XXIV SIEM Braga, Universidade do Minho, Instituto de Educação
16 e 17 de novembro de 2013

ATAS DO XXIV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Organizadores

José António Fernandes
Maria Helena Martinho
Joana Tinoco
Floriano Viseu

Braga 2013

APM
Associação de Professores de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título

ATAS DO XXIV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Organizadores

José António Fernandes
Maria Helena Martinho
Joana Tinoco
Floriano Viseu

ISBN

978-989-8525-24-6

Associação de Professores de Matemática

Centro de Investigação em Educação
Universidade do Minho

Novembro de 2013

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 7

CONFERÊNCIAS 9

Desenvolver o raciocínio proporcional – Contributo de uma abordagem de ensino exploratória 11
Ana Isabel Silvestre

The Knowledge Quartet: a framework for analysing and developing mathematics Teaching 31
Tim Rowland

PAINEL DE PROJETO 49
Susana Carreira, *membros da equipa do Projeto & Isabel Vale* (moderadora)

O Projeto Problem@Web: perspetivas de investigação em resolução de problemas 51
Susana Carreira, *Nélia Amado*, *Rosa Ferreira*, *Hélia Jacinto*, *Sandra Nobre* & *Nuno Amaral*

ESPAÇO GTI 73
Henrique Guimarães (coordenador), *Hélia Oliveira*, *Irene Segurado* & *Renata Carvalho*

Investigação sobre a prática 75
Henrique Guimarães

SIMPÓSIO 1: Ensino e aprendizagem de geometria e medida 77

Ensino e aprendizagem de geometria e medida 79
Teresa Neto & *Lina Fonseca*

COMUNICAÇÕES

O raciocínio geométrico nas provas de avaliação externa do 2º ciclo do Ensino Básico 83
Paula Vieira da Silva & *Leonor Santos*

O *feedback* no contexto do trabalho entre alunos com o GeoGebra 99
Júlio Paiva, *Nélia Amado* & *Susana Carreira*

SIMPÓSIO 2: Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística 115

Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística 117
Ana Henriques & *Maria Manuel Nascimento*

COMUNICAÇÕES

Definiciones asociadas a la distribución de datos bidimensionales en textos españoles de bachillerato 127
M. Magdalena Gea, *Carmen Batanero*, *José António Fernandes* & *Emilse Gómez*

Determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas por alunos futuros educadores e professores do ensino básico 141
José António Fernandes, *Carmen Batanero* & *Gustavo Cañadas*

Conflitos semióticos na resolução de um problema de testes de hipóteses para a proporção por estudantes do ensino superior 155
Gabriela Gonçalves, *José António Fernandes* & *Maria Manuel Nascimento*

Condução de tarefas de organização e tratamento de dados no 3.º ano de escolaridade 169
Luciano Veia

Desenvolvendo as representações estatísticas de alunos de 3.º ano 183
Isabel Velez & João Pedro da Ponte

O conhecimento didático de uma professora no ensino da relação bivariada na Estatística 197
Sandra Quintas, Hélia Oliveira & Rosa Tomás Ferreira

POSTERS
Metodologia estatística para a classificação das escolas secundárias em Portugal......... 213
Mário Oliveira, A. Manuela Gonçalves & Marco Costa

O raciocínio estatístico dos alunos sobre covariação usando o Tinkerplots 217
Patrícia Antunes & Ana Henriques

A reflexão nos relatórios finais de estágio: Análise de uma experiência de ensino e aprendizagem em Estatística 221
Cristina Martins & Manuel Vara Pires

SIMPÓSIO 3: Ensino e aprendizagem de números e álgebra 225

Ensino e aprendizagem de números e álgebra 227
António Borralho & Pedro Palhares

COMUNICAÇÕES
A visualização e o sentido de número: um estudo no 1º ano de escolaridade 235
Ana Pereira & Ana Barbosa

A aprendizagem de métodos formais num ambiente combinado de lápis e papel e folha de cálculo 253
Sandra Nobre, Nélia Amado & João Pedro da Ponte

O Pensamento Algébrico em contextos visuais 273
Marta Pinheiro & Ana Barbosa

Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre Matrizes 295
Paula Maria Barros, Cláudia Mendes Araújo & José António Fernandes

Desenvolvimento do conhecimento do ensino-aprendizagem da Álgebra na formação inicial de professores dos primeiros anos 309
Neusa Branco & João Pedro da Ponte

POSTERS
A complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens: usando a teoria da atividade 325
Fernando Luís Santos & António *Domingos*

Exploração matemática do triângulo de Pascal feita por alunos do 5.º ano 329
Manuel Vara Pires

SIMPÓSIO 4: Conhecimento e práticas profissionais de professores de matemática 333

Conhecimento e práticas profissionais de professores de Matemática 335
Rosa Antónia Tomás Ferreira, Isabel Vale, Teresa Pimentel

COMUNICAÇÕES
A realização de miniprojetos de educação intercultural no ensino da Matemática: As experiências vividas por quatro professoras 347
Lucília Teles & João Pedro da Ponte

Responder aos alunos em discussões coletivas: Oportunidades para a autorregulação da aprendizagem em Matemática 359
Sílvia Semana & Leonor Santos

A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de Matemática 373
Helena Rocha

A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor 385
Marisa Quaresma & João Pedro da Ponte

Comunicação matemática em contexto de sala de aula: O papel da professora de uma turma do 5º ano de escolaridade 399
Olga Seabra & Maria Helena Martinho

Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino Exploratório 413
Hélia Oliveira & Renata Carvalho

As aulas de matemática com alunos com deficiência auditiva: perspetivas de uma professora e uma intérprete 427
Joana Margarida Tinoco, Maria Helena Martinho & Anabela Cruz-Santos

O sentido de adição e subtração de números racionais de futuros professores dos primeiros anos 439
Hélia Pinto, C. Miguel Ribeiro & Nádia Ferreira

Negociação de significados no 1.º ano de escolaridade: Conceitos e processos matemáticos 451
António Guerreiro

POSTERS
Da História da Matemática na Educação de Jovens e Adultos: Relações de saberes e contribuições pedagógicas 469
Rodrigo Donizete Terradas & Josimar de Sousa

SIMPÓSIO 5: Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática 471

Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática 473
Manuel Vara Pires & Nélia Amado

COMUNICAÇÕES
Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática 481
Sandra Pinheiro & Isabel Vale

Criatividade matemática e flexibilidade de representação na resolução de problemas para além da sala de aula 495
Nuno Amaral & Susana Carreira

"Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra 513
Hélia Jacinto & Susana Carreira

O contributo da participação numa competição matemática para a aprendizagem de um aluno com necessidades especiais: O caso de Rui 529
Nélia Amado & Susana Carreira

Fatores Afetivos na Resolução de Problemas Matemáticos Desafiantes no Contexto de uma Competição Inclusiva Baseada na Web 543
Susana Carreira, Rosa Antónia Tomás-Ferreira & Nélia Amado

Atividades matemáticas na interseção de saberes no 1.º Ciclo do Ensino Básico 561
Fátima Regina Jorge, Fátima Paixão, Helena Martins & Maria Fernanda Nunes

POSTERS
Experiências matemáticas na educação pré-escolar: a importância da articulação......... 579
Ana Barbosa

Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: explicitando o intertexto 583
Kátia Maria de Medeiros & *Misleide Silva Santiago*

Do ponto ao espaço: Contributo do croché para a Matemática do planeta Terra 587
Maria Antónia Forjaz, *Alexandra Nobre*, *Cristina Almeida Aguiar* & *Maria Judite Almeida*

LISTA DE REVISORES 591

AGRADECIMENTOS... 593

INTRODUÇÃO

O XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática (XXIV SIEM), da responsabilidade do Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) em Educação Matemática, da Associação de Professores de Matemática, realizou-se nos dias 16 e 17 de novembro, no Instituto de Educação da Universidade do Minho e constituiu um espaço de divulgação, partilha e debate de ideias e de trabalhos realizados pela comunidade de investigação em Educação Matemática, esperando-se que dele resultassem também contributos para a promoção da articulação entre a investigação e a prática.

Em termos do seu programa científico, como tem acontecido nos últimos anos de realização, o Seminário incluiu duas conferências plenárias dinamizadas por um convidado nacional e outro estrangeiro, um painel temático centrado na apresentação de um projeto de investigação, o Espaço GTI e vários simpósios de apresentação e discussão de comunicações e *posters*.

As comunicações, num total de vinte e oito, e *posters*, num total de nove, distribuíram-se por cinco simpósios: Ensino e aprendizagem de geometria e medida, com duas comunicações; Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística, com seis comunicações e três *posters*; Ensino e aprendizagem de números e álgebra, com cinco comunicações e dois *posters*; Conhecimento e práticas profissionais de professores de matemática, com nove comunicações e um *poster*; Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática, com seis comunicações e três *posters*.

Participaram no XXIV SIEM cerca de noventa congressistas, dos quais mais de três em cada quatro tiveram uma participação ativa no Seminário, seja na apresentação de conferências, comunicações ou *posters*, na dinamização dos espaços Projeto e GTI ou na organização e dinamização dos diferentes simpósios. Além disso, também mais de três em cada quatro participantes estiveram envolvidos no processo de revisão de textos submetidos ao Seminário.

Este nível de envolvimento dos participantes no XXIV SIEM revela uma comunidade de Educação Matemática ativa e atenta às questões de investigação sobre o ensino e a aprendizagem da matemática e com repercussões nas práticas pedagógicas.

Braga, novembro de 2013

A Comissão Organizadora do XXIV SIEM

CONFERÊNCIAS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Desenvolver o raciocínio proporcional – Contributo de uma abordagem de ensino exploratória

Ana Isabel Silvestre
Escola Básica 2,3 Gaspar Correia, Portela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
anaisabelsilvestre@gmail.com

Resumo. *Esta comunicação apresenta um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional em alunos do 6.º ano, no âmbito de uma unidade de ensino de cunho exploratório. O estudo é uma experiência de ensino, uma forma de design research, pois procura conhecer a influência de uma unidade de ensino no desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos. Os resultados mostram que, antes da unidade de unidade de ensino, os alunos tendem a usar estratégias não-proporcionais e pré-proporcionais na resolução de problema de valor omisso e de comparação, nem sempre com sucesso. Os resultados também mostram que os alunos, no final da unidade de ensino, revelam tendência para usar estratégias proporcionais, nomeadamente a estratégia escalar na resolução de problemas de valor omisso e a estratégia funcional na resolução de problemas de comparação. Deste modo, as aprendizagens dos alunos suportam a conjetura de ensino-aprendizagem segundo a qual esta capacidade se desenvolve quando os alunos (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas de valor omisso e de comparação relativos a relações de proporcionalidade direta, problemas pseudoproporcionais e outros problemas em que se averigua a existência de proporcionalidade direta; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações.*

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, Unidade de Ensino, Abordagem exploratória.

Introdução

A capacidade de raciocínio proporcional é importante não só na resolução de problemas do quotidiano mas também na aprendizagem de outras noções matemáticas e de outras áreas do saber. Porém, os alunos revelam com frequência dificuldades na resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a identificação da relação de proporcionalidade direta e o cálculo do valor omisso. A investigação sobre o raciocínio proporcional tem vindo a delinear os vários aspetos de que este se reveste, salientando a importância da compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta. Ao mesmo tempo, a investigação tem alertado para a morosidade e a forte influência da experiência escolar no seu desenvolvimento.

O trabalho de cunho exploratório (Ponte, 2005), nomeadamente envolvendo regularidades e relações no âmbito do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, é um bom quadro para desenvolver o raciocínio proporcional. De facto, este tipo de raciocínio envolve o saber estabelecer relações e comparações entre grandezas e quantidades. Esta abordagem é tida como uma alternativa ao tradicional uso da regra de três simples, que de acordo com Norton (2005) é um aspeto problemático no ensino da Matemática.

O desenvolvimento e aperfeiçoamento de unidades de ensino por investigadores é um dos processos através dos quais se podem gerar artefactos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática letiva. Ao mesmo tempo, estas unidades permitem desenvolver e testar teorias sobre o modo como os alunos aprendem em condições diferentes das que usualmente lhes são proporcionadas. Esta comunicação apresenta o percurso de aprendizagem de dois alunos, no quadro de uma unidade de ensino sobre a noção de proporcionalidade direta, de cunho exploratório com as orientações sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.

Raciocínio proporcional

Neste trabalho considero que o raciocínio proporcional envolve três aspetos principais: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais: e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (Silvestre & Ponte, 2011; Silvestre, 2012). Ao indicar estes diferentes aspetos que envolvem o raciocínio proporcional, pretendemos contribuir para uma configuração de indicadores capazes de orientar o ensino-aprendizagem, de modo a desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos.

Ser capaz de distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outras relações que não o são é um aspeto fundamental do raciocínio proporcional. Para isso, durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a relação de proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem uma relação de proporcionalidade direta mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência. Estes problemas apresentam uma relação aditiva, uma relação de proporcionalidade inversa ou outras situações em que não existe uma relação de proporcionalidade direta. A semelhança da estrutura sintática dos problemas pseudoproporcionais e de valor omisso (o tipo mais comum de problema de proporcionalidade direta) é responsável pelo evocar a proporcionalidade direta. “Uma toalha demora 20 minutos a secar. Quanto tempo demoram três toalhas a secar?” é um exemplo de um problema pseudoproporcional em que não existe relação de proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, ou seja, o número de toalhas não está relacionado de forma proporcional com o tempo de secagem.

Nas estruturas multiplicativas, isto é, nas situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou ambas as operações, Vergnaud (1983), identifica três classes, sendo uma delas o isomorfismo de medidas, que se refere a uma proporção direta simples. Neste caso, as transformações que se operam dentro ou entre variáveis mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos, como mostram a figura:

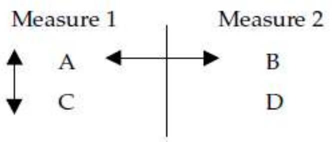


Figura 1 – Isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983)

Tendo em conta estas transformações, Stanley, McGowan e Hull (2003) argumentam que a abordagem em que os alunos “resolvem proporções” (sic) está ultrapassada e deve ser substituída por outra abordagem em que estes se envolvem em atividades que os ajudam a descobrir que a proporcionalidade é a variação mútua de duas grandezas.

Neste trabalho, são usados problemas proporcionais de valor omisso, de comparação. Os primeiros apresentam três valores numéricos e pedem o quarto valor, o valor omisso. Os problemas de comparação apresentam dois ou mais pares de valores numéricos e pedem a sua comparação. Nalguns casos, o contexto destes problemas exige um julgamento qualitativo. Os problemas de comparação podem ser numéricos ou não e podem envolver um julgamento qualitativo de acordo com o respetivo contexto (por exemplo, “No recipiente A dissolveram-se 10 gramas de sal em 2 litros de água. No recipiente B dissolveram-se 20 gramas de sal em 10 litros de água. Em qual dos recipientes a água é mais salgada?”). Os problemas de comparação numérica apresentam os quatro valores numéricos da proporção e solicitam ao aluno que indique se uma das razões é maior, menor ou igual à outra. Por sua vez, os problemas de valor omisso apresentam três dos quatro valores da proporção e solicitam ao aluno que determine o valor omisso (por exemplo, "Com 3 euros compro 2 chocolates. Quantas chocolates posso comprar com 21 euros?").

Os fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta são o contexto, os números e a estrutura numérica, as grandezas e as representações. O contexto dos problemas diz respeito ao fenómeno exposto, que pode ser um sistema físico complexo (por exemplo, a balança de braços). Os números utilizados nos problemas são mais um fator que influencia a complexidade dos problemas e, consequentemente, as dificuldades dos alunos. As grandezas discretas e contínuas são ainda outro fator com impacto na complexidade dos problemas, sendo de referir que a natureza das grandezas está estreitamente relacionada com o fenómeno descrito no contexto do problema. As grandezas têm também uma natureza extensiva (referem-se apenas uma única entidade, por exemplo, 6 livros) ou intensiva (envolvem uma razão entre duas entidades, por exemplo, 12 garrafas por caixa) que deve ser tida em consideração. Finalmente, as representações presentes no problema são igualmente um fator que influencia a complexidade dos problemas. O conhecimento por parte dos professores dos fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta permite a organização estruturada das tarefas a propor aos alunos de modo a desenvolver o seu raciocínio proporcional.

A construção de uma unidade de ensino da proporcionalidade direta

Wittmann (1998) diz que a Educação Matemática tem como cerne a construção de artefactos e a investigação dos seus efeitos em diferentes ecologias educativas. Estes artefactos incluem unidades de ensino, conjuntos coerentes de unidades de ensino e o próprio currículo. Uma unidade de ensino tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem (uma conjetura de ensino-aprendizagem), sendo constituída por uma sequência de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didáticos. A conjetura de ensino-aprendizagem, tem uma natureza eminentemente teórica, baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar (Sandoval, 2004). A unidade de ensino tem um cunho exploratório, procurando envolver os alunos em tarefas não rotineiras, em cuja resolução mobilizem os seus conhecimentos intuitivos. A conjetura de ensino-aprendizagem que lhe está subjacente assume que os alunos desenvolvem o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta (de valor omisso e de comparação), problemas pseudoproporcionais e outros em que se averigua a existência de proporcionalidade direta; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fração; razão com dois pontos). A unidade de ensino, como mostra o quadro 1, é constituída por 5 fichas de trabalho e por dois testes. A ficha de trabalho inicial apresenta aos alunos uma investigação, a segunda ficha uma exploração e as restantes três fichas são constituídas por problemas proporcionais (valor omisso e comparação) e pseudoproporcionais.

Com o teste diagnóstico pretende-se conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, antes do desenvolvimento da unidade de ensino, em particular os vários aspetos considerados neste estudo, e decidir se sobre a sua exequibilidade. O teste final pretende dar a conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos após o desenvolvimento da unidade de ensino.

Metodologia

O estudo é uma experiência de ensino, uma das forma de *design research*, que pretende conhecer a influência da unidade de ensino na capacidade de raciocínio proporcional dos alunos (Confrey, 2006). A unidade de ensino foi desenvolvida em duas turmas de uma escola da periferia de Lisboa. Estiveram envolvidas duas professoras que desenvolveram um trabalho colaborativo com a primeira autora desta comunicação.

Todas as aulas da unidade de ensino foram gravadas em vídeo. Foram também recolhidos e posteriormente analisados os registos escritos dos alunos nas diversas tarefas. Foram aplicados às turmas dois testes, um teste de diagnóstico e um teste final. Tendo em consideração a natureza do estudo, a análise de dados é essencialmente descritiva.

Quadro 1 - Planeamento da unidade de ensino.

Fichas de Trabalho e Testes	Descrição	Modo de trabalho	Tempo (bloco 90 minutos)
Teste inicial	- Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre os aspetos que envolvem o raciocínio proporcional.	Individual	1
Ficha 1 O coelho e a tartaruga	**- Natureza da tarefa:** Investigação **- Objetivos da tarefa:** • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Representar a informação em tabelas e gráficos. **- Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	2,5
Ficha 2 O segredo da tartaruga	**- Natureza da tarefa:** Exploração **- Objetivos da tarefa:** • Distinguir as relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são. • Experimentar vários valores invariantes (constante de proporcionalidade) e verificar que a relação de covariação se mantêm. • Explicar o significado da constante de proporcionalidade. • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado de forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). **- Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	1,5
Ficha 3 No país das tartarugas	**- Natureza das tarefas:** Problemas **- Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso e de comparação). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **- Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 4 Maratona dos coelhos e mais problemas	**- Natureza das tarefas:** Problemas **- Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de percentagem). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **- Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 5 Pista interdita a coelhos e outras histórias	**Natureza das tarefas:** Problemas **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de escala). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Teste final	- Avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos durante a unidade de ensino, relacionadas com os aspetos que envolvem raciocínio proporcional.	Individual	1

A realização da unidade de ensino

Nesta secção apresento alguns episódios da realização das tarefas na aula. Na primeira aula as professoras apresentam a tarefa da ficha de trabalho 1 (ver a figura seguinte), dizendo que se trata de uma investigação, chamam a atenção os alunos para a necessidade de realização de registos durante o trabalho para poderem fazer um relatório detalhado e dão indicações sobre a constituição dos grupos e a gestão do trabalho em grupo.

Todos os anos se realiza a corrida mais famosa do mundo. (...) O esquema mostra a prova realizada pelo coelho e pela tartaruga. (...) Investiga o terá acontecido durante a corrida.

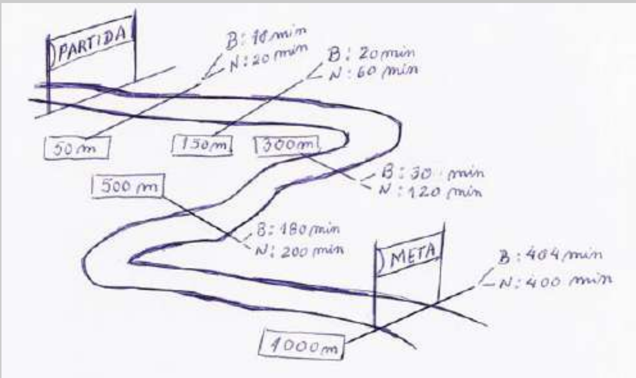


Figura 2 – Ficha de trabalho 1 (aspeto parcial)

Após receberem a ficha, os alunos levam algum tempo a formular conjeturas que reúnam o consenso da maioria dos elementos dos respetivos grupos. Este processo é demorado mas implica-os na realização de um trabalho cognitivamente exigente que requer a mobilização do seu conhecimento e que vai além da Matemática, exigindo ainda a organização das ideias para as comunicar com clareza aos outros elementos do grupo, como mostra o diálogo de um grupo da turma A.

> *Carolina*: Que a tartaruga ganhou toda a gente sabe.
>
> *Rita*: Como é que se sabe isso em Matemática?! (...)
>
> *Manuel*: [A tartaruga] ganhou a corrida porque fez menos tempo que o coelho, é normal... Olha aqui. (Aponta para o registo do tempo gasto pelo coelho.) Esse não é o problema!
>
> *Carolina*: Sim. O que é preciso saber é como é foi a corrida... Não pergunta quem ganhou a corrida!
>
> *Rita*: O coelho dormiu! (Risos) Na história foi assim...
>
> *Manuel*: E a "stora" ia pôr isso assim! Bué da fácil! (...)

Carolina: Isto é uma história matemática temos é de ver os números nisto [no esquema]... (...) Olha aqui, o coelho aqui foi muito mais rápido que a tartaruga, fez 100 [minutos] e a tartaruga 200 [minutos] (...) Só depois dos 500 metros é que ele gasta mais tempo que tartaruga. Na metade do fim, dos 500 para os 1000 metros, o coelho perdeu aí. (A Júlia, o quarto elemento do grupo parece não estar a perceber e Carolina repete o que tinha dito, indicando os valores numéricos no esquema.)

Manuel: Foi depois dos 500 metros que ele dormiu e perdeu tempo para a tartaruga. (Segue-se uma discussão sobre este argumento.) (...)

Rita: Mas se ele dormiu não saiu do lugar! Eu acho que ele se cansou e depois foi a correr mais lento e perdeu.

Carolina: (...) É mesmo isso! Olha aqui, [o coelho] aos 150 metros deveria ter feito 300 [minutos] e fez 200 [minutos]. (Os colegas não percebem e Carolina explica.) Aqui (aponta para os150 metros) é 50 mais 50 e mais 50 então aqui (aponta para o tempo realizado pelo coelho aos 150 metros) deveria ser 300 [minutos], 100 mais 100 e mais 100. Mas é 200 [minutos], foi muito mais rápido. (...)

Rita: (Relevando satisfação pela sua ideia ter sido aceite.) Então o coelho perdeu porque se cansou a meio... Hum, depois do meio da corrida. Ele primeiro foi muito rápido...

Os alunos deste grupo começam por analisar os valores numéricos e a conjeturar sobre o que teria acontecido na corrida, acabando por considerar que o coelho se cansou e, por isso, perdeu. É interessante verificar que Carolina recorre a uma relação de proporcionalidade direta utilizando um procedimento aditivo para explicar aos colegas porque pensa que o coelho tinha realizado até ali uma corrida rápida. É provável que esta aluna, dada a sua facilidade em realizar cálculos mentalmente, tenha verificado a existência da relação que explica na corrida a tartaruga, mas não a comunicou. Nesta turma, a professora vai passando pelos grupos, demorando-se naqueles onde nota mais dificuldades. Trata-se dos grupos em que os alunos, sem pensarem bem na tarefa, passam de imediato para o registo dos dados na folha de cálculo. Vai apelando à escrita do que pensa cada um dos elementos do grupo para que possam fazer um relatório detalhado. Relembra também que os alunos têm escrito coisas sem sentido porque não releem com atenção as respostas. Faltam 30 minutos de tempo útil da aula quando o grupo da Carolina inicia o trabalho na folha de cálculo, depois de travar as tentativas de Manuel para usar a folha de cálculo sem pensar no problema. No entanto, os alunos apenas representam os dados depois de optarem por duas tabelas verticais após alguma discussão sobre a vantagem desta escolha tendo por base a sua experiência anterior com a folha de cálculo. Discutem ainda o modo como determinar a "rapidez" do coelho em termos matemáticos. Quando faltam 10 minutos para terminar a aula, a professora diz aos grupos para guardarem o seu trabalho numa *pen drive* que fez circular na sala. Na segunda aula, os alunos continuaram o trabalho, tendo por foco a redação do relatório. A figura 2 apresenta parte dos relatórios de dois grupos da turma A, que descrevem o modo como os alunos representam os dados e as conclusões da sua investigação. A qualidade do trabalho de alguns grupos é surpreendente (é o caso do grupo de Tomás), revelando que os alunos são capazes de mobilizar conhecimentos adquiridos na realização de tarefas anteriores, de outros temas do programa. Os relatórios dos alunos constituem a base do trabalho realizado na terceira aula. Esta começou por uma discussão alargada na turma sobre o facto de, perante uma mesma situação, os personagens (coelho e tartaruga) terem tido um comportamento diferente na corrida. A maior parte dos alunos confirma a sua conjetura, isto é, o coelho correu inicialmente muito depressa, cansou-se e perdeu velocidade na parte final da corrida. Depois, a discussão foca-se na regularidade na corrida da tartaruga Nini. É particularmente interessante a forma como os alunos explicam que, no caso da Nini, os valores numéricos da distância e do tempo variam mantendo a mesma velocidade – a maioria dos alunos designa a velocidade por "ritmo" – reconhecendo a existência de variação dos pares numéricos das duas variáveis que mantêm velocidade constante (invariante).

Esta discussão é também importante para os alunos compreenderem que, utilizando estratégias diferentes, podem encontrar uma resposta coerente. Foi durante a discussão que a professora disse aos alunos que a constante que tinha identificado se designa por constante de proporcionalidade. O significado do valor da constante de proporcionalidade no contexto do problema suscita forte discussão, pois como vimos, o grupo de Carolina obtém esse valor (0,4) através da divisão do tempo pela distância, enquanto o grupo de Tomás opta pela divisão da distância pelo tempo (obtendo 2,5). Os alunos são também desafiados pela professora a averiguar a existência de outras regularidades e alguns apresentam o fator escalar que, dentro de cada variável, permite obter os valores indicados na tabela.

A apresentação da tarefa da ficha de trabalho 2 pelas professoras é semelhante à tarefa da ficha 1. Em particular, referem aos alunos a importância de irem efetuando registos sobre o modo como realizam o trabalho, não se limitando a apresentar apenas os cálculos e uma breve resposta. Após a leitura da tarefa, a maioria dos grupos mobiliza o relatório anterior onde estavam os dados necessários. Nas duas turmas, os grupos solicitam poucas vezes a intervenção das professoras, centrando-se a discussão em torno do valor da constante de proporcionalidade a escolher para que o coelho ganhasse a corrida usando a mesma estratégia que a tartaruga.

Resposta do grupo de Carolina:

Nini		
Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/Metros
50	20	0,4
150	60	0,4
300	120	0,4
500	200	0,4
1000	400	0,4

Barnabé		
Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/metros
50	10	0,2
150	20	0,133333
300	30	0,1
500	180	0,36
1000	404	0,404

[Pela observação do esquema.] "O Barnabé até 500 metros esteve à frente. Mas dos 500 metros até à meta a Nini conseguiu vantagem de 4 minutos acabando em 1º lugar."

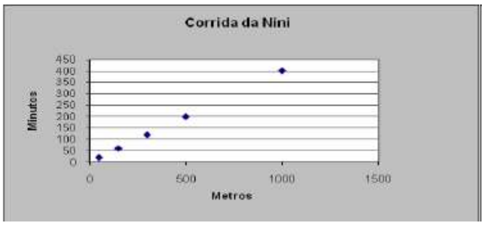
[A professora oralmente insistiu na investigação sobre o que teria acontecido durante a corrida.] A Rita e a Carolina propuseram uma tabela com os metros percorridos e o tempo demorado do coelho e da tartaruga. Mas o Manuel disse que assim não ficava muito bem e sugeriu que ficava melhor uma tabela para cada animal." (...) "Fizemos a conta entre os números e concluímos que a Nini andou sempre ao mesmo ritmo e o Barnabé não, ou seja, acelerou depois andou mais devagar. "

Resposta do grupo de Tomás

Barnabé		
Metros	Minutos	Divisões
50	10	5
150	20	7,5
300	30	10
500	180	2,78
1000	404	2,475

Nini		
Metros	Minutos	Divisões
50	20	2,5
150	60	2,5
300	120	2,5
500	200	2,5
1000	400	2,5
2000	800	2,5

"Começámos por fazer uma tabela como nos outros trabalhos [já realizados com recurso à folha de cálculo]. Depois colocámos todos os dados dos metros que percorreram e os minutos demoraram a percorrê-los. Observámos os números com atenção e percebemos que não podemos comparar os minutos do Barnabé com os da Nini." (...) "Fizemos a divisão dos metros com os minutos e vimos que o Barnabé foi alterando a velocidade e a Nini foi sempre na mesma velocidade." (...) "Pensámos que para podermos chegar a um resultado prolongando a pista até ter 2000 metros como o Barnabé foi alterando a sua velocidade não podia continuar a manter o ritmo mas a Nini como tinha estado sempre à mesma velocidade se a pista de prolongasse conseguiria acabar ao mesmo ritmo." (...) Fizemos os gráficos como nos outros trabalhos e a professora ajudou-nos a escolher um e vimos que na Nina os pontos estão em linha."



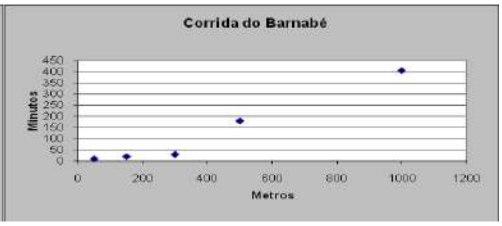


Figura 3 – Respostas de dois grupos da turma A (ficha de trabalho 1)

Durante a discussão da tarefa, na turma B, a professora procura focar a discussão no significado da constante de proporcionalidade:

> *António*: A nossa maior dúvida foi descobrir que nós é que tínhamos de escolher o valor do ritmo... Da constante da proporção, proporcionalidade, "né"?
>
> *Professora*: E como é que pensaram sobre isso?

António: Nós tínhamos feito metros por minutos [trabalho da ficha de trabalho 1] e depois deu 2,5 sempre. Metros por 1 minuto, era 2,5.

Nuno: Não! A "stora" está a perguntar porque é que era sempre o mesmo ritmo de velocidade! Era a maneira da Nini (tartaruga) correr...

António: Ah! Primeiro descobrimos que para o Barnabé ter a mesma estratégia da Nini, tinha de correr sempre da mesma maneira... E assim, não se cansava como se cansou... (...) Depois o ritmo de velocidade que tínhamos de pôr para o Barnabé, o menor do ritmo que dê para ganhar. Nós escolhermos 2,6 mas não era preciso, podia ser 2,51. (...)

Inês: (Aluna de outro grupo.) Nós escolhermos 0,3 [minutos/metro] mas antes fizemos o tempo a dividir pelos metros. (...) Para o coelho ganhar tinha de fazer menos tempo em cada metro.

Professora: Ouviram o que disse a Inês? E concordam? (...) Como é que determinaram o tempo se o coelho tivesse corrido a uma velocidade constante.

António: Posso ler (a resposta escrita no relatório)? Primeiro nós experimentámos com 3 [metro/minuto] de constante mas depois escolhemos 2,6 [metro/minuto] porque não era preciso ser... Até podia ser 2,51 [metro/minuto]. (...) Escrevemos 2,6 de constante na coluna (faz um gesto, com a mão, desenhando uma linha vertical)... Depois, como é no Excel escrevemos na linha do comando... Para fazer logo tudo, né? (...) igual, A2 barra [dividir] C2.

Professora: E o que tinham nessas colunas? Melhor, para determinar os tempos de passagem e final do Barnabé, o que é que fizeram?

António: Ham... Acho que é! Dividimos os metros [a distância], barra, pela constante. E deu! O Barnabé ganha com 384,6 (arredondado às décimas) minutos. (...) Assim, já dava para ganhar.

A ficha de trabalho 3 contém vários problemas, cada um com duas ou três alíneas. Espera-se que os alunos mobilizem o conhecimento sobre a relação multiplicativa de covariação entre variáveis e de invariância da relação entre variáveis, resolvendo problemas de valor omisso e de comparação. Paralelamente, procura-se que os alunos utilizem várias representações para desenvolverem flexibilidade na sua utilização. Apresento, como exemplo, as respostas de dois grupos da turma B a duas alíneas de um problema da ficha de trabalho (ver quadro 2).

O grupo de Dário estabelece uma relação entre variáveis e identifica 4 como constante de proporcionalidade. Utiliza esta relação para determinar o valor omisso pedido na questão *c*. Por sua vez, o grupo de Joel começa por explorar a relação de covariação entre as variáveis. Só depois explora a relação entre variáveis para identificar a constante de proporcionalidade. Este grupo, para determinar o valor omisso, opta por usar a relação dentro das variáveis. No entanto, esta estratégia revela-se problemática para responder à questão *c*. Durante a discussão do problema, a professora promove uma análise pelos alunos da eficiência do processo de resolução, em particular, no que respeita à escolha de uma estratégia que envolva números mais simples e fáceis de usar nos cálculos.

Quadro 2 - Problema da ficha 3 e resoluções de dois grupos

Por causa do tamanho das carapaças existem uma regra na atribuição de tocas. Na tabela estão representados alguns dados recolhidos em cinco veredas.

Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

a) Será possível saber o número de tartarugas que existe em cada toca? Explica como pensaste.

Resposta do grupo de Dário:

Número de tocas	Número de tartarugas
2 ×4	8
6 ×4	24
8 ×4	32
30 ×4	120
50 ×4	200

$\frac{8}{2}=4$ São 4 porque é a relação entre Número de tocas e Número de tartarugas.

Resposta do grupo de Joel:

Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

×3 ×4 ×15 ×25

Sim... $8:2=4$ $24:6=4$ $32:8=4$ $120:30=4$ $200:50=4$

Cada toca tem 4 tart.

c) Quantas tocas serão necessárias para colocar 44 tartarugas? E 400 tartarugas?

Resposta do grupo de Dário:

tartarugas	tocas
4	1
44	11
400	100

Resposta do grupo de Joel:

1 toca = 4 tart.

Tocas	Tart.
11	44
100	400

×9,090909091 ×9,090909091

Percursos de aprendizagem de dois alunos

Problemas pseudoproporcionais. Antes da unidade de ensino os alunos resolveram um problema pseudoproporcional (ver o quadro 3) que não envolve uma relação de proporcionalidade direta, inversa ou aditiva.

Quadro 3 – Problema pseudoproporcional do teste inicial e resoluções de Carolina e Manuel

A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a secar. Quanto tempo 3 toalhas demoram a secar?
Carolina 1 toalha 30 minutos 2 toalhas 60 minutos 3 toalhas 90 minutos R: se tivesse 3 toalhas a enxugar demorava 90 minutos.
Manuel 3 toalhas demorariam ~~a enxugar~~ 90 minutos a enxugar 30 min 30 min + 30 min 90 minutos 30 m × 3 m ou 90 m

Carolina e Manuel resolvem incorretamente este problema pois consideram a existência da relação de proporcionalidade direta no fenómeno descrito no problema. Carolina os usa incorretamente a estratégia de composição aditiva dos valores numéricos referentes ao número de toalhas e ao tempo. Manuel usa duas estratégias, na primeira estratégia o aluno usa um procedimento aditivo e na segunda estratégia usa um procedimento multiplicativo. A escrita em linguagem matemática e natural é a representação usada pelos alunos. Carolina usa também a representação tabular porque dispões os dados na forma de uma tabela elementar.

No final da unidade de ensino foi apresentado, entre outros, um problema pseudoproporcional (ver o quadro 4) semelhante aquele que foi apresentado no teste inicial e que também não apresenta relação aditiva, de proporcionalidade direta ou inversa.

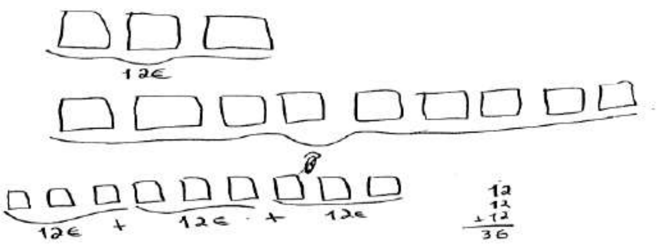
Quadro 4 – Problema pseudoproporcional do teste final e resoluções de Carolina e Manuel

Se uma camisola demora 20 minutos a secar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos a secar?
Carolina R: Não, porque estava no estendal! 1 camisolas ou 5 demorão o mesmo t
Manuel R: Não, porque as camisolas enxugam ao mesmo tempo

Os dois alunos respondem corretamente ao problema pseudoproporcional e as suas estratégias envolvem a explicação baseada no fenómeno descrito no problema. Nestas mostram que não existe relação de proporcionalidade direta. As estratégias envolvem essencialmente a representação escrita simbólica (linguagem materna).

Problemas de valor omisso. Um dos problemas da primeira entrevista (ver quadro 5) apresenta um fenómeno do quotidiano (compra de bens) e números inteiros múltiplos de 3.

Quadro 5 – Problema de valor omisso da primeira entrevista e resoluções de Carolina e Manuel

A Margarida comprou 3 livros da coleção "Era uma vez" por 12 euros. Quanto custam 9 livros?
Carolina: Se fossem 6 livros era o do dobro do dinheiro, 24. E se fossem 9 livros era 24 mais 12 euros. 3 livros - 12 € 6 livros - 24 € 9 livros - 36 € R: 9 livros eram 36 €. Então também podia fazer os 12 euros a dividir por 3 e dava o preço de cada livro. E depois somava os euros.
Manuel 

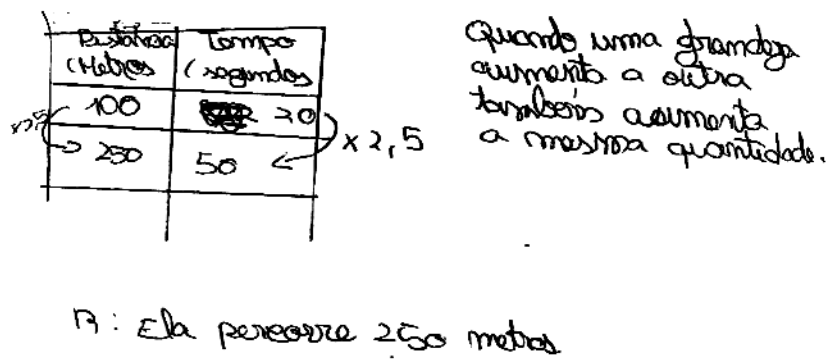
Inicialmente Carolina usa a estratégia de composição, recorrendo a procedimentos multiplicativos e aditivos, para determinar o valor omisso. Carolina comunica esta estratégia em linguagem oral complementada pela representação visual e a linguagem matemática e natural escrita. Posteriormente, a aluna apresenta oralmente outra estratégia que envolve o cálculo da razão unitária e a adição sucessiva até ser determinado o valor omisso. Por seu lado, Manuel revela conhecer o contexto do problema e responde corretamente. A estratégia do aluno conjuga elementos pictóricos dos livros e o procedimento aditivo, isto é, adição do preço de três conjuntos de 3 livros. Na resolução do problema o aluno usa a representação oral, a visual e a escrita (linguagem matemática).

A questão do teste final (ver o quadro 6) é um problema que descreve um fenómeno do quotidiano estudado durante a unidade de ensino. Os números apresentados no problema são inteiros, o valor omisso pedido é não inteiro e os fatores escalar e o funcional são, respetivamente, não inteiro e inteiro.

Quadro 6 – Problema de valor omisso do teste final e resoluções de Carolina e Manuel

A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos a uma velocidade constante. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos?

Carolina



Manuel

Carolina representa os dados numa tabela e utiliza a divisão para determinar o valor omisso, mostrando de forma clara o uso da estratégia escalar. Não é possível saber como é calculado o fator escalar mas tendo em consideração os números envolvidos a aluna deve tê-lo feito mentalmente (100:1=100). No entanto, escreve um erro quando explica a diminuição dos valores numéricos das variáveis ao dividir por 100, pois a centésima parte de 100 não é a mesma quantidade que a centésima parte de 20. A aluna deveria ter escrito que as variáveis diminuem na mesma proporção. A estratégia da aluna envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natura escrita.

O registo do Manuel mostra a estratégia funcional, isto é, calcula o fator funcional que usa para determinar o valor omisso indicando os procedimentos de cálculo. Durante a entrevista o aluno revelou ter realizado todos os cálculos na calculadora. A representação visual (tabela) e a escrita (linguagem matemática e natural) são usadas pelo aluno na resolução do problema.

Problemas de comparação. Um dos problemas do teste inicial (ver o quadro 7) descreve um fenómeno que os alunos do 6.º ano já presenciaram pelo menos nas aulas de Educação Física. Os números apresentados no problema são inteiros e múltiplos de 2 e a razão entre o tempo e a distância é, em ambos os caso, inteira. Por se tratar de um problema com contexto, os alunos têm de fazer um julgamento qualitativo sobre a velocidade das atletas.

Quadro 7 – Problema de comparação do teste inicial e resoluções de Carolina e Manuel

A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?	
Carolina	Sara → 8 voltas em 32 minutos Maria - 2 voltas em 10 minutos, ou seja 5 minutos em cada volta 3 voltas em 15 minutos 4 voltas em 20 minutos 5 voltas em 25 minutos 6 voltas em 30 minutos 7 voltas em 35 minutos →8 voltas em 40 minutos R: Quem correu mais depressa foi a Sara.
Manuel	Quem correu mais depressa, foi a Sara. Sara 8 voltas em 32 minutos Maria 2 voltas em 10 minutos $8 - 2 = 6$ $10 \times 6 = 60$

Carolina usa a estratégia de composição e responde corretamente. Tendo como referência o par numérico dos dados da atleta Maria, a estratégia parece centrar-se apenas na adição sucessiva de uma e cinco unidades que correspondem, respetivamente, ao número de voltas e ao tempo. Quando fixa o número de voltas (8) compara os tempos das atletas e conclui que a Sara é a mais veloz por demorar menos tempo.

A estratégia de Manuel mostra um erro de interpretação e deste modo a resposta está correta mas partindo de um pressuposto incorreto. No primeiro procedimento de cálculo determina a diferença do número de voltas das duas atletas. No segundo procedimento de cálculo determina o produto do tempo de 2 voltas de Maria (10 minutos), pela diferença de voltas das atletas, o que representa o tempo (60 minutos) de 12 voltas. Contudo, o aluno parece pensar que 60 minutos é o tempo referente a 6 voltas de Maria pelo que, a Sara é a mais veloz das duas pois só precisa demora 32 minutos a percorrer 8 voltas. O aluno usa a linguagem matemática e natural escrita na resolução do problema.

Na terceira entrevista foi apresentado um problema sobre mistura de tintas (ver o quadro 8), um fenómeno analisado durante a unidade de ensino e que requer julgamento qualitativo. Os números apresentado no problema são números inteiros e não inteiros e as razões são números não inteiros.

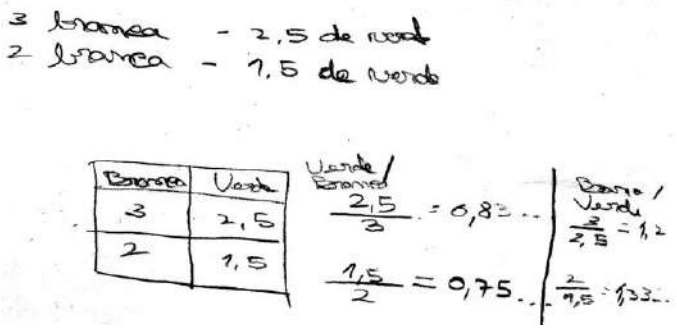
Carolina usa a estratégia funcional na resolução correta do problema que considera difícil. A estratégia implica várias representações, isto é, duas tabelas (uma elementar e outra mais elaborada) e as razões (verde:branco e branco:verde) na forma de fração e decimal, parecendo este processo fundamental para a aluna compreender de forma aprofundada o problema e decidir os procedimentos a realizar. A aluna mostra compreender o significado das razões e que a não existência de constante de proporcionalidade implica a diferença no tom de verde das tintas. A estratégia da aluna envolve a representação oral pois trata-se de uma entrevista, a visual (tabelas) e a escrita simbólica.

Manuel averigua a relação invariante entre a quantidade de tinta branca e verde que diz não existir. No entanto, não revelou ser capaz de usar esse conhecimento para indicar que as tintas têm uma tonalidade diferentes. O principal motivo da dificuldade do aluno parece ser o contexto do problema que envolve tintas e o fenómeno da sua diluição.

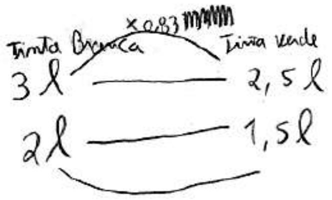
Quadro 8 – Problema comparação da terceira entrevista e as resoluções de Carolina e Manuel

A Carolina e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a Carolina preparou a tinta e misturou 3 litros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês misturou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

Carolina: Não sei se sei explicar bem. A mistura da Carolina, a minha, [mistura] é mais verde porque tem mais tinta verde para 1 litro de tinta branca.



Manuel: Eu não sei explicar como na aula. (Passa algum tempo.) Estes com tintas são muito difíceis, os problemas.



Conclusão

A unidade de ensino desenvolveu o raciocínio proporcional dos alunos, tendo estes melhorado o seu desempenho nos três aspetos com que caracterizamos esta capacidade matemática. Assim, os alunos melhoram o seu desempenho na distinção das relações proporcionais daquelas que o não são. Na resolução de problemas, em particular, nos de valor omisso, passam a usar estratégias multiplicativas, revelando uma melhor compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade Por fim, ampliaram o seu conhecimento sobre representações utilizando-as de forma flexível A tabela é a representação que mostram preferir na resolução de problemas de valor omisso enquanto na resolução de problemas de comparação mostram preferência pela tabela e pela razão (com dois pontos), esta última representação, já por eles usada antes da unidade de ensino.

A conjetura de ensino-aprendizagem que presidiu à elaboração d a unidade de ensino revelou-se propiciadora de aprendizagem significativa, permitindo mobilizar o conhecimento que os alunos já têm, aprofundando-o do ponto de vista matemático, envolvendo-os na generalização de regularidades e relações.

Referências

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Norton, S.J. (2005). The construction of proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the IGPME* (Vol. 4, p. 17-24). Melbourne: PME.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist*, *39*(4). 213-223.

Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocinio proporcional: Trajetórias de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the IGPME* (Vol. 4, pp. 185-192). Ankara: PME.

Stanley, D., McGowan, D., & Hull, S. H. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, *11*, 9-11.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-124). New York, NY: Academic Press.

Wittmann, E. C. (1998) Mathematics education as a 'design science'. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer.

The Knowledge Quartet: a framework for analysing and developing mathematics teaching

Tim Rowland
University of East Anglia, UK, and University of Cambridge, UK

Abstract. *This paper describes a framework for mathematics lesson observation, the 'Knowledge Quartet', and the purposes for which it was developed. A grounded theory approach to the analysis of many hours of classroom mathematics teaching led to the emergence of the framework, with four broad dimensions, through which the mathematics-related knowledge of the teacher participants could be observed in practice. This paper describes how each of these dimensions is characterised, and analyses one lesson, showing how each dimension of the Quartet can be identified in it. The paper concludes by outlining recent developments in the use of the Knowledge Quartet.*

Key words: mathematics teaching, teacher knowledge, teacher education, Knowledge Quartet.

Introduction

This paper concerns a framework for the analysis of mathematics teaching – the Knowledge Quartet – which was first developed at the University of Cambridge in the years 2002–4. Since then, the Knowledge Quartet has been applied in several research and teacher education contexts, and the framework has been further refined and developed as a consequence. The paper begins with a description of the research study which led to the emergence of the Knowledge Quartet, and how key elements of the theory are conceptualised. It proceeds to an analysis of one lesson through the lens of the Knowledge Quartet, and concludes with a discussion of some of the ways in which the framework has been used and developed further.

Developing the Knowledge Quartet

Context and purpose of the research

In the UK, the majority of prospective, 'trainee' teachers are graduates who follow a one-year program leading to a Postgraduate Certificate in Education (PGCE) in a university[1] education department. Over half of the PGCE year is spent teaching in

[1] It should be noted, however, that the government now actively promotes a range of workplace-based alternatives (such as 'School Direct') to the PGCE. These are effectively located in notions of apprenticeship, and offer little interaction with university-based teacher educators.

schools under the guidance of a school-based mentor, or 'cooperating teacher'. Placement lesson observation is normally followed by a review meeting between the cooperating teacher and the student-teacher. On occasion, a university-based tutor will participate in the observation and the review. The evidence indicates that these mentor/trainee lesson review meetings typically focus heavily on organisational features of the lesson, with very little attention to the mathematical content of mathematics lessons (Borko & Mayfield, 1995; Strong & Baron, 2004).

The purpose of the research from which the Knowledge Quartet emerged was to develop an empirically-based conceptual framework for lesson review discussions *with a focus on the mathematics* content of the lesson, and the role of the trainee's mathematics subject matter knowledge (SMK) and pedagogical content knowledge (PCK). In order to be a useful tool for those who would use it in the context of *practicum* placements, such a framework would need to capture a number of important ideas and factors about mathematics content knowledge in relation to teaching, within a small number of conceptual categories, with a set of easily-remembered labels for those categories.

The research reported in this paper was undertaken in collaboration with Cambridge SKIMA colleagues Peter Huckstep, Anne Thwaites, Fay Turner and Jane Warwick. I frequently, and automatically, use the pronoun 'we' in this text in recognition of their contribution.

Method

The participants in the first, theory-generating phase of the study were enrolled on a one-year PGCE course in which each of the 149 trainees specialised either on the Early Years (pupil ages 3–8) or the Primary Years (ages 7–11). Six trainees from each of these groups were chosen for observation during their final school placement. The six were chosen to reflect a range of outcomes of a subject-knowledge audit administered three months earlier. Two mathematics lessons taught by each of these trainees were observed and videotaped, i.e. 24 lessons in total. The trainees were asked to provide a copy of their planning for the observed lesson. As soon as possible after the lesson the observer/researcher wrote a succinct account of what had happened in the lesson, so that a reader might immediately be able to contextualise subsequent discussion of any events within it. These 'descriptive synopses' were typically written from memory and field notes, with occasional reference to the videotape if necessary.

From that point, we took a grounded approach to the data for the purpose of generating theory (Glaser & Strauss, 1967). In particular, we identified in the videotaped lessons aspects of trainees' actions in the classroom that seemed to be significant in the limited sense that it could be construed to be informed by a trainee's mathematics subject matter knowledge or their mathematical pedagogical knowledge. We realised later that most of these significant actions related to choices made by the trainee, in their planning or more spontaneously. Each was provisionally assigned an 'invented' code. These were grounded in particular moments or episodes in the tapes. This provisional set of codes was rationalised and reduced (e.g. eliminating duplicate codes and marginal events) by negotiation and agreement in the research team. The 17 codes generated by this inductive process are itemised later in this chapter. The name assigned to each code is intended to be indicative of the type of issue identified by it: for example, the code *adheres to textbook* (AT) was applied when a lesson followed a textbook script with little or no deviation, or when a set of exercises was 'lifted' from a textbook, or other published resource, sometimes with problematic consequences.

Equipped with this set of codes, we revisited each lesson in turn and, after further intensive study of the tapes, elaborated each descriptive synopsis into an analytical account of the lesson. In these accounts, the agreed codes were associated with relevant moments and episodes, with appropriate justification and analysis concerning the role of the trainee's content knowledge in the identified passages, with links to relevant literature.

The identification of these fine categories was a stepping stone with regard to our intention to offer a practical framework for use by ourselves, our colleagues and teacher-mentors, for reviewing mathematics teaching with trainees following lesson observation. A 17-point tick-list (like an annual car safety check) was not quite what was needed. Rather, the intended purpose demanded a more compact, readily-understood scheme which would serve to frame a coherent, content-focused discussion between teacher and observer. The key to the solution of our dilemma was the recognition of an association between elements of subsets of the 17 codes, enabling us to group them (again by negotiation in the team) into four broad, superordinate categories, which we have named (I) foundation (II) transformation (III) connection (IV) contingency. These four units are the dimensions of what we call the ‘Knowledge Quartet’.

Each of the four dimensions is composed of a small number of subcategories that we judged, after extended discussions, to be of the same or a similar nature. An extended account to the research pathway described above is given in Rowland (2008a). The Knowledge Quartet (KQ) has now been extensively ‘road tested’ as a descriptive and analytical tool. As well as being re-applied to analytical accounts of the original data (the 24 lessons), it has been exposed to extensive ‘theoretical sampling’ (Glaser & Strauss, 1967) in the analysis of other mathematics lessons, in England and beyond (see e.g. Weston, Kleve & Rowland, 2013). As a consequence, three additional codes[2] have been added to the original 17, but in its broad conception, we have found the KQ to be comprehensive as a tool for thinking about the ways that content knowledge comes into play in the classroom. We have found that many moments or episodes within a lesson can be understood in terms of two or more of the four units; for example, a **contingent** response to a pupil’s suggestion might helpfully **connect** with ideas considered earlier. Furthermore, the application of content knowledge in the classroom always rests on **foundational** knowledge.

Mathematical Knowledge for Teaching and the Knowledge Quartet

It is useful to keep in mind how the KQ differs from the well-known Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) egg-framework due to Deborah Ball and her colleagues at the University of Michigan, USA (Ball, Thames & Phelps, 2008). The Michigan research team refer to MKT as a “practice-based theory of knowledge for teaching” (Ball and Bass 2003, p. 5). The same description could be applied to the Knowledge Quartet, but while parallels can be drawn between the methods and some of the outcomes, the two theories look very different. In particular, the theory that emerges from the Michigan studies aims to unpick and clarify the formerly somewhat elusive and theoretically-undeveloped notions of SMK and PCK. In the Knowledge Quartet, however, the distinction between different *kinds* of mathematical knowledge is of lesser

---

[2] These new codes, derived from applications of the KQ to classrooms within and beyond the UKs, are *teacher insight* (Contingency), *responding to the (un)availability of tools and resources* (Contingency) and use of *instructional materials* (Transformation) respectively.

significance than the classification of the situations in which mathematical knowledge surfaces in teaching. In this sense, the two theories are complementary, so that each has useful perspectives to offer to the other.

Conceptualising the Knowledge Quartet

The concise conceptualisation of the Knowledge Quartet which now follows draws on the extensive range of data referred to above. As we observed earlier, the practical application of the Knowledge Quartet depends as much on teachers and teacher educators understanding the broad characteristics of each of the four dimensions as on their recall of the contributory codes.

Foundation

Contributory codes: awareness of purpose; identifying errors; overt subject knowledge; theoretical underpinning of pedagogy; use of terminology; use of textbook; reliance on procedures.

The first member of the KQ is rooted in the foundation of the teacher's theoretical background and beliefs. It concerns their knowledge, understanding and ready recourse to what was learned at school, and at college/university, including initial teacher education, in preparation (intentionally or otherwise) for their role in the classroom. It differs from the other three units in the sense that it is about knowledge 'possessed', irrespective of whether it is being put to purposeful use. Both empirical and theoretical considerations have led us to the view that the other three units flow from a foundational underpinning.

A key feature of this category is its *propositional* form (Shulman, 1986). It is what teachers learn in their 'personal' education and in their 'training' (pre-service and inservice). We take the view that the possession of such knowledge has the potential to inform pedagogical choices and strategies in a fundamental way. By 'fundamental' we have in mind a rational, reasoned approach to decision-making that rests on something other than imitation or habit. The key components of this theoretical background are: knowledge and understanding of mathematics *per se*; knowledge of significant tracts of the literature and thinking which has resulted from systematic enquiry into the teaching and learning of mathematics; and espoused beliefs about mathematics, including beliefs about why and how it is learnt.

Transformation

Contributory codes: teacher demonstration; use of instructional materials; choice of representation; choice of examples.

The remaining three categories, unlike the first, refer to ways and contexts in which knowledge is brought to bear on the preparation and conduct of teaching. They focus on knowledge-in-action as *demonstrated* both in planning to teach and in the act of teaching itself. At the heart of the second member of the KQ, and acknowledged in the particular way that we name it, is Shulman's observation that the knowledge base for teaching is distinguished by " … the capacity of a teacher to *transform* the content knowledge he or she possesses into forms that are pedagogically powerful" (1987, p. 15, emphasis added). As Shulman indicates, the presentation of ideas to learners entails their re-presentation (our hyphen) in the form of analogies, illustrations, examples, explanations and demonstrations (Shulman, 1986, p. 9). Our second category, unlike the first, picks out behaviour that is directed towards a pupil (or a group of pupils), and which follows from deliberation and judgement informed by foundation knowledge. This category, as well as the first, is informed by particular kinds of literature, such as the teachers' handbooks of textbook series or in the articles and 'resources' pages of professional journals. Increasingly, in the UK, teachers look to the internet for 'bright ideas', and even for ready-made lesson plans. Teachers' choice and *use of examples* has emerged as a rich vein for reflection and critique (Rowland,2008b). This includes the use of examples to assist concept formation, to demonstrate procedures, and the selection of exercise examples for student activity.

Connection

Contributory codes: making connections between procedures; making connections between concepts; anticipation of complexity; decisions about sequencing; recognition of conceptual appropriateness.

The next category concerns the *coherence* of the planning or teaching displayed across an episode, lesson or series of lessons. Mathematics is notable for its coherence as a body of knowledge and as a field of enquiry. Indeed, a great deal of mathematics is held together by deductive reasoning. The pursuit of coherence and mathematical connections in mathematics pedagogy has been stimulated recently by the work of

Askew et al. (1997): of six case study teachers found to be highly effective, all but one gave evidence of a 'connectionist' orientation. The association between teaching effectiveness and a set of articulated beliefs of this kind lends a different perspective to the work of Ball (1990), who also strenuously argued for the importance of connected knowledge for teaching.

Our conception of coherence includes the *sequencing* of topics of instruction within and between lessons, including the ordering of tasks and exercises. To a significant extent, these reflect deliberations and choices entailing not only knowledge of structural connections within mathematics itself, but also awareness of the relative cognitive demands of different topics and tasks.

Contingency

Contributory codes: responding to students' ideas; deviation from agenda; teacher insight; (un)availability of resources.

Our final category concerns the teacher's response to classroom events that were not anticipated in the planning. In some cases it is difficult to see how they could have been planned for, although that is a matter for debate. In commonplace language this dimension of the KQ is about the ability to 'think on one's feet': it is about *contingent action*. Shulman (1987) proposes that most teaching begins from some form of 'text' – a textbook, a syllabus, ultimately a sequence of planned, intended actions to be carried out by the teacher and/or the students within a lesson or unit of some kind. Whilst the stimulus – the teacher's intended actions – can be planned, the students' responses can not.

Brown and Wragg (1993) suggested that 'responding' moves are the lynch pins of a lesson, important in the sequencing and structuring of a lesson, and observed that such interventions are some of the most difficult tactics for novice teachers to master. The quality of such responses is undoubtedly determined, at least in part, by the knowledge resource available to the teacher. For further details, see Rowland, Thwaites and Jared (2011).

In the following section, I shall illustrate the application of the KQ in the analysis of one primary mathematics lesson. The teacher, Sonia, was in the final stages of a one-year, graduate teacher education program in the UK.

Primary mathematics teaching: the case of Sonia

Revised method

In this phase of our classroom-based investigation, a trainee teacher was again videotaped teaching a lesson by one member of our research team, but our insights into the lesson were further enhanced as follows. Soon afterwards the team met to view the tape and to identify some key episodes in the lesson using the codes and categories developed in our earlier work. Later, one team member met with the trainee to view the videotape and to discuss some of these episodes. The interviewer drew the trainees' attention, one at a time, to key issues that had been identified by the team in their earlier analysis using the KQ, and invited the trainee to comment and offer their own perspective on the relevant episodes. We aimed to complete the three stages (videotaping the lesson, team reviewing the lesson, discussion with the trainee) in a short time span. In the case considered in this paper, the whole process occurred within one day.

We now consider three episodes from a lesson taught by Sonia, whose had previously majored in Religious Studies and Education. She joined the graduate primary teacher education program with concerns about her own mathematical knowledge and confidence. The lesson is with a Year 4 class (pupil age 8-9). She begins with a numerical task, as kind of 'warm-up', before introducing the learning outcome of the lesson - that pupils will be able to "... make and describe repeating patterns which involve translations and/or reflections".. We shall outline and discuss three episodes within the lesson.

Episode 1

Sonia's beginning number activity involves finding complements in 100 and 1000. The three pairs of examples she uses are:

82 + ? = 100	35 + ? = 100	63 + ? = 100
820 + ? = 1000	350 + ? = 1000	630 + ? = 1000

A valuable insight into Sonia's ability to undertake subject knowledge **transformation** comes from her response - firstly instantaneous, then reflective - to the interviewer's question about the *choice of examples* that she uses for this activity.

Teachers often sequence their examples with the aim of making them progressively more demanding in some way as their students display success. But this raises the question of what makes one complement in 100 more demanding than another. More specifically, does Sonia have explicit (or implicit) decision criteria for her choices? In fact, Sonia;s account, in the interview, was consistent with our own inference from observation:

Interviewer:	You know when you did these … something add something equals…
Sonia:	mm
Interviewer:	… 100 and 1000 and so forth, and the examples that you chose were 82 …
Sonia:	Completely random.
Sonia	… there was whatever came into my head.

It is tempting to suppose that since Sonia's 'choices' involved no apparent deliberation, they must have been arbitrary. Yet on further questioning, she was able to account for what had seemed to her to be 'random':

Interviewer:	… Sometimes there's a choice, when you're giving examples, sometimes … students or teachers have a particular reason for doing it. In your case these were just sort of…
Sonia:	What were they? There might have been a reason.
Interviewer:	82, 35.
Sonia:	35 because it was a smaller … was an actually smaller number, I remember the reason for that one.
Interviewer:	So you had a smaller number after the …
Sonia:	Yeah, after the big number. And then I made sure that that the … the last digit of the 63 was a different last digit to the other two.
Interviewer:	Why did you have the smaller one … in the middle?
Sonia:	Don't know. I just thought, this, I'd have a smaller number, like a substantially smaller number than 82.

And later:

Sonia:	The units … the ten was intentional but the unit was random, in that case. And in the last one, 63, the … ten was random but the unit was intentional.
Interviewer:	Right, so there's some … thinking behind it.
Sonia:	Yeah.

Through this discussion, a rationale for Sonia's choice of examples has been teased out. She gives the impression that, although with help she is able to articulate her rationale, she was unaware of it in the moment (in the classroom) or until she was asked to talk about it. Ideally the examples that teachers use for pedagogical purposes should be chosen deliberately, and with care (Rowland, 2008b). This type of discussion can be helpful in reflecting on practice and making explicit those decisions in planning, both actual and potential, that can affect the quality of children's learning experiences.

Episode 2

Perhaps the most interesting episode arises when Sonia dwells on the pupils' solutions to 63 + ? = 100. Since she is presented with three answers 37, 27 and 47 the way is open for **contingent action** on her part.

Instaed of simply identifying the correct answer, Sonia decides to invite a volunteer to discuss his method publicly. Matt firstly finds the complement in 10 of the 3 of 63, saying "If you do 3 add 7 that makes 10". It is at this point that Sonia prompts him by asking "Where have we got to?". There is something ambivalent in this utterance. In saying it, Sonia could simply be drawing the pupil back onto the task by asking him how much of the problem had been solved. On the other hand, the "where" could be a tacit way of suggesting a place in a specific mathematical sequence suggesting that she is guiding Matt into a sequential (or 'whole number') method. Either way he takes the cue, and increasing the 63 by 7 writes 70 + 30 = 100. Sonia then ties things together asking "What have we added on?". She rings the 7 and the 30, asks the class what 30 and 7 make and finally draws out the answer to her original question: 63 + 37 = 100.

