além do 'desenho' com o dedo indicador sobre o ecrã. Continua, explicando a sua nova conjetura:

> Se a gente fizer aqui um triângulo (…) é como se este fosse uma ampliação do outro. Se ele tem 12, 12 a dividir por três, quatro. (…) quer dizer que o raio é 2. Se calhar o raio do círculo pequeno é 2.

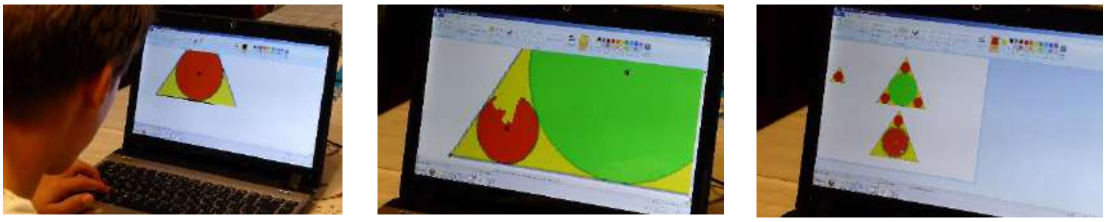
As descrições, embora pouco claras, são complementadas por uma interação permanente com a imagem no ecrã: o Marco aponta, 'mede' comprimentos ou distâncias, cobre zonas como se deixassem de existir. Está a desenvolver um método visual para lidar com o problema, analisando as potencialidades da decomposição da figura em partes, mas simulando mentalmente a sua transformação – cortar, reorganizar, alterar a cor – o que pode ser indicador da intenção em proceder a um 'tratamento gráfico' da figura, indispensável à obtenção desta sua solução.

Até aqui, o Marco esteve a 'pensar em voz alta' mas focado na figura fornecida no problema: analisou o enunciado e estudou a viabilidade de algumas estratégias, que evidenciam o desenvolvimento de um pensamento matemático visual e que lhe permitiu aprofundar a sua compreensão da situação e identificar um repertório matemático potencialmente útil.

*Transformar a figura para construir a solução*

A produção da resposta, que não foi ainda encontrada, tem lugar com a implementação da estratégia planeada visualmente (decomposição da figura num triângulo e num trapézio) e com o tratamento da imagem com recurso a programas de uso comum. Com o programa Ferramenta de Recorte, Marco define uma área quadrangular que contém um pequeno triângulo equilátero e um círculo vermelho, e guarda esse ficheiro como imagem. Usando um processo idêntico cria um ficheiro com a figura do enunciado. Em seguida, insere as duas imagens no MSPaint e tenta sobrepô-las, mas percebe uma dificuldade: as duas imagens têm um fundo branco que não consegue transformar em transparente, pelo que não as consegue colocar uma sobre a outra da forma que planeou.

Contudo, esse imprevisto leva o Marco numa direção um pouco diferente como sintetizado na Figura 2: i) amplia a área de trabalho para conseguir desenhar, com precisão, a linha que deve delimitar a figura pequena para poder ser considerada um 'triângulo', não sendo pois um mera questão pictórica; ii) já no triângulo maior utiliza a ferramenta 'selecionador de cores' para identificar a tonalidade de amarelo existente no preenchimento do triângulo para, com essa cor e com um traço mais espesso, esconder rapidamente os círculos pequenos vermelhos; e iii) com a mesma ferramenta altera a cor verde do círculo central para vermelho, com o duplo intuito de verificar e mostrar que o triângulo original é semelhante ao triângulo pequeno, pelo que é possível inferir as propriedades de um a partir das do outro.



| i) Completa o triângulo, desenhando o lado inferior | ii) Pinta os círculos vermelhos com o tom de amarelo do fundo | iii) Pinta o círculo central de vermelho |
|---|---|---|

Figura 2. Três etapas no tratamento de imagem

Quando questionado sobre se é habitual investir no aspeto gráfico das suas produções, responde que não, embora complete: "é que isto depois nota-se". Todavia, este cuidado tem outro propósito do seu ponto de vista: "é para demonstrar melhor como é que ele seria se fosse uma ampliação do outro", isto é, o tratamento gráfico reveste-se de uma importância central na sua estratégia. Além de ilustrar o seu modo de pensar da forma mais fidedigna que tem ao dispor, estas imagens tornam-se também num argumento matemático visual que devem ter o poder de convencer quem vai apreciar a sua solução.

Após terminar a edição das figuras, Marco guarda o ficheiro, abre a folha de cálculo Calc, do Open Office e explica que costuma identificar o número do problema numa célula em cima à esquerda, colar à esquerda todas as imagens que forem necessárias e à direita é habitual relatar o seu processo de resolução (Figura 3). O processo de redação da solução vai sendo articulado com a observação das figuras, com uma descrição verbal do que está a fazer e ainda com a formatação das células em que está a escrever, exemplificando assim a sua capacidade para executar múltiplas tarefas em simultâneo.

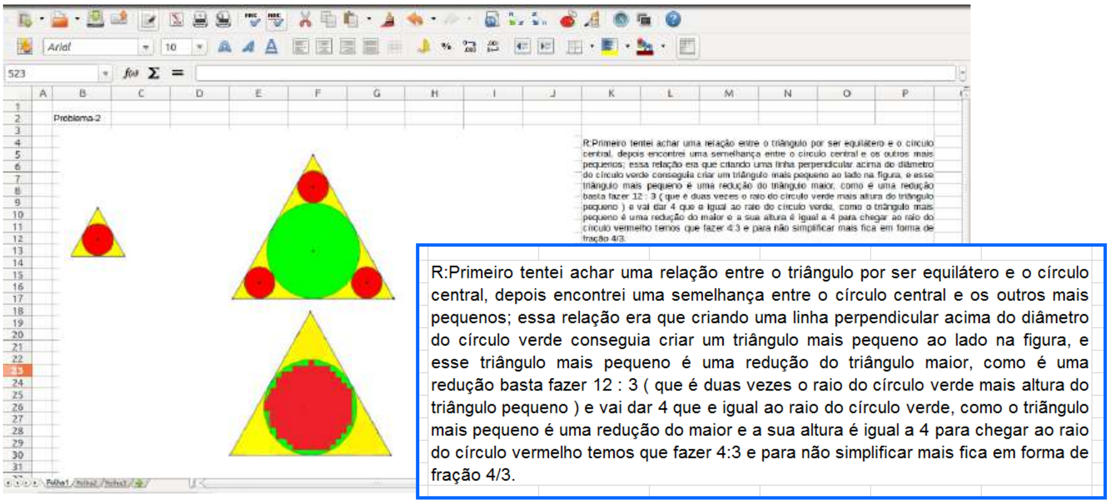



Figura 3. Impressão de tela da solução produzida no Calc e ampliação da explicação

Prossegue explicando que encontrou uma razão de "semelhança entre o círculo central e os outros mais pequenos", pelo que considera que o triângulo menor é uma redução do original, com razão 12:3, embora não prove que são semelhantes. Marco assume que o diâmetro do círculo maior é 1/3 da altura do triângulo maior, pelo que o círculo pequeno terá um raio correspondente a 1/3 da altura do triângulo menor, ou seja, 1/3 de 4.

Embora decorra naturalmente deste raciocínio, esta solução contraria uma das suas últimas hipóteses já que o esperado seria que o raio tivesse comprimento 2. Todavia, parece ser a partir desta sistematização das informações visuais e da sua interligação com a aplicação de factos matemáticos e procedimentos elementares que o Marco obtém a solução do problema. Esta é uma forte evidência de como a tecnologia digital não só suporta a fase de compreensão de um problema, como potencia o desenvolvimento e a implementação de uma estratégia e a sua efetiva comunicação.

Este caso ilustra a impossibilidade de demarcar uma fronteira clara entre a resolução do problema (i.e., os processos seguidos na obtenção da solução) e a construção da resposta (i.e., o ficheiro submetido), já que o pensamento matemático se desenvolve continuamente e vai sendo refinado aquando da explicação do processo seguido. A escolha intencional destas ferramentas resulta do reconhecimento das preferências visuais e das potencialidades de ação que Marco identifica nos programas Ferramenta de Recorte, Paint e Calc para concretizar o seu plano de transformação das imagens e para expor, o mais fielmente possível, o seu raciocínio. A matematização da situação ocorre assim em simultâneo com a expressão do pensamento matemático e, sendo mediada por estas ferramentas tecnológicas, socorre-se de inscrições textuais mas também ilustrações especialmente concebidas para esse fim. Revolver-e-exprimir é, assim, uma forma de descrever a atividade de matematização deste jovem.

**Considerações finais**

O propósito deste artigo é descrever a atividade de um jovem na resolução de um problema geométrico com ferramentas digitais, simulando tanto quanto possível a sua participação habitual na Competição SUB14. Este trabalho problematiza os tipos de pensamento matemático e de capacidades de resolução de problemas com tecnologias que os jovens colocam hoje em prática para lidar com situações desafiadoras, combinando conhecimentos informais com conhecimentos escolares.

Este caso expõe uma sintonia entre as capacidades de visualização espacial do jovem, as características do problema e das ferramentas que usa: a seleção do desafio a resolver já resulta da sua preferência por problemas geométricos em que pode usar a sua destreza tecnológica e os seus conhecimentos matemáticos, recorrendo a métodos visuais para manipular e transformar a imagem de forma relevante para a obtenção da solução. A imagem inicial e as que mais tarde são viabilizadas pelo editor de imagem através da decomposição e reconstrução acionaram a formulação de conjeturas acerca das relações geométricas que procura justificar, usando argumentos matemáticos. A visualização desempenhou, assim, um papel primordial em todas as fases da atividade de resolução-e-expressão do problema.

Outra característica importante da atividade deste jovem é o facto de se deslocar entre o *website* da competição, que contém o enunciado, a Ferramenta de Recorte, o Paint e o Calc – sem nunca abandonar o ecrã do computador, ou seja, sem recorrer a qualquer outro tipo de ferramenta ou suporte escrito. Estamos, pois, perante um jovem em simbiose com o seu computador na medida em que não só domina as ferramentas que tem ao dispor como é capaz de as colocar ao seu serviço, nomeadamente, através do reconhecimento das suas potencialidade de ação e da sua efetiva utilização no desenvolvimento de uma estratégia de resolução. A atividade de resolução de problemas da unidade 'Marco-com-computador' revela-se na interação visual com as inscrições no ecrã e nas transformações que imagina, na efetiva manipulação da figura, transformando-a à luz do conceito matemático de semelhança de figuras e ainda na expressão digital do processo que culminou com a obtenção da solução e da resposta.

Por fim, sublinhamos a relevância das tecnologias do quotidiano, aparentemente destituídas de potencialidades matemáticas, na atividade de resolução de problemas desenvolvida nesta competição (Carreira, 2012). É de notar que os principais quadros teóricos que visam descrever ou explicar a resolução de problemas foram predominantemente desenvolvidos em ambientes de aprendizagem formal em que o papel e o lápis eram as ferramentas mais comuns. A atividade de resolução de problemas que tem lugar no mundo de hoje, impregnado pelas mais diversas tecnologias digitais, requer uma compreensão teórica mais ampla que permita atender às especificidades dessas ferramentas, considerando as suas potencialidades de ação em termos do pensamento matemático necessário para obter uma solução eficiente e elegante.

## Referências bibliográficas

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning *5*, 25-45.

Blazhenkova, O. & Kozhevnikov, M. (2010). Visual-object ability: A new dimension of non-verbal intelligence. *Cognition*, *117*(3), 276-301.

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York, NY: Springer.

Carreira, S. (2012). Mathematical problem solving beyond school: digital tools and students mathematical representations. *ICME12*, pp. 620-639. Seoul, SK: ICMI.

Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre (no prelo). *Students Solving Mathematical Problems with Technology*. Mathematics Education in the Digital Era. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. *ICME11*. Monterrey, México: ICMI.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. Em R. Shaw & J. Bransford (Eds.) Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Greeno, J. (1994). Gibson's Affordances. *Psychological Review*, *101*(2), 336-342.

Hershkowitz, R. (2014). Looking at visual thinking and Visual Communicating in mathematics learning through the lens of examples. In Nardi, E. Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. In M. Fried e T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*, (pp.198-204). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M. & Mayer, R. (2002). Revising the Visualizer–Verbalizer Dimension: Evidence for Two Types of Visualizers, *Cognition & Instruction*, *20*, 37-77.

Kozhevnikov, M., Kosslyn, S., & Shephard, J. (2005). Spatial versus object visualizers: A new characterization of visual cognitive style. *Memory and Cognition*, *33*, 710-726.

Lavy, I. (2007). A case study of dynamic visualization and problem solving. *The International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *38*(8), 1075-1092.

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). Foundations of a Model and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism — Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The Handbook of research on mathematics education*, (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: Their mathematical creative abilities. *ZDM*, *45*(2), 199-213.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 297–311.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais.* Lisboa: Gradiva.

Rösken, B. & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words – The role of visualization in mathematics learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the IGPME*, (Vol. 4, pp. 457-464). Prague: PME.

Santos-Trigo, M., & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some mathematics education frameworks. *The Mathematics Educator*, *10*(1), 81–106.

Villarreal, M., & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, *42*(1), 49–62.

Wheatley, G., Brown, D., & Solano, A. (1994). Long term relationship between spatial ability and mathematical knowledge. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the 16th North American chapter of the IGPME*, (Vol. 1, pp. 225–231). Baton Rouge, LA: Louisiana State University.

Zimmerman, W. and Cunningham, S. (Eds.) (1991). Editors introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*, (Nr 19, pp. 1-7). Washington, DC: MAA.

# Aspetos da comunicação matemática na resolução de problemas

*Maria do Carmo Botelho*[1], *Helena Rocha*[2]

[1]Externato São Vicente de Paulo, mcarmosbotelho@gmail.com
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

**Resumo**. *A importância da comunicação matemática sobre a aprendizagem dos alunos, levou à realização desta investigação que pretendeu compreender o impacto sobre a resolução de problemas das dificuldades de comunicação evidenciadas pelos alunos. Optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa e pela realização de estudos de caso envolvendo dois alunos do 10.º ano. As conclusões alcançadas apontam para dificuldades na interpretação do enunciado, nomeadamente relativamente às figuras e a dados em quantidade superior ao necessário. Também ao nível da comunicação da resolução foram identificadas dificuldades em fundamentar ideias, evidenciando uma preferência pelo recurso ao cálculo.*

**Abstract.** *The influence of mathematical communication over the students' learning led to this research, whose main goal is to understand the impact on problem solving of the students' communication difficulties. The study adopts a qualitative and interpretative methodology, undertaking two case studies of 10th grade students. The reached conclusions point to the students' difficulties at the interpretation of the problem, namely at the interpretation of figures, and at the interpretation of the available data, especially when part of them is irrelevant to the problem. Some difficulties were also identified at the communication level, in relation to the arguments used by the students to support their ideas, where a clear preference to restrict them to mathematic calculations was identified.*

**Palavras-chave**: *comunicação; resolução de problemas; matemática.*

## Introdução

A comunicação tem adquirido cada vez mais importância no processo de ensino-aprendizagem (Martinho & Ponte, 2005). Com efeito, como realça Cândido (2001), a comunicação entre professores e alunos sobre conceitos e noções matemáticas é essencial para a aquisição, troca e consolidação de conhecimentos e pensamentos matemáticos. Assim, podemos inferir que na matemática a comunicação é um fator imprescindível para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem da disciplina, assumindo o professor, em contexto de sala de aula, um papel importante nesta dinâmica (Ponte et al., 2007). Para este, a sua maior preocupação quando usa linguagem matemática na transmissão de um conhecimento é tentar ser o mais claro possível de forma a que o alunos consigam entender e apreender o novo conhecimento (idem).

Este é o ponto de partida para o presente artigo, que tem como principal objectivo compreender o impacto sobre a resolução de problemas das dificuldades de comunicação evidenciadas pelos alunos.

Este contexto surge pelo reconhecido contributo que a resolução de problemas pode trazer à aprendizagem dos alunos, porque os leva a não serem meros ouvintes, mas a tornarem-se mais interventivos no pensar matemático (Duarte, 2000). De acordo com Guerreiro (2011, p.17):

> as orientações curriculares para o ensino da matemática valorizam a comunicação, em consonância com as políticas educativas globais, como um processo que suplanta a perspectiva da transmissão de informações entre os intervenientes. Nelas, advoga-se uma partilha comunicacional mais ajustada aos princípios da comunicação como interação social.

Porque existem diferentes formas de comunicação, sensibilizar para isso pode transformar-se numa oportunidade para um maior sucesso na comunicação matemática e, consequentemente, para facilitar o ensino-aprendizagem da mesma (Guerreiro, 2011).

Como tal, este estudo tem como ponto de partida as seguintes questões de investigação:

1. Quais as dificuldades dos alunos na interpretação do enunciado de um problema?
2. Como se caracteriza a comunicação adotada pelos alunos na apresentação que fazem aos outros da sua resolução de um problema (nas vertentes oral e escrita)?

## Resolução de problemas

Para Ponte (2005), a aprendizagem adquirida pelos alunos resulta principalmente das atividades que realizam, e da reflexão que efetuam sobre as mesmas. Estas atividades compreendem tarefas que podem resultar da iniciativa do professor, ou do próprio aluno durante o seu processo de estudo. Assim, o professor deve criar tarefas a partir das quais os alunos se sintam mais envolvidos e mais participantes nas atividades. De acordo com Boavida et al. (2008), das várias tarefas que o professor pode propor na aula, umas pretendem a mecanização, outras estão orientadas para trabalhar a complexidade do raciocínio matemático.

Segundo Ponte (2005), o exercício e o problema apenas diferem no grau de desafio, nem sempre sendo fácil distingui-los, porque o grau de desafio depende dos conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos. Ou seja, o que pode ser considerado um problema para alguns, pode ser um exercício para outros. O aspeto central na distinção entre problema e exercício prende-se então com o conhecimento do aluno relativamente a um processo imediato para resolver a questão que se lhe coloca. Se este conhece esse processo e o consegue implementar, a questão será um exercício; no caso contrário, será um problema.

Menino e Santos (2004) consideram que o ensino está atualmente direcionado para a resolução e compreensão de problemas e não apenas para a aquisição de conceitos, sendo que Abrantes (1988) e Boavida et al. (2008) consideram que a resolução de problemas é cada vez mais reconhecida no âmbito da Educação Matemática como uma tarefa relevante no currículo de matemática.

De acordo com Duarte (2000), a resolução de problemas é uma estratégia que pode ser utilizada para motivar os alunos, pois obriga a que não sejam meros atores passivos, e se tornem mais interventivos no pensar matemático (idem). Para Serrazina et al. (2002) e o NCTM (2007), a resolução de problemas serve igualmente para compreender melhor a matemática e o processo de ensino-aprendizagem da mesma. “Atualmente a resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações-problema caracterizadas pela investigação e exploração de novos conceitos.” (Mendes, 2009, p. 71). Assim, segundo o NCTM (2007), a resolução de problemas potencia nos alunos o processo de exploração e desenvolvimento dos conhecimentos adquiridos, bem como a aquisição de novos conhecimentos, servindo de estímulo no seu processo de aprendizagem.

As Normas do NCTM de 1991, referem que para a resolução de problemas de matemática os alunos deverão possuir as seguintes competências:

- Saber investigar e compreender os assuntos matemáticos;
- Saber correlacionar conhecimentos matemáticos, recorrendo a estratégias na aplicação da resolução de problemas da matemática;
- Saber reconhecer e formular problemas tanto ligados diretamente ou indiretamente à matemática;

- Saber relacionar os conhecimentos adquiridos para a resolução de situações problemas da vida real.

Segundo o NCTM (2007), a resolução de problemas traduz-se numa motivação para a utilização da comunicação matemática através do domínio oral e escrito, sendo ainda considerada uma estratégia para a recuperação de conhecimentos anteriormente adquiridos (Ministério da Educação, 2001). Portanto, a resolução de problemas no ensino secundário deve potenciar o desenvolvimento de estratégias, e a capacidade de as aplicar sempre que necessário (idem). Através da aprendizagem da resolução de problemas em matemática, "os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança em situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática. Na vida quotidiana e no trabalho, ser hábil na resolução de problemas poderá acarretar-lhes muitas vantagens" (NCTM, 2007, p. 57).

Para o NCTM (2007), a matemática não é apenas uma disciplina que passa pela memorização de regras para a concretização de exercícios, mas também pretende que os alunos consigam:

- Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- Resolver problemas que surgem em matemática e em outros contextos;
- Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- Analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas.

Segundo Semana e Santos (2008), a resolução de problemas constitui uma das tarefas matemáticas que melhor promove e desenvolve a capacidade de raciocínio matemático dos alunos.

**Comunicação matemática**

É através de mensagens orais e escritas que os alunos conseguem comunicar ideias e apropriarem-se de conceitos matemáticos (Ponte et al., 2007). No entanto, professores e alunos, têm que saber estabelecer entre si uma linguagem explicativa das suas ideias matemáticas, para que esta seja entendível por todos.

Constata-se também, que uma boa comunicação na sala de aula promove um ambiente facilitador das aprendizagens por parte dos alunos, servindo como um instrumento facilitador e de regulação das boas práticas na sala de aula (Ponte et al., 2007). Esta atitude facilitadora pode ser utilizada pelo professor de várias formas, conforme a situação em análise. Por exemplo, se estiver perante um grupo poderá colocar perguntas de resposta direta ou, a partir de uma dúvida colocada, gerar debate e momentos vivos de argumentação (idem). É através da interação criada entre professor e aluno que surgem oportunidades de discussão, de esclarecimento de dúvidas e de realização de sínteses (Ponte et al., 2007). Também o NCTM (1991) destaca a importância da interação na sala de aula, sustentada numa boa comunicação, por favorecer o ensino da matemática mais no domínio da compreensão, desviando-a assim da tendência da memorização de terminologia, procedimentos e fórmulas. Desejavelmente a memorização é substituída pelo recurso à linguagem do aluno, tornando-o capaz de descrever a sua ideia sem recorrer a respostas estereotipadas (idem).

"A comunicação não se reduz à articulação e sentido de expressões e representações ou à transmissão de mensagens; tem de considerar os significados particulares dos sujeitos em interação, o que condiciona o entendimento global do processo comunicativo" (Guerreiro, 2011, p. 66). Assim sendo, entende-se que pelas caraterísticas particulares de cada sujeito interveniente na comunicação, esta possa ter significados diferentes entre os vários atores, o que poderá reduzir a compreensão global da comunicação (Guerreiro, 2011).

Segundo o NCTM (2007), o programa de ensino prevê nos diversos anos de escolaridade capacitar os alunos para:

- Desenvolver um pensamento matemático consolidado e organizado apoiado pela comunicação;
- Transmitir informação recorrendo à comunicação, para expressar o seu pensamento matemático corretamente aos colegas e professores;
- Saber analisar e refletir numa perspectiva de pensamento crítico, identificando as estratégias e o pensar matemáticos dos outros;
- Dominar a linguagem matemática para transmitir noções matemáticas com fidelidade.

A comunicação através da escrita matemática é igualmente importante, pois permite aos alunos desenvolver e fortalecer o seu pensamento matemático, e obriga-os a refletir de forma a melhor perceber e interiorizar as ideias e noções trabalhadas em sala de aula (NCTM, 2007). A utilização desta dinâmica em sala de aula, permite melhorar competências tais como: saber ouvir, interrogar, interpretar, analisar e refletir (idem). A utilização regular da escrita matemática torna-se relevante na aprendizagem, tal como a elaboração e utilização de argumentos matemáticos, assim como a justificação e demonstração dos mesmos (idem).

Segundo o Ministério da Educação (2007, p.11), "a comunicação matemática (oral ou escrita) é um meio importante para que os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflitam na sua aprendizagem, aumentem o apreço pela necessidade de precisão na linguagem, conheçam conceitos e terminologia, aprendam a ser críticos". É referido que os alunos devem ser capazes de interpretar enunciados, expressar as suas ideias usando linguagem matemática, explicar oralmente ou por escrito os procedimentos matemáticos que utilizaram para chegar aos resultados que apresentam e ainda, argumentar sobre o seu raciocínio ou mesmo questionar o raciocínio dos outros. Então, torna-se importante que os alunos sejam capazes de "argumentar e discutir a argumentação dos outros" e de "desenvolver e discutir argumentos matemáticos" (idem, p. 5).

Ainda no mesmo documento é referido que uma das finalidades do ensino da matemática é o desenvolvimento da compreensão e da capacidade de elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos que permitam aos alunos a sua integração em contextos diversificados. A argumentação lógica deve recorrer sempre que possível à linguagem simbólica da matemática, bem com à sua precisão e ao seu poder de síntese (ME, 2001). A linguagem é necessária para a comunicação, pois é através dela que é possível estabelecer uma interação entre indivíduos, potenciando uma comunicação para a aprendizagem e para a transmissão de conhecimentos (Guerreiro, 2011). A comunicação matemática processa-se através de um código próprio, através de linguagem oral ou escrita, com diferentes níveis de complexidade, consoante os atores que a utilizam (Menezes, 2000).

**Metodologia e tarefas aplicadas**

Tendo em conta o objetivo do estudo foi escolhida uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa, optando-se pela realização de estudos de caso a dois alunos, o Mário e a Mónica, de uma turma de 10.º ano de uma escola da Grande Lisboa.

Os dados que aqui se apresentam foram recolhidos através de uma entrevista semiestruturada e de duas entrevistas com aplicação de tarefas. Foram ainda observadas quatro aulas com a intenção de escolher os alunos participantes no estudo. A entrevista foi realizada no final do estudo com a intenção de compreender e interpretar as experiências dos alunos. As entrevistas com aplicação de tarefas visaram aceder à forma como os alunos utilizaram a comunicação matemática na resolução de problemas. Todas as entrevistas foram áudio gravadas e posteriormente transcritas.

A análise de dados assumiu uma natureza descritiva e interpretativa e partiu de leituras repetidas das transcrições das entrevistas e da identificação de episódios relevantes à luz das questões do estudo.

De seguida apresentam-se duas das quatro tarefas propostas aos alunos nas entrevistas com aplicação de tarefas.

A Tarefa 1 apresenta três questões: na primeira pretende-se que os alunos justifiquem com cálculos se na situação descrita foi golo; na segunda é solicitado que determinem a altura máxima atingida pela bola; na terceira pretende-se que o aluno determine a distância da bola à linha de golo, quando esta atinge a altura máxima. Esta tarefa tem como objetivo avaliar se o aluno consegue efetuar um raciocínio utilizando linguagem matemática.

Num jogo de futebol, vai ser cobrado um livre, a 25 metros da baliza (ver figura 1)
A barreira está à distância regulamentar de 9,15 metros da bola.
O plano da trajetória da bola é perpendicular à linha de golo.
A bola pode não passar a barreira ou pode passar por cima dela.
Se passar por cima da barreira, a bola segue na direção da baliza, fora do alcance do guarda-redes.
Admita que só pode acontecer uma das quatro situações seguintes:

- a bola não passa a barreira;
- a bola sai por cima da barra da baliza;
- a bola bate na barra da baliza;
- a bola entra na baliza.

Na barreira , o jogador mais alto tem 1,95 metros de altura.
A barra da baliza está a 2,44 metros do chão.

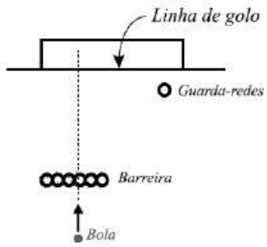


Figura 1

Admita que, depois de rematada, a bola descreve um arco, de tal modo que a sua altura, relativamente ao solo, medida em metros, é dada por

! (! ) = 0,32! − 0,01! !

Sendo x a distância, em metros, da projeção da bola no solo ao local onde ela é rematada (ver figura 2).

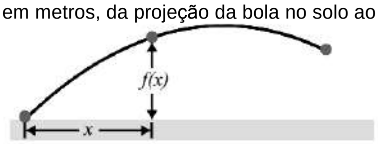


Figura 2

Resolve os itens seguintes, utilizando exclusivamente métodos analíticos. Podes utilizar a calculadora, para efetuar cálculos numéricos.

1. É golo? Justifica a tua resposta.
2. Qual é a altura máxima atingida pela bola?
3. A que distância da linha de golo está a bola, quando atinge a altura máxima?
   Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

Itens Matemática A – 10.ºano

A Tarefa 2 solicita aos alunos que elaborem uma breve composição, indicando qual a opção correta e identificando a razão da rejeição para cada uma das restantes. O objetivo desta tarefa consiste em verificar se o aluno consegue interpretar a situação descrita no enunciado e relacioná-la com as três representações gráficas.

**Mário**

Nos 1.º e 2.º períodos, Mário obteve a classificação de 12 valores na disciplina de

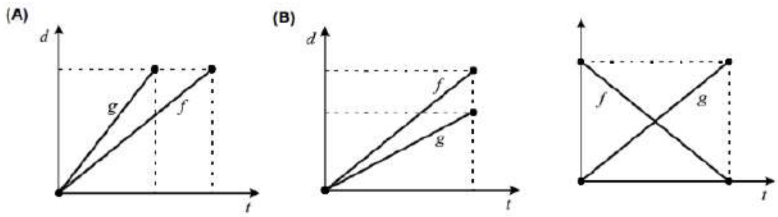
A Fernanda e a Gabriela são duas irmãs que frequentam a mesma escola. Certo dia, a Fernanda está em casa e a Gabriela está na escola. Num certo instante, a Fernanda sai de casa e vai para a escola e, no mesmo instante, a Gabriela sai da escola e vai para casa. Há um único caminho que liga a casa e a escola. Ambas fazem o percurso a pé cada uma delas caminha a uma velocidade constante.

Seja $f$ a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Fernanda, t minutos depois de ter saído de casa (a contagem do tempo tem início quando a Fernanda sai de casa e termina quando ela chega à escola).

Seja $g$ a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Gabriela, $t$ minutos depois de ter saído da escola (a contagem do tempo tem início quando a Gabriela sai da escola e termina quando chega a casa).

Indica em qual das opções seguintes podem estar representadas graficamente as funções $f$ e $g$.

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras duas opções, uma razão pela qual a rejeita.




Adaptado do Teste Intermédio de Matemática A matemática A, aparentando ser um aluno constante, nunca tendo reprovado. Nas aulas de matemática distraía-se facilmente com os colegas. Apesar deste comportamento o aluno participava nas aulas, demonstrando conhecimento e raciocínio matemático. Contudo, Mário referiu a matemática como uma das suas disciplinas preferidas, manifestando ainda gosto pelo trabalho individual.

A escolha deste aluno para o estudo de caso deveu-se às suas caraterísticas, enquanto aluno de matemática, pois evidencia participações pertinentes, raciocínio e facilidade na aquisição das aprendizagens em contexto de sala de aula.

Mário considera a matemática como algo divertido, que lhe estimula e exercita o raciocínio através da resolução de exercícios.

Uma tarefa em que é necessário encontrar uma estratégia para chegar à solução é na opinião do Mário, a melhor forma de aprender matemática, pois consegue recorrer a uma visualização mental da situação descrita no problema, e a partir daí resolvê-la analiticamente.

*Interpretação do enunciado*

Mário sentiu dificuldade na compreensão e interpretação do enunciado da tarefa 1, assim como em estabelecer a relação deste com as figuras apresentadas. Para conseguir compreender a figura 2 da tarefa e avançar na resolução, o aluno necessitou que lhe fosse reformulada a pergunta por outras palavras:

> **Mário:** Isto aqui é a barreira? É os 9.15m?
> **Inv.:** Não, o que nos estão a dizer é que a função nos dá a altura da bola a $x$ metros depois ter sido lançada. Não tem a ver com a barreira. Isto é o movimento da bola, a barreira não aparece aqui. (tarefa 1)

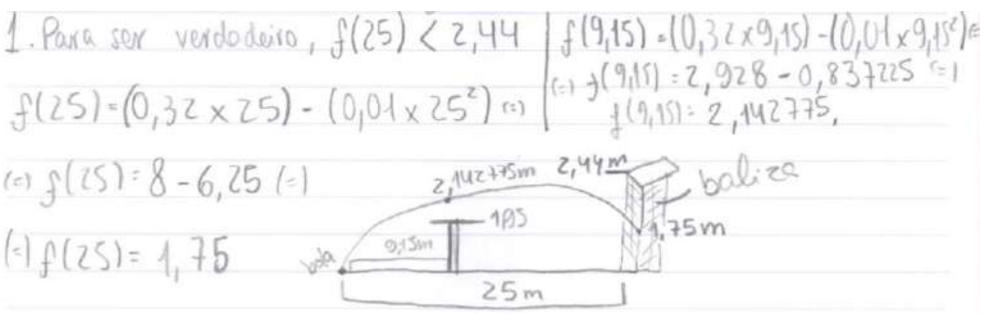
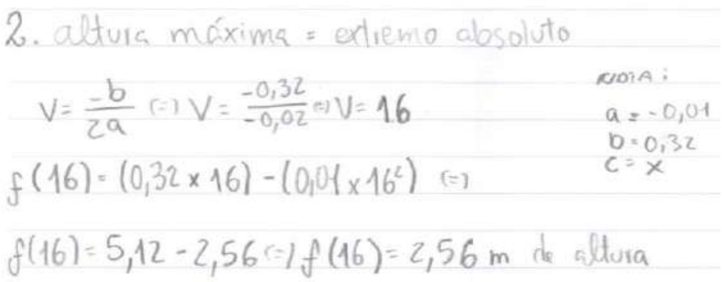



Figura 3 Resolução da questão 1 da tarefa 1 apresentada pelo Mário

É possível constatar através da resolução apresentada (figura 3), que o aluno não consegue integrar na sua resolução todos os aspetos do problema. Mário limita-se a calcular a altura da bola quando esta passa a linha de golo, não considerando a existência da barreira como era referido no enunciado.