In the earlier analysis of the videotape, the research team had made a conjecture (about supporting a sequential calculation strategy) concerning the intention of the question "Where have we got to?". This was tested in the interview, with illuminating consequences:

Interviewer:	Yes, and he said, … 3 add 7 that's 10, so, … you … referring back to what you said earlier on, you make it up to a nice number.
Sonia:	Yes.
Interviewer:	… and you said, "Where have we got to?"
Sonia:	Yes.
Interviewer:	… and he said 70.
Sonia:	Yeah … I think, was it 63, was the number?
Interviewer:	Yes, but he said *three* add 7 is 10 … were you trying to get him to do it in sequence, then?
Sonia:	I thought that was what he was going to do, so I was just hoping he was, and tried to push him in that direction.
Interviewer:	Yes, so "Where have you got to?" is just the right sort of prompt there …

In this interchange Sonia confirms that her intention was to draw out a sequential process from Matt, even though his reference to 3, 7 and 10 may have derived from an intended split-tens strategy. This may also have helped to clarify the thinking of those children who gave answers of 27 and 47.

Episode 3

The choices of shapes Sonia selects to transform in the next stage of her lesson reveals some shortcomings in her **foundation** knowledge. In particular, she does not appear to realise that the internal properties of a transformed figure can mask certain effects of a transformation, particularly reflection.

With the learning objective of pattern-making in place, she tries to establish that when a shape is transformed, a *second* shape is generated which is "the same" as the first. This is somewhat confusing, because if her notion of a transformation is a movement, when using *objects*, there will not be two shapes. The moved object will become the *image* of the transformation but the domain shape (the pre-image or 'argument' of the transformation) will no longer exist. Of course, this dilemma does not arise if the transformation is seen, not as a movement, but as a relationship between *pairs* of points (and in consequence between pairs of shapes) in the plane.

The shapes (including a circle and a rectangle) that she 'chooses' to use for demonstration are both have a high degree of symmetry, and for this reason they do not reveal a change of orientation under the transformations of reflection and translation. This points to some weak **transformational** thinking (in the sense of the knowledge quartet!) on Sonia's part. The circle is spectacularly ineffective in conveying the particular properties of a translation. If a circle C has translation image C', then C' is also the image of C under a reflection or a rotation. An astute pupil presents her with an opportunity for **contingent action**. This pupil perceives the pedagogical inadequacy of these symmetrical shapes, and offers "If you reflect it with an L shape it wouldn't turn out the same". This time, whilst Sonia endorses the pupil's response she makes no attempt to enact his suggestion publicly. However, when questioned later the same day Sonia readily saw this as a missed opportunity:

Interviewer:	… it's about the boy who did the … who asked for the L-shape.
Sonia:	Yes.

Interviewer:	The shapes that *you* chose were a rectangle.
Sonia:	Yes.
Interviewer:	… and a circle, which … have got a certain amount of regularity.
Sonia:	Yeah.
Interviewer:	… if you flip the … the rectangle, the same … but the L-shape … hasn't got any symmetry in it, if you like.
Sonia:	mm
Interviewer:	Emm, so did you, were you aware of that, or just …
Sonia:	[laughs] I took random shapes off a pile [laughs] um, yes.
Interviewer:	Well, you can see the boy's point …
Sonia:	Oh yes, definitely.
Interviewer:	It's quite a good reply.
Sonia:	If I were to do it again, I would …
Interviewer:	It would be striking what has happened to the shape if itself it didn't have any symmetry.
Sonia:	It would be much easier for them to see.

So here we hope that the discussion has helped Sonia extend her understanding of these transformations, and how particular example shapes can be used to demonstrate the essence of a specific transformation more effectively than others. By reflecting on selected aspects of the mathematical content of her teaching, Sonia is identifying areas of her mathematics content knowledge - both SMK and PCK - where there is scope for development. She is also becoming aware of areas where she had good instincts which she might now incorporate into rational decision-making.

Supporting research and teaching development

The KQ has found two intersecting user groups since its emergence a decade ago. In this section, we outline resources developed to support these user groups.

Teacher education and teaching development

As we remarked earlier, one of the goals of our original 2002 research was to develop an empirically-based conceptual framework for mathematics lesson review discussions with a focus on the *mathematics content* of the lesson and the role of the trainee's mathematics subject matter knowledge (SMK) and pedagogical content knowledge (PCK). In addition to the kind of 'knowledgeable-other' analysis and formative feedback exemplified in the cases of Sonia in this paper, it has also been used to support teachers wanting to develop their teaching by means of reflective evaluation on their own classroom practice (Turner, 2012; Corcoran, 2011). Specifically, the KQ is a tool which enables teachers to focus reflection on the mathematical content of their teaching.

However, both teacher educators and teachers must first learn about the tool, and how to put it to good use. A book (Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009) was written to address the needs of this user-group, especially in relation to primary mathematics. It describes the research-based origins of the KQ, with detailed accounts of the four dimensions, and separate chapters on key codes such as Choice of Examples. The narrative of the book is woven around accounts of over 30 episodes from actual mathematics lessons. We return to this use of the KQ towards the end of this paper.

Observational research into mathematics teaching

In some respects, the needs of researchers using the KQ as a theoretical framework for lesson analysis are the same as those of teachers educators, but they are different in others. In particular, a broad-brush approach to the four KQ dimensions often suffices in the teacher education context, and may even be preferable to detailed reference to constituent codes. For example, identifying Contingent moments and actual or possible responses to them need not entail analysis of the particular triggers of such unexpected events. On the other hand, reflections or projections on Transformation usually involve reference to examples and representations. Our writing about the KQ (e.g. Rowland et al,. 2005) initially focused on explaining the essence of each of the four dimensions rather than identifying definitions of each of the underlying codes. However, a detailed KQ- analysis of a record (ideally video) of instruction necessarily involves labelling events at the level of individual KQ-codes, prior to synthesis at dimension level (Foundation, Transformation etc). This, in turn, raises reliability issues: the coder needs a deep understanding of what is intended by each code, going beyond any idiosyncratic connotations associated with its name. Addressing this issue, a Cambridge colleague of ours wrote as follows:

> Essentially, the Knowledge Quartet provides a repertoire of ideal types that provide a heuristic to guide attention to, and analysis of, mathematical knowledge-in-use within teaching. However, whereas the basic codes of the taxonomy are clearly grounded in *prototypical teaching actions*, their grouping to form a more discursive set of superordinate categories – Foundation, Transformation, Connection and Contingency – appears to risk introducing too great an interpretative flexibility *unless these categories remain firmly anchored in grounded exemplars of the subordinate codes*" (Ruthven, 2011, p.85, emphasis added).

In 2010 a Norwegian doctoral student wrote to us as follows: "I need a more detailed description on the contributory codes to be able to use them in my work. Do you have a coding manual that I can look at?". This enquiry, Ruthven's comment, and our growing sense of the risk of "interpretive flexibility" led us to initiate a project to develop an online coding manual, with the needs of researchers particularly in mind.

The aim of the project was to assist researchers interested in analysing classroom teaching using the Knowledge Quartet by providing a comprehensive collection of "grounded exemplars" of the 20 contributory codes from primary and secondary classrooms. An international team of 15 researchers was assembled. All team members were familiar with the KQ and had used it in their own research as a framework with which to observe, code, comment on and/or evaluate primary and secondary mathematics teaching across various countries, curricula, and approaches to teaching. The team included representatives from the UK, Norway, Ireland, Italy, Cyprus, Turkey and the United States. In Autumn 2011 team members individually scrutinised their data and identified prototypical classroom-exemplars of some of the KQ codes. To begin with, a written account of each selected classroom *scenario* was drafted. Often this included excerpts of transcripts and/or photographs from the lesson. Then a *commentary* was written, which analysed the excerpt, explaining why it is representative of the particular code, and why it is a strong example. Each team member submitted scenarios and commentary for at least three codes from his/her data to offer as especially strong, paradigmatic exemplars. In March 2012, 12 team members gathered in Cambridge, and worked together for two days. Groups of three team members evaluated and revised each scenario and commentary. The scenarios and commentaries were then revised, on the basis of the conference feedback. Further details of the participants and methodology are given in Weston, Kleve & Rowland (2013).

These scenarios and commentaries now combine to form a "KQ coding manual" for researchers to use. This is a collection of primary and secondary classroom vignettes, with episodes and commentaries provided for each code. The collection of codes and commentaries is now freely available online at *www.knowledgequartet.org*. At the time of writing, the website is 'live' but subject to further development. We encourage researchers and teacher educator to use and share this website in the cause of improved clarity about what each of the KQ codes 'looks like' in a classroom setting.

Conclusion

Mathematics teaching is a highly complex activity; this complexity ought to be acknowledged when teaching is analysed and discussed, and due attention given to discipline-specific aspects of pedagogical decision and actions, beyond generic aspects of the management of learning. Strong, clear conceptual frameworks assist in the management of this complexity. By attending to events enacted and observed in actual classrooms, with a specific focus on the subject-matter under consideration, the KQ offers practitioners and researchers such a conceptual framework, particularly suited to understanding the contribution of teacher knowledge to mathematics teaching. For practitioners and teacher educators, the KQ is a tool for identifying opportunities and possibilities for teaching development, through the enhancement of teacher knowledge, as indicated, for example, in the book Rowland et al. (2009). Especially in the case of pre-service teacher education, it is beneficial to limit the post-observation review meeting to one or two lesson fragments, and also to only one or two dimensions of the KQ, in order to focus the analysis and avoid overloading the trainee-teacher with action points.

In this paper I have emphasised the progression from observation of teaching to its description and analysis, but I have been less explicit about the evaluation of teaching. In the spirit of reflective practice, the most important evaluation must be that of the teacher him/herself. However, this self-evaluation is usefully provoked and assisted by a colleague or mentor, using the KQ to identify a small number of tightly-focused discussion points to be raised in a post-observation review. We have suggested that these points be framed in a relatively neutral way, such as “Could you tell me why you … ?” or “What were you thinking when … ?”. It would be naïve, however, to suggest that the mentor, or teacher educator, makes no evaluation of what they observe. Indeed, the observer’s evaluation is likely to be a key factor in the identification and prioritisation of the discussion points. In post-observation review, it is expected that the ‘more knowledgeable other’ will indicate what the novice did well, what they did not do and might have, and what they might have done differently. The KQ is a framework to organise such evaluative comments, and to identify ways of learning from them.

The KQ has been successfully applied across different phases of schooling, and in diverse cultures, but we mention, in conclusion, a development that we had not originally anticipated. Having attended presentations about the KQ in cross-diciplinary settings, some teacher education colleagues working in subjects other than mathematics – such as language arts, science and modern foreign languages education – have seen potential in the KQ for their own lesson observations and review meetings. They sometimes ask whether they could adapt and adopt the KQ for their own purposes. This raises the issue: can a framework for knowledge-in-teaching developed in one subject discipline be legitimately adopted in another? My reply usually begins as follows: what might the conceptualisations of the dimensions of the KQ, beginning with Foundation, look like in this other discipline? An answer to this question could set the scene for empirirical testing of the KQ in another subject area.

Acknowledgement

An extended version of this paper, featuring case-analyses of two different mathematics lessons, has been submitted to the *Sisyphus – Journal of Education*, an editorial initiative of the Institute of Education of the University of Lisbon.

References

Askew M., Brown M., Rhodes, V., Johnson, D., & Wiliam, D. (1997). *Effective teachers of numeracy*. London: Kings College.

Ball, D. L. (1990). The Mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal,* 90(4), 449–466.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.) *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3–14). Edmonton, Alberta, Canada: Canadian Mathematics Education Study Group.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education***,** 59(5), 389–407.

Borko, H., & Mayfield, V. (1995). The roles of the cooperating teacher and university supervisor in learning to teach. *Teaching and Teacher Education*, 11, 501–518.

Brown, G., & Wragg, E.C. (1993). *Questioning*. London: Routledge.

Corcoran, D. (2011). Learning from lesson study: Power distribution in a community of practice. In L. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds), *Lesson-study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. (pp. 251–268) New York: Springer.

Glaser, B.G., & Strauss, A.L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine de Gruyter.

Rowland, T. (2008a). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. In P. Sullivan and T. Wood (Eds.) *International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 273–298). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Rowland, T. (2008b). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 69(2), 149-163.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (3), 255–281.

Rowland, T., Thwaites, A. & Jared, L. (2011). Triggers of contingency in mathematics teaching. In B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 73–80. Ankara, Turkey: PME.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.

Ruthven, K. (2011). Conceptualising mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 83–96). London and New York: Springer.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15 (2), 4–14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Strong, M., & Baron, W. (2004). An analysis of mentoring conversations with beginning teachers: Suggestions and responses. *Teaching and Teacher Education,* 20, 47–57.

Turner, F. (2008). Growth in teacher knowledge: Individual reflection and community participation. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, A. Sepúlveda (Eds.) *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4, (pp. 353–360). Morelia, Mexico: University of Saint Nicholas of Hidalgo.

Turner, F. (2012). Using the Knowledge Quartet to develop mathematics content knowledge: the role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education* 14(3), 253–271.

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds) *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp.195–212). London and New York: Springer.

Weston, T.L., Kleve, B. & Rowland, T. (2013). Developing an online coding manual for the *Knowledge Quartet*: An international project. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 32(3), 179–84.

PAINEL DO PROJETO

Problem@Web: Perspetivas de investigação em resolução de problemas

Participantes: *Susana Carreira* & *membros da equipa do Projeto*

Moderadora: *Isabel Vale*

O Projeto Problem@Web: perspetivas de investigação em resolução de problemas

Susana Carreira[1], *Nélia Amado*[1], *Rosa Ferreira*[2], *Hélia Jacinto*[3], *Sandra Nobre*[4] *e Nuno Amaral*[5]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt; namado@ualg.pt
[2]Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Centro de Matemática da Universidade do Porto, rferreir@fc.up.pt
[3]Escola Básica José Saramago e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, helia_jacinto@hotmail.com
[4]Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, sandraggnobre@gmail.com
[5]Escola Básica 2,3 Sophia Mello Breyner Andresen, nualroam@gmail.com

Resumo. *Apresentam-se as principais linhas de investigação do Projeto Problem@Web cujo propósito geral é estudar a resolução de problemas matemáticos num contexto que se estende para além da sala de aula, centrado em competições matemáticas inclusivas que decorrem através da Internet. Para cada um dos três focos de investigação – Tecnologias, Afetos e Criatividade – na resolução de problemas, é apresentada uma síntese do quadro teórico adotado, designadamente os conceitos chave, fazendo-se referência a aspetos específicos do campo empírico sempre que possível. Sacrificando o detalhe das abordagens metodológicas utilizadas, são sintetizados os resultados de investigação para cada uma das três vertentes a que o projeto se dedicou.*

Palavras-chave: Competições inclusivas; Resolução de problemas; Tecnologias; Afetos; Criatividade.

Introdução

Problem@Web[1] é um projeto de investigação na área da Educação Matemática, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Este projeto tem como objetivo geral estudar a resolução de problemas de matemática num contexto exterior à sala de aula – as competições matemáticas baseadas na Internet – entre as quais se

[1] Projeto Problem@Web (Mathematical Problem Solving: Views on an interactive web-based competition) decorre entre 12/2010 e 6/2014, com o financiamento da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008. As instituições envolvidas no projeto são o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e a Universidade do Algarve. A equipa é composta por Susana Carreira (investigadora responsável), Nélia Amado, Rosa Ferreira, Sandra Nobre, Hélia Jacinto, Nuno Amaral, Jaime Carvalho e Silva, Juan Rodriguez, Sílvia Reis e Isa Martins, dos quais três elementos são estudantes de doutoramento.

incluem os Campeonatos de Matemática SUB12® e SUB14®, promovidos pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. O SUB12 e o SUB14 são campeonatos de resolução de problemas dirigidos a todos os alunos do 5.º, 6.º, 7.º e 8.º ano de escolaridade das regiões do Algarve e Alentejo e decorrem online, culminando com uma final presencial que se realiza na Universidade do Algarve.

O projeto Problem@Web estabeleceu três focos de investigação:

(a) O pensamento e as estratégias de resolução de problemas matemáticos, os modos de representação e expressão do pensamento matemático e o uso de tecnologias digitais na atividade de resolução de problemas;

(b) As atitudes e afetos relativos à matemática e à resolução de problemas matemáticos, tanto em contexto escolar como extraescolar, considerando alunos, pais e professores.

(c) A criatividade manifestada na resolução de problemas matemáticos e a sua relação com o uso de tecnologias digitais;

Ao longo do desenvolvimento do projeto, foram sendo apuradas e redefinidas várias questões de investigação mais específicas que guiaram o trabalho de investigação, em diálogo permanente com os referentes teóricos adotados. Assim, foram colocadas, em cada uma das vertentes do projeto, as seguintes questões:

a1) O que podemos saber sobre o modo como os alunos desenvolvem conceitos e fazem uso de representações matemáticas e que estratégias utilizam na resolução de problemas matemáticos?

a2) Quais são as funções e as influências da utilização espontânea das tecnologias digitais, nomeadamente do computador, na atividade de resolução de problemas e nas formas de expressão do pensamento matemático que os alunos adotam?

a3) Como se carateriza a relação entre a fluência matemática e a fluência tecnológica dos alunos na sua atividade de resoluções de problemas?

b1) Como veem os alunos a matemática envolvida na resolução de problemas em competições inclusivas, comparativamente com a matemática presente nas suas atividades regulares na aula de matemática?

b2) Como interpretam os pais, familiares e professores a relevância da participação dos jovens em competições matemáticas inclusivas, designadamente através da Internet, e que tipo de envolvimento têm pais e professores nestas atividades?

b3) Como se manifesta a procura de ajuda dos alunos numa competição matemática inclusiva e como se relaciona com o gosto pela resolução dos problemas e com a dificuldade sentida na resolução?

b4) Como se caracterizam os participantes numa competição matemática inclusiva de âmbito regional relativamente à sua relação com a matemática, com a resolução de problemas e com as tecnologias?

c1) O que podemos saber sobre a criatividade matemática expressa nas resoluções dos alunos a problemas matemáticos, do ponto de vista das estratégias que adotam?

c2) Como se relaciona a criatividade matemática dos alunos com a sua utilização de representações matemáticas na resolução de problemas, considerando em particular o modo como tiram partido do poder representacional das tecnologias digitais?

c3) Como se relaciona a criatividade matemática com a liberdade de produzir pensamento matemático e comunicação matemática?

O projeto assumiu uma abordagem metodológica de natureza eminentemente interpretativa e qualitativa, que foi complementada com a análise estatística dos dados de uma amostra intencional, provenientes de um questionário aplicado online. Os principais resultados produzidos até ao momento envolvem o tratamento de dados qualitativos, em grande parte através da análise de conteúdo de documentos digitais (mensagens de correio eletrónico e ficheiros anexados) recolhidos ao longo das duas competições matemáticas atrás referidas, mas incluem também dados provenientes de entrevistas de tipo semiestruturado a alunos, pais e professores e a observação participante, em sala de aula, no decurso de uma experiência de ensino baseada na resolução de problemas com recurso à folha de cálculo. O projeto enveredou ainda por uma metodologia de pendor etnográfico ao realizar períodos de observação e interação prolongados nas residências de alguns dos alunos e respetivas famílias, o que constituiu um dos desafios mais significativos em termos metodológicos.

Competições matemáticas inclusivas

Nos dias de hoje é amplamente reconhecido que "a sala de aula é apenas um dos locais onde a educação habita" (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich, & Taylor, 2008, p. 53). Muitos estudos internacionais revelam que os alunos também aprendem matemática fora do currículo escolar, designadamente em atividades extracurriculares, clubes de matemática, feiras de ciências, semanas da matemática, escolas de verão, em sítios da Internet e em competições matemáticas (Morris, 1987; Barbeau & Taylor, 2009; Simpkins, Davis-Kean, & Eccles, 2006, Jones & Simons, 2000). Tal aprendizagem parece exercer um efeito positivo nas atitudes dos alunos, aumentando o gosto por esta disciplina e desenvolvendo a autoconfiança; por outro lado, parece ter igualmente reflexos positivos na sociedade, em geral, na medida em que tende a envolver as famílias e os professores na promoção do interesse pela matemática. O estudo longitudinal de Simpkins et al (2006) oferece importantes resultados sobre a influência da participação das crianças em atividades extracurriculares, nas áreas de matemática e ciências, sobre as suas escolhas futuras, mostrando que essa participação contribui significativamente para a boa autoestima e o desenvolvimento do autoconceito dos jovens e para uma maior valorização destas disciplinas no seu percurso académico. Como concluem estas investigadoras, uma potencial estratégia para aumentar as futuras escolhas académicas dos jovens em matemática e ciências é incentivar o envolvimento precoce das crianças em atividades de matemática e ciências para além da escola.

Entre as múltiplas atividades que decorrem fora da sala de aula encontram-se as competições matemáticas que nas últimas décadas têm aumentado em todo o mundo. De um modo geral, as competições podem dividir-se em duas grandes categorias: exclusivas e inclusivas. São exemplos de competições matemáticas, de caráter seletivo, as conhecidas Olimpíadas Portuguesas de Matemática ou as Olimpíadas Internacionais de Matemática, que se destinam a alunos especialmente talentosos para a matemática. Muitas vezes, este tipo de competições com elevado grau de dificuldade tem ainda o objetivo de detetar novos talentos nesta área. As competições matemáticas de carácter inclusivo, geralmente abertas a todos os alunos, como o concurso Canguru Matemático ou os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14 têm vindo a ganhar terreno relativamente às anteriores. Estas novas competições inclusivas tendem a aproximar-se de atividades de enriquecimento educacional; em muitos casos decorrem através da

Internet e são dirigidas a alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas e diversos níveis de desempenho escolar a matemática (Stockton, 2012; Freiman & Applebaum, 2011).

As tecnologias na resolução de problemas

Para os objetivos deste projeto, um dos aspetos centrais das competições matemáticas SUB12 e SUB14 reside no facto de se realizarem à distância, através da Internet. Ao longo da fase de apuramento, na página web dos campeonatos, os participantes encontram cada um dos dez problemas que vão sendo propostos quinzenalmente e enviam as suas resoluções por correio eletrónico. Uma das condições primordiais para a aceitação de uma resposta submetida é que seja apresentado e explicado o processo utilizado para obter a solução. Os alunos participantes, não só têm de resolver cada problema corretamente como têm de encontrar formas de exprimir o seu raciocínio e de tornar visíveis as suas estratégias, podendo socorrer-se de todas as ferramentas digitais que tiverem ao seu dispor e que acharem úteis para elaborar a resolução do problema Neste sentido, o campeonato dá uma valorização importante à componente comunicacional da atividade de resolução de problemas.

No quadro teórico do projeto são particularmente relevantes as teorias que permitem considerar a expressão do pensamento matemático como uma componente integrante do processo de resolução de problemas, isto é, que orientam a investigação acerca da resolução de problemas em torno da unidade *resolver-e-exprimir*. Por outro lado, importa considerar do ponto de vista teórico o que significa a expressão das ideias matemáticas dos alunos por meio de representações próprias e baseadas na tecnologia. Em suma o referencial teórico visa enquadrar o fenómeno dos alunos a resolver problemas de palavras com as suas próprias tecnologias digitais.

Os proponentes da *Perspetiva dos Modelos e Modelação* têm fornecido evidências de que os alunos são capazes de criar modelos conceptuais no decurso da elaboração de formas de pensar sobre uma situação (Lesh & Doerr, 2003a). Um pensamento produtivo sobre uma determinada situação tem como resultado um modelo conceptual da situação, que inclui *sistemas descritivos ou explicativos explícitos*. É a qualidade descritiva e explicativa do pensamento que faz com que funcione como um modelo, uma exteriorização das maneiras como os indivíduos estão a interpretar a situação e a desenvolver meios para alcançar uma solução para o problema.

> Os alunos produzem ferramentas conceptuais onde se incluem sistemas descritivos ou explicativos explícitos que funcionam como modelos que revelam aspetos importantes sobre o modo como os alunos estão a interpretar as situações presentes na resolução de problemas (Lesh & Doerr, 2003b, p. 9).

Ao invés de separarmos a fase da resolução do problema da fase de elaboração da resposta, propomos que estes são dois aspetos intimamente ligados da resolução de problemas e que essa ligação é, eventualmente, mais profunda quando o uso de ferramentas digitais está disponível para apoiar a expressão do pensamento. Portanto, as descrições, ilustrações, explicações, e todo o material incorporado no "produto final", constituem o caminho percorrido para que o produto se torne naquilo que é.

> Descrições, explicações e construções não são simplesmente processos que os alunos usam a caminho de produzir 'a resposta' e não são simplesmente pós-scripts que os alunos apresentam após 'a resposta' ter sido produzida. Estes SÃO os componentes mais importantes que são necessários nas respostas (Lesh & Doerr, 2003b, p. 3).

Borba e Villarreal (2005) defendem que as ferramentas tecnológicas não substituem nem complementam o ser humano nas suas atividades cognitivas, mas que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização do pensamento humano. Como ideia central, os autores propõem que o conhecimento já não é produzido apenas pelo sujeito, resultando, sim, de uma simbiose entre seres humanos e tecnologias – uma entidade que denominam de seres-humanos-com-media:

> Pensamos que o conhecimento é produzido em conjunção com um dado medium ou tecnologia da inteligência. Por essa razão adotamos uma perspetiva teórica que dá suporte à noção de que o conhecimento é produzido por um conjunto composto por humanos-com-media ou humanos-com-tecnologias e não, como outras teorias sugerem, apenas por indivíduos ou por conjuntos somente compostos por seres humanos (Borba & Villareal, 2005, p. 23).

O acesso fácil e rápido a qualquer ferramenta tecnológica permite que os jovens desenvolvam um elevado número de competências que lhes conferem uma certa sofisticação e destreza na procura de conhecimentos em contextos que vão para além da escola. Vários autores (Tapscott, 1998; Prensky, 2006; Oblinger & Oblinger, 2005; Carreira, 2009; Carreira, Amado & Jacinto, 2011) sugerem que os jovens de hoje – nativos digitais – possuem características e modos de ação singulares que estão diretamente relacionados com as tecnologias que utilizam diariamente. Essas peculiaridades espelham-se na forma como pensam, como acedem a informações, as absorvem e interpretam, como comunicam e, consequentemente, como aprendem (Oblinger & Oblinger, 2005).

A ideia da expressão do pensamento como parte integrante da resolução de problemas de matemática ganha atualmente novos contornos porque expressar o pensamento matemático implica considerar os meios para o realizar. Hegedus e Moreno-Armella (2009) acentuam a expressividade matemática como um dos aspetos nucleares dos novos ambientes tecnológicos, afirmando que há uma nova expressividade representacional disponível porque que os alunos podem tirar partido de várias funcionalidades da tecnologia, as quais permitem "formas naturais" de expressão – metáforas, registos informais e dêixis (expressões que apontam para o contexto da situação), bem como gestos e movimentos. Nos dados obtidos por Hegedus e Moreno-Armella (2009) na resolução de problemas matemáticos com tecnologias sobressaem ações que parecem estar diretamente ligadas ao uso dos recursos tecnológicos, como por exemplo, colorir de forma estratégica, usar esquemas visuais ou inserir pontos, como forma de sublinhar o sistema matemático subjacente. Nas palavras destes autores, "os alunos exprimem-se de formas vívidas, tanto informalmente como formalmente" (p. 405). É nesse sentido que parece ser mais adequado falar de um certo discurso matemático dos jovens que comunicam matematicamente com recurso a ferramentas digitais, no qual a escrita continua a ser um dos elementos, embora não o único nem necessariamente o mais evidente.

Como Stahl (2009b) nos descreve, o discurso expositivo na resolução de problemas é a narração de uma história sobre a forma como o problema foi resolvido, geralmente fornecendo um relato sequencial dos elementos essenciais que constituem o processo de resolução. No contexto de um *discurso matemático digital expositivo*, um grande número de signos, consideravelmente impulsionados pelo uso de ferramentas digitais, torna-se importante e definitório: uso da cor, linguagem natural, linguagem matemática, realces, desenhos, imagens, fotos, ícones, diagramas, etiquetas, códigos pré-simbólicos, símbolos, tabelas, caixas de texto, outputs de programas específicos (folhas de cálculo, sistemas de geometria dinâmica, programas de gráficos), e muitos outros.

Súmula de resultados

Dos resultados da investigação deste projeto, no domínio das tecnologias na resolução de problemas, conclui-se que os participantes nos campeonatos demonstram possuir uma predisposição para a utilização de ferramentas tecnológicas na sua atividade de resolução de problemas, que se pode apelidar de “natural”, no sentido dado por Hegedus e Moreno-Armella (2009).

Os participantes mostram grande capacidade para tirar partido de ferramentas digitais de uso quotidiano e da sua expressividade representacional para dar forma e substância ao seu próprio raciocínio e à construção de uma estratégia de resolução. O computador não constitui apenas um meio para escrever a resolução mas é, acima de tudo, uma ferramenta indissociável da forma de resolução encontrada. Os participantes usam a tecnologia como uma “linguagem nativa” para pensar, agir e comunicar, refletindo uma certa imagem de “nativos digitais”, com um discurso matemático digital expositivo.

A fluência tecnológica destes jovens emerge intimamente associada às suas capacidades matemáticas, numa combinação que designamos por *fluência tecno-matemática*. O ser-se fluente numa linguagem que envolve simultaneamente capacidades tecnológicas e matemáticas pode determinar o sucesso na resolução de problemas de matemática com recurso às tecnologias. Neste contexto, a fluência tecno-matemática influencia a forma como cada concorrente é capaz de tirar partido da tecnologia para compreender, analisar e representar o problema, resolvê-lo e expressar a sua estratégia, isto é, para estruturar e desenvolver o seu pensamento matemático durante a atividade de resolução de problemas.

Num contexto de resolução de problemas matemáticos para além da escola, os alunos fazem uso de matemática e de pensamento matemático que não é apenas impulsionado pelo currículo ou pelo conhecimento matemático escolar; distinguem entre o tipo de problemas da sala de aula e o tipo de problemas dos campeonatos, atribuindo aos últimos caraterísticas que entroncam na construção de modelos conceptuais: encontrar um meio de pensar produtivamente acerca da situação, integrando elementos descritivos e explicativos na sua abordagem ao problema.

É comum observar-se uma ampla gama de resoluções para cada problema que ilustra a liberdade de escolher a abordagem, a estratégia ou as representações matemáticas que melhor servem os propósitos de cada um ao resolver-e-exprimir os problemas.

Entre os diversos recursos disponíveis no computador, a folha de cálculo mostra uma crescente adesão dos participantes (nas sucessivas edições dos campeonatos que foram acompanhadas) em problemas que envolvem pensamento numérico e algébrico, revelando indícios claros de processos de transição da aritmética para a álgebra, como é apontado por diversos estudos (Haspekian, 2005; Friedlander, 1998). Assim, obtiveram-se várias resoluções que tiram partido da folha de cálculo em problemas que tipicamente são associados a sequências numéricas, equações e inequações, sistemas de equações, e, de um modo geral, em problemas que envolvem variáveis e relações numéricas (múltiplos, divisores, proporcionalidade direta e inversa, potências, etc.). Experiências realizadas em sala de aula, a partir da resolução de problemas propostos nos campeonatos, mostram que a folha de cálculo permite ajudar os alunos na construção de modelos conceptuais informais, fortemente marcados pela linguagem própria da ferramenta tecnológica, que o professor pode usar com sucesso na aprendizagem de métodos algébricos formais e mesmo de linguagem algébrica simbólica.

Em problemas de raciocínio analítico (comumente designados por problemas lógicos) revelam um aparente à vontade no uso de raciocínio condicional, sendo muito rara a ocorrência das falácias documentadas na investigação sobre os raciocínios silogísticos mais comuns. Embora exibam modelos de conceptualização do problema com diferentes graus de robustez para a obtenção expedita de uma solução, identificam nitidamente as condicionantes impostas e ativam frequentemente o raciocínio por redução ao absurdo. O recurso a tabelas e diagramas é com frequência utilizado como veículo de organização do raciocínio dedutivo e simultaneamente de expressão da forma de raciocínio do tipo “se… então…”.

Num outro tipo de problemas, em que está presente a covariação, isto é, relações entre variáveis tais como tempo e distância (por exemplo, problemas que envolvem movimento) verificou-se que os alunos raramente se aproximam das resoluções algébricas (tipicamente usadas pelos peritos). Pelo contrário, encontram formas de resolução-e-expressão muito centradas em representações visuais, em que predominam esquemas, diagramas, imagens, setas, linhas, ícones, etc., correspondendo a uma maneira de “reproduzir” a natureza dinâmica da situação – a variação ao longo do tempo. Algumas destas representações contêm uma evidência clara da simbiose “alunos-com-computador” (Borba & Villareal, 2005) e mereceram a designação de “quasi-dinâmicas”. Além destas, sobrevém uma outra categoria de resoluções igualmente abundantes, de natureza essencialmente descritiva e muito apoiada na linguagem verbal; a estas foi atribuída a qualificação de “narrativas”, por descreverem essencialmente por palavras o movimento ou outro tipo de variação dinâmica, ao longo de uma sequência de instantes de tempo.

Aspetos afetivos na resolução de problemas

Desde a década de 70 do século XX que os investigadores em educação matemática discutem aspetos relacionados com os afetos. Em 1989, McLeod & Adams dão um importante contributo para esta área de investigação com o seu trabalho "Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective". As ideias destes autores saíram reforçadas quando, em 1996, num contexto de investigação em neurociências, Damásio destaca a relação entre cognição, metacognição e afetos. Zan, Brown, Evans & Hannula (2006) consideram que um dos problemas mais relevantes na investigação sobre os afetos em matemática reside em compreender a relação entre os afetos e a cognição.

O projeto Problem@Web, ao assumir como principal objetivo estudar a resolução de problemas matemáticos desafiantes, propôs-se analisar os aspetos afetivos que rodeiam esta competição. O conceito de *competição inclusiva*, mais do que o elemento competitivo, e a ideia de *desafio matemático moderado* são conceitos chave que estruturam o referencial teórico do projeto.

Um problema matemático desafiante envolve um forte apelo afetivo, curiosidade, imaginação e criatividade, resultando, assim, num problema que dá gosto e prazer resolver, independentemente de a resolução ser ou não fácil de alcançar (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdnyakov, & Stedøy, 2009). A predisposição para resolver uma tarefa pode ser menor quando as expetativas acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil). Os desafios matemáticos moderados parecem ser aqueles que melhor conseguem levar os alunos a tentar explicar as suas estratégias, a avaliar possíveis abordagens e a apreciar várias formas de resolução. Numa palavra, uma característica marcante de um desafio matemático moderado é persuadir a pessoa a tentar (Turner & Meyer, 2004). Embora reconhecendo o carácter relativo dos desafios matemáticos moderados, há indicadores que sustentam que estes desafios favorecem o desenvolvimento de afetos positivos. Porém, outras condições devem gravitar em torno dos desafios moderados, entre as quais um ambiente social que promova sentimentos de satisfação e autoconfiança, bem como de apreço pela matemática (Schweinle, Turner &

Meyer, 2006), desencorajando a comparação social e realçando o valor e importância das tarefas desafiantes (Schweinle, Berg & Sorenson, 2013).

A inclusão tem igualmente em vista promover a satisfação e o prazer na resolução de desafios matemáticos moderados – diminuindo a frustração, dando reforço positivo e encorajando a persistência. "Níveis ótimos de desafio, rodeados por apoio afetivo e motivacional, podem proporcionar contextos muito propícios a sentimentos de satisfação, prazer, eficácia e valorização da matemática por parte dos alunos" (Schweinle et al., 2006, p. 289). Consideramos que os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14 constituem verdadeiros contextos de natureza inclusiva que propiciam aos alunos sentimentos diversos como a satisfação, o sucesso pessoal, o gosto pela resolução de problemas e pela matemática, entre outros.

O feedback dado pela organização a cada uma das resoluções dos alunos parece ser um aspeto chave no domínio dos afetos. A cada participante que envia a resolução de um problema é dada uma resposta personalizada quer a resposta esteja, ou não, correta. Se o problema está corretamente resolvido e é explicado o processo de resolução, é dado um elogio, por exemplo, "Parabéns pela tua resposta", "Gostámos muito do teu processo de resolução", "Contamos com a tua participação". Se a resposta está incompleta ou incorreta, a mensagem vai no sentido de oferecer uma pista ao aluno para encontrar a forma de chegar à solução. Por exemplo, pode destacar-se um dado do problema a que o participante não deu atenção, colocar-se uma questão desafiadora, encorajando sempre o participante a corrigir e reenviar a resposta correta. Os participantes sabem que é permitido solicitar ajuda e são encorajados a fazê-lo, quer seja aos seus pais e professores ou à própria organização.

Súmula de resultados

A troca de mensagens entre a organização e os participantes, decorrente do envio sistemático de feedback às resoluções enviadas pelos alunos, promove o surgimento de afetos positivos, que se revelam determinantes para o sucesso dos participantes nos campeonatos, designadamente aumentando a persistência e a vontade de participação.

A ajuda que os alunos podem procurar e receber de diferentes fontes (pais, familiares, professores, amigos ou colegas e organização do campeonato) contribui positivamente para o sucesso ao longo da fase de apuramento e para um sentimento de realização; ao mesmo tempo, influencia positivamente a quantidade e diversidade de alunos que decidem participar na competição. Do ponto de vista quantitativo, é de salientar que os dados obtidos por meio de um questionário, para a região do Algarve, revelam que perto de um terço dos participantes (cerca de 31%) são alunos que obtiveram classificações escolares a matemática de nível 3 ou inferior. De um prisma não quantitativo, é de referir, por exemplo, que os campeonatos registaram a participação bem-sucedida de alunos com necessidades educativas especiais.

As duas principais fontes de ajuda a que os alunos recorrem para a resolução dos problemas propostos são os pais e os professores, em percentagens bastante próximas. Este resultado revela que os campeonatos têm uma chegada considerável ao meio familiar dos jovens e que as escolas não são indiferentes à sua realização. O envolvimento parental tem aliás contornos muito interessantes neste tipo de atividade para além da escola, sendo claros os testemunhos de pais sobre a influência positiva da mesma nas atitudes dos jovens, designadamente como forma de responsabilização, de fortalecimento de atitudes de perseverança, e no desenvolvimento da autoconfiança.

A participação nos campeonatos tem um efeito fortemente integrador para alunos com diferentes desempenhos escolares e para alunos com necessidades educativas especiais. A participação desenvolve o sentimento de autoconfiança nos alunos, promove e reforça os laços entre participantes e familiares, nomeadamente no que se refere à visão da matemática.

Os participantes apreciam positivamente os desafios quando sentem uma dificuldade reduzida ou mediana na sua resolução. A complexidade de um problema ou um grau de dificuldade demasiado elevado parece estar associada a um menor grau de apreciação, levando a emoções menos positivas. Alguns dos problemas associados a conteúdos temáticos tipicamente mais complexos na matemática escolar (como é o caso da geometria), geram menor grau de apreciação. Ao invés, os problemas de raciocínio analítico recebem tendencialmente uma apreciação bastante positiva.

Existem igualmente relações interessantes entre o gosto pela resolução de problemas, reportado pelos participantes, e a noção de desafio matemático moderado. O gosto aparece fortemente associado a uma dificuldade de calibre médio e inclusive ao sentimento de que o problema foi fácil de resolver, mostrando que mesmo os alunos com maior facilidade (e eventualmente com melhor desempenho em matemática) apreciam a resolução de problemas que não apresentam uma forte dificuldade. Este resultado é ademais concordante com o que outros estudos vêm documentando (Turner & Meyer, 2004; Schweinle et al., 2006).

A criatividade na resolução de problemas

Na sequência dos dois focos de investigação apontados antes, a criatividade surge de forma natural. Algumas características do funcionamento destas competições, entre as quais se destaca um período de tempo dilatado para a elaboração das respostas, a possibilidade de utilizar todos os recursos disponíveis ou o carácter voluntário da participação são fatores que promovem o surgimento da criatividade matemática. Embora o termo criatividade seja, muitas vezes, associado exclusivamente aos alunos excecionais e especialmente dotados, é cada vez maior o número de investigadores a defender a tese de que criatividade pode e deve ser estimulada na população escolar em geral (Silver, 1997; Mann, 2005; Pelczer & Rodríguez, 2011). É bastante comum a crítica de que o ensino da matemática descura o potencial criativo dos estudantes, não promovendo oportunidades de desenvolvimento das suas habilidades nem ocasiões que lhes permitam apreciar a beleza da matemática (Mann, 2006). Vários autores defendem a necessidade de criar novos espaços, onde exista um clima que inclua atividades e tarefas criativas que estimulem os alunos, na medida em que os imperativos curriculares oficiais tornam quase inexequível esta oportunidade (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2011). A necessidade de um ambiente favorável ao surgimento da criatividade é reforçada por Sternberg (2007), ao alegar que mesmo dispondo de todos os recursos necessários para pensar de forma criativa, será difícil ou mesmo impossível a qualquer indivíduo exibir a criatividade que tem dentro de si se não tiver um ambiente estimulante e promotor de ideias novas.

No projeto aqui apresentado, assumimos o pressuposto de que os alunos em qualquer idade têm potencial criativo e podem progredir na realização desse potencial se tiverem oportunidades adequadas. Consideramos ainda que uma das formas de alimentar a criatividade é permitir que os alunos tenham autonomia para pensar por si próprios, mesmo em temas que ainda não sabem na íntegra. A liberdade de trabalhar matematicamente é, portanto, fundamental, pois a criatividade floresce quando os alunos têm a possibilidade de encontrar e usar seus próprios métodos de resolução de problemas e de se envolver realmente com a matemática (Pehkonen, 1997). Em harmonia com estes pressupostos, os campeonatos SUB12 e SUB14 valorizam igualmente todas as estratégias utilizadas com sucesso pelos alunos na resolução dos problemas, sublinhando e aprovando a sua diversidade (por exemplo, através da publicação na página web de uma amostra de respostas enviadas a cada problema com o intuito de mostrar vários processos de abordar e resolver o problema); além disso, é tornado explícito nas regras de participação que os participantes podem recorrer a qualquer estratégia e, por último, são frequentes os problemas que aparentemente não se "encaixariam" no grau de escolaridade dos alunos, por se poderem "rotular" como problemas de combinatória ou de sistemas de três equações, por exemplo. Neste sentido, é óbvia a conceção subjacente de que os alunos conseguem encontrar formas próprias de abordar e pensar produtivamente sobre os problemas (isto é, de criar modelos conceptuais, provavelmente contextualizados e situados, de uma situação, os quais contêm as estruturas cognitivas fundamentais de conceitos matemáticos mais desenvolvidos).

A clareza, simplicidade, concisão, estrutura, robustez, inteligência e surpresa, são fatores que contribuem para o apelo estético de uma solução (Koichu, Katz & Berman, 2007). Embora a relação entre a criatividade e a beleza de uma solução matemática seja complexa, a mente matemática tende a procurar elegância em produtos e processos que regra geral vão para além dos algoritmos (Leikin, 2009). Neste sentido, é relevante contextualizar a criatividade matemática dos alunos no campo da resolução de problemas, atendendo ao seu conhecimento e experiência em matemática e reconhecendo como válidos e importantes as suas próprias estratégias e métodos para resolver os problemas apresentados.

As perspetivas que enfatizam o desenvolvimento da criatividade também atribuem grande importância à construção de ferramentas que permitam a sua avaliação e, até certo ponto, a sua medição (Leikin, 2009). Para a caracterização da criatividade dos alunos na resolução de problemas, a investigação que iniciámos baseou-se na construção de um quadro provisório de análise desenvolvido com base no estudo de Guerra (2007), cujo objetivo era avaliar a criatividade no contexto da formação de professores de matemática. Os indicadores de nível mais geral, neste quadro de análise, referem-se às três dimensões da criatividade – fluência, flexibilidade e originalidade – que permitirão reconhecer o potencial criativo no processo de resolução de problemas (Silver, 1997). Contudo, foi desde logo ensaiada a tentativa de associar a estas dimensões elementos específicos da resolução de problemas, tais como: a novidade na estratégia ou no tipo representação matemática, a flexibilidade representacional e ainda a capacidade de comunicação associada à fluência de utilização de conceitos e procedimentos, à exploração de ideias matemáticas e à organização do raciocínio efetuado. Com efeito, o modelo psicométrico da criatividade matemática, legado por Guilford, parece revelar algumas insuficiências e não colhe total consenso nos investigadores nesta área, designadamente por estabelecer um paralelismo muito estreito entre criatividade e pensamento divergente (Mann, 2009; Lin & Cho, 2011).

Uma das opções que o projeto tem vindo a fazer na investigação da criatividade matemática dos alunos na resolução de problemas é a de dividir a atenção entre as representações matemáticas e as estratégias apresentadas pelos participantes. A aposta nas representações tem em mente o facto de que estas são centrais na resolução de problemas (Stylianou, 2008), porque constituem ferramentas vitais para registar, analisar, tratar e comunicar conceitos, métodos e ideias matemáticas (Preston & Garner, 2003). Os alunos que são capazes de recorrer a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, são mais propensos a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009). A flexibilidade de representação é ainda uma caraterística dos alunos que fazem escolhas adequadas de representações matemáticas matemática, tendo em conta as tarefas em mão (Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009). E uma das facetas associadas à criatividade, quer em matemática, quer noutros domínios, é a qualidade final de um trabalho. Ora, a liberdade de comunicação matemática dada aos participantes nos campeonatos para exprimirem o seu modo de resolução dos problemas, bem como a forma como eles aproveitam essa liberdade, projeta-se na criatividade das resoluções que apresentam. A utilização que fazem de ferramentas comuns disponibilizadas pelo computador evidencia capacidades e competências, matemáticas e tecnológicas, dos participantes na resolução dos problemas (Jacinto & Carreira, 2008). O recurso ao computador congrega dois aspetos poderosos – por um lado, é um meio de tornar a comunicação eficiente e, por outro, acentua o poder da visualização e a organização do pensamento matemático dos alunos.

Ao colocarmos, por seu turno, o foco nas estratégias de resolução de problemas, outra possibilidade que surge é a de olhar para a criatividade matemática como parte integrante da competência de resolução de problemas. Um estudo recente (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013) propõe um modelo que considera a criatividade matemática como uma subcomponente da aptidão matemática, numa linha que contraria a ideia de que a aptidão matemática é uma condição para a criatividade. Ao invés, admite-se que se os alunos são capazes de enfrentar situações matemáticas fluentemente, de forma flexível, com perspicácia e originalidade, então eles serão competentes para usar conhecimento matemático apropriado na resolução de problemas. E neste sentido, a competência de resolução de problemas passa pela capacidade de gerar uma estratégia eficiente que conduza à solução.

Tem sido repetidamente sustentada por vários autores a ideia de que a criatividade é um conceito bipartido: implica simultaneamente originalidade e eficácia (Runco & Jaeger, 2012; Selter, 2009; Aldous, 2007). Como propõe Aldous (2007), uma definição simplificada de criatividade seria: a produção de algo novo e eficaz. Assim, para a criatividade se manifestar, ambas as qualidades – novidade e utilidade – têm de estar presentes. Aquilo que é novo e original mas que não revela utilidade, ajuste ou adequação ficará vedado a ser reconhecido como criativo. Portanto, a ideia de novidade eficaz pode corresponder tão-somente a uma forma bem-sucedida de resolução de um problema de matemática (Aldous, 2007). Por outro lado, o autor salienta que a produção de uma novidade eficaz tem de ser vista relativamente ao sujeito que a cria. Se um indivíduo produz uma solução eficaz para um problema, que outros poderão ter resolvido anteriormente mas que é um problema novo para o indivíduo em causa, então a criatividade do indivíduo considera-se expressa. Deste modo, a definição de criatividade na resolução de problemas de matemática não se restringe ao caso de uma descoberta eminente mas inclui realizações mais modestas e quotidianas como as que surgem com alunos em idade escolar, ao resolverem problemas que são novos para eles.

Súmula de resultados

Um dos sinais presentes em muitas das resoluções dos participantes nos campeonatos que constituiu um ponto de partida para uma análise da sua criatividade matemática foi o fator surpresa emergente nas suas produções. Com efeito, um grande número de resoluções, nos mais variados problemas propostos, tem impacto pela sua originalidade mas também pela engenhosidade visível no modo como os alunos delinearam e expressaram uma forma de obter a resposta.

A originalidade e a eficácia aliam-se de modos particularmente relevantes em problemas que tipicamente são considerados como estando para além dos conhecimentos escolares dos jovens. Nestes problemas, em especial, surgem estratégias de resolução que mostram formas produtivas de pensar matematicamente e que não requerem o conhecimento da matemática formal que se associa a tais problemas. O efeito surpresa transparece igualmente, em muitos casos, na utilização inventiva de ferramentas tecnológicas de uso comum (Word, PowerPoint, Paint, Excel…), sendo muito evidente a adequabilidade da ferramenta ao propósito de lidar com o problema. A título de exemplo, referimos o caso da utilização dos diagramas disponíveis nas ferramentas "SmartArt" do Word ou do PowerPoint para a construção de um esquema em árvore, num problema do SUB12 que envolveu a determinação do número de combinações possíveis de cores, tamanhos e acabamento numa fábrica de *jeans*.

No que se refere ao uso de representações matemáticas, o valor criativo das soluções passa, em grande medida, pela forma acentuam a clareza na comunicação do processo de resolução.

Resolver problemas, usando as ferramentas tecnológicas disponibilizadas pelo computador, estimula os participantes a procurar formas eficazes e simultaneamente interessantes de resolver-e-exprimir, contribuindo para a riqueza das representações que produzem. Parece evidente que as tecnologias usadas têm valor de originalidade e eficácia na resolução de problemas de matemática, denotando que as competências tecnológicas dos participantes não se limitam a uma utilização trivial das tecnologias mas estão associadas à expressividade e à criatividade.

As tecnologias digitais permitem aos participantes recorrer a formas eminentemente visuais, como o desenho, as cores, os esquemas, as imagens, as tabelas e os destaques, para produzir e comunicar o seu pensamento matemático. Tirando partido destas ferramentas, os participantes têm a possibilidade de fazer matemática, de trabalhar ao seu próprio ritmo e no seu próprio discurso matemático digital. Este fenómeno parece estar associado às características dos campeonatos, uma vez que estes dão aos participantes a liberdade de usarem os seus próprios processos de resolução, quer recorrendo ao conhecimento matemático que já possuem, quer à sua experiência e à sua capacidade de dar sentido às situações e de pensar produtivamente sobre elas.

Em termos da criatividade das estratégias, importa referir que alguns dos professores entrevistados no decurso da investigação revelaram ter ficado surpreendidos com muitas das abordagens dos seus alunos a alguns dos problemas que estes resolveram e enviaram no decurso do campeonato. Alguns referiram nunca ter pensado em determinadas estratégias produzidas pelos alunos. Igualmente presente nessas entrevistas foi o reconhecimento da grande diversidade de estratégias espelhada na seleção de respostas que são regularmente publicadas na página web dos campeonatos.

Para alguns problemas foram analisadas as estratégias usadas em resoluções inovadoras e eficazes, em busca das suas caraterísticas mais salientes. Assim, com base num problema que envolveu frações e proporções, surgiram algumas caraterísticas que permitiram descrever de forma global as principais estratégias: simplificação; esquematização; aplicação de conceitos intuitivos; redução da quantidade de variáveis; tradução entre diferentes representações numéricas. As estratégias assim distinguidas permitiram concluir que a criatividade matemática na resolução do referido problema parece fortemente associada a tendências como a da procura da simplicidade, o pensar com figuras, a agilidade conceptual, a intuição, o sentido prático e a sagacidade.

Referências bibliográficas

Aldous, C. R. (2007). Creativity, problem solving and innovative science: Insights from history, cognitive psychology and neuroscience. *International Education Journal*, 8(2), p. 176-186.

Barbeau, E. & Taylor, P. (Eds.). (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. New York, NY: Springer.

Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos "nativos digitais" com os "manipulativos virtuais". *Quadrante*, XVIII (1-2), p. 53-85.

Freiman, V. & Applebaum, M. (2011). Online Mathematical Competition: Using Virtual Marathon to Challenge Promising Students and to Develop Their Persistence. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(1), p. 55-66.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological Environments beyond the Classroom. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). New York, NY: Springer.

Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, 91(50), p. 382-383.

Guerra, E. (2007). *Creatividad y desarrolo professsional docente en matemáticas para la educación primária*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Barcelona, Barcelona).

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), p. 109-141.

Hegedus, S. J. & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, p. 399-412.

Jacinto, H. & Carreira, S. (2008). “Assunto: resposta ao problema do Sub14” – A Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 434-446). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2011). Home technologies: how do they shape beyond-school mathematical problem solving activity? In M. Joubert, A. Clark-Wilson, &M. McCabe (Eds.), *Proceedings of ICTMT 10* (pp. 159-164). University of Portsmouth, Portshmouth, UK.

Jones, K. & Simons, H. (2000). The Student Experience of Online Mathematics Enrichment. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 103-110). Hiroshima, Japão: PME.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). Does Mathematical Creativity Differentiate Mathematical Ability? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1056-1065). University of Rzeszów, Poland.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 45, p. 167-181.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Tayor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom – Sources and Organizational Issues. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Koichu, B., Katz, E. & Berman, A. (2007). What is a beautiful problem? An undergraduate students’ perspective. In J. Woo, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 109-113). Seoul, Korea: PME.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 130-144). Rotterdam: Sense Publishers.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (Eds.). (2003a). *Beyond Constructivism – Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a Model and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism – Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lin, C-Y. & Cho, S. (2011) Predicting Creative Problem-Solving in Math From a Dynamic System Model of Creative Problem Solving Ability. *Creativity Research Journal*, 23(3), p. 255-261.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. (Tese de Doutoramento, University of Connecticut, USA).

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30 (2), p. 236-260.

Mann, E. L. (2009) The Search for Mathematical Creativity: Identifying Creative Potential in Middle School Students. *Creativity Research Journal*, 21(4), p. 338-348.

McLeod, D. & Adams, V. M. (1989). (Eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*. New York, NY: Springer.

Morris, R. (Ed.). (1987). *Studies in mathematics education – Out-of-school mathematics education*. Paris: Unesco.

Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, p. 627-636.

Oblinger, D. & Oblinger, J. (2005). Educating the Net Generation. EDUCAUSE. http://www.educause.edu/educatingthenetgen. [Acedido em 18 de Julho de 2009].

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 29(3), p. 63-67.

Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity Assessment In School Settings Through Problem Posing Tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 8(1-2), p. 383-398.

Prensky, M. (2006). *Don't bother me, Mom, I'm learning! How computer and video games are preparing your kids for 21st century success and how you can help!*. St. Paul, MN: Paragon House.

Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(1), p. 38-43.

Runco, M. A. & Jaeger, G. J. (2012). The Standard Definition of Creativity. *Creativity Research Journal*, 24(1), p. 92-96.

Schweinle, A., Berg, P. J., & Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*. (Published online: May 2013). DOI:10.1080/01443410.2013.785049.

Schweinle, A., Turner, J., & Meyer, D. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *Journal of Educational Research*, 99(5), p. 271-293.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, p. 619-625.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 88-100). Rotterdam: Sense.

Silver, E. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 29(3), p. 75-80.

Simpkins, S. D., Davis-Kean, P. E., & Eccles, J. S. (2006). Math and Science Motivation: A Longitudinal Examination of the Links Between Choices and Beliefs. *Developmental Psychology*, 42(1), p. 70-83.

Stahl, G. (2009). Interactional Methods and Social Practices in VMT. In G. Stahl (Ed.), *Studying Virtual Math Teams* (pp. 41-55). New York, NY: Springer.

Sternberg, R. (2007). Creativity as a Habit. In A. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 3-25). Singapore: World Scientific.

Stockton, J. C. (2012). Mathematical Competitions in Hungary: Promoting a Tradition of Excellence & Creativity. *The Mathematics Enthusiast*, 9(1-2), p. 37-58.

Stylianou, D. (2008). Representation as a cognitive and social pratice. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, p. 289-296). Morelia, México.

Tapscott, D. (1998). *Growing up digital: The rise of the Net generation*. New York: McGraw-Hill.

Turner, J. & Meyer, D. (2004). A Classroom Perspective on the Principle of Moderate Challenge in Mathematics. *The Journal of Educational Research*, 97(6), p. 311-318.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), p. 113-121.

ESPAÇO GTI

Investigação sobre a prática

Participantes: *Henrique Guimarães* (coordenador), *Hélia Oliveira*, *Irene Segurado* & *Renata Carvalho*

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

ESPAÇO GTI
Investigação sobre a prática

Henrique Guimarães
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

No início da década de noventa começou a tomar corpo uma ideia sobre o conhecimento profissional de certos autores que punham em causa a concepção desse conhecimento como aplicação instrumental do conhecimento científico e técnico aos problemas da prática. Recusavam o "modelo da racionalidade técnica" para o qual uma profissão era, acima de tudo, um veículo para aplicação dos conhecimentos científicos disponíveis à resolução dos problemas que essa profissão enfrenta. Deste ponto de vista, um professor era visto sobretudo como um técnico que será considerado competente se aplicar de forma adequada o conhecimento produzido pela investigação científica (na matéria que ensina) ou educacional (didáctica, psicológica, pedagógica).

Considerando esta perspectiva redutora e incompleta, e contrariando a visão mais corrente do professor como veículo de um conhecimento que lhe é exterior, começou a alargar-se a ideia do professor como um sujeito activo e autónomo na prática que realiza, possuidor de um conhecimento específico que se constitui e desenvolve em estreita relação com essa prática. A investigação sobre a prática profissional, e em particular, a investigação sobre a própria prática começou assim a ocupar um lugar de crescente importância e visibilidade, emergindo, ou retomando, no caso da educação, as ideias do "professor-investigador", do professor-reflexivo", da "investigação-acção".

Foi assim que, no início dos anos 2000, o Grupo de Investigação da APM criou um grupo de estudos sobre o tema "professor como investigador" que assumiu o empreendimento de estudar as problemáticas associadas a este tema e de divulgar trabalhos de professores resultantes de experiências e de investigações sobre a sua própria prática. Desde aí, variados projectos de investigação e muitos trabalhos de mestrado e de doutoramento, têm optado por desenvolver investigação nesta linha, sobre diversas temáticas e recorrendo a estratégias metodologias também diversificadas.

Com este painel, pretende-se proporcionar um espaço de discussão e problematização em torno de algumas questões que se colocam à investigação sobre a própria prática, de que destacamos:

– O que caracteriza fundamentalmente este tipo de investigação — ao nível dos seus objectivos, das opções metodológicas, do conhecimento produzido?

– Quais os principais problemas, dificuldades ou dilemas com que mais frequentemente a investigação sobre a própria prática se confronta?

– Qual o contributo desta investigação para prática do professor e para o seu desenvolvimento profissional? E para o desenvolvimento do conhecimento em didáctica?

– Que temas, problemas ou questões se adequam melhor a esta investigação ou se evidenciam com especial relevância para a definição de uma agenda de investigação?

SIMPÓSIO 1

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA E MEDIDA

Coordenadores: *Teresa Neto* & *Lina Fonseca*

Ensino e aprendizagem de geometria e medida

Teresa Neto[1], *Lina Fonseca*[2]
[1]Universidade de Aveiro, teresaneto321@yahoo.es
[2]Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, linafonseca@ese.ipvc.pt

A Geometria presta-se, mais do que outros temas, para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes".

Veloso (1998, p. 26)

Este pensamento de Eduardo Veloso constitui o mote dos trabalhos a desenvolver no Simpósio - Ensino e aprendizagem de geometria e medida no âmbito do XXIV SIEM e os autores dos textos dão expressão a este pensamento através da apresentação dos seguintes aspectos essenciais do ensino e aprendizagem da Geometria: recurso a ambientes de geometria dinâmica e desenho de tarefas.

Um dos trabalhos deste Simpósio – O *feedback* no contexto do trabalho entre alunos com o Geogebra, de Júlio Paiva, Nélia Amado e Susana Carreira - apresenta testemunhos de uma experiência de ensino no âmbito da geometria sintética euclidiana, com alunos do 7 º ano, com recurso a um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra. No ambiente onde foi desenvolvida e experiência é dada primazia às interações entre alunos e pretende-se dar a conhecer as caraterísticas do *feedback* gerado entre alunos e entre estes e o computador, bem como as implicações que o feedback traz para a aprendizagem.

Usiskin (2012) apresenta argumentos de que a experiência geométrica no ensino e aprendizagem da Geometria, a partir de transformações, aplicações, coordenadas e tecnologia muda a maneira de pensar a "as formas geométricas", atendendo a que se amplia a visão dos alunos sobre formas geométricas e sobre os conceitos de congruência e semelhança.

A reflexão proporcionada pela temática abordada pode contribuir para perceber se este artefacto auxilia ou dificulta a construção de argumentação por parte dos alunos e de que modo o faz.

O outro texto deste simpósio – O raciocínio geométrico nas provas de avaliação externa do 2º ciclo do Ensino Básico, de Paula Vieira da Silva e Leonor Santos -pretende analisar as características das tarefas de geometria das provas de aferição (2010 e 2011) e das provas finais do 2.º ciclo (2013), no que se refere aos processos cognitivos que suscitam e aos que os alunos efetivamente manifestam utilizar, visto defender a ideia de que as tarefas são um aspeto preponderante do trabalho dos alunos. Estas direcionam a atenção para determinados conteúdos e aspetos específicos do processamento de informação. Neste sentido, as características das tarefas propostas nos exames nacionais podem influenciar as aprendizagens dos alunos e o trabalho dos professores.

O desenho e análise de tarefas em educação matemática está a ter uma atenção especial como comprovam os trabalhos apresentados no, ICMI Study 22 (Oxford, UK, 2013), no congresso ICME 12 (Seul, Coreia, 2012), no "Topic Study Group 31, Task Desing and Analysis", dando continuidade ao TSG 34 do congresso ICME 11 (Monterrey, México, 2008).

Nesta linha de investigação, a atenção nas características das tarefas de geometria, em particular, deve merecer um foco de atenção especial visto importar aos professores refletir sobre que tarefas utilizar, com que propósitos, para desenvolver que processos cognitivos dos alunos e a explorar com recurso a que materiais.

Referências bibliográficas

Usiskin, Z. (2012). The shapes of Geometry and their implications for the school geometry curriculum. *12th International Congress on Mathematical Education*, Topic Study Group 10, Seoul, Korea.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

COMUNICAÇÕES

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O raciocínio geométrico nas provas de avaliação externa do 2º ciclo do Ensino Básico

Paula Vieira da Silva[1], *Leonor Santos*[2]
[1]Agrupamento de Escolas de Real – Braga, pmvsilva@netcabo.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mlsantos@ie.ul.pt

Resumo. *Na aprendizagem da Matemática, nomeadamente na geometria, as tarefas são um aspeto preponderante do trabalho dos alunos. Estas direcionam a atenção para determinados conteúdos e aspetos específicos do processamento de informação. Neste sentido, as características das tarefas propostas nos exames nacionais podem influenciar as aprendizagens dos alunos e o trabalho dos professores.*

Este estudo apresenta dados parcelares de uma investigação em curso, e tem como objetivo a análise das características das tarefas de geometria que constam das provas de aferição (2010 e 2011) e das provas finais do 2.º ciclo (2013), principalmente no que diz respeito aos processos cognitivos a que fazem apelo e aos que os alunos efetivamente recorrem. O estudo segue uma metodologia de natureza interpretativa. A recolha de dados recorre à recolha documental (produções dos alunos) e a entrevistas semiestruturadas gravadas em suporte áudio e vídeo.

De uma forma geral, os resultados obtidos da análise de três tarefas e da sua resolução evidenciaram que as capacidades de visualização quando não se encontram convenientemente desenvolvidas tornam-se impeditivas de processos cognitivos que possam desencadear a escolha de uma estratégia adequada para a resolução das tarefas.

Palavras-chave: Pensamento geométrico; capacidades de visualização; avaliação externa; tarefas.

Introdução

Em relação às aprendizagens em matemática e respetiva avaliação, enquanto dimensões inseparáveis e articuláveis, as questões envolventes vão muito além da utilização de testes e exames, apesar de estes, atualmente, serem muito valorizados pela administração do sistema educativo, e assumidos (ou percecionados) como instrumentos indispensáveis para o conhecimento do desempenho académico dos alunos, por parte dos professores, das escolas e da sociedade em geral (Ceia, Filipe & Santos, 2011).

Durante uma década, a conceção das provas de aferição, o seu grau de exigência e a forma como o conhecimento matemático foi avaliado foram aspetos que suscitaram polémica, com visibilidade, nomeadamente, na comunicação social. No cerne dessa polémica incluía-se, entre outros aspetos, a escolha do tipo de tarefas.

O nosso interesse pelas tarefas decorre de serem um aspeto determinante da aprendizagem dos alunos, na medida em que direcionam a sua atenção para conteúdos particulares e para formas específicas de processamento de informação. Se o tipo de tarefas proposto nos exames nacionais pode influenciar as aprendizagens dos alunos, também os conceitos que são valorizados podem influenciar o trabalho dos professores (e os próprios autores de livros didáticos), os quais, por sua vez, voltarão a influenciar as aprendizagens dos alunos (Boesen, Lithner & Palm, 2010).

As questões de investigação que conduziram a este estudo foram as seguintes: A que processos cognitivos fazem apelo as tarefas de geometria que constam das provas de aferição (2010 e 2011) e das provas finais do 2.º ciclo (2013)? Que processos cognitivos usam os alunos?

Fundamentação teórica

Pensamento geométrico e capacidades de visualização

Numa fase inicial da história da geometria o elemento visual foi predominante. Todavia, por razões históricas e culturais, a geometria desenvolveu-se como uma área científica cujo interesse mudou das necessidades práticas para um processo de racionalização mais abstrato e global. Isto culminou na sistematização, concentrando-se o interesse sobre os aspetos concetuais da geometria.

Na conceção de Battista (2007), "a geometria é uma rede complexa e interligada de conceitos, formas de raciocínio, e sistemas de representação que é usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários" (p. 843). Para este autor, o *raciocínio geométrico* consiste, em primeiro lugar, na invenção e uso de sistemas concetuais formais para investigar a forma e o espaço. Para além disso, subjacente à maior parte do raciocínio geométrico está o raciocínio espacial. O *raciocínio espacial* é "o conjunto de processos cognitivos pelos quais as representações mentais de objetos espaciais, relações e transformações são construídas e manipuladas" (Clements & Battista, 1992, p. 420). Como tal, o raciocínio espacial é uma forma de atividade mental que torna possível a criação de imagens espaciais e permite que elas sejam manipuladas no decurso da resolução de problemas práticos e teóricos em matemática. Ou seja, é a capacidade para «ver», analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações durante a resolução de problemas. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisar imagens para responder a questões sobre elas, transformar e operar em imagens, e manter imagens ao serviço de outras operações mentais. Assim, o raciocínio espacial fornece não só o *input* para o raciocínio geométrico formal, como ferramentas cognitivas críticas para a análise geométrica (Battista, 2007).

Uma componente do raciocínio geométrico e do raciocínio matemático em geral é o *raciocínio visual* ou *visualização*. A visualização é geralmente considerada como "a capacidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre a informação visual" (Hershkowitz, 1998, p. 75). A visualização espacial é entendida pelo NCTM (2007) como sendo a “construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tridimensionais e a perceção de um objeto a partir de diferentes perspetivas, [que] constitui um aspeto essencial do raciocínio geométrico” (p. 44). Assim, considera-se que a visualização desempenha um papel muito complexo na formação dos conceitos geométricos básicos.

A visualização espacial “engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos” (Matos & Gordo, 1993, p. 13). Gutiérrez (2006), na esteira de Bishop (1989), descreveu dois processos de visualização que têm lugar ao usar imagens: a *interpretação da informação figurativa* – processo que ocorre ao tentar ler, compreender e interpretar uma imagem para extrair informação, e o *processamento visual da informação* – processo que ocorre ao converter informação não visual em imagens ou ao transformar uma imagem já formada em outra.

Por outro lado, Del Grande (1990), fundamentando-se em outros autores, selecionou sete capacidades espaciais tendo estas absoluta relevância para o estudo da matemática e da geometria em particular. Estas capacidades são: a) *Coordenação visual-motora* (“*Eye-motor coordination”*); b) *Perceção figura-contexto (“Figure-groud perception*; c) *Conservação da perceção (“Perceptual constacy”)*; d) *Perceção da posição no espaço (“Position-in-space perception”)*; e) *Perceção de relações espaciais (“Perception of spatial relationships”)*; f) *discriminação visual (“visual discrimination”)*; g) *Memória visual (“Visual memory”).*

O desenvolvimento do raciocínio geométrico há muito que se revela como uma das preocupações dos investigadores em educação matemática. Como vários autores salientam, “na atualidade o modelo de raciocínio matemático de van Hiele é o marco teórico predominante” (Gutiérrez, 2006, p. 14). Este modelo identifica cinco níveis de raciocínio sequenciais e hierarquizados no processo de aprendizagem da Geometria, englobando as formas de raciocínio mais elementar dos alunos do pré-escolar e do primeiro ciclo, até formas mais sofisticadas próprias dos matemáticos profissionais (ibidem). Tomando por referência a descrição de autores como o próprio van Hiele (1999), Mason (1998) e Gutiérrez (2006), tem-se: *Nível 1. Nível visual ou reconhecimento e visualização; Nível 2. Nível descritivo ou análise; Nível 3. Nível de Dedução Informal ou abstração; Nível 4. Dedução Formal; Nível 5. Rigor*. Esta teoria apresenta caraterísticas sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos que são bastante significativas: a sequencialidade, a linguagem e a continuidade. O aluno tem de dominar os conhecimentos e estratégias de um nível de raciocínio para avançar para o nível seguinte (Jaime, 1993).

Avaliação do pensamento matemático

De acordo com o NCTM (2007, p. 11), a "avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos". Portanto, a "avaliação deverá refletir a matemática que todos os alunos deverão saber e ser capazes de produzir, devendo centrar-se no conhecimento e compreensão dos alunos, bem como na sua destreza na execução de procedimentos" (idem, p. 25). Por outras palavras, "a avaliação deve espelhar importantes processos de pensamento e de aprendizagem" (Shepard, 2001, p. 1074). Tal requer que sejam usados instrumentos diversos, procurando escolher qual o mais adequado para o que em cada momento se pretende avaliar (Semana & Santos, 2010), abandonando-se o uso quase exclusivo dos tradicionais testes escritos. Como o NCTM (2007, p. 25) alerta, as "avaliações de caráter formal fornecem apenas um ponto de vista daquilo que os alunos são capazes de fazer em determinadas condições muito particulares – muitas vezes trabalhando individualmente em tarefas de «papel e lápis», com tempo limitado para as executar. Uma valorização deste tipo de avaliação poderá dar uma imagem incompleta e, por vezes, até distorcida, do desempenho dos alunos".

Ao considerarmos que o raciocínio matemático é um complexo conjunto de processos mentais, o acesso direto ao raciocínio matemático dos alunos é uma tarefa impossível. Para conhecer minimamente este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem. Assim, em relação aos alunos, somente "ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio" (NCTM, 2007, p. 76). Portanto, também, só através da análise e interpretação das representações nas produções orais e escritas dos alunos podemos avaliar o seu raciocínio matemático.

Na matemática, somente se pode aprender e resolver as tarefas propostas se compreendermos, não somente as instruções e os enunciados de uma tarefa, mas também todos os processos mentais necessários para a resolver e necessariamente saber verificar a plausibilidade da resposta encontrada. Por conseguinte, a análise e interpretação das produções escritas complementadas com as produções orais dos alunos é de elevada importância para podermos analisar os processos utilizados pelos alunos na resolução das tarefas.

As tarefas podem, também, ser categorizadas quanto ao tipo de processos necessários para as solucionar. Tais como: de *reprodução* que "demandam essencialmente a reprodução de conhecimentos praticados"; de *conexão* que se baseiem "em reprodução para a resolução de problemas que não são simplesmente rotineiros, mas que ainda envolvem contextos de certa forma conhecidos, ou que se estendem e se desenvolvem além de contextos conhecidos em grau relativamente menor". Por último, itens de *reflexão* que "demandam um certo *insight* e reflexão por parte do estudante, assim como criatividade para identificar conceitos matemáticos relevantes ou para fazer a ligação com conhecimentos relevantes para criar soluções" (OCDE, 2005, pp. 40-41).

Metodologia

A presente investigação, de natureza *interpretativa* (Bogdan & Biklen, 1994), visa analisar os processos de raciocínio matemáticos solicitados e utilizados pelos alunos, no âmbito da geometria, em provas de avaliação externa em Matemática.

Participaram cerca de vinte e cinco alunos que terminaram o 6.º ano de escolaridade. A seleção destes alunos do sexto ano das turmas da primeira autora foi intencional e teve em conta o pressuposto de que a proximidade e confiança entre a investigadora e os participantes é mais elevada, sentindo-se, por isso, estes encorajados a expor as suas ideias num ambiente escolar que lhes é familiar. Além disso, um outro critério tido na seleção dos participantes diz respeito aos seus níveis de desempenho. O facto de os alunos manifestarem diferentes níveis de desempenho pôde permitir aceder a uma maior diversidade de estratégias de resoluções e, consequentemente, a diferentes processos de raciocínio e erros. A resolução das tarefas efetuou-se após ter sido feita a avaliação interna, o que diminui muito a probabilidade de haver fatores de interferência no estudo.

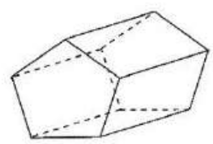
A recolha de dados para este estudo foi feita em contexto escolar, baseando-se fundamentalmente no seguinte: (i) na recolha documental (tarefas das provas de aferição relativas a 2010 e 2011 e de provas finais do 2.º ciclo de 2013 e resoluções dessas tarefas pelos alunos); e (ii) em entrevistas semiestruturadas, gravadas em áudio e vídeo. As entrevistas realizaram-se a dez alunos no dia seguinte ao da resolução das tarefas. No que refere às tarefas das provas de aferição (2010 e 2011) foram resolvidas e realizadas as entrevistas entre o final do ano letivo e o dia da prova final, por ser a altura do ano em que os alunos estão mais disponíveis e todos os conteúdos do 2.º ciclo já foram lecionados. Cada um dos dez alunos entrevistados teve perante si a ficha com a sua resolução e, após ler cada pergunta, explicou a forma como chegou à resposta.

A análise dos dados envolveu, inicialmente, a organização das informações obtidas pelas produções escritas dos alunos e pelas entrevistas efetuadas aos mesmos. Foram selecionadas três tarefas com características diferentes: a primeira da Prova de Aferição de 2010; a segunda da Prova de Aferição de 2011; e a terceira, da Prova Final de 2013. Foram tidos em consideração os seguintes domínios: a tipologia do item, os conteúdos a que a tarefa faz apelo, a situação descrita e os processos utilizados pelos alunos.

Apresentação e análise dos dados

Tarefa 1

4. O sólido representado a seguir tem a forma de um prisma pentagonal.



4.1. Quantas arestas tem um prisma pentagonal?

Figura 1: Item 4.1 da Prova de Aferição de 2010

Tipo de item: Item de construção – resposta curta; Tópico: Sólidos geométricos – Identificação dos seus elementos e relação do número de arestas de um prisma com o polígono da base; Contexto: Matemático; Tarefa: Reprodução.

O resultado de acertos obtidos a nível nacional nesta tarefa foi de 68,5% e neste estudo foi de 86,7%.

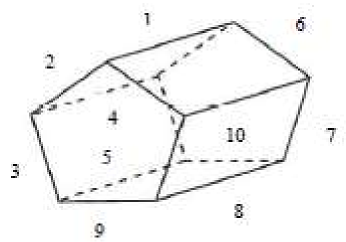
Processos utilizados pelos alunos

> Aluno A: Um prisma pentagonal tem 15 arestas, porque a base é 5, a outra base também é 5 e as faces são 5 também.
>
> Professora: E então?
>
> Aluno A: Tem 15 arestas.

Assim como este aluno, os alunos B, E, G, H e J utilizaram este método de contagem das arestas. Apesar de saberem que o número de arestas de cada base e o das arestas laterais ser sempre 5 não evidenciaram conhecer a propriedade dos prismas que relaciona o número de arestas com o número de lados do polígono da base. Estes alunos utilizaram um método de contagem que lhes permitiu ter uma margem de sucesso muito maior do que se fizessem uma contagem aleatória. Metade dos alunos entrevistados utilizou este método e nenhum deles falhou a contagem.

Contudo, um ou outro aluno procedeu à contagem das arestas, uma a uma, tal como ilustrado pelo aluno C:

> Aluno C: Eu escrevi 12, porque contei 1,2,3, …, 12 (o aluno conta aleatoriamente as arestas na figura como mostra o esquema seguinte).
>
> Aluno C: Acho que contei estas duas vezes (o aluno considera que uma vez que o número que está registado na ficha não é igual ao que obteve nesta contagem é porque contou duas vezes duas arestas).



> Professora: Será que o número de aresta que contou está correto? Conte outra vez as arestas.
>
> Aluno C: 1,2,3, …, 10 (o aluno volta a fazer uma contagem incompleta das arestas e por outra ordem de forma aleatória sem fazer qualquer marcação na figura e desta vez obteve 10 arestas).

O aluno D, apesar de contar de forma aleatória as 15 arestas, não conta duas vezes nenhuma ou deixa de contar alguma, isto é, consegue com sucesso contar o número exato de arestas do prisma pentagonal.

Os alunos F e I aplicaram uma propriedade dos prismas, a qual nos diz que o número de arestas de um prisma é igual ao triplo do número de lados do polígono da base.

Aluno I: 15, porque as arestas de um prisma são sempre o número de lados da base vezes três.

Professora: Então?

Aluno I: O pentágono tem 5 lados e vezes 3 dá 15.

Neste domínio, estes dois alunos encontram-se num nível mais avançado do pensamento geométrico, relativamente aos outros acima referidos. Dos dez alunos entrevistados, estes dois foram os únicos a utilizar esta propriedade da família dos prismas.

Tarefa 2

20. O presente que a Matilde comprou para a avó vem numa caixa. A caixa tem a forma de um cilindro, com 20 cm de altura e bases de 30 cm de diâmetro.

A Matilde comprou 2,5 m de fita para decorar a caixa como mostra a figura.

A fita cruza no centro da base e no centro da tampa da caixa.

Com a fita, a Matilde vai fazer também um nó e um laço no cimo da caixa.

Quantos centímetros de fita sobram para a Matilde fazer o nó e o laço?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ______________________________ cm.

Figura 2: Item 20 da Prova de Aferição de 2011

Tipo de item: Item de construção – Resposta aberta; Tópico: Sólidos geométricos – Resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos e elementos do círculo; Contexto: Vida privada; Tarefa: Conexão.

O resultado de acertos obtidos a nível nacional nesta tarefa foi de 16 % e na amostra deste estudo foi de 11%.

Processos utilizados pelos alunos

O aluno A não tinha resolvido a tarefa.

Professora: Agora que já leu novamente o enunciado o que é que deveria ter feito?

Aluno A: Tinha que fazer o volume.

Professora: Porquê o volume?

Aluno A: Para saber quanto… (o aluno hesita e não responde).

Professora: Sem olhar mais para o enunciado, diga o que é que a Matilde tem que fazer?

Aluno A: Hum! Ah! Tem que pôr fita à volta da caixa.

Professora: Onde é que a Matilde vai colocou a fita?

Aluno A: Aqui (o aluno aponta para a fita que se vê nas duas alturas e na fita que se vê no diâmetro da tampa).

Professora: Quanto é esta medida aqui? (aponto para a fita que fica na altura do cilindro).

O aluno, mesmo lendo o enunciado mais prolongadamente, não revela identificar as medidas da fita que fica na altura e no tampo da caixa.

A professora lê, mais uma vez, em voz alta o enunciado e indica ao aluno na figura a que partes da fita correspondem as medidas indicadas no enunciado.

Professora: E agora? Como fazia?

Aluno A: Se este é 20 (o aluno indica a altura do cilindro) estes dois são 40, com mais os de trás são 80 cm. Se o de cima é 30, os dois são 60. Os dois de cima são 60, com mais os dois de baixo são 120. Então tinha que somar tudo para ver se me dava 2,5 ou se me dava menos, que era para depois ver quantos centímetros sobravam.

Aluno B: Eu calculei o volume do cilindro.

Professora: Porque calculou o volume?

Aluna B: Porque, normalmente, quando o enunciado tem a altura e o diâmetro de um cilindro é para calcular o volume.

No caso dos alunos A, B, C, E e J, o facto do enunciado se referir à altura do cilindro e ao diâmetro da base e da figura ser um cilindro, foi motivo suficiente para que fossem induzidos a calcular o volume do cilindro ou a área do círculo.

Contudo, os alunos A e J não conseguiram sem a ajuda da investigadora *interpretar a informação figurativa* e *efetuar o processamento visual da informação* (Gutiérrez, 2006), isto é, relacionar os dados do enunciado com os elementos da figura, mesmo com várias leituras do enunciado. Este facto parece ser um obstáculo à escolha de uma estratégia adequada para a resolução do problema. No entanto, após a explicação da relação entre os dados do enunciado e os elementos da figura, os alunos não só prontamente apresentam uma estratégia adequada, como efetuam mentalmente todos os cálculos necessários.

Já o aluno D, apesar de não apresentar uma estratégia completa, através da entrevista demonstrou saber como calcular acertadamente quanto sobrava de fita para o nó e para o laço:

Aluno D: Fiz 4 vezes a altura que dá 80 cm e 4 vezes o diâmetro que dá 120 cm. Depois somei 120 com 80 que dá 200.

Professora: Não falta fazer mais nada?

Aluno D: Quantos centímetros de fita faltam à Matilde para fazer o nó e o laço. Faltava tirar… quanto é que faltava para a fita acabar.

Professora: Quanto é que a Matilde comprou de fita?

Aluno D: (O aluno volta a ler o enunciado antes de responder) 2,5 m de fita.

Professora: E então?

Aluno D: Tinha que passar para cm e ver quanto é que faltava.

Professora: E quanto faltava?

Aluno D: Hum… A 250 tiro 200 e dá 50 cm.

No caso do aluno F, parece haver também indução por parte dos dados do enunciado. Ou seja, o aluno calculou o perímetro do círculo mesmo não tendo uma explicação para a opção que fez. Contudo, neste caso, o aluno conseguiu transpor, em parte, a informação do enunciado para a figura ao perceber que a medida da altura da caixa correspondia também à medida da fita lá colocada.

Aluno F: Eu fiz o perímetro do círculo que me deu…

Professora: Porque é que calculou o perímetro do círculo?

Aluno F: Para depois… Eu fiz a primeira volta e depois a segunda volta.

Professora: A fita vai ser colocada à volta da tampa?

(…)

Professora: Porque é que decidiu calcular o perímetro do círculo?

Aluno F: Para saber quanto ia gastar aqui (o aluno aponta para o diâmetro da tampa).

Professora: Será que essa medida não é referida no enunciado?

Aluno F: (lendo novamente o enunciado) Pois diz. Não sei porque fui calcular o perímetro!

Professora: Adicionou o perímetro 2 vezes e depois 30 mais 30 e depois multiplicou por 2. Porquê estes cálculos?

Aluno F: Não sei por que calculei o perímetro, mas acho que já sei por que adicionei 30 mais 30. Porque é 30 daqui (a aluna aponta para uma altura e para a outra) e depois tinha que fazer outra vez 30 mais 30 da parte de trás. Bastava fazer 20 mais 20, mais 20, mais 20, mais 20, mais 30, mais 30, mais 30, mais 30 e depois subtrair aos 250 cm os 200 cm.

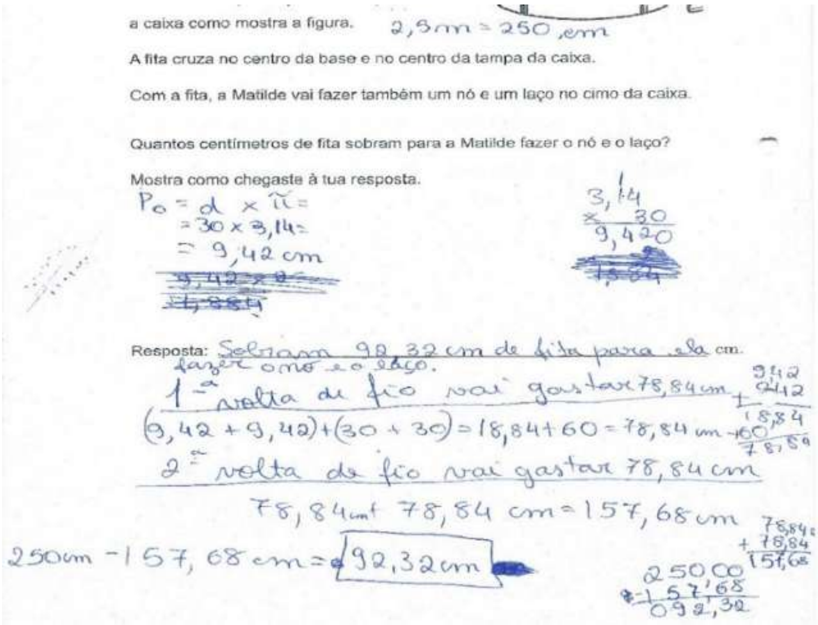


Figura 3: Resposta do aluno F ao item 20.

Os alunos G, H e I, não demonstraram qualquer dificuldade em associar a informação escrita no enunciado à informação contida na imagem e optar por uma estratégia de resolução com sucesso, como ilustra a explicação dada pelo aluno H:

> Aluno H: Nós sabemos que … aqui o diâmetro é 30 cm e a altura é 20 cm. Os 20 cm de altura vai ser o comprimento da fita a passar por aqui (o aluno aponta para um pedaço de fita na altura) e aqui vai ser 30 cm e é o comprimento que a fita vai gastar a passar por aqui (o aluno aponta para o diâmetro do tampo da caixa). Então fiz o perímetro que é 20+30+20+30 …
>
> Professora: Ou seja, o número de vezes que a fita passa na altura e no diâmetro da caixa.
>
> Aluno H: Sim. 30x4 e 20x4. Então, deu 120 cm+80 cm, que dá 200 cm. Depois 2,50m dá 250cm porque transformei e depois 250cm menos 200cm. Os 250cm do total da fita e 200cm da fita do perímetro e deu 50cm. Portanto, sobram 50cm para fazer o nó e o laço.

Tarefa 3

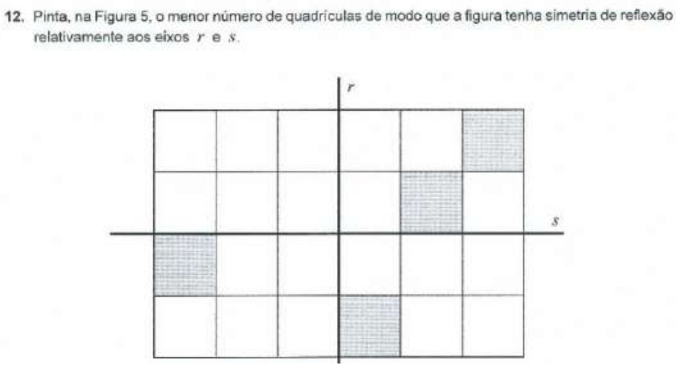


Figura 4: Item 12 da Prova Final de 2013

Tipo de item: Item de construção – Resposta curta (complemento); Tópico: Reflexão, rotação e translação – Construção do transformado de uma figura através da composição de duas isometrias de reflexão de eixo vertical e horizontal; Contexto: Matemático; Tarefa: Conexão.

O resultado de acertos obtidos na amostra deste estudo foi 53% e o resultado a nível nacional nesta tarefa ainda não é conhecido.

Processos utilizados pelos alunos

O aluno H faz a reflexão, em primeiro lugar, segundo o eixo horizontal e, em segundo lugar, segundo o eixo vertical. Por último, completa o esquema para que a figura seja simétrica segundo os dois eixos:

> Aluno H: Então, eu primeiro vi….Relativamente ao eixo *s* (eixo horizontal) e como já estavam pintados estes (a aluna aponta para os quadradinhos 1 e 2), também se dobrasse, este (1) ia sobrepor-se a este quadradinho (1') e este (2) ia sobrepor-se a este (2'), então pintei este. Aqui pintei este (3') porque se iria sobrepor a este (3) e aqui (4) também pintei este (4'). Depois, relativamente ao eixo r (a aluna faz o gesto com a mão indicando a reflexão da esquerda para a direita) este aqui (2) ia se sobrepor a este (2''). Depois, este aqui (1) ia se sobrepor a este (1''). Este (4) ia se sobrepor a este 4'' e como tinha pintado aqui (4') tinha que pintar aqui (4'''), porque era dos dois lados. Este aqui (1''') porque também era dos dois lados para se sobrepor e como já tinha pintado este (1') ia se sobrepor a este (1'''). Depois, este (2'') que se vai sobrepor a este (2''') e falta este (3) que se vai sobrepor a este (3'') e depois a este (3''').

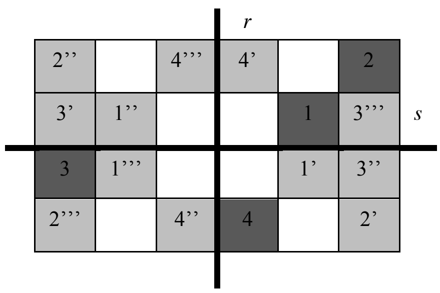


Figura 5: Esquema simplificativo do processo utilizado pelo aluno H

Mais sete dos alunos entrevistados fazem as reflexões completas, fazendo primeiramente segundo um dos eixos e só depois segundo o outro.

Cerca de um quarto dos alunos fizeram a reflexão somente segundo o eixo vertical, alegando que não perceberam que tinham que fazer a reflexão sobre o outro eixo. E, também, perto de um quarto dos alunos pintaram algumas quadrículas a mais ou deixam por pintar outras, fazendo a reflexão segundo os dois eixos só que de uma forma aleatória, como ilustra a explicação dada pelo aluno A:

Aluno A: Esta (1) se fizesse a reflexão vai para aqui (1’).

Professora: Relativamente a que eixo?

Aluno A: Ao eixo s. Esta também (2), se fizermos aqui ela tomba para aqui (2’).

O aluno vai apontando os quadradinhos e respetivas imagens tentando demonstrar o seu processo.

Aluno A: Esta (3) tomba para ali (3’). Esta (4) também tomba para ali (4’).

O aluno não termina as reflexões segundo o eixo *s* e faz a reflexão de 4 segundo o eixo *r*.

Aluno A: Acho que esta (2’) também tombava.

O aluno mostra-se confuso mesmo para demonstrar as reflexões dos outros quadradinhos por ele pintados.

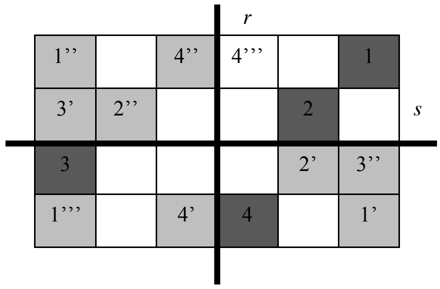


Figura 6: Esquema simplificativo do processo utilizado pelo aluno A

Conclusões

Na primeira tarefa, os alunos recorreram pelo menos a dois processos para obter o número de arestas do prisma pentagonal. Em qualquer um deles, a primeira fase consistiu no processo de *interpretação da informação figurativa* (Gutiérrez, 2006) para o reconhecimento na figura do elemento aresta. Em seguida, os caminhos foram distintos: (A) contagem direta na figura das arestas visíveis representadas por segmentos de reta contínuos e das arestas invisíveis representados por segmentos de reta descontínuos; ou (B) após o reconhecimento de que a base do prisma representado era um pentágono, passagem à utilização de uma propriedade dos prismas, a qual diz que o número de arestas de um prisma é igual ao triplo do número de lados do polígono da base. O primeiro conjunto de processos cognitivos é caraterístico do nível 1 (*visual ou reconhecimento e visualização*) do modelo de van Hiele. Neste nível os alunos descrevem as figuras geométricas com base no seu aspeto físico e espacial. Apesar de identificarem os elementos das figuras geométricas e algumas propriedades básicas, o significado que lhes atribuem é mais físico do que matemático. O segundo conjunto de processos cognitivos é caraterístico do nível 2 (*descritivo ou análise*). Neste nível já compreendem propriedades de figuras de uma mesma família, generalizando-as a essa família (van Hiele, 1999).

Na segunda tarefa, só 11% dos alunos conseguiram escolher uma estratégia completa e adequada para a sua resolução. No entanto, também cerca de 16% apresentam uma estratégia adequada e completa de resolução, mas cometeram pequenos erros. Perto de um quarto dos alunos não desenvolveu qualquer trabalho. Uma outra parte dos alunos (16%) tentou calcular o volume do cilindro, e os restantes adotaram procedimentos que não se adequam à resolução da tarefa. A resolução da tarefa exigia uma leitura atenta e cuidadosa do enunciado e uma interpretação minuciosa da figura que acompanhava o enunciado. Ao analisar a figura os alunos tinham que *percecionar as relações espaciais* e *discriminar visualmente* (Del Grande, 1990) os vários pedaços de fita, uma vez que os quatro que estão num plano horizontal têm a mesma medida e os quatro que estão num plano vertical também têm a mesma medida. Nesta tarefa, alguns alunos não evidenciaram estas duas capacidades, o que os impediu de apresentar uma estratégia válida. Bastou que se fizesse a correspondência entre as medidas assinaladas no enunciado e a fita representada na figura para que referissem qual a estratégia a adotar. A resolução desta tarefa implicava que os alunos estivessem no nível 3 (*dedução informal ou abstração*) do modelo de van Hiele, isto é que reconhecessem as relações de implicação que ligam as propriedades das figuras geométricas (van Hiele, 1999).

Na terceira tarefa, os alunos entrevistados que completaram a figura acertadamente fizeram-no primeiramente segundo um dos eixos, e só depois segundo o outro. Esta estratégia permite um maior sucesso na concretização da tarefa. Alguns alunos só fizeram a reflexão segundo o eixo vertical, umas vezes por má leitura do enunciado e da figura, outras por inabilidade para concluir a tarefa. Nesta tarefa, é necessário que os alunos sejam capazes de *percecionar as relações espaciais* (Del Grande, 1990), isto é, identificar corretamente as relações existentes entre os vários quadradinhos pintados e os eixos de simetria. A resolução desta tarefa implica que os alunos estejam no nível 3 (dedução informal ou abstração) do modelo de van Hiele. Neste nível os alunos usam as propriedades da composição de duas isometrias (Jaime, 1993).

Em síntese, nestas três tarefas deveriam ter sido convocadas diferentes capacidades espaciais associadas a diferentes representações. No entanto, nem sempre isso aconteceu. Quando não se encontram convenientemente desenvolvidas, estas capacidades tornaram-se impeditivas de processos cognitivos que pudessem desencadear a escolha de uma estratégia adequada para a resolução das tarefas. Contamos que este estudo, tal como o seu desenvolvimento, ao fornecer elementos de análise para uma compreensão mais profunda do tipo de conhecimentos e capacidades matemáticos a mobilizar nas questões de provas externas, venham ajudar os professores a uma intervenção pedagógica de apoio aos seus alunos mais fundamentada.

Referências bibliográficas

Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester, *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-907). Reston VA: NCTM.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 75-89.

Bogdan, & Biklen. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Ceia, M., Filipe, A., & Santos, C. (2011). Provas de aferição e exames: a qualidade das questões de álgebra. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 149-171). EIEM 2011.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spacial Reasoning. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nova York: Macmillian Publishing Co.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37(6)*, 14-20.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometria. In P. Flores, F. Ruiz, & M. Fuente, *Geometría para el siglo XXI* (pp. 14-58). Andaluzia: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas e Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Hershkowitz, R. (1998). About Reasoning in Geometry. In C. Mammana, & V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 29-37). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrias del plano*. *La evaluacion del nível de razonamiento*. *(Tese de Doutoramento)*. Universidade de Valência : Retirado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf e acedido em Março de 2012.

Mason, M. (1998). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. In *Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and Applications* (pp. 4-8). Boston: McDougal Littell/Houghton-Mifflin.

Matos, J. M., & Gordo, M. d. (1993). Visualização espacial: algumas atividades. *Educação e Matemática*, 13-17.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

OCDE. (2005). *Aprendendo para o Mundo de Amanhã: Primeiros resultados do PISA 2003*. São Paulo: Moderna Ltda.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

Semana, S., & Santos, L. (2010). Written report in learning geometry: explanation and argumentation. *CERME6*, (pp. 766-775). Lyon, France.

Shepard, L. (2001). The role of classroom assessment. In V. Richardson, *Handbook of research on teaching* (pp. 1066-1101). Washington: American Educational Research Association.

van Hiele, P. (1999). Developing geometric Thinking Through Activities That Begin With Play. *Teaching children Mathematic's, 5(6)*, 310-316.

O *feedback* no contexto do trabalho entre alunos com o GeoGebra

Júlio Paiva[1], *Nélia Amado*[2], *Susana Carreira*[2]
[1]Agrupamento de Escolas Dr. Francisco Fernandes Lopes, Olhão
[2] FCT, Universidade do Algarve & Unidade de Investigação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo. *Apresentamos neste artigo dois episódios relativos a uma experiência de ensino com alunos do 7.º ano onde é dado relevo ao trabalho com o computador na aprendizagem da geometria. Tentamos tirar partido das potencialidades da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no processo de ensino/aprendizagem. Focamo-nos no trabalho desenvolvido por um grupo de dois alunos em sala de aula. Este estudo desenvolve-se num contexto de ensino/aprendizagem onde se dá primazia às relações não hierárquicas (interação aluno-aluno). Adotando um modelo co-construtivista damos relevo aos diálogos entre alunos e adotamos uma metodologia qualitativa do tipo interpretativo com o objetivo de perceber o papel e a relevância do feedback entre alunos para a sua aprendizagem, na classificação e na semelhança de triângulos utilizando o Geogebra. A aplicação empírica e a interpretação de um modelo de fases do feedback (Performance; Surgimento de Feedback; Receção de Feedback e Revisão) permite-nos elaborar um conjunto de comentários finais que revelam a importância do feedback para a compreensão e aprendizagem dos alunos.*

Palavras-chave: *Feedback* entre alunos; *Feedback* do computador; Aprendizagem; Geogebra; Geometria.

Introdução

Atualmente as tecnologias de informação e comunicação têm uma presença incontestável no nosso dia-a-dia. Por esta razão, são cada vez mais reconhecidas as enormes potencialidades da utilização pedagógica do computador como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem. Este facto é facilmente comprovado pelos estudos e artigos publicados nos últimos anos em torno desta temática.

Em Portugal, a utilização de *software* de geometria dinâmica, nomeadamente na realização de tarefas de carácter exploratório ou de investigação, é uma recomendação expressa no programa de matemática do ensino básico (Ponte *et al*, 2007). Assim, o computador emerge como um novo elemento que interage com os alunos fornecendo-lhes *feedback* visual e imediato das suas ações. Este *feedback* permite que os alunos reflitam nas implicações matemáticas das suas ações (Burril, 2011), tornando possível, através da interatividade do *software*, experimentar facilmente novas ideias, avançando ou recuando, à velocidade de um simples *click*, o que seria impossível com papel e lápis.

Apesar da utilização pedagógica do computador e do *feedback* serem, separadamente, práticas muito estudadas, pouco é conhecido acerca das características do *feedback* gerado entre os alunos e entre computador e alunos, assim como das implicações que esse *feedback* traz para a aprendizagem. Neste sentido, este estudo propõe-se dar um conhecimento acerca do contributo destas interações na aprendizagem da geometria.

Neste estudo os diálogos entre alunos emergem impulsionados pelo aparecimento das imagens no ecrã de computador e da necessidade que os alunos sentem de justificar e clarificar as suas conjeturas (Yu, Barret & Presmeg, 2009). Neste contexto, em que a aprendizagem envolve a interação entre alunos e entre computador e alunos, foi desenvolvida uma experiência de ensino com a aplicação de uma tarefa de construção de um triângulo que serve de base para perceber o papel e a relevância do *feedback* existente (alunos e aluno-computador) na classificação e na semelhança de triângulos com recurso ao *Geogebra*.

O computador e o *Feedback*

O *feedback* tem sido tema de várias investigações durante as últimas décadas, particularmente no âmbito da avaliação formativa, sendo considerado um dos seus fios condutores (Black & Wiliam, 1998). Associado a um processo de regulação, o *feedback* permite que os alunos melhorem as suas aprendizagens (Wiliam, 1999). Segundo o ponto de vista tradicional o *feedback* é atribuído exclusivamente pelo professor ao aluno. Mory (2003) sugere quatro razões para uma aprendizagem baseada no *feedback*. Primeiro, o *feedback* pode ser considerado como um incentivo para a promoção de respostas; em segundo, pode ser visto como um reforço; em terceiro, pode ser considerado como informação que os alunos podem usar para validar ou alterar uma resposta anterior e, finalmente, o *feedback* pode ser considerado como um apoio para ajudar os alunos a construir e analisar os seus processos de resolução.

Numa perspetiva construtivista, o *feedback* não se desenvolve apenas no sentido do professor para os alunos, mas percorre igualmente o sentido contrário, ou seja, estabelece-se uma comunicação nos dois sentidos (discussão), ou "pingue-pongue". No modelo sociocultural ou co-construtivista, o *feedback* é parte de um diálogo em curso, o qual é tanto provável ser iniciado pelo professor como pelos alunos, e perante o qual os alunos contribuem com os seus conhecimentos para que todos aprendam, incluindo o professor. As distinções entre alunos e professor são difusas, e o *feedback* recíproco aparece integrado na aprendizagem assemelhando-se a laçadas em desenvolvimento (Askew & Lodge, 2000).

> Situações que levem os alunos a apoiar os outros e a receber ajuda dos pares constituem experiências ricas na reestruturação dos seus próprios conhecimentos, na regulação das suas aprendizagens, e no desenvolvimento da responsabilidade e da autonomia (Santos, 2002, p.79).

A permanente interação entre alunos e entre aluno e computador proporciona um novo contexto, onde os alunos podem, de forma simultânea, partilhar ideias com os seus pares e interagir com o computador. Especificamente, na matemática, o diálogo dos alunos dentro das investigações em grupo para descrever, predizer, explorar e explicar, ajuda a construir a compreensão (Briten, Stevens, & Treby, 2012).

Arzarello e Robutti (2010) referem que a tecnologia pode favorecer as interações comunicacionais e interpessoais entre alunos e entre alunos e o professor, de acordo com as características específicas do *software* utilizado. A integração das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem fazem emergir novas formas de *feedback* em sala de aula, como é revelado nos estudos apresentados por Bokhove e Drijvers (2011) e Irving e Crawford (2011). Assume particular relevo neste estudo, o *feedback* entre alunos e entre estes e o computador na resolução de tarefas de geometria.

Gielen, Peteers, Dochy, Onghena e Struyven (2010) estudaram a importância do *feedback* na aprendizagem, apresentando as principais diferenças entre o *feedback* do professor e o *feedback* entre alunos. Os alunos, ao contrário dos professores, não são tidos pelos colegas como *experts* nos conteúdos específicos das disciplinas. No entanto, o *feedback* entre alunos pode ser benéfico para a aprendizagem. Este benefício pode fundamentar-se na especificidade deste *feedback*, dado que a ausência da "autoridade do conhecimento" (e.g., o conhecimento do professor) altera o significado e o seu impacto.

As oportunidades de comunicação promovidas pelo trabalho em díade com o computador favorecem o surgimento de *feedback* entre alunos e, apesar de este ser menos preciso que o *feedback* do professor pode também conduzir a aprendizagens significativas. No entanto, o *feedback* entre alunos deve ser validado pelo professor de forma a evitar a propagação de erros ou incoerências.

De acordo com vários autores (Black, Harrison, Lee, Marshal, & Wiliam, 2003; Gielen, Peteers, Dochy, Onghena & Struyven, 2010), as práticas de *feedback* são importantes dado que:

1. Os alunos são capazes de criticar e dar conselhos numa linguagem adaptada à compreensão de outros alunos, melhor do que o professor.
2. Os alunos reagem de forma diferente ao *feedback* conforme a sua proveniência: se vem de outros alunos ou do seu professor.
3. Os alunos apropriam-se de práticas de autorregulação.
4. Os alunos melhoram as suas capacidades de autoavaliação.
5. O *Feedback* quando interativo, face a face, torna-se mais significativo e contínuo.
6. O *Feedback* promove o desenvolvimento da autonomia e a aprendizagem significativa.

Metodologia

Neste estudo o professor assume o duplo papel de professor e investigador. A investigação segue uma metodologia qualitativa do tipo interpretativo e encontra-se inserida numa experiência de ensino com uma turma do 7.º ano de escolaridade cujos alunos têm entre 12 e 13 anos de idade. Desde o início do ano letivo, os alunos desta turma foram sendo convidados a trabalhar recorrendo ao computador tal como ao papel e lápis. Esta experiência foi, no entanto, nova para os alunos visto não terem tido oportunidade de utilizar as tecnologias com regularidade em anos anteriores. Apesar dos alunos já terem utilizado o *Geogebra* encontram-se ainda numa fase de adaptação ao *software*. Nas aulas com computador os alunos trabalharam sempre em díade, havendo um computador para cada par.

Neste artigo, iremos dar particular relevo ao trabalho de dois alunos cujos nomes fictícios são André e Lucas. Embora, por vezes, haja lugar para trocas de ideias com outros pares de alunos.

Para esta comunicação selecionámos dados das observações de aula e de produções dos alunos. Sendo que para a recolha dos dados em sala de aula, recorremos a gravações áudio dos diálogos entre alunos, gravações vídeo das *performances* dos alunos no computador e recolha das *files* produzidas pelos alunos. Iremos descrever e analisar dois pequenos episódios relacionados com a construção de diferentes tipos de triângulos e com a semelhança de triângulos.

A análise de dados seguiu o modelo de fases de *feedback* de Kollar e Fisher (2010) que compreende as seguintes fases:

Performance – Um aluno interage com o computador realizando uma ação associada a uma determinada tarefa. Essa ação pode ser resultado de uma estratégia estabelecida em consonância com o colega, ou não.

Surgimento de Feedback – É através da ação do aluno que surge *feedback* visual promovido pelo computador, o qual pode ser seguido por um *feedback* oral fornecido pelo outro aluno. Este *feedback* foca-se no processo usado pelo aluno, pode revelar dúvidas, discordância ou aprovação, indicações ou descobertas simples baseadas nas suas ações, procedimentos ou raciocínios.

Receção de Feedback – A receção de *feedback* por parte de um aluno pode levar ao surgimento de uma resposta (constituindo-se como *feedback* ao *feedback*) levando a um processo cíclico, denominado como diálogo interativo, cujo objetivo consiste em clarificar ações, procedimentos ou raciocínios, podendo ser usados como alavanca para o processo de corregulação.

Revisão – Início de uma nova procura de estratégias, aberta à participação de cada um dos alunos com o objetivo de melhorar uma nova ação. Esta etapa é composta por estratégias reativas e proactivas. As estratégias reativas são aquelas nas quais um aluno responde ao *feedback* visual à medida que manipula os desenhos geométricos. As estratégias proactivas são aquelas em que o aluno determina quais as ações a tomar antes de as levar a cabo. Enquanto nas estratégias reativas o aluno está mais dependente do *feedback* proporcionado pelo computador, nas estratégias proactivas o aluno parte das propriedades matemáticas e utiliza o computador para concretizar um plano específico (Hollebrands, 2007).

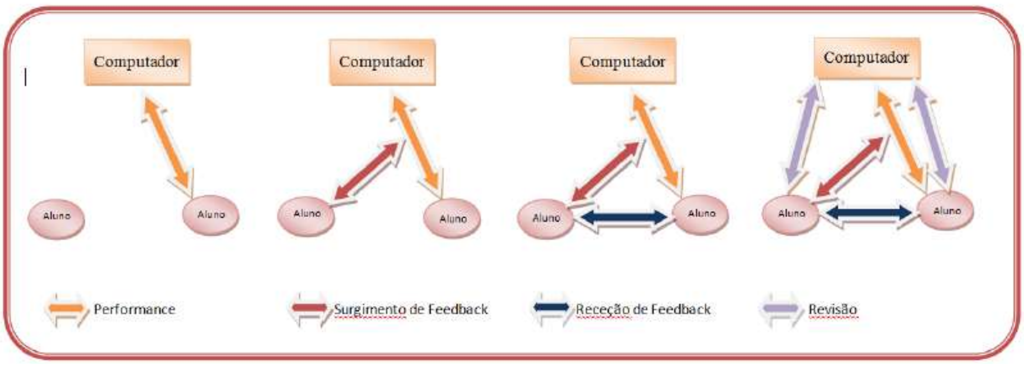


Figura 1. Modelo das fases do *feedback*.

A Análise dos Episódios

Episódio 1

A tarefa é constituída por um conjunto de pequenas questões relacionadas com a construção e classificação de triângulos escalenos, isósceles e equiláteros, assim como triângulos retângulos.

Ao iniciar a resolução da tarefa Lucas toma de imediato controle do computador mas mais tarde, André sugere que o façam à vez, ao longo da resolução das várias questões. No entanto, André acaba por assumir predominantemente o controle do computador. Uma das situações consiste na construção de um triângulo retângulo que não sofra alteração, quando os seus vértices forem arrastados. A questão foi ilustrada com um triângulo escaleno retângulo no vértice A.

André começa a construir o triângulo depois de Lucas ter referido que teria de ter um ângulo de noventa graus. A sua primeira ação foi marcar no plano um ângulo de noventa graus usando a ferramenta "ângulo com uma dada amplitude". Com esta ferramenta, obtiveram um triângulo ABA' retângulo em B e isósceles.

Os pontos resultantes constituem o *feedback* visual da *performance* do aluno que aproveita as características do *software* (Figura 2).

Figura 2. Ângulo com uma dada amplitude.

Lucas reage de imediato fazendo notar que o ângulo de noventa graus deveria ter o vértice em A (tal como a figura que estava na ficha da tarefa) e oferece-se para realizar outra construção mas André não aceita e apaga a construção. Recomeçando posteriormente o processo de construção marcando os três pontos A, B e C utilizando a ferramenta "polígono". De seguida, movendo os vértices tenta fazer um ângulo de noventa graus. Entretanto, com o intuito de compreender a forma como o ângulo foi feito, Lucas coloca a André algumas questões. Lucas quer assegurar-se que o ângulo se mantém inalterável. Os dois alunos dialogam sobre esse facto e Lucas percebe que o ângulo se altera quando os vértices são arrastados. Depois do *feedback* visual do computador, André aceita o facto de que não resolveu o problema, concordando que o ângulo deveria manter-se sempre com uma amplitude de noventa graus.

Baseando-se na figura inicial elaborada com "ângulo com uma dada amplitude", Lucas sugere que André deveria recuar e repetir o procedimento inicial, marcando um ângulo de noventa graus, utilizando dois dos vértices do polígono elaborado anteriormente. Seguidamente, ele arrasta um dos vértices do polígono anterior para que o lado AB coincida com um dos lados do triângulo retângulo, como mostra a Figura 3.

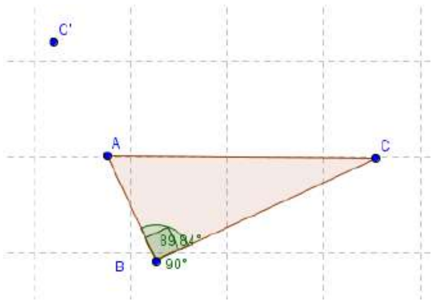


Figura 3. Coincidindo com o lado AB.

Lucas continua a levantar questões acerca do resultado e insiste em querer ter a certeza. André responde que está bem feito mas Lucas desfaz a última ação do André no computador e repete o procedimento de arrastar o vértice.

> Lucas: Espera, eu vou ver.
>
> André: Não. Está bem.
>
> André: Bem, fizeste o triângulo outra vez.
>
> Lucas: É 89.84. Não é 90!
>
> André: Porque é que apagaste o outro?!
>
> Lucas: Anda, André!
>
> André: Olha, isto é como devias fazer. Usa a tua cabeça.

André mede o ângulo e obtém 90.42. Tenta arrastar de novo e consegue obter 90 graus. Neste momento ambos concluem que não conseguiram resolver o problema porque o ângulo continuava a alterar-se.

> Lucas: Tenho uma ideia. Posso? [Manipula o computador e opta por mostrar os eixos].
>
> Lucas: André, porque é que não pensámos nisto? [Constrói um triângulo retângulo colocando os vértices em pontos da grelha].
>
> Lucas: A forma é a mesma (referindo-se ao triângulo dado na ficha da tarefa).
>
> André: Não, não é.
>
> Lucas: Sim, é.

Ao tentar convencer o seu colega, Lucas decidiu mostrar que o triângulo podia rodar mantendo, mesmo assim, a sua forma. Construiu uma círcunferência com centro no vértice do triângulo retângulo (A) passando por outro vértice (C) como mostra a Figura 4. Seguidamente, Lucas moveu o ponto C e verificou que a sua conjetura estava errada, porque o *feedback* visual do computador mostrou que o ângulo mudara. Quando isto aconteceu, Lucas e André sentiram-se incapazes de resolver a questão e decidiram chamar o professor no sentido de os ajudar. No entanto, pouco tempo depois Lucas afirma:

> Lucas: Agora eu sei! André, sabes qual é o desafio? O desafio é arrastar [os vértices] e o ângulo continuar a ser de 90º!

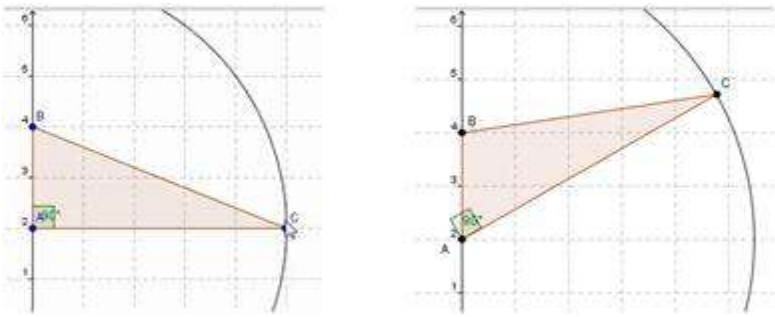


Figura 4. Uma tentativa para rodar o triângulo.

Nesse momento o professor aproximou-se dos alunos e perguntou-lhes qual a característica dos segmentos de reta que formavam os lados do triângulo retângulo. A questão colocada pelo professor ajudou os alunos a pensar sobre a perpendicularidade e abriu caminho à construção baseada na criação de duas retas perpendiculares para definir dois lados do triângulo retângulo.

De acordo com o modelo de *feedback* referido anteriormente, podemos identificar uma sequência de fases onde a *performance*, o *feedback* e as revisões foram importantes para compreender o propósito da tarefa. Em cada fase o par de alunos aprendeu algo acerca das propriedades do triângulo retângulo e sobre o Geogebra.

Tabela 1. Sequência de fases do modelo de *feedback* entre alunos (episódio 1)

Performance	André constrói um ângulo com uma dada amplitude: 90 graus.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra um triângulo retângulo isósceles; Lucas não concorda acerca do vértice do ângulo reto. (estão a tentar reproduzir a figura dada na ficha da tarefa).
Receção de *Feedback*	André aceita o *feedback* e apaga a construção.
Performance	André constrói um polígono de 3-lados e arrasta os vértices para formar um ângulo reto (por tentativa e erro).
Surgimento	O computador mostra uma figura análoga à dada. Lucas questiona a robustez

de *Feedback*	do ângulo reto.
Surgimento de *Feedback*	André aceita.
Revisão	Lucas sugere não apagar a figura e usar o ângulo com uma dada amplitude como anteriormente.
Performance	André constrói um ângulo reto utilizando dois vértices do polígono anterior e tenta ajustar o triângulo ao ângulo reto movendo os vértices.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra, para o mesmo vértice, dois ângulos: um reto e o outro aproximadamente reto. Lucas duvida que o triângulo seja retângulo e mostra que tinha razão.
Receção de *Feedback*	André tenta ignorar a chamada de atenção mas acaba por concordar.
Revisão	Lucas propõe uma nova estratégia: usar a grelha.
Performance	André protesta mas constrói um triângulo retângulo com a ajuda da grelha.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra um triângulo retângulo mas a sua posição não é a desejada. Lucas compreende que a posição é diferente mas a forma é a correta e dialogam.
Revisão	Lucas apresenta uma nova estratégia: uma forma de rodar o triângulo introduzindo uma circunferência.
Performance	Lucas constrói uma circunferência com o centro no vértice do ângulo reto passando por outro vértice do triângulo e arrasta esse vértice.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra um triângulo modificado que não é um triângulo retângulo.
Revisão	Os alunos concluem compreendendo o objetivo do problema apresentado.

Episódio 2

Neste caso a tarefa contém pequenas questões relacionadas com a semelhança de triângulos e quadriláteros. André toma a iniciativa de assumir o comando no início, manipulando o rato mas desta vez vão trocando com maior frequência a manipulação do computador. No entanto André, a determinado momento, sente que está a ter menos oportunidades de utilizar computador e, tal como no episódio anterior, sugere que o façam à vez, ao longo da resolução das várias questões, o que acabou por acontecer.

Numa das questões é solicitada a construção de dois triângulos com lados paralelos. André começa por construir um triângulo isósceles. Lucas reage afirmando que deveria ser um "triângulo normal". André afirma que é equilátero, mas é de imediato contrariado pelo Lucas. André acaba por aceitar a resposta do colega e Lucas recomeça a construção do triângulo fazendo um novo triângulo isósceles, como mostra a figura 5.

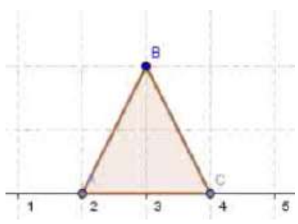


Figura 5. Construção de um triângulo isósceles.

André afirma que é isósceles e ambos parecem entender que, se era solicitado a construção de um triângulo qualquer, este poderia eventualmente ser um triângulo isósceles. Seguidamente Lucas sugere a construção de outro triângulo usando retas paralelas. André começa a selecionar os pontos e a construir retas paralelas, como mostra a Figura 6.

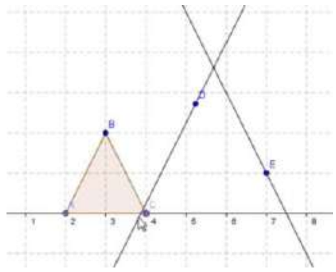


Figura 6. Construção de retas paralelas.

Quando surge a imagem André reage.

> André: Não, não é isto.
>
> Lucas: O que é que estás a fazer?
>
> André: Então está paralela…
>
> Lucas: Por acaso a ideia está certa mas os pontos tão mal. Estás a ver…
>
> André: Mas está paralela.

Decidem apagar e recomeçar a construção. André constrói um triângulo, mas Lucas reage dizendo que o ponto D está mal (na sua opinião deveria estar localizado na interseção). André consegue chegar à compreensão do problema afirmando:

> André: É se pusermos paralelos, fazemos o triângulo maior e é semelhante. Não é?

Lucas recomeça novamente a construção, discutem se a razão de semelhança é um ou dois e acabam por chegar a acordo, reconhecendo que no caso deles seria 2. Seguidamente é proposto na tarefa que se estabeleçam relações entre os elementos desses triângulos que permitam afirmar que são semelhantes e que se verifique se estas se mantêm por arrastamento. Lucas começa por medir os ângulos dos dois triângulos. André parece ficar surpreendido com o facto de as amplitudes dos ângulos serem iguais, mas Lucas assegura-lhe que era suposto obter esse resultado. Depois Lucas mede os comprimentos dos lados, como lhes era sugerido, ficando com os ângulos e lados medidos dos dois triângulos consta na Figura 7.

> Lucas: Como é o comprimento?
>
> André: É vezes dois.

Lucas: Os comprimentos são vezes dois. E os ângulos?

André: São iguais.

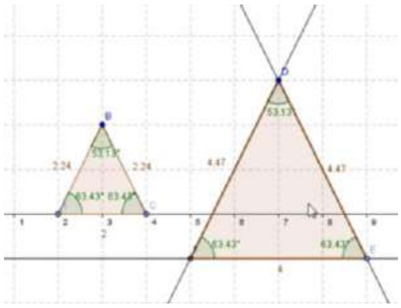


Figura 7. Construção de um triângulo com retas paralelas.

Contudo, deparam-se com as medidas de 2.24 e 4.47 para os lados correspondentes dos triângulos.

André: Então e a quatro, ponto quatro não é oito…

Lucas: Pois não. Espera aí, olha lá. Ah! Já sei… é porque isto já não… Olha os ângulos mantêm-se. Faz lá aí 2,24x2.

André: Dá 4,48.

Lucas: Mas este computador. Mas 2,24x2 dá 4,48 e aqui está 4,47…

Na sequência deste diálogo questionam o professor para tentar saber a razão por que não obtiveram 4.48. O professor explicou-lhes que tal se deve ao arredondamento efetuado pelo *software*.

Seguidamente é sugerido na tarefa que movimentem um dos vértices do triângulo inicial e verifiquem se as relações se mantêm. André movimenta um dos vértices e tem uma reação efusiva ao deparar com a movimentação simultânea dos dois triângulos e que os ângulos se mantinham com a mesma amplitude de um triângulo para o outro.

À semelhança do episódio 1 identificamos as sequências de fases do *feedback* que foram importantes para compreender o propósito da tarefa. Em cada fase o par de alunos aprendeu algo acerca das propriedades da semelhança de triângulos e ainda sobre as funcionalidades do *Geogebra*.

Tabela 2. Sequência de fases do modelo de *feedback* entre alunos (episódio 2)

Performance	André constrói um triângulo.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra um triângulo isósceles; Lucas não concorda e refere que deveria ser um triângulo normal. (Na ficha da tarefa era solicitada a construção de um triângulo qualquer).
Receção de *Feedback*	André aceita o *feedback* e apaga a construção.
Performance	André constrói um novo triângulo isósceles.
Surgimento	O computador mostra uma figura análoga à primeira. Lucas não questiona a

de *Feedback*	construção.
Revisão	Lucas sugere a construção de outro triângulo usando retas paralelas.
Performance	André começa a construir retas paralelas aos lados do triângulo.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra duas retas paralelas com os pontos fora dos vértices. Lucas questiona a construção.
Receção de *Feedback*	André justifica a sua construção. Lucas dá o seu aval à ideia de André mas refere que os pontos estão mal colocados.
Performance	André refaz a construção.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra o ponto D fora do vértice. Lucas questiona a construção.
Recessão de *Feedback*	André mostra compreender o objetivo do problema de construção.
Performance	Lucas constrói o triângulo e mede os ângulos.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra medidas de amplitudes iguais para os ângulos correspondentes. André mostra-se surpreendido.
Recessão de *Feedback*	Lucas assegura a André ser o resultado esperado.
Performance	Lucas mede o comprimento dos lados.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra as medidas dos comprimentos dos lados. Lucas questiona sobre o comprimento dos lados.
Receção de *Feedback*	Emerge um pequeno diálogo sobre os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos.
Performance	André movimenta um tos vértices.
Surgimento de *Feedback*	O computador mostra a movimentação conjunta dos dois triângulos e deixa transparecer a imutabilidade da amplitude dos ângulos.

Comentários Finais

Em consonância com o que tem sido salientado pela investigação, a natureza das tarefas a resolver com recurso ao computador, constitui um fator chave na criação das oportunidades de aprendizagem. Nos episódios relatados as tarefas contêm um desafio interessante porque permitem que surjam diferentes formas de resolução com o recurso ao *Geogebra* e permitem igualmente explorar as potencialidades do *software*.

Pode-se considerar que o episódio 1 foi constituído por apenas um passo: construir um triângulo retângulo que, quando os vértices fossem arrastados, não se deformasse. Enquanto o episódio 2 se pode dividir em cinco passos: Construir dois triângulos com lados paralelos, medir a amplitude dos seus ângulos, o comprimento dos seus lados, estabelecer relações entre os elementos desses triângulos que permitissem afirmar que eram semelhantes e verificar se estas se mantinham por arrastamento. Verificámos também que alguns raciocínios não surgem no formato verbal, mas implicitamente estão presentes através das ações, como por exemplo quando os alunos adotam outras estratégias de resolução sem as explicitarem verbalmente.

Os episódios revelam claramente como a corregulação (Fogel & Garvey, 2007) emerge do *feedback* entre alunos e do *feedback* visual do computador, no sentido em que existe um desenrolar contínuo de ações de um aluno que são suscetíveis de serem constantemente modificadas pelo *feedback* permanente do outro aluno impulsionado pelas imagens resultantes no ecrã de computador.

Nos dois episódios, este processo permitiu que os alunos passassem de uma focagem inicial na reprodução de determinada figura, para a compreensão total do objetivo do problema de construção, mesmo tendo sido necessário receber uma pista do professor para atingir a solução. Nesta experiência, apesar de os diálogos serem caracterizados pela espontaneidade, informalismo e abertura, o sentido parece ser construído a cada passo. Este facto está presente na forma como os alunos mudam continuamente a perceção das suas ações.

Enquadrado numa abordagem construtivista, aqui o diálogo é construído através de ciclos de *feedback* desprovidos de relações hierárquicas. Os ciclos sucessivos de *feedback* entre alunos indicam, obviamente, a ocorrência de um trabalho exploratório por parte dos mesmos. O facto de optar por colocar os alunos a trabalhar em pares contribuiu para o surgimento de um contexto proveitoso para explorar a geometria subjacente ao problema. Para além disso, à medida que os ciclos foram emergindo o *feedback* entre alunos melhorou e tornou-se cada vez mais consistente, promovendo raciocínios mais elaborados e uma maior procura de estratégias, que se traduz em aprendizagens mais significativas. Esses ciclos em que as aprendizagens levam a mais aprendizagens, fazem com que as distinções entre resultados e processos se diluam.

Este processo fomenta o trabalho pelo prazer da descoberta e a partilha da responsabilidade entre alunos dando ênfase ao interesse comum pela aprendizagem e compreensão.

Nestes episódios, o surgimento de *feedback* contínuo e interativo fomentado pela exploração do ambiente de geometria dinâmica deram origem aos denominados diálogos construtivistas entre os alunos onde o conhecimento é construído conjuntamente através do diálogo (Askew & Lodge, 2000).

De forma a explorar todo o potencial do diálogo na matemática torna-se evidente que tem de ser criado um ambiente onde o diálogo seja uma constante (Briten, Stevens & Treby; 2012), é neste contexto que os ambientes de geometria dinâmica e o *feedback* do computador podem desempenhar um papel fundamental.

A importância do *feedback* pode ser explicada de forma holística, pois verificámos que é só quando os alunos tentam explicar as ideias ou justificar as ações perante o surgimento de *feedback* de outros alunos ou do computador, que a sua compreensão é verdadeiramente testada e interiorizada.

Referências bibliográficas

Arzarello, F. & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM*, 42, 715 – 731.

Askew, S. & Lodge, C. (2000). Gifts, ping-pong and loops – linking feedback and learning. In S. Askew (ed.) *Feedback for learning*, 1-18. London: Routledge Falmer.

Black, P.; Harrison, C.; Lee, C.; Marshal, B. & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning: putting in to practice*. Maindenhead: Open University Press.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: raising standards through classroom* assessment. London: School of Education, King's College.

Bokhove, C. & Drijvers, P. (2011). Effects of feedback conditions for an online algebra tool. In M. Joubert, A. Clark-Wilson e M. McCabe (eds.) *Proceedings of the 10th International Conference for Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT10) 81-86. Portsmouth, UK.

Briten, E.; Stevens, S. & Treby, N. (2012). Using talk for learning in science and mathematics. . In D. Jones e P. Hodson (eds.) *Unlocking Speaking and Listening*, 2nd Edition, 19-34. London e New York: Routledge.

Burril, G. (2011). ICT in the United States: Were we are today and a possibility for tomorrow. In A. Oldknow e C. Knights (eds.), *Mathematics Education with Digital Technology*, 12-22. London: Continuum International Publishing Group.

Fogel, A. & Garvey, A. (2007). Alive Communication. *Infant Behavior & Development* 30 251-257.

Gielen, S.; Peeters, E.; Dochy, F.; Onghena, P. & Struyven, K. (2010). Improving the effectiveness of peer feedback for learning. *Learning and Instruction*, 20, 304-315.

Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for research in mathematics education* 38, n.º 2, 164-192.

Irving, A. & Crawford, A. (2011). Automated assessment and feedback on MATLAB assignments. In M. Joubert, A. Clark-Wilson e M. McCabe (eds.) *Proceedings of the 10th International Conference for Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT10), 153-158. Portsmouth, UK.

Kollar, I. & Fischer, F. (2010). Peer assessment as collaborative learning: A cognitive perspective. *Learning and Instruction*, 20, 344-348.

Mory, E. H. (2003). Feedback Research Revisited. In D. H. Jonassen (ed.), *Handbook of research for educational communications and technology*, 2nd Edition, 745-783. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. G. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. (disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ ProgramaMatematica.pdf).

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.) *Avaliação das aprendizagens – Das concepções às práticas,* 77-84. Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Wiliam, D. (1999). Formative Assessment in Mathematics Part 2: Feedback. *Equals Online: Mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8-11.

Yu, P., Barrett, J. & Presmeg, N. (2009). Prototypes and Categorical Reasoning: A Perspective to Explain How Children Learn about Interactive Geometry Objects. In T. Crane e R. Rubenstein (eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM Yearbook), 109-125. Reston, VA: NCTM.