*Comunicação adotada*

A linguagem escrita utilizada por Mário tende a reduzir-se à apresentação de cálculos matemáticos, excluindo por vezes até a apresentação da resposta ao problema. Nota-se ainda que o rigor na linguagem matemática utilizada nem sempre é uma preocupação para o aluno. Isto é visível na utilização da fórmula $V = \frac{-b}{2a}$ em vez de $x = \frac{-b}{2a}$ como seria formalmente correto (ver figura 4).



2. altura máxima = extremo absoluto

$V = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow V = \frac{-0,32}{-0,02} \Leftrightarrow V = 16$

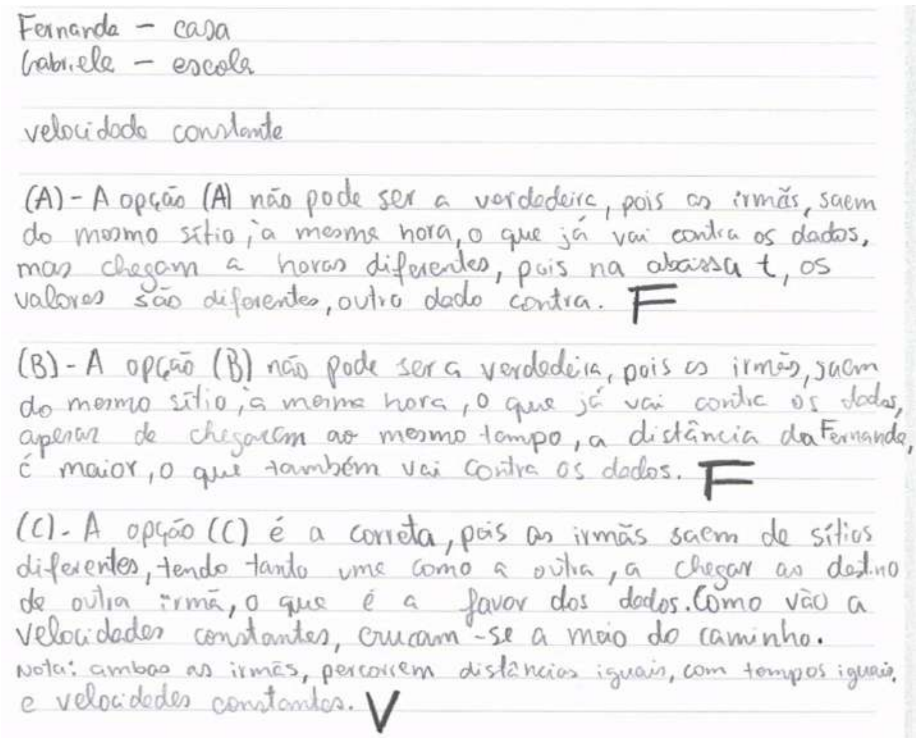
NOTA:
$a = -0,01$
$b = 0,32$
$c = x$

$f(16) = (0,32 \times 16) - (0,01 \times 16^2) \Leftrightarrow$

$f(16) = 5,12 - 2,56 \Leftrightarrow f(16) = 2,56$ m de altura

Figura 4 Resposta dada pelo Mário na pergunta 2 da tarefa 1

Perante a tarefa 2, Mário apresenta a seguinte resolução:



Fernanda – casa
Gabriele – escola

velocidade constante

(A) - A opção (A) não pode ser a verdadeira, pois as irmãs, saem do mesmo sítio, à mesma hora, o que já vai contra os dados, mas chegam a horas diferentes, pois na abcissa t, os valores são diferentes, outro dado contra. F

(B) - A opção (B) não pode ser a verdadeira, pois as irmãs, saem do mesmo sítio, à mesma hora, o que já vai contra os dados, apesar de chegarem ao mesmo tempo, a distância da Fernanda, é maior, o que também vai contra os dados. F

(C) - A opção (C) é a correta, pois as irmãs saem de sítios diferentes, tendo tanto uma como a outra, a chegar ao destino da outra irmã, o que é a favor dos dados. Como vão a velocidades constantes, cruzam-se a meio do caminho.
Nota: ambas as irmãs, percorrem distâncias iguais, com tempos iguais, e velocidades constantes. V

Figura 5 Argumentação escrita, apresentada por Mário na tarefa 2.

As justificações escritas e orais apresentadas pelo aluno, evidenciam que este teve dificuldade em relacionar a situação descrita no enunciado com os gráficos, como ilustra a argumentação oral efetuada pelo aluno ao ser-lhe pedida uma explicação para a sua resolução:

> O [gráfico] A, não pode ser porque logo na origem tem um erro, porque elas não podem ter saído do mesmo sítio à mesma hora, elas saíram de sítios diferentes casa-escola, não saíram casa-casa nem escola-escola. Na abcissa t elas chegam em horas diferentes, como elas vão a velocidades constantes, elas não podem chegar a horas diferentes, têm de chegar à mesma hora. Por isso, a opção A está errada. A opção B, também não pode ser porque encontramos o mesmo erro na origem, terem começado no mesmo sítio. Mas é indiferente, agora na abcissa t o resultado é o mesmo mas a distância é diferente. A distância neste caso que é f é diferente, a distância da Fernanda não pode ser maior que a distância da Gabriela, pois ambas vão do sítio A para o sítio B, ou do sítio B para o sítio A, não pode ser o A+B+1 ou A para B-1 não pode ser. O 1 é um número que inventei. A opção C é a correta, porque elas começam de sítios diferentes, imaginamos que, como isto é a Gabriela, a Gabriela começa da escola, isto é a escola. Esta é a Fernanda, ela começa de casa. Elas vão a velocidade constante e encontram-se, como aqui (gráfico) está-nos a dizer que elas vão à mesma distância, porque daqui aqui é a mesma distância e daqui aqui é o mesmo tempo, por isso elas têm a mesma distância, mesmo tempo, velocidades constantes, tanto que se cruzam a meio do trajeto. (entrevista)

**Mónica**

Mónica no 1.º período teve a classificação de 17 e no 2.º período de 18 valores na disciplina de matemática A e durante o seu percurso escolar nunca reprovou. A aluna nas aulas de matemática, por vezes, é bastante participativa e mostra-se sempre interessada. Esta demonstra ser uma aluna trabalhadora dentro e fora da aula. A aluna refere a matemática como a disciplina onde sente mais dificuldade, mostrando por isso alguma insegurança sobre os seus conhecimentos matemáticos nas participações em aula. A escolha de Mónica para o estudo de caso baseou-se nas caraterísticas desta enquanto aluna de matemática, pois evidencia ser interessada, trabalhadora e com uma boa aquisição das aprendizagens.

*Interpretação do enunciado*

Mónica sentiu dificuldade na compreensão e interpretação do enunciado da tarefa1, assim como em estabelecer a relação deste com as figuras apresentadas, tendo necessitado de ajuda para a interpretação do que era pedido no enunciado:

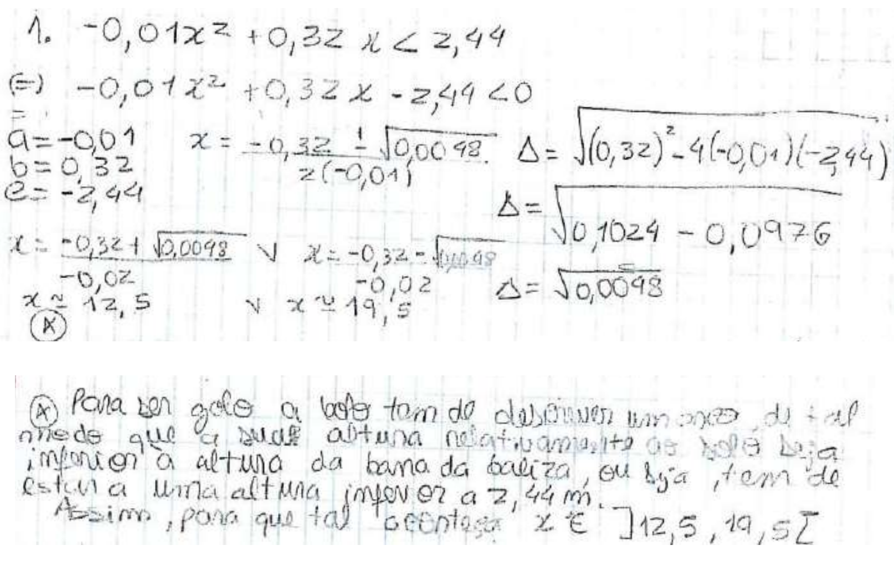
> Tem muito texto, muitos dados e há dados que pois na resolução nem acabamos por utilizar, é super confuso. Eu acho que ainda não percebi bem este exercício, porque acho estúpida esta pergunta: É golo? Justifica a tua resposta. É um bocado parva. Não sei o que é para fazer. Como é que mostro que é golo? Pra mim, é golo se a bola entrar na baliza, ou seja, tem de ser menor que a altura da baliza, não tenho de pensar na barreira, não percebo porque é que tenho de pensar na barreira. Acho este complicado. Aqui qual é a altura máxima, é fácil; é aquela parte do vértice, isso é matemática. (entrevista)

A aluna considera que o elevado número de dados aumenta o grau de dificuldade na interpretação do enunciado:

> Não gosto muito deste tipo de exercícios, porque não tem contas. É mais concreto, e este não, é preciso um certo raciocínio, temos de chegar lá, perceber a lógica e depois já está, mas é parecido com os que fizemos nos nossos testes. (tarefa 2)

A aluna afirma não gostar da tarefa 2, pois não é necessário efetuar cálculos para a sua resolução, apenas sendo preciso relacionar e interpretar os dados do problema com as representações gráficas.

Devido à interpretação do enunciado que a aluna faz, apresenta a seguinte resolução:


1. $-0,01x^2 + 0,32x < 2,44$

$\Leftrightarrow -0,01x^2 + 0,32x - 2,44 < 0$

$a = -0,01$ $\quad x = \frac{-0,32 \pm \sqrt{0,0098}}{2(-0,01)}$ $\quad \Delta = \sqrt{(0,32)^2 - 4(-0,01)(-2,44)}$

$b = 0,32$

$c = -2,44$ $\quad \Delta = \sqrt{0,1024 - 0,0976}$

$x = \frac{-0,32 + \sqrt{0,0098}}{-0,02} \vee x = \frac{-0,32 - \sqrt{0,0098}}{-0,02}$ $\quad \Delta = \sqrt{0,0098}$

$x \simeq 12,5 \vee x \simeq 19,5$

(x)

(x) Para ser golo a bola tem de descrever uma [illegible], de tal modo que a sua altura relativamente da bola seja inferior à altura da barra da baliza, ou seja, tem de estar a uma altura inferior a 2,44 m. Assim, para que tal aconteça $x \in \,]12,5 , 19,5[$

Figura 6 Resolução apresentada pela Mónica na tarefa 1

Na resposta à questão 1 da tarefa 1 (Figura 6) a aluna não responde ao solicitado.

Apresenta como resposta um intervalo de valores para x, correspondendo este à distância em metros da projeção da bola ao local onde é rematada, quando era pretendido que fosse apresentado um valor de y, uma vez que o objetivo é comparar a altura atingida pela bola na linha de golo com a altura da baliza.

*Comunicação adotada*

Mónica considera que a comunicação escrita da matemática para a explicação do seu raciocínio é um processo difícil, pois sente que nunca consegue uma resposta completamente correta quando recorre a este tipo de comunicação. Por isso afirma que por norma utiliza o cálculo para a explicação de um raciocínio, considerando-o como suficiente. Refere ainda ser difícil a utilização da linguagem matemática no domínio escrito:

> Não, faço os cálculos e pronto já expliquei. Só quando às vezes aqueles que a stora fez os exercícios das hipóteses daquele texto em que temos de explicar porque é que é aquela hipótese e porque é que não é aquela, até posso explicar bem, mas tenho a certeza que nunca vou ter a cotação máxima, há sempre qualquer coisa que vai falhar, por escrito, a matemática pra mim não é muito bom, complico-me sempre mais. Mas por cálculos não, acho fácil. Mas a escrita na matemática acho difícil. (entrevista)

Na tarefa 2, através da comunicação escrita apresentada pela aluna, constata-se que esta não consegue relacionar a informação do enunciado com os gráficos:

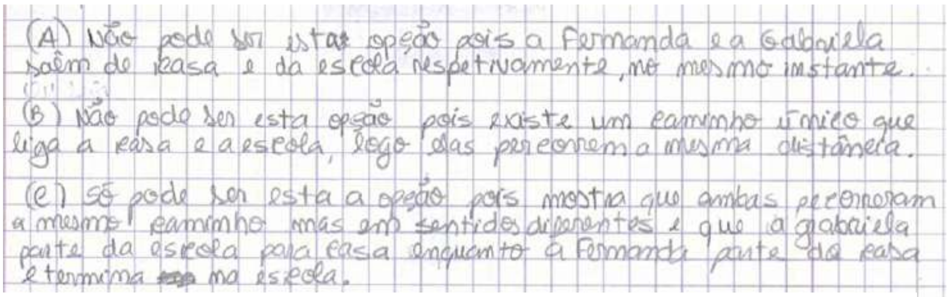

(A) Não pode ser ~~esta~~ opção pois a Fernanda e a Gabriela saêm de casa e da escola respetivamente, no mesmo instante.
(B) Não pode ser esta opção pois existe um caminho único que liga a casa e a escola, logo elas percorrem a mesma distância.
(C) Só pode ser esta a opção pois mostra que ambas percorreram o mesmo caminho mas em sentidos diferentes e que a Gabriela parte da escola para casa enquanto a Fernanda parte da casa e termina ~~...~~ na escola.

Figura 7 Argumentação apresentada pela Mónica na tarefa 2

É possível constatar através dos registos efetuados pela aluna nos gráficos, que a mesma tenta interpretar a situação que é descrita no enunciado com as representações gráficas. No entanto, é importante referir que Mónica considera o mesmo ponto do gráfico como instante inicial e final da situação problemática apresentada.

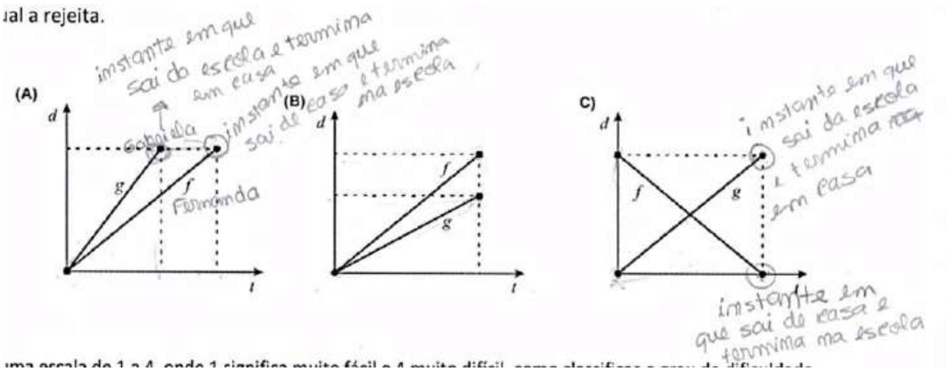



Figura 8  Anotações feitas pela Mónica nos gráficos da tarefa 2

## Conclusão

A reconhecida influência da comunicação matemática sobre a aprendizagem dos alunos conduziu à realização deste estudo onde se procurou compreender o impacto sobre a resolução de problemas das dificuldades de comunicação evidenciadas pelos alunos.

Os elementos analisados sugerem que todos os alunos envolvidos no estudo evidenciam dificuldades na interpretação dos enunciados dos problemas. A compreensão por parte dos alunos da situação envolvida requereu uma nova leitura do problema, apoiada em novos termos potencialmente mais esclarecedores para os alunos. Assim, tal como identificado por Ponte et al. (2007), verifica-se a importância de estabelecer uma linguagem matemática entre professor e aluno, para que este se familiarize com a comunicação matemática.

Mário referiu que o facto de não compreender as figuras, lhe dificultou a resolução dos problemas e Mónica apresentou a extensão do enunciado e a quantidade de dados que aparecem no mesmo, como causa do aumento da dificuldade sentida. Surge assim realçada a importância da comunicação matemática. Os resultados alcançados sugerem ainda a importância de os alunos serem confrontados nas aulas com tarefas deste tipo, permitindo-lhes assim familiarizarem-se com a interpretação de figuras diversas e com situações em que os dados disponíveis são em quantidade superior à necessária para a resolução do problema (algo que é afinal comum nos problemas reais que os alunos certamente irão encontrar ao longo da vida).

A comunicação escrita a que os alunos recorrem para apresentar a sua resolução dos problemas mostrou caracterizar-se por uma preferência pela apresentação de cálculos matemáticos, sem que costumasse ser incluída alguma explicação de outro tipo para esses mesmos cálculos e, por vezes, sem que fosse sequer apresentada uma resposta ao problema.

Relativamente à comunicação oral da resolução do problema, é possível identificar alguma dificuldade em organizar as ideias de forma lógica e coerente, o que sugere uma eventual experiência reduzida dos alunos com este tipo de tarefas.

As conclusões alcançadas neste estudo indiciam assim que a comunicação matemática que vai para além da elaboração de cálculos matemáticos é potencialmente mais problemática, muito provavelmente fruto da experiência matemática em sala de aula dos alunos, mas eventualmente também do nível de exigência colocado por esta.

Seria assim importante procurar compreender em estudos futuros como o professor pode contribuir para melhorar a comunicação matemática no âmbito da resolução de problemas e, em particular, a capacidade dos alunos para interpretar o enunciado dos problemas e para apresentar de forma sustentada a sua resolução.

## Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7-10 e 35.

Boavida, A., et al. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Cândido, P. (2001). Comunicação e Matemática. In K. Smole & M. Diniz (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da Matemática. *Educação & Comunicação*, 4, 97-100.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento. Lisboa: IE-UL.

Martinho, M., & Ponte, J. (2005). Comunicação na sala de aula de matemática: práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Lisboa: APM.

Mendes, I. (2009). Matemática e investigação em sala de aula – Tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física.

Menezes, L.(2000). *Matemática, linguagem e comunicação*. Millenium, 20.

Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2.º ciclo do ensino básico. In *Atas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 271-291). Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2001). *Matemática: programa de Matemática A - 10º ano*. Lisboa: Editorial do ME.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIC.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74.

Semana, S. & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 41-58). Lisboa: SEM-SPCE.

# O trabalho com resolução de problemas de professores que realizaram o curso do Pró-Letramento em Matemática e suas atitudes em relação a essa disciplina

*Giovana Pereira Sander*[1], *Nelson Antonio Pirola*[2]
[1]Universidade Estadual Pauliasta "Júlio de Mesquita Filho" – *Campus* de Bauru - Brasil, giovanapsander@gmail.com
[2]Universidade Estadual Pauliasta "Júlio de Mesquita Filho" – *Campus* de Bauru - Brasil, npirola@uol.com.br

**Resumo**. *O objetivo desta pesquisa foi investigar possíveis conexões entre o ensino da Matemática por meio da resolução de problemas de professores que concluíram o curso de formação continuada do Pró-Letramento e as atitudes em relação à Matemática apresentadas por eles. Os instrumentos utilizados foram uma escala de atitudes em relação à Matemática e acompanhamento de aulas dessa disciplina. Responderam à escala 442 professores que realizaram o curso do Pró-Letramento em Matemática e foram selecionados 4 professores para o acompanhamento, dentre esses, 2 com as atitudes mais positivas e negativas e 2 com as atitudes menos negativas e positivas. Os dados da escala mostraram que a distribuição de atitudes positivas e negativas desses professores foi quase equilibrada. Durante o acompanhamento, observamos que professores com atitudes positivas trabalham com resolução de problemas de forma variada, problematizando mais as situações, enquanto que professores com atitudes negativas trabalharam de forma mecânica.*

**Abstract**. *The objective of this research was to investigate possible connections between the teaching of mathematics through problem solving teachers who completed the course of continuing education of the Pro-Literacy and attitudes towards mathematics presented by them. The instruments used were a scale of attitudes towards mathematics and monitoring classes of this discipline. Responded to the scale 442 teachers who took the course of the Pro-Literacy Mathematics and 4 teachers were selected for monitoring, among these, 2 with extremely positive attitudes and negative and 2 with the least negative and positive attitudes. The scale of the data showed that the distribution of positive and negative attitudes of these teachers were almost balanced. During follow-up, we found that teachers with positive attitudes work with resolution variously problems, more questioning situations, while teachers with negative attitudes worked mechanically.*

[1] Bolsista da CAPES – Proc. nº 99999.010434/2014-03.

**Palavras-chave**: *Resolução de problemas; Atitudes em relação à Matemática; Formação continuada; Pró-Letramento.*

## Introdução

No âmbito da Educação Matemática há uma crença de que professores que atuam nos anos inicias do Ensino Fundamental não gostam de Matemática, apresentando atitudes negativas em relação a essa disciplina. Essas atitudes, além de interferirem nos trabalhos desses professores em sala de aula, como em atividades de resolução de problemas matemáticos, por exemplo, podem interferir também em suas escolhas referentes à sua formação profissional. Se, de acordo com Brito (1996), as atitudes em relação à Matemática influenciam na escolha profissional, um professor que atua nos anos iniciais do Ensino Fundamental sofrerá essas influências ao escolher cursos de formação continuada.

Partindo disso, o presente artigo apresenta as atitudes em relação à Matemática e o trabalho com resolução de problemas com o seguinte objetivo: Investigar possíveis conexões entre o ensino da Matemática por meio da resolução de problemas de professores que concluíram o curso de formação continuada do Pró-Letramento e as atitudes em relação à Matemática apresentadas por eles.

O Pró-Letramento era um programa de formação continuada que buscava a melhoria da qualidade de aprendizagem na leitura/escrita da Língua Portuguesa e da Matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, o programa oferecia formação nas áreas de Alfabetização e Linguagem e de Matemática.

O curso do Pró-Letramento em Matemática abordava temas trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental que estavam distribuídos em 8 fascículos e eram trabalhados, preferencialmente, na sequência a seguir: 1- Números Naturais; 2- Operações com Números Naturais; 3- Espaço e Forma; 4- Frações; 5- Grandezas e Medidas; 6- Tratamento da Informação; 7- Resolver Problemas: o lado lúdico do ensino da Matemática; e 8- Avaliação da Aprendizagem em Matemática nos anos iniciais. Desta forma, eram estudados primeiramente os conteúdos matemáticos e posteriormente, fascículos referentes à metodologia de ensino e avaliação.

O fascículo 7, Resolver Problemas: o lado lúdico do ensino da Matemática foi desenvolvido por Moura et al. (2007) e tinha o objetivo de aliar a resolução de problemas ao jogo no ensino de Matemática de forma com que a resolução de problemas fosse o ponto central do material e o jogo fosse uma situação problema a ser apresentada de forma lúdica.

Neste fascículo, as autoras discutem o que é resolução de problema e apresentam duas perspectivas teóricas encontradas em sala de aula, a saber:

> Acreditamos que podemos considerar que um sujeito está diante de um problema quando toma consciência do mesmo e, movido pela necessidade ou desejo, procura solucioná-lo, tendo para isso que dispor de uma atividade mental intensa no processo de planejamento, execução e avaliação de suas ações. O sujeito resolve um problema quando se depara com uma situação nova que o motive, que o envolva em um processo criativo e reflexivo (Moura et al., 2007, p. 9).

Quanto às perspectivas teóricas, Moura et al. (2007) salientam que os problemas são trabalhados como meros exercícios, após a explicação de um novo conteúdo, ou são trabalhados como o início de um conteúdo, fazendo com que o ensino aconteça por meio de resolução de problemas. Quando trabalhamos com atividades de resolução de problemas após a explicação, os alunos já possuem conhecimento de qual conteúdo, procedimento, ou algoritmo deverão utilizar para resolver a situação. Desta forma, a situação acaba por se caracterizar como um exercício, assumindo um papel de exercitar algoritmos e técnicas de solução, sem apresentar significado nenhum para os alunos. No entanto, trabalhar os conteúdos matemáticos partindo de situações problema permite que o aluno mobilize os conhecimentos que já possuem, desencadeiem a construção de outros conhecimentos e ainda atribuam significado às situações matemáticas que estão vivenciando. Assim, a resolução de problemas se torna a "mola propulsora da Matemática".

As autoras também abordam no fascículo diferentes tipos de problema, processos de resolução apresentados por alunos, avaliação da resolução de problemas, como trabalhar com resolução de problemas por meio de jogos, entre outros aspectos.

Neste sentido, esse trabalho busca responder a seguinte questão: Quais as contribuições do Programa Pró-Letramento em Matemática, em termos de reflexões sobre a prática pedagógica e atitudes em relação à Matemática, para o processo de ensino e aprendizagem de resolução de problemas?

**As atitudes em relação à Matemática**

O termo "atitude" é usualmente utilizado quando nos referimos a algum tipo de comportamento, como por exemplo, em uma situação em que alguém age de forma errada, dizemos que ele teve um comportamento ruim. De acordo com Brito (1996), o uso desse termo como sinônimo de comportamento ocorre devido um enfoque nos aspectos observáveis que é transmitido por meio da ação. Ambos não são sinônimos e não podem ser confundidos. O comportamento, ou seja, a ação observada, tem sua origem em motivações intrínsecas e extrínsecas do sujeito, sendo a atitude um dos elementos dessa ação.

Brito (1996, p.11) apresenta uma definição de atitudes que permeia diversos aspectos essenciais para compreender suas influências no processo de ensino-aprendizagem da Matemática:

> Atitude poderia ser definida como uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do individuo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor.

Os componentes salientados por Brito (1996), de domínio cognitivo, afetivo e motor, referem-se, respectivamente, ao conhecimento sobre o objeto, ao sentimento em relação ao objeto, e o que diz respeito à predisposição para agir de certa forma com relação ao objeto.

De acordo com Sarábia (1992 apud Moron, 1998), esses componentes interferem na valorização subjetiva que os indivíduos fazem do que é aprendido na escola de modo que o componente cognitivo interfere no processo de aprendizagem, na aquisição de um conhecimento; o componente afetivo intervém no êxito ou fracasso escolar; e o componente motor fará com que o comportamento se manifeste de acordo com a atitude.

Brito (1996) e Klausmeier (1977) acentuam que as atitudes não são diretamente observáveis, porém, podemos inferi-las através do comportamento. No ambiente escolar, é possível observar que a Matemática é tida como uma das matérias mais temidas pelos alunos sendo que esse sentimento é resultado das atitudes que os alunos têm em relação à Matemática. Klausmeier (1977, p. 437) aponta alguns fatores que estão diretamente relacionados com a escola e que influenciam nas atitudes em relação a uma disciplina, tais como gostar da matéria; gostar do professor(a); trabalhar com entusiasmo e vigor; trabalhar bem com os outros, entre outros.

Para o professor desenvolver atitudes favoráveis às disciplinas, como a Matemática, Klausmeier (1977, p. 436) elenca algumas ações, tais como: colocar as atitudes a serem ensinadas sob a forma de objetivos instrucionais; fornecer modelos exemplares; possibilitar experiências emocionais e agradáveis; ampliar experiências informativas; usar técnicas de grupo para facilitar o envolvimento, etc.

No entanto, as atitudes não são inatas. Elas variam ao longo da vida de acordo com as experiências vividas pelo sujeito. Principalmente, as atitudes podem ser ensinadas. O ensino de atitudes deveria ser um dos objetivos presentes nos currículos escolares em qualquer nível de ensino (Brito, 1996). Gonçalez (2000) salienta que a escola pode por em prática objetivos atitudinais com a fim de favorecer o desenvolvimento de atitudes favoráveis à Matemática, quando essas forem negativas.

Contudo, se o professor tende a ter atitudes negativas em relação à Matemática, ele poderá ensinar as mesmas atitudes a seus alunos. Se as atitudes podem ser ensinadas, como salienta Klausmeier (1977), seu ensino deve ser pensado desde o processo da formação de professores.

De acordo com Gonçalez (1995, p.13),

> Os professores com atitudes positivas dão oportunidade aos alunos de persistirem em seus próprios esforços, sendo, portanto, fundamental que as escolas desenvolvam programas que ajudem não apenas aos alunos, no desenvolvimento de atitudes positivas com relação à Matemática, mas também aos professores.

Na medida em que os estudantes avançam nos cursos de formação de professores, vão adquirindo maior compreensão sobre o que irão ensinar. Tendo em vista que as atitudes são compostas pelos componentes cognitivo, afetivo e conativo, e a compreensão dos conteúdos está relacionada ao componente cognitivo, isso fará com que as atitudes dos futuros professores se tornem mais positivas.

**Resolução de problemas**

A resolução de problemas é um tema muito investigado por autores nacionais e internacionais como Schoenfield (1992), Musser e Shaughnessy (1997), Miguel (2010) e Proença (2012) e parece haver um concenso sobre sua importância para o ensino da Matemática. Em sala de aula, os objetivos ao propor esse tipo de atividade podem ser decorrentes de diversas perspectivas de como ela é incorporada.

Allevato (2005) aponta alguns autores que salientam esses diferentes objetivos sobre o trabalho com resolução de problemas, a saber: Polya (1945) apresenta orientações sobre como resolver um problema como se para isso fosse necessário apenas um "roteiro"; já Schroeder e Lester (1989), a resolução de problemas deve ser o meio para compreender a Matemática; para Dante (2000), um dos objetivos da resolução de problemas é munir o aluno de estratégias para resolver as situações problematizadas. Partindo disso, Allevato (2005) salienta que essas abordagens irão determinar qual será a atividade de ensino de Matemática do professor, ou seja, se ele ensinará sobre a resolução de problemas, para resolver problemas ou se irá ensinar através da resolução de problemas.

Outras perpectivas de estudo sobre esse tema também discutem suas definições e como caracterizar as situações. De acordo com Echeverría (1998, p. 48)

> Para que possamos falar da existência de um problema, a pessoa que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta.

Sternberg (2000) salienta que nos empenhamos para resolver um problema quando queremos ou precisamos superar um obstáculo para responder a uma pergunta ou alcançar um objetivo. Essa situação apenas será um problema na medida em que não seja possível recuperar na memória uma resposta de forma imediata. Caso haja uma resposta imediata, a situação não será um problema.

No entanto, em aulas de Matemática, é possível observar que o trabalho com resolução de problemas acontece de forma em que o aluno aplica conceitos e algoritmos ensinados pela professora. Ou seja, diante de uma situação dada, o aluno já sabe qual procedimento deve utilizar.

Por conta disso, Brito (2006, p. 17) defende que um problema deve ser:

> Uma situação inicial quase sempre desconhecida que é o ponto de partida. É o contato do sujeito com essa situação inicial desconhecida que permite a ele disponibilizar, na estrutura cognitiva, os elementos necessários à solução. Assim, através de uma série de operações realizadas a partir da situação inicial, o solucionador chega a um estado final definido (ou desejado).

Portanto, quando a resolução de problemas não é a atividade inicial do ensino de um conteúdo matemático, os alunos encontram o procedimento, ou até mesmo a solução, de forma pronta. Isso faz com que a situação se caracterize como um exercício devido ao treino ou aplicação dos algoritmos de forma mecanizada.

Para Echeverría e Pozo (1998) e Sternberg (2000), a diferença fundamental entre problema e exercício é que, neste último, os mecanismos que levam à solução se encontram disponíveis em nossa mente imadiatamente. Echeverría (1998) defende que a resolução de problemas e os exercícios possuem consequências e finalidades diferentes no ensino da Matemática, a saber:

> Os exercícios servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para a posterior solução de problemas, mas dificilmente podem trazer alguma ajuda para que essas técnicas sejam usadas em contextos diferentes daqueles onde foram aprendidas ou exercitadas, ou dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos (Echeverría, 1998, p. 48).

Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1997), bem como pesquisadores, tais como Brito (2006) e Moura et al. (2007) salientam que o ensino de um conteúdo não deve começar por sua definição, mas sim por uma situação problema.

## Metodologia

O presente estudo utilizou uma abordagem metodológica de natureza qualitativa se apoiando também em alguns dados quantitativos (Bogdan e Biklen, 1994) e esteve dividida em dois momentos distintos.

Num primeiro momento, a pesquisa contou com a participação de 442 professores cursistas de 34 municípios do estado de São Paulo, Brasil, que realizaram o curso do Pró-Letramento em Matemática que responderam a uma Escala de Atitudes em relação à Matemática

A Escala de atitudes (desenvolvida por Aiken, 1961, revisada por Aiken e Dreger, 1963 e traduzida, testada e validada por Brito, 1996) é do tipo Likert e pretendia analisar as atitudes em relação à Matemática dos professores que realizaram o curso do Pró-Letramento em Matemática. Ela é composta por 21 afirmações que expressam sentimentos pela Matemática sendo que 10 afirmações expressam sentimentos positivos, 10 afirmações apresentam sentimentos negativos e uma afirmação busca verificar a auto percepção dos sujeitos em relação ao seu próprio desempenho em Matemática. Para expressar seus sentimentos, era solicitado aos professores que assinalassem uma opção de resposta: "Discordo totalmente", "Discordo", "Concordo" ou "Concordo totalmente", a que expressasse melhor sua atitude em relação à afirmação. A partir do que fosse assinalado, era atribuída aos professores uma pontuação para cada afirmação assinalada. Esses pontos podiam alterar de 1 a 4 ou de 4 a 1, dependendo se a afirmação expressasse uma situação positiva ou negativa, totalizando pontos que variavam de 21 a 84 pontos para cada professor. Mediante esses pontos podia-se perceber a intensidade e a direção das atitudes dos professores.