SIMPÓSIO 2

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Coordenadores: *Ana Henriques* & *Maria Manuel Nascimento*

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística

Ana Henriques[1], *Maria Manuel Nascimento*[2]
[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, achenriques@ie.ul.pt
[2]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, mmsn@utad.pt

Revisitando a educação estatística

Atualmente, a educação estatística (Probabilidades e Estatística) ainda pode ser vista como uma área nova e emergente, quando comparada com outras áreas de estudo. As razões que levaram à introdução da Estatística nos currículos de muitos países, em todos os níveis de ensino, têm sido repetidamente salientadas nas últimas décadas. Entre elas estão a utilidade da Estatística na vida quotidiana, o seu importante papel instrumental noutras disciplinas e em muitas profissões e no desenvolvimento do raciocínio crítico, preparando cidadãos estatisticamente educados que saibam raciocinar sobre e com dados tendo em conta a incerteza (Batanero & Díaz, 2010; Gal, 2002). A aprendizagem desta disciplina é vista por grande parte dos alunos como fácil e entusiasmante, apesar de um número crescente de estudos de investigação revelarem as dificuldades envolvidas na compreensão de conceitos estatísticos e no raciocínio sobre dados e acaso (Batanero, Burrill & Reading, 2011; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Shaughnessy, 2007).

Com efeito, o aumento do tempo dedicado à instrução em Estatística, só por si, não é suficiente para preparar cidadãos estatisticamente letrados. As mudanças esperadas no ensino da Estatística não dizem respeito só à quantidade mas também à qualidade do conteúdo (Batanero, Burrill & Reading, 2011). Segundo estes autores, até há bem pouco tempo, a Estatística nos currículos estava reduzida a tarefas nas quais eram fornecidos conjuntos de dados já organizados e de dimensão reduzida e aos alunos era pedida a produção de gráficos específicos, o cálculo de estatísticas simples ou a resposta a questões diretas. Esta abordagem tradicional, focada em habilidades, procedimentos e cálculos resultou em alunos mal preparados para a aprendizagem da Estatística a um nível superior e em adultos estatisticamente iletrados. A investigação também sugere que as atividades que envolvem os alunos na resolução de problemas estatísticos que requerem a recolha e exploração de dados reais, como recomendado pelo NCTM (2007), ainda que desenvolvam alguma competência estatística, podem não ser suficientes para assegurar a compreensão conceptual de ideias estatísticas importantes e para desenvolver o raciocínio e pensamento estatístico dos alunos (Ben-Zvi & Garfield, 2004). As atuais recomendações, mesmo para os níveis de ensino mais elementares, sugerem uma abordagem ao ensino da Estatística orientada para os dados, fornecendo oportunidades aos alunos para: planearem investigações; formularem questões de investigação; recolherem dados usando observações, questionários e experiências; descreverem e compararem conjuntos de dados; retirarem e justificarem conclusões e fazerem inferências baseadas em dados. Espera-se, assim, que os alunos sejam capazes de lidar com os dados em diversos contextos significativos e ter uma atitude crítica sobre a análise e interpretação de dados (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Franklin et al., 2005; Wild & Pfannkuch, 1999).

Se neste contexto é difícil imaginar o ensino da Estatística sem recorrer ao uso de tecnologia (Garfield & Ben-Zvi, 2008), também é defensável que a integração da tecnologia pode ter um grande impacte no ensino e aprendizagem da Estatística, mudando gradualmente o conteúdo - o que se ensina - e a pedagogia - como se ensina, tal como foi preconizado por Moore (1997). De acordo com Rubin (2007), a tecnologia tem o potencial para tornar mais acessíveis os conceitos complexos e as ideias estatísticas e, por isso, tem sido incorporada na educação estatística para abordar as incompreensões dos alunos e para desenvolver o seu raciocínio estatístico (Alias, 2009; Ben-Zvi, 2004; Hammerman & Rubin, 2004; Fitzallen & Watson, 2010; Watson & Donne, 2009).

A mudança do ensino da Estatística nas escolas depende, essencialmente, da convicção dos professores sobre a importância e utilidade do tema para os seus alunos e da sua preparação adequada para o ensinar (Batanero & Díaz, 2010). A Estatística não é um tópico independente nos currículos escolares, está integrada na Matemática e, por isso, frequentemente, é ensinada pelos professores de um modo semelhante ao praticado nesta disciplina, o qual não se ajusta à sua natureza única e específica (Makar & Confrey, 2003; Meletiou-Mavrotheris, Paparistodemou, & Stylianou, 2009). Alguns autores sugerem que isso pode ser atribuído à falta de conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo dos professores (Henriques & Oliveira, 2013; Shaughnessy, 2007). De facto, embora o interesse na formação e desenvolvimento profissional dos professores de Matemática tenha aumentado consideravelmente nas últimas décadas e exista um corpo de resultados da investigação relativos a esta temática, os estudos sobre métodos bem sucedidos para preparar os professores para ensinar estatística aos vários níveis de ensino ainda são escassos e sem uma longa história (Shaughnessy, 2007).

No domínio do ensino da estatística o interesse na investigação em torno das crenças, das atitudes e das expetativas que os alunos transportam para a sala de aula tem aumentado, pois tais fatores podem facilitar/dificultar a aprendizagem da estatística e, por consequência, torná-los ou não em cidadãos estatisticamente letrados (Gal & Ginsburg, 1994; Estrada, Batanero & Lancaster, 2011; Martins, Estrada & Nascimento, 2012).

Dado o exposto, parece fundamental continuar a investir e a reforçar a investigação na educação estatística dos alunos e na formação dos professores que levarão a cabo o dito ensino.

Investigação em educação estatística: Desafios para o ensino e aprendizagem da Estatística

As 6 comunicações orais e os 3 *posters* que integram este Simpósio "ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA", desenvolvidos no âmbito de projetos de investigação ou de teses de mestrado e doutoramento, representam os esforços recentes dos seus autores, nacionais e estrangeiros, em focar a investigação em educação estatística no desenvolvimento da literacia, raciocínio e pensamento estatísticos. Os trabalhos apresentados centram-se, maioritariamente, na formação inicial e contínua de professores, em temáticas e contextos diversificados mas discutem também outros aspetos relacionados com aprendizagem dos alunos e com a análise de manuais escolares.

A atenção dada à investigação sobre manuais escolares de Matemática justifica-se porque, sendo um dos recursos mais utilizados pelos professores, pode influenciar de forma determinante o processo de ensino e aprendizagem (Azcárate & Serradó, 2006). Embora a investigação nesta área seja vasta, o tema da Estatística não tem sido privilegiado nesses estudos. Neste sentido, a comunicação "*Definiciones asociadas a la distribución de datos bidimensionales en textos españoles de bachillerato*" de coautoria de Magdalena Gea, Carmen Batanero, José António Fernandes e Emilse Gómez pretende contribuir para estudar o modo como é apresentada a distribuição de dados bivariados em manuais espanhóis do ensino secundário.

Ainda que o ensino da Estatística tenha começado por ser introduzido no ensino superior, a investigação respeitante às dificuldades que os estudantes universitários enfrentam quando abordam a Inferência Estatística ainda é recente e escassa (Henriques, 2012; Silva & Nascimento, 2010). A comunicação "*Conflitos semióticos na resolução de um problema de testes de hipóteses para a proporção por estudantes do ensino superior*" de coautoria de Gabriela Gonçalves, José António Fernandes e Maria Manuel Nascimento, adota um enfoque onto-semiótico para caracterizar os vários tipos de erros cometidos pelos alunos na resolução de um problema de teste de hipóteses e possíveis conflitos semióticos associados, disponibilizando, assim, informações essenciais à melhoria do ensino do tema, no futuro.

O reforço do ensino de Probabilidades e Estatística no ensino básico coloca grandes desafios aos professores, tornando pertinente e relevante a avaliação e o desenvolvimento do conhecimento dos professores e futuros professores nestas temáticas. Na formação inicial de professores, diversos estudos evidenciam as inúmeras dificuldades dos alunos em relação a conceitos probabilísticos. A comunicação "*Determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas por alunos futuros educadores e professores do ensino básico*", de coautoria de José António Fernandes, Carmen Batanero e Gustavo Cañadas, estuda o desempenho de futuros educadores e professores do ensino básico em probabilidade de experiências compostas. Considerando, ainda, a formação inicial de professores, o *poster* de coautoria de Cristina Martins e Manuel Vara Pires, "*A reflexão nos relatórios finais de estágio da PES: Análise de uma experiência de ensino e aprendizagem em Estatística*" apresenta um estudo em que analisam a profundidade das reflexões escritas sobre a prática de futuros professores, reconhecendo a estreita ligação que existe entre a prática de sala de aula e a reflexão do professor, salientada por vários autores (Cole & Knowles, 2000).

Como já referido, as recomendações curriculares colocam inúmeros desafios ao professor que as deve interpretar e implementar. Em particular, realça-se o papel fundamental do professor na condução da aula, competindo-lhe selecionar as tarefas que pretende desenvolver, orientar a comunicação e organizar o trabalho na sala de aula. Deste modo, a prática dos professores e as decisões que tomam influenciam de forma determinante a qualidade das aprendizagens dos alunos (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Ponte, 2005). É neste contexto que se inserem duas das comunicações deste simpósio. A comunicação de autoria de Luciano Veia, "*Condução de tarefas de organização e* *tratamento de dados no 3.º ano de escolaridade*", tem como objetivo analisar as práticas profissionais relativamente ao ensino da organização e tratamento de dados de uma professora do 3.º ano, no que respeita ao modo como propõe e orienta a realização das tarefas em sala de aula. A comunicação "*Desenvolvendo as representações estatísticas de alunos de 3.º ano*", de coautoria Isabel Velez e João Pedro da Ponte, tem como objetivo compreender de que forma quatro professores do 1.º ciclo trabalham as representações estatísticas promovendo a sua aprendizagem e compreensão pelos alunos e o desenvolvimento do seu raciocínio. Ainda relacionado com a prática letiva mas focando-se no conhecimento didático do professor, a comunicação "*O conhecimento didático de uma professora no ensino da relação bivariada na Estatística*", de coautoria de Sandra Quintas, Hélia Oliveira e Rosa Tomás Ferreira, analisa o conhecimento do processo instrucional de uma professora de Matemática do ensino secundário, no tópico das distribuições bivariadas do tema da Estatística, na disciplina de Matemática A.

A preocupação com a aprendizagem de conceitos estatísticos, nomeadamente o de covariação, está refletida no *poster* intitulado "*O raciocínio estatístico dos alunos sobre covariação usando o Tinkerplots*", de coautoria de Patrícia Antunes e Ana Henriques, que mostra como o tema pode ser trabalhado recorrendo ao uso das tecnologias e o seu contributo para que os alunos do 10.º ano atribuam significado desse conceito e desenvolvam o seu raciocínio estatístico.

Por fim, e dado que nos últimos anos o tema da avaliação de Escolas tem ganho uma atenção crescente no panorama educativo, suscitando o interesse de decisores políticos, professores, pais e público em geral, no *poster* "*Metodologia Estatística para a Classificação das Escolas Secundárias em Portugal*" de coautoria de Mário Oliveira, Manuela Gonçalves e Marco Costa é apresentado um trabalho que visa contribuir para a elaboração de um *ranking* das Escolas Secundárias portuguesas, incorporando outros aspetos relevantes, em detrimento da utilização de *rankings* baseados unicamente nas classificações dos alunos nos exames nacionais.

Esperamos que os trabalhos apresentados sejam do interesse dos participantes neste Simpósio e procuraremos criar momentos de partilha, discussão e aprofundamento das principais questões deles decorrentes, contribuindo para a identificação de problemas novos e relevantes para a continuidade/desenvolvimento da investigação em educação matemática.

Referências

Alias, M. (2009). Integrating technology into classroom instructions for reduced misconceptions in statistics. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(2), 77-91.

Azcárate, P., & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Batanero, C., & Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: What can we learn from research? *Statistique et enseignement*, *1*(1), 5-20. Online: http://statistique-et-enseignement.fr/ojs/

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. *A Joint ICMI/IASE Study*. New York, NY: Springer.

Ben-Zvi, D. (2000). Toward Understanding the Role of Technological Tools in Statistical Learning. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1&2), 127–155.

Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about data analysis. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 121-145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cole, A., & Knowles, J. (2000). *Researching teaching: Exploring teacher development through reflective inquiry*. Boston: Allyn and Bacon.

Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education*. A Joint ICMI/IASE Study (pp. 163-174). New York, NY: Springer.

Fitzallen, N., & Watson, J. (2010). Developing statistical reasoning facilitated by TinkerPlots. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia*. Voorburg, The Netherlands: ISI.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. Online: www.amstat.org/education/gaise/

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gal, I,. & Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, *2*(2). Online: http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2004). Research on statistical literacy, reasoning, and thinking: Issues, challenges, and implications. In D. Ben-Zvi & J.Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 397-409). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Emeryville, CA: Key College Publishing.

Hammerman, J., & Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 17-41.

Henriques, A. C. (2012). Students' difficulties in understanding of confidence intervals. In *Pre-proceedings of the 12th International International Congress on Mathematical Education* (pp. 2506-2515), Seul, South Korea.

Henriques, A. C., & Oliveira, H. (2013). Prospective teacher's statistical knowledge for teaching when analyzing classroom episodes. In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v. 3, pp. 41-48). Kiel, Germany.

Makar, K., & Confrey, J. (2003). Clumps, chunks, and spread out: Secondary preservice teachers' reasoning about variation. In C. Lee (Ed.), *Proceedings of the Third International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy* [CD-ROM]. Mount Carmel, MI: Eastern Michigan University.

Martins, J. A., Nascimento, M. M. S., & Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: A Qualitative Analysis of Portuguese Teachers' Attitudes Towards Statistics. *Statistics Education Research Journal*, *11*(2), 26-44. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ11(2)_Martins.pdf

Meletiou-Mavrotheris, M., Paparistodemou, E., & Stylianou, D. (2009). Enhancing statistics instruction in elementary schools: Integrating technology in professional development. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(1 & 2), 57-78.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review*, *65*, 123-137.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Rubin, A. (2007). Much has changed; little has changed; revisiting the role of technology in statistics education. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1). Online: http://escholarship.org/uc/item/833239sw

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Silva, H., & Nascimento, M. M. (2010). Estudo sobre a resolução de problemas que envolvem o Teorema de Bayes. In H. Gomes, L. Menezes e I. Cabrita (Ogs.) *XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 341-356). Aveiro: APM.

Watson, J., & Donne, J. (2009). TinkerPlots as a research tool to explore student understanding. *Technology Innovations in Statistics Education*, *3*(1). Online: http://escholarship.org/uc/item/8dp5t34t

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999), Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-265.

COMUNICAÇÕES

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Definiciones asociadas a la distribución de datos bidimensionales en textos españoles de bachillerato

M. Magdalena Gea[1], Carmen Batanero[1], J. António Fernandes[2] y Emilse Gómez[3]
[1]Universidad de Granada, mmgea@ugr.es, batanero@ugr.es
[2]Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt
[3]Universidad Nacional de Colombia, egomezt@unal.edu.co

Resumen. *Se estudia la presentación de la distribución de datos bidimensionales en ocho libros de texto españoles de bachillerato. Se analizan las definiciones de variable estadística y distribución bidimensional, frecuencia y distribución marginal y condicional. Para cada una se analiza el modo (formal o mediante ejemplo) en que se definen, el lugar del tema en que se incluye la definición, y su uso a lo largo del estudio de la estadística bidimensional. La presentación es, a veces, incompleta o parcialmente correcta y otras se equiparan conceptos que no son equivalentes. Todo ello puede repercutir en el aprendizaje de los estudiantes a los que van dirigidos estos textos.*

Palabras clave: distribución estadística bidimensional; libros de texto; bachillerato; definición.

1. Introducción

La delimitación de la distribución en un estudio estadístico es primordial para el análisis posterior, en particular, para el estudio de la relación entre dos variables, o la predicción de una a partir de la otra, es decir, el estudio de la correlación y regresión (Crocker, 1981; Estepa et al., 2012; Gea, 2012; Moritz, 2004). Como señala Estepa (2007, p. 126):

> En el estudio de la relación entre dos variables es de sumo interés distinguir si las dos variables constituyen una distribución bidimensional o no. Si las variables constituyen una distribución bidimensional se pueden realizar estudios de correlación y regresión, en caso contrario la correlación y regresión no tendrían sentido.

Este tema adquiere gran relevancia en estadística, y se incluyen en España en el primer curso de bachillerato (estudiantes de 16 años) de las modalidades de *Ciencias y Tecnología*, y *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007), con contenidos similares. Así, para el estudio de de datos bidimensionales en la modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales*, se concretan los siguientes contenidos: "*Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados*." (MEC, 2007, p. 45475). Sin embargo, su enseñanza no es simple, pues es necesario comprender los diferentes tipos de frecuencias y distribuciones unidimensionales asociadas a la distribución bidimensional, que algunos alumnos confunden (Estepa y Batanero, 1995; Estepa, 2008). Más concretamente, en el estudio de Estepa (2007) sólo el 52% de los alumnos, elige en un ítem de opción múltiple la definición correcta de distribución bidimensional. Un porcentaje elevado (33%) indican que una distribución bidimensional consiste en dos conjuntos diferentes de datos relacionados, sin percatarse de que los datos pueden provenir de individuos de la misma muestra.

Algunos autores han analizado la presentación de la correlación y regresión en libros de texto (Lavalle, Micheli y Rubio, 2006; Sánchez Cobo, 1999; Sánchez Cobo, Estepa y Batanero, 2000), pero no se centran específicamente en las definiciones de las variables y distribuciones bidimensionales y los tipos de frecuencias asociadas.

El objetivo de este trabajo es completar los anteriores, analizando estas definiciones en una muestra de libros de texto de bachillerato. En lo que sigue analizamos los fundamentos, métodos y resultados del estudio, finalizando con algunas conclusiones.

2. Fundamentos

2.1. Marco teórico

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático son los conceptos involucrados en la resolución de los problemas. Conocimiento conceptual y procedimental son polos de un continuo, aunque el primero es más flexible y generalizable, ya que no está ligado a un tipo específico de problema, sino que incluye la comprensión de los principios de un dominio dado y sus interrelaciones (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001).

Sfard (1991) describe un concepto como una idea matemática en su forma "oficial", es decir, un constructo teórico correspondiente al universo matemático formal. La autora indica que se pueden definir de forma estructural (describiendo sus condiciones o propiedades) u operacional (mediante una operación o fórmula). En nuestro análisis tendremos en cuenta los dos tipos de definiciones.

Godino (2003) indica que un objeto matemático se caracteriza por su definición y el enunciado de sus propiedades; pero estas pueden variar según las distintas instituciones en que se trate, y por tanto, hemos de concederles un carácter relativo. Puesto que las *definiciones de conceptos* son evocadas por el estudiante cuando se enfrenta a una situación problema, es importante analizar el tratamiento de éstas en la enseñanza, ya que la progresiva construcción del significado de estas nociones depende directamente de los conceptos que se definan y utilicen.

2.2. Antecedentes

Aunque hay una amplia investigación sobre los libros de texto de matemáticas, esta tradición es mucho menor en el caso de la estadística y probabilidad, donde encontramos algunos ejemplos como los de Ortiz, Batanero y Serrano (2001), Azcárate y Serradó (2006) y Cobo y Batanero (2004).

El primer antecedente relacionado con nuestro trabajo es el de Sánchez Cobo (1999), quien analiza la correlación y regresión en once libros de texto españoles de bachillerato publicados entre 1987 y 1990. Como consecuencia, ofrece una taxonomía de definiciones y un análisis de las demostraciones, desde el punto de vista de la función que realizan y las componentes que la integran. Muestra una tendencia formal en la presentación del tema, y el uso mayoritario de ejemplos basados en representaciones gráficas, así como un fuerte sesgo en los ejemplos presentados hacia la correlación positiva. Más recientemente, Lavalle et al. (2006) analizan la correlación y regresión en siete libros de texto argentinos de bachillerato, observando un enfoque mayoritariamente socio-constructivista, con un nivel de profundidad adecuado, donde también se plantean más actividades bajo una asociación directa que inversa.

3. Metodología

En este estudio se analizaron ocho libros de texto, todos ellos correspondientes al currículo actual de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (MEC, 2007). Estos textos (ver Tabla A1 en Anexo) actualmente se utilizan en el aula, y corresponden a las editoriales de mayor tradición y prestigio, siendo los más utilizados en la enseñanza pública en Andalucía.

En ellos se analizaron las definiciones de los conceptos asociados a la distribución de datos bidimensionales, del que parte el trabajo con la correlación y regresión, considerando las siguientes variables:

- V1: *Concepto definido*. En primer lugar se han clasificado todos los objetos matemáticos relacionados con la distribución de datos bidimensionales que aparecen en los textos, asignando a cada uno una categoría que se usará en las tablas de resultados del análisis. Sobre cada una de estas categorías de la variable primaria se analizan tres variables adicionales en las definiciones:
- V2: *Momento* en que se presenta la definición en el libro de texto, que puede ser al

inicio del tema (I), al final del mismo, es decir, después de haberlo utilizado en ejemplos o problemas (F) o se define varias veces a lo largo del tema (VM).

- V3: *Forma* de presentación del concepto, que puede ser mediante ejemplos (E), mediante una definición formal (F) o bien una mezcla de ambos: proponiendo ejemplos y luego definiendo formalmente el concepto (EF), o al contrario (FE).
- V4: *Uso* en el tema, esto es, si el uso del concepto es continuado en el tema (S), si se usa poco (P), o se define pero no se usa (N).

En lo que sigue presentamos y discutimos los resultados. Para la variable principal (V1) se realiza un análisis cualitativo, mostrando cuando sea preciso ejemplos de la forma en que se define en los textos. Para el resto de variables, debido a la limitación de espacio, nos restringimos a la presentación y comentarios de tablas de resultados.

4. Resultados y discusión

4.1. Conceptos considerados (V1)

En primer lugar presentamos las categorías de conceptos identificados en nuestro análisis, algunas de las cuáles se han subdividido en categorías secundarias.

C1. Variable estadística y distribución bidimensional. Cuando realizamos un estudio estadístico, en cada elemento que constituye la muestra se toman datos de una o varias *variables*. Cada una de estas variables es una característica que se pretende investigar, y está determinada por los valores que ha tomado en los distintos individuos. Si para cada individuo se consideran dos variables, tendremos una variable estadística bidimensional; el conjunto de todos sus valores y frecuencias forma la distribución bidimensional. En esta categoría hemos analizado las definiciones de variable estadística bidimensional, frecuencia doble y distribución bidimensional.

C11. Variable estadística bidimensional. Sólo cinco de los ocho textos analizados ([H3], [H4], [H6], [H7] y [H8]) presentan esta definición, mientras que en el resto encontramos la definición de distribución bidimensional. Todos los textos introducen uno de estos dos conceptos al inicio del tema, aunque el modo de definirla varía de un texto a otro, siendo frecuente introducirla con ejemplos. Consideramos correctas estas definiciones cuando se indica que la variable bidimensional se conforma de dos variables estadísticas sujetas a un mismo estudio, incluyendo también la notación *(X, Y)*, como el ejemplo mostrado en la Figura 1.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	...	y_m	$\sum_{j=1}^{m} f_{ij}$
x_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	...	f_{1m}	A_1
x_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	...	f_{2m}	A_2
x_3	f_{31}	f_{32}	f_{33}	...	f_{3m}	A_3
...	...	...	...	...	...	...
x_n	f_{n1}	f_{n2}	f_{n3}	...	f_{nm}	A_n
$\sum_{i=1}^{n} f_{ij}$	B_1	B_2	B_3	...	B_m	N

Si A y B son dos caracteres que se han de estudiar, con el carácter A queda definida una variable unidimensional X de valores $x_1, x_2, ..., x_n$, y con el B, otra variable unidimensional Y de valores $y_1, y_2, ..., y_m$.

Partiendo de ellas, se define la **variable bidimensional** (X , Y) que toma los valores:

(x_i , y_j) con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$

Así, a cada individuo de la población se le asignará un par (x_i , y_j); con estos pares se obtiene una serie estadística doble, que permite la elaboración de una **tabla de frecuencias absolutas** de doble entrada, como la que tienes en el margen.

Figura 1. Definición de variables estadística bidimensional con ejemplo ([H4], p. 218).

En este sentido, todas las definiciones encontradas en los textos son correctas, salvo la siguiente, que limita el concepto de variable estadística bidimensional a variables cuantitativas ([H8], p.248):

> Una variable estadística bidimensional *(X, Y)* es el resultado del estudio de dos características cuantitativas *X* e *Y* en los individuos de una población.

C12. Frecuencias dobles. Introducida la variable estadística bidimensional, se definen los diferentes tipos de frecuencia (doble, marginal y/o condicionada), absolutas o relativas. Todos los textos incluyen la definición de frecuencia doble, salvo [H6], generalmente explicando la forma de cálculo de la misma, es decir en forma operacional (Sfard, 1991). En el texto [H3] (p. 217) se puede leer:

> Hallamos la frecuencia absoluta de cada par de valores de la variable (*X, Y*). Para ello contamos el número de veces que se repite ese par de valores en la distribución y lo anotamos en la casilla correspondiente.

Las definiciones suelen ser parcialmente correctas ([H1], [H2], [H3], [H5]), al no incluir la notación, aunque se describan propiedades asociadas (definición estructural) o su forma de cálculo (definición operacional). Así, por ejemplo, en [H3] no se indica la notación de frecuencia doble, aunque sí se relaciona este concepto y el de frecuencia condicional. Por otro lado, un ejemplo que combina ambos tipos de definición se presenta en la Figura 2, siendo este texto junto con [H7], los únicos que además de la frecuencia absoluta doble, definen también la frecuencia relativa doble.

- Frecuencia absoluta conjunta, f_{ij}

  Es el número de veces que se presenta el par (x_i , y_j).

- Frecuencia relativa del par, (x_i , y_j)

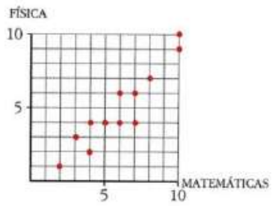
  Es el valor del cociente $(f_r)_{ij} = \frac{f_{ij}}{N}$, y se cumple que la suma de las frecuencias relativas de todos los pares de observaciones es 1.

Figura 2. Definición de frecuencia conjunta absoluta y relativa ([H4], p. 218).

C13. Distribución bidimensional. Todos los textos analizados hacen uso explícito de esta noción, a pesar de que la mitad no la definan, posiblemente por considerarse una noción equivalente a la de variable estadística bidimensional ([H4], [H6], [H7] y [H8]). Esta hipótesis fue ya sugerida por Sánchez Cobo (1999), en cuyo análisis sólo tres de los once textos estudiados incluyen este concepto, y además alguno no diferencia la variable y distribución bidimensional. Puesto que no son conceptos totalmente equivalentes, pensamos que sería útil diferenciarlos, ya que dar la variable solo implica conocer su rango de variación y el significado de cada variable individual, mientras la distribución requiere también conocer la frecuencia de cada par de valores.

En los textos analizados, las definiciones son parcialmente correctas, porque sólo consideran el caso en que el número de categorías diferentes de las dos variables unidimensionales que la forman sea el mismo. Es decir, no se considera el caso de un conjunto de modalidades $m \times n$ categorías (*m* en la variable *X* y *n* en la variable *Y*), siendo *m* y *n* diferentes. Posiblemente se deba a que, al tratar de facilitar la enseñanza, no hay mucho uso de tablas de doble entrada; sino, para facilitar los cálculos posteriores de la covarianza, coeficiente de correlación lineal y parámetros asociados a la recta de regresión, los datos se presentan simplemente mediante un listado.

Otras definiciones vienen acompañadas de ejemplos, aprovechando para introducir una tabla o un diagrama de dispersión, como es el caso del texto [H1] (ver Figura 3). Hacemos notar la complejidad semiótica de este ejemplo, que combina tres representaciones diferentes del concepto (tabular, gráfica y verbal). En este texto, posteriormente se ofrece una definición estructural formal (Sfard, 1991) como conjunto de valores de dos variables estadísticas unidimensionales con notación simbólica.



■ Estas son las notas de 12 estudiantes en Matemáticas y en Física:

ALUMNO	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
MATEMÁTICAS	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	10	10
FÍSICA	1	3	2	4	4	4	6	4	6	7	9	10

Es una **distribución bidimensional**, porque a cada individuo le corresponden los valores de dos variables. Si tomamos esos dos valores como las coordenadas de un punto, la distribución puede ser representada mediante 12 puntos: **nube de puntos**.

Se aprecia una relación entre las dos variables: a mejor nota en *Matemáticas*, mejor nota en *Física*, y a peor nota en *Matemáticas*, peor nota en *Física*, pero solo a grandes rasgos, *grosso modo*. Se dice que existe **correlación** entre esas dos variables.

Figura 3. Definición de distribución bidimensional ([H1], p. 218).

C2. Distribución marginal y condicional. De la distribución doble pueden deducirse diferentes distribuciones unidimensionales: la distribución marginal para cada una de las variables *X* e *Y*, y además, fijado un valor de una de las variables (por ejemplo para $X = x_i$) se puede deducir la distribución condicional de la otra variable dado este valor. En esta categoría se incluye la definición de la frecuencia y distribución marginal, y de la frecuencia y distribución condicional en los textos analizados.

C21. Frecuencia marginal. La frecuencia marginal de un valor $X = x_i$ se obtiene sumando la frecuencia doble de todos los pares de valores en la distribución bidimensional que tengan este valor de *X*. Puede tratarse de una frecuencia absoluta o relativa. Sánchez Cobo (1999) encuentra este concepto tan sólo en cuatro de los once textos que analizó. En nuestro análisis se presenta en cinco de los ocho textos analizados ([H3], [H4], [H5], [H7] y [H8]), y es definida, en su mayoría, estructuralmente (formalmente) al inicio de su uso. Aunque ciertamente se utiliza poco, y en algunos casos, como en [H3], prácticamente nada.

Las definiciones son parcialmente correctas, principalmente porque no ofrecen la notación asociada a estas nociones, aunque los textos [H4], [H7] y [H8] se aproximan a ella, por ejemplo, con el uso de sumatorios ([H7]) o de letras ([H4]). En este caso (Figura 4), la notación de la frecuencia marginal (*A_i)* es confusa pues no es habitual para las frecuencias; además no se explica el significado del subíndice, que se refiere a las modalidades de la variable, ni tampoco el rango de variación de la variable X.

- **Frecuencia absoluta marginal de la variable X_i, A_i**

$$A_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$$

que representa el número de elementos en los que X toma el valor x_i.

- **Frecuencia absoluta marginal de la variable Y_j, B_j**

$$B_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}$$

Figura 4. Definición de frecuencia marginal ([H4], p. 218).

El caso más llamativo es el texto [H8], que incluye a definición la notación adecuada: $f_{\bullet m}$ y $f_{n\bullet}$ al definir el concepto pero posteriormente la cambia por otra (f_i) en las tablas que aparecen a lo largo del tema. Además, define esta noción utilizando simplemente el lenguaje simbólico, sin emplear la terminología verbal "*frecuencia absoluta marginal*".

C22. Distribución marginal. El conjunto de todos los valores de una de las variables, junto con la frecuencia marginal de los mismos, constituye la distribución marginal. Sánchez Cobo (1999) no la incluye entre los conceptos que analiza, aunque indica que la distribución marginal se asocia a la distribución bidimensional, para mostrar cómo deducir de aquella, algunas variables estadísticas unidimensionales. Además, la equipara a la noción de frecuencia marginal, lo que no es totalmente correcto, pues una distribución corresponde a un conjunto de valores de la variable, junto con sus frecuencias, mientras una frecuencia puede corresponder a un valor aislado.

Las definiciones que se presentan en los textos analizados son parcialmente completas, ya que no se ofrece la notación asociada, siendo tan sólo correcta en [H4] (ver Figura 5). En general, vienen acompañadas de ejemplos que clarifican su construcción. Concretamente, el texto [H1] usa esta noción sin una definición previa, como etiquetado en una tabla de frecuencias. Por su parte, el texto [H3] la define al margen y como complemento a la definición de frecuencia marginal, del siguiente modo ([H3], p. 217):

> Cuando se estudian por separado las variables unidimensionales X e Y que forman la variable bidimensional (X, Y), se habla de distribuciones marginales.

C23. Frecuencia condicional. La frecuencia absoluta de un valor $X = x_i$ condicionado a que la variable Y tome un determinado valor, como por ejemplo $Y = y_j$, se corresponde con la frecuencia absoluta doble del dato (x_i , y_j). La relativa sería igual al cociente entre la frecuencia absoluta doble y la marginal del valor que sirve de condición. Es importante que el estudiante se percate de que la variable que condiciona aporta información nueva a la cuestión que se plantee y por ello la frecuencia relativa condicional es, en general, diferente de la frecuencia doble condicional. Esta comprensión será de gran ayuda para dar sentido a la regresión, como modelo de ajuste a los datos, con objeto de predecir una variable a partir de la otra.

Sánchez Cobo (1999) tan sólo encuentra este concepto en uno de los once textos que analiza aunque no precisa el modo en que se presenta o el uso que se realiza de ésta. En nuestro caso, la definición tan sólo se incluye en [H4], que también presenta la definición operacional de las frecuencias relativas condicionales, apoyándose en la representación tabular de la distribución bidimensional (ver Figura 5). Este ejemplo se orienta principalmente a la definición de distribución condicional, que describimos a continuación.

C24. Distribución condicional. Además de las dos distribuciones marginales de una distribución bidimensional, se pueden deducir diferentes distribuciones condicionales. La distribución condicional sería el conjunto de valores de una de las variables junto con las frecuencias condicionadas respecto a un valor de la otra variable.

Tan sólo el texto [H4] (ver Figura 5) presenta una definición de esta noción, que de engloba a la definición de la frecuencia condicional, aunque, como hemos indicado, sería importante diferenciar estos conceptos. Su definición se apoya en la representación tabular, y aunque tiene algunas imprecisiones, se considera correcta. No se entiende, por ejemplo, la exigencia de usar la primera columna (o fila), además de una intermedia, pues podría inducir a confusión, y el alumno pensar en tomar dos intermedias. No se menciona que el hecho de tomar la primera columna (fila) es porque contiene las categorías de la variable que se condiciona. Previendo su dificultad, después de su definición, el texto propone un ejemplo que clarifica su notación y funcionalidad.

2. Distribuciones marginales y condicionadas

Si en una tabla de frecuencias absolutas de doble entrada, como la descrita anteriormente, consideramos la primera y la última columnas, obtenemos la tabla estadística que se corresponde con la distribución de la variable unidimensional X. Esta distribución recibe el nombre de *distribución marginal de la variable X*. Si consideramos ahora la primera columna y una columna intermedia (correspondiente a y_j), obtendremos una nueva distribución llamada *distribución condicionada de la variable X por la modalidad y_j de la variable Y*.

X	Frecuencias absolutas marginales
x_1	A_1
x_2	A_2
...	...
x_n	A_n

X	Frecuencias absolutas condicionadas por y_j	Frecuencias relativas condicionadas por y_j
x_1	f_{1j}	f_{1j}/B_j
x_2	f_{2j}	f_{2j}/B_j
...	...	...
x_n	f_{nj}	f_{nj}/B_j
	B_j	

Análogamente, considerando la primera y la última fila de la misma tabla de frecuencias absolutas de doble entrada, se obtiene la *distribución marginal de la variable Y*. Si consideramos la primera fila y una fila intermedia (correspondiente a x_i), obtendremos la *distribución condicionada de la variable Y por la modalidad x_i de la variable X*. Las tablas de estas distribuciones son similares a las expuestas anteriormente.

Figura 5. Definición de distribución marginal y condicionada ([H4], p. 220).

Una vez descritas con detalle todas las categorías de la variable principal (concepto definido) pasamos a presentar y discutir los resultados respecto al resto de las variables, cada una de las cuáles se cruza con la anterior.

4.2. Forma de introducción

En la Tabla 1 presentamos la forma en que se introduce la definición del concepto en los textos analizados. El que más aparece definido es la frecuencia doble, seguido por los de variable estadística y frecuencia o distribución marginal. Apenas se define la distribución o frecuencia condicional, a pesar de su importancia para el desarrollo de nociones como la regresión; para poder comprender bien el significado de la recta de regresión, es importante entender que la función de regresión es el lugar geométrico de la media de las distribuciones condicionales.

Hay también inconsistencia pues, a veces, se define la frecuencia de un cierto tipo (doble, marginal y condicional), pero no la correspondiente distribución, y viceversa. Podemos destacar también la variabilidad de libros, desde los muy completos, como [H4], hasta los que apenas incluyen definiciones de estos conceptos, como [H2] o [H6].

Tabla 1. Forma de introducción

Conceptos	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
C1.Variable estadística y distribución bidimensional								
C11.Variable estadística bidimensional			EF	EF		F	FE	EF
C12.Frecuencia doble	E	E	E	FE	E		FE	EF
C13.Distribución bidimensional	EF	FE	F		F			
C2.Distribución marginal y condicional								
C21.Frecuencia marginal			E	F	F		FE	F
C22.Distribución marginal	E		E	FE		E		F
C23.Frecuencia condicional				FE				
C24.Distribución condicional				FE				

Nota: E – ejemplos; F – formal; EF – ejemplos luego definición formal; FE – definición formal luego ejemplos.

La presentación se realiza generalmente a partir de ejemplos (en muchos casos en forma exclusiva), pero también, a veces, se comienza por una definición formal estructural, que en algunos casos es exclusiva (no siguen ejemplos). Lo ideal sería la presentación que comienza por ejemplos, seguida de la definición formal, pero son pocos los textos que la hacen de este modo y no en todos estos conceptos; sería también admisible la presentación formal seguida por ejemplos, que aparece en muchos textos.

4.3. Lugar de introducción

En cuanto al lugar de introducción de estas definiciones, suele ser la primera vez que aparece el concepto (Tabla 2), lo que indica una orientación teoría-práctica. Únicamente en un texto se presenta la frecuencia y distribución marginal después de haberlo utilizado, y en otro la distribución bidimensional en varios momentos.

Tabla 2. Lugar de introducción

Conceptos	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
C1.Variable estadística y distribución bidimensional								
C11.Variable estadística bidimensional			I	I		I	I	I
C12.Frecuencia doble	I	I	I	I	I		I	F
C13.Distribución bidimensional	VM	I	I		I			
C2.Distribución marginal y condicional								
C21.Frecuencia marginal			F	I	I		I	I
C22.Distribución marginal	I		F	I		I		I
C23.Frecuencia condicional				I				
C24.Distribución condicional				I				

Nota: I – inicio del tema; F – final del tema; VM – varias veces a lo largo del tema.

Cabe mencionar que, en general, estas definiciones se ubican en torno a la organización de datos bidimensionales (gráfica y tabular), y en particular, en el tratamiento de la representación tabular de la distribución bidimensional.

4.4. Uso de las definiciones

En la Tabla 3 se muestra el uso de las definiciones a lo largo del tema, observando que generalmente se suelen utilizar con frecuencia en la mayoría de los libros, aunque también hay diferencias. En el texto [H1], los pocos conceptos que define respecto a la distribución estadística bidimensional se usan poco o nada. Además, las nociones de frecuencia y distribución marginal se usan menos que las de frecuencia o distribución doble. La frecuencia y distribución condicional se usa en el único texto que la define.

Tabla 3. Uso en el tema

Conceptos	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
C1.Variable estadística y distribución bidimensional								
C11.Variable estadística bidimensional			S	P		S	S	S
C12.Frecuencia doble	P	S	S	S	N		S	S
C13.Distribución bidimensional	P	S	S		S			
C2.Distribución marginal y condicional								
C21.Frecuencia marginal			N	S	P		S	P
C22.Distribución marginal	N		N	S		S		S
C23.Frecuencia condicional				S				
C24.Distribución condicional				S				

Nota: S – uso continuado; P – poco uso; N – no se usa.

El uso que se hace de la variable estadística bidimensional a lo largo del tema es relevante en todos los libros, salvo en el texto [H4] donde, a pesar de ofrecer una definición correcta y formal, utiliza la noción de distribución como sinónimo de variable (cuando en realidad son dos conceptos diferentes), principalmente en los enunciados de tareas. La definición de distribución bidimensional suele presentarse de modo formal, antes de su uso, es decir, de forma estructural, describiendo sus condiciones o propiedades (Sfard, 1991).

5. Conclusiones

El análisis de las definiciones de conceptos relacionados con la distribución de datos bidimensionales en los textos analizados, sugiere un escaso tratamiento, a pesar de su relevancia en el desarrollo de otros conceptos que se introducen después en el tema, como las nociones de correlación y regresión. Esto puede influir en la comprensión conceptual de estos temas, que debe incluir la de los principios del dominio dado y sus interrelaciones (Rittle-Johnson et al., 2001), en este caso, los diferentes tipos de frecuencias, distribuciones y variables.

En general, se definen pocos conceptos al respecto, siendo las nociones de frecuencia doble, seguida de las de variable estadística bidimensional, y frecuencia y distribución marginal las que principalmente se incluyen. Este resultado no sería tan preocupante, si al menos las definiciones que se aportaran fuesen apropiadas.

Cuatro de los siete textos que definen la frecuencia doble no utilizan el lenguaje simbólico apropiado; además sólo dos textos establecen su relación con la frecuencia relativa doble. La noción de variable estadística bidimensional se define correctamente, pero se trata de modo implícito, como sinónimo de distribución estadística, cuando no lo son. En consecuencia, salvo en uno de los textos, sólo se define uno de estos conceptos. Por otro lado se asume el mismo número de categorías en las dos variables unidimensionales o al menos no se indica explícitamente que este número de categorías puede ser diferente en las dos variables.

Por otra parte, sólo algunos textos incluyen las definiciones de distribuciones condicionales y marginales, haciendo, los que la incluye, un uso limitado, ya que, por lo general, se presenta tan sólo la frecuencia y distribución marginal, con definiciones que no suelen incluir notación simbólica. Este resultado creemos que se debe al escaso uso de la tabla de doble entrada en los textos analizados. De este modo, si todos los datos de la distribución bidimensional poseen frecuencia uno, no tiene mucho interés determinar la distribución condicional de una de las variables a un valor de la otra.

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996), el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula. Por ello, el desempeño de todas las cuestiones planteadas en el presente estudio quedan abiertas al diseño de situaciones problema específicas al tratamiento de datos bidimensionales, que permitan al estudiante alcanzar el nivel de abstracción adecuado para el desarrollo de nociones posteriores como la correlación y regresión.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947, FPI-BES-2011-044684 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Eso. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (1), 5-18.

Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers. *Psychological Bulletin*, *90* (2), 272-292.

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión de estudiantes de Educación Secundaria. *Zetetiké, 15* (28), 119-151.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, *13* (2), 155-170.

Estepa, A., Gea, M. M., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números*, *81*, 5-14.

Gea, M. M. (2012). *Fundamentos para un estudio sobre la didáctica de la correlación y regresión*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *RELIME*, *9* (3), 383-406.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

MEC (2007). *REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 221-255). Dordrecht: Kluwer.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-14.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, *93* (2), 346-362.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 1-36.

Sánchez Cobo, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *18* (2), 297-310.

Anexo

Tabla A1. Libros de texto utilizados en el análisis

Código	Referencia
H1	Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Anaya.
H2	Arias, J. M. y Maza, I. (2011). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Bruño.
H3	Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M.J., Gimeno, M. y Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales*. Barcelona: Guadiel.
H4	Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2008). *1º Bachillerato*. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Zaragoza: Luis Vives.
H5	Martínez, J. M., Cuadra, R., Heras, A. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. *1º Bachillerato*. Madrid: McGraw-Hill.
H6	Bescós, E. y Pena, Z. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Vizcaya: Oxford University Press.
H7	Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Santillana.
H8	Vizmanos, J. R., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: SM.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas por alunos futuros educadores e professores do ensino básico

José António Fernandes[1], *Carmen Batanero*[2], *Gustavo Cañadas*[2]
[1] Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt
[2]Universidad de Granada, batanero@ugr.es, grcanadas@ugr.es

Resumo. *Neste texto estuda-se o desempenho de alunos futuros educadores e professores do ensino básico em probabilidade de experiências compostas, designadamente a probabilidade condicional e a probabilidade conjunta. Participaram no estudo 46 alunos do 3º ano da Licenciatura em Educação Básica de uma universidade, a quem foi aplicado um questionário com quatro questões, das quais é aqui explorada apenas uma delas, envolvendo dois itens de probabilidade condicionada e outros dois de probabilidade conjunta. Em termos de resultados, globalmente, obteve-se uma baixa percentagem de respostas corretas em qualquer dos dois tipos de probabilidade estudados. Nas respostas corretas destacou-se o cálculo explícito ou implícito da probabilidade em questão, enquanto nas respostas erradas se salientou a adesão à falácia da inversão do eixo temporal e o cálculo da probabilidade de apenas um acontecimento, ignorando o acontecimento condicionante, no caso da probabilidade condicionada, e a não combinação, total ou parcial, das probabilidades determinadas de forma explícita ou implícita para obter a probabilidade pedida e a adição de probabilidades em vez da multiplicação, no caso da probabilidade conjunta.*

Palavras-chave: probabilidade condicionada; probabilidade conjunta; futuros educadores e professores do ensino básico.

Introdução

Sobretudo a nível do ensino básico, o recente reforço do ensino de Probabilidades e Estatística nas escolas de muitos países, entre os quais se encontra Portugal (Ministério da Educação, 2007), relevam a importância de avaliar os conhecimentos dos professores e futuros professores nesta temática.

No caso dos educadores e professores do 1º ciclo do ensino básico, trata-se de uma temática que passam agora de ter de ensinar às crianças, o que antes não acontecia. Ora essa exigência implica que os estudantes futuros educadores e professores do 1º ciclo recebam formação nesses conteúdos ao longo da sua formação inicial, tal como já vem acontecendo, bem como aqueles que se encontram no exercício da profissão.

Neste contexto, torna-se pertinente conhecer até que ponto a formação recebida ao longo da sua formação inicial se revela adequada para as necessidades de ensino, tendo sempre presente questionar essa formação e contribuir para a sua melhoria.

Tendo por pressuposto que a formação dos futuros educadores e professores do 1º ciclo não se deve confinar estritamente aos conteúdos que terão de explorar com as suas crianças, antes devem adquirir uma compreensão mais ampla desses conteúdos, no presente estudo avaliam-se conhecimentos probabilísticos desses futuros educadores e professores através de uma tarefa que envolve a determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas.

Investigação prévia

A literatura mostra-nos que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades de acontecimentos compostos de dois acontecimentos (e.g., Fernandes, 2001; Polaki, 2005; Watson & Moritz, 2002).

No caso da probabilidade condicionada e da probabilidade conjunta, Watson e Moritz (2002) concluíram do seu estudo que alunos do ensino primário a recém-ingressados na universidade exibiram dificuldades em ambos estes conceitos.

Para Tarr e Lannin (2005), os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade de estabelecer comparações probabilísticas, tal como foi verificado nos estudos de Falk (1993) e Green (1983), onde, recorrendo a vantagens (*odds*) ou outra comparação do tipo parte-parte, os alunos foram capazes de comparar probabilidades de acontecimentos. Estes resultados sugerem que, diferentemente de Piaget e Inhelder (1951), que destacam as comparações a partir de relações parte-todo, os alunos não necessitam de atingir o estádio das operações formais para efetuarem com sucesso tais comparações.

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, em que participaram alunos do 5º, 6º e 7º ano de escolaridade, concluíram que a percentagem de respostas corretas foi superior nas situações com reposição relativamente às situações sem reposição, identificando dois equívocos fundamentais nos raciocínios dos alunos em probabilidade condicionada: os alunos não perceberam que o espaço amostral é modificado nas situações sem reposição; e calcularam a probabilidade de um acontecimento em situações sem reposição fazendo a comparação entre o número de casos favoráveis para o acontecimento antes e depois da primeira tiragem em vez de fazerem comparações com o número total de resultados possíveis.

Embora Tarr e Lannin (2005) considerem que em situações sem reposição a probabilidade condicionada torna-se particularmente explícita porque a redução do espaço amostral é visível, enquanto em situações com reposição isso não acontece, tal não se repercutiu nas respostas dos alunos do estudo de Fischbein e Gazit (1984).

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem os significados das probabilidades condicional e conjunta, isto é, $P(A \mid B)$ com $P(A \cap B)$, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9º ano de escolaridade (Correia, Fernandes & Contreras, 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Falk (1986) verificou que muitos alunos aderem à *falácia da inversão do eixo temporal*, afirmando uma visão determinista, em que a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afetar algo que ocorreu antes, e não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A \mid B)$ e $P(B \mid A)$, erro designado por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011) verificou-se que alguns alunos do 9º ano também cometeram este erro.

Relativamente à probabilidade conjunta, Polaki (2005) concluiu no seu estudo que os alunos apresentam muitas dificuldades no estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas, apresentando conjuntos de resultados incompletos com base em raciocínios subjetivos ou estratégias de tentativa-e-erro. Ora, estas dificuldades repercutem-se na determinação de probabilidades e, segundo este autor, mesmo alguns alunos que foram sucedidos na definição do espaço amostral cometeram muitos erros na predição de probabilidades. Face a estas dificuldades, recomenda-se o uso da regra do cardinal do produto cartesiano como forma de confirmação de que o espaço amostral está realmente completo.

Tversky e Kahneman (1983) salientam o erro da *falácia da conjunção*, que significa que os sujeitos avaliam a probabilidade da conjunção como sendo superior à probabilidade de um dos acontecimentos seus constituintes, isto é, $P(A \cap B) > P(A)$ ou $P(A \cap B) > P(B)$. Este fenómeno verifica-se, sobretudo, quando um dos acontecimentos é altamente representativo do outro, como é o caso do acontecimento

“Um ser humano nasceu em África” é altamente representativo do acontecimento “Um ser humano é de cor negra”. Nesta situação, Fernandes (1990) verificou que a maioria dos alunos do 11º ano e futuros professores de matemática que participaram no estudo afirmaram ser mais provável o acontecimento “Um ser humano é de cor negra e nasceu em África” do que o acontecimento “Um ser humano é de cor negra”.

No estudo de Díaz e Batanero (2009), em que participaram estudantes universitários de Psicologia, verificou-se que eles exibiram, com elevada incidência, vários enviesamentos de raciocínio sobre probabilidade condicional, dos quais se salientam a falácia da condicional transposta, a falácia da inversão do eixo temporal, a falácia da conjunção e a confusão entre acontecimentos independentes e mutuamente exclusivos.

Watson e Moritz (2002) acrescentam às dificuldades antes referidas que os alunos quando confrontados com a determinação de uma probabilidade conjunta, para além de a confundirem com a probabilidade da união, simplesmente adicionam as probabilidades dos acontecimentos que a constituem ou determinam a sua média. No estudo que realizaram, estes autores verificaram que o aumento de nível escolar e de compreensão de conceitos básicos de probabilidade esteve associado ao aumento de respostas corretas, mas não esteve associado à diminuição da incidência da falácia da conjunção.

Também no estudo de Fernandes (2001), em que foram incluídos vários itens de probabilidade em experiências compostas, se verificou que alunos do 8º e 11º ano (sem ensino de probabilidades) revelaram muitas dificuldades, as quais se deveram ao recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a uma descrição incompleta do espaço amostral, a fatores causais e ao *enviesamento de equiprobabilidade*. Neste último caso, os alunos avaliam os acontecimentos de caráter aleatório como sendo equiprováveis (Lcoutre & Duran, 1988).

Método

Na presente investigação estuda-se o desempenho de alunos futuros educadores e professores do ensino básico na determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas.

Participaram no estudo 46 alunos do 3º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, último ano do curso que dá acesso a cursos de mestrado em Educação Pré-Escolar, em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e em Ensino do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico. Estes alunos tinham idades compreendidas entre os 20 e os 40 anos, com média de idades de 22,5 anos e desvio padrão de 4,2 anos, e como é habitual neste curso, quase todos os alunos (93,5%) eram do sexo feminino.

Quase todos os alunos (91,3%) tinham frequentado a unidade curricular Números e Probabilidades, no 2º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, embora 32,6 % sem sucesso, que incluía conteúdos de Probabilidades, designadamente os conceitos de probabilidade conjunta e probabilidade condicionada, aqui tratados.

A formação matemática destes alunos à entrada na universidade era muito variada, tendo estudado matemática em cursos muito distintos, de que se salientam a Matemática A (15,2%), Matemática Aplicada às Ciências Sociais (37,0%) e Matemática do 9º ano do ensino básico (23,9%). Em geral, os alunos percecionaram dificuldades na aprendizagem das disciplinas do âmbito da matemática na universidade, afirmando cerca de três em quatro ter muita dificuldade (30,4%) ou ter dificuldade (47,8%), enquanto muitos menos afirmaram ter pouca dificuldade (21,8%) e nenhum afirmou não ter dificuldade.

A recolha de dados foi efetuada através da aplicação de um questionário, numa das suas aulas, composto por quatro questões, cada uma com vários itens, versando os conceitos de probabilidade simples, condicional e conjunta. Neste texto, apresentam-se apenas resultados de uma dessas questões, envolvendo dois itens a probabilidade condicionada e os outros dois a probabilidade conjunta. Na secção seguinte, onde são referidas as resoluções dos alunos, apresenta-se o enunciado da questão.

Finalmente, em termos de análise de dados, classificaram-se as respostas dos alunos em corretas e incorretas, caracterizando-se, seguidamente, os raciocínios desenvolvidos pelos alunos em cada um dos dois tipos de resposta. Em ambos os casos determinaram-se frequências e as categorias de raciocínios são estabelecidas aquando da análise das respostas dos alunos.

Resolução da tarefa pelos alunos

No âmbito deste estudo, foi proposto aos alunos a resolução da tarefa seguinte, constituída por quatro questões:

Num grupo de 25 pessoas, 10 são homens e 15 são mulheres.
Escolhem-se, ao acaso, **duas** pessoas do grupo das 25 pessoas.

a) Sabendo-se que a primeira pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a segunda pessoa ser homem?

b) Sabendo-se que a segunda pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a primeira pessoa ser homem?

c) Qual a probabilidade de obter duas mulheres?

d) Qual a probabilidade de obter um homem e uma mulher (por qualquer ordem)?

Seguidamente apresentam-se o tipo de respostas e os raciocínios realizados pelos alunos na resolução das várias questões da tarefa.

Tipo de respostas

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de respostas corretas, erradas e de não respostas em cada uma das quatro questões da tarefa.

Tabela 1. Percentagem de respostas corretas, erradas e não respostas nas quatro questões da tarefa ($n = 46$)

Questão	Respostas corretas (%)	Respostas erradas (%)	Não respostas (%)
a)	63	30	7
b)	4	83	13
c)	30	59	11
d)	20	63	17

Globalmente, no conjunto das quatro questões, constata-se um fraco desempenho dos alunos, com uma média de percentagens de respostas corretas muito baixa (29%). No caso da probabilidade condicionada, avaliada nas questões a) e b), verifica-se uma grande disparidade nas percentagens de respostas corretas: enquanto na questão a) cerca de dois em cada três alunos responderam corretamente, na questão b) apenas dois alunos apresentaram a resposta correta. O facto de se ter invertido o eixo temporal na sequência dos acontecimentos da questão b) tornou muito mais difícil a questão para os alunos.

Embora menor, também entre as questões c) e d) se observa alguma discrepância entre as percentagens de respostas corretas. Neste caso, a menor percentagem de respostas corretas na questão d), relativamente à questão c), deve-se também, com certeza, ao facto de a questão d) envolver a ordem, o que não acontece na questão c). A este respeito, a menção explícita à ordem no próprio enunciado da questão não foi suficiente para eliminar as diferenças no nível de dificuldade entre as duas questões.

A seguir apresentam-se os raciocínios desenvolvidos pelos alunos na resolução das diferentes questões de modo a complementar-se a evidência relativa às respostas antes apresentadas.

Raciocínios desenvolvidos pelos alunos

Na questão a), os alunos obtiveram a resposta correta através do cálculo explícito da probabilidade pedida (27 alunos) ou da alusão implícita a essa razão (2 alunos), sem contudo a formularem sob a forma de fração (ver Figura 1).

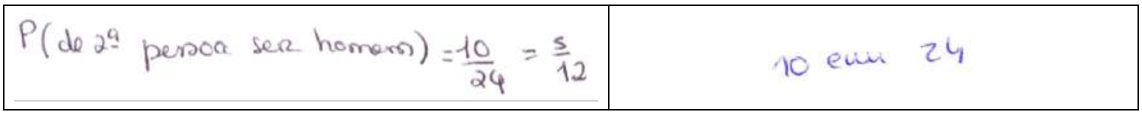


Figura 1. Respostas dos alunos A_{12} e A_{23} à questão a).

Já as respostas erradas basearam-se no cálculo da probabilidade de apenas um acontecimento (9 alunos) e do cálculo da probabilidade conjunta (3 alunos) em vez da probabilidade condicionada (ver Figura 2).

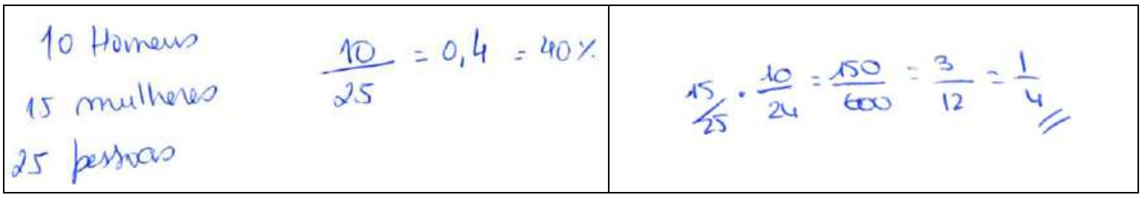


Figura 2. Respostas dos alunos A_9 e A_{33} à questão a).

No caso do cálculo da probabilidade de um apenas um acontecimento, embora não seja explícito nas respostas dos alunos, é possível que eles tenham ignorado a influência do acontecimento condicionante na probabilidade condicionada.

Finalmente, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências (ver Figura 3) e outro apresentou um valor de que não se percebe a sua origem.

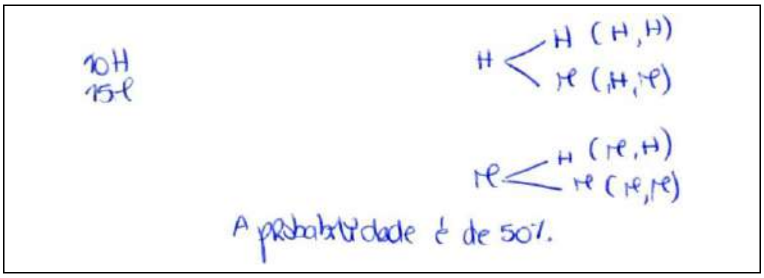


Figura 3. Resposta do aluno A_{35} à questão a).

Na questão b), a resposta correta foi referida por apenas dois alunos, que apresentaram apenas o valor da probabilidade pedida, talvez recorrendo à analogia entre as questões a) e b).

A maioria das respostas erradas resultou da determinação explícita da probabilidade de apenas um acontecimento (28 alunos, ver Figura 4) ou da alusão implícita a essa razão (2 alunos).

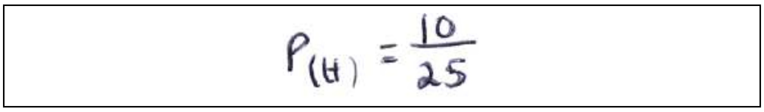
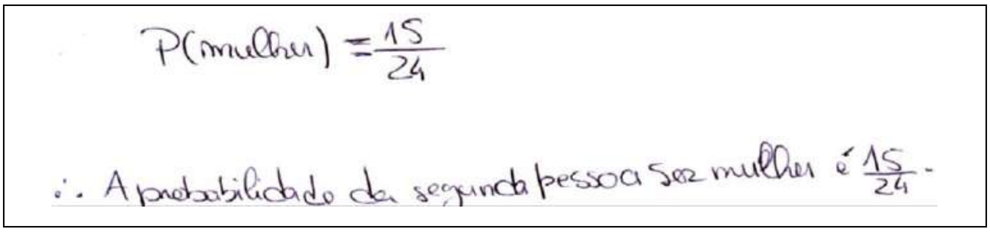

$P_{(H)} = \frac{10}{25}$

Figura 4. Resposta do aluno A_2 à questão b).

Conforme foi referido antes, estas respostas terão sido muito influenciadas pela inversão do eixo temporal, em que os alunos afirmam que a probabilidade de um acontecimento não pode ser influenciada pela realização de um acontecimento que ocorre depois.

Outros erros dos alunos resultaram da determinação da condicional transposta, isto é, calcular $P(2^{\text{a}}\,\text{pessoa}\,M \mid 1^{\text{a}}\,\text{pessoa}\,H)$ em vez de $P(1^{\text{a}}\,\text{pessoa}\,H \mid 2^{\text{a}}\,\text{pessoa}\,M)$ (3 alunos, ver Figura 5), e do cálculo da probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicionada (1 aluno), considerando eventualmente a reposição da primeira pessoa selecionada.


$P(\text{mulher}) = \frac{15}{24}$

$\therefore$ A probabilidade da segunda pessoa ser mulher é $\frac{15}{24}$.

Figura 5. Resposta do aluno A_{28} à questão b).

Por último, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências e outros três apresentaram um valor de que não se percebe a sua origem.

Na questão c), as respostas corretas basearam-se sempre no cálculo da probabilidade pedida (14 alunos). Destes alunos, apenas um incluiu na sua resposta a construção de um diagrama de árvore com as respetivas probabilidades (ver Figura 6).

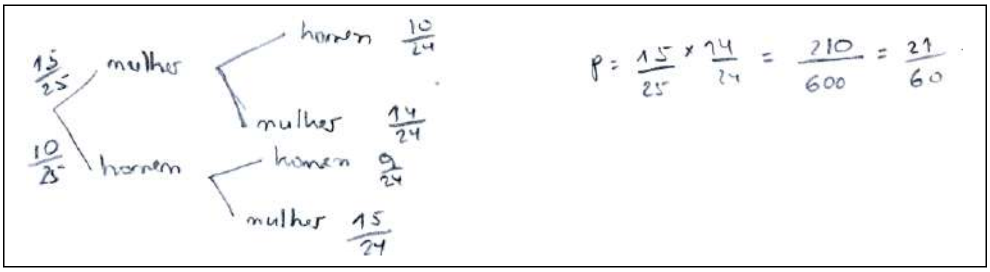


Figura 6. Resposta do aluno A_6 à questão c).

Alguns alunos apresentaram respostas erradas porque consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida nos casos favoráveis e possíveis ou apenas num desses casos (3 alunos, ver Figura 7), enquanto outros (12 alunos), para além de considerarem ou não a reposição da primeira pessoa selecionada, adicionaram as probabilidades (ver Figura 7).

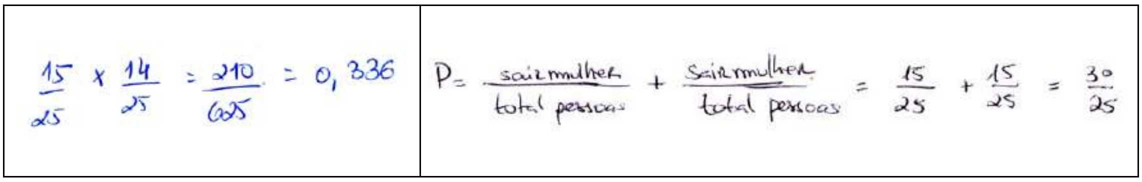


Figura 7. Respostas dos alunos A_9 e A_{11} à questão c).

Outros alunos determinaram as probabilidades dos acontecimentos de forma explícita (3 alunos) ou implícita (2 alunos) sem, contudo, as combinarem através de qualquer operação (ver Figura 8).

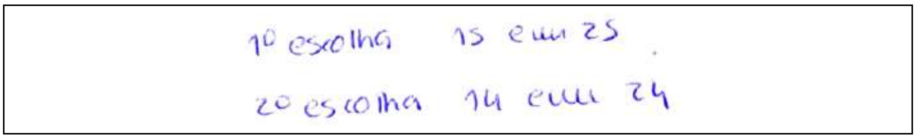


Figura 8. Respostas do aluno A_{23} à questão c).

Ainda outros alunos determinaram a probabilidade de apenas um acontecimento de forma explícita (3 alunos) ou implícita (1 aluno), como se exemplifica na Figura 9.

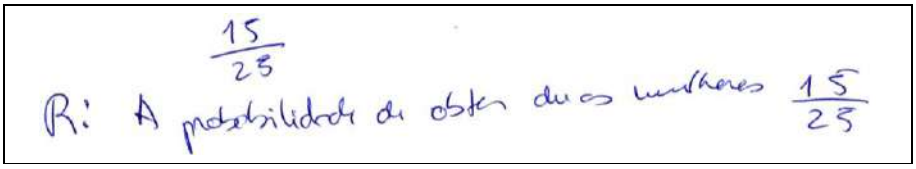


Figura 9. Respostas dos alunos A_{24} à questão c).

Por fim, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências e outros dois apresentaram um valor de que não se percebe a sua origem.

Na questão d), todos os alunos que reponderam corretamente (9 alunos) fizeram-no a partir do cálculo da probabilidade pedida (ver Figura 10).

$$P = \frac{15}{25} \times \frac{10}{24} + \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} =$$
$$= \frac{150}{600} + \frac{150}{600} = \frac{300}{600} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Figura 10. Respostas dos alunos A_{36} à questão d).

No caso das respostas erradas, alguns alunos consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida (2 alunos, ver Figura 11) e outros adicionaram as probabilidades (1 aluno, ver Figura 12).

$$P(\text{1 homem e uma mulher}) = \frac{10}{25} \times \frac{15}{25} + \frac{15}{25} \times \frac{10}{25} = \frac{150}{625} + \frac{150}{625} = \frac{300}{625}$$

Figura 11. Respostas do aluno A_{30} à questão d).

$$P(H \text{ e } M) \to \frac{10}{25} + \frac{15}{24}$$
$$P(M \text{ e } H) \to \frac{15}{25} + \frac{10}{24}$$
$$P(H \text{ e } M \text{ por qualquer ordem}) = \left(\frac{10}{25} + \frac{15}{24}\right) + \left(\frac{15}{25} + \frac{10}{24}\right)$$

Figura 12. Respostas do aluno A_{34} à questão d).

Seis alunos determinaram as probabilidades dos acontecimentos envolvidos, mas falharem em combiná-las, total ou parcialmente, para obter a probabilidade pedida, tendo dois desses alunos recorrido também à operação de adição (ver Figura 13).

$$P(\text{ser homem e mulher}) = \frac{10}{25} + \frac{15}{24} \text{ ou } \frac{15}{25} + \frac{10}{24}$$

Figura 13. Resposta do aluno A_{40} à questão d).

Muitos alunos (18) falharam em constatar que a ordem de realização dos acontecimentos conduz a possibilidades distintas, considerando apenas uma das duas possibilidades. Entre estes alunos, 11 combinaram as probabilidades dos acontecimentos (ver Figura 14) e 5 destes consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida.

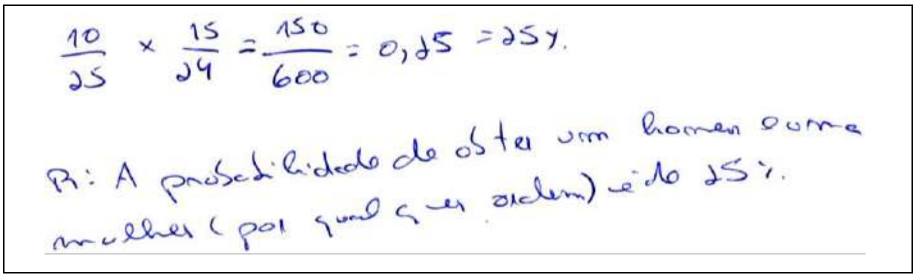


Figura 14. Resposta do aluno A_{16} à questão d).

Já os restantes 7 alunos que não consideraram a ordem calcularam as probabilidades dos acontecimentos envolvidos, de forma explícita (5) ou implícita (2), mas falharam em combinar essas probabilidades para obterem a probabilidade pedida e quase todos (6) admitiram a reposição da primeira pessoa selecionada (ver Figura 15).

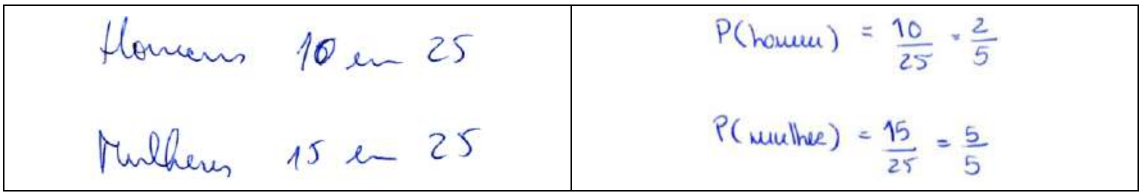


Figura 15. Resposta dos alunos A_7 e A_8 à questão d).

Finalmente, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências e outro apresentou um valor de que não se percebe a sua origem.

Conclusão

Quer na probabilidade condicionada quer na probabilidade conjunta, os alunos revelaram muitas dificuldades na determinação das respetivas probabilidades.

Entre as duas questões de probabilidade condicionada, destacam-se dificuldades muito acentuadas na questão de inversão do eixo temporal (questão b), em que cerca de dois em cada três alunos determinaram a probabilidade da primeira pessoa ser homem, ignorando a influência do acontecimento condicionante. Assim, ainda que implicitamente, estes alunos admitiram que a probabilidade de um acontecimento não é afetada pela ocorrência de um acontecimento que ocorre depois (Falk, 1986), determinando, em consequência, a probabilidade do acontecimento condicionado independentemente do acontecimento condicionante.

Também na outra questão de probabilidade condicionada (questão a), na qual cerca de dois em cada três alunos responderam corretamente, o erro mais frequente consistiu no cálculo da probabilidade de apenas um acontecimento, ignorando também o acontecimento condicionante.

Além das dificuldades referidas, embora em menor percentagem, nas duas questões de probabilidade condicionada, alguns alunos determinaram a probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicionada (Pollatsek et al., 1987) e outros determinaram a condicional transposta (Falk, 1986).

No caso das duas questões de probabilidade conjunta, a maior dificuldade experimentada pelos alunos na segunda (questão d) resultou de eles não considerarem que a ordem de realização dos acontecimentos conduz a possibilidades distintas.

Para além do erro de ordem, ao longo das duas questões de probabilidade conjunta, cerca de um em cada três alunos adicionaram probabilidades quando deviam multiplicá-las (Watson & Moritz, 2002), consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida e determinaram probabilidades de forma explícita e implícita sem as combinarem, total ou parcialmente, para obterem a probabilidade pedida. Em muito menor percentagem, alguns alunos determinaram a probabilidade de apenas um dos acontecimentos (9%).

Face ao facto de que estes futuros educadores e professores do ensino básico terão de ensinar probabilidades às crianças, globalmente, os resultados do presente estudo não são muito otimistas por duas ordens de razões: primeiro, embora os itens não envolvam raciocínios elaborados, como a necessidade de usar técnicas de contagem *standard* (arranjos, permutações ou combinações), e apresentem potencial para mostrarem a compreensão probabilística dos respondentes, independentemente de eles terem ou não de ensinar às crianças tais conceitos, eles obtiveram percentagens de respostas corretas muito baixas; e, segundo, os raciocínios subjacentes às respostas dos alunos, sobretudo em relação às respostas erradas, mostram que muitos deles têm uma compreensão muito limitada, e frequentemente envolvendo ideias erradas, dos conceitos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta.

Assim, o sucesso na introdução de conteúdos de probabilidades a estas crianças aconselha um reforço de formação dos educadores e professores implicados no seu ensino e, eventualmente, de um tipo de formação distinto daquele que receberam, valorizando mais as ideias e menos os cálculos. No caso da probabilidade condicionada, Borovcnik (2012) defende que o seu ensino deve privilegiar uma perspetiva teórica e multifacetada em vez de uma perspetiva simplificada através da simulação.

Referências bibliográficas

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 5-27.

Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto, & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 4(3), 131-162.

Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics.* Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, 10(2), 3-32.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Falk, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Petrers.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1-24.

Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Lecoutre, M., & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics,* 19(3), 357-368.

Ministério da Educação (2007). *Programa Ajustado de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191-214). New York, NY: Springer.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255-269.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.

Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 59-84.

Conflitos semióticos na resolução de um problema de testes de hipóteses para a proporção por estudantes do ensino superior

Gabriela Gonçalves[1], *José António Fernandes*[2], *Maria Manuel Nascimento*[3]
[1] Instituto Superior de Engenharia do Porto, gmc@isep.ipp.pt
[2] Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt
[3] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, mmsn@utad.pt

Resumo. *Neste trabalho analisamos as resoluções de 223 alunos da Licenciatura de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia do Porto, no letivo 2012-2013, quando confrontados com um problema de testes de hipóteses para a proporção. Tendo por referência teórica o Enfoque Ontosemiótico do conhecimento e do ensino da matemática, estudaram-se os conhecimentos matemáticos implícitos nas respostas a partir dos objetos e processos matemáticos utilizados, enfatizando-se a relação expressão – conteúdo das funções semióticas como meio de caracterizar possíveis conflitos semióticos. Em termos de resultados, para além da elevada percentagem de alunos que não responderam ou que apresentaram respostas sem sentido, salienta-se a existência de vários conflitos semióticos associados à formulação das hipóteses, ao cálculo da estatística do teste e à tomada de decisão.*

Palavras-chave: aprendizagem da Estatística; inferência; testes de hipóteses para a proporção; Enfoque Ontosemiótico; ensino superior.

1. Introdução

Nas últimas décadas, o ensino da estatística tem sido integrado, cada vez mais, nas escolas e nas universidades, não só pelo seu caráter instrumental, mas também pela importância que o desenvolvimento do raciocínio estatístico tem numa sociedade caracterizada pela proliferação de informação e a necessidade de tomar decisões em ambientes de incerteza. Em Portugal a Estatística tem vindo a impor-se de forma consistente nos programas escolares, sendo atualmente estudada em todos os níveis de ensino básico e secundário (Fernandes, Carvalho & Correia, 2011; Ministério da Educação, 2007).

Os conteúdos estatísticos relativos à inferência têm uma ampla aplicação. Em Portugal, a inferência estatística, embora seja abordada no programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (DES, 2001), com base em intervalos de confiança, é um tema tratado quase exclusivamente nas unidades curriculares de Estatística das licenciaturas do ensino superior.

Por outro lado, é um tema em que os alunos apresentam muitas dificuldades na sua compreensão porque estão em jogo muitos conceitos abstratos e relações, tais como distribuição amostral, nível de significância, valor de prova, etc. (Vallecillos, 1996; Vallecillos, Batanero & Godino, 1992; Vera, Díaz & Batanero, 2011).

No nosso país, na literatura educacional aparecem poucos estudos sobre a aprendizagem da inferência estatística, apesar de constituir um tópico relevante para a compreensão de boa parte da literatura científica e técnica em várias áreas do conhecimento, como a engenharia, as ciências, a matemática e as ciências sociais. Assim, o estudo dos conflitos semióticos surgidos na resolução de um problema de testes de hipóteses para a proporção, por estudantes do ensino superior, é visto como um contributo para colmatar esse vazio.

2. Referencial teórico

2.1. Investigações prévias sobre testes de hipóteses

Uma forma de inferência estatística são os testes de hipóteses, cujo objetivo é o de verificar se dados amostrais (ou estimativas obtidas a partir deles) são ou não compatíveis com determinadas populações (ou com valores previamente fixados dos parâmetros populacionais correspondentes). O resultado do teste corresponde a uma das duas respostas possíveis: rejeitar ou não rejeitar uma hipótese estatística. Em ambos os casos corre-se o risco de errar, sendo uma das características dos testes de hipóteses precisamente a de permitir controlar ou minimizar esse risco (Guimarães & Cabral, 2007).

O teste de hipóteses envolve um procedimento que requer um raciocínio indutivo (Link, 2002; Lopes, 2007) pois a decisão a tomar baseia-se no facto de uma dada hipótese ser ou não suportada pela informação fornecida pelos dados de uma amostra.

De acordo com Batanero (2001), os testes de hipóteses, apesar de possuírem um campo específico de aplicação, são a área da inferência estatística provavelmente menos compreendida e a mais confundida, tanto por estudantes como por investigadores. As dificuldades que os alunos demonstram na compreensão dos testes de hipóteses têm sido objeto de diversos trabalhos de investigação, das quais destacamos seguintemente alguns.

Vallecillos e Batanero (1997) realizaram um estudo sobre as dificuldades de compreensão de estudantes universitários em alguns conceitos-chave dos testes de hipóteses, tais como: nível de significância; hipótese nula e alternativa; parâmetro estatístico e a interpretação (lógica) de um teste de hipóteses. Para tal, entrevistaram 7 estudantes universitários do 2º ano do curso de Medicina, tendo-lhes sido pedida também a resolução de dois problemas de teste de hipóteses. O estudo evidenciou que os alunos, embora tenham conhecimento de que a hipótese nula deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada, dificilmente conseguem enunciá-la de modo correto e todos eles cometeram erros que evidenciam a não compreensão no que se refere à relação entre distribuição de probabilidade, as regiões de aceitação e o nível de significância.

Link (2002) analisou os testes realizados por 295 estudantes de duas disciplinas do curso de Ciências Biológicas com o objetivo de identificar os erros cometidos pelos alunos em diferentes etapas da aplicação dos testes de hipóteses: na formulação das hipóteses; na determinação da estatística do teste e do valor crítico; no cálculo da estatística do teste; na comparação da estatística do teste com o valor crítico; na determinação do valor de prova e na decisão tomada. As maiores dificuldades encontradas neste estudo residiram na determinação da estatística do teste e do valor crítico, com 47% de respostas incorretas, seguindo-se 39,8% de alunos que erraram na determinação do valor crítico, 31,6% na formulação das hipóteses (não identificação do parâmetro correto, valor incorreto do parâmetro e erro de sinal), 26,8% na determinação do valor de prova, 25,8% no cálculo da estatística do teste, 16,3% na decisão, 4,1% na escolha da estatística do teste e 3,1% apresentou uma resposta sem sentido.

Vera, Díaz e Batanero (2011) realizaram um estudo consistindo na análise das respostas de 224 alunos da Licenciatura de Psicologia da Universidade de Huelva a uma pergunta aberta, na qual os alunos teriam que formular as hipóteses para um problema de teste de hipóteses. Usando como marco teórico o "Enfoque Ontosemiótico" do conhecimento matemático (Godino, Batanero & Font, 2008), analisaram-se os conhecimentos matemáticos implícitos nas respostas através dos objetos e processos matemáticos utilizados, e tendo em vista caracterizar quer as respostas adequadas quer conflitos semióticos.

Através da análise semiótica efetuada, em termos de conflitos semióticos, verificou-se confundir entre teste bilateral e unilateral (10,3% dos alunos), reconhecer incorretamente um teste de comparação de médias para modelar o problema (12,9% dos alunos), enunciar a hipótese alternativa pontual (7,7% dos alunos), definir hipóteses não complementares (8,7% dos alunos), enunciar as hipóteses em função da estatística amostral (28,6% dos alunos) e confundir entre a estatística amostral e o parâmetro correspondente à média da população (25% dos alunos). Assim, do estudo realizado destaca-se que o conflito mais frequente consistiu na confusão entre estatística e parâmetro, seguindo-se o não reconhecimento de que a estatística é uma variável aleatória, tendo os alunos também evidenciado dificuldades em formular as hipóteses e identificar a população a que tinham de aplicar a inferência, bem como em diferenciar entre testes unilaterais e bilaterais.

2.2. Marco teórico

No estudo recorreremos ao Enfoque Ontosemiótico (EOS) do conhecimento e do ensino da matemática, que Godino e colaboradores têm vindo a desenvolver (e.g., Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2008), para analisar as resoluções dos alunos.

No EOS assume-se a complexidade dos entes matemáticos, sendo estabelecida uma ontologia de objetos matemáticos primários, a qual permite uma análise detalhada e abrangente das práticas mobilizadas nos processos de resolução de problemas: *situações-problema* – são aplicações extramatemáticas, exercícios, problemas, ações que induzem uma atividade matemática (problemas de comparação de duas ou mais populações, de estimação de parâmetros ou da tomada de decisões); *linguagens* – são termos, expressões, notações, gráficos que se utilizam para representar os dados de um problema (os símbolos usados para denotar os parâmetros μ e σ ou as hipóteses nula H_0 e alternativa H_1); *conceitos* – são formulações introduzidas mediante definições e descrições (população e amostra, estatística e parâmetro, região crítica e região de aceitação); *propriedades* (proposições) – são enunciados sobre relações ou propriedades dos conceitos que se utilizam para resolver problemas matemáticos (as hipóteses nula e alternativa são complementares); *procedimentos* – são algoritmos, operações, técnicas de cálculo que os alunos aplicam para a resolução do problema (os cálculos que os alunos têm de efetuar para definir a região crítica e a região de aceitação); *argumentos* – são enunciados usados para justificar ou explicar a outra pessoa as proposições e procedimentos ou a solução dos problemas, que podem ser dedutivos, formais ou informais.

Na atividade matemática intervêm combinações destes objetos primários, formando configurações de objetos, e diferentes processos matemáticos envolvendo esses objetos, descritos nas seguintes facetas duais: *pessoal – institucional*, consoante emerge das práticas de uma pessoa ou de um grupo de pessoas que partilham o mesmo tipo de situações-problema; *ostensivo – não ostensivo*, na medida em que podem ser usados nas práticas públicas a partir das suas representações ou imaginados ou pensados independentemente das suas representações; *extensivo – intensivo*, ao poderem referir-se a um caso específico ou a uma classe mais geral; *unitário – sistémico*, ao serem usados como entidades unitárias ou como sistemas; *expressão – conteúdo*, que constituem o antecedente e consequente de funções semióticas.

As funções semióticas, entendidas com relações entre conjuntos, envolvem três componentes: *expressão*, que constitui o objeto inicial ou significante; *conteúdo*, que é o objeto final ou significado; e *regra de correspondência*, que é o código interpretativo que regula a relação entre expressão e conteúdo. Ora esta dualidade *expressão – conteúdo* permite realizar análises semióticas das produções escritas dos alunos, destacando-se a identificação de conflitos semióticos entre os significados institucional e pessoal, tal como se efetuou no presente estudo.

3. Metodologia

Neste texto estudam-se as dificuldades de alunos do ensino superior na formulação, cálculo e interpretação de um problema de teste de hipóteses para a proporção (ver Figura 1). Para tal, efetuaram-se análises semióticas das resoluções escritas dos alunos recorrendo ao Enfoque Ontosemiótico de Godino e colaboradores (e.g., Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2008).

> Com o intuito de decidir sobre a aquisição de tempo de antena num programa de TV de grande audiência, a empresa MOUSE decidiu recolher uma amostra de 100 pessoas. No inquérito efetuado, 75 pessoas declararam ver o programa assiduamente, 10 de vez em quando e os restantes declararam nunca ver.
> Suponha que a empresa MOUSE só adquirirá o referido tempo de antena se for credível a hipótese de que a percentagem de pessoas que vê assiduamente o programa é de, pelo menos, 80%.
> Considerando o nível de significância $\alpha = 0{,}05$, a empresa deve adquirir ou não o referido tempo de antena?

Figura 1. Problema proposto aos alunos no questionário.

O problema aqui analisado é uma pergunta de um questionário, formado por um total de 12 perguntas sobre testes de hipóteses, aplicado aos alunos do 1º ano que frequentavam a disciplina de Matemática Computacional (MATCP), no ano letivo 2012-2013, do curso de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia do Porto. Dos 263 alunos que frequentavam a disciplina, responderam ao questionário 223 nas suas aulas teórico-práticas da disciplina de MATCP, na presença dos docentes respetivos, e os alunos dispuseram de 1 hora e 30 minutos para lhe responder, o que se revelou um tempo suficiente. Destes alunos, 22 eram do sexo feminino e 201 do sexo masculino. Além disso, dos alunos que responderam apenas 45 estavam a repetir a disciplina.

A resolução deste problema foi realizada na última aula do semestre (junho de 2013), por escrito e sem consulta, imediatamente depois de os alunos terem estudado os testes de hipóteses. A abordagem do tema realizou-se ao longo de 1 aula teórica e 2 aulas teórico-práticas, cada uma com a duração de 2 horas, onde os alunos acompanharam o professor e tiveram a oportunidade de resolver exercícios e problemas para consolidação dos conceitos usando papel e lápis e, esporadicamente, o software R.

Depois de recolhidos os dados, foi feita uma análise qualitativa mediante um processo de comparação de respostas semelhantes entre si e recorrendo ao Enfoque Ontosemiótico do conhecimento e do ensino da matemática (Godino, Batanero & Font, 2008) de forma a podermos chegar a uma categorização, cujas categorias são apresentadas na próxima secção de apresentação dos conflitos semióticos.

4. Conflitos semióticos nas resoluções dos alunos

Seguidamente descrevem-se os conflitos semióticos exibidos pelos alunos nas respostas incorretas.

4.1. Formular as hipóteses corretas, errar o cálculo da estatística do teste e decidir corretamente

Estes alunos utilizam a simbologia adequada mas trocam na fórmula da estatística de teste o parâmetro amostral com o populacional e não tiram conclusões mediante os dados que têm. Na Tabela 1 mostra-se um exemplo desta situação.

Tabela 1. Análise semiótica de um exemplo desta categoria

Expressão	Conteúdo
Determinação da estatística do teste e da região crítica: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_c = -1{,}645$ $RC_z = \left]-\infty, -1{,}645\right]$ $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}80}{\sqrt{\dfrac{0{,}75(1 - 0{,}75)}{100}}} = -1{,}15$	- Identifica o valor crítico através do nível de significância e do teste a usar (particularização de conceito). - Identifica a região crítica (particularização de conceito). - Utiliza a notação correta para representar a estatística de teste (linguagem e conceito). - Aparece um conflito quando troca o parâmetro populacional pelo amostral (conflito num processo de interpretação).
Tomada de decisão: A empresa deve adquirir o tempo de antena. Não se rejeita H_0.	- Decide corretamente verificando se a estatística de teste está ou não dentro da região crítica RC_z (propriedade).

4.2. Formular as hipóteses corretas, calcular corretamente a estatística do teste e decidir erradamente

Estes alunos realizam todos os passos corretos da aplicação do teste de hipóteses mas não interpretam os dados obtidos para tomarem a decisão correta. Na Tabela 2 mostramos um exemplo para ilustrar esta situação.

Tabela 2. Análise semiótica de um exemplo desta categoria

Expressão	Conteúdo
Determinação da estatística do teste e da região crítica: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_c = -1{,}645$ $RC_z = \left]-\infty, -1{,}645\right]$ $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}80}{\sqrt{\dfrac{0{,}80(1-0{,}80)}{100}}} = -1{,}25$	- Identifica o valor crítico através do nível de significância e do teste a usar (particularização de conceito). - Identifica a região crítica (particularização de conceito). - Utiliza a notação correta para representar a estatística de teste (linguagem e conceito). - Calcula a estatística de teste (conceito e procedimento).
Tomada de decisão: Como $z_0 \in RC_z$ não se deve rejeitar a hipótese nula. A empresa deve adquirir o tempo de antena.	- Aparece um conflito ao não saber interpretar os dados obtidos para a tomada de decisão. O aluno diz que pertence à região crítica e depois conclui que não se deve rejeitar (particularização incorreta de uma propriedade).

Nas categorias que se seguem apresentamos a análise semiótica apenas para a formulação das hipóteses, não fazendo a restante análise para os outros passos da resolução da alínea uma vez que estão resolvidos em função do teste que escolheram (teste errado).

4.3. Formular as hipóteses sobre a proporção populacional num teste unilateral à direita

Nesta categoria classificaram-se todos os alunos que definem as hipóteses sobre a proporção populacional, mas definem um teste unilateral à direita. Estes alunos utilizam a simbologia adequada tanto para a hipótese nula como para a alternativa, o parâmetro escolhido é o correto e o valor sobre o qual se baseia a conjetura também é correto. Na Tabela 3 ilustra-se um exemplo deste tipo de resposta.

Tabela 3. Análise semiótica de um exemplo desta categoria

Expressão	Conteúdo
Formulação das hipóteses e seleção do tipo de teste: $H_0: p = 0{,}80$ $H_1: p > 0{,}80$	- O aluno lê o enunciado e identifica corretamente que o parâmetro a testar é a proporção populacional; também identifica corretamente o valor hipotético do parâmetro e o problema como sendo um teste para a proporção. - Discrimina entre hipótese nula e alternativa e

	reconhece que a hipótese nula é pontual, expressando-a mediante a igualdade. - Expressa as hipóteses em notação adequada (linguagem e particularização de um conceito). - Reconhece que a hipótese nula é incompatível com a que se quer provar (propriedade). - Aparece um conflito de interpretação de enunciado ao traduzir a expressão matemática na notação $H_1 : p > 0{,}80$, o que conduz a um teste unilateral à direita (o aluno reconhece um campo de problemas). - Reconhece que a hipótese alternativa é a que interessa provar, porque estabelece o sinal $>$ em função dos dados (particularização de uma propriedade). - Expressa as duas hipóteses em notação adequada (conceito e linguagem).

4.4. Formular a hipótese nula a partir da proporção amostral num teste unilateral à direita

Nesta categoria agrupamos os alunos que formulam a hipótese nula a partir de dados amostrais em vez de populacionais e não cobrindo o espaço paramétrico. Na Tabela 4 apresenta-se a análise semiótica da resolução de um aluno.

Tabela 4. Análise semiótica de um exemplo desta categoria

Expressão	Conteúdo
Formulação das hipóteses e seleção do tipo de teste: $H_0 : p = 0{,}75$ $H_1 : p > 0{,}80$	- O aluno realiza uma interpretação incorreta do enunciado, assumindo que a proporção de pessoas que vê assiduamente o programa é o valor populacional em vez do amostral (processo incorreto de interpretação). - Um primeiro conflito é a confusão entre população e amostra (confusão de conceitos). - O segundo conflito está relacionado com o anterior e consiste em confundir a proporção amostral com a populacional (descriminação inadequada de conceitos). - Tudo isto causa um novo conflito ao confundir o teste adequado (teste sobre uma proporção) com outro inadequado (teste para a proporção unilateral à direita) (confusão de campo de problemas).

O aluno não interpreta corretamente o enunciado em relação às duas hipóteses nula e alternativa, aparecendo o primeiro conflito ao tomar como valor para a hipótese nula o valor da proporção amostral e o segundo ao utilizar para hipótese alternativa o teste unilateral à direita em vez de à esquerda. Esta confusão entre proporção amostral e populacional é descrita, de uma forma mais geral entre estatística e parâmetro, por Schuyten (1991).

4.5. Formular as hipóteses nula e alternativa a partir da proporção amostral num teste unilateral à direita

Nesta categoria colocamos todos os alunos que estabelecem ambas as hipóteses usando o valor da proporção amostral. No exemplo da Tabela 5, o aluno interpreta o enunciado identificando que se trata de um teste para a proporção, escolhendo o teste unilateral à direita em vez de à esquerda. Formula as hipóteses nula e alternativa de forma complementar, cobrindo o espaço paramétrico, não é capaz de identificar o valor do parâmetro populacional a partir do enunciado e usa uma notação adequada.

Tabela 5. Análise semiótica de um exemplo desta categoria

Expressão	Conteúdo
Formulação das hipóteses e seleção do tipo de teste: $H_0 : p = 0{,}75$ $H_1 : p > 0{,}75$	- O aluno lê o enunciado (processo de interpretação) e identifica corretamente que o parâmetro a testar é a proporção (particulariza ao problema os conceitos de parâmetro, amostra e proporção amostral). - Identifica o problema como um teste de hipóteses para a proporção (reconhece um campo de problemas). - Conflito ao confundir o teste adequado (teste sobre uma proporção) com outro inadequado (teste para a proporção unilateral à direita) (confusão de campo de problemas). - Conflito ao não identificar o valor hipotético do parâmetro (particularização de um conceito). - Conflito ao formular as hipóteses usando o parâmetro amostral em vez do populacional. - Discrimina entre hipótese nula e alternativa (reconhece as propriedades matemáticas associadas). - Reconhece que a hipótese nula é pontual (aplica uma propriedade); expressa-a mediante uma igualdade (processo de representação); reconhece que a hipótese nula é incompatível com a que se quer provar (propriedade) e que as hipóteses devem ser complementares.

4.6. Outra

Nesta categoria incluem-se as respostas sem sentido, designadamente, em que não são enunciadas as hipóteses, o parâmetro a estudar não é a proporção, é utilizado o teste para a diferença de proporções e é estabelecido um teste bilateral.

Em síntese, os erros observados neste grupo de alunos consistem no cálculo errado da estatística do teste, na tomada da decisão errada, na confusão entre o teste unilateral à direita e o teste unilateral à esquerda e hipóteses que não cobrem o espaço paramétrico.

Uma vez exemplificados os tipos de conflitos semióticos decorrentes das resoluções dos alunos, na Tabela 6 apresentam-se as frequências e percentagens de respostas para cada uma das categorias.

Pela Tabela 6 observamos que a resposta mais frequente é a da categoria *outra*, em que os alunos não foram capazes de interpretar corretamente o enunciado do problema e a partir dele estabelecer e aplicar o teste de hipóteses adequado à sua resolução. Portanto, estes alunos não identificaram o campo de problemas, não souberam reconhecer o valor hipotético do parâmetro, não formularam as hipóteses ou não usaram uma notação adequada na resolução do problema.

Tabela 6. Frequência (percentagem) de respostas de cada categoria

Categoria	Frequência (%)
Respostas corretas	23 (10,3)
Formular as hipóteses corretas, errar o cálculo da estatística do teste e decidir corretamente	13 (5,8)
Formular as hipóteses corretas, calcular corretamente a estatística do teste e decidir erradamente	9 (4,0)
Formular as hipóteses sobre a proporção populacional num teste unilateral à direita	43 (19,3)
Formular a hipótese nula a partir da proporção amostral num teste unilateral à direita	5 (2,2)
Formular as hipóteses nula e alternativa a partir da proporção amostral num teste unilateral à direita	30 (13,5)
Outra	52 (23,3)
Não respostas	48 (21,5)
Total	223 (100)

A percentagem destas respostas, 23,3%, é preocupante uma vez que estes alunos parecem não ter ideia do que é um teste de hipóteses ou ter uma compreensão muito limitada. Esta percentagem é menor do que a obtida por Vallecillos (1995) numa pergunta sobre a formulação de hipóteses, em que obteve 41,9%, e por Vera, Díaz e Batanero (2011), também no mesmo tipo de problema, em que obtiveram 50,5%.

Seguidamente, salienta-se a pequena percentagem de alunos que resolve corretamente o problema (10,3%) e aqueles que, apesar de terem formulado corretamente as hipóteses, erraram no cálculo da estatística ou na decisão a tomar (9,8%). Estes alunos compreendem que as hipóteses se formulam em função de parâmetros, discriminando adequadamente os conceitos de estatística e parâmetro.

Um outro grupo de alunos (19,3%), tal como os anteriores, formula as hipóteses em função dos parâmetros, reconhece que a hipótese nula é contrária à que se quer provar, usa notação adequada mas define um teste unilateral à direita em vez de à esquerda.

Um outro grupo de alunos faz esta descriminação, mas usa o valor amostral para formular as hipóteses (13,5%), erro que foi assinalado por Schuyten (1991). Em menor percentagem (2,2%), os alunos usaram o valor amostral apenas na hipótese nula.

Finalmente, uma considerável percentagem de alunos (21,5%) não apresentou qualquer resposta, o que pode dever-se, para além da dificuldade inerente do tema, ao facto ter sido o último a ser lecionado, repercutindo-se no pouco tempo de exploração nas aulas e de estudo dos alunos.

5. Conclusões

Da análise realizada, conclui-se que um dos conflitos semióticos que aparece num maior número de respostas é a confusão entre teste unilateral à esquerda e teste unilateral à direita (19,3%). No estudo de Vera, Díaz e Batanero (2011) verificou-se também que 10,3% das respostas dos alunos exibiam a confusão entre teste unilateral e bilateral. Embora este conflito não coincida com o identificado no presente estudo, ambos envolvem o conceito de ordem e revelam a dificuldade de tradução de enunciados verbais em linguagem simbólica.

Um outro conflito semiótico, também com um número de respostas elevado, refere-se à confusão entre estatística e parâmetro, assim como ao não reconhecimento de que a estatística é uma variável aleatória. Esta dificuldade repercutiu-se na formulação da hipótese nula ou de ambas as hipóteses. Ainda no caso da formulação das hipóteses, não foi detetada a confusão entre hipótese nula e alternativa que Vallecillos (1995, 1999) encontrou no seu estudo (em 13% dos alunos).

O uso de notação inadequada para representar parâmetros e estatísticas foi um erro recorrente na formulação das hipóteses (não identificação do parâmetro correto, valor incorreto do parâmetro e erro de sinal), evidenciando que, em geral, os alunos não reconhecem a necessidade de fazer a distinção entre valores provenientes da população e da amostra. Nos estudos de Albert (1995) e Link (2002) também foi encontrado este erro, tendo os alunos demonstrado dificuldade em reconhecer o parâmetro a ser testado na inferência estatística.

Comparativamente com os estudos aqui revistos, no presente estudo destaca-se a identificação de conflitos semióticos decorrentes das produções dos alunos nas várias etapas de resolução de um problema sobre testes de hipóteses para a proporção. Especificamente, no caso da estatística do teste e da tomada de decisão, verificou-se a determinação errada do valor da estatística do teste e a tomada de decisão correta, bem como o cálculo correto da estatística do teste e a tomada de decisão errada.

Em resumo, este trabalho aponta no sentido da necessidade de rever a forma de ensino da inferência estatística, e mais concretamente na interpretação do problema, na formulação das hipóteses estatísticas e do nível de significância. Alguns destes erros podem provocar dificuldades na resolução dos problemas de testes de hipóteses. Por exemplo, o facto de se formularem as hipóteses para um teste unilateral à direita em vez de à esquerda fará com que as regiões de aceitação e rejeição sejam mal construídas e, portanto, pode levar o aluno a tomar a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese de forma incorreta.

É imprescindível ajudar os alunos na construção do seu raciocínio inferencial, começando como propõem Ben-Zvi e Garfield (2005) com uma nova abordagem para o ensino da estatística, que deve dar mais destaque ao raciocínio, pensamento e literacia estatística. Segundo eles, isso significa uma transformação do ensino da estatística com base na probabilidade para um ensino centrado em dados, encorajando o uso de dados reais e de tarefas de grupo como forma de melhorar as habilidades colaborativas e comunicativas por meio de discussões estatísticas. Por outro lado, Rossman (2008) propõe que se explorem atividades informais de inferência antes de se iniciar a aprendizagem formal dos testes de hipóteses.

Para além das sugestões referidas, as dificuldades reveladas pelos alunos no presente estudo podem ser exploradas para que possa ser delineado um melhor ensino dos testes de hipóteses, para além de motivar a realização de outros estudos.

Referências bibliográficas

Albert, J. (1995). Teaching inference about proportions using Bayes and discrete models. *Journal of Statistics Education, 3*(3), n.p.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2005). Research on Statistical Literacy, Reasoning, Thinking: Issues, Challenges and Implications. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The Challenge *of*

Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking (pp. 397-409). Netherlands: Springer.

DES (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. ME, Departamento do Ensino Secundário.

Fernandes, J. A., Carvalho, C., & Correia, P. F. (2011). Contributos para a caracterização do ensino da Estatística nas escolas. *Bolema*, *24*(39), 585-606.

Godino, D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*(2), 1-32.

Guimarães, R., & Cabral, J. (2007). *Estatística* (2ª ed.). Lisboa: McGraw-Hill.

Link, W. (2002). An examination of student mistakes in setting up hypothesis testing problems. *Proceedings of the Louisiana-Mississipi Section of the Mathematical Association of America*. Louisiana: Spring.

Lopes, M. (2007). Conceitos básicos de testes de hipóteses através de aulas investigativas. *Encontro Nacional de Educação Matemática, IX*. Belo Horizonte, Brasil.

Ministério da Educação (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa, Portugal: DGIDC.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Schuyten, G. (1991).Statistical thinking in psychology and education. In D. Vere-Jones (Eds.), *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

Vallecillos, A. (1995). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(3), 53-81.

Vallecillos, A. (1996). Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas. Recife. Comares.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. *International Statistical Institute, 52nd Session*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada, Spain.

Vallecillos, A., Batanero, C., & Godino, J. D. (1992). Student`s understanding of the significance level on statistical tests. In W. Geesling & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the XVII Conference on the Psychology of Mathematics Education*, *4*(pp.271-378). Universidad de Valencia. Spain.

Vallecilos, A., & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(1), 29-48.

Vera, O., Díaz, C., & Batanero C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *Unión*, *27*, 41-61.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Condução de tarefas de organização e tratamento de dados no 3.º ano de escolaridade

Luciano Veia
Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve
lveia@ualg.pt

Resumo. *Nesta comunicação, analisam-se as práticas de condução de tarefas de organização e tratamento de dados duma professora do 3.º ano. O estudo segue uma metodologia de investigação de natureza interpretativa e abordagem qualitativa na modalidade de estudo de caso. Os resultados preliminares apontam para a exploração de tarefas de acordo com as fases do ciclo investigativo estatístico em situações do quotidiano dos alunos. Na condução das tarefas, a professora revela particular atenção com cada uma das fases, com incidência nos cuidados manifestados com a recolha de dados e na preocupação com a participação dos alunos na apresentação de conclusões.*

Palavras-chave: práticas profissionais; organização e tratamento de dados; tarefas; comunicação.

Introdução

Durante muitos anos, o ensino da Estatística valorizou essencialmente os procedimentos ligados ao cálculo e os aspetos técnicos, desvalorizando aspetos fundamentais do trabalho estatístico como a recolha, análise e interpretação de dados. No entanto, orientações curriculares mais recentes passaram a recomendar o trabalho estatístico na sala de aula, valorizando os processos e capacidades promotoras do desenvolvimento da literacia estatística e sugerindo o desenvolvimento de investigações estatísticas ligadas à resolução de problemas do quotidiano dos alunos (Henriques & Oliveira, 2012). Em particular, recomenda-se a inclusão da Estatística desde os primeiros anos de escolaridade, proporcionando o desenvolvimento de competências relacionadas com a utilização e interpretação de dados e contribuindo para a promoção duma cultura estatística como parte integrante duma cidadania crítica (Batanero, 2001).

No contexto de sala de aula, a apresentação e condução das tarefas assumem particular importância, cabendo ao professor determinar como organizar o trabalho, selecionar os aspetos a realçar numa tarefa, apoiar os alunos durante a sua resolução, evitando interferir no seu processo de pensamento, e decidir que perguntas fazer (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). O tipo de questões colocadas e a forma como o professor «orquestra» as discussões das tarefas, procurando manter um clima propício à apresentação e discussão de ideias matemáticas, em que os alunos reconheçam a importância da sua participação, pode contribuir para a aquisição de aprendizagens relevantes.

Esta comunicação tem por base uma investigação desenvolvida num contexto de trabalho de natureza colaborativa, com três professores a lecionar no 3.º ano, tendo como objetivo analisar a evolução das suas práticas profissionais relativamente ao ensino da organização e tratamento de dados. Nesta comunicação, apresentam-se resultados preliminares do caso de Ana Maria, relativos ao modo como a professora propõe e conduz a realização das tarefas em sala de aula.

Ensino e aprendizagem da Estatística

As abordagens tradicionais para o ensino da Estatística valorizaram competências, procedimentos e cálculos, que para além de não permitirem um entendimento significativo das técnicas utilizadas, não levaram os alunos a pensar ou raciocinar estatisticamente (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Os alunos, dos vários níveis de escolaridade, apenas adquirem uma perspetiva algorítmica das principais medidas estatísticas, manifestando grandes dificuldades em interpretar os resultados obtidos. Para Batanero & Díaz (2010) o recurso excessivo às fórmulas estatísticas teve como resultados «alunos mal preparados para o estudo da Estatística, a nível superior, e adultos estatisticamente analfabetos» (p. 6).

A insatisfação com o ensino da Estatística fez surgir um movimento de reforma, nos anos 90 do século XX, no sentido de incluir no seu ensino mais análise de dados do que teoria. Trabalhando com contextos significativos e adotando uma postura crítica sobre a análise e interpretação dos dados, pretende-se que os alunos, progressivamente, sejam capazes de olhar para o conjunto de dados como um todo e possam realizar experiências que contemplem o ciclo investigativo. Segundo Franklin *et al*. (2005), o processo de investigação envolve um ciclo de quatro etapas: formulação de questões, recolha de dados, análise de dados e interpretação dos resultados. Na primeira etapa, define-se o problema a resolver e formulam-se questões que possam ser respondidas através dos dados. A recolha de dados inclui a elaboração dum plano e a utilização desse plano para recolher os dados. Na análise de dados, selecionam-se e utilizam-se os métodos numéricos e gráficos apropriados. Por fim, na interpretação de resultados, interpreta-se a análise e relaciona-se essa interpretação com a questão original. Para os primeiros anos Ben-Zvi & Sharett-Amir (2005) defendem a criação de ambientes de aprendizagem desafiadores que permitam a exploração de noções estatísticas mais complexas contrastando com uma perspetiva limitada do trabalho em estatística.

Durante a realização do trabalho colaborativo com os três professores estava em vigor o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), que integra a organização e tratamento de dados como tema autónomo nos três níveis de ensino e recomenda que a aprendizagem envolva aspetos ligados à representação de dados, à formulação de questões e à interpretação de resultados.

Condução de tarefas na sala de aula

As recomendações curriculares colocam inúmeros desafios ao professor que as deve interpretar e implementar. Em particular, realça-se o papel fundamental do professor na condução da aula. Compete-lhe selecionar as tarefas que pretende desenvolver, orientar a comunicação e organizar o trabalho na sala de aula. Neste sentido, na sua planificação, para além da seleção ou da construção de tarefas, o professor inclui vários momentos que contemplam as ações do professor e as ações dos alunos e prevê o tempo necessário para a concretização das tarefas (Ponte, 2005). Numa sala de aula, em que se pretenda valorizar a exploração de tarefas de elevada exigência cognitiva e a discussão alargada a toda a turma, a estrutura duma aula está geralmente organizada em três momentos: «lançamento» da tarefa, «exploração» da tarefa pelos alunos e «discussão e síntese» (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

O papel do professor na condução das tarefas é determinante durante a sua realização. A forma como apresenta as tarefas, o tipo de perguntas que coloca, a duração da discussão, bem como a abordagem pedagógica que assume, são de extrema importância para a sua exploração (Swan, 2007). A condução das tarefas, nomeadamente na fase de «exploração», assume particular relevância, tendo em conta a manutenção do nível elevado de exigência cognitiva pretendido com a sua realização. Por vezes, a atitude do professor, quando presta um esclarecimento ou dá uma sugestão, pode alterar significativamente o nível cognitivo da tarefa, tornando-a mais fácil ou menos desafiadora, desvirtuando assim o propósito com que foi pensada (Franke, Kazemi & Battey, 2007; Stein & Smith, 1998).

Para o sucesso da exploração de tarefas cognitivamente desafiadoras, muito contribui a criação dum ambiente de aprendizagem, onde os alunos se sintam confortáveis em discutir e partilhar ideias com os seus colegas. Cabe ao professor assegurar as condições que possibilitem a comunicação com os seus alunos e entre os próprios alunos, promovendo as interações entre todos os intervenientes. Tendo como objetivo facilitar a comunicação na sala de aula, «orquestrando» produtivamente as discussões matemáticas, Stein, Engle, Smith & Hughes (2008) apresentam um conjunto de cinco práticas: (i) antecipação das respostas dos alunos; (ii) monitorização do trabalho dos alunos; (iii) seleção das respostas para a fase de discussão; (iv) sequência das respostas para apresentação e (v) estabelecimento de conexões.

Metodologia

Para concretização do estudo, foi constituído um grupo de trabalho de natureza colaborativa, formado pelo investigador e por três professores do 1.º ciclo do ensino básico a lecionar o 3.º ano, tendo como objetivos principais: preparar um conjunto de tarefas para realização em sala de aula no contexto de ensino da organização e tratamento de dados; e, discutir e refletir sobre o modo como as tarefas são exploradas em sala de aula. No contexto de trabalho de natureza colaborativa, o investigador surge como parceiro, dinamizando as sessões de trabalho conjunto, colaborando na preparação das tarefas e na reflexão sobre a sua implementação, em que a ideia de colaboração é assumida como uma partilha de conhecimentos entre todos, incluindo os momentos de sala de aula.

Face ao objetivo definido e às questões formuladas o estudo, segue uma metodologia de investigação de natureza interpretativa e abordagem qualitativa (Stake, 2007). Dado que esta investigação assume características essencialmente descritivas e interpretativas adota-se a modalidade de estudo de caso (Merriam,1988). A recolha de dados recorre a entrevistas semiestruturadas, observação de aulas e sessões de trabalho colaborativo, gravadas em suporte áudio e vídeo, a registos e notas de campo e recolha documental.

Esta comunicação refere-se a um dos três casos de estudo, Ana Maria (nome fictício), tendo por base a análise de dados recolhidos através da observação de 4 aulas, das reflexões da professora nas sessões de trabalho colaborativo e nos momentos pós-aula e de materiais produzidos pelos alunos. No início do estudo, Ana Maria tinha 33 anos de serviço, estando colocada há 24 anos na escola onde atualmente leciona. Possui o curso do Magistério Primário e o curso de Estudos Superiores Especializados na área de Computadores no Ensino. Durante a formação inicial e complementar, não teve qualquer formação formal na área da Estatística. Apenas na formação contínua frequentou módulos de organização e tratamento de dados.

Ana Maria e a condução de tarefas de organização e tratamento de dados

As tarefas realizadas nas quatro aulas observadas tiveram por base as propostas preparadas nas sessões de trabalho de natureza colaborativa. A primeira tarefa pretendeu estudar as preferências televisivas dos alunos de cada turma. Na sequência da reflexão realizada no grupo de trabalho, foi decidido que a segunda tarefa consistisse no alargamento do estudo a outras turmas da escola. A terceira tarefa, «horas de sono», teve como referência um artigo de Canavarro (2012). Por fim, a quarta tarefa pretendeu analisar os resultados duma ficha de avaliação de matemática a partir da construção de um diagrama de caule-e-folhas. Para a realização das tarefas, o grupo de trabalho decidiu seguir as quatro etapas do ciclo investigativo (Franklin *et al*., 2005; Martins & Ponte, 2010). Nesta comunicação, a análise da condução das tarefas realizadas na turma da professora Ana Maria, terá como referência, cada uma destas quatro etapas. Dê

Formulação de questões

Para lançamento de cada tarefa, a professora inicia um pequeno diálogo com os alunos sobre o tema a ser explorado na aula. Por exemplo, naquela aula em que se estudaram as preferências televisivas, a professora começa por recordar o que tinham falado em aulas anteriores em que tinha pedido, a cada aluno, que pensasse no seu programa de televisão preferido. Para dar seguimento à realização da tarefa, solicita aos alunos que indiquem qual a questão que pretendem investigar. A partir dum contributo duma aluna, escreve no quadro: «Quais são os nossos programas preferidos?», clarificando que, «aqui, "nossos" é a nossa turma, certo?».

Segundo a professora, a realização desta tarefa surge na sequência duma discussão de aspetos relacionados com uma telenovela e em que se tinha aflorado a questão das preferências televisivas. Por isso, este aspeto surgiu muito naturalmente como o que poderiam investigar.

Recolha de dados

Para realização da tarefa sobre as «preferências televisivas», após um pequeno diálogo, fica decidido que, por ordem alfabética, cada aluno vai registar no quadro o nome do programa. Para recolha dos dados nas turmas da manhã [segunda tarefa] os alunos, organizados em grupos, deslocaram-se às outras salas, explicando o trabalho que estavam a realizar e perguntando, aos seus colegas, quais os tipos de programas de televisão preferidos. Entregaram um pequeno papel para que escolhessem apenas um dos programas e que assinalassem igualmente o seu género (masculino/feminino). Da lista, constavam somente os cinco tipos de programas que tinham resultado do estudo realizado na sua turma. Segundo a professora, «portaram-se muito bem, esclareceram, pelo menos as minhas colegas dizem que sim, esclareceram a diferença entre os tipos de programa».

Nas reflexões realizadas após as aulas observadas e nas sessões de trabalho colaborativo, a professora valoriza o recurso a dados reais referindo que os seus alunos «têm uma participação mais ativa em situações que são das vivências deles». Refere, igualmente, que as tarefas trabalhadas, partindo da formulação duma questão e necessitando de recolher dados para as resolver, têm natureza diferente daquelas que surgem normalmente nos manuais que apenas requerem a leitura e construção de tabelas e gráficos.

Análise de dados

Com exceção da tarefa sobre os resultados da ficha de avaliação de matemática onde os alunos construíram, pela primeira vez, um diagrama de caule-e-folhas, nas restantes tarefas a decisão sobre a forma de organizar os dados surgiu a partir de debates muito animados e participados. Por exemplo, na aula em que se trabalharam as preferências televisivas da turma, depois de concluído o registo dos programas por cada aluno, a professora pede a sua opinião sobre o modo como pensam organizar os dados:

> Professora: Ora bem, meus queridos, temos aqui um problema. Como é que vamos arranjar isto tudo? Ninguém se entende.
>
> Mário: Por votos. A professora mete um papelinho.
>
> Professora: Olha, mas cada um já escolheu o seu. Cada um já escolheu o seu. Eu não vos posso pedir para votarem nos programas dos outros.
>
> Mário: Não, professora, não está a perceber (…) metemos nos canais, por exemplo, este aqui do Zig Zag, metemos aqui num grupo. Este dá no 2, este dá no 4 [aponta os programas no quadro].

Vários alunos continuam a dar exemplos de canais televisivos em que os programas são transmitidos, defendendo o agrupamento por canais. A professora procura chamar a atenção dos alunos para se centrarem na questão a que querem responder. Entretanto, um aluno avança com uma proposta diferente:

> Vítor: Por programas de animação, outros mais antigos …

Professora: Programas mais antigos, programas de animação, pode ser, pode ser uma proposta. Outra proposta, Bento!

Bento: Professora, podíamos pôr ali o Panda e meter ali todos os programas do Panda.

Professora: Os programas do Panda, é o mesmo que disse o Mário e o mesmo que disse o António. E a minha pergunta é: o que é que vocês querem saber?

Aluno: Quais são os programas preferidos?

Professora: Quais eram os programas preferidos e não é: quais são os canais preferidos? A não ser que vocês queiram mudar a pergunta. Se bem que possamos fazer as duas coisas. Podemos ver qual é o tipo de programas preferidos e, aí, eu estou de acordo com o Vítor, podemos dar categorias, como ele disse, animação, programas mais antigos ou podemos também depois ver quais são os canais preferidos, não é?

(…)

António: Eu acho que o Vítor tem razão. Aquilo [canais] também é bom, mas poderá haver confusão que é alguns canais dão os dois tipos, num canal dá os bonecos, mas noutro canal dá bonecos iguais. Aí temos que meter nos dois sítios ou então não metemos.

Professora: (…) a minha pergunta é: com esta escolha [canais] chegamos a saber qual é o programa preferido? Que tipo, qual é o programa? Se são telenovelas se são programas de ficção, se é o telejornal, conseguimos saber aqui quais são?

António: Tem de ser como diz o Vítor, mesmo.

Na reflexão realizada no seguimento desta aula a professora destaca como momento marcante a discussão ocorrida para decidir a forma de organizar os dados:

> (…) a uma certa altura eu até pensei: então vamos mesmo ver quais são os canais preferidos. Mas depois lembrei-me: não, não pode ser, nós queremos saber (…) a minha primeira ideia foi: eles estão a escolher, a categorizar as coisas por canais, pois se calhar vamos por aí, mas depois logo a seguir pensei: não, mas isto não responde à nossa questão. Por isso é que houve aquela discussão.

Ana Maria reconhece alguma validade à ideia dos alunos, em classificar os programas em função do canal em que são transmitidos. No entanto, refletindo sobre os objetivos da aula tem que decidir noutro sentido, procurando que a organização dos dados permita responder à questão formulada. Esta decisão apoia-se nas intervenções de Vítor e de António que apontam para a classificação por tipo de programas.

Interpretação de resultados

De um modo geral, depois de organizados os dados, em *tally charts* ou em tabelas de frequência, e construída a representação gráfica considerada adequada, a professora inicia um momento de debate para apresentação de resultados e formulação de conclusões. Foi o que aconteceu na aula em que se estudaram os programas de televisão preferidos em que a professora pede para olharem para o gráfico [Figura 1] e que apresentem as suas conclusões. Após alguns momentos de reflexão, a professora dá início à discussão:

Professora: Oiçam com a atenção as conclusões dos vossos colegas para não as repetirem, para depois me dizerem o que acham delas.

António: As pessoas escolheram mais os de animação, depois foram as séries juvenis, a seguir foram as telenovelas e depois os concursos.

Professora: Bom, então em relação à nossa pergunta: «Qual é o programa de televisão nosso preferido?»

António: São os de animação.

Professora: Vamos escrever esta conclusão? Toda a gente concorda?

Alunos: Sim.

Professora: Então vamos escrever.

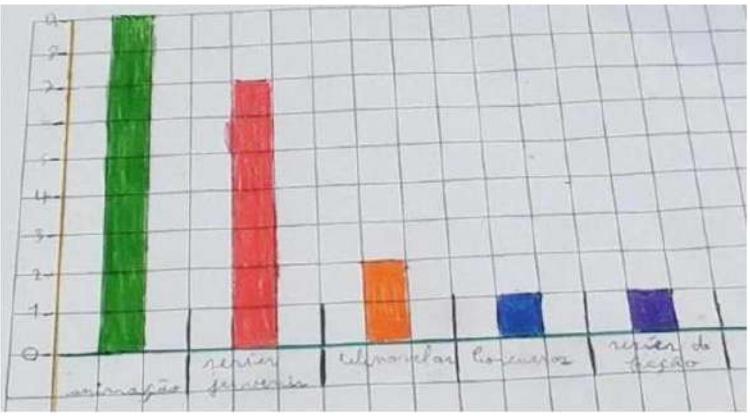


Figura 1. Gráfico das preferências televisivas construído por um aluno.

Neste pequeno episódio existe preocupação da professora em focalizar a atenção dos alunos na questão a que têm de responder. Com esta chamada de atenção pretende que os seus alunos tenham em conta esta condicionante na formulação de conclusões.

Para análise dos resultados da ficha de avaliação de matemática, a professora solicitou a construção dum diagrama de caule-e-folhas, disponibilizando, no quadro interativo, uma tabela com o nome de cada aluno e respetiva classificação. Concluída a ordenação dos dados no diagrama, pede aos alunos que verifiquem a correção da resolução da tarefa e lança o momento de discussão com base na análise e interpretação de resultados. Na sua intervenção, a professora procura apoiar os alunos na análise do diagrama [Figura 2], de modo a identificar aspetos que ajudem a caracterizar a situação da turma relativamente à última avaliação de matemática, afirmando: «há meninos que precisam perceber qual é o seu ponto da situação e eu quero perceber qual é o ponto da turma». O episódio seguinte refere-se a esta fase da aula:

Professora: António, qual é a tua conclusão?

António: Houve muitas negativas.

Professora: Houve muitas negativas. Quantas?

António: Sete.

Professora: Onde é que localizas as negativas? Vem cá mostrar.

António: [no quadro] É abaixo dos cinquenta [indica com o dedo e aponta para a classe dos 30 e dos 40].

Professora: Quantos alunos têm negativas?

António: Sete.

Professora: Sete negativas. Ele diz que houve muitas negativas, sete negativas, somos quantos? Dezanove alunos?

António: Sim professora.

Professora: Também acho que são muitas. Diz lá Paulo, qual é a tua conclusão?

Paulo: Todas as unidades que estão nas dezenas três e quatro são negativas.

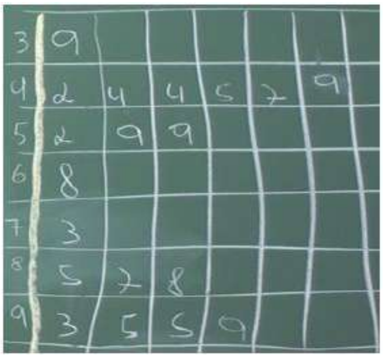


Figura 2. Diagrama de caule-e-folhas relativo aos resultados da ficha de avaliação.

Nesta fase do debate, a preocupação da professora situa-se na identificação do número de resultados negativos e do seu peso relativamente ao total de alunos. Noutra fase da discussão, procura clarificar um aspeto, já verificado em aulas anteriores, em que os alunos individualizam os dados representados, indicando o nome dos colegas a que se referem. Ana Maria utiliza a expressão «o diagrama não tem nomes» quando um aluno indica o nome dum colega com o resultado mais alto, sugerindo alteração na escrita da frase para «verifica-se que um aluno tem 99%».

Ao refletir sobre esta aula a professora valoriza o recurso a dados reais dos alunos, não só por constituir um contexto natural para a exploração das tarefas, mas, também, por permitir a elaboração dum diagnóstico sobre os resultados da turma relativamente à área de matemática.

> (…) qual era o objetivo de fazer isto é precisamente eles terem consciência do seu ponto, qual é o seu, qual é o ponto da situação em relação à turma para depois tomar medidas para resolver. É uma espécie de avaliação de balanço do trabalho até agora.

Numa reflexão mais global sobre o envolvimento dos alunos na resolução das tarefas e participação nas discussões, embora refira que o trabalho com dados reais possibilitou a exploração de tarefas de natureza diferente e que os seus alunos tomassem consciência de situações que lhe dizem diretamente respeito, Ana Maria considera que os seus alunos têm ainda um longo caminho a percorrer no sentido do desenvolvimento duma atitude crítica relativamente aos dados e de perceber «que implicação é que isso tem na vida real».

Alguns dilemas

Para Ana Maria, a condução dos vários momentos de discussão assume alguma característica de dilema. Por um lado, considera que deve acompanhar os argumentos dos alunos sem os validar. Por outro lado, as discussões seguem um rumo que se afasta da resposta aos problemas, fazendo com que a professora acabe «por forçar porque eles não estão a chegar lá». Na aula em que se trabalharam as preferências televisivas [tarefa 1], durante a discussão sobre os critérios de classificação dos programas, a professora decide intervir no sentido de alertar para a necessidade de responder à questão formulada. No entanto, noutros momentos, acompanha as intervenções dos alunos, procura clarificar as suas opiniões mas opta por aceitar a sua decisão. A situação ocorrida na aula em que se trabalharam as preferências dos alunos das turmas da manhã [tarefa 2] constitui um exemplo da sua atuação. Durante a fase de formulação de conclusões a professora decide intervir no sentido de chamar a atenção dos alunos para a descoberta de outras relações entre os dados.

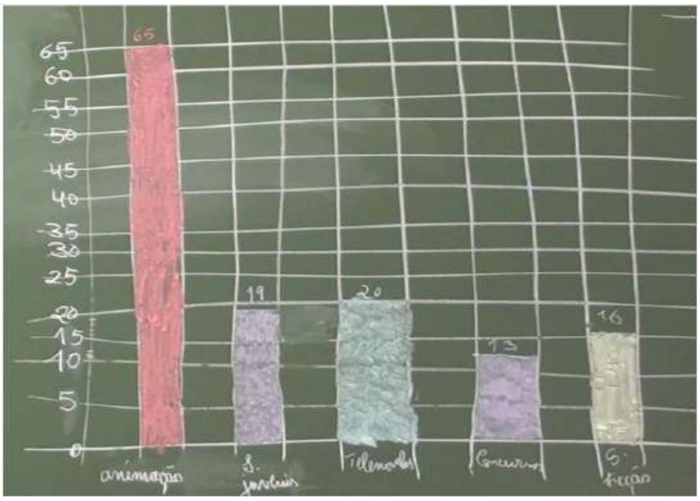


Figura 3. Gráfico das preferências televisivas das turmas da manhã.

No quadro está construído um gráfico de barras [Figura 3] relativo às preferências televisivas das turmas da manhã. No total dos 133 alunos, que constituem a população do estudo, 65 tinham escolhido os programas de animação enquanto 68 escolheram os outros 4 programas. A professora promove o seguinte debate:

Professora: Dá apenas mais 3. Está muito próximo do valor da animação. A animação tem tantos que, sozinha, tem quase tantos, como os outros todos juntos.

Bento: Mas é sozinha. Os outros têm de estar todos juntos.

Professora: Os outros, exatamente. Acham que isto pode ser uma conclusão?

Alunos: Não.

Professora: Não? Por quê?… é porque se nós dissermos só …

Bento: É que assim é injusto para a animação.

Professora: Não é justo para a animação, por quê?

Bento: Porque eles dizem que tiveram que juntar para todos, porque a animação é só uma e os outros são muitos.

Professora: O que ele quer dizer é que a animação sozinha vale (…) quase tanto como os outros todos juntos. Se nós dissermos só assim: o programa mais preferido das turmas é o das animações, dissemos assim se calhar foi só mais um ou se calhar foi só mais 3, se calhar foram só mais 10 (…) então, é relevante ou não é relevante, é a conclusão a que eu quero chegar (…) Eu só quero saber é: acham que este dado é relevante para a conclusão ou não?

António: Não.

Professora: Se for relevante pomos. Se acharem que não, não pomos (…) quem acha que podemos considerar a diferença, quase mínima, entre a animação e os restantes programas e pôr nas conclusões ou não devemos falar nisso.

Alunos: Não devemos falar nisso.

Professora: Não devemos falar nisso, então não falamos, ok.

Nas reflexões realizadas após a aula, a professora atribui este procedimento dos alunos ao facto da resolução da tarefa ter demorado mais tempo do que previsto, tendo até ocupado parte do intervalo, o que pode ter provocado alguma destabilização no seu comportamento. No entanto, o recurso a outra representação, nomeadamente a um gráfico circular, poderia ter contribuído para uma melhor visualização, em que o setor correspondente aos programas de animação ocuparia praticamente metade do círculo e assim, com esta representação, os seus alunos «talvez chegassem logo, aderissem à minha ideia».

Considerações finais

As aulas observadas tiveram uma estrutura comum de acordo com as quatro etapas do ciclo investigativo (Franklin *et al*., 2005; Martins & Ponte, 2010). Ana Maria valoriza a formulação de questões dedicando-lhe tempo e procurando que todos os alunos a percebam. Focaliza a sua atenção recordando os aspetos essenciais do estudo e não deixando que os alunos se dispersem. A recolha de dados surge como aspeto inovador nas práticas desta professora quando trabalha a organização e tratamento de dados. Na sua opinião, o recurso a situações do quotidiano dos alunos permitindo uma «participação mais ativa» possibilita a elaboração de diagnósticos sobre os seus comportamentos e desempenho. As tarefas «horas de sono» e «resultados das fichas de avaliação» foram aquelas que mais evidenciaram estes aspetos. A decisão sobre a escolha dos instrumentos mais adequados para análise de dados e processos de construção é tomada conjuntamente com a participação dos alunos a quem Ana Maria dá oportunidade de avançar as suas propostas e de as discutir com os seus colegas. Na fase de interpretação de resultados, a professora procura que os seus alunos cheguem a consenso sobre as várias propostas tendo a preocupação que a questão de investigação seja respondida. Embora os alunos revelem alguma atitude crítica relativamente aos dados que vão trabalhando, a professora manifesta a necessidade de avançar mais na leitura dos gráficos, para que possam «ver mais para além dos dados» (Curcio, 1989), não se limitando à identificação dos valores mais e menos frequentes e assim possam chegar a «conclusões mais elaboradas».

A forma como a professora conduz a comunicação na sala de aula, manifestando preferência pela promoção de discussões, leva ao surgimento de alguns dilemas. Alguns casos ficam por resolver (Lampert, 1985), noutros a professora sente a necessidade de intervir «forçando» o rumo da discussão no sentido que considera mais adequado.

Referências

Batanero, C. (2001). *Presente y Futuro de la Educación Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero, C. & Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: what can we learn from research? *Statistique et Enseignement*, *1*(1), 5-20.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In Ben-Zvi, D & Garfield, J. (Eds). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3 -15). Dordrecht: Kluwer.

Ben-Zvi, D., & Sharett-Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions? In K. Makar (Ed.), *Reasoning about distribution: A collection of current research studies*. *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy*. Brisbane: University of Queensland.

Canavarro, A. P. (2012). Materiais para a aula de Matemática. Como vamos de tempo de sono? *Educação e Matemática*, *120*, 35-36.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. *Elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. S. (2007). Mathematics teaching and classroom practices. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Scheaffer, D. (2005) *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: a pre-k–12 curriculum framework*. On line: http://www.amstat.org/education/gaise/

Henriques, A. & Oliveira, H. (2012). Investigações estatísticas: um caminho a seguir? *Educação e Matemática*, *120*, 3-8.

Lampert, M. (1985) How do teachers manage to teach? Perspectives on problems in practice. *Harvard Educational Review*, *5*(2), 178–194.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: Ministério da Educação. DGIDC.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey Bass.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. DGIDC.

Ponte, J. P. (2005) Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulhenkian.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical *Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(*4), 268-275.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers" practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 217-237.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Desenvolvendo as representações estatísticas de alunos de 3.º ano

Isabel Velez[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, velez@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *Este artigo tem como objetivo compreender de que forma quatro professores do 1.º ciclo trabalham as representações estatísticas no ensino-aprendizagem. Assumimos que a forma como o professor lida com as representações na sala de aula tem uma grande influência na aprendizagem dos seus alunos. Durante a realização de tarefas de OTD cabe ao professor levar os alunos a visualizar, compreender, interpretar e sistematizar a informação contida nas representações e levá-los também a desenvolver novas representações que considerem necessárias. Deve também encorajar os seus alunos a comparar as diferentes representações que possam surgir durante a discussão coletiva. A metodologia de investigação inclui a observação e gravação de aulas, distinguindo os momentos de apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização de resultados. Os resultados mostram que, durante a realização da tarefa, os professores tendem a orientar os alunos na utilização de representações formais, mas recorrem também às representações sugeridas dos alunos como ponte de ligação às representações formais.*

Palavras-chave: Representações; Raciocínio; Organização e tratamento de dados; Prática profissional; 1.º ciclo.