A partir disso, foi calculada uma média e definido que os professores que tinham tido uma pontuação acima da média, eram aqueles que tendiam a ter atitudes positivas em relação à Matemática, enquanto que quem tivesse obtido pontuação abaixo da média, demonstravam atitudes negativas.

Já para o segundo momento da pesquisaas, participaram 4 desses professores que foram selecionadas a partir de suas pontuações na escala de atitudes para que tivessem três aulas de matemática, acompanhadas e gravadas pelo pesquisador.

Um dos critérios de seleção desses professores foram as atitudes em relação à Matemática, sendo que 2 professores apresentaram as atitudes mais positivas e negativas (obtendo a maior e a menor pontuação na escala) e 2 professores apresentaram as atitudes menos positivas e negativas (com pontuações próximas à média da turma). Outro critério foi que o municipio no qual esses professores atuavam se localizasse o mais próximo possível do município do pesquisador. Por fim, esses professores tinham que aceitar ter suas aulas gravadas para melhor análise.

O acompanhamento e as gravações ocorreram num período relativo á dois meses ao final de um semestre letivo. Ainda, esse instrumento permitiu traçar um comparativo entre o que foi indicado pela escala de atitudes e o trabalho com resolução de problemas após cursar o Programa do Pró-Letramento.

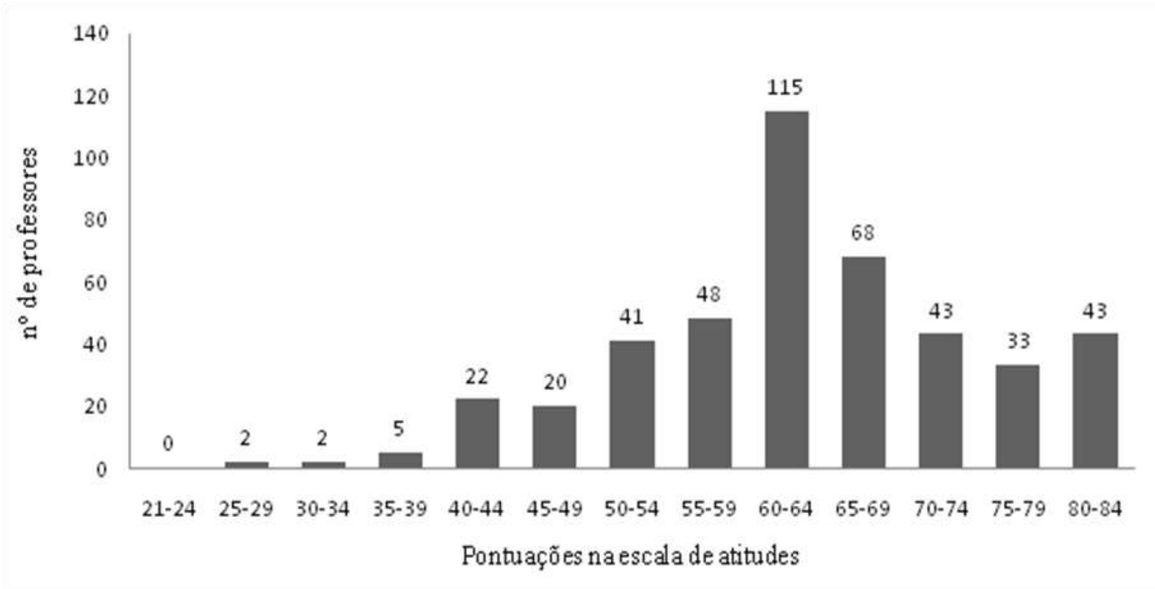
**Análise dos dados**

Na análise dos dados, serão apresentados os resultados provenientes da escala de atitudes em relação à Matemática e um quadro com uma síntese dos trabalhos com atividades de resolução de problemas das professoras cujas aulas foram acompanhadas e gravadas.

Após pontuar as escalas de atitudes dos 442 professores que realizaram o curso de formação continuada do Pró-Letramento em Matemática, foi calculada uma média de 63,15 pontos. Por meio dela, foi definido que 248 professores (56,11%) professores tendem a ter atitudes negativas enquanto que 194 professores (43,89%) tendem a ter atitudes positivas em relação à Matemática.

O gráfico 1 representa a distribuição das pontuações dos participantes na escala de atitudes.

Gráfico 1. Distribuição da frequência dos participantes de acordo com a pontuação na escala de atitudes




Pelo gráfico, podemos observar que a frequência das menores pontuações na escala de atitudes foi baixa. Tendo em vista que as pontuações na escala podem variar de 21 a 84 pontos, a frequência dos participantes começou a aumentar a partir do intervalo de 40-

44, ficando apenas 9 professores (2,04%) com as menores pontuações. Isso indica que, mesmo havendo mais professores que tendem a atitudes negativas em relação à Matemática, as atitudes desses professores não estão apresentadas no extremo da escala (21-24 pontos). Já no outro extremo da escala, de 80-84 pontos, há 43 professores (9,73%) que apresentaram atitudes altamente positivas.

Após a análise da escala de atitudes, foram selecionadas 4 professoras a partir de suas pontuações sendo que o principal critério foi as atitudes em relação à Matemática. Desta forma, 2 professoras apresentaram as atitudes mais negativas e positivas, obtendo 36 e 84 pontos respectivamente; e 2 professoras apresentaram as atitudes menos negativas e positivas, com 63 e 64 pontos. Esses professores tivesseram suas aulas acompanhadas e gravadas. Para cada professor, foram acompanhadas três aulas de Matemática. Nesses momentos, foram observadas suas aulas de Matemática como um todo, porém, apenas os momentos em que foram trabalhadas as atividades com resolução de problemas que foram analisadas.

O quadro a seguir apresenta uma síntese dos trabalhos com atividades de resolução de problemas das professoras selecionadas abordando as atitudes de cada professora, os tipos de situações trabalhadas por elas, os procedimentos e alguns aspectos que se destacaram em suas aulas.

Quadro 1. Diferentes aspectos no trabalho com resolução de problemas apresentados por professores com diferentes atitudes em relação à Matemática

| Profa. | Atit. | Tipos de situações | Procedimentos | Outros aspectos |
|---|---|---|---|---|
| **Ana** | 36 | Jogo | Explica o jogo;<br>Acompanha uma rodada em cada grupo;<br>Os alunos jogam sozinhos. | Não trabalhou nenhuma situação-problema. |
| **Carol** | 63 | Jogo<br>Problema-padrão | Le e explica o problema;<br>Indica um procedimento;<br>Deixa os alunos resolverem;<br>Resolve com os alunos. | Utiliza materiais concretos, mas não os disponibiliza para os alunos os manipularem. |
| **Bia** | 64 | Problema-padrão | Pede para um aluno ler o problema;<br>Explica a situação;<br>Indica um procedimento;<br>Resolve com os alunos. | Seguiu as atividades presentes na apostila;<br>Modifica uma das situações presente na apostila. |
| **Maria** | 84 | Problema do cotidiano | Pede para um aluno ler o problema; | Situações baseadas na realidade de seus alunos; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Problema-padrão<br>Problema de lógica | Pergunta para os alunos como resolver a situação;<br>Pede para os alunos ditarem os procedimentos do algoritmo. | As atividades de resolução de problemas apresentaram várias situações;<br>Buscou atividade que permitisse que os alunos elaborassem o enunciado;<br>Buscou que os alunos investigassem diferentes soluções para o problema. |

Observando o quadro 1 verifica-se as diferenças quanto ao trabalho com atividades de resolução de problemas de professoras que apresentaram atitudes em relação à Matemática distintas.

A professora Ana, a que apresentou atitudes mais negativas em relação à Matemática (36 pontos), não trabalhou com nenhuma situação problema em si, apenas com o jogo “Nunca 10”. De acordo com Moura et al. (2007) esse tipo de atividade pode se caracterizar como resolução de problemas, no entanto, esse jogo não apresentou características que o defina como esse tipo de situação. Isso porque, o jogo não permitia aos alunos desenvolver estratégias para vencer. Dependiam apenas da sorte diante das regras da atividade.

A professora Carol, com as atitudes menos negativas (63 pontos), diversificou suas atividades de resolução de problemas em problema-padrão e jogo. Ao contrário da professora Ana, a professora Carol propôs um jogo (ditado com composição de números) que desafiou os alunos a desenvolverem formas de representar os números ditados por ela. Quanto aos problemas-padrão, por propiciar situações em que os alunos apenas treinavam os algoritmos, obteve características de exercícios.

Já a professora Bia, a que apresentou a atitudes menos positiva em relação à Matemática (64 pontos), trabalhou apenas com situações problema do tipo padrão, situações essas que estavam presentes numa sequência de atividades da apostila utilizada por ela. Tendo em vista que os alunos também já sabiam qual procedimento utilizar, essas atividades se caracterizaram como exercícios.

No entanto, ela modificou um dos enredos de uma das situações apresentadas, gerando desafio nos alunos para resolver a situação. Isso resultou em uma resolução de problemas, pois os alunos não tinham a resposta ou o algoritmo de antemão e, aparentemente, estavam desafiados para resolvê-la.

Por fim, a professora Maria, com atitudes em relação à Matemática mais positivas (84 pontos), diversificou seu trabalho com resolução de problemas levando em conta os tipos de situações apresentadas aos alunos, bem como a forma de trabalhá-los, assim como é abordado no curso do Pró-Letramento. Ela apresentou aos alunos problemas do cotidiano, problema-padrão e problema de lógica. Os problemas do cotidiano foram discutidos abordando um tema diretamente relacionado com eles. Após a discussão desse tema, os alunos formulavam o enunciado de um problema para eles mesmos resolverem. A professora conduzia a discussão de forma que eles abordassem o conteúdo que ela tinha planejado trabalhar previamente, fazendo com que isso não acontecesse de forma aleatória. Já os problemas-padrão eram apresentados em uma sequência, fazendo com que as situações se tornassem uma história sobre um mesmo personagem. O trabalho realizado por Maria com problema-padrão, mesmo esse tipo de problema se caracterizar por exercício (Moura et al., 2007), houve uma sequência nos enunciados, como se cada situação fizesse parte da história de um mesmo personagem. Diante desses problemas, a professora incentivava os alunos a buscarem diferentes estratégias de resolução dos problemas. Por fim, o trabalho com problema de lógica, mesmo não abordando um conteúdo de matemática, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de seus alunos.

Quanto aos procedimentos de trabalho com atividades de resolução de problemas utilizados pelas professoras junto aos alunos foram semelhantes. Os enunciados eram lidos, explicados, os alunos resolviam sozinhos e depois resolviam junto com a professora. No entanto, as professoras Maria e Bia solicitavam que seus alunos lessem o problema, ao contrário da professora Carol que lia para os alunos. Após a leitura, junto com a explicação, a discussão gerava em torno do algoritmo para resolução, e não da compreensão da situação em si. A professora Maria questionava os alunos como resolver a situação, recebendo como respostas os algoritmos. A professora Bia indicava o algoritmo que deveria ser feito para os alunos resolverem. Já a professora Carol, solicitava que seus alunos desenhassem o problema para descobrirem qual algoritmo utilizar, indicando também um procedimento. Desta forma, os alunos não tinham a oportunidade de refletirem sozinhos sobre a situação e de planejarem estratégias para resolvê-la.

No material do Pró-Letramento, Moura et al. (2007) salientam no fascículo “Resolver Problemas: o lado lúdico do ensino da Matemática” que a resolução de problemas deve ser a “mola propulsora” do ensino da Matemática, ou seja, o ensino de um conteúdo deve partir de uma situação-problema. Durante o acompanhamento das professoras, houve o início de novos conteúdos com os alunos, porém, as atividades de resolução de problemas foram direcionadas, de forma geral, para o treino de algoritmos. Apesar de diferenças nas metodologias utilizadas por elas, nenhuma professora trabalhou com a resolução de problemas da forma como o programa indica no período do acompanhamento.

## Considerações finais

Para investigar possíveis conexões entre as atitudes em relação à Matemática e o ensino dessa disciplina por meio da resolução de problemas de professores que concluíram o curso de formação continuada do Pró-Letramento, acompanhamos três aulas de Matemática de 4 professoras que cursaram o Pró-Letramento nessa área de conhecimento.

A escala de atitudes mostrou que, mesmo um pouco mais da metade dos professores tenderem a atitudes negativas em relação à Matemática, essas atitudes não são extremamente negativas, pois as maiores frequências desses pontos ficaram próximos à média da turma. Ainda, houve maior distribuição de professores nas pontuações que indicam atitudes mais positivas, inclusive quanto às atitudes extremamente positivas.

Pensando então nas atitudes negativas em relação à Matemática, para que elas possam se modificar, Moron (1998) salienta sobre a necessidade da elaboração de um programa de mudanças educacionais que foquem também quais atitudes podem desenvolver. Essas mudanças ocorrem de forma gradual, em uma atmosfera de liberdade e aceitação, com motivação e sem pressões que impliquem em perda para as pessoas.

Já o acompanhamento das professoras que apresentaram atitudes em relação à Matemática distintas, foi possível observar que elas trabalharam de diferentes formas com atividades de resolução de problemas. Isso pode ser em decorrência também de diversos fatores, como, por exemplo, a formação inicial, as demais experiências que elas tiveram com a Matemática no decorrer de suas vidas, bem como as próprias atitudes em relação à disciplina.

Moura et al. (2007) discutem num dos fascículos do Pró-Letramento a resolução de problemas, diferenciando-a também de exercícios. Essas discussões estão de acordo com Echeverría (1998), Echeverría e Pozo (1998), Brito (2006), Sternberg (2000), e o próprio Parâmetro Curricular Nacional de Matemática (Brasil, 1997) que também os diferenciam. Contudo, essas abordagens não ficaram muito presentes nas práticas das professoras cujas aulas foram acompanhadas, apenas outros aspectos envolvidos nesse tipo de atividade, como por exempo, o trabalho com jogos.

Mesmo todas elas terem realizado o curso do Pró-Letramento em Matemática, tendo contato com a mesma teoria sobre resolução de problemas, a professora com atitudes mais positivas em relação à Matemática diversificava mais seu trabalho com esse tipo de atividade, colocando mais em prática os assuntos abordados no fascículo, enquanto que a professora com atitudes mais negativas não trabalhou com resolução de problemas. Já a professora com atitudes menos negativas trabalhou com situações problema de forma a treinar certos algoritmos e a professora com atitudes menos positivas problematizou uma situação, até então, considerada exercício.

Trabalhar de forma diversificada com resolução de problemas contribui com a compreensão dos conteúdos matemáticos que os alunos estão estudando. Tal compreensão auxilia no desenvolvimento de confiança nos alunos ao se deparar com situações como essas. De acordo com Gonçalez (2000), a confiança é um dos fatores que influencia no desenvolvimento de atitudes em relação à Matemática, bem como no desempenho do aluno. Quando essas tarefas são organizadas e executadas de forma mecânica pela professora, o aluno desacreditará em sua própria capacidade de realizar tarefas como de resolução de problemas, desenvolvendo então atitudes negativas em relação à Matemática.

Assim, é possível observar e compreender que as atitudes em relação à Matemática podem influenciar no ensino dessa disciplina por meio da resolução de problemas uma vez que professoras com atitudes mais positivas buscaram diversificar e problematizar outras situações enquanto professoras com atitudes negativas acabaram trabalhando as situações de forma mecânica.

## Referências


Allevato, N. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, Brasil.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora.

Brasil, MEC/SEF. Ministério da Educação e do Desporto – Secretaria de Ensino Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria da Educação Fundamental.* Acedido em Janeiro 26, 2015, em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf.

Brito, M. (1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus.* (Tese de Livre Docência, Universidade Estadual de Campinas)

Brito, M. (Org.). (2006). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In Brito, Márcia Regina Ferreira de. (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar* (cap. 1, pp. 13-53). Campinas, Brasil: Alínea Editora.

Echeverría, M. & Pozo, J. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In Pozo, J. I. (Org.), *A solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender* (cap. 1, pp. 13-42). Porto Alegre, Brasil: Artmed.

Echeverría, M. (1998). Solução de problemas em Matemática. In Pozo, J. I. *A solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender* (cap. 2, pp. 43-66). Porto Alegre, Brasil: Artmed.

Gonçalez, M. (1995). *Atitudes (des) favoráveis com relação à Matemática.* (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas)

Gonçalez, M. (2000). *Relações entre a família, o gênero, desempenho, a confiança e as atitudes em relação à matemática.* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas)

Klausmeier, H. (1977). Atitudes e valores. In Klausmeier, H. J. *Manual de Psicologia Educacional: Aprendizagem e capacidades humanas* (pp. 412-447). São Paulo, Brasil: Harbra.

Miguel, J. (2010). Da resolução de problemas à formação de conceitos matemáticos: implicações teóricas e metodológicas. In: *Encontro Nacional De Didática E Prática De Ensino*, 15., 2010. (Anais de evento). Belo Horizonte, Brasil: XV ENDIPE.

Moron, C. (1998). *Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de Educação Infantil em relação à Matemática.* (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas)

Moura, A. et al. (2007). Resolver problemas: o lado lúdico do ensino da matemática. In Brasil, Ministério da Educação/SEB. *Pró-Letramento: Programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do Ensino Fundamental: Matemática.* – edição revista e ampliada incluindo SAEB / Prova Brasil matriz de referência / Secretaria de Educação Básica. Brasília, Brasil: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Musser, G. & Shaughnessy, J. (1997). Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In S. Krulik & R. Reys (Org.), *A resolução de problemas na matemática escolar* (pp. 188-201). São Paulo, Brasil: Atual.

Proença, M. (2012). *A resolução de problemas na licenciatura em matemática: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado*. (Tese de doutoramento, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho")

Schoenfield, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Sternberg, R. (2000). Resolução de problemas e criatividade. In R. Sternberg (Org.), *Psicologia Cognitiva*. (pp. 305-338). Porto Alegre, Brasil: Artmed.

# Redes multiplicativas e *soletos*: Aprendizagens matemáticas com sentido[1]

*Dárida Fernandes[1], Inês Pinho[2], Isabel Cabrita[3], Luísa Alves[4], Jaime Carvalho e Silva[5], Pedro Duarte[6]*

[1]ESE/IPPorto, daridafernandes@gmail.com
[2]ESE/IPPorto, inespinho@ese.ipp.pt
[3]Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, da U. de Aveiro, icabrita@ua.pt
[4]EB1 Vallis Longus, luisa.d.alves@gmail.com
[5]U. Coimbra, jaimecs@mat.uc.pt
[6]Estudante do 2.º ano do MES1_2 da ESE/IPPorto, pedroduarte92@gmail.com

**Resumo.** *Com este projeto de investigação pretende-se estudar as implicações do contexto cultural nas aprendizagens matemáticas. Em particular, procura-se analisar como é que as crianças se vão apropriando do novo conceito de rede multiplicativa e o mobilizam num ambiente cultural aberto de resolução de problemas, explorando um elemento económico e cultural da região: o 'soleto'. Os resultados obtidos permitiram concluir que o processo de exploração e construção das redes multiplicativas (envolvendo a descoberta de relações matemáticas e a realização de cálculos com base no conhecimento prévio) e de resolução de problemas, que giram em torno do ´soleto´, se torna significativo e emotivo, num ´landscape learning´ em que tudo parece fazer sentido para a criança.*

**Abstract**. *The aim of this research project is to study the implications of the cultural context in mathematics learning. In particular, it seeks to analyze how the children go appropriating the new concept of multiplicative network and mobilize an open cultural environment of problem solving, exploring an economic and cultural element of the region: 'soleto'. The results showed that the process of exploration and construction of multiplicative networks (involving the discovery of mathematical relationships and performing calculations, appealing to prior knowledge) and problem solving, which revolve around the ´soleto´, becomes significant, and emotional, in a ´landscape learning´ process where everything seems to make sense for the child.*

---

[1] [1][1] Esta investigação foi apoiada pelo Centro de Investigação e Inovação e Educação da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESE/IPP).

[1][2] A apresentação deste trabalho foi financiada pela FCT/MEC através de fundos nacionais (PIDDAC) e cofinanciada pelo FEDER através do COMPETE – Programa Operacional Fatores de Competitividade no âmbito do projeto PEst-C/CED/UI0194/2013.

**Palavras-chave**: *Rede multiplicativa; ambiente de aprendizagem; aprendizagem significativa da matemática em contexto; conhecimento prévio.*

## Introdução

Este estudo integra-se num outro mais vasto sobre "aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico" (Fernandes, 2006). Os resultados obtidos, em vários momentos e etapas do desenvolvimento deste projeto, revelaram que o referido contexto teve repercussões francamente positivas para as aprendizagens matemáticas das crianças. Nesta matriz de sucesso, a aprendizagem matemática contextualizada situava-se no quadro escolar, numa relação estreita da Matemática com as outras disciplinas (Fernandes, 2006). Agora, num ambiente mais aberto, pretende-se investigar qual a influência de elementos do meio cultural e económico da região, com valor significativo na comunidade e na vida familiar das crianças, na aquisição e mobilização do conhecimento matemático.

Neste estudo alargou-se a equipa, integraram-se agentes da cultura e abordaram-se novos conceitos do domínio numérico e operatório, mas em transição clara para o desenvolvimento do pensamento algébrico. De facto, como escrevem Borralho e Barbosa (2009, p. 59) "a forma como o problema é apresentado, pode transformar um simples problema aritmético em algébrico". Por outro lado, para Bragança, Ferreira, e Pontelo (2008), ensinar e aprender envolve a criação diversos fatores, de uma dinâmica relacional própria e cabe ao educador definir metas e estratégias que concretizem oportunidades reais de aprendizagem.

## Problematização e objetivos

Segundo a UNESCO (1980) e responsáveis pelo PISA (2003), a ciência Matemática deve estar ao alcance de todos, bastando para isso alterar estratégias, elevar as expectativas dos estudantes, desenvolver fortes crenças, elevar a auto-estima e a motivação. Por outro lado, as tarefas de âmbito interdisciplinar surgem como oportunidades para desenvolver "apoio significativo a todos os estudantes" (NCTM, 2000, p. 13). Numa outra perspetiva, reconhece-se que, quando a criança participa ativamente na construção do seu conhecimento, num ambiente favorável à pesquisa e ao questionamento, produz-se uma aprendizagem significativa e integradora, necessária à aquisição e mobilização perene do conhecimento. Ora, partindo destes pressupostos, importa continuar a investir em novas tarefas e processos de intervenção para se encontrarem respostas positivas a este desafio social – promover a competência matemática a todas as crianças. De forma concomitante, Vergnaud (2009) defende que só o resultado de muita pesquisa com estudantes nos pode ajudar a compreender melhor como eles constroem conhecimentos matemáticos.

Assim, esta investigação decorre destas necessidades educativas ao pretender estudar: i) como é que a criança explora e constrói *redes multiplicativas* e ii) se a presença de um elemento cultural e económico da região: o *`soleto´* facilita a mobilização desse conceito na resolução de problemas em contexto.

Daqui surge a formulação das seguintes questões de investigação: Como é que as crianças exploram e constroem *redes multiplicativas* nas aulas de Matemática? Em que medida a presença de um elemento cultural da região facilita a mobilização desse conceito na resolução de problemas, em contexto, relacionadas com ´o *soleto´*?

Apesar deste estudo se situar programaticamente no domínio dos Números e Operações, ele estende-se para o domínio da Álgebra ou, como alguns autores apelidam, da pré-álgebra (Ameron, 2002; Kieran & Chalouh, 1993), uma vez que as crianças desenvolvem a capacidade de analisar relações numéricas, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos, que são competências próximas do domínio da Álgebra. Ameron (2002) defende ainda que a pré-álgebra envolve um processo contínuo gradual de formalização, designadamente das notações e que a natureza da estratégia usada na descoberta da solução é determinante no desenvolvimento do pensamento algébrico. Este percurso reveste-se da máxima importância dado que, para Ponte (2006, p. 5), "quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender a linguagem abstrata da Álgebra fica seriamente limitado nas sua opções escolares profissionais e no seu exercício de cidadania democrática".

## Enquadramento teórico

### *Conceito de rede multiplicativa*

Numa *rede multiplicativa*, surgem relações de proporcionalidade, conexões lineares aditivas ou subtrativas, propriedades da multiplicação, sendo possível determinar novos valores numéricos tendo por base o conhecimento prévio de uma relação. Neste campo conceptual multiplicativo (na aceção de Vérgnaud, 1990, 2009), a criança aprende a observar expressões, a analisá-las, a estabelecer relações e, com base num valor conhecido, a tirar conclusões e a determinar novos valores. Por outro lado “um conceito é simultaneamente um conjunto de situações, de invariantes operatórias e de representações linguísticas e simbólicas” (1990, p. 94).

Como mostra a figura 1, tendo-se por base o valor conhecido central – o produto de 11*12=132 - é possível determinar todos os outros produtos decorrentes deste, com base no estabelecimento e reconhecimento de relações numéricas. Por exemplo, para se obter 22*12 basta multiplicar 132 por 2 e para calcular 12*12 adiciona-se 12 ao produto conhecido, pois 12= 11+1; (11+1)*12 = (11*12)+(1*12).

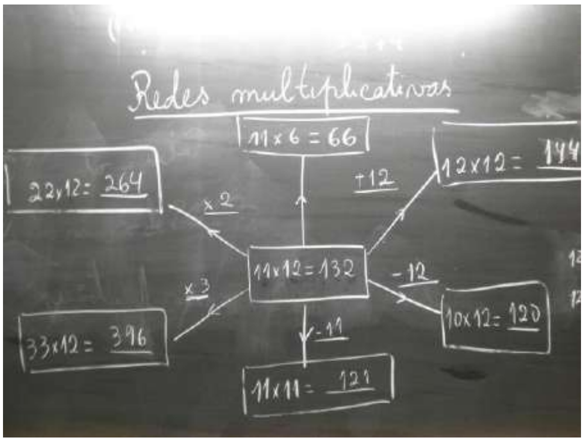



Figura 1 – Exemplo de rede multiplicativa construída com as crianças

Fernandes, Mariz e Duque (2011) salientam que o conceito de rede multiplicativa coloca novos desafios às crianças. Por outro lado, estudiosos da Álgebra (Fernandes, 2006, Kieran, 1992) ou da pré-álgebra (Ameron, 2002), preocupados com a aprendizagem escolar deste domínio, referem a necessidade de, desde cedo, se desenvolverem propostas numéricas com estabelecimento de relações, usando propriedades das operações numa perspetiva compreendida, *estrutural* e *procedimental* do conhecimento. As redes multiplicativas constituem-se como exemplos poderosos, permitindo desenvolver na criança o poder da observação e da análise relacional, capacidades que se afiguram fundamentais para aprendizagens estruturantes futuras. Para Wolfe (2004, p. 79) “a tarefa de dar significado a estímulos recebidos depende do conhecimento anterior”. Também Thompson (1996) salienta que um dos objectivos das ciências cognitivas tem sido o de tentar descobrir como se apresenta e organiza o conhecimento na mente, defendendo que se deve ter um papel ativo e relacional na sua construção. Por outro lado, para Vergnaud (1990), os conceitos mais complexos, para ganharem sentido e operacionalidade, precisam de ser contextualizados e exemplificados em situações concretas e alerta para o facto de a escola valorizar demais os símbolos e pouco a realidade.

*Aprendizagem significativa da matemática em contexto*

Para Bragança, Ferreira, e Pontelo (2008), um ambiente de aprendizagem é aquele em que um indivíduo está sujeito a oportunidades de aprendizagem. Segundo estes autores, a caracterização de um tal ambiente pode ser realizada a partir de uma linha contínua em que quanto maior a sistematização e menor a autonomia maior é o caráter formal da aprendizagem (Figura 2).


Figura 2 – Classificação de um ambiente de aprendizagem (adaptado de Bragança, Ferreiro, & Pontelo, 2008)

Em ambientes formais ou não formais de aprendizagem, o professor tem um papel fundamental, pois ele é o responsável pela planificação e exploração dos ambientes e pela avaliação e certificação do processo de aprendizagem. Sendo assim, a participação do professor é um indicador relevante na classificação do ambiente de aprendizagem e, na sua organização, deve fomentar a educação para a cidadania, como defendem os responsáveis pelo PISA e Praia (1999, p. 81): “o diálogo educativo entre saberes e áreas disciplinares na Escola e fora dela deve suscitar a transformação da própria Escola, no sentido de a tornar um lugar de procura incessante e afirmação duma cidadania activa, exigente e responsável”. Também Canavarro (2003) advoga a necessidade de se criarem conexões entre a Matemática e a realidade, pois representam uma oportunidade para construir “pontes” entre: a) a Escola e a vida que acontece para além das suas fronteiras; b) as diferentes áreas do saber, valorizando a sua complementaridade; c) o professor de Matemática e os seus pares.

A neurologista Wolfe (2004, p. 105) considera também que “resolver problemas da vida real é outro modo para elevar o interesse emocional e motivacional”. E acrescenta que “muitas vezes os professores, sem saber a base neurológica do efeito que a emoção tem na aprendizagem, utilizam e, muito bem, intuitivamente metodologias que tornam mais significativo e emocional o que os alunos estão a estudar” (idem, p. 105). E acrescenta: “o conteúdo (o texto no qual o hemisfério esquerdo sobressai) é importante, mas texto sem contexto (a especialidade do hemisfério direito) muitas vezes não tem sentido” (id, ib). É necessário ensinar o conteúdo dentro de um contexto que seja significativo para os alunos e tenha conexão com as suas próprias vidas e experiência, pois trata-se de ensinar as duas metades do cérebro que trabalham sempre em conjunto. “Se o currículo não estiver relacionado com a experiência do aluno, perde-se muita informação e desperdiça-se tempo ao ter os alunos ocupados em rituais de memorização sem sentido” (Wolfe, 2004, p. 52). Também Canavarro (2005) reitera esta necessidade de se proporcionarem aos estudantes experiências de aprendizagem de resolução de problemas concretos do seu dia-a-dia procurando desenvolver o carater útil da Matemática, na interpretação e intervenção no real. “Os fundamentos da Matemática mergulham, tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, *na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre*” (Caraça,1989, p. xiv).

Por outro lado, segundo Sousa (2005), o professor deve assumir-se como dinamizador de ambientes de aprendizagem ricos e potenciadores do desenvolvimento de competências. Apesar de ser um papel particularmente difícil e complexo, segundo Wood et al. (1996), “O nosso papel como professores, ao estabelecer com os alunos um ambiente na aula que os encoraja a exprimir o seu pensamento e ao mesmo tempo permite que coloquem questões uns aos outros, cria, também para nós, um ambiente de aprendizagem. Não se trata apenas de um ambiente que encoraja pensamentos de ordem superior e actividades reflexivas aos nossos alunos, mas também a nós próprios” (p. 40).

Por outro lado para uma aprendizagem significativa o professor deve, ao abordar uma nova informação, partir dos conhecimentos prévios dos alunos e proporcionar uma aula onde a investigação esteja presente, permitindo ao aluno expor o seu pensamento diante das tarefas a serem executadas (Ausubel, 1963).

*Elemento cultural e arquitetónico da região: o soleto*

Os *soletos* são telhas de ardósia de espessura fina (cerca de 5mm) que constituem um modo de sobrevivência de muitas das famílias de Valongo. Com efeito, desde 1843 (data dos primeiros registos de notas da descoberta de minas de ardósia no concelho de Valongo) que a procura por aquele mineral tem vindo a constituir-se como fonte de emprego para alguns dos seus habitantes, dada a diversidade de aplicações que pode ter, desde fabrico de telhas e revestimentos das casas, fabrico de bilhares, nos quadros das escolas ou em bancas de cozinha, bem como no artesanato.

## Metodologia

*Desenho metodológico*

Atendendo às questões do estudo, foi adoptada uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, pois como defendem (Bogdan e Biklen, 1994) a situação natural constitui a fonte dos dados, sendo necessário, num primeiro momento, descrever para analisar, posteriormente, os dados, valorizando-se o processo, bem como o produto e o resultado final. A unidade de análise foi uma turma no que diz respeito à exploração de tarefas sobre redes multiplicativas e à resolução de situações problemáticas relacionadas com *o ´soleto´*.

Em termos processuais, a equipa multidisciplinar com a professora titular da turma, definiu objetivos, planeou e preparou as aulas, de exploração de conteúdos de âmbito matemático e cultural, a serem desenvolvidas num período de mês e meio. Estudou conceitos, visitou as minas da ardósia, uma fábrica de conceção de "soletos", o Museu da Lousa e fotografou casas e ruas que usam este material na região. Realizaram-se sessões com exploração coletiva e individual de *redes multiplicativas*. Convidou-se um especialista para vir falar às crianças sobre o *´soleto,* estas visitaram também o Museu da Lousa e fizeram o registo fotográfico de ruas e casas que usassem o *´soleto´* na sua construção. Posteriormente, em sala de aula, as crianças procederam à construção individual de *´soletos´*, o que se constituiu como uma experiência de aprendizagem matemática muito rica e significativa, e realizou-se um *brainstorming* sobre esse elemento cultural (figura 5). Finalmente, foi proposta a resolução de vários problemas relacionados com o uso de *´soletos´* no revestimento de paredes de casas ou telhados, alguns dos quais estão expostos no anexo 1 (2.1 a 3.2.). As tarefas planeadas foram resolvidas individualmente ou em par pedagógico, discutida a sua resolução e, no final, realizadas reflexões sobre as temáticas produzidas.