Introdução

Cabe aos professores proporcionar aos alunos oportunidades de aprender e compreender os diferentes tipos de representações (Bishop & Goffree, 1986). O modo como os professores usam as diferentes representações matemáticas na sua prática tem um impacto fundamental na aprendizagem dos alunos (Stylianou, 2010). As representações merecem uma atenção especial na Organização e Tratamento de Dados (OTD), tema que no 1.º ciclo tem vindo a ganhar destaque em investigações nacionais e internacionais. Nas tarefas de OTD é também possível trabalhar outras representações de outros temas de Matemática, como Números e Operações.

A prática dos professores e as decisões que tomam influenciam de forma determinante a aprendizagem dos alunos. Como indicam Ponte, Nunes e Quaresma (2012), na realização de uma tarefa reconhecem-se muitas vezes os seguintes momentos principais: (i) apresentação, tendo em vista proporcionar aos alunos a compreensão da tarefa; (ii) atividade autónoma dos alunos, em que o professor circula pela sala, monitorizando o trabalho destes; e (iii) discussão coletiva, em que os alunos apresentam à turma os resultados obtidos, e se faz uma síntese e sistematização de resultados. Nesta comunicação analisamos a prática profissional de quatro professores relativamente à forma como trabalham na sala de aula com as representações estatísticas. Analisando os momentos de apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva e síntese, pretendemos compreender de que modo os professores promovem a aprendizagem e compreensão das representações estatísticas nos seus alunos e o desenvolvimento do seu raciocínio.

Representações

O NCTM (2000) refere que uma "representação" envolve o processo de representar, mas também o produto resultante desse processo. Assim, de acordo com este documento, para que os alunos compreendam verdadeiramente os diferentes conceitos matemáticos (incluindo os estatísticos) é importante que conheçam as várias representações existentes e saibam escolher a que melhor se adequa a cada situação.

O enunciado de qualquer tarefa envolve necessariamente uma ou mais formas de representação (linguagem verbal, símbolos, diagramas, etc.). Durante o trabalho autónomo, os alunos podem recorrer a outras representações. Webb, Boswinkel e Dekker (2008) distinguem três tipos diferentes de representações: informais (produzidas pelos alunos e relacionadas diretamente com o contexto em que decorre a tarefa), preformais (ainda com ligação ao contexto mas contendo alguns elementos abstratos) e formais (linguagem matemática formal). Para estes autores, os alunos começam por utilizar representações informais e, progressivamente, devem ser encorajados a recorrer cada vez mais a representações formais.

Thomas, Mulligan e Goldin (2002) classificam as representações em icónicas (imagens que representam a realidade), pictóricas (representação da realidade através de pontos, traços, etc..) e notacionais (retas numéricas, números, tabelas). Relativamente aos gráficos, Goldin (2000) refere que a sua interpretação permite que os alunos: (i) reflitam sobre os aspetos implícitos no gráfico; (ii) levantem questões; (iii) compreendam o gráfico, através do contexto a que se refere; (iv) façam novas aprendizagens a partir da análise e discussão da informação contida no gráfico; (v) construam o seu conhecimento ao explorarem a informação contida num gráfico e o respetivo contexto; e (vi) participem em discussões mais ricas, com a apresentação das diferentes opiniões dos alunos, depois de analisarem um gráfico em grupo. Na sala de aula, quando trabalham gráficos de barras com os seus alunos, os professores devem certificar-se que estes conseguem identificar os dois eixos (cada um dos quais representando uma variável), bem como a escala utilizada. Devem ainda perceber que cada barra simboliza uma categoria ou um valor e que a sua altura corresponde ao valor que esta representa e é proporcional à sua frequência.

O raciocínio é o processo de fazer inferências justificadas a partir de informação conhecida (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). Observando as representações utilizadas pelos alunos, os professores podem tentar compreender o modo como estes pensaram e as estratégias que utilizaram (NCTM, 2000). Também Stylianou (2011) refere que é através das representações que os alunos comunicam o seu raciocínio, permitindo aos professores compreender o percurso que seguiram na resolução de uma determinada tarefa.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) sobre a prática profissional de professores do 1.º ciclo relativamente ao seu trabalho com representações matemáticas. Nesta comunicação analisamos as práticas de três professores do 3.º ano e uma professora de apoio de Matemática que com eles trabalha regularmente na resolução de uma tarefa de OTD. Todos têm menos de cinco anos de serviço e trabalham em duas escolas do mesmo agrupamento nos arredores de Lisboa. Sofia trabalha com a sua turma desde o 1.º ano, Catarina começou este ano, mas foi professora de apoio na mesma escola no ano letivo anterior, Rui está com os seus alunos desde o 2.º ano e Sara é professora de apoio em Matemática ao abrigo do programa TEIP. Cada turma tem cerca de 20 alunos, a maioria dos quais nascidos em países estrangeiros (70% na África) não tendo o Português como língua materna. Os dados foram recolhidos através de gravação vídeo das aulas e analisados através de análise de conteúdo com as categorias geradas num modelo aberto (Laville & Dionne, 1999).

A tarefa foi escolhida previamente pelo grupo de quatro professores, de acordo com a avaliação que fizeram das necessidades e dificuldades dos alunos envolvidos e inclui o enunciado e um gráfico de barras (figura 1). Nas duas aulas, os professores começam por apresentar o problema, dão aos alunos algum tempo para o resolver individualmente e, finalmente, discutem os resultados coletivamente. Sara conduz a realização da tarefa junto dos alunos de Sofia e Catarina (que decidiram juntar os seus alunos na mesma sala) e colabora na condução da aula na sala de Rui. Em cada uma das aulas, assinalamos os aspetos mais relevantes relacionados com o uso das representações.

Tarefa - A Andreia está a vender rifas para a escola e tem registado num gráfico o que vendeu até agora. Observa o gráfico e responde:

1- Quantas rifas vendeu na segunda-feira?
2- Quantas rifas vendeu na terça-feira?
3- Em que dia a Andreia vendeu mais rifas? E em que dia vendeu menos?
4- Quantas rifas a Andreia teria de vender para chegar às 40 rifas?
5- Houve algum dia em que a Andreia não vendeu rifas? Porquê?

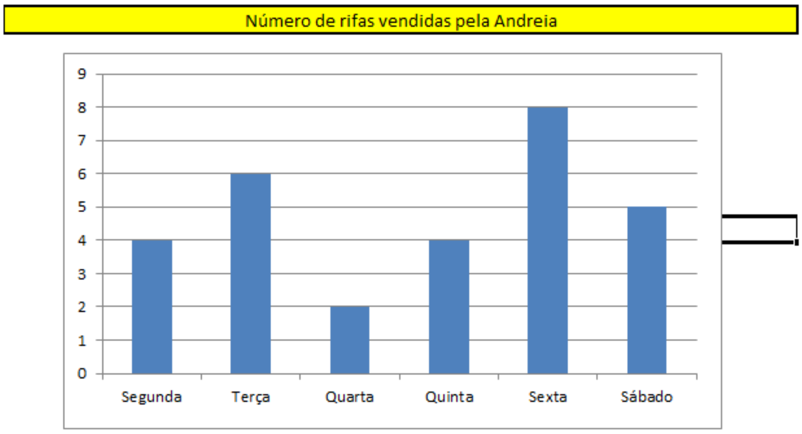


Figura 1 - Tarefa

Aula 1

Na apresentação da tarefa, Sara pede a um aluno que leia a primeira parte do enunciado. Em seguida, enquanto anda pela sala, lê as perguntas e, por fim, tendo em conta que os alunos não levantam qualquer questão, pede-lhes que resolvam a tarefa:

> Um…Quantas rifas vendeu na segunda-feira? Dois… Quantas rifas vendeu na terça-feira? Olhar para a terça-feira e ver quantas rifas a Andreia vendeu… 3… Em que dia a Andreia vendeu mais rifas? E em que dia vendeu menos? Atenção que têm duas questões! (…) Têm que justificar porquê! Podem começar a resolver…(…)

Enquanto os alunos resolvem autonomamente a tarefa, as professoras observam-nos e analisam o seu trabalho, respondem às suas dúvidas e colocam algumas questões. Até à questão 4 não parecem existir quaisquer dificuldades. Nesta questão, face ao trabalho de Daniel, Sara intervém:

> Sara: Então diz-me lá como é que tu chegaste às onze rifas?

Daniel: Contei… Aqui (aponta para todo o gráfico)… Ao todo dá 29… 29 [rifas vendidas]… Dá-me 11 [rifas por vender] porque tirei 1 de 11 e coloquei [adicionei ao 29]… Fez 30… (…) Coloquei nisto aqui (aponta para todo o gráfico)… Fiquei com 30… Depois… Juntei trinta mais 10! Que dá 40!

(…)

Sara: Porque é que tu somaste tudo? Porque é que somaste as rifas todas que ela vendeu em todos os dias da semana [para obteres 29]?

Daniel: Para saber quantas rifas ela vendeu!

Perante a resposta correta de Daniel, Sara questiona-o de forma a tentar perceber o seu raciocínio. O aluno começa por descrever o processo de cálculo mental que usou (29+1)+10=40. Começa por juntar 1 a 29, obtendo 30, e depois juntar mais 10, para obter 40, deste modo, teve de juntar 1+10, ou seja 11. Sara pede ainda ao aluno que explique também como obteve 29.

As professoras ficam surpreendidas com as estratégias que alguns alunos utilizam para interpretar o gráfico. Por exemplo, Nádia regista por cima de cada coluna o seu valor (figura 2), algo que Sofia, acha interessante. Para se certificar que compreendeu a intenção da aluna, pergunta-lhe o que a levou a registar os números no gráfico.

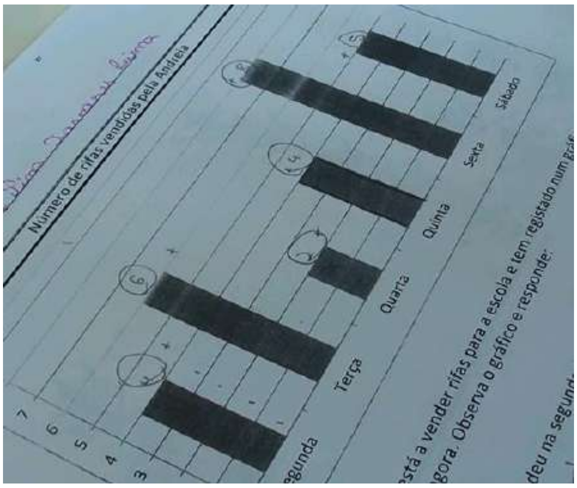


Figura 2 – Estratégia utilizada por Nádia.

Sofia (para a aluna): Porque é que meteste aqui estes números?

Nádia: Porque…Porque…Porque…

Sofia: Porquê? Diz amor? Explica só porque é que fizeste?

Nádia: Para ver… Para ver o resultado que eu queria…

Sofia: E porque é que puseste ali o quatro?

Nádia: Para não me esquecer que é quatro!

Nádia recorre a uma representação numérica que traduz a sua interpretação do significado de cada coluna, colocando em cima de cada coluna o número que corresponde à quantidade que simboliza. Aparentemente a tradução da representação estatística numa representação numérica é a forma que encontra para melhor ler e comparar o valor de cada coluna.

Na discussão coletiva, Sara pede aos alunos que apresentem as suas respostas em cada pergunta.

> Sara: Andreza… Quantas rifas vendeu na terça-feira?
>
> Andreza: Vendeu 6…
>
> Sara: Na terça-feira vendeu 6 rifas… Alguém colocou um número de rifas diferente?
>
> Alunos: Não…
>
> Sara: Porque é que tu disseste que eram 6 rifas Andreza? (…) Como é que tu viste que eram 6?
>
> Andreza: Contei…
>
> Sara: Contaste, e então… Como é que tu contaste?
>
> Andreza: Contei estes… (aponta para a coluna)
>
> Sara: OK… Quem é que contou de outra maneira?
>
> Ana: Eu! Eu fiz assim… Segunda feira… É 4… Para vir para aqui, para terça, sobra 2. 4 mais 2 dá 6!
>
> Sara: Dá seis… Alberto… Diz lá…
>
> Alberto: Fiz de 2 em 2…
>
> Sara: Foste de 2 em 2… Quem é que contou de outra maneira o número de rifas? Quem é que olhou logo para o gráfico e viu que eram 6? (…)
>
> Inês: Eu fiz pela linha do gráfico… (…) Tinha calhado no 6…
>
> Sara: Foste até… Continuaste a seguir a linha, foi? E viste que tinha calhado no número 6… Muito bem!
>
> Alberto: Mas está certo?!?
>
> Sara: Sim, está certo… Eu só queria saber como é que vocês chegaram ao 6… (escreve a resposta correta no quadro)

Na discussão coletiva vários alunos dão exemplos como encontraram o resultado (comparando com outras colunas, contando de um em um). Sara procura várias formas de encontrar o valor 6 e destaca o aluno que fez a leitura do gráfico tendo em conta a linha orientadora que liga a coluna à escala no eixo das ordenadas. Os alunos ficam surpreendidos ao se aperceberem que todas as respostas estavam corretas. A partir da segunda pergunta, Sara deixa de confirmar a resposta dos alunos, respondendo-lhes sempre “Porquê?”, o que os torna mais participativos e mais motivados para querer responder.

A resposta à segunda parte da terceira pergunta “E em que dia vendeu menos [rifas]?” gera alguma polémica nos alunos pois alguns dizem que a resposta é “domingo” e outros respondem “quarta-feira”. Sara intervém:

> Fernando: Foi no domingo…
>
> Sara: Porquê, Fernando?!
>
> Fernando: Porque não está o domingo!
>
> Sara: Porque não está ali o domingo… Mas nos dias em que ela vendeu rifas… Ela no domingo não vendeu nenhuma rifa… Mas nos dias em que ela vendeu rifas, qual foi o dia em que ela vendeu menos? Eu não quero saber os dias em que ela não vendeu… Quero saber os dias… Qual foi o dia em que ela vendeu menos, dos dias em que ela vendeu…
>
> Turma: Quarta-feira…
>
> Sara: Quarta-feira… Então se nós considerarmos os dias em que ela vendeu… A quarta-feira foi o dia em que ela vendeu menos rifas… Mas se nós considerarmos os dias da semana todos, qual foi o dia em que vendeu menos rifas?
>
> Turma: Domingo…

À semelhança do que fez nas questões anteriores, a professora pede aos alunos que justifiquem a sua resposta. O facto de domingo não constar no gráfico deixa os alunos confusos, sem saber se devem ter em conta esse dia da semana. Sara opta por considerar ambas as respostas como aceitáveis. Ao fazer isto, pretende que os alunos compreendam que, a mesma tarefa pode ter diferentes formas de chegar ao mesmo resultado e vários resultados possíveis conforme a interpretação do enunciado. Na pergunta seguinte, os alunos continuam muito participativos:

> Sara: Vinte e nove… E depois como é que tu chegaste ao 11… Deolinda…
>
> Deolinda: Pus… Contei… 29… Mais… Quanto dava para chegar ao 40…
>
> Sara: Foste ao 29 e viste quanto é que chegava para… Quanto é que faltava para chegar às 40 rifas. Deu-te 11, não é? (aluna acena que sim com a cabeça). Muito bem!
>
> Alberto: Oh professora, eu fiz de outra forma!
>
> Alunos: Eu também! Também eu!
>
> Sara: Alberto…(fala para a turma) Um de cada vez, se faz favor!
>
> Alberto: Eu fiz quarenta… Hum… Onde é que está? (procura na sua folha de trabalho) Eu pus 40 menos 11… Para certificar que se é verdadeiro… Eu fiz a conta e deu-me 29…
>
> Sara: Qual foi a operação que tu fizeste?

> Alberto: 40 menos 11…
>
> Sara: Então tu fizeste… 40 menos 11… Mas como é que tu chegaste aos 11? Lembraste-te? Assim de repente? (sorri)
>
> Alberto: Nãooooo! (ri-se) Primeiro fiz a conta… 40 menos 29… E depois eu pensava que estava errado… Então eu fiz…
>
> Sara: Então foste confirmar, não é? Foste fazer 40 menos 11 para ver se dava os 29… É isto?
>
> Alberto: Sim!

Nesta parte da discussão, os alunos já tinham concluído que o resultado correto era "11 rifas" e apresentam as várias estratégias que utilizaram para encontrar a solução. A maioria recorre à estratégia de "contar de um em um", contabilizando os elementos entre 29 e 40. Sara considera esta estratégia válida, mas procura que um dos alunos (Alberto) indique a representação formal que utilizou. Entretanto, outros colegas referem que calcularam 40 – 11 = 29 (e a professora regista este cálculo no quadro), mas, depois de questionados, chegam à conclusão que determinaram o resultado 11 utilizando a estratégia referida inicialmente. No final da discussão, Alberto é o primeiro aluno que refere a representação formal (40 – 29 = 11) e a professora regista no quadro o seu cálculo.

Depois da discussão de todas as questões, Catarina intervém e decide falar um pouco sobre o gráfico de barras da tarefa:

> Catarina: Então e pensam que a Andreia fez o gráfico todo bem?
>
> Turma: Aaa… Não…
>
> Catarina: Porquê?
>
> Danilo: Porque falta… Porque ela esqueceu-se de… Domingo!
>
> Catarina: Mesmo não vendendo no domingo… Temos aqui o 0, não temos? Se ela não vendeu no domingo, ela teria na mesma que ter registado o quê? O domingo! Só não punha o quê? Uma coluna! Mas, para o gráfico estar completo (…) tinha que ter o domingo, certo? Sim? Percebido? Mesmo que não se venda… Vamos supor que estamos a registar a quantidade de fruta que nós comemos por semana… Se eu não comer fruta num dia da semana, eu não vou deixar de registar, certo?

Catarina considera que deve sistematizar com os alunos algumas das convenções dos gráficos de barras (existência do zero no eixo das coordenadas, importância de registar no gráfico toda a informação), levando assim os alunos a desenvolverem o sentido crítico em relação à representação utilizada. Para isso, estabelece a ligação com uma situação real da sala de aula (na turma regista-se diariamente o consumo de fruta ao lanche) para que os alunos compreendam que mesmo quando um valor é igual a 0, é possível registá-lo no gráfico de barras.

Aula 2

Na turma de Rui, é este professor que dinamiza a realização da tarefa, e Sara é corresponsável pela sua exploração com os alunos. Na apresentação da tarefa, Rui pede a um aluno que leia o enunciado e faz uma breve explicação:

> Rui: Então… A Andreia tem estado a vender rifas para a escola… Tá? (…) Nesse gráfico de barras… Ela tem registado o que vendeu até agora… Se vocês olharem para lá… Cá em baixo… Temos os dias da semana, não temos? Então… Ela em cada dia da semana regista o número de rifas que vende… Se vocês virem, do lado esquerdo têm um número… Certo? Então agora temos aí algumas perguntas para a interpretação desse gráfico e vamos… (…) Resolvê-las sozinhos e vamos… Ver aqui no quadro… Quais é que foram as soluções que vocês fizeram… Porque há várias soluções… Várias maneiras de chegar aos resultados… Está bem?

O professor identifica aspetos importantes da representação gráfica – os eixos das abcissas ("Cá em baixo… Temos os dias da semana") e das ordenadas ("o número de rifas que vende (…) do lado esquerdo"). Para além disso, reforça a ideia de que há diferentes formas de resolução, relembrando os alunos de que podem existir diferentes estratégias para chegar ao resultado.

Durante o trabalho autónomo, os dois professores percorrem a sala de aula, analisando e comentando o trabalho da turma. Nos primeiros minutos, alguns alunos, consideram a tarefa difícil e recorrem ao professor para que este lhes diga como devem resolver a tarefa ("Professor não sei! O que é que é para fazer?", "Professor… É difícil!!"). Perante esta situação, Rui decide dar-lhes algum tempo para que releiam o enunciado da tarefa ("Não sabes? Pensa um pouco e lê…", "Tens que pensar… Já leste, não já?", "É difícil? Se fosse fácil não era para vocês!"). Outros tentam que o professor lhes indique a representação que devem utilizar, mas Rui prefere que sejam eles a fazer essa escolha:

> Bartolomeu: Professor na [pergunta] quatro é para fazer o quê? Desenhos?
>
> Rui: Se quiseres fazer um esquema…Fazer desenhos… Podes fazer! Desde que respondas à[s] pergunta[s] [da tarefa]…

Há também alunos que conseguem encontrar a solução correta. Nesses casos, para além do reforço positivo ("Isso mesmo!"), Rui questiona-os para perceber como chegaram ao resultado ("Como é que chegaste a este número? Fizeste alguma conta? Como é que tu pensaste?").

Na discussão coletiva desta tarefa, o professor pede a Leonardo que explique como descobriu a solução do problema. Durante o trabalho autónomo, apercebeu-se que este aluno descobriu a resposta correta, contando pelos dedos e que consegue justificar, sem dificuldades, como encontrou o resultado.

> Leonardo: Primeiro, fui ao gráfico… Eu vi… Quantos, quantas rifas se tinham vendido durante uma semana… Eu fui lá…
>
> Rui: Como é que viste? Como é que viste quantas rifas ela vendeu durante a semana?
>
> Leonardo: Contei… Somei! Contei… Aqui (aponta para o gráfico)
>
> Rui: Contaste o quê? Diz lá!
>
> Leonardo: Contei… Aaaaa… Quantas rifas que ela vendeu durante a semana…
>
> Rui: Mas como é que eu sei as rifas que ela vendeu durante a semana?
>
> Leonardo: Eu fui somar…
>
> Rui: Foste somar… O quê?
>
> Leonardo: Sim… Fui somar as rifas [vendidas em cada dia]…
>
> Rui: Os vários dias da semana… Ficaste a saber quantas é que ela tinha vendido nessa semana… E depois? O que é que fizeste?
>
> Leonardo: Depois… Deu 29 a conta… Depois fui contar e, para a Andreia ter 40 rifas… Faltavam mais onze…

Durante a explicação do aluno, Rui antevê uma explicação um pouco resumida, reduzida a “ vi quantas rifas se tinham vendido” e questiona-o para que justifique como encontrou o número 29 e por que razão somou o valor de todas as colunas do gráfico de barras. Apesar de percetível para si, o professor considera que a explicação de Leonardo não é muito clara para os colegas e sistematiza a informação desta etapa. Depois de ouvir a explicação do aluno, Rui pede-lhe que registe a sua estratégia no quadro (figura 3a) e questiona-o um pouco mais:

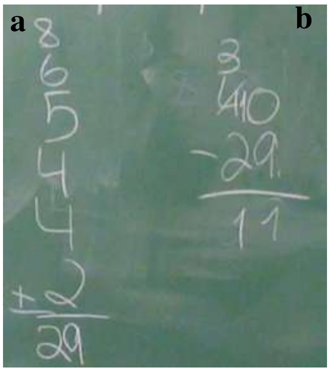


Figura 3: Representações utilizadas por Leonardo

Leonardo: Depois contei pelos dedos… Aaaaa… Até chegar ao 40…

(…) Primeiro eu contei, né? Depois eu fui fazer uma conta para ver se estava certo.

Rui: Qual?

Leonardo: Fiz… 29 mais 11!

Rui: Fizeste 29 mais 11. Mas porque contaste o 11 pelos dedos. Então e se eu não quisesse chegar até ao 40? E se eu quisesse chegar até ao 100?

Leonardo: Eu ia fazer uma conta na mesma!

Rui: Qual?

Leonardo: 100 mais 29!

(ao alunos começam a discutir qual a operação que devem utilizar)

Catarina: A diferença é menos!

Rui: Ora! A diferença é menos! Ouviram o que a Catarina disse?

Alunos: Siiimmm!

Rui: A diferença é menos! Então faz lá a conta… (…)

O aluno escreve 40 - 29 e resolve (figura 3b)

Rui: Estás a ver? Também descobrimos que era onze mas não contámos pelos dedos… Estás a ver? Porque se fossem 400, ou 500, ou 1000 ou um número qualquer… Eu não posso estar a contar pelos dedos até 1000… Senão nunca mais lá chego e pelo caminho vou-me esquecer e vou-me baralhar e vou-me enganar… Por isso é que temos que saber a conta que temos que fazer para chegar a um resultado…

Quando o professor pergunta a Leonardo se é possível resolver o problema de outro modo (pretende uma representação mais formal), o aluno responde que fez uma conta "para ver se estava certo". Da mesma forma, outros colegas utilizam a representação simbólica para aferir o resultado, mas Rui pretende que o façam como estratégia de resolução e não apenas como forma de aferição. Assim, traduz para uma linguagem natural o significado de "29 + 11" e desafia os alunos a encontrar a representação simbólica que permite resolver o problema sem "contar pelos dedos".

No final Rui sistematiza a informação e explica aos alunos a importância do recurso a representações simbólicas. Entretanto, Sara apercebe-se que outro aluno utilizou uma estratégia de cálculo diferente das que foram apresentadas e dá essa informação ao colega:

Rui: Carlos explica lá…

Carlos: Eu fiz os vinte e nove… Depois vinte e nove, mais dez… Deu 39… Depois mais um… Deu 40…

> Sara: (…) Somou o 10 e chegou ao 39… Depois para o 40 só lhe faltava um… Então 10 mais 1… São 11… Ele fez mentalmente… Não foi? Também é uma estratégia! Em vez de estar a contar pelos dedos… Ele já sabia… Ele tem dez dedos… Se somasse dez… Ia logo ter 39. Para [chegar] ao 40, além das dez tinha que… Ainda faltava uma… Ele já não precisa de usar os dedos para contar mais dez…

Rui considera que a estratégia de Carlos é diferente da dos outros alunos (foi o único que recorreu ao cálculo mental) e pede-lhe que explique o que fez. Carlos refere que calculou mentalmente o resultado final, descrevendo cada um dos passos do seu raciocínio. Sara sente necessidade de explicitar um pouco mais a sua estratégia de forma a torná-la mais percetível para a turma. Para isso, estabelece uma ligação entre a explicação de Leonardo (que utilizou os dedos das mãos) e a de Carlos, valorizando o cálculo mental.

Conclusão

Os professores apresentam a tarefa num enunciado em linguagem verbal (com uma introdução e cinco questões) e com um gráfico de barras. Os alunos interpretaram individualmente sem dificuldade a informação dada no gráfico de barras, no contexto apresentado. Na resolução da quarta pergunta os alunos recorrem a diferentes representações para encontrar uma solução e evidenciam-se algumas dificuldades. Os professores optam por não intervir neste momento da aula, preferindo fazê-lo na discussão coletiva. Trata-se de uma decisão com implicações importantes, pois uma intervenção precoce corre o risco de tornar a tarefa demasiado fácil para os alunos, mas, uma intervenção tardia pode levá-los a desmotivar-se e a desistir. Ainda nesta fase, os alunos de Rui questionam-no várias vezes sobre as representações que devem utilizar mas o professor deixa-os escolher a representação que consideram mais adequada à situação. Na quarta pergunta, esta liberdade na escolha da representação mais adequada gera um leque variado de representações por parte dos alunos. Alguns recorrem a contagens de um em um (utilizando os dedos, fazendo desenhos e esquemas), outros utilizam o cálculo mental e alguns usam representações formais na forma de cálculo vertical. Curiosamente, alguns dos alunos que utilizam representações ativas e icónicas na resolução da pergunta recorrem ao cálculo vertical como forma de aferir se a sua resposta está correta (40-11=29).

A discussão coletiva surge como o momento mais importante da realização da tarefa. É nesta fase que os professores analisam as soluções apresentadas, recorrem às diferentes representações dos alunos e questionam-nos para que justifiquem o seu raciocínio. Sara sente necessidade de traduzir o enunciado da tarefa para linguagem natural, mas, por outro lado, quando os alunos explicam como encontraram a solução de uma questão, faz o processo inverso. Questiona-os de forma a expor todas as representações e estratégias que observou durante a exploração da tarefa, procurando que refiram as representações e estratégias que privilegia (cálculo vertical e utilizar as linhas do gráfico para o interpretar). Por sua vez, Rui, na discussão da quarta pergunta, também valoriza as representações dos alunos, que referem três estratégias aditivas diferentes com recurso a representações ativas e icónicas (contagem pelos dedos, desenho e cálculo mental), Procura que os alunos compreendam que apesar das representações serem diferentes as estratégias são semelhantes. Rui e Sara reservam para o final da discussão coletiva, a participação dos alunos que utilizaram a representação formal 40 – 29 = 11, e que transcrevem para o quadro, reforçando a ideia de que estas representações são mais eficazes, principalmente quando é necessário recorrer a números maiores.

Ao longo das aulas os professores promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos, nomeadamente durante o momento de trabalho autónomo e na discussão, quando procuram que os alunos expliquem e justifiquem o seu raciocínio. Sara recorre maioritariamente a perguntas envolvendo "Como" e "Porquê" e Rui pede também aos alunos que especifiquem melhor o seu raciocínio.

Na questão 4, apesar de a maioria dos alunos apresentarem estratégias de resolução informais, Sara e Rui procuram que os alunos compreendam que o conseguiriam fazer através de uma estratégia mais formal, envolvendo a subtração (40 – 29 = 11) proposta por um aluno em cada sala e pedem-lhes que expliquem como chegaram ao resultado final. Enquanto Sara recorre ao "Como" ("Mas como é que tu chegaste aos onze?"), Rui prefere tornar a tarefa mais difícil ("E se eu quisesse chegar até ao cem?") incitando a turma a encontrar outra estratégia. Na discussão coletiva da sala de Rui, depois de um aluno apresentar a representação formal (40 – 29 = 11), o professor reforça as vantagens de o fazer (Por isso é que temos que saber a conta que temos que fazer para chegar a um resultado…"). A forma como os professores questionam os alunos leva-os a justificar o seu raciocínio. Ao terem que explicar como resolveram a questão os alunos são levados a repensar no seu processo de resolução.

As ações dos professores têm assim um papel crucial na aprendizagem dos alunos. As suas decisões relativamente à forma como questionam os alunos, ao modo como conduzem os diversos momentos da aula e a liberdade que dão aos alunos na escolha das representações revelam-se determinantes.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Goldin, G. A. (2000). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

NCTM (2000). *Principles and norms of school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). *Cuiabá: UFMT*.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(4), 213-221.

Stylianou, D. A. (2011). The process of abstracting in students' representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *17*(1), 8-12.

Thomas, N. D., Mulliganb, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 117-133.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110-113.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O conhecimento didático de uma professora no ensino da relação bivariada na Estatística*

Sandra Quintas[1], *Hélia Oliveira*[2], *Rosa Tomás Ferreira*[3]
[1]Unidade de Investigação do IEUL, sandramquintas@gmail.com
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, hmoliveira@ie.ul.pt
[3]Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, rferreir@fc.up.pt

Resumo. *Este estudo debruça-se sobre o conhecimento didático de uma professora de Matemática no ensino da relação bivariada no tema da Estatística na disciplina de Matemática A, do ensino secundário. Em particular, foca-se no conhecimento do ensino de uma professora no âmbito deste tema e da forma como este se relaciona com outras dimensões do seu conhecimento didático. Os resultados evidenciam a complexidade de que se reveste o conhecimento do ensino da relação bivariada relativamente a como apoiar os alunos na análise e interpretação do coeficiente de correlação e no raciocínio com o modelo de regressão linear. Mostram também a estreita articulação entre o conhecimento do ensino e o conhecimento dos alunos e da aprendizagem no que diz respeito ao raciocínio sobre relações bivariadas.*

Palavras-chave: conhecimento didático; dados bivariados; raciocínio estatístico.

Introdução

A análise e interpretação de relações bivariadas é uma atividade importante em várias disciplinas e, por conseguinte, a literatura acerca do raciocínio sobre estes dados aponta a relevância desta temática na investigação de várias áreas tais como na Psicologia, na Ciência, na Educação Matemática e na Educação Estatística. Os conceitos ligados ao estudo de dados bivariados, nomeadamente, associação, correlação e regressão linear, são referidos no programa de Matemática A do 10.º ano, no tópico das distribuições bidimensionais, o tópico final do tema da Estatística. Vários autores referem a complexidade do ensino e aprendizagem sobre dados e relações bivariadas (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). A compreensão da regressão e correlação exige conhecimento básico sobre funções e, acima de tudo, a consideração da variação à volta de uma possível tendência (Engel & Sedlmeier, 2011). É neste contexto que surge o

* Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

presente estudo com o objetivo de compreender o conhecimento didático de uma professora, nomeadamente o seu conhecimento do ensino da relação bivariada e as conexões deste domínio com outros domínios do seu conhecimento didático que se evidenciam neste tema.

O conhecimento didático do professor em Estatística

O conhecimento profissional do professor de Matemática desdobra-se em várias dimensões, nomeadamente, o conhecimento na ação relativa à prática letiva, à prática não letiva, à profissão e ao seu próprio desenvolvimento profissional (Ponte & Oliveira, 2002). Ponte e Oliveira (2002) designam a dimensão do conhecimento profissional chamado a intervir diretamente na prática letiva por conhecimento didático. Apesar de, habitualmente, a Estatística ao nível escolar ser estudada na disciplina de Matemática vários autores reconhecem a especificidade do seu ensino (por exemplo, Garfield & Ben-Zvi, 2008). O modelo do conhecimento didático do professor em Estatística adotado neste trabalho tem como fonte de inspiração o modelo de Ponte e Oliveira (2002) que incorpora quatro domínios (o conhecimento de Estatística, do currículo, dos alunos e da aprendizagem, e do ensino), bem como um conjunto de aspetos apontados por Batanero e Godino (2005) que integram o conhecimento do professor que ensina Estatística. O conhecimento de Estatística refere-se ao conhecimento da disciplina e das interpretações dos seus conceitos, representações e procedimentos (Ponte & Oliveira, 2002). Integra a capacidade de reflexão sobre a natureza do conhecimento estatístico e sobre o significado de conceitos e procedimentos (Batanero & Godino, 2005). Inclui o conhecimento de ideias estatísticas essenciais (e.g. dados; variação; representações; correlação) e suas interligações (Batanero, Diaz, Contreras & Roa, 2013). O conhecimento do currículo inclui o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do currículo escolar e sua articulação vertical e horizontal (Ponte & Oliveira, 2002). O conhecimento dos alunos e da aprendizagem inclui o conhecimento das dificuldades, erros e obstáculos na aprendizagem dos conceitos, procedimentos e representações e das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas e ainda o conhecimento dos diversos níveis de compreensão dos alunos (Batanero & Godino, 2005; Ponte & Oliveira, 2002). O conhecimento do ensino compreende a capacidade de planificação da sequência de conteúdos, inclui a capacidade de ajustar conteúdos a diferentes níveis de ensino, tendo em conta o grau de profundidade com que estes necessitam de ser tratados e relacionados e ainda estratégias de ensino adotadas (por exemplo, uso de tecnologia).

Abarca também a capacidade de ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio e pensamento estatístico (Batanero et al., 2013). Este domínio do conhecimento didático é mais restrito e focado que o referido por Ponte e Oliveira (2002), na medida que se centra nos aspetos específicos do tema estatístico em estudo.

O ensino da relação bivariada

Para ensinar Estatística o professor precisa de ter experiência e familiaridade com elementos específicos do pensamento estatístico, nomeadamente, reconhecimento da necessidade de dados e seu conhecimento contextual, atenção à variação e raciocínio com modelos, integrando-os na sua prática (Wild & Pfannkuck, 1999). No ensino da Estatística, a compreensão do raciocínio sobre dados bivariados, também conhecido por raciocínio covariacional, deve suportar algo mais do que raciocinar sobre diagramas de dispersão, correlação, regressão e funções (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Deve envolver o entendimento de ideias de estrutura e "força" na relação bivariada, a análise residual e ajuste do modelo, bem como a compreensão do papel da relação bivariada em modelos e na previsão de eventos. No entanto, podem surgir dificuldades na interpretação do coeficiente de correlação linear (Engel & Sedlmeier, 2011; Shaughnessy & Chance, 2005). Por exemplo, um resultado de correlação linear alto não implica, por si só, a validade do modelo de regressão linear, havendo necessidade de se examinar cuidadosamente representações gráficas dos dados, tais como o diagrama de dispersão, devido à possibilidade de esta medida ser muito influenciada por *outliers*. Estes autores também referem exemplos de conjuntos de dados bivariados para os quais a afirmação de que a correlação positiva entre duas variáveis traduzida como *assim que uma delas aumenta, a outra também aumenta*, nem sempre é verdadeira. Para este caso, uma afirmação mais precisa é de que *valores acima da média de uma das variáveis correspondem a valores acima da média da outra variável*. Este conhecimento mais pormenorizado poderá contribuir para uma melhor apreciação da variação local e entendimento da fórmula do coeficiente de correlação.

Engel e Sedlemeier (2011) registam que, com frequência, este tipo de dados é trabalhado, na sala de aula, como uma dependência funcional de duas variáveis na Matemática, descurando-se a variação dos dados, o que consideram poder decorrer de uma falta de preparação na formação inicial sobre como lidar com esses conteúdos.

Em linhas gerais, diversos autores declaram que o tipo de tarefas propostas e a forma como são trabalhadas na sala de aula influenciam em grande medida a qualidade das aprendizagens dos alunos (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Ponte, 2005; Scheaffer, 2006). Em particular, na Estatística, destaca-se a relevância de se propor tarefas que incluam dados reais, elementos sobre o seu contexto e questões que valorizem os dados (Curcio & Artzt, 1996). Scheaffer (2006) acrescenta que tarefas desta natureza, que estimulam, em especial a análise de dados, facilitam o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos. Garfield e Ben-Zvi (2008) sugerem que atividades de estabelecimento de conexões entre valores de coeficiente de correlação e diagramas de dispersão pode permitir que os alunos desenvolvam melhor sentido dos diferentes níveis de covariação e entendimento acerca de fatores que influenciam que o coeficiente de correlação tenha valor maior ou menor. Atividades deste cariz são relevantes no desenvolvimento da capacidade de leitura de gráficos e apreciação das representações usadas, nomeadamente, as suas vantagens e desvantagens no processo de sumarização e de análise dos dados (Curcio & Artzt, 1996), no aprofundamento dos conceitos envolvidos e desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos (Garfield & Ben-Zvi, 2008). A tecnologia pode proporcionar a visualização de representações diversificadas, o estabelecimento de conexões entre elas, e ainda a exploração e manipulação dos dados, dando, assim, um apoio significativo à análise de dados (Engel & Sedlmeier, 2011).

Metodologia

Esta comunicação insere-se numa investigação mais ampla, qualitativa e de índole interpretativa sobre o conhecimento didático do professor no ensino da Estatística, no ensino secundário. Este texto refere-se a uma das três professoras participantes, Estela, que tem uma experiência profissional de mais de 20 anos.

Na recolha dos dados que informam esta comunicação foram usados diversos métodos, nomeadamente: (1) observação participante, com registo áudio e vídeo de aulas, numa turma de 10.º ano constituída por 25 alunos; (2) duas entrevistas semi-estruturadas à professora com registo áudio, antes e após a realização das aulas observadas; e (3) recolha documental dos materiais utilizados pela professora nestas aulas, designadamente fichas de trabalho. A análise de dados foi efetuada de forma descritiva e interpretativa, a partir da identificação de três episódios, cada um associado a uma tarefa realizada na aula. Estas tarefas foram escolhidas por abordarem os aspetos centrais do estudo da relação bivariada.

As aulas são habitualmente estruturadas e organizadas em torno da resolução das tarefas, que na maioria das vezes são trabalhadas pelos alunos com o apoio da calculadora gráfica. Estela tem a preocupação de envolver os alunos, quer nos momentos de exposição dos conteúdos quer nos de correção dos trabalhos, solicitando-lhes que respondam a questões ou que vão ao quadro ou ao computador (cujo ecrã é projetado na tela) mostrar a sua resolução de alguma questão com a calculadora gráfica. Todos os alunos possuem calculadoras gráficas, a maioria da mesma marca, e há alguns que possuem os modelos mais avançados.

O estudo da relação bivariada na prática de Estela

O estudo em torno das distribuições bidimensionais foi desenvolvido no decorrer de três aulas de 90 minutos, por conseguinte, as tarefas propostas nas aulas sobre esta temática foram sobretudo trabalhadas com o propósito de introduzir os conceitos e representações e ainda fornecer explicações que a professora considerou necessárias.

A equipa de basquetebol do Porto

Estela explicou que a tarefa *A equipa de basquetebol do Porto* (ver anexo) que preparou para levar à sala de aula foi reformulada aproveitando uma outra mais antiga que possuía. Manteve os dados reais e a reformulação consistiu na incorporação de três questões adicionais plausíveis de serem investigadas, em que cada uma delas relacionava duas variáveis em estudo. Na sala de aula foi analisada apenas a relação entre as variáveis "minutos de jogo" e "pontos obtidos" de uma dessas questões. Depois de ter pedido aos alunos para procederem à construção do diagrama de dispersão com essas variáveis, no seu caderno diário, e à sua representação na calculadora, Estela passou a fazer a leitura do diagrama chamando especialmente a atenção para a tendência global dos dados, mesmo quando uma aluna mencionou a existência de dados que não seguiam essa tendência. Adicionalmente, a professora deixou transparecer o entendimento que os alunos deveriam ter sobre a reta de regressão:

> Prof.: (…) O que é que reparam… Acontece que à medida que o tempo aumenta vocês vêm que os pontos também aumentam, ou não?
>
> Alguns alunos: sim.
>
> Joana: Há exceções.

> Prof.: Então diz…Há exceções… mas a maioria [dos pontos]…
>
> Alguns alunos: sim.
>
> (…)
>
> Prof.: (…) Estão a ver que ... parece que se consegue fazer passar uma reta, não por todos os pontos…ora bem… mas pela maior parte deles ou pelo menos mais próximo deles. Agora só falta descobrir como é que se desenha essa reta [na calculadora], certo? Esta reta chama-se reta de regressão (…)

Estela indicou que a reta de regressão servia para modelar a "tendência global dos dados" que expressa no diagrama de dispersão. Também definiu a reta de regressão como a "reta que melhor se ajusta aos pontos do diagrama de dispersão".

No desenvolvimento desta tarefa Estela orientou o trabalho dos alunos para uma atividade muito específica à volta da definição que forneceu para a reta de regressão. Pediu-lhes inicialmente que utilizassem os seus conhecimentos prévios sobre funções na determinação da expressão analítica de uma possível reta que melhor se ajustasse aos pontos do diagrama de dispersão (tendo em conta uma escolha conveniente de dois pontos quaisquer, que poderiam pertencer ou não ao diagrama de dispersão, através da observação desta representação). Depois explicou como determinar a equação da reta de regressão na calculadora gráfica. Na perspetiva de Estela esta atividade poderia facilitar o desenvolvimento das ideias dos alunos sobre a reta de regressão, nomeadamente, ao analisarem o quão afastada ou próxima a reta estimada se encontrava da reta de regressão.

Na exploração desta tarefa, quando os alunos confrontaram estas duas retas (a estimada e a de regressão) chegaram, de uma maneira geral, à conclusão de que elas eram diferentes mas que não estavam muito afastadas entre si, quando visualizadas em simultâneo sobre o diagrama de dispersão na calculadora gráfica. Na interação que teve com os alunos, Estela começou por lhes solicitar que representassem as duas retas na calculadora gráfica de modo a poderem compará-las:

> Prof.: Desenharam a reta que pedi… mas sabem uma coisa, a calculadora gráfica faz isso tudo sozinha! (…) Agora quero que vocês comparem… a que obtiveram pela máquina [referindo-se à reta de regressão] com essa à mão [em que se determinou a expressão analítica]?... Sabem como é que se faz na máquina? Para quem já fez na máquina, digam-me lá como é que se faz?
>
> Isabel: Mas ó Stora, mas não dá valores iguais! [referindo-se ao facto dos declives e ordenadas na origem não serem iguais nas duas retas]
> Prof.: Pois não! … É assim, eu disse-vos um ponto que tinha a certeza que a reta [de regressão] da máquina passava nele [centro de gravidade]; os

vossos colegas disseram o outro [(22,4; 9,6)] … E se ele não passa por (22,4; 9,6)?

(…)

Prof.: [Dá as instruções para se chegar à reta de regressão através da calculadora gráfica, explicando cuidadosamente o que cada instrução faz] E agora a equação [da reta de regressão] que a máquina me deu foi y=0.43x+0.135.

(…)

Prof.: E agora façam *graph* [para aparecer no visor a reta de regressão]... Ficou muito diferente da nossa?

Vários alunos: Nem por isso. Não.

Nesta interação, a professora reagiu ao facto de a aluna Isabel ter ficado surpreendida devido às duas retas construídas não apresentarem o mesmo declive e ordenada na origem. Estela referiu que em relação aos dois pontos usados para determinar a equação inicial da reta só havia a garantia de que um deles, o centro de gravidade, pertencia à reta de regressão que se procurava. Acabou por ser explicitamente assumido, pela professora, que a reta de regressão é aquela que melhor se ajusta à nuvem de pontos considerada e que o centro de gravidade é um ponto que lhe pertence. Este último facto foi confirmado quando os alunos verificaram que as coordenadas do centro de gravidade satisfaziam a equação da reta de regressão que tinham determinado através da calculadora gráfica:

Prof.: Agora podem verificar se aquele ponto [centro de gravidade] que eu disse que estava na reta de regressão, está lá.

(…)

Jaime: Está. Certíssimo.

Prof.: Não estou aqui para enganar ninguém como veem! (…) Afinal a reta passa mesmo por esse ponto!... Que é chamado centro de gravidade.

Durante o desenvolvimento desta tarefa, à semelhança do que aconteceu com Isabel, outros alunos mostraram-se intrigados com o facto de as duas retas que determinaram não coincidirem. A professora procurou explicar esta situação:

(…) Vocês viram um ponto que [achavam que] estava na reta… Como vocês não viram mais nenhum, eu sugeri um outro [ponto]… Calculámos à moda antiga a reta [ou seja, obteve-se à mão a expressão da reta que passava pelos dois pontos indicados], desenhei-a à mão… Depois fomos ver se o meu desenho [representação desta reta inicial, na calculadora gráfica] estava muito afastado do desenho [da reta de regressão] que a máquina fazia e vimos que quanto ao declive até nem estava muito mal [pelo facto dos seus valores estarem próximos]. Já a ordenada na origem calhou um bocado mal…mas isto à mão!

Neste excerto, Estela descreveu a sequência de trabalho que seguiram para chegar à reta de regressão. Contudo, não incluiu explicações que ajudassem a perceber com profundidade o motivo pelo qual a reta de regressão obtida com a calculadora se ajusta melhor aos dados fornecidos do que a reta estimada determinada inicialmente. No entanto, ainda na exploração desta tarefa, na introdução da noção de correlação entre as variáveis em análise, Estela estabeleceu conexões entre algumas ideias:

> Prof.: Então, outra coisa… [observando os pontos do diagrama de dispersão] À medida que o tempo aumenta…que os jogadores estão mais tempo em campo, em geral, eles marcam mais pontos… certo? Então, por essa razão dizemos que há correlação linear positiva… certo?… e quanto mais esses pontos [dados] se aproximam da reta…quanto menor for a distância dos pontinhos [do diagrama de dispersão] à reta de regressão… for menor para todos eles, mais forte é essa correlação!
>
> Isabel: É o que tu estavas a dizer! [diz a colega de mesa, em voz alta, para o Leonardo]
>
> Leonardo: São aqueles quadrados…
>
> Prof.: São aqueles quadrados a ficar mais pequenos [referindo-se aos resíduos que o aluno Leonardo tinha descoberto na sua calculadora… Como é que se mede essa correlação matematicamente… se é forte ou se é menos forte? À custa de cálculos que a máquina faz…. Aliás vocês têm a fórmula no livro.

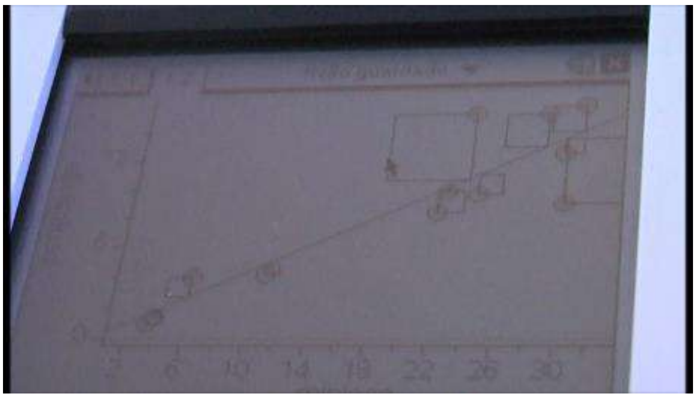


Figura1. Ecrã que inclui os resíduos obtidos pelo Leonardo na sua calculadora.

Neste excerto, a professora tentou associar algumas ideias: (1) a tendência observada no gráfico de dispersão para um aumento do "número de pontos" à medida que os "minutos de jogo" aumentam, com o declive positivo da reta de regressão e "correlação linear positiva"; e (2) a maior proximidade da reta de regressão aos pontos do diagrama de dispersão, o que traduz a existência de uma forte correlação linear entre as variáveis em estudo. Apesar de Estela mencionar de forma breve os "quadradinhos" que o Leonardo tinha conseguido fazer na sua calculadora gráfica mais avançada, parece desejar evidenciar a relação próxima entre "quadrados" eventualmente mais pequenos e a reta que melhor se ajusta à distribuição. Esta ideia poderia ter sido usada para justificar o facto da reta de regressão se ajustar melhor aos dados do que a reta estimada pelos alunos. Contudo, a maioria dos alunos não se apercebeu efetivamente do que tinha sido feito pelo Leonardo, dado que a professora apenas descreveu em voz alta à turma o conteúdo dos ecrãs da calculadora do aluno, para dar uma ideia do que é possível alcançar com uma calculadora mais avançada. Não aproveitou para questionar nem explicar o que os referidos "quadradinhos", cujos tamanhos variavam, poderiam efetivamente significar.

População residente em Portugal

Nesta tarefa que Estela escolheu do manual adotado (ver anexo), a professora manifesta a intenção de discutir a utilidade do modelo de regressão linear. No seu desenvolvimento, a professora solicitou aos alunos que introduzissem as listas de dados na calculadora e através dela obtivessem o diagrama de dispersão e a reta de regressão tal como estavam exibidos no enunciado. A seguinte interação ocorreu sobre o propósito deste modelo:

> Prof.: Portanto… Qual o papel principal deste modelo linear, ou seja, desta reta de regressão? O que ela pede é para estimar, fazer uma estimativa… prever! (…) Porque é que este modelo não serve para eu imaginar qual será a população daqui a não sei quantos séculos, nem serve para imaginar quantas pessoas existiam há não sei quantos séculos atrás?
>
> (…)
>
> Mariana: Ao substituir o *a* por um ano [na equação da reta de regressão]… e a população dar um valor normal.
>
> Prof.: O que é a população dar um valor normal?
>
> Leonardo: Superior a zero.
>
> Prof.: Superior a zero, pelo menos… Diz mais alto [disse para o Leonardo]?
>
> Leonardo: Ao prolongar-se a reta [à esquerda] vai passar por baixo de zero.
>
> Prof.: Exatamente. Se prolongarmos a reta [à esquerda] o que acontece?
>
> Vários alunos: Tínhamos população negativa.
>
> Prof.: Isto é impossível. Portanto há uns séculos atrás teríamos população negativa… Em contrapartida, se prolongássemos a reta [à direita]? O que acontecia?
>
> Vários alunos: A população vai crescer.
>
> Prof.: A população aumentava. A população crescia infinitamente. Isto não é possível? Porquê? Está aí [no manual] uma sugestão.
>
> (…)
>
> Prof.: "Não cabíamos cá todos". Mais? Os recursos são…?

Prof. e alunos: Limitados.

Nesta interação a professora tenta fazer com que os alunos se apercebam da limitação do modelo linear na previsão a médio e longo prazo da evolução da população portuguesa ou em estimar um valor aproximado dessa população nesses períodos. A professora acabou por fazer transparecer a ideia de que o modelo linear em causa era desapropriado para extrapolar em vários momentos no tempo, embora sem concretizar exemplos específicos. Contudo, não foram discutidos exemplos de momentos em que este modelo poderia, eventualmente, ser útil para estimar a população.

Associação entre diagramas de dispersão/nuvem de pontos e coeficientes de correlação

A professora escolheu do manual algumas tarefas que envolviam um conjunto de nuvens de pontos ou diagramas de dispersão aos quais se deveria fazer corresponder o respetivo valor de coeficiente de correlação linear de um conjunto de valores fornecidos. Estela referiu que para resolver estas tarefas, os alunos deviam considerar ou imaginar a reta que melhor se ajustasse aos pontos de cada diagrama de dispersão, e aquela que melhor o fizesse era a que possuía coeficiente mais forte, caso contrário, seria a mais fraca. Estela também sugeriu o recurso à calculadora gráfica como uma primeira abordagem à questão. Para tal, teriam de atribuir uma escala à quadrícula, determinar as coordenadas de cada ponto da nuvem de pontos (figura 2), colocar esses dados na calculadora gráfica e determinar através dela a reta de regressão e o coeficiente de correlação. Na entrevista, quando questionada sobre esta recomendação, Estela referiu-se à oportunidade que teve para mostrar a utilidade da calculadora gráfica na exploração dos dados incluídos na tarefa:

> … para eles próprios verem que também podem meter na calculadora gráfica [os dados]… situações do manual… se tiverem dúvidas e não conseguirem ver mais ou menos de cabeça … fazer uma estimativa [aventar uma possível resposta] (…) podem experimentar sem problemas de discutir, errar… aqui não há errar… há experimentar e concluir, colocar hipóteses e confirmá-las ou não.

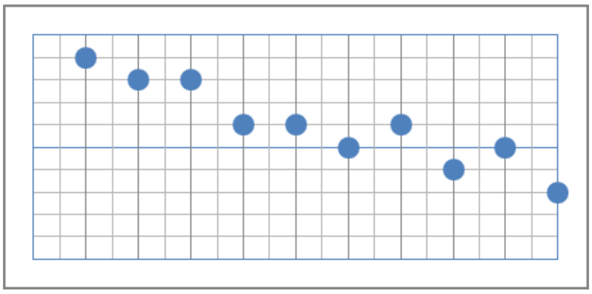


Figura 2. Nuvem de pontos à qual correspondia o coeficiente de correlação -0.94.

Esta estratégia foi usada sobretudo para se alcançar o resultado do coeficiente de correlação. Quanto à realização das associações requeridas, os alunos de uma maneira geral, não revelaram dificuldades em realizá-las. Os alunos descreveram a correlação entre as duas variáveis observadas em cada diagrama, em termos da "força" e sinal da relação. Ou seja, os alunos apoiaram-se na observação do valor do coeficiente de correlação: para valores próximos de 1 ou -1 afirmavam que a correlação era forte e para valores próximos de zero afirmavam que a correlação era fraca. Embora Estela tenha confirmado cada correspondência em interação com os alunos, não solicitou a justificação das suas respostas.

A concluir

Estela denota um *conhecimento do currículo* que a leva a selecionar um conjunto de situações que visam os objetivos indicados pelo programa do ensino secundário. No ensino da relação bivariada propôs tarefas com potencial para promover o desenvolvimento do raciocínio e pensamento estatísticos dos alunos (Curcio & Artzt, 1996; Scheaffer, 2006; Garfield & Ben-Zvi, 2008). As duas primeiras têm potencial para um aprofundamento da situação real, subjacente aos dados fornecidos, com base no raciocínio sobre o modelo de regressão linear. As tarefas de associação entre diagramas de dispersão e coeficientes de correlação linear podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos ao nível da compreensão da leitura de gráficos e aprofundamento dos conceitos envolvidos.

Relativamente ao *conhecimento de Estatística* destaca-se na Estela o entendimento da relação bivariada associada, muitas vezes, à dependência funcional de duas variáveis na Matemática, em que se atende sobretudo à tendência global dos dados (Shaughnessy & Chance, 2005). Por exemplo, a correlação positiva entre duas variáveis foi traduzida como *assim que uma delas aumenta, a outra também aumenta*, mesmo quando existiam alguns dados na distribuição que não acompanhavam essa tendência. Ao nível do *conhecimento do ensino* da relação bivariada observaram-se algumas dificuldades, apontadas na literatura, sobre como proceder e apoiar os alunos na análise e interpretação do coeficiente de correlação e no raciocínio com o modelo de regressão. Nas tarefas de associação entre diagramas e coeficientes de correlação, os alunos descreveram o coeficiente de correlação em termos de sinal e "força" e não lhes foi solicitada a justificação das respostas. Na análise de cada situação não foi ponderada a forma das distribuições em termos da existência de grupos ou *outliers*, nem como estes poderiam alterar o valor do coeficiente de correlação. Esta experiência pode conduzir os alunos à ideia de que a avaliação do valor do coeficiente de correlação por si só é suficiente para se tirar conclusões sobre a validade do modelo de regressão linear. A estratégia avançada por Estela de usarem a calculadora para calcular o coeficiente de correlação dos dados representados em diagramas de dispersão pareceu ter mais um propósito de obtenção do resultado do que proporcionar desenvolvimento de ideias intuitivas sobre correlação linear. De facto, é importante que no ensino da relação bivariada se atenda a fatores que possam influenciar diferentes níveis de covariação no desenvolvimento do raciocínio covariacional nos alunos (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Ainda no domínio do conhecimento do ensino, o raciocínio sobre o modelo de regressão linear, interligando-o com o contexto em que se inserem os dados, não foi visível na tarefa *A equipa de basquetebol do Porto*. Contudo, na tarefa *População residente em Portugal* a professora suscitou alguma discussão em torno das limitações do modelo de regressão embora pudesse ter incidindo também, por exemplo, em análises de exemplos concretos dentro e fora do intervalo de variação da variável "população", dando-se o devido valor aos dados.

A análise da prática de Estela revela também a necessidade de um forte conhecimento dos *alunos e da aprendizagem* que considere a especificidade do raciocínio sobre relações bivariadas. Por exemplo, na tarefa *A equipa de basquetebol do Porto*, na comparação entre "a reta que melhor se ajusta aos dados" a partir de dois pontos indicados com a reta de regressão que foi determinada diretamente da calculadora gráfica, ao contrário do que a professora estava à espera, a justificação da sua proximidade não foi suficiente para que todos os alunos aceitassem que a reta de regressão obtida na calculadora era a que procuravam. E apesar de Estela revelar perceber a importância da análise residual na avaliação da associação linear, não tirou partido da tecnologia disponível para o esclarecimento dessas dúvidas. Aproveitando o trabalho exibido pelo Leonardo na sua calculadora seria possível estabelecer uma comparação entre os tamanhos dos "quadrados" de ambas as retas, dado que a reta de regressão é aquela cuja soma das áreas dos quadrados é mínima.

A análise da prática da professora relativamente ao ensino da relação bivariada permite observar a forte conexão entre o *conhecimento do ensino* e o *conhecimento dos alunos e da aprendizagem* neste tema. Efetivamente, em alguns aspetos não parece ser considerada pela professora a complexidade de que se reveste para os alunos o raciocínio sobre dados bivariados que a leve a explorar com a necessária profundidade as noções e representações fundamentais que emergem a partir das tarefas que propõe.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Diaz, C., Contreras, J. & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7-18.

Batanero, C. & Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. In R. Luengo (ed.), *Líneas de investigatión en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Curcio, F. & Artzt, A. (1996). Assessing students ability to analyze data: Reaching beyond computation. *The Mathematics Teacher*, *89*, 668-673.

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 247-258). New York: Springer.

Estepa, A. & Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatterplots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *4*, 24-41.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching Practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Mugabe, D. A., Fernandes, J. A., Correia, P. F. (2012). Avaliação da associação Estatística num diagrama de dispersão por estudantes universitários. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 403-414). Coimbra: APM.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163.

Scheaffer, R. (2006). Statistics and mathematics: on making a happy marriage. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. & Chance, B. (2005). *Statistical questions from the classroom*. Reston, VA: NCTM.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

Anexo

Tarefa *A equipa de basquetebol do Porto*

Na tabela abaixo estão indicados a idade, a altura, e as médias por jogo, dos minutos em campo e dos pontos marcados, da equipa de Basquetebol do Porto na época 2000/2001 até à 13ª jornada segundo dados recolhidos no site da Infordesporto: www.infordesporto.pt. Analisa as questões:

(a) Será que existe alguma relação entre a altura do jogador e os minutos que este está em campo? Dito de outra forma, será que os jogadores mais altos são solicitados mais vezes a jogar?

(b) E entre a idade e os pontos que marca? Será que os jogadores mais novos marcam mais pontos?

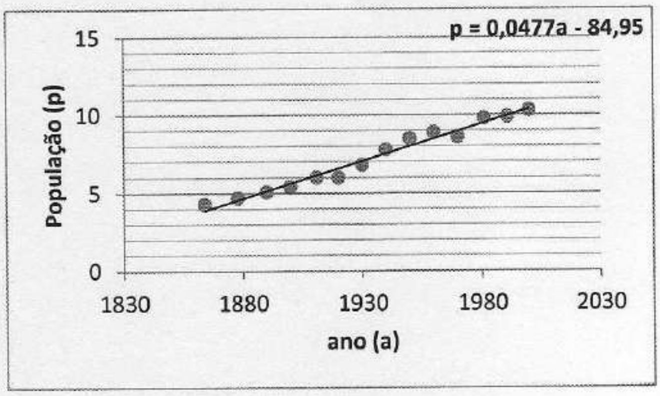
(c) E quanto à eficácia do jogo, será que existe relação entre os minutos de jogo e os pontos obtidos?

Jogador	Idade	Altura	Minutos/Jogo	Pontos/Jogo
Anthony Blackely	35	2.04	30	12.1
Elvis Évora	22	2.05	24.4	9.4
José Pedrera	28	2.02	22.4	9.6
Nuno Marçal	25	2.05	23.8	15
Nuno Perdigão	22	1.92	21.8	8.1
Nuno Quidiongo	24	1.80	5.9	4
Kevin Vulin	25	2.04	31.2	15.4
Paulo Cunha	20	2.00	3.5	1
Rui Santos	30	1.88	30.1	8.7
João Rocha	25	2.00	10.9	4.1
Raúl Santos	31	2.03	3.8	1.4
Bob Harsad	31	1.98	28.8	14.9

Tarefa *População residente em Portugal*

Na tabela seguinte, estão alguns dados sobre a população residente em Portugal, desde 1864 até 2000. O diagrama de dispersão relativo aos dados apresentados na tabela, assim como a respetiva reta de regressão e sua equação estão representados na figura abaixo.

Ano	Pop. em milhões	Ano	Pop. em milhões
1864	4,3	1940	7,8
1878	4,7	1950	8,5
1890	5,1	1960	8,9
1900	5,4	1970	8,6
1911	6,0	1981	9,8
1920	6,0	1991	9,9
1930	6,8	2000	10,3



Explique por que razão o modelo linear atrás apresentado não pode ser adequado para:

(a) estimar o número aproximado de habitantes, em Portugal, há uns séculos;

(b) prever a evolução da população portuguesa, a muito longo prazo (relacione uma tal previsão com os recursos, alimentares e outros, necessariamente limitados).

POSTERS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Metodologia estatística para a classificação das escolas secundárias em Portugal

Mário Oliveira[1], *A. Manuela Gonçalves*[2], *Marco Costa*[3]
[1]Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho, frei_mario@hotmail.com
[2]Departamento de Matemática e Aplicações, CMAT – Centro de Matemática, Universidade do Minho, mneves@math.uminho.pt
[3]ESTGA - Universidade de Aveiro, CMAF – Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais Universidade de Lisboa, marco@ua.pt.

Resumo. *Neste trabalho pretende-se efetuar um estudo, na área da Estatística, sobre a classificação das Escolas Secundárias (Portugal Continental e Ilhas) relativamente aos resultados alcançados pelos seus alunos nos Exames Nacionais. Tem-se como principal objetivo identificar grupos de Escolas com diferentes graus de desempenho considerando os subsistemas de ensino nacional público e privado, bem como a sua região. Para isso, é construído um indicador educativo alternativo aos denominados rankings do Ensino Secundário divulgados desde o ano de 2001 pelos meios de comunicação social.*

Palavras-chave: análise de clusters; classificação; indicador educativo; testes de hipóteses paramétricos e não paramétricos.

1. Introdução

A publicação em Portugal, pela primeira vez em 2001, da lista ordenada das Escolas com Ensino Secundário tendo por base os resultados dos Exames Nacionais do 12º ano inaugurou a polémica conhecida pela designação de "*Rankings* de Escolas". A ideia da comparação dos resultados escolares pode perspetivar o desejo de apresentar à sociedade civil um instrumento socialmente credível de avaliação das Escolas de significado direto e linear (Ventura e Costa, 2002).

Este trabalho resulta da necessidade de ordenar as Escolas Secundárias incorporando outros aspetos relevantes, em detrimento da utilização de *rankings* baseados unicamente nas classificações dos alunos nos Exames Nacionais. Tem-se como principal objetivo identificar grupos de Escolas com diferentes graus de desempenho considerando os subsistemas de ensino nacional público (Escolas Públicas) e privado (Escolas com Contrato de Associação e Escolas Particulares) e a sua região (nível nacional e nível regional). Para isso, é construído um indicador educativo alternativo, pretendendo-se incorporar outras variáveis consideradas relevantes para além das classificações nos exames nacionais.