Recolheram-se todas as produções das crianças, os vídeos e os diários de bordo construídos pelas investigadoras e pela professora da turma, que foram refletidos por todos dos elementos da equipa e alvo de uma análise de conteúdo orientada por categorias definidas recursivamente, tendo por base as questões de investigação às quais se pretendia dar resposta.

*Caraterização do contexto educativo*

A turma, enquanto objeto de investigação, era maioritariamente do 3.º ano de escolaridade, de uma escola de contexto semiurbano no concelho de Valongo, no distrito do Porto. Era constituída por 25 alunos, 10 do sexo feminino e 15 do sexo masculino, com 8 e 9 anos. Refira-se que os temas em desenvolvimento foram aplicados apenas aos estudantes do 3.º ano (21, pois uma criança faltou a algumas sessões), tendo sido planeado outro tipo de tarefas para as três crianças do 2.º ano. A turma tinha um nível socioeconómico médio. Os Encarregados de Educação eram maioritariamente as mães. Na análise da situação profissional dos pais e das mães, nota-se uma grande diversidade de profissões, sendo que a maioria se encontra em situação efectiva. Eram encarregados de educação muito participativos, deslocando-se à escola sempre que convocados ou por iniciativa própria.

**Resultados e comentários**

No registo de resultados, importa salientar vários momentos: em primeiro lugar, a abordagem inicial do conceito de *rede multiplicativa* e a reação das crianças perante este novo conhecimento. Em segundo lugar, a atitude das crianças perante a abordagem cultural e a inclusão do *´soleto´* na aprendizagem e a consequente resolução contextualizada de situações problemáticas. E, por último, a atitude das crianças perante um novo desafio da professora no cálculo do quociente de uma divisão inteira exata por um divisor formado por um número com dois algarismos.

*1.º momento - Introdução do conceito de rede multiplicativa*

No primeiro momento, aquando da construção da rede multiplicativa, as crianças participaram ativamente, colocaram questões e tiveram relativa facilidade em observar, comparar, estabelecer relações e chegar aos resultados corretos (Figura 3).

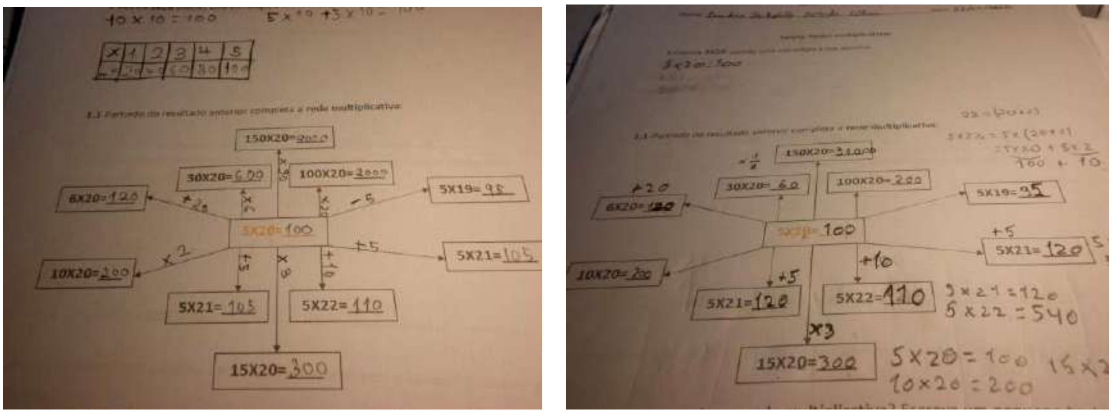



Figura 3 – Determinação dos ramos de uma rede multiplicativa

No cálculo do valor de base da estrutura da rede multiplicativa, as crianças usaram diferentes estratégias e mostravam, com gosto, as diferentes resoluções. Pareciam evidenciar apetência suplementar no trabalho com os números, como revelam algumas resoluções (Figura 4).

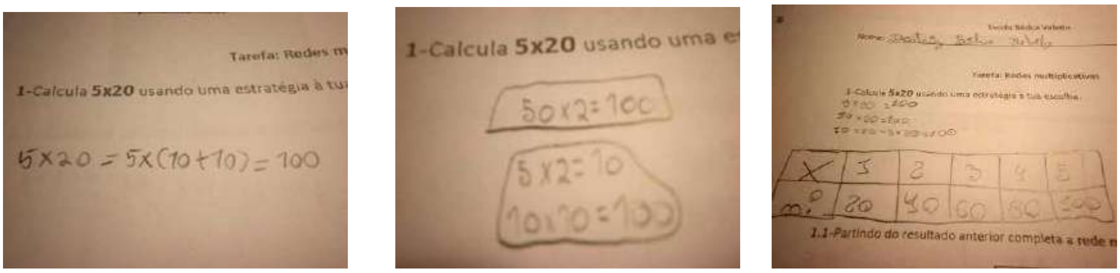



Figura 4 – Determinação do valor de base da estrutura

Na resolução da rede multiplicativa, as crianças usaram basicamente dois tipos de resoluções: i) com a aplicação de ***operadores lineares***: aditivos e subtrativos (7 crianças - 7/21), algumas das quais apresentaram um, dois ou três resultados incorretos; ii) com aplicação dos ***quatro operadores,*** com a particularidade da divisão por dois ser substituída pelo produto por ½ (14 crianças, tendo apenas uma delas um ramo com resultado incorreto). Refira-se ainda que, nos casos em que um dos fatores era múltiplo ou submúltiplo de uma expressão anterior, tornava-se mais acessível para a criança do que nos ramos em que tal não acontecia e tinha de se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou à subtração. Por exemplo, a propósito do exemplo retratado na figura 1, como conheciam o valor do centro (11*12=132), era mais acessível determinar 11* 24 do que 11*13 ou 11*11 pois, no 1.º caso, como disse uma criança: "*está-se mesmo a ver como fazer: é só multiplicar por 2, professora, pois o 11 também lá está e 24 é o dobro de 12… Como sei o resultado basta multiplicá-lo por 2*". No caso de 11*13=11*(12+1) ou 11*11=11*(12-1), reconhecem, respetivamente, que é preciso adicionar ou subtrair mas, inicialmente, pensam que é apenas necessário adicionar (ou subtrair) uma unidade e não a relacionam com a expressão como um todo, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou à subtração. Apesar destas relações terem sido trabalhadas coletivamente na construção/exploração da primeira rede multiplicativa, ainda houve algumas hesitações mas, na globalidade, na resolução individual das tarefas, os resultados foram francamente positivos. As crianças revelaram compreensão na construção e exploração coletiva das redes multiplicativas e na sua aplicação na resolução de tarefas individuais.

Em relação à questão: "*Na tua opinião o que é uma rede multiplicativa*?", as crianças escreveram (Figura 5), basicamente, quatro tipo de respostas, relacionando-a com: i) os resultados anteriores para fazer novas operações ou descobrir novos resultados (13 respostas); ii) um conjunto de contas que são relacionadas umas com as outras (5); iii) a resolução de um problema para resolver uma operação (1); iv) uma rede de multiplicação (1) ou um canal de multiplicação (1).

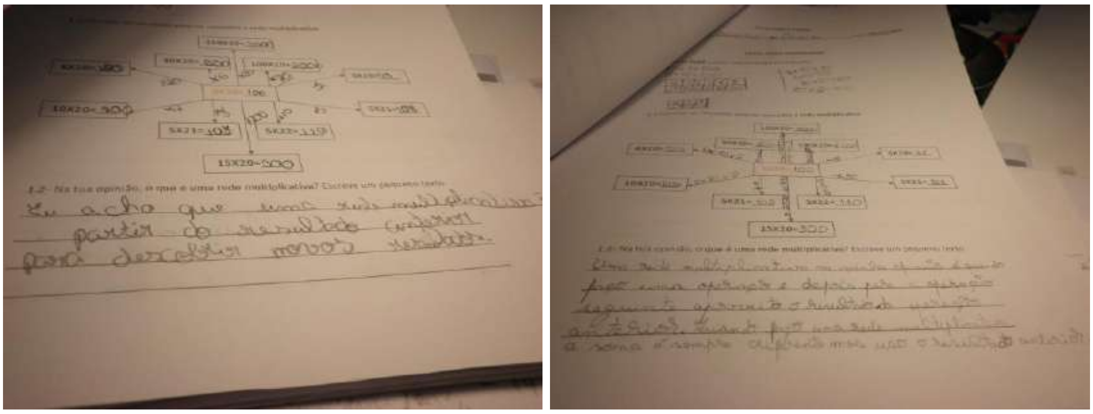


Figura 5 – conceito de rede multiplicativa nas palavras das crianças

*2.º momento - Resolução de problemas*

O *´soleto´* foi trabalhado por uma especialista, que foi muito bem recebida pelas crianças, e ao identificarem diversos tipos de património (artístico, arquitetónico, etnográfico, natural, ou industrial) relacionaram-nos com os vários ofícios dos elementos da família. Após a visita ao Museu da Lousa, durante a qual se procedeu ao registo fotográfico de elementos que integrassem o *´soleto´* na sua construção, as crianças construíram *´soletos´ e* fizeram ainda um *brainstorming* sobre esta temática, como mostra a Figura 6.


Figura 6 – Painel dos soletos construídos pelas crianças e o *brainstorming* produzido

Seguidamente**,** as crianças resolveram as situações problemáticas propostas (anexo 1).

Na primeira questão relacionada com a contagem de ´*soleto*´ num telhado, as crianças usaram várias estratégias (Figura 7), entre as quais se destacam o uso de: i) expressões numéricas organizadas por partes (11 crianças); ii) expressões numéricas (3), uma delas explicando a rede multiplicativa; iii) expressão linear, usando apenas a adição (3); iv) expressão aditiva e multiplicativa com o grupo 7+8 (2); v) expressão aditiva, formando conjuntos e usando a p. distributiva (1); vi) expressões parcelares usando a multiplicação e a subtração (1).

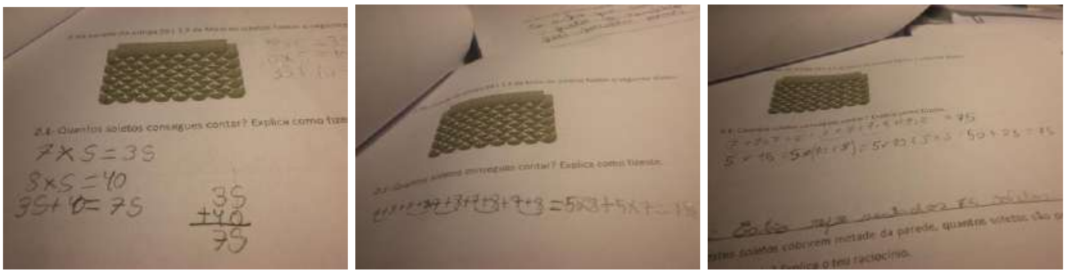



Figura 7 – Estratégias de contagem de soletos

Das várias questões relacionadas com a cobertura de uma casa, perguntava-se "se os soletos cobrissem metade da parede quantos soletos seriam necessários para forrar a parede toda? E se representasse a décima parte? Explica o teu raciocínio" "E se o Sr. Joaquim quer cobrir uma parede com 120 soletos e já cobriu a ¾ da parede. Quantos soletos já colocou?". As crianças usaram várias estratégias, desde o operador aditivo ao operador inverso, e na última questão as crianças usaram basicamente o significado de operador (9 respostas); outras o processo aditivo, aplicando o significado de parte todo (4), como mostra a Figura 8.

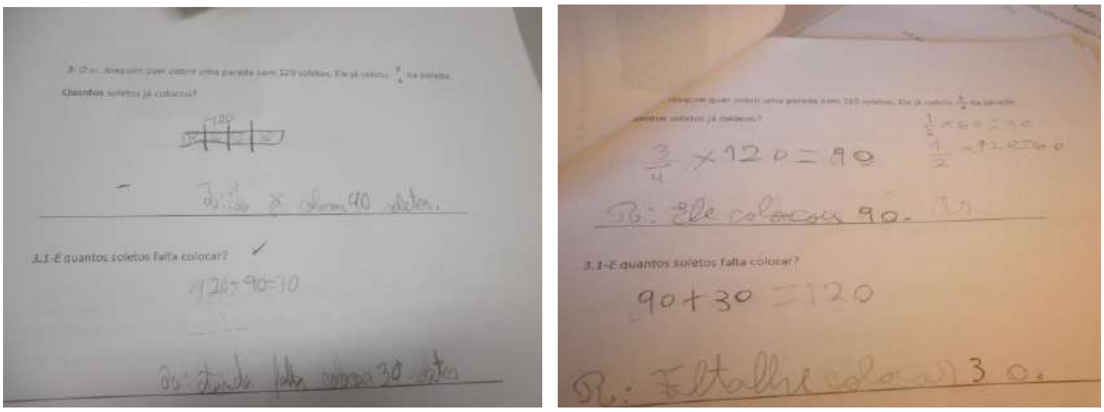



Figura 8 – Uso do significado parte-todo e de operador

Na resolução da questão: “Se cada soleto custar €2,50 quanto custarão 60? E 120? E 180?” a maior parte das crianças responde corretamente e usa o operador aditivo ou multiplicativo, desenvolvendo, neste último caso, o raciocínio proporcional. Apenas uma criança referiu que não usava a rede multiplicativa, mas todas as outras escreveram que usaram essa noção, porque os valores iniciais são a base do cálculo dos seguintes (Figura 9). Duas crianças disseram mesmo: “*É muito fácil professora, porque 120 é o dobro de 60 e por isso basta multiplicar por dois e como 180=120+60, por isso é só somar os valores que calculei para 120 e 60… isto é como na rede multiplicativa, não é professora?… uso sempre os valores que já sei e não preciso de fazer muitos cálculos”*. Acrescente-se que grande parte das crianças procuravam fazer os cálculos com estas ligações e questionavam a professora se estavam a pensar bem.

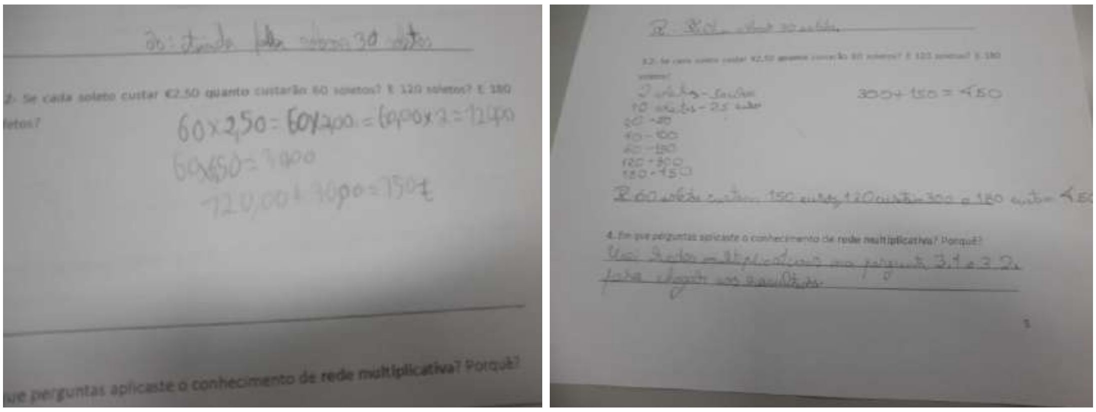



Figura 9 – Resolução do problema do custo dos ´*soletos*´

*3.º momento – uma nova proposta*

Dado que a professora se apercebeu de todo o entusiasmo das crianças e das diferentes relações que estabeleciam, lançou um desafio novo sem qualquer esclarecimento adicional: realizar uma divisão inteira em que o divisor era constituído por um número formado por dois algarismos (264:12). A professora ficou altamente surpreendia pois praticamente todas as crianças resolveram a divisão pela decomposição do divisor, tendo evocado o conhecimento das redes multiplicativas (Figura 10).

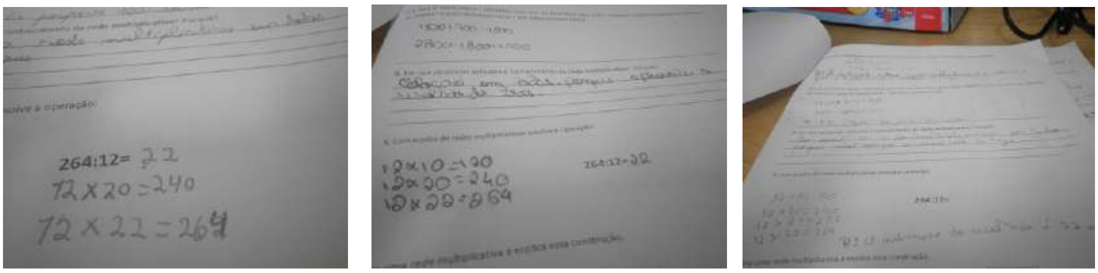



Figura 10 – Estratégias do cálculo da divisão inteira

Refira-se que a atitude comunicacional na exploração do conhecimento matemático esteve sempre muito presente nestas atividades. Veja-se o seguinte diálogo:

> Aluno A - "*pois é professora, é da mesma maneira como nas redes… Como eu não sei como fazer, vou pensar numa conta de dividir mais fácil: primeiro divido por 2 e depois por 6. Pode ser, não pode professora?*"
> Prof. - "*E por que razão estás a dizer que pode se por esses números e não por outros?*"
> Aluno A - "*Porque 12 é igual a 2 vezes 6… afinal é fácil!*"
> Aluno B - "*Mas eu pensei de outra forma professora… Vou fazer as multiplicações por 12 para chegar ao 264*".

Estas e outras observações maravilharam a professora pois, apesar de ter experiência de vários anos neste nível de ensino, nunca as crianças tinham realizado tais associações. Como tinha sido a primeira vez que explorou as redes multiplicativas, atribui estas descobertas a este facto, referindo que tinha ficado "fã deste assunto".

**Reflexões finais**

Nesta investigação, procurou-se desenvolver o raciocínio relacional, com as redes multiplicativas, no interior do domínio da Matemática e, posteriormente, numa relação estreita com a capacidade de resolução de problemas, num contexto relacionado com os *´soletos´* da região. Verifica-se que, apesar de existir ainda pouca informação sobre a aprendizagem desta temática, ela apresenta-se de forma *estrutural* e *procedimental* na aprendizagem da criança. Reconhece-se que a construção de redes multiplicativas foi acessível para as crianças, tendo mobilizado o conhecimento construído na resolução de problemas em contexto e transferido esse saber para o cálculo de divisão inteira exata. Segundo os investigadores De Lange (1992), Gravemeijer (1994) e Kindt (2004) tudo indica que estas construções e produções mentais dos estudantes são indutoras da passagem dos seus próprios esquemas informais até aos processos formais em que "*make sense"* é a palavra-chave na exploração de tarefas matemáticas "realistas".

Tal como defende Borralho e Barbosa (2009, p. 67) "é necessário mudar práticas de ensino, deixar para trás um ensino 'tradicionalista' que promove a rotina e, consequentemente, a aprendizagem "isolada" de conteúdos, para passarmos a ter práticas de ensino que desenvolvam aprendizagens significativas por parte dos alunos". De facto, ao valorizar-se a receptividade da "matemática-realidade" suportada por um elemento cultural da região, diretamente relacionado com situações do dia-a-dia da criança surgem estímulos intelectuais novos e questões mobilizadoras indispensáveis nas aprendizagens. Também Freudenthal (1973) reconhece que as fontes do "*insight"* podem ser reguladas por automatismos, mas defende que qualquer atividade que só se desenvolva de uma forma automática e 'perfeita' raramente provoca a compreensão, o levantamento de questões e, consequentemente, a aquisição de novas e relevantes aprendizagens, reconhecidas pela professora da turma com larga experiência profissional. Nesta sequência, vários investigadores do Instituto Freudenthal (De Lange, 1992; Gravemeijer, 1994; Kindt, 2004) defendem ser necessário dedicar mais tempo à exploração do processo contínuo de aprendizagem da álgebra, implementar uma boa sequência de problemas e criar a necessidade de se deixar fluir naturalmente a formalização, de maneira intrínseca, pelos "*insights*" e não apenas de forma procedimental.

## Referências

Ameron, B. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to álgebra*. Utrecht: Institut Freudenthal.

Ausubel, D. (1963). *The psychology of meaningful learning*. New York: Grune & Stratton.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma Introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. & Barbosa, E. (2009). Exploração de padrões e pensamento algébrico. In Vale, I. *Padrões. Múltiplas perspectivas e contextos em educação* (pp.59-68). Viana do Castelo: ESE de Viana do Castelo.

Bragança, B. Ferreira, L. & Pontelo, I. (2007). *Práticas educativas e ambientes de aprendizagem escolar: relato de três experiências*.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. Lisboa: APM, Coleção Teses.

Canavarro, A. P. (2005). Matemática na escola. Muro ou ponte? In Guimarães H. M. e Serrazina, L. (Ed.), *V CIBEM Conferências*, (p. 89-113). Porto: APM.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora. e Gradiva, edições de 1951, 1984 e 1998.

De Lange, J. (1992). Critical factors for real changes in mathematics learning. In Leder, Gilah C. (Ed.), *Assessment and learning of mathematics*, (pp. 305-329). Utrecht: ACER.

Fernandes, D. (2006). *Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro).

Fernandes, D. Mariz, B. & Duque, A. (2011) *Nova Matemática – 3.º ano e 4.º ano. Guias para professores da nova matemática – 3.º ano e 4.º ano* Porto: Porto Editora.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel: Dordrecht.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and development research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443-471.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht University: Freudenthal Institut.

Kindt, M. (2004). *Positive algebra. A collection of productive exercises*. Utrecht: Freudenthal Institut.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school Algebra. In Douglas, A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: the transition from arithmetic to algebra. In Douglas, T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*. NCTM. Research Interpretation Project. New York: Macmillan Publishing Company.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Ponte, J. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Praia, M. (1999). *Educação para a cidadania. Teoria e práticas*. Porto: Cadernos Correio Pedagógico. ASA.

Sousa, H. (2005). O ambiente de aprendizagem e a matemática. *Educação Matemática*, *83*, 35-40.

Thompson, P. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In L. Steffe et al (Eds.), *Theories of mathematical learning*, (pp. 267-283). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, et al. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre matemática. *Educação e Matemática*, 40, 39-43.

Wolfe, P. (2004). *Compreender o funcionamento do cérebro. E a sua importância no processo de aprendizagem*. Porto: Porto Editora.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23, 133-170.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*. *52*, 83-94.

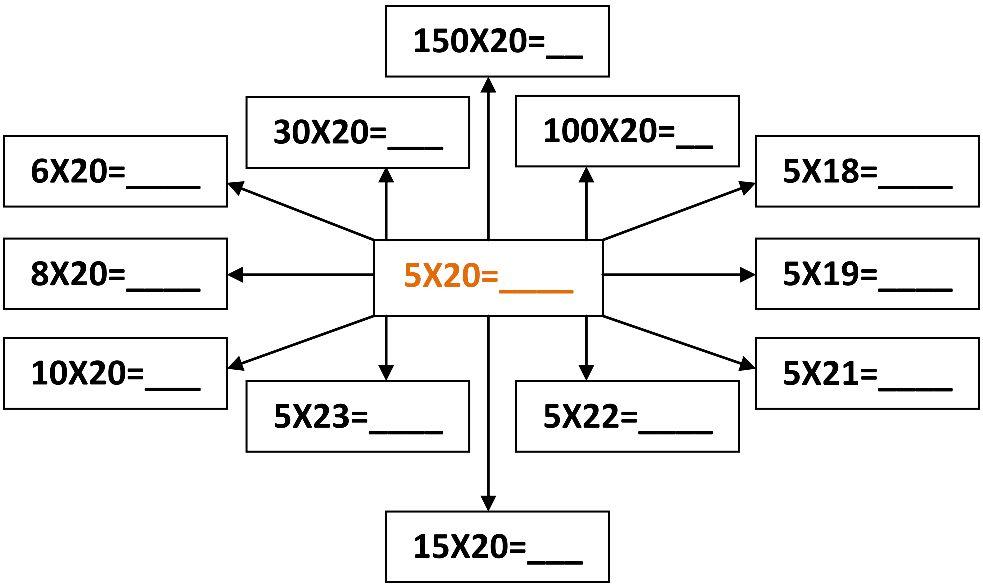
Anexo 1

Nome: ______________________________________________Data: _________

**Redes multiplicativas**

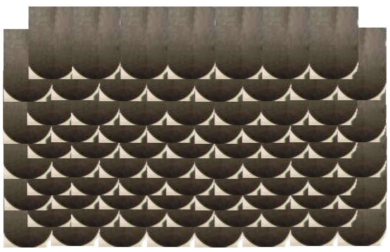
**1-**Calcula **5x20** usando uma estratégia à tua escolha.

**1.1-**Partindo do resultado anterior completa a **rede multiplicativa**:




**1.2-** Na tua opinião, **o que é uma rede multiplicativa**? Escreve um pequeno texto.

**2-**Na parede de uma antiga escola, os soletos fazem o seguinte efeito:



**2.1-** Quantos soletos consegues contar? Explica como fizeste.

**2.2-** Se estes soletos cobrirem metade da parede, **quantos** soletos são precisos para forrar a parede toda? Explica o teu raciocínio.

**2.3-** E se representarem a décima parte, **quantos** soletos tem a parede? Explica o teu raciocínio.

**3-** O sr. Joaquim quer cobrir uma parede com 120 soletos. Ele já cobriu $\frac{3}{4}$ da parede. **Quantos** soletos já colocou?

**3.1-**E quantos soletos lhe falta colocar?

**3.2-** Se cada soleto custar €2,5 **quanto** custarão 60 soletos? E 120 soletos?

# O desenvolvimento do raciocínio relacional: Uma experiência de ensino

*Raquel Cerca*[1]*, João Pedro da Ponte*[1]
[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa,
raquelcerca@gmail.com, jpponte@ie.ulisboa.pt

**Resumo** *Esta comunicação apresenta uma experiência de ensino cujo objetivo é compreender como se desenvolve o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano, com especial ênfase nas relações de igualdade e desigualdade e na capacidade de generalizar. O estudo segue uma abordagem qualitativa e a recolha de dados tem por base registos vídeo e áudio, notas de campo e a recolha do trabalho dos alunos. Os resultados mostram que os alunos melhoraram a sua compreensão das relações de igualdade e desigualdade, percebendo as ligações entre cada membro das expressões. As suas estratégias mostram uso do raciocínio relacional sem necessidade de recorrer a cálculos. As generalizações surgem no momento de discussão coletiva e a dinâmica de sala de aula revela-se muito importante para o desenvolvimento do raciocínio relacional.*

**Abstract.** *This communication presents a teaching experiment aiming to understand how relational reasoning develops in grade 3 students, with particular emphasis on equality and inequality relations and on the ability to generalize. The study follows a qualitative approach and data collection is based on audio and video records, field notes, and collection of students' work. The results show that students improved their understanding of equality and inequality relations, figuring out the connections between the two members of expressions. Students' strategies show the use of relational reasoning without the need for computations. Generalizations arise at moments of whole class discussion and the classroom dynamics was very important for the development of relational reasoning.*

**Palavras-chave:** *Raciocínio algébrico; Primeiros anos; Igualdade; Desigualdade.*

## Introdução

A aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade tem vindo a ser cada vez mais valorizada, com ênfase nas relações e propriedades matemáticas. A resolução de questões envolvendo relações de igualdade e desigualdade exige um olhar atento por parte dos alunos, que devem ser capazes de encontrar a solução sem recorrer à realização sequencial de todos os cálculos (Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Molina, Castro, & Castro, 2009). Para isso, é fundamental a compreensão das propriedades algébricas da relação de igualdade. Assim, nos primeiros anos, um dos objetivos do ensino da Álgebra é ajudar os alunos na representação e análise de situações e estruturas matemáticas aliando-as a símbolos algébricos (NCTM, 2007), podendo desenvolver-se através de diferentes métodos e estratégias, essencialmente associados a uma Aritmética mais algébrica.

O objetivo do presente estudo é compreender como se desenvolve o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano ao longo de uma experiência de ensino, dando importância às relações de igualdade e desigualdade e à capacidade de generalização a partir de tarefas que envolvem quantidades desconhecidas. Para isso procuramos responder às seguintes questões:

1. Ao longo da experiência de ensino, que compreensão mostram os alunos das relações de igualdade e desigualdade? Começam a recorrer a raciocínio relacional em vez de usarem apenas raciocínio operacional?

2. Que generalizações, nomeadamente sobre propriedades matemáticas, os alunos revelam serem capazes de fazer?

**Raciocínio relacional**

Os alunos contactam com relações quando trabalham com Números e Operações. Através deste contacto com relações que envolvem as operações e as propriedades, desenvolvem o raciocínio relacional. Para Ponte, Branco e Matos (2009), o raciocínio relacional é a capacidade de estabelecer relações entre os números e os símbolos, tendo em conta as propriedades que estão subjacentes. Assim, os alunos terão que ser capazes de observar duas ou mais expressões como fazendo parte de um todo e não como partes independentes.

O raciocínio relacional desenvolve-se através da compreensão do funcionamento e da estrutura das relações. A compreensão da relação de igualdade faz-se desde muito cedo, quando os alunos, de forma intuitiva, desenvolvem conexões aritméticas simples relacionadas com as propriedades das operações. Como exemplo destas aprendizagens Carpenter, Franke, e Levi (2003) referem o raciocínio que um aluno apresenta ao adicionar 50 mais 30 que diz que são 80, porque 5 mais 3 é 8 e depois multiplica por 10. O aluno não se apercebe das propriedades da adição e da multiplicação que utiliza, mas realiza um raciocínio no qual as propriedades estão presentes.

Outro exemplo da aprendizagem da relação de igualdade e da compreensão do significado do sinal de igual surge na resposta de uma aluna ao observar a expressão 18 + 27 = ___ + 29. Nesta situação, a aluna refere que o valor em falta será 16 porque 29 são mais dois que 27, então o número da caixa tem que ser menos dois que 18 para que os dois lados sejam iguais. Este tipo de raciocínio é muito importante porque a aluna reconhece que o sinal de igual representa uma relação de equivalência. Outro aspeto positivo é que a aluna não sente necessidade de apresentar cálculos e olha para as relações que se estabelecem na expressão apresentada.

O tipo de tarefa que se propõe aos alunos desempenha um papel muito importante no desenvolvimento do raciocínio relacional. Canavarro (2007) faz referência à “algebrização de problemas aritméticos” (p. 97) que se baseia na transformação de problemas aritméticos que fomentam apenas uma única resposta, para problemas e tarefas de investigação onde se valoriza a “construção de regularidades, conjeturas, generalizações e sua justificação e explicação” (p. 97). Molina, Castro, e Castro (2009) apresentam dois tipos de questões nos estudos que levaram a cabo. Assim, apresentam questões de verdadeiro e falso em que se pretende que os alunos confirmem a veracidade da expressão e justifiquem a sua escolha. Apresentam, também, questões de valor omisso, em que se pretende que os alunos encontrem o valor que falta para que uma expressão fique verdadeira. Com estas questões conseguimos detetar qual o entendimento que os alunos têm do sinal de igual e se usam, de forma espontânea, raciocínio relacional.

Carpenter, Franke, e Levi (2003) definem alguns possíveis motivos que levam os alunos a ter conceções erradas sobre o significado do sinal de igual: (i) as crianças apenas são confrontadas com o tipo de generalização “a+b=c”; (ii) as calculadoras reforçam o significado que após o sinal de igual vem a resposta ao cálculo; e (iii) existe nas crianças uma predisposição para pensar na igualdade em termos de resposta do cálculo em vez de uma relação.

Para Kieran (1981), o símbolo que mostra equivalência, “=”, nem sempre é interpretado como uma equivalência. Esta interpretação não aparece de imediato em todos os alunos e vai evoluindo ao longo dos anos de escolaridade. A autora afirma que, inicialmente, os alunos interpretam o sinal de igual como simbolizando o que devem somar e não conseguem compreender a expressão como uma relação entre dois membros. Carpenter, Franke, e Levi (2003) acreditam que as generalizações inapropriadas sobre o sinal de igual que muitas vezes as crianças defendem são características das limitações na sua compreensão sobre como as ideias matemáticas são generalizadas e justificadas. Isto acontece, quando apenas conhecem uma forma de generalização, o que faz com que tentem justificar as suas respostas com o que conhecem.

Uma das formas de desenvolver o raciocínio relacional é através das estratégias que se adotam em sala de aula. O professor tem que ser capaz de criar situações que envolvam a discussão (a pares, em pequenos grupos ou de forma coletiva). Os momentos de partilha e discussão de ideias são fulcrais ajudando os alunos a organizar e justificar o seu raciocínio e a reconhecer outras estratégias como válidas. Este tipo de tarefas não deve apenas ficar para um grupo restrito de alunos. Torna-se importante que os alunos possam aprender a pensar sobre as relações que envolvem números, operações e suas propriedades como suporte da aprendizagem da matemática (Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005; Molina, Castro, & Castro, 2009).

Este tipo de dinâmica de sala de aula ajuda os alunos no processo de justificação dos seus raciocínios e na elaboração de generalizações. É através das justificações que apresentam, na partilha de ideias e na sua discussão em grande grupo que desenvolvem generalizações, seja em linguagem natural, ou em linguagem simbólica. Carpenter, Franke, e Levi (2003) referem que grande parte das generalizações apresentadas pelos alunos baseia-se no uso de propriedades, principalmente a propriedade comutativa e do número 0. Contudo, surgem generalizações baseadas nos conhecimentos generalizados, bem como relacionadas com números pares e ímpares, classes de números ou até mesmo critérios de divisibilidade.

Ellis (2011) vê a generalização como um processo dinâmico que envolve ciclos de interação entre o professor e os alunos. É através da discussão que estes vão melhorando ou elaborando novas generalizações. Esta ideia de dinâmica em sala de aula vê o desenvolvimento da generalização como um ato coletivo, num contexto matemático específico que dá especial atenção às interações sociais, às ferramentas, à própria história de cada aluno, mas também à existência de um bom ambiente de sala de aula propiciador da aprendizagem.

Para desenvolver nos alunos o seu sentido de símbolo e a sua capacidade de generalizar é importante ter um ambiente propício. Arcavi (1994; 2006) defende que é muito importante a abordagem feita pelo professor. As questões que vão sendo colocadas e a discussão que se fomenta em torno das expressões, tornam-se preponderantes para o desenvolvimento do sentido de símbolo. Deste modo, é importante cultivar em sala de aula uma procura dos significados dos símbolos, evitando a aplicação automática de procedimentos. Carpenter, Franke, e Levi (2003) também referem que não devemos cair na tentação de apenas usar o raciocínio computacional, mas sim ajudar os alunos a criar novas estratégias, promovendo a discussão de estratégias alternativas à resolução direta da expressão.

**Metodologia de investigação**

A experiência de ensino que serve de base a este estudo foi realizada de fevereiro a abril de 2013/14, num total de 8 sessões. Cada sessão tem a duração de 90 minutos e a sua periocidade é de uma vez por semana. A primeira sessão foi diagnóstica e teve como objetivo perceber como é que os alunos interpretavam as relações de igualdade e desigualdade. Nas sessões 2, 3 e 4 pretendia-se que os alunos desenvolvessem o seu conhecimento sobre estas duas relações. Nas sessões 5, 6 e 7 o objetivo era que os alunos desenvolvessem estratégias relacionais, justificações e generalizações. A última sessão pretendia avaliar as aprendizagens ao longo das sessões. As sessões foram organizadas em três grandes momentos, segundo a abordagem exploratória (Ponte, 2005): (i) apresentação da tarefa; (ii) exploração e resolução da tarefa a pares ou individualmente; e (iii) discussão e reflexão em grande grupo. As aulas foram lecionadas pela primeira autora.

A metodologia do estudo segue uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Este realiza-se com uma turma do 3.º ano de uma escola de ensino público do concelho de Soure, distrito de Coimbra, constituída por 16 alunos (6 raparigas e 10 rapazes). Dois alunos têm deficiências profundas e não se encontram junto da turma a maior parte do tempo. Outra aluna foi transferida para a turma quase no final do estudo, participando nas 3 últimas sessões. Os alunos estão habituados a partilhar e discutir as suas ideias e demonstram vontade em fazê-lo. De uma maneira geral, trabalham de modo individual mas também fazem trabalhos a pares e em grupos.

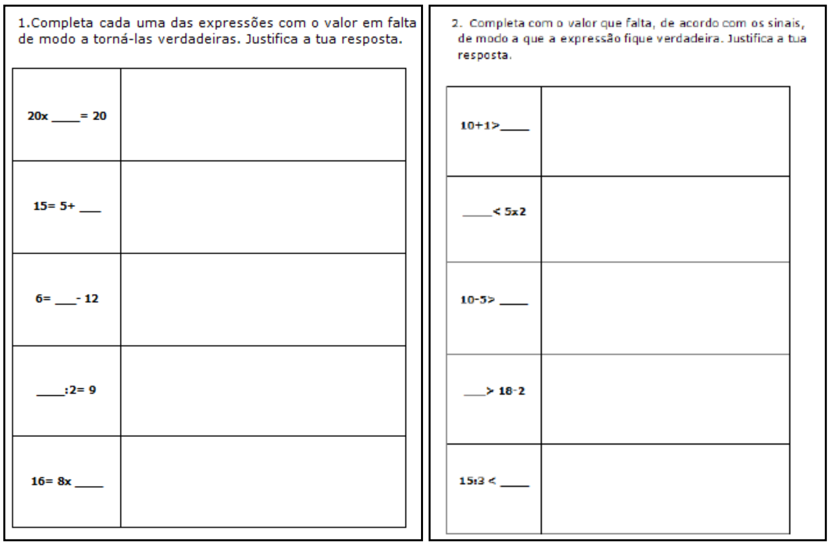
Os dados recolhidos são de natureza descritiva enquadrando-se em dois grandes grupos: (i) registo de vídeo e as notas de campo provenientes da observação da turma; (ii) recolha das resoluções das tarefas feitas pelos alunos. Nesta comunicação analisamos resoluções de algumas questões, procurando destacar a compreensão das relações de igualdade e desigualdade, bem como generalizações efetuadas pelos alunos.

## Análise das resoluções dos alunos

*Compreensão das relações de igualdade e desigualdade*

As resoluções dos alunos demonstram a sua compreensão das relações de igualdade e desigualdade. Inicialmente a turma reconhece, com alguma facilidade, o sinal de igual. Os alunos mostram-se, naturalmente, habituados a trabalhar com a expressão mais comum, a+b=c. Além disso, já tinham contatado em anos anteriores com os sinais associados à relação de ordem. Costumam solucionar os problemas através dos algoritmos e no diagnóstico apenas um aluno (David) utiliza estratégias relacionais.

Na sessão 1 são apresentadas diversas questões de valor omisso (Fig. 1), cujo objetivo é encontrar o valor que torna a expressão verdadeira. Os alunos têm que justificar as suas escolhas, o que permite analisar a sua compreensão das relações e sinais associados.



1.Completa cada uma das expressões com o valor em falta de modo a torná-las verdadeiras. Justifica a tua resposta.

| | |
|---|---|
| 20x ____= 20 | |
| 15= 5+ ___ | |
| 6= ___- 12 | |
| ____:2= 9 | |
| 16= 8x ____ | |

2. Completa com o valor que falta, de acordo com os sinais, de modo a que a expressão fique verdadeira. Justifica a tua resposta.

| | |
|---|---|
| 10+1>____ | |
| ____< 5x2 | |
| 10-5> ____ | |
| ___> 18-2 | |
| 15:3 < ____ | |

Figura 1. Questões da sessão 1.

Na questão 1, envolvendo igualdades, os alunos não têm dificuldade na maioria das expressões, como se ilustra nos exemplos seguintes (Fig. 2 e 3):

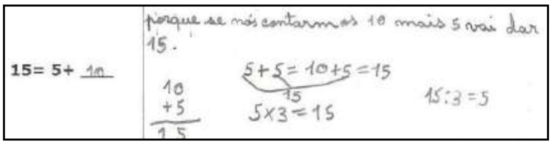



Figura 2. Resolução de Rafaela, sessão 1.

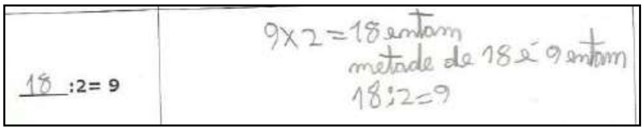



Figura 3. Resolução de Gonçalo, sessão 1.

Nos momentos de discussão coletiva os alunos partilham as suas estratégias. Rafaela, à semelhança do que acontece com a maioria da turma, apresenta a decomposição do número 15, mas indica outras estratégias para mostrar que a sua resolução é a mais correta. Gonçalo utiliza a operação inversa e complementa a sua justificação registando que 9 é maior que 18.

Ao longo da discussão coletiva os alunos mostram interesse em partilhar as suas escolhas, descrevendo as suas estratégias:

> Tiago: Eu fiz 3 contas…
> Investigadora: Fizeste 3 contas, explica lá as 3 contas que tu fizeste que é para ficar mesmo justificado.
> Tiago: Nove mais nove igual a 18 ou 2 vezes 9 igual a 18, por isso 18 a dividir por 2 igual a 18.

Os alunos mostram compreender o significado do sinal de igual e a relação de igualdade.

Na questão 2, com expressões envolvendo desigualdades, os alunos também não mostram dificuldades. Perante a expressão ___< 5×2, compreendem que o valor omisso terá que ser menor que 10:

> Investigadora: Duarte diz lá.
> Duarte: Ainda tem o sinal de maior (justificação que o aluno apresentou, após ter colocado o número 10 no valor omisso).
> Investigadora: Ainda tem o sinal de maior. Tem o sinal de maior? Primeiro que número é que tu puseste?
> Duarte: 10.
> Investigadora: O Duarte pôs 10. Toda a gente concorda?
> Rafaela: Não pode ser porque senão tinha que estar o sinal de igual.
> Laura: Porque 5 vezes 2 é igual a 10…
> Mara: E está aí o número 10.

Neste caso, Duarte tem dificuldade em identificar o verdadeiro significado do símbolo de maior, mas as suas colegas compreendem porque não pode ser o valor que ele apresenta. Nestas questões envolvendo as relações de ordem, a grande maioria dos alunos realiza uma subtração para encontrar a solução (Fig. 4).

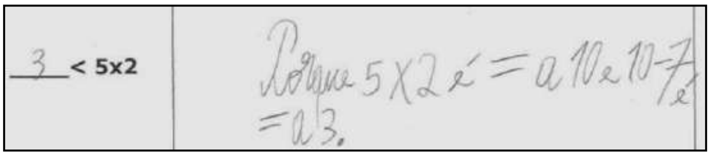
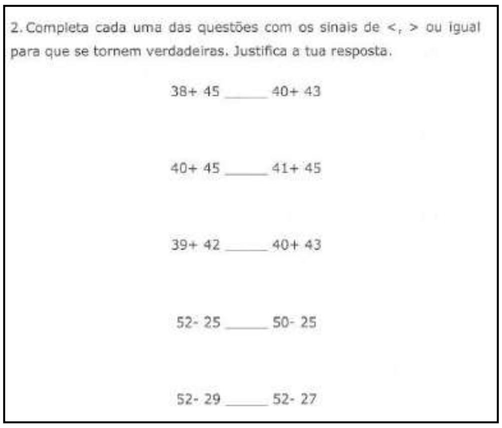



Figura 4. Resolução de João, sessão 1.

Para além das questões de valor omisso, também foram apresentadas questões em que os alunos tinham que encontrar o símbolo correto da relação, de modo a tornar a expressão verdadeira, como numa das questões da sessão 3 (Fig. 5):



2. Completa cada uma das questões com os sinais de <, > ou igual para que se tornem verdadeiras. Justifica a tua resposta.

38+ 45 ____ 40+ 43

40+ 45 ____ 41+ 45

39+ 42 ____ 40+ 43

52- 25 ____ 50- 25

52- 29 ____ 52- 27

Figura 5. Questão 2 da sessão 3.

Ao longo da sessão os alunos compreendem que os símbolos de maior e menor indicam que existe uma diferença entre cada membro da expressão, não representando equivalência. Esta compreensão é demonstrada em diversas justificações (Fig. 6 e 7).

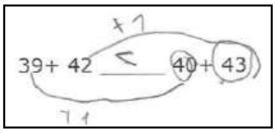



Figura 6. Resolução de Ricardo, sessão 3.

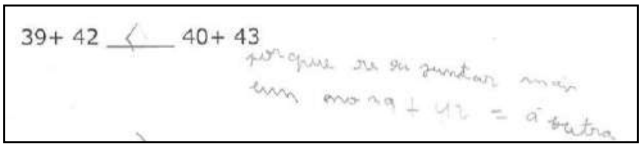
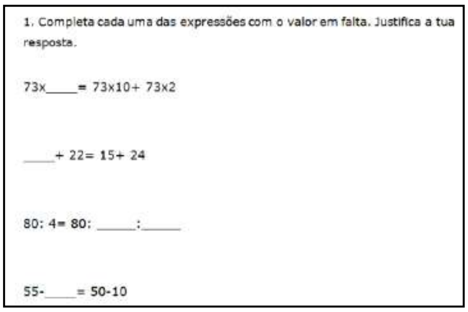


Figura 7. Resolução de Mauro, sessão 3.

Também na sessão 8 (Fig. 10) verificamos a compreensão das relações através das resoluções nas fichas de trabalho e da discussão em grande grupo.

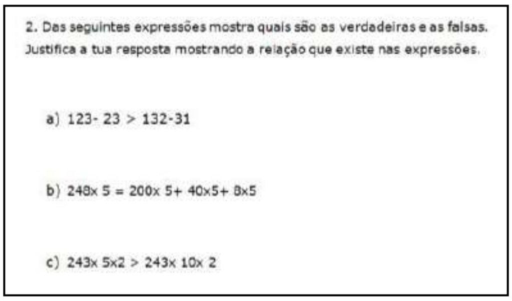

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta. Justifica a tua resposta.

73x____= 73x10+ 73x2

____+ 22= 15+ 24

80: 4= 80: _____:_____

55-____= 50-10


2. Das seguintes expressões mostra quais são as verdadeiras e as falsas. Justifica a tua resposta mostrando a relação que existe nas expressões.

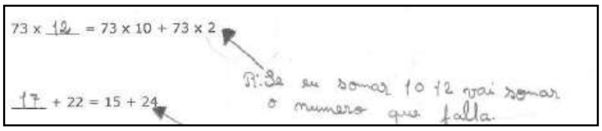
a) 123- 23 > 132-31

b) 248x 5 = 200x 5+ 40x5+ 8x5

c) 243x 5x2 > 243x 10x 2

Figura 10. Questões da sessão 8.

Nesta sessão temos dois tipos de questões, primeiro de valor omisso e depois de verdadeiro e falso. As resoluções seguintes (Fig. 11 e 12) refletem o entendimento que os alunos têm da relação de igualdade:


73 x 12 = 73 x 10 + 73 x 2

17 + 22 = 15 + 24

R: Se eu somar 10 12 vai somar o numero que falta.

Figura 11. Resolução de Tânia, Sessão 8.

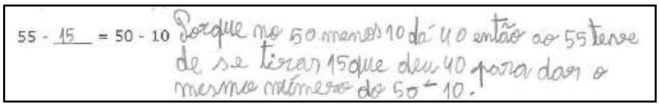

55 - 15 = 50 - 10 Porque no 50 menos 10 dá 40 então ao 55 teve de se tirar 15 que deu 40 para dar o mesmo número do 50 - 10.

Figura 12. Resolução de Gonçalo, Sessão 8.

Tânia reconhece a igualdade entre os dois membros da expressão e, por essa razão, escolhe o número 12 para o valor omisso. Também Gonçalo tem a perceção que existe igualdade entre os dois membros da expressão e justifica o número 15 com a comparação que faz com o segundo membro. Ao longo da discussão coletiva, a grande maioria dos alunos refere a relação existente nesta expressão:

> Investigadora: Mauro como é que tu fizeste?
> Mauro: Tinha 55 e tinha de dar 50 menos 10 que é igual a 40. Tirei 10 deu 45, menos 5 e deu 40.
> (…)
> David: Eu fiz 50 menos 10 dá 40. Depois percebi que 10 mais 5 dava 15 então somei esse 10 mais 5 que dava 15 e subtrai 55 menos 15.
> Investigadora: Onde é que tu foste arranjar o 5?

> David: Disse 15.
> Investigadora: Sim mais tu disseste 10 mais 5 igual a 15. Onde é que tu foste buscar o 5?
> David: Dos 55.

Verificamos que a turma vê o sinal de igual como indicando equivalência e não apenas como resposta a um cálculo.

*Dificuldades na compreensão das relações*

Contudo, existem dificuldades que se evidenciam em algumas sessões. Em primeiro lugar, muitos alunos mostram não perceber que a subtração não goza da propriedade comutativa (Fig. 13):

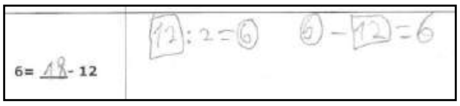



Figura 13. Resolução de Tiago, sessão 1.

Apesar deste erro comum, alguns alunos conseguem compreender a incorreção, manifestando-o no momento de discussão coletiva:

> Investigadora: Então quem é que concorda agora com o David? (Mara coloca do dedo no ar) Porquê?
> Mara: Porque também pode dar 6.
> Investigadora: Também pode dar 6?
> Mara: E também pode dar 18. Dá de duas maneiras.
> Investigadora: Então explica-me como é que pode dar o 6… Tu consegues tirar ao 6, 12?
> Mara: Não…
> Investigadora: Então achas que esta expressão que está aqui está correta [6: 12 = 6]?
> Mara: Não.
> (…)
> David: Porque 12 é o dobro de 6.
> Investigadora: Então como é que nós tínhamos que pôr, se quiséssemos que desse 6?
> Mara: 12 menos 18…
> Investigadora: Mas o 12 está do outro lado (lado direito do 18). Então tinha que ser que número?
> David: 18.

Observando a resolução de David, o único aluno que coloca a resposta correta, ao longo da discussão os alunos conseguem compreender porque é que a resposta não pode ser 6.

Também na sessão 8 verificamos que Beatriz não interpreta corretamente a relação de igualdade (Fig. 14):

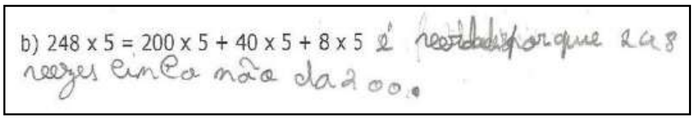



Figura 14. Resolução de Beatriz, sessão 8.

Neste caso, perante uma expressão de verdadeiro/falso, os alunos têm que compreender a relação existente, tentando descobrir e justificar se esta é verdadeira ou falsa. Inicialmente Beatriz afirma que a expressão é falsa e muda para verdadeira no momento da discussão coletiva. Contudo, a sua justificação confirma-nos que a aluna não compreende a relação de igualdade porque vê 200 como a resposta a um cálculo e não como um termo do segundo membro da expressão.

**Uso de raciocínio relacional**

Ao longo da experiência de ensino detetamos muitos casos de uso de raciocínio relacional.

*Raciocínio de compensação*

Nas sessões 3 e 8 os alunos usam raciocínio de compensação, para descobrirem o símbolo que falta na expressão e encontrarem o valor em falta (Fig. 15 e 16):

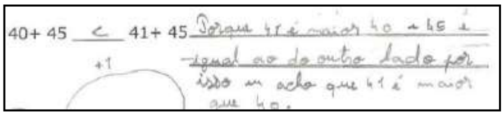



Figura 15. Resolução de Tânia, sessão 3.

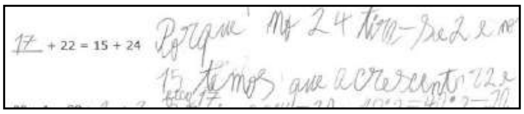



Figura 16. Resolução de João, sessão 8.

Nas duas resoluções os alunos não recorrem a cálculos e encontram o símbolo e o valor correto quando analisam a estrutura da expressão. Neste caso, olham para os dois membros da expressão e relacionam-nos entre si.

*Outras estratégias relacionais*

A turma desenvolve também raciocínios relacionados com a decomposição de fatores de modo a facilitar os cálculos, como se verifica no seguinte problema (Fig. 17) proposto na sessão 5:

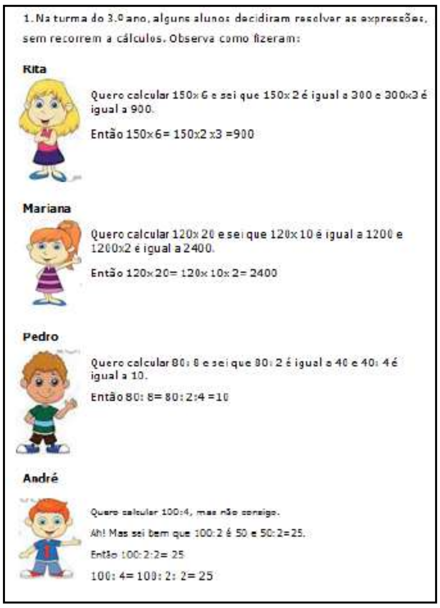
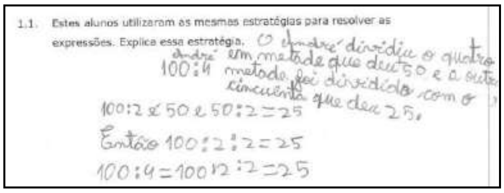



Figura 17. Questão da sessão 5.

A turma tinha que explicar as diferentes estratégias representadas. Surgem então diversas resoluções, destacando-se as de Gonçalo e Rafaela (Fig. 18 e 19):



1.1. Estes alunos utilizaram as mesmas estratégias para resolver as expressões. Explica essa estratégia. O André dividiu o quatro em metade que deu 50 e a outra metade foi dividida com o cinquenta que deu 25.

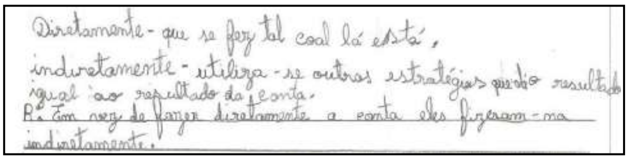
100:4

100:2 é 50 e 50:2=25

Então 100:2:2=25

100:4=100:2:2=25

Figura 18. Resolução de Gonçalo, sessão 5.



Diretamente - que se faz tal coal lá está,
indiretamente - utiliza-se outras estratégias que dão resultado igual ao resultado da conta.
R: Em vez de fazer diretamente a conta eles fizeram-na indiretamente.

Figura 19. Resolução de Rafaela, sessão 5.

A referência que Gonçalo faz em linguagem matemática foi retirada do enunciado, mas o que escreve em linguagem natural é a sua justificação. Rafaela justifica de forma mais geral explicando que quando não conseguimos resolver diretamente uma expressão podemos resolvê-la indiretamente simplificando os cálculos.

Na sessão 6, alguns alunos usam estratégias relacionais para resolver um problema (Fig. 20).

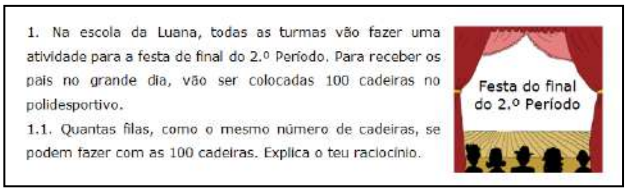

1. Na escola da Luana, todas as turmas vão fazer uma atividade para a festa de final do 2.º Período. Para receber os pais no grande dia, vão ser colocadas 100 cadeiras no polidesportivo.
1.1. Quantas filas, como o mesmo número de cadeiras, se podem fazer com as 100 cadeiras. Explica o teu raciocínio.


Figura 20. Questão da sessão 6.

Nesta situação, o objetivo é que desenvolvam diferentes estratégias de resolução sem recorrer a cálculos. Além disso, espera-se que tenham consciência das diferentes opções que podem surgir. David conseguiu decompor o número 100 de diferentes maneiras e apresenta uma expressão que demonstra as adições sucessivas que fez (Fig. 21).

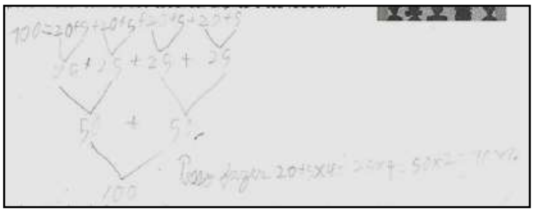


Figura 21. Resolução de David, sessão 6.

*Compreensão das propriedades*

Por último, observamos o uso de raciocínio relacional quando os alunos mostram compreensão das propriedades das operações. Embora não consigam identificar as propriedades de modo formal, conseguem explicar o que acontece nas expressões. A resolução seguinte (Fig. 22) surgiu na sessão 6 numa questão cujo objetivo era verificar se uma expressão era verdadeira ou falsa.

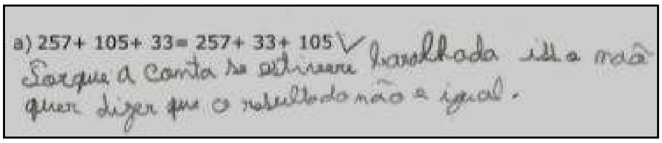



Figura 22. Resolução de Beatriz, sessão 6.

Beatriz, ao olhar para a expressão, reconhece que esta é verdadeira porque apenas há uma troca na ordem dos termos de uma expressão e o resultado mantém-se.

É também no momento de discussão coletiva que compreendemos que os alunos têm bem presente a propriedade comutativa:

> Investigadora: Então a primeira expressão é verdadeira ou é falsa?
> Vários alunos: Verdadeira.
> Investigadora: Porquê, Mauro?

> Mauro: Porque só trocaram os lugares do 105 e do 33.

Neste caso, os alunos explicam a relação que existe na expressão e, mais uma vez, compreendem que os dois membros têm o mesmo valor, sem necessitarem de fazer cálculos para perceberem que esta é verdadeira.

## Generalizações

A segunda questão deste estudo relaciona-se com as generalizações que os alunos revelam ser capazes de fazer, nomeadamente sobre propriedades matemáticas. A grande maioria das generalizações surge nos momentos de discussão coletiva quando os alunos apresentam as suas estratégias e justificam os seus raciocínios. De modo gradual foram-se construindo generalizações em linguagem natural.

### *Generalização de argumentos*

Algumas generalizações realizadas são generalização de argumentos, em que o aluno repete uma ideia que já é tida como certa, como na sessão 1 (Fig. 23):

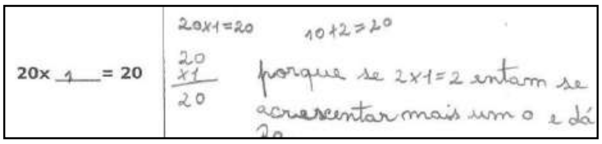



Figura 23. Resolução de Rafaela, Sessão 1.

Também noutros momentos de discussão coletiva surge este tipo de generalização tendo como base a propriedade da existência do elemento neutro:

> Investigadora: Joana diz lá.
> Joana: Eu pus 20×1 porque se fosse 20 com qualquer outro número não dava.
> (…)
> Joana: Qualquer número que nós pusermos vezes um, esse número que nós pusermos vezes um é o resultado.

Joana percebe que este caso pode ser transposto para outros valores, sem ter a noção que está a utilizar uma propriedade matemática.

### *Estratégia a+b-b=a*

Também a generalização da estratégia a+b–b=a surgiu na sessão 2, quando os alunos tiveram que explicar qual é relação que existe entre cada uma das expressões (Fig. 24):

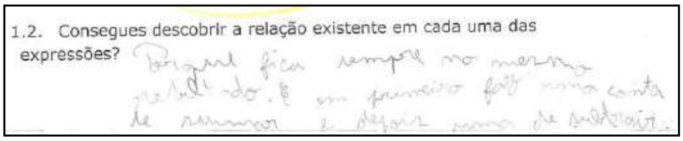



Figura 24. Resolução de Tiago, Sessão 2.

Neste caso, Tiago compreende que o resultado é sempre igual em todas as expressões, ou seja, o segundo membro é sempre igual ao primeiro. Mas vai mais além quando explica porque isso acontece—porque se faz uma adição e depois uma subtração, apenas não referindo que tem que ser com o mesmo valor.

*Transposição de um caso concreto para qualquer número*

Tal como já referido, é nos momentos de discussão coletiva que surgem a grande maioria das generalizações. A transcrição seguinte da sessão 5 demonstra a tentativa de transpor uma estratégia usada num certo caso para qualquer número. A discussão tem em vista compreender que a estratégia de simplificação de cálculos não serve apenas para os números desta questão, mas sim quaisquer números que surjam:

> David: Porque se nós não soubermos, por exemplo, x número multiplicado por 6 podemos utilizar uma estratégia com outras contas diferentes que pode dar o resultado.
> Investigadora: Ele está a dizer que se não conseguirmos arranjar um x número?
> David: Sim um número qualquer…

David já usa de forma muito espontânea a expressão *x número* tendo a noção que esta situação poderá surgir para outros números para além dos apresentados. Uma situação idêntica registou-se na sessão 7 em que os alunos intervieram em conjunto procurando elaborar uma frase que demonstrasse uma dada equivalência.

## Conclusão

A grande maioria dos alunos consegue reconhecer as relações de igualdade e desigualdade e interpreta corretamente tanto os sinais de igual como de maior e menor. Os alunos deixam de interpretar a relação de igualdade de uma forma limitada, apenas como indicando a resposta a um cálculo (Carpenter, Franke, & Levi, 2003), e demonstram desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente compreendendo as relações estabelecidas (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005). No final das sessões, conseguem olhar para as expressões e reconhecer as relações existentes entre os números e as operações e desenvolvem a capacidade de resolver questões não apenas de modo operacional, mas também por raciocínio relacional. Desta forma, a sua aprendizagem da Aritmética é muito mais significativa, tal como referido por Carpenter, Franke, e Levi (2003). Como indicam Valverde e Vega-Castro (2013) os alunos conseguem aliar o sentido estrutural das expressões com o raciocínio relacional, ou seja, observam muito mais as relações e a estrutura das expressões, procurando resolvê-las sem recorrer a raciocínio operacional.

Percebemos também que, tal como no estudo de Carpenter, Franke, e Levi (2003), com tarefas de valor omisso e de verdadeiro e falso os alunos procuram o valor omisso ou tentam perceber qual é a veracidade da expressão através de raciocínio relacional e desenvolvem estratégias de simplificação de cálculos para solucionar questões aritméticas. Apesar disso, algumas dessas estratégias acabam por não estar corretas, nomeadamente em expressões que envolvem a subtração. Nas questões de valor omisso, numa fase inicial, os alunos generalizam a propriedade comutativa da adição para expressões envolvendo a subtração. Têm consciência da existência desta propriedade e que esta pode ser utilizada para simplificar cálculos, mas não compreendem que ela não se aplica à subtração (tal como em Fuson et al., 1997). Um caso interessante é o de Beatriz, que apenas chegou nas últimas sessões do estudo, e que comete erros que não encontramos em mais nenhum aluno. A aluna não interpreta a relação de igualdade do mesmo modo dos colegas e vê o sinal de igual apenas como resposta a um cálculo. Na relação de ordem a aluna não compreende que um membro da expressão tem que ser maior que outro.

À semelhança do que acontece noutros estudos (e.g., Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Carpenter & Levi, 2000), as primeiras generalizações estão relacionadas com o número 0. Além disso, tal como no estudo de Ellis (2011), as generalizações são elaboradas em momentos de discussão coletiva, através do debate e partilha de ideias, a partir de expressões generalizáveis. No entanto, as generalizações apenas surgem quando é pedido de forma explícita aos alunos para criar uma frase ou expressão que demonstre o que foi feito. Ou seja, estes não conseguem ainda utilizar símbolos e criar expressões generalizadas com autonomia (Arcavi, 2006). É também de sublinhar que o trabalho baseado na discussão em grande grupo, com partilha de ideias, ajudou manifestamente os alunos na justificação das suas estratégias.

**Referências**

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et al. (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A., P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *2*, 81-118.

Carpenter, T, Levi. L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, *37*(7), 53- 59.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Ellis, A., B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308-345.

Fuson, C. K., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*, 130-162.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317- 326.

Molina, M., Castro, E., & Castro, H. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(7), 341-368.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (1944). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Valverde, G., & Vega-Castro, D. (2013). Acerca de las nociones sentido estrutural y pensamiento relacional. In L. Rico et al. (Eds.), *Investigacion en Didáctica de la Matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 119-125). Granada: Comares.

# O elemento "tempo" na avaliação para aprendizagem em Matemática

*Maria Augusta Raposo de Barros Brito*[1], *José Aurimar dos Santos Angelim*[2], *Isabel Cristina Rodrigues de Lucena*[3], *António Manuel Águas Borralho*[4]
*1Universidade Federal do Pará, Campus Bragança*, araposo@ufpa.br
*2Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano, Campus Senhor do Bonfim*, aurimar@ufpa.br
3*Universidade Federal do Pará, Campus Belém*, ilucena@ufpa.br,
*4Universidade de Évora*, amab@uevora.pt

## Introdução

O estudo das práticas avaliativas do professor de matemática, no Brasil, vem-se manifestando de forma contínua e tem emergido numa amplidão de dimensões investigativas, com destaque para o elemento tempo como balizador dos processos de ensino e aprendizagem matemáticos. Desta forma, institui-se a validade de uma investigação que aponte as suas relações com o docente e discente e suas atividades no cotidiano, inter-relacionando-se os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação em função de um tempo próprio desse fazer docente, o que conduz a situar o elemento na organização do trabalho docente.

Este póster retrata um projeto de investigação que se encontra em desenvolvimento, centrado na organização do trabalho docente, inserido num projeto, de maior abrangência, de cooperação internacional entre Brasil e Portugal intitulado "Avaliação e Ensino na Educação Básica em Portugal e no Brasil: Relações com as Aprendizagens (AERA)", celebrado entre a Universidade Federal do Pará e a Universidade de Évora. Tem como objetivo, compreender o elemento tempo nas práticas avaliativas de matemática, perpassando pelo planejamento da aula e a concretização da mesma.

## Fundamentação Teórica

Os estudos (Esteban, 2000; Buriasco, 2002) em torno da avaliação da aprendizagem têm demonstrado, a importância do papel do professor, considerando que diversas são as responsabilidades que o mesmo deve assumir, dentre elas o olhar em torno do elemento "tempo" no processo de aprendizagem.