2. Base de dados e metodologia

O conjunto de dados utilizado, fornecido pelo Júri Nacional de Exames, diz respeito aos resultados obtidos pelos alunos que realizaram Exames Nacionais, nos anos letivos de 2006/2007 a 2010/2011, por Escola e por disciplina.

Ao analisar-se o Despacho Normativo nº13-A/2012 é proposto o Indicador da Eficácia Educativa (EFI). O seu valor será apurado pelo $MISI$[1], e corresponde ao máximo resultante da aplicação de três condições: avaliação sumativa externa; diferenças entre a avaliação sumativa interna e externa; comparação da variação anual das classificações de exame, de cada Escola com a variação nacional.

No entanto, entende-se que o EFI deveria abranger os três itens acima expostos (e não apenas o máximo) e deveria ser calculado em função de cada disciplina, de forma isolada, para que o grande objetivo a que se propõe seja atingido, isto é, estabelecer mecanismos de exercício da autonomia pedagógica.

Neste trabalho, na construção de um novo indicador educativo, por disciplina, para além dos itens acima descritos considerou-se, também, a percentagem de reprovações, pois é uma consequência direta do insucesso escolar obtido.

Estabelece-se uma metodologia para a construção de um indicador alternativo para a classificação das Escolas do Ensino Secundário em que considera os alunos internos de cada Escola que realizam o Exame Nacional na 1ª fase, para definir um *ranking* das Escolas por disciplina, considerando para tal as Escolas com pelo menos 15 alunos que realizam exame, nas disciplinas mais concorridas: Matemática A, Português, Física e Química A e Biologia e Geologia.

O novo indicador IRD_d (Indicador *Ranking* por Disciplina) apresentado nas Figuras 1 e 2, visa servir de instrumento para que cada Escola possa refletir sobre o seu desempenho, nas diferentes disciplinas sujeitas a Exame Nacional.

---

[1] Gabinete Coordenador do Sistema de Informação do Ministério da Educação e Ciência.

$$IRD_d = \underbrace{60\%[M_d(E)]}_{\text{Desempenho dos alunos}} + \underbrace{\underbrace{25\%[\Delta M(\delta_d)] + 10\%[R_d(r_d)]}_{\text{Coerência da Nota Obtida na Escola}} + \underbrace{5\%[\Delta Anual(\delta_a)]}_{\text{Progressão anual}}}_{\text{Desempenho da Escola}}$$

$M_d(E)$: média no exame da disciplina d na Escola E;

$\Delta M(\delta_d)$: valoração da diferença entre a média, na disciplina d, das classificações internas finais e a média das classificações dos Exames Nacionais obtida na Escola E;

$R_d(r_d)$: valoração da percentagem de reprovações da disciplina d na Escola E;

$\Delta Anual(\delta_a)$: valoração da diferença entre a variação anual das classificações de exame, por disciplina, na Escola E, relativamente à variação anual da média nacional de exame, por disciplina, entre anos letivos consecutivos.

Figura 1. Proposta do IRD_d.

No que diz respeito a δ_d definiu-se a função ΔM:

$$\Delta M(\delta_d) = \begin{cases} 0 & se\ \delta_d \in [-100, -45] \\ 6\delta_d + 270 & se\ \delta_d \in]-45, -15] \\ 200 & se\ \delta_d \in]-15, 15] \\ \dfrac{-180\delta_d + 10080}{41} & se\ \delta_d \in]15, 56[\\ 0 & se\ \delta_d \in [56, 200] \end{cases}$$

Relativamente a r_d estabeleceu-se uma nova função R_d:

$$R_d(r_d) = -2r_d + 200, \qquad se\ r_d \in [0, 100]$$

Quanto a δ_a definiu-se a função $\Delta Anual$:

$$\Delta Anual(\delta_a) = \begin{cases} 0 & se\ \delta_a \in [-400, -20] \\ 5\delta_a + 100 & se\ \delta_a \in]-20, 20[\\ 200 & se\ \delta_a \in [20, 400] \end{cases}$$

Figura 2. Funções $\Delta M(\delta_d)$, r_d e $\Delta Anual$.

São, também, utilizados procedimentos da Estatística Multivariada com o objetivo de identificar, para determinadas áreas geográficas, grupos de Escolas com comportamentos mais semelhantes, de acordo com o IRD_d (Branco, 2004).

3. Resultados e conclusões

Este trabalho apresentou alguns exemplos que ilustram que os *rankings* elaborados com médias ponderadas podem originar ordenações globais das Escolas de forma inconsistente.

De acordo com o IRD_d, observa-se uma relativa uniformidade no comportamento do desempenho dos alunos nas disciplinas de Matemática A, Biologia e Geologia e Física e Química A. Os concelhos que apresentam melhores resultados situam-se na faixa Litoral a Norte do Tejo, com especial destaque para a região Centro. Os resultados de Português fogem em parte ao padrão descrito, sendo de realçar a assimetria Norte/Sul e Litoral/Interior.

Nos anos letivos em estudo, no *Ranking* das Escolas, de acordo com o IRD_d, conclui-se que das Escolas Públicas e com Contrato de Associação não há nenhuma que se consiga manter e/ou repetir nas 10 "melhores" Escolas nas disciplinas consideradas. É de salientar que a maioria presente nas 10 "piores" Escolas são as Escolas Públicas. Estas situam-se nos concelhos do Interior do país e do Arquipélago da Madeira.

A Análise de *Clusters* aplicada às disciplinas em estudo agrupou as Escolas em quatro ou cinco grupos. O teste não-paramétrico de Kruskal-Wallis e o teste não paramétrico de Tukey (Higgins, 2004) permitiram detetar as diferenças existentes nas distribuições dos grupos.

Por consequência, é uma ambição que o IRD_d possa ser utilizado como uma ferramenta de apoio à elaboração e análise dos próximos *rankings* por disciplina, bem como, para reformulação do indicador vigente, EFI, no Despacho normativo n.º 13-A/2012.

Referências bibliográficas

Branco, J.A. (2004). *Uma Introdução à Análise de Clusters*. Sociedade Portuguesa de Estatística. Évora.

Higgins, J.J. (2004). *Introduction to Modern Nonparametric Statistics*. Duxbury Advanced Series.

Ventura, A. e Costa, J.A. (2002). External Evaluation and the Organizational Development of Schools in Portugal: New challenges for General Inspectorate of Education. *The International Journal of Educational Management*. **16(4)**, 169-175.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O raciocínio estatístico dos alunos sobre covariação usando o Tinkerplots[1]

Patrícia Antunes[1], *Ana Henriques*[2]
[1]Instituto Vaz Serra, Cernache do Bonjardim, patricia.antunes@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, achenriques@ie.ul.pt

Resumo. *Este estudo exploratório visa compreender como os alunos do 10.º ano exploram relações entre variáveis e estabelecem a existência de covariação quando utilizam o TinkerPlots e de que modo o seu uso contribui para o seu raciocínio covariacional. Os dados foram recolhidos através de entrevistas que têm por base a realização de uma tarefa exploratória focada na compreensão do conceito de covariação, recorrendo ao TinkerPlots. Os resultados referentes a dois alunos, Margarida e Leo, revelam a sua facilidade em interagir com o software e em utilizá-lo para representar dados numa variedade de formas que lhe permitem identificar e descrever relações entre variáveis. Além disso, o estudo permite perceber as potencialidades do uso do TinkerPlots, na promoção do raciocínio covariacional dos alunos, embora mais evidente em Leo.*

Palavras-chave: Raciocínio Estatístico; Covariação; TinkerPlots; Diagrama de dispersão.

Contexto e Fundamentação

O conceito de covariação, inerente a numerosos fenómenos quotidianos, está relacionado com o raciocínio covariacional que tem sido definido como uma importante atividade cognitiva envolvendo a identificação e compreensão de relações entre dois atributos quando se atende à forma como eles variam em relação um ao outro (Zeiffler & Garfield, 2009). Dada a sua importância transdisciplinar, o estudo da covariação faz parte dos atuais Programas de Matemática do Ensino Secundário.

O raciocínio covariacional envolve processos como a formulação de hipóteses sobre a relação entre duas variáveis, a representação gráfica de dados bivariados que evidenciem ou facilitem a identificação de relações e a justificação verbal sobre a covariação (Ben-Zvi & Garfield, 2008). Reconhecendo a sua forte relação com as representações, Moritz (2004) propõe um modelo para investigar o raciocínio sobre covariação que envolve processos entre os dados numéricos, as representações gráficas

---

[1] Este trabalho foi realizado no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010) financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia.

e as afirmações verbais, que designa de translações: geração especulativa de dados e produção e interpretação gráfica.

No entanto, o raciocínio covariacional, focado em distribuições bivariadas de dados é bastante complexo e fonte de inúmeras incompreensões e dificuldades dos alunos, sobretudo na utilização de representações gráficas comuns, como por exemplo, o diagrama de dispersão, para estabelecerem relações (Estepa & Sánchez-Cobo, 2003). Neste sentido, a investigação sugere que o uso de abordagens gráficas e de tecnologia específica, como o TinkerPlots^{TM} (Konold & Miller, 2005), no ensino e aprendizagem da Estatística, pode ajudar os alunos a compreender conceitos e a desenvolver o seu raciocínio estatístico, nomeadamente sobre covariação (Fitzallen, 2012).

O contexto descrito evidencia a necessidade de aprofundar esta problemática pois os resultados da investigação ainda são insuficientes para guiar uma implementação eficiente de experiências de ensino efetivas no desenvolvimento da compreensão da covariação dos alunos que têm por base o uso deste *software*. Nesta comunicação apresentamos os resultados de um estudo exploratório que procura compreender como é que os alunos do 10.º ano exploram relações entre variáveis e estabelecem a existência de covariação, quando utilizam o TinkerPlots e de que modo o seu uso, em articulação com a tarefa proposta, contribui para o raciocínio covariacional dos alunos.

Metodologia

O estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa e tem uma natureza exploratória. Os alunos participantes no estudo frequentaram a disciplina de Matemática A, no ano letivo 2012/2013, num estabelecimento de ensino particular do interior centro do país. Nesta comunicação focamo-nos no raciocínio covariacional de Margarida e Leo, dois alunos que foram solicitados a participar numa entrevista áudio e vídeo gravada, realizada no final do ano pela primeira autora, seguindo os princípios e técnicas propostas por Goldin (2000). A estrutura da entrevista incluiu um protocolo explícito tendo por base uma tarefa desenhada para envolver os alunos na exploração de relações entre variáveis enquanto interagem com o Tinkerplots. Os dados das entrevistas foram analisados tendo em mente documentar o raciocínio covariacional dos alunos (Moriz, 2004) e o suporte fornecido pelo *software*.

Conclusões

Os resultados revelaram que os dois alunos têm facilidade em interagir com o TinkerPlots, utilizando-o para representar dados numa variedade de formas que lhe permitiram identificar e descrever verbalmente relações entre variáveis. Além disso, este estudo permitiu confirmar as potencialidades do tipo de tarefa e do uso do *software* na promoção do raciocínio covariacional do aluno, embora mais evidente em Leo.

Referências bibliográficas

Fitzallen, N. (2012). *Reasoning about covariation with tinkerplots*. PhD thesis, University of Tasmania, Tasmania.

Estepa, A., & Sánchez-Cobo (2003). Evaluación de la comprensión de la correlación y regresión a partir de la resolución de problemas. *Statistics Education Research Journal, 2*(1), 54–68.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Learning to reason about covariation. In Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (Eds), *Developing students' statistical reasoning* (pp. 289-308). New York, NY: Springer.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Konold, C., & Miller, C. (2005). *TinkerPlots: Dynamic Data Explorations* [software, Version1.0]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Moriz, J. (2004). Reasoning about covariation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield, *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 227-255). Dordrecht: Kluwer.

Zieffler, A., & Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 7-31.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A reflexão nos relatórios finais de estágio: Análise de uma experiência de ensino e aprendizagem em Estatística

Cristina Martins[1], *Manuel Vara Pires*[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, mcesm@ipb.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, mvp@ipb.pt

Resumo. *Nesta comunicação apresentamos resultados relativos a um estudo em desenvolvimento, focado na análise de experiências de ensino e aprendizagem na área da Matemática apresentadas nos relatórios finais da Prática de Ensino Supervisionada, do Mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico, da nossa instituição. Os resultados centram-se na profundidade das reflexões produzidas por uma futura professora. É possível concluir que as reflexões atravessam todos os níveis considerados na análise (recordação, racionalização, reflexividade), embora se manifeste uma maior incidência na descrição das tarefas desenvolvidas.*

Palavras-chave: Relatório final de estágio; Reflexão; Formação inicial.

Propósito da comunicação

O propósito da apresentação é analisar a reflexão sobre a prática de futuros professores, de forma a adiantar respostas à questão: Qual a profundidade alcançada nas reflexões escritas apresentadas pelos futuros professores no relatório final de estágio da Prática de Ensino Supervisionada (PES)?

Relatório final e reflexão

Nos mestrados profissionalizantes para o ensino, a PES é uma atividade integrada na iniciação à prática profissional, correspondendo ao estágio profissional, objeto de relatório final (DL n.º 43/2007, Art. 14). Na nossa instituição, este relatório deve apresentar, de forma contextualizada, experiências de ensino e aprendizagem realizadas ao longo do estágio, abrangendo os ciclos de ensino e disciplinas do domínio de habilitação, e reflexão crítica sobre as mesmas (Regulamento da PES-IPB, Art. 8).

Muitos autores reconhecem a estreita ligação entre a prática de sala de aula e a reflexão do professor ou futuro professor. Por exemplo, para Cole e Knowles (2000), a reflexão é um processo contínuo de análise e refinamento da prática do professor, centrado nos contextos pessoal, pedagógico, curricular, intelectual, social ou ético, associados ao trabalho profissional. Lee (2005) reforça a importância do raciocínio dos professores sobre o porquê de empregarem certas estratégias de ensino e como o podem melhorar para ter um efeito positivo sobre os alunos. Martins e Santos (2012) salientam que deve não só ser dada importância ao "pôr" os professores a refletir, mas também aos aspetos que essa reflexão contempla e à sua profundidade. A literatura descreve níveis, tipos ou dimensões de reflexão, abarcando desde descrições simples do pensamento sobre um único aspeto de uma aula até implicações éticas, sociais e políticas da prática docente (van Manen, 1977).

Metodologia de investigação

Neste estudo de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), focado na análise das experiências de ensino e aprendizagem, pretendemos categorizar os aspetos enfatizados nas reflexões produzidas e verificar a profundidade alcançada. A comunicação centra-se na análise da experiência apresentada por uma aluna, futura professora.

Relativamente à profundidade, seguimos os níveis de reflexão de Lee (2005): (i) nível de recordação (*recall level*), o futuro professor descreve o que experiencia, interpreta a situação recordando as suas experiências, sem considerar explicações alternativas; (ii) nível de racionalização (*rationalization level*), o futuro professor procura relações entre partes das suas experiências, interpreta a situação racionalmente, procura justificações para os acontecimentos; e (iii) nível de reflexividade (*reflectivity level*), o futuro professor aborda as suas experiências com a intenção de mudar ou melhorar no futuro, analisa as suas experiências a partir de diferentes perspectivas.

Profundidade da reflexão analisada

Na experiência de ensino e aprendizagem analisada, a profundidade do pensamento reflexivo evidenciou a presença dos três níveis de reflexão, com uma predominância do nível de recordação.

A reflexão situa-se no nível da recordação quando a futura professora identifica a tarefa proposta e os objetivos de aprendizagem a atingir ou refere as etapas da aula:

> Com a tarefa proposta [“Qual a média?”], pretendia que os alunos trabalhassem, do ponto de vista matemático, dois objetivos específicos principais: (1) distinguir dados de natureza qualitativa de dados de natureza quantitativa; e (2) compreender e determinar a média aritmética de um conjunto de dados.
> Iniciei a aula com um breve diálogo com os alunos (...). Distribuí as crianças em grupos heterogéneos. Entreguei a cada um dos alunos a ficha de trabalho a resolver em grupo.

A reflexão passa pelo nível de racionalização quando identifica as aprendizagens dos alunos ou constata a importância de realização de tarefas:

> No final da tarefa, verifiquei que os alunos descobriram o processo de cálculo da média [e] distinguiram bem dados qualitativos de dados quantitativos, mas tiveram dificuldades em estabelecer uma definição desse conceito. Tentei criar momentos de discussão entre os alunos, solicitando a explicitação dos processos de cálculo e a clarificação de raciocínios.

O nível de reflexividade é atingido quando, por exemplo, repensa a forma como organizou a ficha de trabalho:

> No enunciado da primeira questão, devia ter optado por colocar o nome dos [dos alunos] e não o seu número, pois a situação já envolvia uma complicada resolução e o facto de apresentar mais números dificultou ainda mais o raciocínio.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Cole, A., & Knowles, J. (2000). *Researching teaching: Exploring teacher development through reflective inquiry*. Boston: Allyn and Bacon.

Lee, H. (2005). Understanding and assessing preservice teachers' reflective thinking. *Teaching and Teacher Education, 21*, 699-715.

Martins, C., & Santos, L. (2012). Development of reflection ability in PFCM. In T. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 193-200). Taipei, Taiwan: PME.

van Manen, M. (1977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry*, *6*, 205-228.

SIMPÓSIO 3

ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS E ÁLGEBRA

Coordenadores: *António Borralho* & *Pedro Palhares*

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Ensino e aprendizagem de números e álgebra

António Borralho[1], *Pedro Palhares*[2]
[1]Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora
[2]CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho

Resumo. *Este texto pretende fazer uma apresentação do simpósio 3 – Números e Álgebra – em primeiro lugar através de um enquadramento teórico relativo aos conceitos e em segundo lugar introduzindo as comunicações aí constantes.*

Palavras-chave: Números; Álgebra; Pensamento algébrico.

Números e Álgebra – conceitos enquadrados

Coordenar um simpósio sobre esta temática remete-nos, incontornavelmente, para o XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática, realizado em Caminha, com o título *"*Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*"*. Números e Álgebra são dois assuntos fundamentais da Matemática escolar na maior parte dos países. Os Números com um papel preponderante nas aprendizagens matemáticas nos primeiros anos de escolaridade e a Álgebra como um assunto matemático basilar nos anos subsequentes. "Quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender e usar a linguagem abstracta da Álgebra fica *ipso facto* seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática." (Ponte, 2006). Nos anos mais recentes, em Portugal, estes temas têm merecido alguma atenção no campo da Educação Matemática, pois têm existido vários projectos de investigação e desenvolvidas várias teses de mestrado e doutoramento nestas áreas. Começa a existir no nosso país uma reflexão mais profunda e sistemática sobre o papel dos Números e da Álgebra no currículo, sobre as causas dos alunos portugueses não evidenciarem um desempenho muito favorável nestes campos e sobre o que se pode fazer para melhorar as respectivas aprendizagens.

São vários os aspectos a considerar no conceito de número (modelos e interpretações dos conceitos numéricos; operações; cálculo; algoritmos, estimativas; propriedades das operações com números;…) para além das diversas formas de representação dos números, como por exemplo por palavras, pelo sistema decimal , etc (Ponte, 2006). A partir dos números, fazem-se diversas operações quer mentalmente, quer com recurso a outros instrumentos de cálculo, onde estão patentes algumas propriedades importantes, ou mesmo a mera estimativa. A compreensão dos números, das ordens de grandeza e do significado das operações constitui a base do apelidado "sentido de número" (Mendes e Delgado, 2006). Além disso, os números e as operações constituem conjuntos com uma certa estrutura (algébrica) onde é possível estabelecer relações ou estudar determinadas propriedades. Todos estes aspectos estão, de uma forma ou de outra, integrados em qualquer currículo escolar com maior ou menor visibilidade e importância.

A visão mais comum da Álgebra é que se trata apenas de regras para transformar expressões com variáveis (monómios, polinómios, fracções algébricas,…) e processos de resolução de equações ou inequações, como se fosse uma miscelânea de letras com as quais se operam (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006). É usual encontrar terminologia compatível com aquela visão em programas portugueses e em manuais escolares que em vez de se referirem à "Álgebra", falam em "cálculo algébrico". É uma visão altamente redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática como por exemplo as relações e estruturas algébricas ou o estudo de funções.

O estudo da Álgebra inclui, para além de lidar com o cálculo algébrico, a capacidade de trabalhar com muitas outras estruturas matemáticas e de as usar na análise e interpretação de resolução de problemas matemáticos ou de outras áreas. Mas esta actividade associada com a Álgebra envolve, necessariamente, a manipulação de símbolos que é um dos elementos do pensamento algébrico mas, à semelhança do "sentido do número", também há o "sentido do símbolo" (Arcavi, 1994, 2006), ou seja, toda a actividade de interpretação e de uso criativo dos símbolos matemáticos para descrever uma situação ou resolver um problema. Desta forma, na actividade com a Álgebra, que envolve pensamento algébrico, é dada atenção não só aos objectos mas também às relações entre eles e, tanto quanto possível, de modo geral e abstracto.

Assim, um dos grandes objectivos do estudo da Álgebra, a nível escolar, é o da contribuição para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Este pensamento, além de incluir a capacidade de manipulação de símbolos, está intimamente relacionado com o estudo das estruturas, da simbolização, da modelação e do estudo da variação: "compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar mudança em diversas situações" (NCTM, 2000, p. 37).

Podemos afirmar que Álgebra é principalmente uma ciência acerca das relações e há, pelo menos, uma abordagem que combina o pensamento aritmético e algébrico. Trata-se de quando os alunos ficam envolvidos numa série de tarefas onde devem descobrir e perceber certas regularidades numéricas. Então, há a necessidade de formular regras e escrevê-las usando linguagem simbólica. Trata-se de um veículo para a generalização, ou seja, "generalização aritmética" e passamos para acções e raciocínios típicos da álgebra e que devem ocorrer desde os primeiros anos de escolaridade (Specht, 2005).

Números e Álgebra – as comunicações do simpósio

Este simpósio é constituído por cinco comunicações e dois *posters* que pretendem dar corpo a esta temática do ensino e aprendizagem dos números e da álgebra.

Ana Pereira e Ana Barbosa apresentam uma comunicação (*A visualização e o sentido de número: um estudo no 1º ano de escolaridade*) relativa a um estudo de caso qualitativo realizado com alunos do 1.º ano de escolaridade ligando a visualização com o sentido de número. Aos alunos foram apresentadas tarefas envolvendo contagens em contextos visuais e as autoras procuraram descobrir quais as estratégias usadas pelos alunos, bem como as dificuldades por eles sentidas. Numa comunicação rica em detalhes relativos ao trabalho realizado por dois alunos, as autoras puderam concluir ter havido influência no tipo de estratégias utilizadas, não só do tipo de contexto visual como do tipo de trabalho realizado na sala de aula. Como recomendação final as autoras sentiram a necessidade de haver promoção da argumentação e discussão de ideias na sala de aula.

Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte apresentam uma comunicação (*A aprendizagem de métodos formais num ambiente combinado de lápis e papel e folha de cálculo*) centrada na aprendizagem por parte de alunos do 9.º ano, de métodos formais na resolução de sistemas de equações, num ambiente combinado de papel e lápis e de folha de cálculo. Limitando a análise a duas alunas, puderam concluir que a partir de experiências informais houve uma aprendizagem gradual dos métodos formais. No que respeita às alunas estudadas, houve caminhos diferentes na ligação ao uso da folha de cálculo, enquanto uma aluna passou a usar sistematicamente a folha de cálculo, a outra recorreu sistematicamente aos métodos formais.

Marta Pinheiro e Ana Barbosa desenvolveram um estudo (*O Pensamento Algébrico em contextos visuais*) com alunos do 6.º ano de escolaridade, procurando entender aspetos do pensamento algébrico, estratégias e dificuldades sentidas pelos alunos. Fizeram-no a partir de um estudo de caso, tendo elaborado uma proposta didática em torno do pensamento algébrico ligado aos contextos visuais. Apresentam alguns resultados relativos a algumas tarefas, sendo de salientar concluírem que a abordagem através dos padrões em contextos visuais conduz ao desenvolvimento do pensamento algébrico e ao uso de estratégias diversas.

Paula Maria Barros, Cláudia Mendes Araújo e José António Fernandes apresentam uma comunicação (*Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes*) relativa a um estudo sobre os raciocínios de estudantes do primeiro ano do ensino superior na resolução de uma tarefa sobre matrizes. A partir desse estudo puderam concluir que houve dificuldades consideráveis sentidas pelos alunos na resolução da tarefa. Foram notados também ausência de conhecimentos sobre lógica clássica que interferiu nas justificações.

Neusa Branco e João Pedro da Ponte apresentam uma comunicação (*Desenvolvimento do conhecimento do ensino-aprendizagem da Álgebra na formação inicial de professores dos primeiros anos*) sobre um estudo realizado com alunos do 3.º ano do ensino superior relativo ao desenvolvimento do conhecimento que estes futuros professores têm das dificuldades dos alunos nas interpretações de expressões numéricas e das suas capacidades de generalização em sequências pictóricas. Através de um modelo de *design* research puderam concluir ter havido desenvolvimento do conhecimento didático e da capacidade de análise da prática profissional por parte dos futuros professores.

Fernando Luís Santos e António Domingos apresentam um *poster* (*A complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens: usando a teoria da atividade*) em que propõem um modelo de análise para aferir da complexidade do pensamento matemático a partir de respostas a certas questões colocadas, baseado nas teorias de David Tall e modelo SOLO.

Manuel Vara Pires apresenta um *poster* (*Exploração matemática do triângulo de Pascal feita por alunos do 5.º ano*) relativo a uma experiência de aprendizagem no 5.º ano de escolaridade consistindo na exploração de relações numéricas no triângulo de Pascal. Da análise dessa experiência concluiu ter havido desenvolvimento das capacidades de comunicar, argumentar e generalizar.

Referências bibliográficas

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35. Retirado em 24 de Novembro de 2012 em http://flm-journal.org/FLMArcavi.pdf

Arcavi, A. (2006). El Desarrolo y el Uso del Sentido de los Símbolos. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Mendes, F., & Delgado, C. (2006). Sentido do número: um estudo no 1.º ciclo do ensino básico. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 147-156). Lisboa: SEM-SPCE.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Specht, B. J. (2005). Early algebra – Processes and concepts of fourth graders solving algebraic problem. In *Proceedings of CERME4* (706-716). Retirado em 24 de Novembro de 2012 em http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/6/Mutschler.pdf

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 193-212). Lisboa: SEM-SPCE.

COMUNICAÇÕES

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A visualização e o sentido de número: um estudo no 1º ano de escolaridade

Ana Pereira[1], *Ana Barbosa*[2]
[1]Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, anaisabelpereira1987@gmail.com
[2]Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo. *Esta comunicação pretende descrever um estudo realizado com alunos do 1.º ano, centrado na resolução de tarefas de contagem em contextos visuais. Procurou-se conhecer as estratégias usadas pelos alunos, as dificuldades que emergem do seu trabalho e perceber qual o impacto deste tipo de tarefas no desenvolvimento do sentido de número. Tendo em conta as características do estudo optou-se por um design de estudo de caso qualitativo. São apresentados alguns resultados decorrentes da implementação de duas tarefas com os dois alunos-caso. Globalmente, estes resultados revelam que os contextos visuais permitem a emergência de estratégias de contagem diversificadas. Quando estes contextos estão associados a situações conhecidas, os alunos sentem-se mais motivados e mobilizam conhecimentos prévios, abandonando estratégias como a contagem um a um. Não só o contexto mas também o trabalho realizado na sala de aula influencia o tipo de estratégias de contagem usadas. Neste sentido, é natural que os alunos que não estejam familiarizados com este tipo de tarefas privilegiem, pelo menos na fase inicial, o contexto numérico por não sentirem segurança nas estratégias associadas à visualização. Torna-se assim essencial promover a argumentação, privilegiando a discussão de ideias em sala de aula.*

Palavras-chave: sentido de número; visualização; estratégias de contagem; aprendizagem.

Introdução

Desde os primeiros anos de escolaridade devem proporcionar-se às crianças experiências de aprendizagem que permitam o desenvolvimento de bases matemáticas sólidas (NCTM, 2007). É importante que o ensino da Matemática potencie a interiorização de competências mais rotineiras, um bom domínio dos números e do cálculo, indispensáveis para a resolução de diferentes situações problemáticas no dia a dia (Ponte & Serrazina, 2000). Na verdade, o desenvolvimento do sentido de número deve ser um dos principais objetivos da escolaridade obrigatória e deve ser potenciado desde os primeiros anos (McIntosh, Reys & Reys, 1992) pois os alunos devem compreender globalmente os números e as operações e recorrer a esse conhecimento para desenvolver estratégias eficazes para os manipular e fazer julgamentos matemáticos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Para potenciar este desenvolvimento considera-se vantajoso promover o pensamento espacial, associado a tarefas que envolvam o uso de materiais como dados, dominós, cartas com pintas com disposições diversificadas ou a moldura do dez (Bobis, 2008). A componente intuitiva da visualização assume um papel importante na compreensão e construção do número pois permite que as crianças estabeleçam relações numéricas e usem valores de referência, que constituem a base para o desenvolvimento de estratégias criativas e flexíveis (Bobis, 1996).

Tendo por base as ideias explicitadas anteriormente, este estudo tem por objetivo compreender a forma como tarefas de contagem em contextos visuais influenciam o desenvolvimento do sentido de número em alunos do 1º ano de escolaridade. A partir deste problema foram formuladas as seguintes questões orientadoras: 1. Que estratégias mobilizam os alunos na resolução de tarefas de contagem em contextos visuais?; 2. Que dificuldades manifestam os alunos na resolução dessas tarefas?; 3. Qual o impacto das tarefas de contagem em contextos visuais no desenvolvimento do sentido de número?

Enquadramento teórico

A expressão sentido de número surgiu nos anos 80 para substituir o termo *numeracia*, que significava apenas a habilidade para lidar com situações matemáticas básicas do quotidiano (McIntosh et al., 1992). Apesar da expressão sentido de número ser simples e apelativa estes autores reconhecem que é alvo de interpretações muito diversas, o que tem gerado discussões entre professores, investigadores e responsáveis pela formulação de currículos.

Howden (1989) descreve sentido de número como sendo uma boa intuição acerca dos números e das suas relações. Segundo este autor o sentido de número só poderá ser desenvolvido através da exploração dos números, da sua visualização numa variedade de contextos e do estabelecimento de relações que constituam alternativas aos algoritmos tradicionais. De um modo abrangente, reconhece-se a importância de uma compreensão flexível e geral dos números e das operações para desenvolver estratégias e julgamentos matemáticos eficazes para resolver situações no quotidiano (Castro & Rodrigues, 2008b; McIntosh et al.,1992).

Apesar do sentido de número ser uma capacidade complexa, as suas bases começam a desenvolver-se nos primeiros anos de vida (Clements & Sarama, 2009), com o estabelecimento de relações numéricas de natureza diversa. Para além destas, a contagem oral e a contagem de objetos devem ser amplamente desenvolvidas pois constituem a base para aprofundar o conceito de número (NCTM, 2007). Considerando em particular as estratégias de contagem, foram já efetuados alguns estudos (Clements, 1999; Clements & Sarama, 2009; Fosnot & Dolk, 2001; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Pereira, 2013; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010), a partir dos quais se construiu e refinou a categorização que se apresenta na Tabela 1.

Tabela 1. Categorização das estratégias de contagem Pereira (2013)

<table>
<tr><th>Estratégias</th><th colspan="3">Descrição</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Subitizing</td><td colspan="3">Subitizing percetual: reconhecer um número de imediato sem usar outro processo matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subitizing conceptual: reconhecer uma disposição padronizada de um número como sendo a composição de partes que formam um todo.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Contagem</td><td colspan="3">Contagem um a um</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Contar a partir de um dado número que não seja o 1</td><td>Contagem para trás</td><td>Oralmente</td></tr>
<tr><td>Contagem para a frente</td><td>Com modelos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contar por saltos (e.g. de 2 em 2) – apresenta o conhecimento de padrões numéricos e é útil quando se está face a muitos elementos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Estabelecimento de relações numéricas</td><td colspan="3">Mais do que, menos do que e igual a</td></tr>
<tr><td colspan="3">Uso de números de referência, como o 5 e o 10.</td></tr>
<tr><td>Relações parte-parte-todo - conceptualizar que um número pode ser dividido em duas ou mais partes e que as partes fazem o todo.</td><td colspan="2">Decomposição - reconhecimento que o todo é constituído por partes
Composição - reconhecimento das partes que fazem o todo
Ambas as situações correspondem a representações numéricas equivalentes</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Factos básicos ou específicos – factos numéricos memorizados e que constituem a base para outras estratégias de cálculo.</td><td colspan="3">Dobros (adição de parcelas iguais)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Quase dobros - incluem combinações em que uma das parcelas é mais um ou menos que um do que a outra.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Combinações cujo resultado é 5 ou 10.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Reconhecimento do zero como elemento neutro da adição</td></tr>
</table>

Para potenciar o desenvolvimento de estratégias de contagem diversificadas e cada vez mais eficientes, tem sido sugerido o uso de modelos estruturados de contagem, como o colar de contas, cartões com pontos organizados de forma padronizada ou em arranjos diversos, a moldura do dez e o ábaco horizontal (ME-DGIDC, 2007). Salienta-se nestes casos o papel dos padrões, que podem assumir diversas formas: padrões espaciais (dominós), padrões de dedos, rítmicos e os que conjugam os espaciais com os rítmicos (Clements, 1999).

Atualmente reconhece-se que a visualização é uma capacidade importante para a compreensão matemática (Duval, 1999), contudo tem-se desvalorizado o seu papel nas aulas de Matemática. Segundo Arcavi (2003), uma vez que normalmente as tarefas de carácter visual não implicam a aplicação de procedimentos rotineiros, tanto alunos como professores tendem a rejeitar estas tarefas por não se sentirem confiantes, sendo notória a sua mobilização na Geometria e não tanto noutras áreas que remetem para aspetos numéricos. Apesar desta desvalorização parte-se do princípio que as atividades associadas à visualização, tendo por objetivo o desenvolvimento do sentido de número, permitem a emergência de estratégias de contagem importantes, como o *subitizing* percetual e o *subitizing* conceptual (Clements, 1999). De acordo com Clements e Sarama (2009) o *subitizing* permite a emergência de capacidades como a cardinalidade e a conservação (a disposição não interfere na quantidade). Por outro lado, o *subitizing* conceptual facilita a compreensão de relações parte-parte-todo, permitindo ver que os números são compostos de outros números (Bobis, 1996). Estes aspetos contribuem para melhores desempenhos, para a utilização de estratégias mais sofisticadas e para a atribuição de significado a factos básicos (Castro & Rodrigues, 2008a). Desta forma, o *subitizing* conceptual apoia o desenvolvimento do sentido de número e de capacidades aritméticas (Clements, 1999).

É incontornável o uso de materiais que apelem à visualização, com enfoque no desenvolvimento do sentido de número. Contudo reconhece-se que o desenvolvimento desta capacidade será mais significativo para os alunos se estes tiverem oportunidade de verbalizar e registar junto dos seus pares e professor as suas descobertas (Howden, 1989; NCTM, 2007).

Metodologia do estudo

Tendo por base o problema e questões de investigação definidos, este estudo segue uma abordagem qualitativa, tendo-se optado por um *design* de estudo de caso. Através da metodologia qualitativa procura-se desenvolver a compreensão de fenómenos e a descrição de realidades de uma forma minuciosa, aumentando a perceção do investigador sobre as situações estudadas (Patton, 2002). Por outro lado, o estudo de caso constitui uma abordagem que se adequa à compreensão e ao conhecimento detalhado do objeto em estudo (Stake, 2009), através da análise de uma situação específica que se supõe ser única.

A investigação decorreu no ano letivo 2011/2012, numa turma do 1º ano de escolaridade, integrada numa turma mista (1º e 2º anos), de uma escola básica do distrito de Viana do Castelo. Durante o estudo, foram implementadas treze tarefas centradas na contagem em contextos visuais que os alunos exploraram individualmente. Apesar de toda a turma ter resolvido as tarefas propostas, dois alunos foram acompanhados, a um nível mais aprofundado, constituíram os casos.

Os dados recolhidos são de natureza descritiva resultantes da observação participante, entrevistas, gravações áudio e vídeo e análise documental. Cada uma das sessões foi videogravada para posterior visionamento e análise. Após a implementação de cada tarefa foram realizadas entrevistas semiestruturadas aos alunos-caso, tendo sido audiogravadas e transcritas. Através das entrevistas procurou-se identificar e clarificar as dificuldades e estratégias emergentes em cada tarefa. Neste texto, optou-se por apresentar a análise do trabalho dos dois alunos caso, Carla e Vasco, na resolução de duas das tarefas implementadas.

A exploração das tarefas

As tarefas aqui apresentadas tiveram uma fase exploratória, em grande grupo, com vista à sua contextualização e clarificação.

Para a tarefa *As unhas da Sara* foi lida uma carta que trazia um desafio dirigido aos alunos (ver Anexo 1). Após a leitura da carta foi afixada no quadro uma imagem para que a turma descobrisse o número de unhas pintadas e por pintar (ver Figura 1). Posteriormente desenvolveram um trabalho individual tendo por base imagens similares (ver Anexo 2).

Figura 1. Imagem explorada na tarefa 1

Na tarefa *Dados com pinta* os alunos observaram as faces de um dado e identificaram as quantidades apresentadas, de modo a familiarizarem-se com este material.

Posteriormente desenvolveram um trabalho individual tendo por base um contexto figurativo que remetia para disposições similares (ver Anexo 3).

O caso da Carla

A Carla tinha seis anos no início do estudo. Enquanto aluna era empenhada, participativa e revelava bom comportamento. Não evidenciava dificuldades em nenhuma das áreas curriculares. Gostava "mais ou menos" de Matemática pois, segundo ela, não sabia muito e tinha contas muito difíceis mas, no entanto, tinha um bom aproveitamento na disciplina.

Tarefa As unhas da Sara

Na fase exploratória da tarefa (ver Figura 1), a Carla identificou imediatamente duas unhas pintadas. Contudo, a sua justificação não foi clara, dizendo que via "duas pintadas mas depois não acabaram", o que indicia o recurso ao *subitizing* percetual. Relativamente ao número de unhas que faltavam pintar a aluna disse que eram oito, procurando fundamentar o resultado:

> Carla: É 6 menos 1.
> Investigadora: Se tenho 6, tiro 1 ficam?
> Carla: 5… é 9. 9-1. (a aluna levantou 9 dedos e baixou 1)

Com a solicitação de uma explicação, a Carla encontrou uma expressão equivalente, subtraindo 1 a 9, usando como modelo os dedos das mãos, no entanto, sem associação à imagem.

As resoluções referentes à fase do trabalho individual apresentadas serão analisadas pela ordem que consta na Figura 2.

Figura 2. Sequência das imagens apresentadas na folha de registo

Relativamente à primeira imagem, para justificar o número de unhas pintadas como as que estavam por pintar, a Carla apresentou o cálculo 3+2. Apesar de constituir uma decomposição adequada do número 5, não correspondia à forma como pensou pois, aquando da entrevista, identificou de uma forma instantânea o número de unhas dizendo "as mãos eram 5". Revelou um reconhecimento imediato do número pelo facto de os dedos das mãos constituírem um modelo de contagem de referência. Contudo, quando confrontada com os seus registos, referiu que "queria fazer a conta", mostrando que a visualização não é por si validada como uma forma de justificação neste contexto.

Na segunda imagem usou o *subitizing* conceptual, facto que se evidenciou na sua resposta:

> Carla: Vi logo que tinha aqui 5 numa mão e aqui tem mais dois dedos noutra mão e eram 7.

Este raciocínio traduziu-se na expressão numérica 5+2. Relativamente ao número de unhas por pintar a Carla respondeu imediatamente que faltavam 3 unhas (*subitizing* percetual) pois "já sabia que eram 3 sem contar".

Na terceira imagem, para o número de unhas pintadas, a Carla registou a expressão 2+1, referindo que "já sabia que era 3 mas quis fazer a conta", como forma de justificar a sua resposta, evidenciando um raciocínio associado ao *subitizing* percetual. No que respeita ao número de unhas por pintar, disse que tinha visto 2 unhas numa mão e 5 noutra (*subitizing* conceptual), decompondo o 7 em duas partes associadas aos dois conjuntos de dedos.

Para a quarta imagem a Carla visualizou 5 unhas pintadas numa mão e 4 noutra, tendo registado a expressão 5+4 (*subitizing* conceptual). Relativamente à unha que faltava pintar referiu que "sabia que era um então pus uma conta 1+0 que dava um porque o zero não existe". Optou por registar esta expressão (ver Figura 3) para suportar a sua justificação, mas na base do seu raciocínio esteve o *subitizing* percetual.

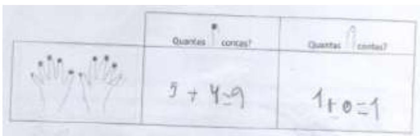


Figura 3. Registo da Carla na resolução da tarefa *As unhas da Sara* (imagem 4)

Para a última imagem (ver Figura 2), relativamente ao número de unhas pintadas, a aluna disse que "já sabia, mas quis fazer a conta. Pus 2+2 que é 4". Apesar de ter apresentado esta expressão, na entrevista identificou imediatamente 4 unhas pintadas. Relativamente ao número de unhas por pintar, apresentou um cálculo que justificou dizendo que "foi porque 5+1 é 6". A aluna recorreu a um facto específico para se justificar, no entanto, na entrevista disse que eram "6 e não contei nem nada" (*subitizing* percetual).

Em síntese, o contexto apresentado potenciou a mobilização de conhecimentos prévios associados a factos memorizados para justificar o *subitizing* percetual. Emergiu igualmente o *subitizing* conceptual quando se verificou a conjugação de unhas pintadas ou por pintar nas duas mãos. A Carla fez igualmente referência ao elemento neutro da adição.

Tarefa Dados com pinta

Após a resolução individual da tarefa, verificou-se que a Carla identificou visualmente os dobros nos pares de dados (*subitizing* conceptual). Esta identificação permitiu que a aluna justificasse, em parte, a presença das 24 pintas (Figura 4):

> Carla: Ali tem 3+3 que dava 6 e depois pus aqui o 6; e depois 1+1 e então dava 2 e pus aqui o 2 e depois 2+2 para ser mais rápido pus o 4 e depois aqui pus 6 porque isto daqui dava 6 (apontou para o conjunto 3+3 na parte inferior da imagem) e foi aqui o 1+1 igual a 2 e eu pus 2 para ser mais rápido e tudo dá 24.

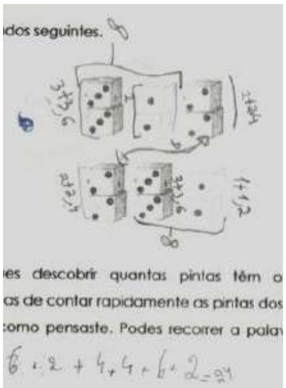


Figura 4. Registo da Carla na resolução da tarefa *Dados com pinta*

Com a identificação dos dobros associada ao contexto visual, a Carla não achou necessário fazer cálculos uma vez que viu imediatamente o número de pintas de cada conjunto, tendo recorrido ao *subitizing* conceptual. Posteriormente, reajustou a sua estratégia, efetuando o reagrupamento dos diferentes conjuntos em grupos de 8, partindo dos conjuntos iniciais:

> Carla: Por exemplo 6+2, 8, mais 4+4, 8 e depois 6+2 dá 8 (a aluna levantou os dedos para modelar as diferentes parcelas de cada calculo apresentado) (….) Dava tudo 8. Pus 8+8+8 para dar 24.

Os grupos de 8 foram facilmente identificados através do *subitizing* conceptual, gerando a expressão numérica 8+8+8, pois, segundo a aluna, “8+8, 16, 16+8. 16…17, 18 (….) 24”. Esta contagem foi apoiada nos dedos.

É notório que este contexto serviu de base à emergência do *subitizing*, percetual e conceptual, com o reconhecimento de factos numéricos. A Carla privilegiou a adição de parcelas iguais para efetuar contagens rápidas, baseando-se em factos específicos. A contagem *a partir de*, apoiada nos dedos, permitiu a concretização dos seus raciocínios.

O caso do Vasco

O Vasco tinha seis anos no início do estudo. No início do ano letivo evidenciava inseguranças que se foram dissipando com o tempo. Não revelava dificuldades nas diferentes áreas curriculares e a sua disciplina preferida era a Matemática pois gostava de fazer contas.

Tarefa As unhas da Sara

Quando confrontado com a imagem apresentada à turma (ver Figura 1), o Vasco identificou imediatamente o número de unhas pintadas, justificando-o com a visualização do dedo "pequeno e um grande no meio". Relativamente ao número de unhas por pintar disse "porque pintaram duas brancas e deixaram 8 por pintar", o que indicia o recurso ao *subitizing* percetual.

Após a resolução da tarefa, tentou mostrar os seus registos à investigadora com o objetivo de validar o que tinha feito. Para a primeira imagem (ver Figura 2) apresentou o registo 5+5 mas, quando questionado sobre essa expressão, verificou que se estava a referir ao número total de unhas. Apercebendo-se do erro no registo, retificou-o, mencionando apenas a quantidade representada. A fundamentação desses resultados surgiu durante a entrevista em que o Vasco disse que "tinha 5 unhas pintadas e outras 5 por pintar". A utilização de um modelo familiar, como as mãos, levou o aluno a associar de forma imediata uma mão a 5 dedos, o que conduziu ao *subitizing* percetual.

Na segunda imagem (ver Figura 5), ao verificar que nas duas mãos estavam unhas pintadas, o aluno reconheceu visualmente o 7 pois viu "5 unhas numa mão e duas noutra", o que evidencia o *subitizing* conceptual. Relativamente ao número de unhas por pintar, o Vasco registou apenas a quantidade pois "faltavam 3 unhas por pintar" (*subitizing* percetual).

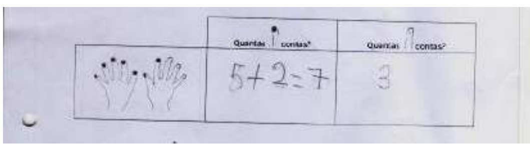


Figura 5. Registo do Vasco na resolução da tarefa *As unhas da Sara* (imagem 2)

No que respeita à terceira imagem (ver Figura 2), limitou-se a registar o número de unhas pintadas e por pintar. Quando questionado, o Vasco respondeu que tinha “3 pintadas e tinha 7 por pintar”, o que revela o *subitizing* percetual. Para as quarta e quinta imagens, evidenciou esta estratégia tendo registado o número total de unhas.

É notório que este contexto serviu de base à emergência do *subitizing* percetual. O uso desta estratégia esteve associado ao conhecimento que o aluno tinha do número de dedos que possuímos nas duas mãos. A partir do que era apresentado nas imagens, descreveu o que estava a visualizar para sustentar o seu raciocínio.

Tarefa Dados com pinta

Após a leitura do enunciado o Vasco efetuou a contagem um a um das pintas observadas, concluindo “tem 24”. Quando lhe foi pedido para arranjar uma forma mais rápida para contar, o aluno disse “20+4” (Figura 6).

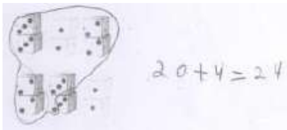


Figura 6. Registos do Vasco na resolução da tarefa *Dados com pinta*

Esta situação é reveladora da utilização de um facto memorizado pelo aluno e que nada tinha a ver com o contexto em questão, pois procedeu à contagem um a um até 20, deixando 4 pintas de fora. O aluno referiu também a expressão 21+3, tendo apresentado a justificação:

> Vasco: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 (o aluno não havia marcado o número 20) (…) Não é preciso marcar pois já sabemos (o aluno referia-se ao facto de existirem 4 pintas). 20, 21+3, 24.

O Vasco acabou por se basear na contagem por saltos de 2 em 2. A associação entre a estratégia de contagem e contexto visual foi evidente, pois registou ao lado de cada um dos conjuntos de 2 o salto correspondente (ver Figura 7). Procedeu da mesma forma para a expressão 22+2.

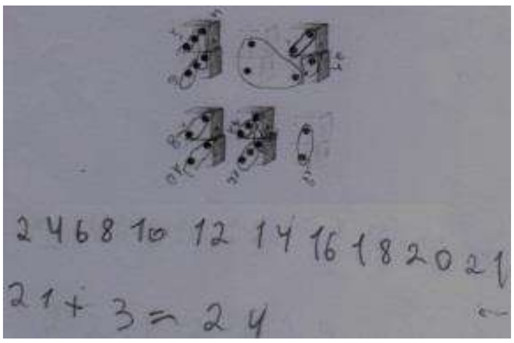


Figura 7. Registo do Vasco na resolução da tarefa *Dados com pinta*

O reconhecimento visual da disposição padronizada do 3 permitiu a associação da contagem por saltos de 3 em 3. Ao justificar-se, mencionou: “contei de 3 em 3. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24”. Esta justificação traduziu-se no registo por si apresentado (Figura 8).

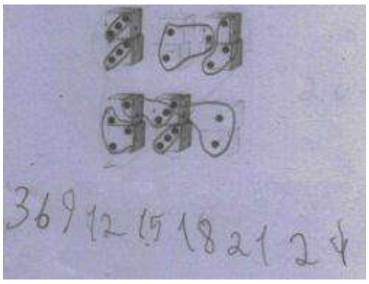


Figura 8. Registo do Vasco na resolução da tarefa *Dados com pinta*

Aquando da discussão em grande grupo, o Vasco também registou a contagem por saltos de 4 em 4, tendo identificado na imagem os conjuntos através do *subitizing*. Aquando da verbalização destes saltos, na transição do 16 para o 20, efetuou a contagem a partir de, apoiando-se nos dedos.

Como se pode verificar, o Vasco apesar de inicialmente ter usado a contagem um a um, reformulou a sua estratégia tendo associado a contagem por saltos ao *subitizing* e a factos específicos. O recurso à contagem *a partir de* serviu de apoio à transição entre parcelas, estando associada à modelação com os dedos.

Discussão e Conclusões

Os contextos visuais explorados permitiram a emergência de diversas estratégias de contagem: *subitizing* percetual e conceptual; utilização de números de referência (5 e o 10); contagem um a um; contagem *a partir de*; contagem por saltos; e o reconhecimento do zero como elemento neutro. A emergência de estratégias tão diversificadas é coerente com a ideia que as tarefas que envolvem contextos visuais potenciam o desenvolvimento de um pensamento mais flexível, salientando aspetos associados ao conceito de número.

O *subitizing* percetual foi privilegiado pelo Vasco na tarefa *As unhas da Sara*, o que evidencia o conhecimento do padrão dos dedos (Clements, 1999). Considerou o 10 como número de referência, associando-o ao número de dedos das duas mãos. Revelou a tendência para associar o número de unhas pintadas e por pintar, realçando a ideia da formação da dezena. Por outro lado, o estabelecimento de relações parte-parte-todo, tendo por base o *subitizing* conceptual, emergiu em ambas as tarefas. Como referem alguns autores, as capacidades visuais estão naturalmente associadas a materiais como o dominó, os dedos das mãos (Bobis, 2008). Na tarefa *Dados com pinta* a Carla e o Vasco associaram o *subitizing* conceptual à contagem por saltos. O Vasco identificou visualmente disposições do 2 e do 3, associando a contagem por saltos de 2 em 2 e de 3 em 3, mobilizando conhecimentos associados aos padrões numéricos (Fosnot & Dolk, 2001). A Carla identificou diferentes conjuntos e reagrupou-os em conjuntos com o mesmo número de elementos. Tal como referem Fosnot e Dolk (2001), esta estratégia permite que o cálculo seja facilitado. A contagem *a partir de* foi usada pelo Vasco e pela Carla na tarefa *Dados com pinta*. É reconhecido que este tipo de estratégia permite colmatar algumas dificuldades de cálculo (Clements & Sarama, 2009). Tal verificou-se quando o Vasco usou a contagem por saltos de 4 em 4 e a Carla de 8 em 8. Materiais que evidenciam disposições padronizadas e o recurso a outros modelos visuais, como o dos dedos, potenciam a utilização de números de referência, como o 5 e o 10 e o estabelecimento de relações parte-parte-todo, associadas ao *subitizing* (Bobis, 2008). Na tarefa *As unhas da Sara* os números de referência 5 e 10 surgiram associados ao número de dedos das mãos tendo a Carla evidenciando o *subitizing* conceptual, em que o 5 potenciou o estabelecimento de relações parte-parte-todo (Castro & Rodrigues, 2008b), partindo dos padrões de dedos (Clements, 1999). Por outro lado, o Vasco evidenciou o *subitizing* percetual tendo o 10 como número de referência.

No que concerne às dificuldades emergentes nestas tarefas verificou-se o estabelecimento de relações numéricas de uma forma descontextualizada. Este facto relaciona-se com o percurso anterior dos alunos, centrado na decomposição e composição de números, enfatizando o treino mecanizado de procedimentos de cálculo e a memorização de factos sem significado (Abrantes et al., 1999). Na tarefa *As unhas da Sara* a Carla registou adições de duas parcelas, associadas à decomposição do número e não ao contexto, evidenciando as experiências prévias ao estudo. É reconhecido que os alunos tendem a rejeitar as estratégias que não implicam a aplicação de procedimentos rotineiros (Arcavi, 2003). O incentivo para a verbalização do raciocínio (Howden, 1989) permitiu colmatar algumas destas dificuldades, revelando as incoerências entre o raciocínio e o registo.

De um modo geral, nos contextos apresentados, os alunos compreenderam factos específicos, que até ali foram memorizados sem significado, descobriram relações numéricas de natureza diversa e mobilizaram estratégias de contagem diversificadas, desenvolvendo assim inúmeras capacidades aritméticas (e.g. Clements, 1999). O trabalho desenvolvido com base na visualização, potenciou a atribuição de significado à manipulação numérica (e.g. Castro & Rodrigues, 2008a). Reconhece-se assim a importância de recorrer, desde os primeiros anos, a modelos visuais que permitam promover a compreensão do número.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215 – 241.

Bobis, J. (1996). Visualisation and the development of number sense with kindergarten children. In J. Mulligan, & M. Mitchelmore (Eds.) *Children's number learning* (pp. 17-33). Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Bobis, J. (2008). Early spatial thinking and the development of number sense. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13* (3), 4-9.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008a). O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (117-133). Lisboa: Escolar Editora.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008b). *Sentido de número e organização de dados - Textos de Apoio para Educadores de Infância*. Lisboa: Ministério da Educação - Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Clements, D. (1999). Subitizing: What Is It? Why Teach It? *Teaching Children Mathematics*, *5*, 400-405.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math - The Learning Trajectories Approach*. Nova Iorque: Routledge - Taylor & Francis Group.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, 3-26.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at work - Constructing Number sense, Addition and Subtraction*. Portsmouth NH: Heinemann.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. Arithmetic teacher, 36, 12-16.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6-11.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12* (3), 2-8.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação-Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Patton, M. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Pereira, A. (2013). *A visualização e o sentido de número: um estudo no 1º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado em Educação: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação em estudos de caso (2ª ed.)*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2010). Elementary & Middle school mathematics - Teaching developmentally. Boston: Pearson Education.

Anexo 1

Cara Ana

Tenho um desafio para os alunos do 1º ano.

No outro dia resolvi pintar as unhas das mãos e tirei fotos à medida que ia pintando as unhas. São essas as fotografias que te envio. Gostava que os alunos do 1º ano descobrissem o número de unhas que estão pintadas e o número de unhas que ainda faltam pintar em cada uma das fotografias. Devem escrever nas folhas que também envio como descobriram o resultado. Poderão usar cálculos, esquemas, desenhos ou palavras para explicar o resultado.

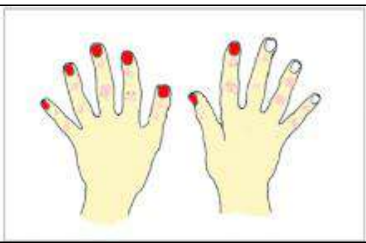
Boa sorte!

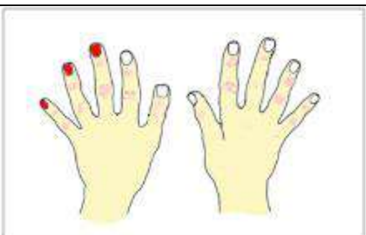
Anexo 2

As unhas da Sara

A Sara resolveu pintar as unhas e decidiu tirar fotografias registando os diferentes momentos. Observa as imagens apresentadas e descobre quantas unhas estão pintadas e quantas faltam pintar em cada uma das fotografias. Explica como pensaste para contar. Podes recorrer a palavras, desenhos ou expressões.

	Quantas  contas?	Quantas  contas?
		

	Quantas  contas?	Quantas  contas?
		

	Quantas  contas?	Quantas  contas?
		

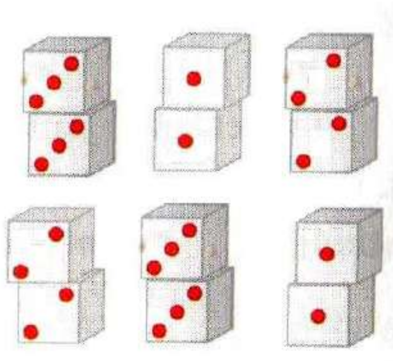
	Quantas  contas?	Quantas  contas?
		

	Quantas  contas?	Quantas  contas?
		

Anexo 3

Dados com pinta

Observa os dados seguintes



Consegues descobrir quantas pintas têm os dados? Indica diferentes formas de contar rapidamente as pintas dos dados.

Explica como pensaste. Podes recorrer a palavras, desenhos ou expressões.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A aprendizagem de métodos formais num ambiente combinado de lápis e papel e folha de cálculo

Sandra Nobre[1], *Nélia Amado*[2], *João Pedro da Ponte*[3]
[1]Agrupamento de escolas professor Paula Nogueira, & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, sandraggnobre@gmail.com
[2]FCT, Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *O nosso objetivo é estudar a aprendizagem de métodos formais na resolução de sistemas de equações, no quadro de uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano, para o que analisamos as representações usadas por duas alunas. Os dados foram recolhidos durante as aulas da experiência de ensino. Os resultados mostram que a experiência informal realizada com a folha de cálculo, nomeadamente, através da identificação de variáveis, tradução de condições e identificação de soluções se mostrou uma abordagem adequada, em especial, para o estudo do método de substituição. No final do estudo, uma das alunas passou a recorrer sistematicamente aos métodos formais enquanto a outra usa com eficácia a folha de cálculo, que prefere em relação aos métodos formais.*

Palavras-chave: Pensamento algébrico; sistemas de equações; métodos formais; representações matemáticas; folha de cálculo.

Introdução

O recurso a métodos formais na resolução de problemas e em outras situações é de grande utilidade pois permite alcançar a solução de uma forma rápida e eficiente. No entanto, é frequente encontrar alunos que, no uso de métodos formais, operam mecanicamente com os símbolos, sem entender o seu significado. Estas dificuldades podem estar relacionadas com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Lincheviski, 1994). Para facilitar a aprendizagem dos alunos é importante envolvê-los em experiências informais antes da manipulação algébrica formal, nomeadamente através da resolução de problemas. Além disso, a folha de cálculo permite estabelecer relações funcionais bem como conexões com a linguagem algébrica, o que pode levar os alunos a uma compreensão mais significativa desta linguagem. Nesta comunicação analisamos o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano no que respeita à aprendizagem de métodos formais no estudo dos sistemas de duas equações a duas incógnitas. Olhamos para as representações utilizadas por duas alunas, procurando verificar como estas serviram de suporte para a aprendizagem de métodos formais.

O pensamento algébrico, representações e métodos formais

O pensamento algébrico envolve o conhecimento de várias formas de representação, incluindo a simbólica, bem como flexibilidade na mudança entre os modos de representação e capacidade de operar com símbolos em contexto e, quando apropriado (Schoenfeld, 2008). Num nível mais avançado, este pensamento manifesta-se através do uso de expressões simbólicas e equações, em vez de números e operações (Kieran, 2007). No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam a notação algébrica, as formas generalizadas de pensar sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, pode ser considerado algébrico. Ou seja, o uso de simbolismo algébrico deve ser tomado como um indicador do pensamento algébrico, mas a ausência de notação algébrica não deve ser julgada como uma incapacidade para pensar algebricamente (Zazkis & Liljedahl, 2002).

As representações matemáticas produzidas pelos alunos são poderosas ferramentas que constituem uma componente essencial da aprendizagem, possibilitando a organização e a comunicação de ideias. Constituem também um meio para a aprendizagem progressiva de métodos formais, aspeto importante no estudo da Álgebra. A folha de cálculo permite o acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005). O recurso a esta ferramenta na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis, por meio de fórmulas, tem consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005).

Friedlander (1998) afirma que

> "a folha de cálculo constrói uma ponte ideal entre a aritmética e a álgebra e permite aos alunos a livre circulação entre os dois mundos. Os alunos procuram padrões, constroem expressões algébricas, generalizam conceitos, justificam conjeturas, e estabelecem a equivalência de dois modelos conforme as necessidades intrínsecas e significativas e não como exigências arbitrárias colocadas pelo professor" (p. 383).

No entanto, continua por investigar o alcance da contribuição folha de cálculo para uma compreensão mais ampla dos fundamentos dos métodos formais, em particular de resolução de sistemas de equações.

O estudo dos métodos formais abarca o trabalho com várias representações como a algébrica e a gráfica. Este trabalho com múltiplas representações matemáticas continua a ser um objetivo na aprendizagem da matemática (NCTM, 2000) e tem-se destacado pela sua grande utilidade na resolução de problemas (Kaput 1992; Yerushalmy, 2006). Os métodos formais são eficazes para resolver numerosos problemas, levando os alunos rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem do nível informal ao formal não é fácil para a maioria dos alunos. Além disso, uma vez adquiridos os procedimentos algébricos e os métodos tornados rotineiros, os alunos manifestam uma grande tendência para cometerem erros que não são capazes de identificar nem corrigir (Wagner, 1983). Muitos dos alunos que apresentam um elevado desempenho na aplicação de procedimentos formais revelam frequentemente uma compreensão limitada do seu significado e têm dificuldade em lidar com situações problemáticas. Estes alunos mostram reduzida flexibilidade matemática para adaptar os procedimentos a situações novas, a menos que sejam capazes de relacioná-las com procedimentos informais (Küchemann, 1981).

No ensino básico está previsto o ensino do método de substituição e de resolução gráfica, podendo ainda ser trabalhado o método da adição ordenada. O *método de substituição* assenta no uso da linguagem algébrica onde a ideia de substituição está sempre presente. Filloy, Rojano & Solares (2004) mostram que certos alunos têm dificuldades em resolver problemas com duas incógnitas e manifestam dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual" quando se depararam com duas equações do tipo: $4x-3=y$ e $6x+7=y$; não reconhecendo a transitividade para obter, por exemplo, $4x-3=6x+7$. Uma explicação para esta dificuldade pode residir no facto de os alunos considerarem os y 's como sendo diferentes. No *método gráfico* predomina a representação gráfica, podendo também estar envolvidas a representação tabelar e/ou algébrica. O *método da adição ordenada* apoia-se numa linguagem predominantemente algébrica, envolvendo a ideia de substituição.

Metodologia de investigação

O objetivo deste estudo é analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico e compreender como duas alunas do 9.º ano progrediram na aprendizagem de métodos formais de resolução de sistemas de equações.

Atendendo à natureza do estudo segue-se uma abordagem qualitativa seguindo o paradigma interpretativo. A metodologia de experiência de ensino é o *design* adotado, com recurso a estudos de caso. A primeira autora assume, simultaneamente, o papel de professora e investigadora. Analisamos os casos de Ana e de Carolina. Ana é uma aluna de 14 anos, geralmente empenhada e participativa e não manifesta dificuldades a Matemática. Carolina tem 16 anos, é uma aluna muito espontânea, com uma participação e empenho irregular. Ana e Carolina têm vindo a utilizar a folha de cálculo para resolver problemas nas aulas de Matemática como relatado em Nobre, Amado & Carreira (2012).

Na intervenção pedagógica a resolução de problemas assume o papel principal. Foram propostas oito tarefas (Fig.1); umas para serem trabalhadas com lápis e papel e outras, para resolver com recurso à folha de cálculo. Neste caso, os alunos também podem recorrer livremente ao lápis e papel. A tarefa E, em particular, é concebida para explorar parcialmente com a folha de cálculo. Em cada tarefa é criado um momento de discussão e de síntese, procurando-se promover uma ponte entre o trabalho na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico.