Hoje em dia pode-se reconhecer que nas escolas esse elemento é retratado por aspetos como "o tempo de ter, o tempo de buscar, o tempo para aprender, o tempo para interagir". (Hoça & Portilho, 2007, p. 2068) e, portanto, gerador de uma dinâmica curricular, metodológica e avaliativa em sala de aula, onde se desenvolve um fazer matemático condicionado a um referencial de tempo específico da escola, distinto daquele que é vivenciado na sociedade.

Ao falarmos do elemento "tempo" destacamos a proposição de tarefas apropriadas aos alunos, a utilização de um sistema permanente e inteligente de *feedback* que apoie efetivamente os alunos na regulação de suas aprendizagens (Fernandes, 2009), entre outras ações, que devem considerar o tempo de aprendizagem dos alunos relacionado com o tempo de socialização com o professor e colegas.

## Metodologia

O quadro metodológico é assente no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) tomando por *design* o estudo de caso exploratório (Yin, 1993), figurando-se, portanto, numa abordagem qualitativa.

O estudo centra-se na problemática das práticas de ensino e de avaliação dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A coleta de dados ocorre numa turma do 3º ano do 1º ciclo do ensino básico, através de observações de aulas e entrevistas ao professor e aos alunos. Assim, parte significativa dos dados da investigação é obtida no contexto real de sala de aula (observação) e através da interação com alunos e professor (entrevistas).

## Discussão preliminar

Embora o estudo esteja em desenvolvimento, há dados preliminares que são oriundos das observações das aulas que apontam características do elemento tempo proposto nessa investigação. No tocante à planificação e à ação de aula, nota-se que são realizadas em torno de tarefas matemáticas estruturadas em 4 (quatro) fases que coadunam com o exposto por Hoça & Portilho (2007): a) Apresentação e apropriação da tarefa – o tempo de ter; b) Resolução da tarefa – O tempo de buscar; c) Discussão das soluções e resultados – tempo para interagir; e d) Reflexão, sistematização e síntese – o tempo para aprender.

Na fase a), o tempo é o de os alunos se apropriarem e de se envolverem na tarefa. Na fase b) é o momento em que o professor organiza, normalmente, os alunos em pequenos grupos para trabalharem sobre a tarefa e o seu papel é apoiar os alunos no desenvolvimento da tarefa. Na fase c) o professor, de acordo com seus critérios, seleciona alguns grupos para apresentarem o seu trabalho à turma, interagindo com os demais grupos. Na fase d), é onde se discute a súmula do trabalho desenvolvido, evidenciando-se as aprendizagens visadas. As fases c) e d), em muitas ocasiões, ocorrem simultaneamente. Em qualquer uma das fases, o *feedback* é uma presença constante nas práticas avaliativas do docente, levando os alunos a refletirem sobre os seus progressos e dificuldades.

## À guisa de conclusões

A escolha deste caso evidencia um contexto bastante organizado do processo de avaliação, ensino e aprendizagem da matemática onde o elemento tempo surge como gerador de implicadores para a concretização dessa organização.

Conforme descrito na seção anterior, o que registramos como implicador tanto do ensino quanto da aprendizagem e da avaliação é o tempo para a consecução da aula e a resolução das tarefas por parte dos alunos. Se observarmos com mais profundidade, percebe-se que o uso do *feedback* se tornou algo importante nos quatro aspetos citados por Hoça & Portilho (2007) e associado às fases da organização docente apresentados.

## Referências

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Buriasco, R. (2002). Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão. *Educação em Revista, 36*, 255 – 263.

Esteban, M. (2000). Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. In *23ª Reunião Anual da ANPEd*, Caxambu, MG, 24-28 Set. 2000. Acedido em Julho 29, 2013, em www.anped.org.br/reunioes/23/textos/0611t.PDF.

Fernandes, D. (2009). *Avaliar para aprender: fundamentos, práticas e políticas*. São Paulo: Editora UNESP.

Hoça, L. & Portilho, E. (2007). Os elementos tempo/espaço na prática pedagógica dos professores: um olhar para a organização do ensino em ciclos. *Anais do VII EDUCERE*. Curitiba: Editora Champagnat. Acedido em Dezembro 15, 2014 em http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2007/anaisEvento/arquivos/CI-273-05.pdf.

Yin, R. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

# "O lobo, a ovelha e a couve" - do jogo em contexto não formal ao problema em sala de aula

*Fátima Regina Jorge*[1], *Fátima Paixão*[2], *Ana Filipa Heitor*[3], *Ana Raquel Taborda*[4]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores -CIDTFF, Universidade de Aveiro, frjorge@ipcb.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores -CIDTFF, Universidade de Aveiro, mfpaixão@ipcb.pt
[3]Centro Social da Paróquia de São Sebastião da Pedreira, anafilipa14@msn.com
[4] Escola Raiz, ana_taborda@msn.com

## Enquadramento

Se bem que seja indiscutível a centralidade que a resolução de problemas deve ocupar no ensino da matemática, é menos frequente tal posição ser assumida em relação ao jogo. Ora, desde que bem escolhido, o jogo tem inerente um fator motivacional que predispõe naturalmente para a realização de atividade matemática. O recurso ao jogo "é particularmente interessante quando nos perguntamos quais são os métodos mais adequados para transmitir a nossos alunos o profundo interesse e o entusiasmo que a matemática pode gerar e para proporcionar uma primeira familiarização com os processos usuais da atividade matemática" (Guzmán, 1993, p. 24).

Por acreditarmos que a escola não é o único local onde devem ser desenvolvidas as aprendizagens, procurámos perceber em que medida a utilização de contextos não formais, contribui para a motivação das crianças, para o desenvolvimento de aprendizagens curriculares significativas, enriquecedoras do trabalho desenvolvido em sala de aula. De facto, a saída do contexto escolar pode ser aproveitada para suscitar o gosto, o prazer e a motivação na realização de atividades matemáticas, potenciar o crescimento das capacidades relacionais dos alunos e, ao mesmo tempo, estimular o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e comunicação (Nogueira, 2014; Morentin & Guisasola, 2014).

**Objetivo e metodologia**

Apresentamos parte de um estudo desenvolvido numa turma do 2.º ano de escolaridade, que envolveu a planificação, implementação e avaliação de uma visita ao Horto de Amato Lusitano - contexto não formal. O estudo teve como objetivo analisar em que medida envolver os alunos na realização de tarefas de natureza problemática, apresentadas de modo lúdico sob a forma de jogo num contexto de educação não formal, se repercute na motivação para a realização de atividade matemática e na aprendizagem matemática.

Face ao exposto, adotou-se por um estudo de natureza qualitativa na modalidade de investigação-ação. Das técnicas e instrumentos de recolha de dados destacamos a observação, as notas de campo, o registo fotográfico e os registos textuais e gráficos produzidos pelos alunos.

**Discussão**

A tarefa “O lobo, a ovelha e a couve” foi, num primeiro momento, proposta no âmbito de um percurso de orientação espacial no espaço físico do Horto. Os alunos organizados em três grupos (6 a 7 alunos) e acompanhados por um professor que assumiu o papel de mediador, começaram por ler o enunciado da tarefa, seguindo-se um período de diálogo sobre a situação apresentada. De início todas as soluções apontadas de forma individual acabaram por fracassar. Porém, de forma espontânea, os alunos começam a simular a situação: um aluno fez de barqueiro, outro de lobo, outro de ovelha e outro de couve. Os restantes elementos do grupo ficaram encarregues de orientar as movimentações dos colegas e registá-las no guião (fig. 1). A este propósito, destacamos o comentário de um aluno acerca da simulação realizada: “Isto é brutalmente engraçado!”.

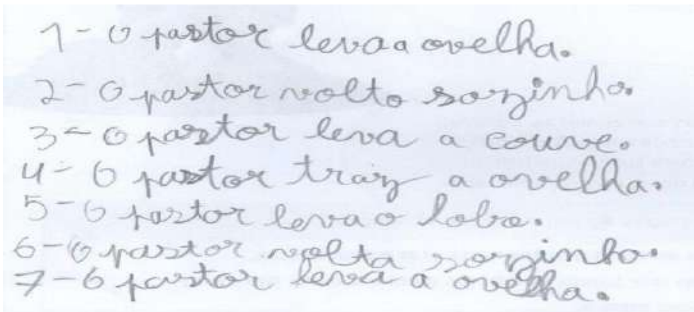
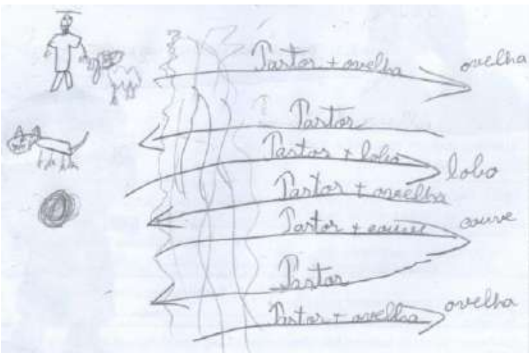




Figura 1. Grupo de crianças a jogar e o registo da estratégia encontrada

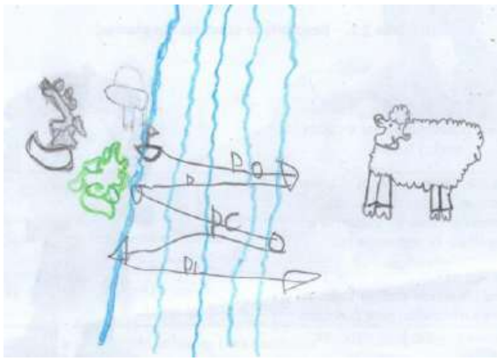
A forma como os alunos, autónoma e cooperativamente, assumiram a tarefa permite afirmar que esta assumiu características de jogo matemático: carater lúdico, natureza problemática, necessidade de raciocínio, estratégia e reflexão e predisposição para encontrar uma solução.

Na tarde do dia da visita e já em sala de aula, a tarefa salientou-se como uma das mais apreciadas e referidas tanto nos desenhos como nos textos produzidos: *Lá diverti-me muito e aprendi coisas novas. Aprendi um jogo novo e as personagens eram o lobo, a ovelha, a couve e o pastor; A atividade que eu mais gostei foi o problema do lobo, da ovelha, da couve e do pastor*.

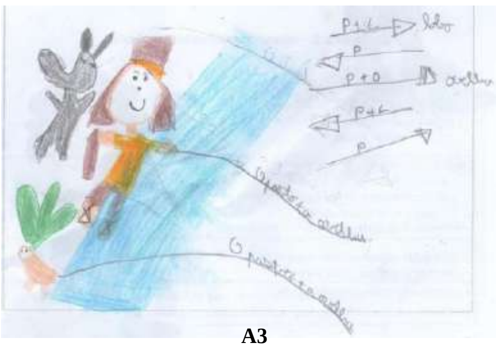
No dia seguinte, foi pedida a resolução individual do problema. De registar, o interesse e motivação evidenciada e a tendência em apresentar o raciocínio através de setas, representativas das viagens entre margens. Porém, nem todos os alunos fizeram uma legenda que evidencie como pensaram. Outro dado importante é o de alguns terem ficado “presos” à estratégia usada no Horto, mostrando dificuldade em fazer uma resolução mais conceptual. A título ilustrativo, apresentam-se as resoluções de quatro alunos (fig. 2) nas quais são visíveis: a adoção uma estratégia adequada (A1); resolução sem verificação da solução (A2); várias estratégias iniciadas mas nenhuma concluída (A3); aparente evocação da resolução seguida no Horto sem explicitação dos passos (A4).




**A1**



**A 2**



**A3**

**A4**

Figura 2. Resoluções em sala de aula

As várias estratégias foram posteriormente partilhadas e discutidas em grupo turma, estimulando o confronto de ideias e o raciocínio matemático.

Dos resultados sobressaem como conclusões: a assunção do problema em contexto não formal como um jogo em que as crianças interagiram e colaboraram para a obtenção da solução, contribuiu para a compreensão das condições do problema e para a verificação da adequação da estratégia usada; o carácter lúdico que a atividade assumiu em contexto não formal foi transferido para a sala de aula, sendo notório o enorme entusiasmo e predisposição com que os alunos se envolveram de novo na resolução do problema.

Em síntese, os alunos viveram, na interação entre os dois contextos, uma experiência de aprendizagem que os motivou para a realização de atividade matemática, promoveu capacidades de raciocínio e resolução de problemas e ainda atitudes de cooperação.

## Referências

Guzmán, M. (1993). Tendências inovadoras en educación matemática. *Boletim da SPM*, 25, 9-34.

Moretin, M. & Guisasola (2014). La visita a un museo de ciencias en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11(3), 364-380.

Nogueira, S. (2014). *Exploração Matemática de módulos interativos de ciências: um estudo de caso no "Jardim da Ciência" em articulação com a sala de aula com alunos do 1.º ciclo do ensino básico.* Aveiro, Universidade de Aveiro. Tese de doutoramento (não publicada).

# Leitura matemática e texto literário: construção de tarefas para a sala de aula

*António Guerreiro*[1], *Sofia Graça*[2]
[1]Universidade do Algarve, aguerrei@ualg.pt
[2]Universidade do Algarve, soffiagraca@hotmail.com

O intento deste *poster* é apresentar as linhas centrais de um plano de intervenção educacional que pretende desenvolver a leitura matemática e a construção do conhecimento matemático através de textos literários em que existem, de forma implícita ou explícita, problemas matemáticos.

## A leitura matemática

A leitura matemática é um ato de conhecer, compreender, transformar e interpretar um texto escrito, perspetivando um papel significativo na construção do conhecimento matemático, desde que seja compreendida como um processo que se constrói na interação entre o leitor e o texto (Smole & Diniz, 2001), suplantando a verbalização dos enunciados das tarefas matemáticas, atingindo uma importante componente interpretativa e de reconstrução do texto escrito. À leitura de textos que espelham exclusivamente conteúdos e linguagem matemática, como os manuais escolares, livros didáticos ou de divulgação científica, devemos acrescentar textos de outros contextos no ensino da matemática, como textos informativos e textos literários, conduzindo a uma sofisticação na comunicação matemática (Price & Lennon, 2009).

## O texto literário na educação matemática

A inclusão do texto literário e da matemática desenvolve a capacidade de comunicação e de compreensão de conceitos de matemática, a par da identificação pelos professores de conceções erróneas no decorrer das práticas comunicativas (Price & Lennon, 2009). De acordo com Welchman-Tischler (1992, referenciado por Souza & Oliveira, 2010), existem diferentes modos de usar textos literários ou histórias na aprendizagem da matemática, entre outros: (*i*) fornecem o contexto para uma atividade com conteúdos matemáticos; *(ii)* possibilitam o uso de materiais manipuláveis que podem posteriormente ser reutilizados sem recurso ao texto literário; (*iii*) inspiram experiências criativas com a matemática; (*iv*) propõem um problema interessante; e (*v*) preparam e explicam conceitos ou competências matemáticas.

## Matemática em textos literários

Em *O homem duplicado*, Saramago aborda o sentido do número, suportado no raciocínio matemático do professor de história Tertuliano Máximo Afonso, refletindo o sentido das operações numéricas:

> Quantos são, Trinta e seis, Isso dará quantas horas, Se continuarmos a fazer contas pela média de hora e meia cada filme, ora deixe-me ver, disse o empregado, deitando desta vez a mão à calculadora, Escusa de se cansar, eu digo-lhe, são cinquenta e quatro horas, Como é que conseguiu tão depressa, perguntou o empregado, eu, desde que apareceram estas máquinas, embora não tenha perdido a habilidade para fazer cálculos de cabeça, uso-as para as operações mais complicadas, É facílimo, disse Tertuliano Máximo Afonso, trinta e seis meias horas são dezoito horas, logo, a soma das trinta e seis horas inteiras que já tínhamos com as dezoito de meias que obtivemos dá cinquenta e quatro (Saramago, 2002, pp. 75-76).

## Metodologia de investigação

A metodologia adotada para o desenvolvimento desta intervenção educativa tem por base o *Design Research* (Anderson & Shattuck, 2012) que procura resolver problemas educativos em contextos reais, em colaboração com educadores e professores, através da implementação de propostas didáticas, fundamentadas teoricamente, e da reflexão sobre as consequências destas ao nível da motivação e da aprendizagem dos alunos. A proposta de ação metodológica assenta na conceção e na implementação de tarefas matemáticas com recurso a textos literários.

A conceção de tarefas matemáticas, num ambiente de trabalho colaborativo, envolve a seleção de textos literários, a construção das tarefas matemáticas e do guião da aula, através da definição de questões orientadoras para a leitura dos referidos textos, da exploração dos conceitos matemáticos envolvidos, da antecipação das dificuldades e das resoluções dos alunos, tendo em atenção as dinâmicas de comunicação matemática e de interação social na sala de aula, com especial incidência na leitura matemática.

A implementação em sala de aula das tarefas matemáticas com recurso a textos literários, com a consequente recolha das produções orais e escritas dos alunos, complementa-se com a recolha e a análise interpretativa dos dados, os quais constituir-se-ão em material de reflexão e de discussão entre o investigador e os professores, tendo em vista a apropriação de conceitos e de ideias matemáticas através da leitura e discussão de textos literários.

**Considerações últimas**

A matemática e a literatura, apesar de pouco explorada nas escolas, poderão proporcionar condições para uma significativa aprendizagem da matemática. As caraterísticas específicas de textos literários, diferentemente dos textos literários infantis e juvenis, podem criar condições para a interação e discussão dos alunos sobre o significado matemático dos textos literários. Pretende-se equacionar se o processo de construção de conceitos matemáticos pode ser facilitado mediante a conexão da matemática com os textos literários e de que modo as práticas de leitura matemática podem ser exploradas pelo professor a partir da seleção e conceção de tarefas matemáticas com recurso a textos literários.

**Referências**

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher, 41*, 16-25.

Gestoso de Souza, A. P. & Anunciato de Oliveira, R. M. (2010). Articulação entre Literatura Infantil e Matemática: intervenções docentes. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, 955-975*

Price, R. R. & Lennon C. (2009). *Using Children's Literature to Teach Mathematics*. NC: Quantile.

Saramago, J. (2002). *O homem duplicado*. Lisboa: Caminho.

Smole, K. & Diniz, M. (2001). Ler e Aprender Matemática. In Smole, K. & Diniz, M. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas* (pp. 69-86). Porto Alegre: Artmed Editora.

# O professor e o uso do texto na aula de Matemática

*Maria Helena Martinho*[1], *Maria do Céu Melo*[2], *Juliana Braga*[3]
[1] CIEd – Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt
[2] CIEd – Universidade do Minho, mmelo@ie.uminho.pt
[3] CIEd – Universidade do Minho, julbraga@gmail.com

## Objetivos

O ponto de partida deste estudo é a observação de que a aprendizagem é uma prática de literacia. Por literacia entendemos a capacidade de interpretar, criticar e produzir informação matemática relevante para a resolução de problemas quotidianos. Compreender a aprendizagem desse modo levanta novas questões de investigação relevantes para a explicação do processo de aprendizagem e da promoção da sua eficácia e para a construção de um autêntico *engagement* nos discursos disciplinares. Neste estudo pretendemos explorar a prática e perspetiva dos professores face aos textos e a utilização que deles fazem em contexto da sala de aula de Matemática: Qual a importância que o professor de Matemática atribui à leitura na sala de aula? Que tipo de textos propõe aos alunos e com que objetivos? Quais as estratégias de leitura que preconiza? Quais as dificuldades e as expectativas relativamente ao uso dos textos pelos alunos?

## Contexto

A investigação em torno destas questões permitirá identificar textos/tarefas que apoiem o *engagement* dos alunos e estratégias para desenvolver a compreensão da Matemática (Adams & Pegg, 2012; Brozo, Moorman, Meyer, & Trevor, 2013; Conley, 2012; Draper, 2010; Fang & Schleppegrell, 2008; Wilson, 2011). Diversos estudos apontam para o papel central que o professor tem no desenvolvimento e implementação dessas estratégias.

Apesar da afirmação repetida de que todo o professor é um educador da linguagem, ou um “educador da leitura” (Brozo et al., 2013), o significado do conceito literacia não está suficientemente claro ao longo do currículo. Em consequência as estratégias de promoção da literacia não são debatidas: por exemplo, a diferença entre as estratégias *outside-in* ou *inside-out* (Conley, 2012), i.e., que traga para dentro das turmas aproximações concretas para construção de significados através de textos isolados

(Fisher & Ivey, 2005) ou de práticas que contribuam para a compreensão dos conteúdos (Draper, 2010), não é abordada.

A matemática, como qualquer outra área curricular, tem um modo próprio de interrogar, organizar e exprimir (Unsworth, 2001), i.e. uma literacia específica, onde se inclui a prova e a argumentação (Barbosa & Martinho, 2014). A disciplina de Matemática apresenta, segundo Lee e Spratley (2010), problemas específicos de literacia que desafiam a aprendizagem dos alunos. Estes são habitualmente ensinados a identificar definições, conceitos, exemplos, explicações, diagramas, esquemas, gráficos, entre outros. Os professores por sua vez, aplicam estratégias de leitura, através da releitura, da produção de resumos, da identificação de dados relevantes e da construção de inferências a partir de textos. Siegel e Fonzi (1995) defendem a importância de integrar a leitura nas aulas de Matemática envolvendo os alunos na compreensão da linguagem e das técnicas da Matemática. A investigação enfatiza o envolvimento na escrita-leitura de textos como uma construção social e individual (Adams & Pegg, 2012; Solomon & O'Neill, 1998).

## O projeto

Este estudo, ainda em curso, tem uma natureza qualitativa (Seidman, 2006). Foca-se na análise de relatos de quatro professores de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico, de diferentes escolas, obtidos através de entrevistas semiestruturadas, na observação das suas práticas bem como dos próprios textos utilizados nas aulas. Este trabalho enquadra-se num projeto mais amplo que visa estudar as práticas de literacia em diferentes disciplinas escolares, a partir da perspetiva dos professores e dos alunos. A recolha de dados relativamente aos alunos envolve a gravação de sessões de trabalho em grupo e posterior entrevista de grupo.

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT–Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto «FCOMP-01-0124-FEDER-041405 (Refª. FCT, EXPL/MHC-CED/0645/2013)».

## Referências

Adams, A. E., & Pegg, J. (2012). Teachers' enactment of content literacy strategies in secondary science and mathematics classes. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 56*(2), 151–161. doi:10.1002/JAAL.00116

Barbosa, L. S., & Martinho, M. H. (2014). Mathematical literacy as a condition for sustainable development. In A. Cerone & D. Persico (Eds.) *Information Technology and Open Source: applications for Education, Innovation and Sustainability* (pp. 64-77). Berlin: Springer Verlag.

Brozo, W. G., Moorman, G., Meyer, C., & Trevor, S. (2013). Content area reading and disciplinary literacy. A case for the radical center. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 56*(5), 353-357. doi:10.1002/JAAL.153

Conley, M. W. (2012). Foregrounding the disciplines for teacher preparation in lecondary literacy. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 56*(2), 141-150. doi:10.1002/JAAL.00115

Draper, R. J. (Ed.). (2010). *(Re)Imagining content-area literacy instruction*. New York : Teachers College Press.

Fang, Z., & Schleppegrell, M. (2008). *Reading in secondary content areas: A language based pedagogy*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

Fisher, D., & Ivey, G. (2005). Literacy and language as learning in content-area classes: A departure from "every teacher a teacher of reading". *Action in Teacher Education, 27*(2), 3–11. doi:10.1080/01626620.2005.10463378

Lee, C. D., & Spratley, A. (2010). *Reading in the disciplines: The challenges of adolescente literacy*. New York, NY: Carnegie Corporation of New York.

Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in education and the social sciences*. London: Teachers College Press.

Siegel, M., & Fonzi, J. M. (1995). The practice of reading in an inquiry-oriented mathematics class. *Reading Research Quarterly, 30*, 632-673.

Solomon, Y., & O'Neill, J. (1998). Mathematics and narratives. *Language and Education, 12*(3), 210–221.

Unsworth, L. (2001). *Teaching Multiliteracies across the Curriculum. Changing Contexts of Text and Image in Classroom Practice*. Buckingham/Philadelphia: Open University Press, 2001.

Wilson, A. A. (2011). A social semiotics framework for conceptualizing content area literacies. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 54*(6), 435-444. doi:10.1598/JAAL.54.6.5

# Aspetos que influenciam o aparecimento de experiências de fluxo em futuros professores de educação básica

*Ana Belén Montoro Medina*[1], *Francisco Gil Cuadra*[2], *Fátima Paixão*[3]
[1]Universidade de Almeria, Espanha amontoro@ual.es
[2]Universidade de Almeria, Espanha fgil@ual.es
[3]Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro, Portugal
mfpaixao@ipcb.pt

## Marco teórico

O fluxo é um estado de profunda concentração e desfrute com a tarefa que se está a realizar, que influi no rendimento académico e no compromisso com a atividade que o produz. Este facto, conjugado com a relação existente entre as experiências de fluxo de estudantes e professores conduziu à nossa decisão de estudar o fluxo em estudantes futuros professores de educação básica (6 – 12 anos; educação primária em Espanha).

O aparecimento de fluxo depende da tarefa, da pessoa e do ambiente em que se realiza. É necessário que o estudante percecione um nível de alto desafio e sinta a sua capacidade ajustada à resolução da tarefa, tenha uma meta clara e receba *feedback* imediato. Além disso, também há referência à preferência dos estudantes por tarefas de complexidade intermédia (Heine, 1997). Além disso, Schweinle, Turner e Meyer (2008) mostraram que, em aulas de matemática com estudantes de capacidade média, estes desfrutavam mais e estavam mais concentrados quando a perceção da sua capacidade superava o nível de desafio percebido. Do mesmo modo, a utilidade da tarefa e o interesse por ela são aspetos muito importantes no momento de fluir.

## Objetivo

Um dos objetivos do nosso estudo foi criar um modelo (Fig 1) que sintetizasse os principais facilitadores e componentes das experiências de fluxo, fruto dos próprios dados recolhidos na investigação e de propostas de anteriores investigações, embora estas estivessem centradas, na sua maioria, em estudantes com talento.

Outro objetivo foi testar a influência das variáveis descritas no modelo no que respeita ao aparecimento de fluxo em futuros professores de educação básica e explorar como contribuem outros aspetos como o nível de autoconfiança, o rendimento e as interações com o grupo.

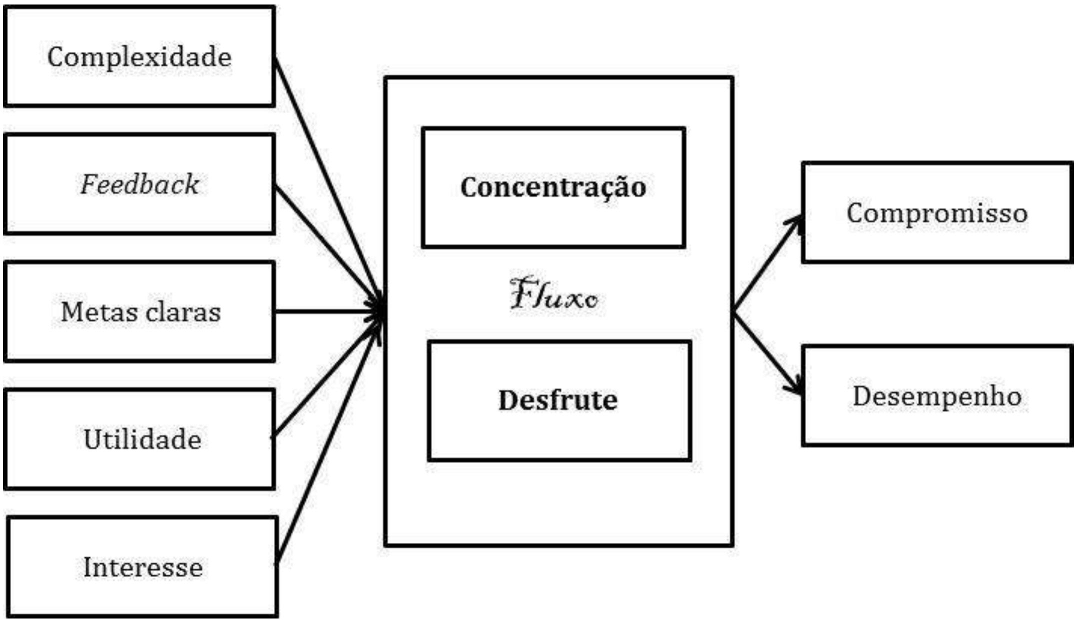



Figura 1. Facilitadores e componentes das experiências de fluxo

**Metodologia**

Numa primeira fase, recolheu-se informação sobre o nível de rendimento dos 230 participantes nas nove sessões de trabalho em grupo da disciplina "Ensino e Aprendizagem da Geometria e Medida", o seu grau de autoconfiança e motivação em matemática, a sua perceção sobre a tarefa e o nível de fluxo experimentado em cada tarefa. Para isso, utilizou-se o questionário usado em Montoro (no prelo) ao finalizar cada tarefa, gravações em vídeo dos estudantes a resolvê-la, a qualificação obtida em cada disciplina, um questionário sobre a experiência prévia em matemática e observações realizadas pelos professores.

A média nas pontuações obtidas no questionário fechado, nas variáveis da Figura 1 (facilitadores) era superior em situações de fluxo.

Para testar e melhorar o modelo, decidimos comparar o comportamento dos estudantes dos dois grupos de estudantes ao resolver duas tarefas específicas (tarefa 1 e tarefa 4). Para os selecionar tivemos em conta que a diferença na percentagem de estudantes em fluxo com a tarefa fora significativa (Fig 2) e que os grupos de estudantes tinham sido videogravados em ambas as tarefas.

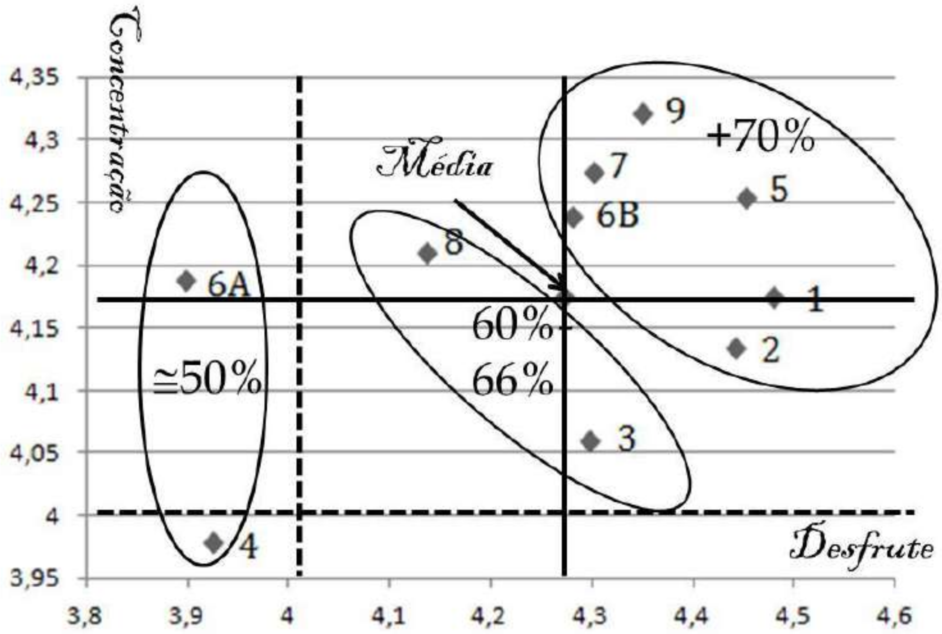



Figura 2. Nível de concentração, desfrute e percentagem dos estudantes em fluxo em cada tarefa

**Resultados**

Ao analisar os dados evidenciou-se que, na tarefa 1 (comparação de grandezas), sete dos nove estudantes experimentaram fluxo ao resolvê-la e os restantes desfrutaram com ela. Todos a consideraram útil, conheciam claramente o seu objetivo, receberam *feedback* e tinham os conhecimentos necessários para a resolver com êxito. A estimação supõe uma tarefa nova para todos, pelo que todos os sujeitos tinham algo para dar ao grupo e estavam interessados em ver quão acertada fora a sua previsão.

Pelo contrário, na tarefa 4 (obtenção de fórmulas para a superfície de figuras planas tomando como unidade o triângulo equilátero de lado 1) apenas o estudante do grupo 2, de rendimento alto e de alta motivação em matemática, afirmou ter experimentado fluxo na realização da tarefa. Duas estudantes de rendimento médio e autoconfiança alta deram mostras de fluir durante a busca de padrões, sobretudo durante e primeira parte da tarefa.

Analisando os vídeos percebemos que esta tarefa foi considerada como muito complicada; escrever a fórmula em linguagem algébrica foi considerado como aborrecido e o geoplano proporcionou *feedback* enganador para o retângulo. Além disso, no caso do grupo 1, vimos que a estudante com mais capacidades em matemáticas se encarregou de tirar notas, o que, associado à rapidez das outras duas colegas de rendimento médio, lhe retirou oportunidades de descobrir por ela mesma os padrões das figuras iniciais (antes de aparecer a retroalimentação enganosa do geoplano e aumentar a dificuldade da tarefa). O mesmo aconteceu à estudante com autoconfiança baixa que se desinteressou por completo a meio da tarefa.

No grupo 2, um dos estudantes de rendimento alto (que não experimentou fluxo) impunha a sua linguagem e as suas ideias, ignorando os contributos iniciais dos seus três colegas de rendimento e autoconfiança baixos e excluindo-os, e discutindo acaloradamente com o seu outro companheiro de rendimento alto. Ou seja, em conclusão, podemos dizer que os resultados do estudo sugeriram e corroboraram o modelo proposto (Fig 1).

## Referências

Heine, C. A. (1997). Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Chicago, Illinois

Montoro, A. B. (No prelo). *Motivación y matemáticas: Experiencias de flujo en estudiantes de Maestro de Educación Primaria*. Editorial Universidad de Almería. España. ISBN: 978-84-16027-59-0.

Schweinle, A., Turner, J.C, y Meyer, D.K. (2008). Understanding young adolescents` optimal experiences in academic settings. *The Journal of Experimental Education*, 77 (2), 125-143.

# O conhecimento matemático sobre tarefas na prática letiva: O caso de Berta[1]

Nadia Ferreira[2], *João Pedro da Ponte*[2]
[2]*Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*

## Objetivo

Neste poster procuramos compreender o conhecimento matemático e didático sobre tarefas de uma futura professora do 2.º ciclo relativamente ao ensino e a aprendizagem dos números racionais, tal como se evidencia da sua prática letiva e da sua reflexão.

## Conhecimento matemático e didático na prática letiva

A prática letiva do professor pode ser caraterizada por dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas aos alunos e a comunicação que se estabelece na sala de aula (Ponte, Quaresma, & Branco, 2012). Trata-se de uma atividade complexa que exige do professor um conhecimento matemático de natureza conceptual e um conhecimento didático aprofundado (Ponte & Chapman, 2015), que surgem no contexto da prática de modo integrado.

O conhecimento matemático é o conhecimento que o professor tem que ensinar e que tem que saber como se organiza. Envolve dois aspetos essenciais, o conhecimento conceptual, conhecimento em rede dos conceitos fundamentais, e o conhecimento processual, constituído por regras e procedimentos para resolver problemas matemáticos (Hiebert, 1988; Rittle-Johnson & Schneider, 2012).

No conhecimento didático, dizendo respeito ao modo como ensinar (Shulman, 1986), uma das dimensões essenciais refere-se às tarefas que os professores devem ser capazes de selecionar e sequenciar tendo em conta os propósitos definidos (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Devem reconhecer que as tarefas que propõem influenciam o modo como os alunos atribuem sentido à Matemática e a aplicam nas mais diversas situações. Na prática letiva o professor mobiliza o seu conhecimento matemático quando antecipa e resolve tarefas matemáticas (Chapman, 2013).

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora pela mesma fundação (referência SFRH/BD/99258/ 2013).

## Metodologia

O estudo assume uma abordagem qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), com um estudo de caso de uma futura professora (Berta). As quatro aulas que lecionou foram observadas e vídeogravadas. Foram ainda recolhidos e analisados dados das entrevistas semiestruturadas realizadas no início e no final do estágio e das entrevistas realizadas antes e depois da aula e documentos produzidos por Berta (planificações e reflexão escrita). A análise dos dados assume um cunho descritivo procurando (i) caracterizar a prática letiva e (ii) responder ao porquê de se terem realizado determinadas ações. Deste modo procuramos evidenciar o conhecimento de Berta na prática letiva, com atenção ao conhecimento didático e matemático sobre as tarefas.

## Resultados

Berta lecionou um 6.º ano e tinha de preparar os seus alunos para o exame nacional. Na primeira entrevista, indicou que os seus alunos sabiam resolver exercícios simples mas tinham muitas dificuldades em problemas mais complexos. Analisando as suas planificações e materiais verifica-se que Berta foi capaz de selecionar e sequenciar tarefas dando resposta aos propósitos que definiu. Considerou aspectos relativos à estrutura, contexto (problemas com contextos familiares) e nível de complexidade e sequenciou as tarefas estabelecendo um percurso de aprendizagem. Antecipou questões e explicações onde pretendia explorar representações simbólicas e pictóricas na realização das tarefas propostas construindo ideias matemáticas com os alunos.

Nas aulas, Berta explorou o conceito de fração (significado parte-todo), converteu as diferentes representações dos racionais (fração-decimal; percentagem-decimal-fração) questionando e explicando o porquê dos procedimentos e relacionando representações (pictóricas e simbólicas). Na resolução das tarefas não se focou apenas na realização dos procedimentos, explicando a sua razão de ser e procurando explorar os conceitos envolvidos. Nas entrevistas sublinha a importância do estabelecimento de relações entre várias representações dos números racionais. No entanto, esta preocupação por vezes não está presente na antecipação da prática o que criou dificuldades em algumas aulas, que a futura professora reconhece, embora considerando que foi melhorando ao longo das quatro aulas. Assim, na sua prática letiva a futura professora mobilizou o seu conhecimento matemático (processual e conceptual) e didático.

Este caso evidencia como o conhecimento matemático e didático do futuro professor se pode manifestar na prática letiva, apresentando-se aspectos essenciais do conhecimento matemático sobre as tarefas para ensinar com compreensão tópicos dos números racionais. Por ser um caso positivo, dá indicações sobre o conhecimento que os futuros professores podem mobilizar na sua prática de ensino supervisionada.

## Referências


Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 1-6.

Erickson, F. (1986).Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, *19,* 333-355.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, *1*, 67- 88.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2015). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of inter-national research in mathematics education (3rd ed.)*. New York, NY: Taylor & Francis.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (in press). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford Press. http://www.vanderbilt.edu/ psychological_sciences/bio/bethany-rittle-johnson in 9 of September 2014.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

# Repensar o Estágio Supervisionado em Matemática e em Pedagogia: vivências e reflexões

*Cristiane Coppe de Oliveira*[1], *Adriana Salete Loss*[2]
[1]Universidade de Lisboa/FEUSP/UFU, criscopp@pontal.ufu.br
[2]Universidade de Lisboa/UFFS, adriloss@ufss.edu.br

## Introdução

Tendo em vista nossas experiências educacionais, consideramos fundamental pensar a Formação de professores com o intuito de proporcionar a mobilização dos vários saberes, como as vivências e as reflexões inseridas no contexto do Estágio Supervisionado. Nesse sentido, este trabalho pretende apresentar as reflexões de licenciandos em Matemática e em Pedagogia acerca de sua *futura prática docente*, da *realidade da sala de aula* e da *relação teoria-prática,* buscando dialogar com as teorizações referentes à Formação docente e com os objetivos institucionais do Estágio Supervisionado.

De acordo com Nóvoa (1995), historicamente a docência passou por diversas fases. Tanto que, ao longo do tempo e do espaço, o professor assumiu diferentes lugares no imaginário social: ora figura de prestígio, ora figura secundária no campo da educação. Somente a partir de meados da década de 80, conforme Nóvoa (1995), começam a surgir na literatura pedagógica estudos sobre a vida dos professores, as carreiras e os percursos profissionais, biografias e autobiografias docentes, ou o desenvolvimento pessoal dos professores. Nos anos 80 vimos emergir as reformas educacionais em vários países. O professor do século XXI deve ser um profissional que elabora com criatividade conhecimentos teóricos e críticos sobre a realidade. Pimenta (1999, p. 20) destaca como um dos saberes da docência, "a experiência, constituída pelo professor desde quando aluno, e produzida na prática num processo de reflexão e troca com os colegas". Para tal, torna-se necessário a construção de espaços na formação inicial em que se procure estabelecer a relação entre a prática e a futura ação docente.

## Contextos e metodologia da investigação

A partir dos objetivos propostos para o Estágio da Universidade Federal de Uberlândia e da Universidade Federal Fronteira Sul que apontam como elementos comuns: criar condições para a vivência de situações concretas e diversificadas, relacionadas à profissão docente e possibilitar a prática pedagógica e reflexão sobre conhecimentos teórico-práticos referentes às ações pedagógicas, buscamos apontar aspetos para repensar o Estágio, a partir de narrativas, em uma abordagem qualitativa, considerando dois grupos focais (Gatti, 2005): licenciandos em Matemática e em Pedagogia. Escolhemos as narrativas, por oferecerem possibilidades de explorar aspetos da experiência e vivências dos licenciandos, sujeitos da investigação matriculados na disciplina Estágio Supervisionado no ano de 2014. Foram selecionados sete licenciandos de cada curso, a partir de leituras das narrativas. Para a análise dos dados obtidos nos grupos focais utilizamos a técnica de Análise do Conteúdo definida por Bardin (2010), o que nos levou a identificação de dois grandes eixos (vivências e reflexões), emergentes a partir das narrativas dos licenciandos, cruzando os dados com os objetivos institucionais do estágio e as teorizações no campo da formação docente.

## Apresentação e breve discussão dos dados

As ações desenvolvidas para o levantamento e organização das informações deste estudo se encontram na tabela 1. Utilizamos as letras “M” e “P”, para nomear, respetivamente, os sujeitos licenciandos em Matemática e em Pedagogia, seguidos dos números de 1 a 7 para apontar os diferentes sujeitos.

Tabela 1. Eixos e Categorias emergentes a partir das narrativas dos licenciandos

| **Eixos** | **Matemática (Grupo Focal A)** | **Pedagogia (Grupo Focal B)** |
|---|---|---|
| | **Categorias** | **Categorias** |
| **Vivências** | ***Realidade da sala de aula*** (M3), (M2) e (M4) | ***Realidade da sala de aula*** (P2), (P4) e (P7) |
| **Reflexões** | ***Futura prática docente*** (M1), (M5) e (M7) | ***Futura prática docente*** (P1), (P3) e (P5) |
| | ***Relação teoria e prática*** (M6) | ***Relação teoria e prática*** (P6) |

Constatamos que tanto o grupo focal “M” quanto o “P”, apresentaram objetivos do Estágio no eixo *Vivências*, elencados na categoria *realidade da sala de aula*. Tal como podemos perceber nas narrativas de M4 e P4:

> M4: Existem muitos conflitos entre professor e aluno e vice-versa.
> P4: Na educação infantil, deveria ser obrigatório toda turma possuir uma professora auxiliar.

No que tange ao eixo *Reflexões*, as categorias *Futura prática docente* e *Relação teoria-prática*, podem ser interpretadas, respetivamente, à luz da ideia de Nóvoa (1995) do professor como agente direto da transformação (P3) e de Pimenta (1999) acerca das experiências constituídas pelo professor (desde quando aluno) é produzida na prática num processo de reflexão (M1).

> P3: Como futura educadora, o que farei para não cair na mesmice, no comodismo da grande maioria das educadoras?
> M6: Podemos obter diversas formas de se ensinar matemática, mas quando chegamos à escola temos um método de ensino totalmente diferente do que aprendemos na teoria.

A ênfase das narrativas no Estágio Supervisionado pode contribuir para a formação de professores, partindo do pressuposto de que a reflexão é a ligação entre a experiência de campo (na escola) e a teoria. (Le Cornu & White, 2000). Ao propormos o repensar do Estágio Supervisionado, institucionalizado na Formação Inicial, estamos a pensar em um profissional que se constitua enquanto educador (vivências) e envolva elementos teórico-práticos a fim de pensar a realidade como agentes diretos de transformação nos processos de ensino e aprendizagem (reflexões).

## Referências

Bardin, L. (2010). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Gatti, B. A. (2005). *Grupo focal na pesquisa em ciências sociais e humanas*. Brasília: Liber Livro.

Le Cornu, R. & White, B. (2009). E-mail supervision in the practicum: What do student teachers think? Acedido em fevereiro10, 2015, em http://www.leeds.ac.uk/educol.documento

Nóvoa, A. (1995). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.

Pimenta, S. G. (1999). *Estágio e docência*. São Paulo: Cortez.

# Docência antecipada: contribuições para a formação inicial em educação matemática

*Josete Leal Dias*[1], Isabel *Cristina Rodrigues de Lucena*[2], *Noemia G. R. dos Santos*[3]
Universidade Federal do Pará/GEMAZ, jlealdias@yahoo.com.br
Universidade Federal do Pará/GEMAZ, ilucena@ufpa.br
Universidade Federal do Pará/GEMAZ, noemiados@bol.com.br

## Da Universidade às Ilhas: antecedentes

O Projeto AMAR - Alfabetização matemática na Amazônia ribeirinha, enfoca a pesquisa e a extensão como pilares do ensino. A Docência Antecipada é espaço em que o licenciando assume o planejamento e a gestão da aula anos iniciais no contexto das ilhas. Tal vivência deve ser considerada tão importante quanto outros conteúdos curriculares, pois de acordo com Martins, Farias e Cavalcante (2012) visam à promoção da aprendizagem da docência por realçarem a importância do local de trabalho e da prática na formação inicial.

## A investigação

Assumimos a postura que analisa e interpreta os fenômenos ativamente com passos em consonância às demandas. Assim destaca-se o imperativo reflexivo em que o licenciando de posse do pertencimento *in situ* neste reflete e forma-se. Este estudo tem caraterísticas qualitativas, um estudo de caso.

Utilizamos o grupo focal com a temática *ensino de matemática nos anos iniciais*. Como pergunta de pesquisa lançamos: *Tendo em vista a docência antecipada que temas são importantes no planejamento para os anos iniciais?*

Tivemos como objetivos diagnosticar como o licenciando se percebe como profissional da docência antecipada; identificar elementos para o planejamento de aula, e verificar que experiências são destacadas na formação inicial. Participaram seis bolsistas da Iniciação Cientifica das licenciaturas: Matemática, Licenciatura Integrada, Pedagogia e Biologia, pertencente ao Projeto. Este pertencimento foi o ponto de semelhança para a realização do Grupo Focal que acontecia quinzenalmente totalizando duas seções. Ao final foi apresentado aos participantes a transcrição da síntese do debate para apreciação e possíveis acréscimos e ou correção.

Na análise realizou-se a leitura cuidadosa dos depoimentos resultando na indexação (ordenação e categorização) dos dados, a partir dos padrões recorrentes para o surgimento reflexivo do texto. As categorias de análise compuseram os seguintes eixos: (1) jogos como elementos de ensino; (2) ensino de grandezas e medidas, números e operações; (3) autoformação e a iniciação científica: aprendizagem situada e (4) a infância e o planejamento para os anos iniciais. O resultado diz respeito ao eixo *autoformação e a iniciação cientifica: aprendizagem situada*.

**Resultado**

A partir dos **destaques enunciativos** tivemos como síntese a expressão **- Ser Professor -** com os seguintes focos:

a) **Inovação da prática pedagógica** – nesta categoria consideramos que os sujeitos assumem a docência como um *devir:*

> [...] Percebi que meus objetivos ampliaram-se no decorrer de quatro semestres de curso, pois antes pensava somente na graduação e depois disso ingressar no mercado de trabalho [...]Eu pensei que fosse ensinar regras e contas, mas percebi que há um universo de possibilidades pedagógicas presentes neste contexto e que os alunos podem sugerir novas construções, a partir de suas vivencias. (Sujeito A)

O depoimento aponta para um *continum formativo* no sentido de perceber a prática como circunstanciada e historicamente determinada daí a exigência da reflexão como substrato formativo.

b) **Espaços Formativos** – nesta categoria demarcou-se a importância dos espaços coletivos de reflexão, como por exemplo, os grupos de pesquisa:

> Antes de ingressar na faculdade imaginava que iria estudar somente matemática pura e aplicada. Ao entrar em um grupo de pesquisa e estudo sobre os processos cognitivos e metodológicos de aprendizagem matemática pude então entender que ser um educador não é apenas chegar em uma sala de aula e repassar o conteúdo sem se preocupar com o método ou se o aluno está aprendendo. O educador é facilitador na aprendizagem com métodos para repassar os conteúdos de forma compreensiva. (Sujeito B)
>
> Inicialmente, não sabia o que fazer, mas com o passar do tempo, com as experiências que a instituição oferece, percebi a responsabilidade, que de certa maneira, era obrigada a abraçar, e gostei. Hoje, acredito ser uma nova pessoa. A universidade muda as pessoas. E difícil acreditar que alguém pode sair da universidade do mesmo jeito que entrou. O Observatório me deu suporte para pensar em uma educação diferenciada da que recebi. (Sujeito C)

É possível observar duas nuances: uma em que o licenciando traz expectativa em relação ao domínio do conteúdo especifico, embora estudo como o de Curi (2005) e de Ball apontem para a fragilidade destes por docentes em serviço, outra, a de que na formação inicial ao se propor espaços para debate se fortalece a profissionalização em âmbito reflexivo e consequentemente o futuro professor poderá assumi-los como local de (auto)formação.

## Considerações

Assumimos a docência antecipada como espaço em que a teoria e a prática são espaços formadores por permitir ao licenciando compreeder sua visao de docencência, deslocar-se para um espaço profissional, vivenciar a docência e refletir sobre questoes pertinentes à profissão.

Espaços formativos que possibilitem digressão de si como sujeito psicológico para a vivencia de emaranhados de sujeitos que somos possibilita ao licenciando rever suas representações acerca da escola, da profissão, de si. Como resultado afirmamos a possibilidade de autorreconhecimento e críticas sobre a profissionalização.

## Referências


Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy*: *Examining what prospective teachers bring to teacher education.* 1988. (Tese de Doutoramento, Universidade de Michigan, East Lansing)

Curi, E. (2005). *A matemática e os professores dos anos iniciais*. São Paulo: Musa.

Gamboa, S. S. (1996). *Epistemologia da pesquisa em Educação.* (Dissertação de Mestrado, UNICAMP - Universidade Estadual)

Martins, M., Farias, I.; M. S. & Cavalcanti, M. M. (2012). *Nos caminhos entre o estágio supervisionado e o pibid: O que contam os licenciandos de biologia?* XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino. Campinas: UNICAMP.

# Formação Continuada de Professores de Matemática: relato de investigações brasileiras em desenvolvimento no projeto Observatório da Educação – Núcleo UFMS

*Patrícia Sandalo Pereira*[1], *Giovana Papacosta*[2]
[1] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, patriciasandalop@uol.com.br
[2] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, giopapa7@hotmail.com

## Introdução

Pesquisas desenvolvidas nos últimos anos tem revelado uma grande preocupação com a formação continuada de professores que atuam na área da Matemática. Os estudos desenvolvidos por Fiorentini *et al* (2002), Maciel e Lopes (2012), Saraiva; Ponte (2003) e Montezuma (2010) apontam que a formação continuada de professores de Matemática quando ocorre no âmbito da escola e de forma que os professores possam compartilhar com seus pares as dúvidas e os conhecimentos, criando momentos de discussão e reflexão, de forma que possam elaborar e planejar coletivamente torna-os inovadores e transformadores da instituição em que atuam.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo apresentar algumas investigações que estão sendo desenvolvidas no projeto "Trabalho colaborativo com professores que ensinam Matemática na Educação Básica nas escolas públicas das regiões Nordeste e Centro-Oeste", vinculado ao Programa Observatório da Educação e financiado pelo órgão de fomento brasileiro CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior.

## Algumas pesquisas em desenvolvimento vinculadas ao projeto OBEDUC - Núcleo UFMS

Neste texto iremos apresentar duas dissertações de Mestrado e um trabalho de conclusão de curso que estão em andamento.

A primeira dissertação - *Reflexões e Interações de um professor da Educação Básica em um projeto colaborativo* - tem como objetivo analisar os movimentos reflexivos de um professor, acerca da sua prática quando participa de ciclos de estudos colaborativos. Uma das ações desenvolvidas trabalhou com atividades envolvendo frações com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. A temática fração foi sugerida pelo professor a partir de suas inquietações, devido às necessidades dos alunos durante a sua prática docente em sala de aula. As atividades foram elaboradas e pensadas com a colaboração de todos, e tinha como propósito analisar, interpretar e resolver situações-problema, envolvendo o significado dos conceitos de números fracionários. As atividades eram para identificar os números fracionários, onde os alunos teriam que relacionar as grandezas de capacidade (volume) nas resoluções de situações-problema, reconhecer em diferentes contextos os números racionais e explorar situações-problema em que indicam relação parte/todo, sendo justamente essa a necessidade apontada pelo professor integrante do Núcleo UFMS. A turma em que trabalhamos foi a do 6º ano e o tema frações foi proposto pelo professor, já que durante sua atuação nas escolas públicas ele notou que é um assunto em que os alunos apresentam mais dificuldades em aprender, e o professor em ensinar.

A segunda dissertação - *Reflexões da prática docente de um professor de Matemática da Educação Básica em uma perspectiva colaborativa* - tem como objetivo analisar como um grupo colaborativo pode subsidiar as reflexões de um professor de Matemática sobre a sua prática docente no âmbito de sala de aula. O professor de Matemática ao ser inserido no subgrupo escolheu o 1º ano do Ensino Médio e o conteúdo de Funções do 2º grau para elaborarmos e aplicarmos atividades, justificando que este se identifica muito com esse conteúdo e que vê mais aplicabilidade no cotidiano. Então, a partir daí ficou decidido que cada um dos membros desse subgrupo, levasse problemas sobre o conteúdo de função do 2º grau que achasse interessante de ser aplicado em sala de aula.

O Trabalho de Conclusão de Curso - *Episódios de Ensino: contribuições do trabalho colaborativo na prática docente do professor de Matemática* – tem como objetivo refletir sobre as contribuições do trabalho colaborativo para a prática docente de um professor de Matemática da Educação Básica participante do projeto OBEDUC, a partir da análise dos episódios de ensino. Após a gravação das aulas realizadas, selecionamos os episódios de ensino que seriam analisados. Durante a análise destacamos um episódio de ensino que possibilitou a reflexão acerca do desenvolvimento do professor, diante do planejamento feito em perspectiva colaborativa.

**Algumas considerações**

O professor da Educação Básica é o fio condutor das ações educativas em sala de aula. Os integrantes do projeto OBEDUC, a partir dos seus subgrupos subsidiaram o desenvolvimento do processo de estudo e das concepções da reflexão. Isso se evidenciou ainda mais nas execuções dos planejamentos em sala de aula pelo professor. Percebemos que podemos planejar juntos, estudar juntos, mas quem dá vida, quem faz acontecer o que foi planejado, é o PROFESSOR.

**Referências**

Fiorentini, D., Nacarato, A., Ferreira, A., Lopes, C., Freitas, M., & Miskulin, R. (2002). Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, *36*, 137-160.

Maciel, M. & Lopes, C. (2012). A formação continuada de professores de Matemática a partir do trabalho colaborativo centrado na escrita e leitura. *Anais do II Seminário Hispano Brasileiro - CTS*, p. 129-138.

Montezuma, L. (2010). *Saberes mobilizados por um grupo de professores diante do desafio de integrar a literatura infantojuvenil e a Matemática*. (Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos)

Saraiva, M. & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 12*(2), 25-52.

# Reflexão sobre a formação do professor que ensina matemática em escolas ribeirinhas

*Lucélida de Fátima Maia da Costa*[1], *Isabel Cristina Rodrigues de Lucena*[2], *José Maria Andrade Filho*[3]
[1]Universidade do Estado do Amazonas-UEA/FAPEAM, ldfmaiadc@gmail.com
[2]Universidade Federal do Pará -UFPA, ilucena19@gmail.com
[3]Unidade Pedagógica Faveira- SEMEC, poetadailha@hotmaail.com

**Introdução**

No Brasil, em particular na Amazônia brasileira, existem escolas denominadas ribeirinhas que estão, geralmente, localizadas em pequenos povoados, comunidades, a margem dos rios. No entanto, a formação inicial dos professores, em geral, restringe-se ao contexto urbano. Consequentemente, os professores se surpreendem ao se defrontarem com desafios inerentes a uma escola pertencente à Educação do Campo.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, as escolas ribeirinhas são inseridas no âmbito da Educação do Campo que contempla a educação rural do país (MEC, 2013).

A pesquisa realizada está vinculada ao projeto AMAR[1], e vem evidenciar desafios da formação (continuada) docente em contexto ribeirino. Partimos de investigações anteriores desenvolvidas no AMAR, principalmente de Bicho e Lucena (2013) que mostram as dificuldades da ação docente em escolas ribeirinhas, dentre elas, a organização do trabalho didático-pedagógico em classes multisseriadas.

Apresentaremos a avaliação de um professor-escolar sobre a experiência formativa na escola ribeirinha, desenvolvida em conjunto com a professora-formadora. O objetivo desse recorte é referenciar um tipo de formação continuada que considere a formação do professor-escolar em sua própria prática em consonância com o conceito de autoformação visto em Galvani (2002).

---

[1] Projeto AMAR, sob a responsabilidade do GEMAZ – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Cultura Amazônica, da UFPA – Brasil. Apoio e financiamento programa Observatório da Educação (OBEDUC) CAPES/MEC/INEP. Vigência 2011 a 2015.

## Aporte Teórico

O aporte teórico da pesquisa assume que toda formação é eminentemente autoformação. Porém, não no sentido isolado e solitário. A formação deve ser "considerada como um processo tripolar, pilotado por três polos principais: si (autoformação), os outros (heteroformação), as coisas (ecoformação)". Assim, a formação é "um processo vital e permanente de morfogêneses e metamorfoses emergindo das interações entre a pessoa e o ambiente físico e social" (Galvani, 2002, p. 96).

## Metodologia e Resultados

A pesquisa realizada é de cunho qualitativo com aportes da pesquisa etnográfica, pois, consideramos o ambiente natural, o contexto no qual ocorre a formação dos professores e sua prática docente como fonte primeira para a obtenção de informações que são predominantemente descritivas (Bauer & Gaskell, 2012).

Três meios de obtenção de informações constituem a metodologia da pesquisa: 1. Momentos de escuta e diálogo (MED); 2. Observações das práticas professores em aulas de matemática nas escolas 3. Relatos dos professores-escolares após aulas de Matemática ministradas de forma conjunta com a professora formadora. Aqui apresentamos um resultado do item 3, presente no relato do professor José após uma aula de Matemática sobre o tema Sistema de Numeração Decimal em uma turma de 20 alunos do 1.º ano, de uma escola riberinha em Belém - Pará - Brasil.

Ao relatar sobre a Prática Formativa vivida, momento em que o professor José ministrou sua aula de Matemática em conjunto com a professora-formadora, destaca que:

> A professora não deu nada pronto para as crianças. Ao contrário, sempre iniciou os assuntos fazendo perguntas (...) instigava os alunos a chegarem a conclusões, a fazerem deduções. A professora começou os questionamentos pelas idades dos alunos, depois os fez observar a quantidade de dedos dos pés e das mãos. A cada resposta obtida, a professora pedia aos alunos para representarem no ábaco (...). E eles iam falando e registrando tudo em uma folha de papel (...). (Professor José, novembro de 2014).

O professor José também destaca a importância dessa Prática Formativa pelo contexto no qual se realiza. Pois, a professora formadora se dispôs e foi vivenciar a realidade da escola e do professor ribeirinho, isto, se constitui um passo grandioso para a reflexão da consistência das formações destinadas ao professor, no âmbito da Educação Matemática em escolas ribeirinhas, que em muitos casos limita-se a indicar leituras sobre o que já foi publicado sobre o assunto sem abrir espaços de reflexão e de vivências naquele contexto.

## Considerações Finais

Os resultados obtidos nos permitem dizer que a Prática Formativa realizada segundo a metodologia do curso de especilização do AMAR, do qual o professor participa, evidencia a importância de, nas aulas de Matemática, cada assunto ensinado ser provocado por meio de questionamentos; ter sentido para a criança e suas respostas serem sistematizadas com apoio de materiais didáticos e registradas; e, ser orientado pela professora, mas não respondido por ela.

Assim, ao refletirmos sobre todo o processo de formação desenvolvido percebemos a pertinência da formação referenciada pelo ambiente físico, psicológico, cultural e as experiências compartilhadas com outros. O relato do professor José trata de sua própria experiência formativa, porém, é referenciado pela atividade compartilhada com a professora-formadora, o que transcende os estudos teóricos para um contexto formativo também fortalecido pela prática de ensinar matemática em contexto local.

## Referências

Bauer, M. W. & Gaskel, G. (2012). *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som.* Petrópolis: Vozes.

Bicho, J. & Lucena, I. (2013). Alfabetização matemática em classes multisseriadas de escolas ribeirinhas da Amazônia: atuação docente em foco. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 95(239), 87-111.

Galvani, P. (2002). *Práticas pedagógicas em alfabetização matemática: espaço, tempo e corporeidade.* Erechim-RS: Edelbra.

MEC. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Currículos e Educação Integral. (2013). *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC.

MEC. Ministério da Educação. (2010). *Decreto nº 7.352, de 4 de novembro de 2010*. Brasília: MEC.

# Os Trilhos Matemáticos como contexto não formal de ensino e aprendizagem: uma experiência com futuros professores do ensino básico

*Isabel Vale, Ana Barbosa*
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

## Introdução

Com este trabalho pretende-se estudar o impacto dos trilhos matemáticos no ensino e aprendizagem da Matemática enquanto contextos fora da sala de aula. Para esta apresentação foram consideradas as seguintes questões orientadoras: (1) De que forma a construção dos trilhos pode contribuir para a promoção da criatividade em Matemática?; (2) Que conteúdos matemáticos podem emergir da construção de tarefas com base no meio envolvente?; (3) Que dificuldades são sentidas pelos participantes na construção dos trilhos?; (4) Como se relacionam os futuros professores com ambientes não formais de aprendizagem da Matemática?

## Enquadramento teórico

É fundamental investir em iniciativas que visem a motivação dos alunos para a aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento de capacidades cognitivas de ordem superior, como a resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio, assim como a criatividade. Esta última é também uma capacidade transversal que se deve realçar nestas experiências. Apesar de não existir uma única definição de criatividade, é comummente aceite que começa com a curiosidade, suscita a imaginação e originalidade quando os alunos estão envolvidos em tarefas desafiantes (Barbeau & Taylor, 2005). Para muitos autores (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997) relaciona-se diretamente com a resolução e formulação de problemas. A sala de aula é apenas uma das "casas" onde a educação tem lugar, pois a aquisição de informação e o desenvolvimento do conhecimento dos alunos pode ocorrer de muitas formas e em muitos lugares (Barbeau & Taylor, 2005). Um ambiente afetivo pode influenciar as expectativas e motivações iniciais dos alunos. O meio envolvente pode constituir um desses contextos. Surgem assim os trilhos matemáticos, considerados como uma sequência de paragens ao longo de um percurso pré-planeado, através do qual os alunos podem aprender matemática no meio envolvente e ver a sua aplicabilidade (Cross, 1997). Este tipo de atividade constitui um espaço não formal, centrado na aprendizagem e nas capacidades referidas anteriormente (resolução e formulação de problemas, conexões, comunicação). Incentivar os professores para este tipo de tarefas pode incrementar a sua confiança, competência e entusiasmo em futuras ações de ensino/aprendizagem em contextos fora da sala de aula. Os (futuros) professores têm aqui um papel determinante, sendo de grande relevância o estudo dos seus conhecimentos e perceções.

## Metodologia

Neste estudo adotou-se uma metodologia qualitativa de carácter exploratório, onde participaram 70 futuros professores do EB que frequentavam a unidade curricular Didática da Matemática. Ao longo das aulas foram proporcionadas experiências diversificadas no âmbito da resolução e formulação de problemas, da criatividade em matemática e das conexões, em particular as que envolvem a Matemática e o quotidiano. Foram também explorados exemplos de trilhos, por forma a clarificar a sua estrutura e perceber a presença das capacidades analisadas previamente. Em seguida propôs-se a construção de um trilho matemático na cidade, em pequeno grupo, formulando tarefas centradas em elementos do meio local, direcionadas a alunos do EB. Durante as aulas, os futuros professores partilharam as fotografias recolhidas no percurso que selecionaram (e.g. janelas, edifícios, monumentos, jardins, portas, ferro forjado, azulejos), e que iriam servir de base às tarefas por eles desenhadas, tendo sido objeto de discussão. Os dados foram recolhidos de forma holística, descritiva e interpretativa e incluíram observações em sala de aula e análise documental, maioritariamente incidente nos registos escritos dos trilhos. Na análise dos dados foram usados critérios como: criatividade, diversidade e rigor dos conteúdos matemáticos.

## Discussão

Perante uma situação inovadora de aprendizagem num contexto não formal foi possível constatar que os futuros professores evidenciaram uma atitude mais positiva face à matemática e alargaram a sua perspetiva acerca das conexões que se podem estabelecer com o meio envolvente. Os trilhos proporcionaram um melhor conhecimento do meio através de um olhar matemático, mas também patrimonial e cultural. A formulação das tarefas nem sempre se afigurou como um processo fácil, o que se pode perceber por se tratar de uma experiência nova e pelo facto de a formulação de problemas ser uma capacidade de ordem superior que implica um trabalho regular. Utilizaram maioritariamente a estratégia de formulação de problemas *aceitando os dados* (Brown & Walter, 2005), uma vez que partiram de situações estáticas, fotografias, logo esta seria a estratégia mais expectável. Globalmente evidenciaram uma tendência clara para envolver conceitos da geometria, dado que os elementos implicados eram de natureza mais visual. As discussões geradas nas aulas proporcionaram clarificação sobre alguns aspetos mais confusos das tarefas, permitindo algum refinamento. Foi possível identificar traços de criatividade nas tarefas, em particular, no que refere à dimensão da originalidade. Pode dizer-se que estes futuros professores mostraram motivação para ultrapassar os obstáculos que encontraram e que as tarefas apresentadas evidenciaram que este trabalho tem potencial para promover a criatividade em matemática.

## Referências bibliográficas

Barbeau, E. J., & Taylor, P. J. (2005). ICMI study 16: Challenging mathematics in and beyond the classroom. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 125-139.

Brown, S. & Walter, M. (2005). *The art of problem posing.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cross, R. (1997). Developing math trails. *Mathematics Teaching*, *158*, 38–39.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A., Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *3*, 75-80.

# Educação matemática na integração de áreas de conteúdo no Jardim de Infância

*Helena Martins*[1], *Fátima Regina Jorge*[2], *Fátima Paixão*[3]
[1]Santa Casa da Misericórdia de Castelo Branco, hellenmartins04@hotmail.com
[2] Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco
Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores – CIDTFF, Universidade de Aveiro, frjorge@ipcb.pt
[3] Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco
Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores – CIDTFF, Universidade de Aveiro, mfpaixao@ipcb.pt

Neste estudo questionamos as potencialidades da abordagem curricular com base em experiências de aprendizagem integradoras, tomando como objetivo planear e analisar atividades matemáticas articuladas com a literatura e as expressões plástica e musical e direcionadas para o conhecimento do meio próximo.

No Jardim de Infância (JI) a educação matemática deve privilegiar atividades decorrentes do meio envolvente e propiciar experiências de aprendizagem que conduzam à contagem, à seriação, à medição, à exploração de formas, à descoberta de padrões, à estimativa, … (Clements, 2001). O despertar do pensamento matemático implica descobrir relações e padrões, partindo do concreto para o abstrato, de forma coerente e estimuladora, bem como o desenvolvimento de capacidades que permitam usar a matemática numa grande variedade de contextos e situações, fazendo a ligação entre a escola e o quotidiano (Alsina & Planas, 2009).

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar sublinham o papel da matemática na estruturação do pensamento e a importância de apoiar a construção gradual de ideias matemáticas. Nesse âmbito, o trabalho com padrões, de cariz repetitivo e ou não repetitivo, assume-se como fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico, devendo contemplar situações em que a criança tem a oportunidade de descobrir a regra lógica subjacente ou situações em que se apela à imaginação na criação de novos padrões (Barros & Palhares, 1997, DEB, 1997). Para tal, requerem-se tarefas em que as ideias sobre padrões interliguem a matemática com outros domínios, tais como o das expressões e da linguagem (Moreira & Oliveira, 2003).

Em função do exposto, o educador enfrenta o repto de delinear e propor tarefas matemáticas contextualizadas, motivadoras que suscitem a curiosidade das crianças e estimulem o raciocínio e a comunicação matemáticos, criando oportunidades de trabalho colaborativo (Van de Walle, 2004).

O quadro metodológico que sustenta o estudo é de natureza qualitativa, de índole descritivo e interpretativo, e identifica-se com investigação-ação implicando uma reflexão sobre a prática como forma de encontrar meios mais adequados para melhorar o processo educativo (Ponte, 2004).

Foram desenvolvidas várias atividades, com um grupo de 12 crianças de 5 anos, pretendendo-se a descrição e interpretação de situações que se desenrolam na prática. Usaram-se como técnicas de recolha de dados, a observação e a análise dos registos.

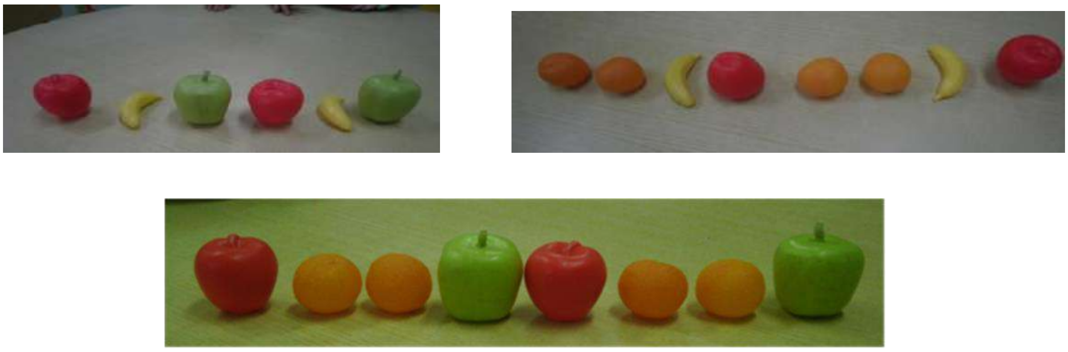
**Atividades desenvolvidas – apresentação e discussão**

Coincidindo no dia 21 de março o Dia Mundial da Árvore e da Poesia, planificou-se um conjunto de atividades tomando como principais finalidades: Proporcionar experiências de aprendizagem diversificadas, articulando diversas áreas de conteúdo; Promover o conhecimento do meio; Fomentar a curiosidade científica; Valorizar a utilidade das aprendizagens na vida quotidiana.

Inicialmente, em sala, explorou-se a poesia *Frutos*, de Eugénio de Andrade, autor oriundo da região. A atividade seguinte baseou-se na comparação do número de letras dos nomes de alguns frutos, consistindo na procura da barra *Cuisenaire* correspondente a cada palavra para, em seguida, comparar, fazer e registar diferentes decomposições do número de letras, utilizando o material *Cuisenaire* e registos em papel (Figs 1 a 3).

Figuras 1, 2 e 3. Decomposições e registos utilizando material Cuisenaire.

Utilizando os materiais da *Mercearia* sugeriu-se às crianças que, em grupo, encontrassem diferentes formas de arrumar os frutos em fila, de modo organizado, começando por construir o elemento de repetição (construção de padrões de repetição) e, posteriormente, selecionando um dos padrões, fez-se a associação a um padrão rítmico. Como se pode observar nas três imagens (Figs 4 a 6), as crianças criaram diferentes padrões de repetição, envolvendo os frutos referidos no poema.



Pé, palmas, palmas, mesa, pé, palmas, palmas, mesa

Figuras 4 a 6. Registo de padrões.

Na visita à Quinta para além de interagir e observar o meio natural, as crianças percorreram o espaço e verificaram a diversidade de espécies, formas e cores. Explorando a sugestão de uma, que pretendia “dar um abraço” a uma árvore e não conseguia concretizá-lo, com a colaboração dos colegas contaram-se “quantos braços eram necessários para um abraço” (perímetro por contagem) (Figs 7 e 8).

Figuras 7 e 8. À descoberta da quinta

A observação e os registos gráficos forneceram evidências de que as atividades desenvolvidas alargaram e contextualizaram os conhecimentos matemáticos das crianças e estimularam a curiosidade e o desejo de saber mais e compreender fenómenos naturais que ocorrem no seu quotidiano. A evocação e a descrição das observações realizadas fora do JI estimularam o desenvolvimento de competências comunicativas, relevando o papel determinante da componente afetiva. O contacto com o meio envolvente estimulou a participação, envolvimento e motivação das crianças e o desenvolvimento de atitudes de autonomia e responsabilidade.

## Referências


Alsina, A. & Planas, A. (2009). Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas. In Planas, N., & Alcina, A. (Coords.), *Educación matemática y buenas prácticas* (pp. 9-29). Barcelona: GRAÓ.

Barros, M. G. & Palhares, P. (1997). *Emergência da Matemática no Jardim-de-Infância*. Porto: Porto Editora.

Clements, D. (2001). Mathematics in the Preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7, 270-275.

DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar.* Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Moreira, D. & Oliveira, I. (2003). *Iniciação à matemática no Jardim de Infância*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2004). *Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional*. Acedido em Fevereiro, 2015, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/04-Ponte-Corunha.pdf.

Van de Walle, J., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (5th Edition). Boston: Pearson Education Inc.

# A complexidade do pensamento matemático e a qualidades das aprendizagens: um caso com quantificadores, números e lógica[1]

*Fernando Luís Santos*[1], *António Domingos*[2]
[1]Instituto Piaget, UIED (FCT-UNL), *fernando.santos@almada.ipiaget.pt*
[2]Universidade Nova de Lisboa, UIED FCT-UNL, *amdd@fct.unl.pt*

Tendo como ponto de partida as teorizações de David Tall sobre o pensamento matemático, a noção de *proceito* e de *bifurcação proceptual* (Gray & Tall, 1994) interligados com a taxonomia SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcomes*) de Biggs e Collis (1982) que com a sua taxonomia afere a qualidade das respostas dos alunos, modelado pela terceira geração da teoria da atividade de Engeström et al (1999) elaborou-se um modelo de análise para estudar um protótipo de currículo de matemática na formação inicial de professores (Licenciatura em Educação Básica).

A análise que suporta a criação do modelo e sua sustentação é realizada com base na complexidade matemática das respostas dadas em situação de aprendizagem. Neste poster observa-se uma fase intermédia do processo, com a utilização do modelo para analisar respostas a uma questão que envolve raciocínio matemático usando relações entre lógica e expressões numéricas. Os dados permitem conjeturar que o pensamento matemático pode ser visto de duas formas diferentes: de forma processual e de forma proceptual.

O modelo foi aplicado no contexto do raciocínio matemático analisando a utilização de quantificadores e operadores lógicos em expressões numéricas, que apesar de ser um tópico pouco trabalhado fora do ensino superior, permite evidências de vários tipos de pensamento matemático e relações que os alunos estabelecem em relação a estes objetos matemáticos. Foram selecionados três alunos que pelas suas respostas evidenciam tipos diferentes de raciocínio como forma de salientar a utilidade do modelo de análise. Neste episódio um dos investigadores foi também o professor.

A taxonomia SOLO surge como um enquadramento conceptual para explorar o crescimento cognitivo dos alunos tendo como antecedentes as teorias de Piaget que têm um impacto profundo na investigação educativa. Para Biggs e Collis (1982) alguns dos

1Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

atributos da teoria dos estádios de desenvolvimento foram considerados como pressupostos. Nesta concepção a qualidade da aprendizagem não é vista apenas como a classificação quantitativa que se alcança quando se responde a uma questão, mas também o processo qualitativo de produção da resposta (raciocínio) utilizando factos, conceitos e capacidades para produzir essa resposta. Este processo é complexo devido a essa qualidade não depender exclusivamente do aluno, mas também de outras dimensões como a qualidade do ensino, o conhecimento prévio dos tópicos abordados, a motivação, a autorregulação da aprendizagem, entre outras.

No processo de avaliar o desenvolvimento da qualidade das aprendizagens dos alunos é necessário ter em conta também aspetos relacionados com a eficácia do modelo de formação, a aplicabilidade e adequação do currículo, a eficiência do processo de ensino e de aprendizagem de modo a obter informação útil sobre as capacidade e competências que os alunos desenvolvem como resultado da sua experiência educativa.

Apesar do estudo relatado neste texto ainda estar em desenvolvimento, já evidencia alguns resultados interessantes. Mostrou que existem diferenças significativas entre os vários tipos de resposta dada pelos alunos, salientados pelas dimensões do modelo de análise. Os alunos que ultrapassam a bifurcação proceptual evidenciam, e relata-se nas transcrições das suas respostas, um conhecimento significativo dos objetos matemáticos e mesmo das regras, processos e procedimentos necessários para resolver as questões apresentadas, em linha com as teorizações de Gray e Tall (1994) sobre o proceito.

A teoria da atividade foi escolhida como suporte teórico da metodologia, uma vez que junta os aspetos significativos das experiências concretas no desenvolvimento de intervenções didáticas inovadoras. Assim, é possível para o modelo de análise proposto e as intervenções baseadas neste se desenvolverem como resposta a ambos. Na interpretação de Engeström et al (1999) permite fazer a ligação entre a taxonomia SOLO e as noções sobre o pensamento matemático de Tall, resultando, com base nos nossos dados, em evidências para uma potencial qualidade das aprendizagens verificada por uma avaliação mais consistente das respostas dadas a exercícios de matemática.

## Referências

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Engeström, Y, Miettinen, R. & Punamäki, R-L (Eds) (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gray, E. & Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116–140.

# Ensino de matemática com TIC

*Débora de Oliveira Medeiros*[1], *Eliel Constantino da Silva*[2], *Maria Raquel Miotto Morelatti*[3]
[1]Universidade Estadual Paulista UNESP, deboraomedeiros@gmail.com
[2]Universidade Estadual Paulista UNESP, eliel_constantino@hotmail.com
[3]Universidade Estadual Paulista UNESP, mraquel@fct.unesp.br

## Introdução

Este trabalho apresenta resultados de uma pesquisa qualitativa, de natureza analítico descritiva, em desenvolvimento no âmbito do Programa Observatório da Educação da CAPES, Edital 049/2012/CAPES/INEP/Brasil, que pretende mapear o uso dos laboratórios de informática nas escolas públicas do Estado de São Paulo que possuem Ensino Fundamental II e pertencem ao Programa Acessa Escola, do Governo do Estado de São Paulo, que permite a professores e alunos usufruírem das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino e aprendizagem de Matemática.

O uso do computador no ensino tornou-se uma recomendação curricular e o Programa Acessa Escola é uma iniciativa para o uso desse recurso em sala de aula, porém, sua utilização para o ensino da matemática ainda levanta algumas questões. Assim, apresentam-se ao longo deste trabalho, dados relativos às escolas vinculadas à Diretoria de Ensino de Presidente Prudente, recolhidos através de visitas às escolas e entrevistas com diretores, monitores do laboratório e professores de Matemática, utilizando-se métodos quantitativos e qualitativos para respaldar as análises realizadas; investigou-se os softwares utilizados, conteúdos trabalhados nos laboratórios, opiniões e críticas sobre o uso que professores da rede pública de ensino trazem de suas experiências profissionais.

## Revisão teórica

Infelizmente a educação pública não está acompanhando os avanços tecnológicos presentes no cotidiano e mantém o ensino tradicional, pautado na transmissão das informações. Para incentivar uma mudança, o Governo do Estado de São Paulo vem viabilizando a construção de laboratórios de informática, em suas escolas, pelo Programa Acessa Escola.

Como afirmam Teixeira, Mezzemo, Rossato, Brandão, & Trentin (2011), o não acesso as tecnologias pode ser percebido como exclusão social, e de fato o programa vem trazendo grande inclusão nos municípios que tem suas escolas cadastradas no programa.

## Desenvolvimento

A coleta de dados teve início com visitas à Diretoria de Ensino de Presidente Prudente para o levantamento das escolas cadastradas no Programa Acessa Escola, para verificar o número de computadores disponíveis para o uso dos alunos, se há acesso à internet e agendar visitas às escolas.

Foram visitadas 16 escolas do município de Presidente Prudente, entrevistando diretores, estagiários do programa e professores de Matemática que se dispuseram a dar seus pareceres. Foram tomados os áudios das entrevistas, com foco no questionamento aos professores de Matemática sobre o uso da Sala Ambiente de Informática (SAI) e sobre como preparam aulas com o auxílio dos computadores, quais os conteúdos abordados e qual a importância de ter um ambiente como esse na escola.

## Resultados e discussão

Um professor afirmou não usar o laboratório de informática, pela burocracia do programa em agendar horários, exigência da presença do monitor para uso da SAI e a responsabilidade com os possíveis danos causados nos computadores.

Os demais professores têm conhecimento de tais fatos, mas acreditam no potencial das TIC no ensino e aprendizagem de Matemática. Alguns afirmaram utilizar a SAI ao menos três vezes ao longo do ano e outros fazem um uso frequente durante todo o ano letivo, conforme os conteúdos que são trabalhados. A seguir, apresentamos os conteúdos e os softwares mencionados, identificando os professores por P1, P2, sucessivamente, associados com a ordem alfabética das escolas visitadas. Cada lacuna em branco significa que não houve professor de matemática da escola para dar parecer.

Tabela 1. Conteúdos e softwares utilizados pelos professores de matemática na prática pedagógica

| Escola | Professor | Conteúdo | Softwares |
|---|---|---|---|
| E1 | - | - | - |
| E2 | P1 | Gráficos, estatística, área e volume | *Cabri Géomètre* |
| E3 | P2 | Gráficos, geometria, área e | *Cabri Géomètre, Logo e* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | perímetro | *Geogebra* |
| E4 | - | - | - |
| E5 | P3 | Geometria | *Poly* |
| E6 | P4 | Tabuada e matrizes | CD-ROM *COC* |
| E7 | - | - | - |
| E8 | P5 | Geometria | Sites para pesquisa |
| E9 | P6 | Funções trigonométricas e gráficos | *Microsoft Mathematics, Cabri Géomètre e Winplot* |
| E10 | P7 | Plano cartesiano | Não soube o nome |
| E11 | - | - | - |
| E12 | - | - | - |
| E13 | - | - | - |
| E14 | P8 | Tabuada, tabelas e gráficos | *Excel*, sites para jogos e vídeos online* |
| E15 | - | - | - |
| E16 | P9 | Não utiliza | Não utiliza |

Nota: * – Filme "Ilha das Flores", disponível em www.youtube.com.

O maior uso de softwares é para conteúdos matemáticos que permitem a visualização e manipulação para compreensão de regras e propriedades de um assunto, por exemplo, o estudo da periodicidade de uma função trigonométrica, entre outros.

Todos concordam quanto à importância dessas ferramentas para aprendizagem; a motivação dos alunos quando a aula foge do tradicional giz e lousa; a inclusão digital, pois alunos de bairros mais afastados não têm computadores ou internet em suas casas; proporcionar habilidades em informática através do acesso de diferentes programas e das pesquisas e trabalhos que os professores propõem.

Há reclamações quanto a baixa velocidade da internet, burocracia da parte administrativa da escola para se usar a SAI e a partir da análise quantitativa, observa-se o pequeno número de computadores em condições de uso e uma quantidade razoável de softwares para serem usados.

## Conclusão

Podemos observar o potencial do Programa Acessa Escola para aprendizagem matemática, motivação para os alunos e inclusão digital, mas também a necessidade de melhorias no Programa, como maior número de computadores nos laboratórios e internet mais veloz.

## Referências

Borba, M. C., Araujo, J. L., Fiorentini, D. e et al. (2004) *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

São Paulo (2008). *Programa Acessa Escola*. Acedido em Dezembro12, 2014, em http://acessaescola.fde.sp.gov.br/Public/Conteudo.aspx?idmenu=11.

Teixeira, A. C., Mezzemo, l., Rossato, A. D., Brandão, E. J. R. E Trentin, M. A. S. (2011). *Proposta de metodologia para oficinas de informática e cidadania no mutirão pela inclusão digital*. Acedido em Julho12, 2014, em http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/1991/1750.

# Utilizando o desenho geométrico e o GeoGebra para o ensino da Geometria

*João Carlos Larini*[1], *Valdeni Soliani Franco*[2]
[1]Professor da Educação Básica – Núcleo de Maringá, jclarini@seed.pr.gov.br
[2]Universidade Estadual de Maringá-Paraná-Brasil, vsfranco@gmail.com

## Introdução

As escolas públicas pertencentes ao Estado do Paraná-Brasil se encontram bem equipadas com recursos tecnológicos. Tal investimento está em concordância com o que é apresentado nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (Paraná, 2008, p. 66), "o trabalho com as mídias tecnológicas insere diversas formas de ensinar e aprender, e valoriza o processo de produção do conhecimento".

Um dos *softwares* instalados em todos os computadores das escolas estaduais paranaenses é o GeoGebra. Esta pesquisa busca responder se os participantes se sentem preparados para utilizar esse software em suas aulas e se cursos de formação continuada alteram suas crenças em relação às tecnologias digitais. Dessa forma, essa pesquisa teve como objetivo responder tais questões.

A importância do tema da pesquisa, de acordo com D'Ambrósio (1996, p. 60), "não há como escapar. Ou os educadores adotam a teleinformática, [...] ou serão atropelados no processo e inúteis na sua profissão".

## Referenciais teóricos

O uso eficiente das novas tecnologias nas escolas é um tema decorrente de debates que vem se estendendo por algumas décadas. De acordo com Almeida (2012, p. 27), "um dos temas mais polêmicos na educação no início dos anos 80 é o uso da informática na escola". Conforme Lovis e Franco (2013, p. 152),

> Perceber o laboratório de informática como uma sala de aula, que precisa de um professor que oriente, e um contexto de aprendizagem, é um importante passo no processo de utilização dos recursos disponíveis em favor da educação.

Larini e Franco (2013, p. 16), afirmam que

> Na sociedade a qual vivemos, ensinar utilizando-se recursos tecnológicos, pressupõe que o professor tenha postura diferente do que acontecia há algumas décadas. A sobrecarga de informações advindas da experiência como educador e da experiência pessoal dos alunos, remete todos os envolvidos a refletir, discutir e procurar meios que atendam às novas exigências da sociedade.

Na realização do curso, as orientações ajudaram a compreensão de vários conceitos e resultados matemáticos, em que o participante da pesquisa pode-se habituar, e aos poucos, construir de forma dinâmica e interativa várias figuras com status de autonomia e prazer. Conforme afirma Llano (2006), o professor deve buscar a incorporação das novas tecnologias como forma de novos conhecimentos.

> A aquisição de habilidades, para o aproveitamento das ferramentas da informática na educação, é um processo que requer iniciativa, formação e dedicação. É necessário conceber este processo de maneira progressiva, nos envolvendo nele gradualmente, pois, na medida em que forem se obtendo os resultados, o compromisso para buscar uma formação mais avançada e especializada será maior. (Llano, 2006, p. 68).

Adentrar no mundo virtual suscita a vontade de aprender e, até mesmo o senso lúdico é despertado a partir das inúmeras possibilidades que surgem.

**Metodologia**

A abordagem da pesquisa foi qualitativa, no paradigma interpretativo. Para atingir os objetivos propostos foi feito um estudo de caso, em que os sujeitos da pesquisa foram 32 professores da rede pública de ensino da região de Maringá, cidade ao norte do Estado do Paraná-Brasil, que assistiram a um curso em 2013, de desenho geométrico com a utilização do GeoGebra 2D. Todos os participantes eram licenciados em Matemática e ministram aulas do 6.º ao 9.º ano do Ensino Fundamental, ou no Ensino Médio.

Os dados foram analisados e categorizados de acordo com as respostas apresentadas nos questionários, diários de bordo do professor/pesquisador e nos discursos escritos no fórum de discussão na plataforma Moodle, que foram as formas de coleta.

A metodologia de ensino utilizada no curso foi a do “professor/pesquisador capacitando professor”, com material didático de apoio voltado para a realização de atividades orientadas metodologicamente “passo a passo”. A adoção deste recurso possibilitou que os professores envolvidos na capacitação se sentissem seguros.

**Análise dos resultados**

Muitos professores confirmam em suas postagens e observações, o que Lovis & Franco (2013) afirmam sobre o professor perceber o laboratório de informática como uma sala de aula, pois notam que a ociosidade dos laboratórios de informática das escolas é algo presente. No entanto, a maioria dos professores procura formas de superar este momento de transição, entendendo que as novas tecnologias são indispensáveis para a aprendizagem dos alunos.

Os dados quantitativos obtidos (Fig. 1) confirmam a afirmação de Llano (2006), que a utilização das tecnologias digitais é um processo que requer iniciativa, formação e dedicação.

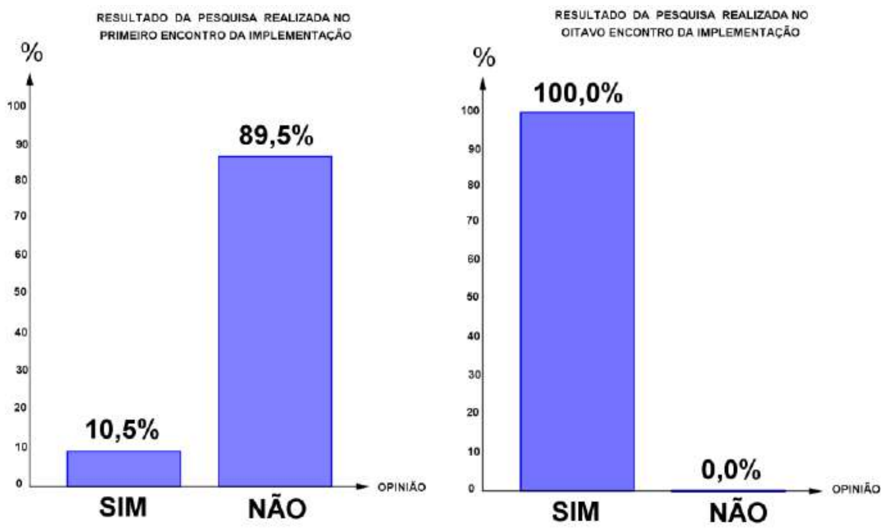



Figura 1: resposta à questão: Você se sente preparado para utilizar o *software* GeoGebra disponível nas escolas estaduais?

**Conclusão**

Os dados da pesquisa indicaram que o curso contribuiu para mudança de posição em relação ao do software GeoGebra, e que já se sentem mais seguros para utilizar o laboratório de informática como sala de aula.

**Referências**

Almeida, F. (2012). *Educação e informática: os computadores na escola*. 2ª Ed. São Paulo: Cortez.

Carneiro, R. (2002). *Informática na Educação: representações sociais do cotidiano*. São Paulo: Cortez.

D'Ambrósio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas, SP: Papirus.

Larini, J., & Franco, V. (2013). *Desenho Geométrico Plano: técnicas historicamente elaboradas e potencializadas em ambientes informatizados*. Acedido em Fevereiro 6, 2015, em

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_uem_mat_artigo_joao_carlos_larini.pdf.

Llano, J. & Adrián, M. (2006). *A informática educativa na escola.* São Paulo: Edições Loyola.

Paraná, Secretaria de Estado da Educação. (2008). Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Curitiba: SEED.

Lovis, K., & Franco, V. (2013). Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. *Informática na Educação: teoria e prática*, 16 (1), 149-160.

# Identificar retângulos num conjunto de quadriláteros: que discussão?

*Maria Paula Pereira Rodrigues*[1], *Lurdes Serrazina*[2]
[1]Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa,
mariapaular@campus.ul.pt
[2]Escola Superior de Educação de Lisboa, UIDEF, Universidade de Lisboa,
lurdess@eselx.ipl.pt

…

## Introdução

Apresentam-se os dados obtidos numa discussão coletiva, com alunos de 2.º ano, durante a identificação de retângulos num conjunto de quadriláteros.

Interessa saber se a discussão coletiva conduz a um maior conhecimento sobre retângulos e perceber se a mesma leva à classificação inclusiva.

## 1. Ideias teóricas

Para identificar figuras, os alunos podem revelar conhecimentos que se relacionam com protótipos visuais, sem considerar atributos ou propriedades (Clements et *al*., 1999). Noutros casos, uns, apoiar-se-ão na identificação de propriedades e, outros, articularão protótipos visuais com propriedades conhecidas (Fuys, Geddes & Tischler, 1988).

Os alunos tenderão para uma classificação partitiva, onde os subconjuntos de conceitos são disjuntos (Clements & Sarama, 2007), ao contrário de uma classificação hierárquica, onde os conceitos mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais (de Villiers, 1994).

## 2. Metodologia

A metodologia utilizada é de natureza qualitativa-interpretativa (Denzin & Lincoln, 1989) e, na análise de dados, os alunos foram identificados com nomes fictícios. Os participantes têm seis e sete anos e pertencem a uma turma de 2º ano.

Os dados focam-se numa discussão coletiva onde os alunos puderam argumentar, completar ideias, clarificar conceitos ou criar raciocínios e referem-se à identificação de retângulos.

A tarefa consistiu na escolha dos retângulos, incluindo os quadrados, caso fossem identificados como um caso especial, utilizando um conjunto de quadriláteros manipuláveis.

Pretendeu-se identificar o conhecimento utilizado para selecionar retângulos: protótipos visuais; propriedades; características; atributos ou contraexemplos, e perceber se a discussão coletiva levaria a um maior conhecimento sobre retângulos e conduziria à classificação inclusiva.

## 3. Conhecimento dos alunos sobre retângulos

> Investigadora: Neste conjunto de figuras, podem dizer-me quais são retângulos?

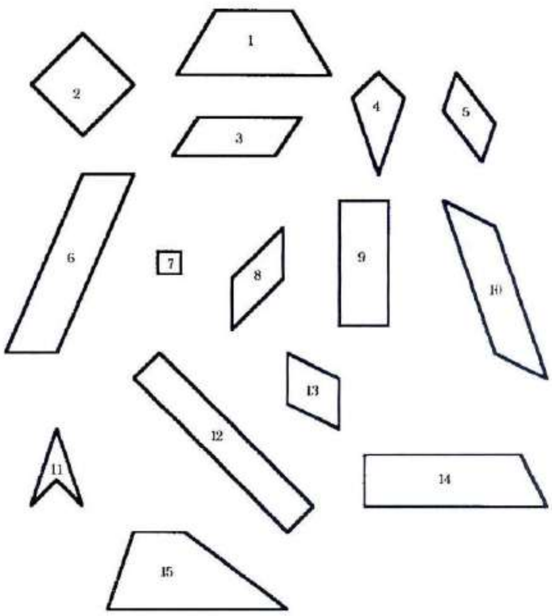



Figura 1. Conjunto de quadriláteros para identificação de retângulos F4 (Razel & Eylon, 1991)

Marco: Os retângulos são o 6; 12; 14; 10; 9 e 3.

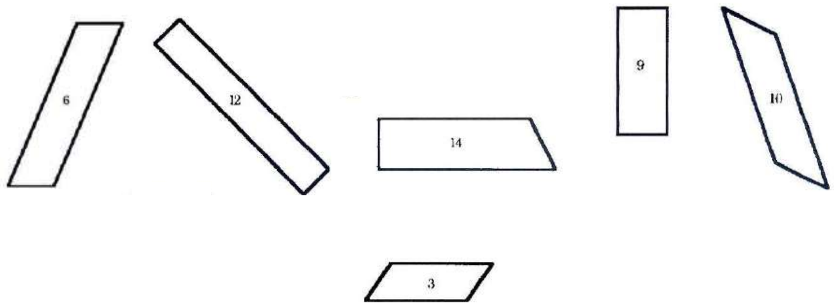



Figura 2. Primeiro conjunto de figuras identificado como retângulos

A ideia apresentada prende-se com a existência de dois lados compridos e dois lados curtos. Esta imagem mental impede a consideração de propriedades essenciais que permitiria escolher apenas retângulos.

António: Não concordo! Só escolhia as figuras 9 e 12.
Lívia: Concordo com o António! Mas só nalgumas.
Investigadora: Quais escolherias?
Lívia: Escolhia a 9; a 12; a 2 e a 7, porque um retângulo é uma figura geométrica com 4 lados e dois pares de lados paralelos e o quadrado também. O quadrado é um retângulo especial.

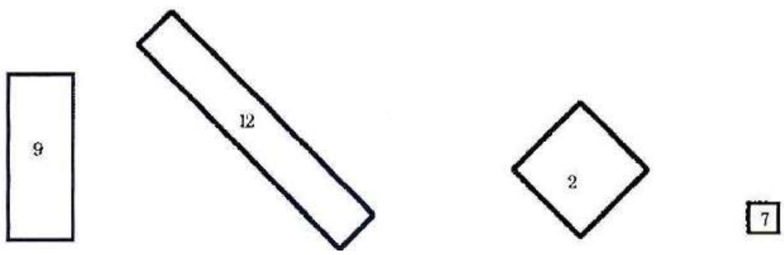



Figura 3. Retângulos identificados por Lívia

Sem identificar a propriedade necessária e suficiente do retângulo, a aluna articula características e identifica propriedades comuns que levam à classificação inclusiva, considerando o quadrado um caso especial do retângulo.

Lívia: Nestas figuras, os vértices juntam-se da mesma forma e nas outras, não.
Investigadora: Como?
Lívia: Os vértices tocam-se com linhas perpendiculares e nas outras com linhas oblíquas.

Durante este diálogo, Lívia e, aproximadamente, um terço da turma que acompanhava o seu raciocínio, concretizaram a ideia da existência de quatro ângulos retos, que permitem ao quadrado desempenhar a função de um caso particular do retângulo.

> Investigadora: Vocês dizem que as figuras 2 e 7 são retângulos porque…
> Lívia: … têm 4 lados, linhas perpendiculares e paralelas e 4 ângulos retos.
> Investigadora: Todas as figuras com 4 lados e 4 ângulos retos serão retângulos?
> Um grupo de alunos: Sim!

Enunciando um conjunto de propriedades, foi-se construindo um raciocínio que permitiu deixar cair propriedades acessórias e reconhecer apenas a essencial.

> Investigadora: … mas, então, as figuras 9 e 12 também podem ser quadrados?
> Mariana: Não, porque os lados do quadrado são todos iguais.
> Investigadora: Podemos concluir que os quadrados são retângulos porque têm 4 lados e 4 ângulos retos, mas há retângulos que não são quadrados porque não tem os lados todos com a mesma medida?
> Um grupo de alunos: Sim!

Este percurso pareceu clarificar a ideia de retângulo e, simultaneamente, escolher o essencial e rejeitar o acessório para, um terço da turma, chegar à classificação inclusiva.

## 4. Discussão

Foram identificadas propriedades essenciais que permitiram identificar o retângulo e reconhecer o quadrado como um caso especial de retângulo (Fuys, Geddes & Tischler, 1988).

Foram articulados protótipos visuais com atributos conhecidos, quando quadrados e retângulos foram identificados tendo como referência a medida dos lados (Clements et *al*., 1999). No retângulo, os dois lados paralelos de maior medida e menor medida assumem, para o grande grupo, a concretização mental da forma que se relaciona apenas com características individuais e não propriedades essenciais (Clements & Sarama, 2007).

A discussão coletiva permitiu alargar o conhecimento sobre as propriedades essenciais do retângulo e conduziu a uma classificação inclusiva (de Villiers, 1994).

**Referências**

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30* (2), 192-212.

Clements, D. & Sarama, J. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking, Students and Learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching Learning* (pp. 489-517). Reston, VA: NCTM.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1989). *Handbook of qualitative research* (pp. 105 – 117). Thousand Oaks, CA: Sage.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaters. *For the learning of mathematics, 14 (1)*, 1-13.

Fuys, D., Geddes, D., Lovett, C. J. & Tischler, R. (1988) The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Reston, VA: NCTM.