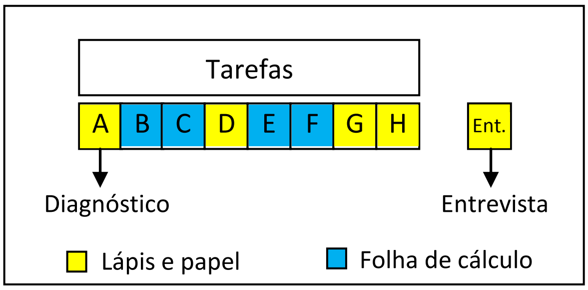


Fig. 1: Tarefas propostas no estudo do tópico

Em sala de aula procedemos à recolha das produções das alunas, em papel e na folha de cálculo e à gravação áudio das aulas. Para o registo detalhado dos processos das alunas na folha de cálculo, utilizámos o *software Camtasia Studio* que nos permite recolher, em simultâneo, os diálogos e a sequência de ecrãs no computador. No final do estudo do tópico foi realizada, a cada uma das alunas, uma entrevista clínica.

Resultados gerais

Nas tabelas 1 e 2 pode observar-se a evolução de Ana e de Carolina, respetivamente, no que respeita às representações utilizadas nas diferentes tarefas e na entrevista.

No trabalho com lápis e papel, as alunas recorrem sempre à linguagem natural. Este tipo de representação é utilizado essencialmente na identificação de incógnitas bem como na explicação dos procedimentos.

Na resolução das tarefas iniciais, por ambas as alunas, as representações no sistema de notação numérico têm uma grande expressão. Para além dos cálculos elementares, utilizam-nas para efetuar cálculos por substituições numéricas. Ana recorre maioritariamente a este tipo de representação, enquanto Carolina usa fortemente o sistema de notação algébrico.

Tabela 1. Percentagem de utilização de representações de Ana por tarefa e na entrevista

	Tarefas/ Representações	A	B	C	D	E	F	G	H	Ent.
Lápis e papel	Linguagem Natural	55			40	25		56	71	53
	Sistema de notação numérico	24			35	6		10	0	7
	Sistema de notação algébrico	18			15	0		31	29	33
	Pictóricas	3			10	0		0	0	0
	Gráficas	0			0	0		3	0	7
Folha de cálculo	Linguagem Natural		25	58		25	43			
	Registo Numérico		50	14		19	29			
	Registo de Fórmulas		25	14		0	14			
	Gráficos		0	0		19	0			
	Formatação condicional /realce		0	14		6	14			

Tabela 2. Percentagem de utilização de representações de Carolina por tarefa e na entrevista

	Tarefas/ Representações	A	B	C	D	E	F*	G	H	Ent.
Lápis e papel	Linguagem natural	61	18		50	30		48	22	38
	Sistema de notação numérico	14	0		5	5		13	0	5
	Sistema de notação algébrico	21	9		35	0		32	67	32
	Pictóricas	4	0		10	0		0	0	0
	Gráficas	0	0		0	0		7	11	5
Folha de cálculo	Linguagem natural		28	49		15				5
	Registo numérico		18	17		15				5
	Registo de fórmulas		18	17		15				5
	Gráficos		0	0		15				0
	Formatação condicional /realce		9	17		5				5

* A Carolina não realizou a tarefa F.

As alunas recorrem esporadicamente a representações pictóricas. Ana utiliza-as em associação com representações no sistema de notação numérico e Carolina utiliza-as ainda em associação com representações no sistema de notação algébrico. No que se refere às representações gráficas, estas são apenas utilizadas nas últimas tarefas e quase sempre quando solicitadas.

Quando recorrem à folha de cálculo, as duas alunas utilizam a linguagem natural para nomear colunas, explicar os procedimentos e apresentar a reposta aos problemas. Por vezes, recorrem ao registo numérico usufruindo da geração automática de sequências com incremento constante ou nulo, em outros casos para inserir fórmulas gerando variáveis-coluna. Quanto às representações gráficas, estas surgem apenas quando solicitadas. Na parte final das resoluções, para procurar ou realçar as soluções, as alunas valem-se do realce colorido ou da formatação automática para colorir as respetivas células.

No que se refere aos métodos formais, destacamos, nas secções seguintes, os principais aspetos do pensamento algébrico que foram desenvolvidos, no percurso de aprendizagem de Ana e de Carolina, em especial no que respeita às representações matemáticas utilizadas.

Uso do método de substituição

A escrita de equações do 1.º grau com duas incógnitas

Problema: Adivinhar o dia de aniversário

A Sofia gosta muito de colocar desafios aos colegas. Logo na primeira aula de Matemática, apresentou a seguinte proposta:

- Para descobrires o meu dia de aniversário basta multiplicares o dia do meu nascimento por 12 e o mês por 30 e adicionares os dois valores obtidos. Se o resultado for 582 é esse o dia e o mês do meu aniversário!

Consegues descobrir o dia do aniversário da Sofia?

Fig. 1: Tarefa B

Ana e a colega iniciam a resolução selecionando as variáveis independentes: dia e mês. Após diversas tentativas, decidem estabelecer relações intermédias: o produto do número correspondente ao dia por 12 e entre o produto do número correspondente ao mês por 30, efetuando depois a sua soma (Fig. 2).

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	12	1	30	42		2	60	72
2	24	1	30	54		2	60	84
3	36	1	30	66		2	60	96
4	48	1	30	78		2	60	108
5	60	1	30	90		2	60	120

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	=1*12	1	=1*30	=D3+F3		2	60	=60+D3
2	=2*12	1	=1*30	=F4+D4		2	60	=J4+D4
3	=3*12	1	=1*30	=F5+D5		2	60	=J5+D5

Fig. 2: Produção de Ana e colega para a Tarefa B

Este procedimento revela-se moroso e as alunas não conseguem concluir a resolução, como reconhece Ana na entrevista.

> Eu é que compliquei… Foi assim professora, este aqui em três colunas conseguimos resolver e eu e a minha colega fomos fazer mês a mês: Janeiro, Fevereiro, Março, Abril… mas depois aqui em Abril e Maio vimos que começava a repetir-se tudo depois baralhamo-nos tanto, aquilo começou a repetir-se os números, tudo, tudo, tudo … depois disso passamo-nos por completo.…

Ana considera que a estratégia selecionada não é a melhor o que as leva a desistir. Por seu lado Carolina, após realizar alguns ensaios, apaga tudo e seleciona um conjunto de células formando um retângulo na folha de cálculo (Fig. 3).

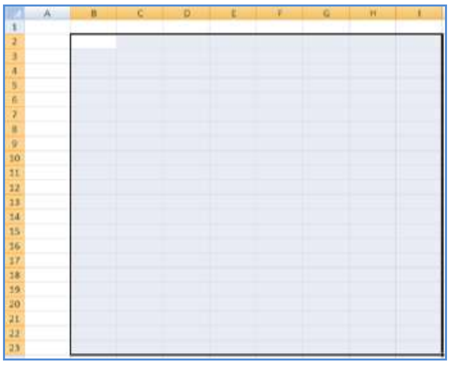


Fig. 3: Ensaio de Carolina

Ao efetuar esta experiência, Carolina provavelmente lembra-se de uma tabela de dupla entrada, feita no estudo de outro tema, e afirma de imediato: “Professora, acho que descobri uma forma! … Já descobri! Sou um génio!” Rapidamente insere numa coluna os números de 1 a 30 e numa linha os números de 1 a 12. No entanto, talvez por insegurança questiona a professora.

> Carolina: Mas agora como é que eu vou fazer a tabela? Uma para os dias e outra para os meses?
>
> Professora: Essa tem muito bom aspeto!

Como reação às palavras de apreço da professora, Carolina tenta multiplicar os números da coluna pelos da linha e lembra-se que tem de colocar um cifrão mas não se recorda de como o fazer, pelo que foi ajudada pela professora. Recorrendo à formatação condicional, obtém as células com o valor 582 realçadas como se pode ver na Fig. 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		DIAS												
2	MÊS	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3		1	42	72	102	132	162	192	222	252	282	312	342	372
4		2	54	84	114	144	174	204	234	264	294	324	354	384
5		3	66	96	126	156	186	216	246	276	306	336	366	396
6		4	78	108	138	168	198	228	258	288	318	348	378	408
7		5	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420
8		6	102	132	162	192	222	252	282	312	342	372	402	432
9		7	114	144	174	204	234	264	294	324	354	384	414	444
10		8	126	156	186	216	246	276	306	336	366	396	426	456
11		9	138	168	198	228	258	288	318	348	378	408	438	468
12		10	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480
13		11	162	192	222	252	282	312	342	372	402	432	462	492
14		12	174	204	234	264	294	324	354	384	414	444	474	504
15		13	186	216	246	276	306	336	366	396	426	456	486	516
16		14	198	228	258	288	318	348	378	408	438	468	498	528
17		15	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540
18		16	222	252	282	312	342	372	402	432	462	492	522	552
19		17	234	264	294	324	354	384	414	444	474	504	534	564
20		18	246	276	306	336	366	396	426	456	486	516	546	576
21		19	258	288	318	348	378	408	438	468	498	528	558	588
22		20	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600
23		21	282	312	342	372	402	432	462	492	522	552	582	612
24		22	294	324	354	384	414	444	474	504	534	564	594	624
25		23	306	336	366	396	426	456	486	516	546	576	606	636
26		24	318	348	378	408	438	468	498	528	558	588	618	648
27		25	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660
28		26	342	372	402	432	462	492	522	552	582	612	642	672
29		27	354	384	414	444	474	504	534	564	594	624	654	684
30		28	366	396	426	456	486	516	546	576	606	636	666	696
31		29	378	408	438	468	498	528	558	588	618	648	678	708
32		30	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720
33		31	402	432	462	492	522	552	582	612	642	672	702	732

	A	B	C	D	E	F
1		DIAS				
2	MÊS	x	1	2	3	4
3		1	=$B3*12+C$2*30	=$B3*12+D$2*30	=$B3*12+E$2*30	=$B3*12+F$2*30
4		2	=$B4*12+C$2*30	=$B4*12+D$2*30	=$B4*12+E$2*30	=$B4*12+F$2*30

Fig. 4: Produção de Carolina para a Tarefa B

A aluna explica os procedimentos realizados na folha de cálculo e destaca a resposta (Fig. 5).

! RACIOCINIO !
Temos várias hipoteses de resposta, de acordo com o meu
raciocinio expresso ao lado.
Enão na coluna na vertical, coloquei os dias do mês, logo
só temos até dia 31. Na linha na horizontal, coloquei o numero
dos meses do ano, que são apenas 12, logo só temos
numeros até 12.
Depois como a Sofia diz que temos de multiplicar o dia
pelo nrº 12 e o mês pelo nrº 30, vamos por isso mesmo
na fórmula em que ao mesmo tempo colocamos a soma
do resultado dessas multiplicações citadas no enunciado.
Depois dos possiveis rsultados, verificamos que temos
3 hipóteses de resposta. Sendo elas:
> Dia 21 de Novembro;
> Dia 26 de Setembro;
> Dia 31 de Julho.
Logo não descobrimos qual o dia em que a Sofia faz anos !

Fig. 5: Explicação de Carolina para a Tarefa B

Durante a discussão do problema a professora questiona os alunos da turma.

> Professora: Será que nós aqui conseguíamos escrever uma relação entre o 582, o dia e o mês de aniversário?
>
> Carolina: Então, é a fórmula! [Referindo-se a fórmula que ela tinha usado]
>
> Tatiana: Então, é o dia vezes 12 ... e o mês vezes 30…
>
> Carolina: Mais.
>
> Tatiana: Adicionado o mês vezes 30.
>
> Professora: E depois disso?
>
> Alunos: Igual a 582.

Carolina mostra ter percebido a relação entre o trabalho efetuado na folha de cálculo com a equação escrita.

Esta tarefa permite lidar com uma equação linear envolvendo duas incógnitas, o que permite dar sentido às incógnitas numa equação indeterminada e perceber que estas equações podem admitir várias soluções.

A noção de sistema de equações

Problema: O peso das 3 irmãs

O Sr. José tem três filhas muito gulosas: a Alice, a Beta e a Célia. Com a chegada do verão, elas ficaram muito preocupadas com a sua elegância, por causa da praia. Decidiram as três fazer uma dieta e pesar-se regularmente numa balança que o pai tinha no armazém. Quando começaram a dieta, as irmãs pesaram-se, duas a duas, na balança.

A Alice e a Beta pesavam juntas 132 Kg.

A Beta e a Célia pesavam juntas 151 Kg.

A Célia e a Alice pesavam juntas 137 kg.

Qual é o peso de cada uma das filhas do Sr. José?

Fig. 6: Tarefa C

No decorrer da resolução desta tarefa a professora deteta dificuldades na organização dos dados na folha de cálculo, pelo que questiona:

> Professora: Vamos supor que eu arranjo uma coluna para a Alice que é o primeiro nome que vem ali, para o peso da Alice e que a seguir tenho uma coluna para a Beta… Que valores é que eu posso atribuir, por exemplo, à Alice?
>
> Ana: Pode atribuir todos, tem de dar é 132 porque se vai conjugar com a Beta o total tem de ser 132… 1, 2, 3, 4, 5, …
>
> Carolina: Hammm, então não podemos pôr até 130?
>
> Professora: Claro, com certeza… Se a Alice e a Beta pesam 132, o que é que eu posso por aqui para o peso da Beta?

Maria: Aí é 132 a dividir…

Carolina: Nãaaaao!… É aquele menos o peso da Alice… É 132 menos o peso da Alice.

Professora: Então o que é que eu tenho de escrever aqui no computador?

Carolina: É igual a 132 menos o peso da Alice… a célula selecionada.

Professora: Isto é uma ideia para começar a resolver o problema. Agora vejam lá se conseguem estabelecer as outras relações.

Na sequência da intervenção da professora, Ana e Carolina prosseguem com a nomeação de colunas, identificando as restantes variáveis e estabelecendo as relações recorrendo a fórmulas. A coluna "Célia e Alice" serve de controlo para a obtenção da solução. Por fim, as alunas respondem ao problema explicando os procedimentos efetuados na folha de cálculo (Fig. 7 e 8).

Elas pesaram-se duas a duas, então eu consigo tirar algumas conclusões
A Alice é a mais levezinha, pois quando ela se pesa com a Célia e com a Beta, ela fica sempre por volta dos 130 e picos kg.
A Célia é a mais pesada, pois, quando se pesa com a Beta o valor aumenta bastante. Com isto podemos concluir que a Beta está entra ambas.

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	131	20	21
2	130	21	23
3	129	22	25
4	128	23	27
5	127	24	29
54	78	73	127
55	77	74	129
56	76	75	131
57	75	76	133
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139
61	71	80	141

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	=132-D2	=151-E2	=F2+D2
2	=132-D3	=151-E3	=F3+D3
3	=132-D4	=151-E4	=F4+D4
4	=132-D5	=151-E5	=F5+D5
5	=132-D6	=151-E6	=F6+D6

O peso da Alice é 59 kg, o da Beta 73 kg e o da célia 78 kg.
Para resolver este problema, eu fui fazer uma coluna para a Alice, com valores até132 pois era o peso dela em conjunto com a Beta, depois, fiz uma coluna com a Beta e subtrai os valores da coluna 1 a 132, depois fiz uma coluna com a Célia e fiz 151 que é o peso da beta e da célia em conjunto e subtrai pelos valores da coluna da Beta, depois, por ultimo, fui somar os valores da coluna da Alice com os da Coluna da Célia, até obter 137 e depois, consegui obter os pesos das irmãs.

Fig. 7: Produção da Ana para a Tarefa C

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
30	102	49	79
31	101	50	81
32	100	51	83
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
30	=132-C4	=151-D4	=E4+C4
31	=132-C5	=151-D5	=E5+C5
32	=132-C6	=151-D6	=E6+C6
58	=132-C32	=151-D32	=E32+C32
59	=132-C33	=151-D33	=E33+C33
60	=132-C34	=151-D34	=E34+C34

Resposta	A Alice pesa 59kgs, a Beta pesa 73 kgs e a Célia pesa 78kgs.
Racíocinio	A primeira colkuna representa o peso da alice. Com os numeros normais, acima de 30, porque é obvio que nenhuma
	delas pesaria menos de 30kgs.
	Na segunda coluna o peso da Beta está dependente do peso da Alice, pois no enunciad só nos dãoo os pesos são das 2 juntas.
	Então, coloquei os 132 kgs, menos o peso da Alice.
	Na terceira coluna o pesoda Alice está relacionado também com o peso da Beta. Pois no enunciado só nos dão
	os pesos das 2 irmãs juntas, pesando elas 151.
	Então, coloquei os 151 kgs menos o peso da Beta.
	Na quarta coluna e por fim coloquei os pesos da Célia e da Alice somados, e procurei os 137kgs, que nos dão no enunciado como
	sendo o peso das 2 irmãs.
	Foi então que encontrei por fim os pesos das três irmãs.

Fig. 8: Produção de Carolina para a Tarefa C

Na discussão em sala de aula, a professora apela à escrita em linguagem algébrica das relações presentes no problema e à medida que os alunos as escrevem, registas-as no quadro (Fig. 9).

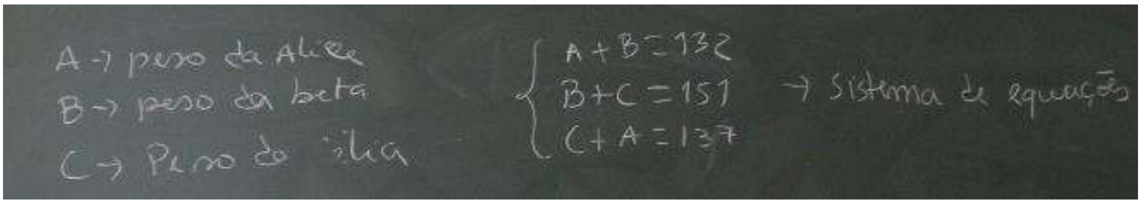


Fig. 9: O sistema de equações

Desta discussão surge o termo “sistema de equações”.

> Professora: O que está escrito no quadro são três condições que têm de ser cumpridas neste problema… E têm de ser cumpridas em simultâneo. A este conjunto de equações nós chamamos um sistema de equações. Neste caso temos um sistema de 3 equações com 3 incógnitas.

Quando questionada, na entrevista, acerca das aprendizagens realizadas com a folha de cálculo nestes dois problemas, Ana afirma: “Aprendi a usar melhor o Excel, aprendi formas mais claras de mostrar o raciocínio…”. Nesta afirmação, Ana mostra o contributo da folha de cálculo na expressão do seu raciocínio. Por seu lado, Carolina refere “…o que é que eu aprendi? Sei lá… Isto era introdução aos sistemas…” revelando ter dado pouca importância a esta tarefa.

A ideia de substituição de variáveis usando papel e lápis

A tarefa D foi concebida com o objetivo de abordar a noção de substituição, com lápis e papel, apresentado um conjunto de quatro situações como a que surge na Fig. 10.

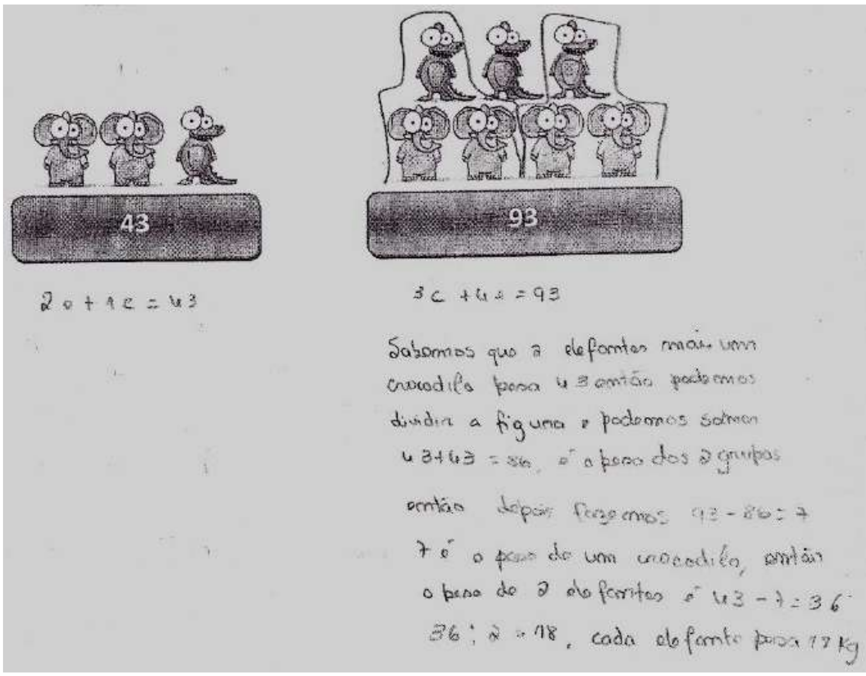


Fig. 10: Produção de Ana para a situação 2 da Tarefa D

Ana traduz as relações para equações, mas não as usa, optando por traçar uma linha a delimitar um grupo de animais (Fig.10). Neste procedimento utiliza a informação fornecida pela primeira imagem e cria dois conjuntos, o que lhe permitem descobri de imediato o valor de uma das incógnitas. Em seguida, substitui esse valor na informação da primeira imagem e obtém, através de uma estratégia *unwind* o valor do elefante, ou seja, o valor da outra incógnita. Ana não utiliza a linguagem algébrica mas este processo revela a compreensão da ideia de substituição, fundamental neste método. Por seu lado, Carolina representa o valor de cada animal por uma letra e escreve as equações correspondentes (Fig. 11). Tal como Ana, Carolina também delineia os dois grupos na segunda imagem encontrando assim os valores das incógnitas.

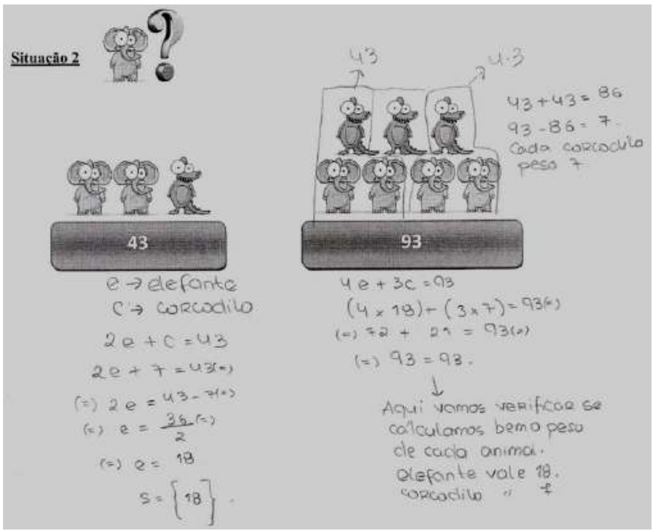


Fig. 11: Produção de Carolina para a situação 2 da Tarefa D

Em ambos os casos, as substituições efetuadas correspondem ao que se faz formalmente no método de substituição (Fig. 12).

$$\begin{cases}2e+c=43\\4e+3c=93\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+c=43\\\boxed{(2e+c)+(2e+c)}+c=93\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+c=43\\\boxed{43+43}+c=93\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+c=43\\c=93-86\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+\boxed{7}=43\\c=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e=18\\c=7\end{cases}$$

Os dois grupos formados por dois elefantes e um crocodilo, cada um.

Substituição pelo valor obtido da primeira imagem

Substituição pelo valor obtido da segunda imagem

Fig. 12: Resolução formal da situação 2 proposta na Tarefa D

Da folha de cálculo para o método formal de substituição

O problema "galinhas e coelhos"

Numa quinta há galinhas e coelhos. Ao todo são 212 cabeças e 700 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem na quinta?

Fig. 13: Tarefa F

Na resolução desta tarefa Ana começa por escolher como variável independente, o número de coelhos, e estabelece as relações entre esta e as outras variáveis. Utiliza a coluna "Soma das patas" para controlo (Fig. 14).

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	4	422	426
2	210	212	8	420	428
3	209	212	12	418	430
4	208	212	16	416	432
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212	=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212	=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212	=F7*4	=G7*2	=L7+K7
137	75	212	=F140*4	=G140*2	=L140+K140
138	74	212	=F141*4	=G141*2	=L141+K141
139	73	212	=F142*4	=G142*2	=L142+K142

Fig. 14: Produção de Ana para a Tarefa F

Ana apresenta a sua resolução à turma e a tradução algébrica foi feita a partir do diálogo entre a professora e os alunos. O objetivo foi relacionar o trabalho na folha de cálculo com o método de substituição (Fig. 15).

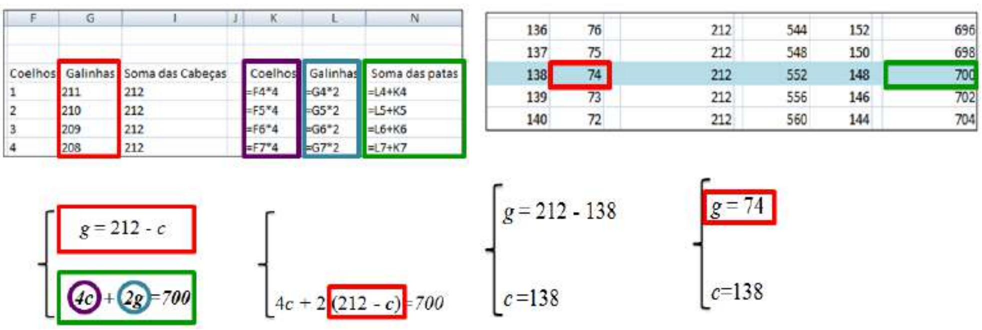


Fig. 15: A tradução da folha de cálculo para lápis e papel da produção de Ana

Esta correspondência serve de base para começar a resolver os sistemas pelo método formal de substituição. A professora explica aos alunos que na resolução de sistemas, pelo método de substituição, quando, em qualquer passo, uma equação não é transformada, ou volta-se a escrevê-la ou coloca-se um traço horizontal.

A tarefa G envolve a resolução de diversos problemas e exercícios. Para Ana "foi muito importante professora, porque quando eu comecei a resolver esta ficha, eu não conseguia resolver sistemas com fluência…". Questionada acerca do que significa resolver com fluência, explica: "é saber resolver. Sabe? Assim rápido sem pensar e demorar muito tempo". De modo semelhante, Carolina refere "eu já sabia isso praticamente. Para mim foi mais treinar as equações que é preciso treinar muito, mas já é fácil, muito fácil!" Ambas as alunas reconhecem nesta tarefa importância para resolverem com maior rapidez sistemas de equações, em particular pelo método de substituição, como confessam.

Uso do método gráfico

Problema: A corrida de cavalos

O Russo e o Relinchão são dois cavalos que participam numa corrida de 2400 metros. O Russo teve um bónus de 140 metros e partiu com esse avanço em relação ao relinchão. O Russo correu a uma velocidade de 11m/s e o Relinchão a 14m/s.

Qual dos dois cavalos ganhou a corrida?

Fig. 16: Tarefa E

Ana seleciona o tempo como variável independente e a distância percorrida por cada um dos cavalos como variáveis dependentes. Esta aluna opta por gerar sequências numéricas, com incremento fixo (Fig. 17).

tempo (s)	Relinchão	Russo
0	0	140
1	14	151
2	28	162
3	42	173

170	2380	2010
171	2394	2021
172	2408	2032
173	2422	2043

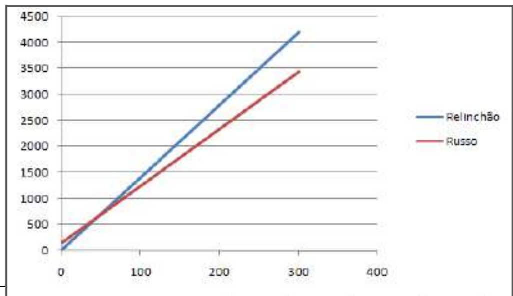


Fig. 17: Produção de Ana para a primeira situação da Tarefa E

Tal como foi solicitado noutra questão, Ana faz a representação gráfica com a relação entre o tempo e a distância percorrida por cada cavalo. Carolina, segue um procedimento similar ao de Ana, embora utilizando fórmulas para explicitar as relações entre tempo e distância (Fig. 18).

Tempo (s)	Russo	Relinchão
1	140	0
2	=B3+11	=C3+14
3	=B4+11	=C4+14
172	=B173+11	=C173+14
173	=B174+11	=C174+14

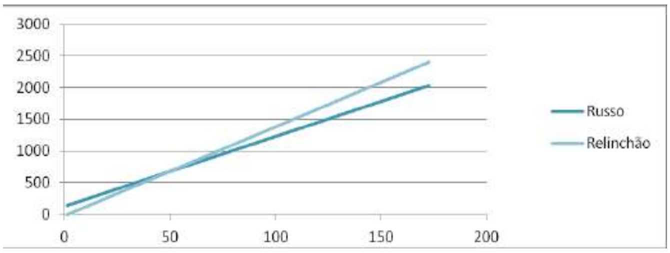


Fig. 18: Produção de Carolina para a primeira situação da Tarefa E

Carolina ao considerar para instante inicial 1 segundo não obtém a resposta correta.

Ambas seguem os procedimentos adotados inicialmente nas duas situações seguintes, em que os cavalos corriam à mesma velocidade, numa delas seguindo Russo com avanço e, por fim, sem qualquer avanço (Fig. 19 e 20).

tempo	Relinchão	Russo
0	14	140
1	28	154
2	42	168
3	56	182
4	70	196
5	84	210
6	98	224
7	112	238
8	126	252
9	140	266
10	154	280

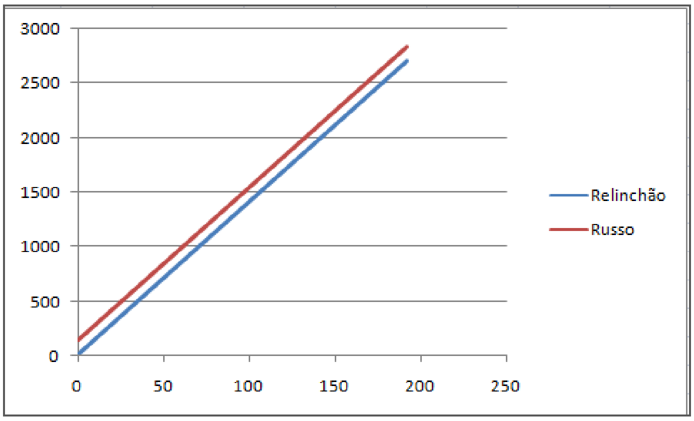


Fig. 19: Produção de Ana para a segunda situação da Tarefa E

Temp	Russo	Relinchão
1	0	0
2	=C3+11	=D3+11
3	=C4+11	=D4+11
219	=C220+11	=D220+11
220	=C221+11	=D221+11

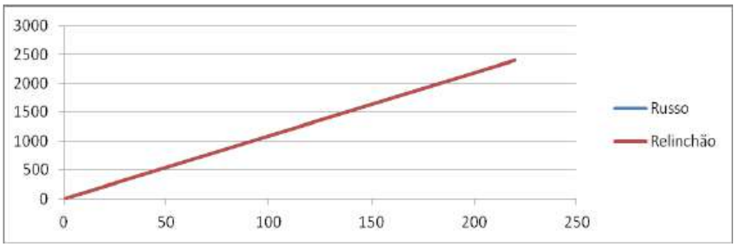


Fig. 20: Produção de Carolina para a terceira situação da Tarefa E

Após a discussão, os alunos escrevem a equação que representa a distância percorrida por cada um dos cavalos e cada um dos sistemas associado à situação foi classificado. Na entrevista, Ana reconhece a importância desta tarefa na aprendizagem do método gráfico "Foi daí que obtivemos os gráficos para aprender a resolver sistemas graficamente". Carolina confessou na entrevista não se recordar da tarefa, reconhecendo não ter estado muito atenta. Apesar de descrever corretamente as três situações, é durante a entrevista que percebe a importância da tarefa para a compreensão da classificação de sistemas.

> Carolina: Agora é que eu estou a perceber porque é que a professora fez isto!
>
> Professora: O que é que aprendeste com esta tarefa?
>
> Carolina: Aprendemos gráficos [risos] que representam as diferentes equações, os diferentes… como é que se diz?…Tipos de sistemas de equações.

Uso do método da adição ordenada

A abordagem a este método surgiu de uma resolução de Carolina a uma situação proposta na tarefa D (Fig. 21).

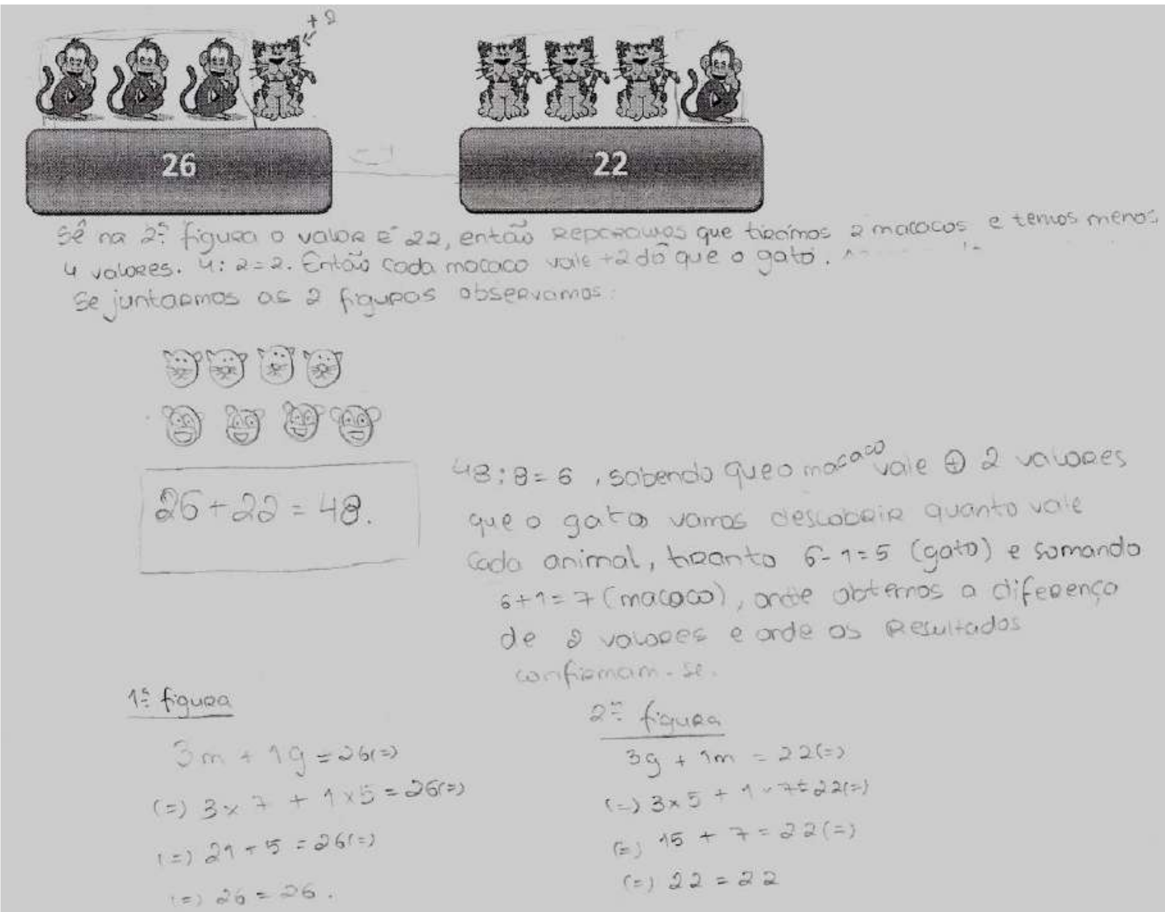


Fig. 21: Produção de Carolina para a situação 4 da Tarefa D

Carolina apresenta a sua resolução aos colegas.

> Carolina: Aqui temos 3 macacos e aqui temos 3 gatos e um macaco. Aqui tirámos estes macacos mas ficámos com este, não é? Não é?
>
> Vários alunos: Sim.

Carolina: Então quer dizer que aqui está uma diferença de 4, então quer dizer que cada macaquinho é mais 2 do que os gatos.

Patrícia: ya.

Professora: E depois a partir daí? Já chegámos à conclusão que o macaco tem que valer mais 2 do que o gato. E a partir daqui como fizeste?

Carolina: Estes são os gatos… estes são os macacos.

Tatiana: Eles todos juntos pesam o quê?

Carolina: Pesam os 26 mais os 22 que é 48.

Tatiana: ya!

Fig. 22: Carolina a explicar a sua resolução

Carolina: Então eu depois dividi os 48 pelos 8 animais, não é?… que dá 6, quer dizer se eles fossem, valessem todos a mesma coisa, valiam 6 cada um mas como a gente sabe os macacos pesam mais 2 então tiramos 1 dos 6 que é o valor dos gatos e fica 5 e somamos 1 aos 6 que é os macacos e fica 7 que é aquilo que vocês já disseram no início e depois a gente vai escrever as expressões… as….

Ana: O sistema de equações!

Carolina: O sistema de equações e verificamos que a resposta está certa.

A explicação da aluna serve de suporte para a professora formalizar o método de adição ordenada, com recurso ao simbolismo algébrico.

Ana recorre à tentativa e erro por não ser tão evidente o estabelecimento de relações entre as informações presentes nas imagens, como refere na entrevista, dando evidências de ter aprendido o método de adição ordenada:

> Mas nestas aqui [referindo-se às três situações anteriores] conhecíamos a relação, só tínhamos um animal e nas outras dá para fazer conjuntos e obter o mesmo valor que estes… e no 4 já não dá porque como temos 3 macacos e 1 gato e aqui só tenho um gato e não tenho 3 macacos e estão ao contrário... isto aqui dá para fazer com… aquela soma 4 macacos e 4 gatos é igual a…26 mais 22 que dá 48, depois dividia… um gato e um macaco, dá 48 a dividir por 4 e depois o valor que me dava era de 1 gato e de 1 macaco…

Na entrevista, são propostos dois problemas, para além de outros tipos de tarefas. Para a resolução dos problemas, Ana recorre ao método de substituição para resolver um deles e ao gráfico para resolver o outro.

Carolina, por seu lado, opta por recorrer em primeiro lugar à folha de cálculo.

Professora: Porque é que tu escolheste… decidiste assim de repente ir para o Excel?

> Carolina: Ai mãe!… No teste é que vai ser bonito não o tenho… Se tivéssemos o Excel em todo o lado… já é mais fácil e já estou mais habituada ao Excel… porque ele pensa por mim, inspira-me…é mais fácil, não é preciso a gente estar a ir à calculadora... sei lá… é inspiração professora!

Carolina demonstra assim grande apreço pela folha de cálculo na resolução de problemas. Em seguida, a professora pede a Carolina para resolver o mesmo problema com lápis e papel. A aluna escreve o sistema e resolve-o através do método de substituição mas em momento algum relaciona esta nova resolução com a anterior realizada na folha de cálculo.

> Carolina: Foi fácil, foi fácil e ali [referindo-se à folha de cálculo] não sei como é que eu fiz aquilo ali…
>
> Professora: Então?
>
> Carolina: Sei lá, às vezes parece que não sou eu que penso…

Neste diálogo a aluna volta a destacar a importância que atribui à folha de cálculo como uma alternativa a um método formal.

No enunciado do segundo problema foram apresentadas duas equações que descrevem as rotas de dois cruzeiros e pretende-se saber se existe algum ponto comum às duas rotas. Carolina resolve este problema utilizando o método de substituição mas no final admite não ter escolhido o melhor método.

> Carolina: … Eu fui parva! Podia ter feito… resolvido em ordem a y… é verdade! Fui mesmo parva!
>
> Professora: Estavas a falar em ordem a y. Era o quê?
>
> Carolina: Era para fazer o gráfico e depois no gráfico a gente fazia as tabelas…

A aluna resolve depois o problema utilizando o método gráfico, revelando dificuldade em escolher uma escala adequada para fazer a representação gráfica. Confirma, por fim, que as soluções obtidas através dos dois métodos coincidem.

Conclusão

As tarefas apresentadas no estudo dos sistemas de equações permitiram às alunas uma aprendizagem gradual de métodos formais a partir de experiências informais. Num primeiro momento, Ana apesar de não recorrer muito à linguagem algébrica, não fica inibida de desenvolver o pensamento algébrico. Tal como referem Haspekian (2005) e Friedlander (1998), a folha de cálculo apoiou o percurso das alunas na transição da Aritmética para a Álgebra. Mostrou também ser uma ferramenta útil na resolução de problemas, proporcionando um ambiente sem o constrangimento do uso de simbolismo algébrico.

Na aprendizagem do método de substituição, as alunas começaram por desenvolver a compreensão da escrita de relações, recorrendo inicialmente a uma linguagem mais aritmética depois ao ambiente híbrido da folha de cálculo e, por fim, usando a linguagem algébrica chegaram, com a intervenção da professora, à noção de sistema de equações. A ideia de substituição, em que geralmente os alunos apresentam dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004), acabou por surgir naturalmente tendo sido formalizada na articulação entre o trabalho na folha de cálculo e com papel e lápis. A folha de cálculo destaca-se, em particular, na aprendizagem deste método pela proximidade entre os procedimentos típicos para resolver os problemas neste ambiente e o método formal com lápis e papel, permitindo assim uma melhor compreensão da sequência de passos envolvidos. A folha de cálculo foi igualmente útil no método gráfico por permitir rapidamente a visualização da representação gráfica, possibilitado a comparação entre diferentes situações. Contudo, esta abordagem revelou-se insuficiente pois Carolina já não se recordava dos procedimentos para efetuar a representação gráfica com lápis e papel. As alunas raramente recorreram a este método na resolução das tarefas. Finalmente, o método da adição ordenada foi o menos trabalhado. Apenas Carolina recorreu a este método na resolução de uma tarefa. No entanto, quando na entrevista revisitámos as tarefas realizadas ao longo do estudo dos sistemas, ambas as alunas mostraram saber utilizá-lo.

A partir do momento que aprendeu os métodos formais, Ana começou a utilizá-los preferencialmente. Carolina apesar de conhecer e saber utilizar os métodos formais, encara a folha de cálculo como uma alternativa com muitas potencialidades na resolução de problemas, que apresenta a vantagem de a libertar dos cálculos e lhe fornece inspiração para as resoluções. O tempo despendido numa fase informal de aprendizagem dos métodos formais parece ter sido suficiente para as alunas os compreenderem, como defendem Herscovics & Lincheviski (1994). Além disso, a nossa preocupação no estabelecimento de relações entre os métodos informais e formais (Küchemann, 1981), parece ter proporcionado flexibilidade matemática na resolução de situações novas.

Referências

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of PME 28* (Vol. 2, pp. 391-398). Bergen University College.

Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, *91*(50), 382-383.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59–78.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16(1), pp. 5-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:11-16* (pp. 102-119). London: Murray.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nobre, S., Amado, N. & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications*, 31, 11-19.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479-510). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474- 479.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 356–387.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Agradecimento

Este trabalho é parcialmente financiado pelo Projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 – "Resolução de Problemas de Matemática: perspetivas sobre uma competição interativa na web - Sub12&Sub14", e pela Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/69917/2010, da FCT.

O Pensamento Algébrico em contextos visuais

Marta Pinheiro[1], *Ana Barbosa*[2]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, martapinheiro@ipvc.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo. *Esta comunicação pretende descrever um estudo centrado no desenvolvimento do pensamento algébrico em contextos visuais realizado com alunos do 6.º ano de escolaridade. Procurou-se compreender os aspetos do pensamento algébrico evidenciados em contextos visuais, as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos e as suas dificuldades. Recorreu-se a um design de estudo de caso, sendo acompanhados dois alunos cujo trabalho foi enquadrado no contexto turma. Assim, foi elaborada uma proposta didática, organizada em contagens visuais, sequências de repetição e de crescimento, e problemas que envolvem a exploração de padrões. Apresentam-se alguns resultados, decorrentes da aplicação de três tarefas. De uma forma geral, os resultados evidenciaram que tarefas de exploração de padrões em contextos figurativos revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico nos três aspetos que o compõem: padrões e relações; generalização; e simbolização. Constatou-se, ainda, que tarefas desta natureza proporcionam a utilização de variadas estratégias de generalização. Os alunos que suportaram o seu raciocínio no contexto figurativo conseguiram obter mais sucesso e revelaram maior compreensão das relações entre as variáveis dependente e independente.*

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Visualização; Generalização; Proposta didática.

Introdução

A introdução do pensamento algébrico no currículo de Matemática logo a partir dos primeiros anos de escolaridade tem vindo a ser defendida por alguns autores (Kaput, 1999; NCTM, 2007). No currículo português foi concretizado com a generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) no ano letivo de 2009/2010, no qual a Álgebra foi introduzida como tema matemático no 2.º ciclo. Estamos perante uma nova visão da Álgebra, que se distancia da visão tradicional que a conotava com a resolução de equações e a simplificação de expressões algébricas, passando a ser vista como uma forma de pensamento acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007).

A exploração de tarefas que envolvam o estudo de padrões tem vindo a ser recomendada para a introdução da Álgebra nos primeiros anos (Driscoll, 1999; NCTM, 2007; Stacey & Macgregor, 2001), sendo estes considerados um importante veículo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Também as tarefas apresentadas em contextos figurativos são um bom ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Vale, Pimentel, Alvarenga & Fão, 2011b), uma vez que a visualização pode facilitar a generalização. Salienta-se que o trabalho com padrões figurativos permite desenvolver nos alunos a capacidade de generalizar e de representar relações (Orton, Orton & Roper, 1999), sendo um importante contributo para a transição da aritmética para a álgebra (Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2011a).

Atendendo às ideias explicitadas, neste estudo pretendeu-se compreender como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano de escolaridade no âmbito de contextos visuais, tendo por base as seguintes questões: 1) Que aspetos do pensamento algébrico são evidenciados em contextos visuais?; 2) Que tipo de estratégias utilizam os alunos no processo de generalização nestes contextos?; 3) Que dificuldades são evidenciadas pelos alunos nestes contextos?; 4) Que razões poderão explicar estas dificuldades?

Enquadramento teórico

O Pensamento Algébrico

Numa perspetiva de evolução, têm surgido conceções mais abrangentes acerca da Álgebra como a que apresenta Kieran (2007):

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas. (p. 5)

Ainda neste âmbito, Kaput (1999) defende que a Álgebra deve ser entendida de forma diferente da visão tradicional, considerando fundamental que o desenvolvimento do pensamento algébrico esteja acessível a todos os alunos sendo, para isso, necessária a criação de um ambiente propício na sala de aula, que lhes permita aprender com compreensão. Isto requer que os alunos tenham experiências que vão para além da aritmética e da fluência de cálculo, de modo a poderem entender a estrutura mais profunda subjacente à matemática (Blanton & Kaput, 2011).

Blanton e Kaput (2005) caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (p. 413). Segundo Kaput (2008), o pensamento algébrico apresenta dois aspetos fundamentais: a generalização e a expressão de generalizações de forma progressiva em sistemas de símbolos convencionais; e a ação sintaticamente conduzida sobre a simbolização em sistemas organizados de símbolos. Driscoll (1999) considera como fundamental ao pensamento algébrico a capacidade de identificar padrões e reorganizar dados para apresentar situações em que os valores das variáveis dependente e independente se relacionam em regras funcionais bem definidas. Assim, a generalização, a simbolização e a exploração de padrões e relações apresentam-se como aspetos fundamentais do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007; Vale et al., 2011b).

Mason (1996) afirma que a generalização é o coração da matemática. Segundo Kaput (1999) generalizar é continuar um raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos que estão em estudo, reconhecendo de forma explícita o que de semelhante existe entre eles ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco deixa de ser a situação inicial e passa a ser o padrão, o procedimento, as estruturas e a relação entre eles. Stacey (1989) identifica dois tipos de generalização: *generalização próxima*, quando se obtém o termo pretendido através da contagem ou do desenho, utilizando uma estratégia recursiva; e a *generalização distante* quando não é possível a utilização de desenhos ou da contagem sendo necessário compreender a lei de formação da sequência. É consensual entre vários autores que tarefas com padrões possibilitam o desenvolvimento da capacidade de generalizar e consequentemente o pensamento algébrico (Orton & Orton, 1999; Vale et al., 2011a) sendo assim recomendada a sua exploração como uma abordagem inicial à Álgebra. Vale et al. (2011a) consideram que "trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar" (p. 16). Já Radford (2006) sugere a exploração de padrões como atividade introdutória ao simbolismo algébrico e Vale (2011) afirma que as tarefas com padrões têm-se "revelado potenciadoras no desenvolvimento de capacidades de generalizar e em promover o pensamento algébrico e, em particular, o simbolismo que lhes está associado" (p. 186).

Relação entre a visualização e a capacidade de generalizar

Atualmente verifica-se que a visualização está a adquirir um papel central na aprendizagem da Matemática, deixando de estar conotada com um fim meramente ilustrativo, para passar a ser reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e da demonstração (Arcavi, 2003).

Rivera e Becker (2008) afirmam que, em tarefas que envolvam padrões figurativos, a perceção visual é uma das capacidades mais importantes, sendo caracterizada pelo ato de ver e distinguida entre sensorial (ver um objeto apenas como um objeto em si mesmo) e cognitiva (reconhecer factos ou propriedades relacionadas com o objeto). Aplicando estes factos ao contexto dos padrões figurativos, pode afirmar-se que quando os alunos interpretam as figuras de uma sequência como meros objetos estão a percecionar de forma sensorial, enquanto que quando são capazes de reconhecer relações nas figuras, compreendendo a estrutura do padrão, manifestam perceção cognitiva. Para Vale et al. (2011a) ver de formas diferentes pode ajudar os alunos de níveis elementares a fazer generalizações que só poderiam concretizar com uma matemática mais desenvolvida, defendendo ser primordial que os alunos compreendam a relevância da disposição visual na descoberta de estratégias de cálculo mais simples e intuitivas. O desenvolvimento do pensamento algébrico pode assim ser favorecido pela utilização de tarefas em contextos figurativos (Vale, et al., 2011a), podendo os alunos recorrer à visualização para facilitar a generalização (Mason, 1996).

Vários estudos documentam que, aquando da generalização, os alunos que suportam o seu raciocínio no contexto visual têm mais facilidade em traduzir as relações existentes e em dar significado às expressões geradas, apresentando mais sucesso nas suas justificações (Lannin, 2005; Rivera & Becker, 2008). Rivera e Becker (2008) identificam diferentes formas de generalizar com padrões lineares figurativos: *generalização construtiva* em que a figura resulta de partes não sobrepostas; e *desconstrutiva* em que a figura resulta da sobreposição de subconfigurações, sendo necessário um processo de subtração das partes sobrepostas. Vários estudos têm evidenciado que os alunos apresentam maior tendência para utilizar generalizações de tipo construtivo do que de tipo desconstrutivo (Barbosa, 2010; Rivera & Becker, 2008; Taplin, 1995). Para generalizar um padrão é necessário usar um modo de ação, ou seja, aplicar uma estratégia. São vários os estudos realizados com o objetivo de analisar e desenvolver as estratégias evidenciadas pelos alunos na generalização com recurso a padrões. Foi com base nestes estudos (e.g. Barbosa, 2010; Lannin, 2005; Sasman, Olivier, & Linchevski, 1999; Stacey, 1989) que foi elaborada a categorização utilizada nesta investigação (Anexo 1).

Proposta didática

Vale e colaboradores (2011a) apresentaram uma proposta didática, constituída por um conjunto de tarefas envolvendo padrões em contexto figurativo, com a grande finalidade de desenvolver o pensamento algébrico. Nesta proposta, tarefas, de natureza exploratória e investigativa, promovem a generalização impulsionando assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. A sequência de tarefas está estruturada em: (1) *contagens visuais*, que se dividem em tarefas de contagens visuais básicas e tarefas de contagens visuais noutros contextos; (2) *sequências de repetição e de crescimento*; e (3) *problemas com padrões*. As ideias expressas nesta proposta didática podem ser resumidas pelo esquema seguinte (figura 1):

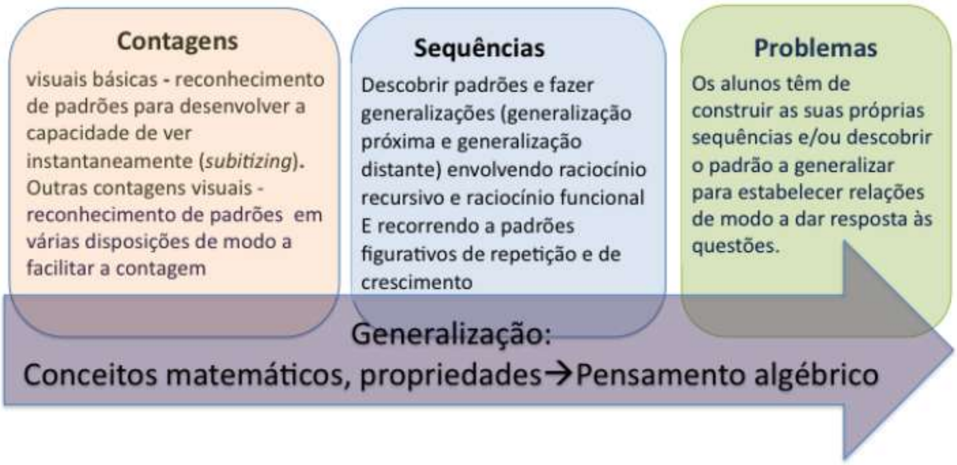


Figura 1. Ideias expressas na proposta didática (Vale et al., 2011b).

A sequência de tarefas apresentada serviu como base na formulação e sequenciação das propostas usadas neste estudo.

Metodologia do estudo

Considerando os objetivos do estudo, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa já que o foco do estudo se centrava mais nos processos do que nos resultados (Bogdan & Biklen, 1994) na medida em que se procurou compreender em profundidade a forma como os participantes desenvolveram o pensamento algébrico. Tendo em conta que se pretendia compreender um fenómeno em profundidade (Yin, 2009), recorreu-se a um *design* de estudo de caso, de natureza descritiva e interpretativa, tendo sido estudados dois alunos em contexto turma. O estudo decorreu numa turma do 6.º ano de uma Escola Básica Integrada, de uma freguesia do distrito de Braga. Tendo por base a proposta didática apresentada por Vale e colaboradores (2011a) e as orientações curriculares (ME-DGIDC, 2007), foi implementada uma sequência composta por dez tarefas, estando as mesmas organizadas em três etapas: contagens visuais, sequências e problemas de padrão (anexo 2). Salvaguarda-se que os alunos que participaram neste estudo não tinham qualquer tipo de experiência prévia com este tipo de tarefas. Estas foram implementadas seguindo a mesma dinâmica: apresentação da tarefa recorrendo a um PowerPoint, esclarecendo dúvidas; resolução individual; resposta a um questionário sobre a tarefa; e discussão da tarefa. Na fase de recolha de dados a investigadora assumiu o papel de observadora participante tendo recolhido dados de natureza descritiva. Procedeu-se a uma análise de natureza indutiva, na medida em que as categorias emergiram dos dados recolhidos assim como da revisão de literatura efetuada, levando a uma categorização dos mesmos. Para cada tarefa implementada, procedeu-se a uma análise detalhada para cada um dos alunos caso e, de uma forma mais geral, para a turma. Neste artigo apresenta-se a análise do trabalho dos alunos caso, Daniel e André, na resolução de três tarefas, tendo em conta a organização da proposta didática.

Discussão e análise das tarefas

Os berlindes do Carlos

A tarefa *Os berlindes do Carlos* (Anexo 3) inseriu-se nas contagens visuais, tendo como finalidade o reconhecimento de padrões em várias disposições. O arranjo espacial dos berlindes potencia diferentes formas de *ver* e, consequentemente, a formulação de diferentes expressões numéricas que traduzam o processo de contagem. Na sua resolução, o Daniel e o André utilizaram o *subitizing* conceptual reconhecendo a imagem (todo) como a composição de várias partes. Para calcular o número total de berlindes, ambos apresentaram várias expressões numéricas que correspondiam a diferentes formas de observar a figura.

Na resolução da primeira questão, o Daniel identificou arranjos lineares na vertical e arranjos retangulares. Na questão 2, apresentou cinco formas diferentes de contagem dos berlindes variando entre disposições retangulares e disposições lineares (figura 2).

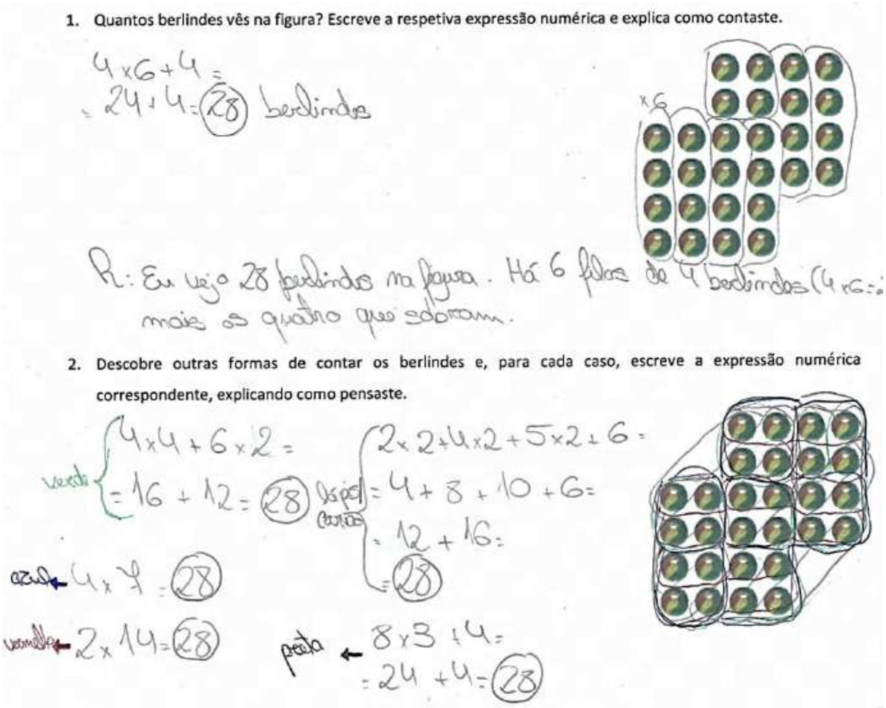


Figura 2. Resolução do Daniel nas questões 1 e 2 da tarefa *Os berlindes do Carlos*.

Na primeira abordagem, o André identificou arranjos lineares na vertical que foram agrupados formando arranjos retangulares. Na questão 2 apresentou três formas diferentes de ver o conjunto de berlindes, formando grupos com o mesmo número de elementos (figura 3).

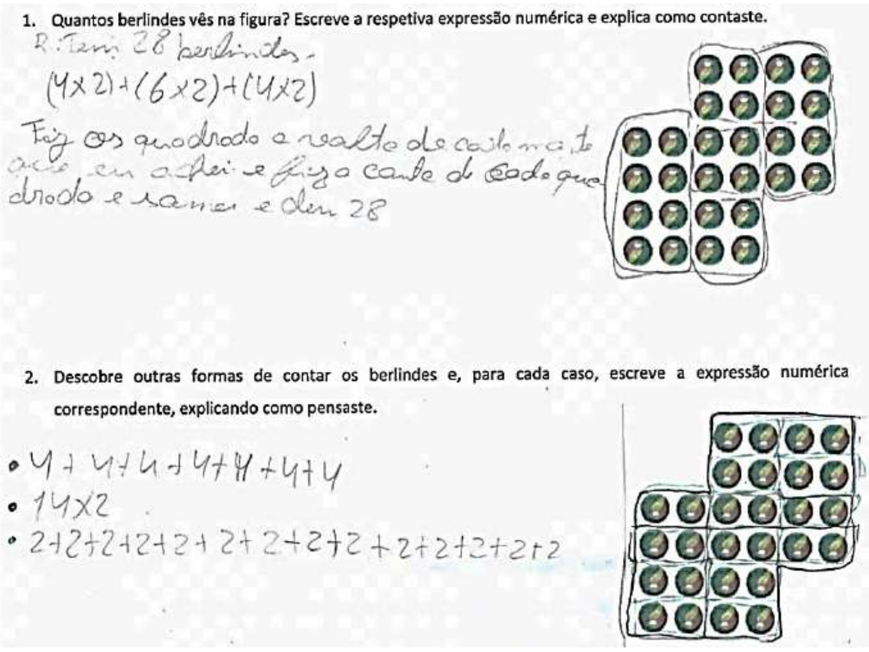


Figura 3. Resolução do André nas questões 1 e 2 da tarefa *Os berlindes do Carlos*.

Ambos os alunos concluíram que as expressões numéricas representavam o mesmo valor, sem no entanto terem referido que representam diferentes formas de contagem e de visualização da mesma figura.

Smiles

A tarefa *Smiles* (Anexo 4) insere-se nas sequências e implicava o estudo de uma sequência com um padrão figurativo de crescimento. Contemplava questões de generalização próxima e distante, incluindo a representação simbólica, e permitia múltiplas interpretações das figuras que constituíam a sequência, possibilitando o recurso a diferentes estratégias. Ao longo da tarefa, o Daniel baseou-se num raciocínio de tipo recursivo, sendo que nas questões de generalização distante associou-lhe a estratégia múltiplo da diferença com ajuste, numa tentativa de contornar a morosidade da recursão. Utilizou estratégias não visuais, suportando o seu raciocínio no contexto numérico em detrimento do contexto figurativo, o que não lhe permitiu resolver com sucesso as questões 4 e 5. Na questão 1, verificou que a diferença entre termos consecutivos era de três smiles e assim obteve o termo de ordem 4, adicionando 3 smiles ao termo anterior (figura 4).

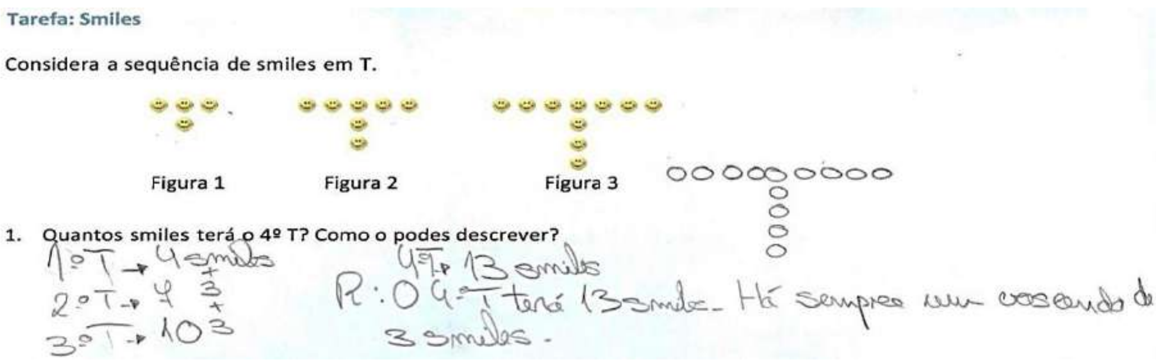
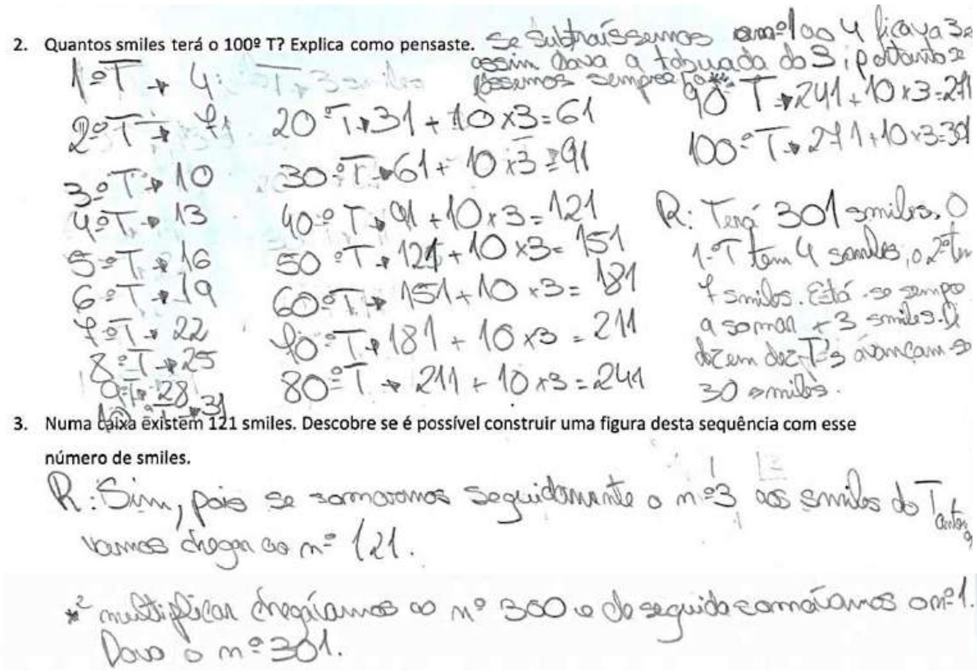


Figura 4. Resolução do Daniel na questão 1 da tarefa *Smiles*.

Para encontrar o 100.º T descobriu o termo de ordem 10, continuando a sequência, e, para contornar a morosidade desta estratégia, encontrou valores para termos cuja ordem fosse um múltiplo de 10 até obter o 100.º termo. Para determinar o 20º adicionou-lhe o número de smiles correspondente ao número de vezes que se regista a diferença, procedendo da mesma forma até obter o 100º termo (figura 5). A estratégia utilizada na questão 2 permitiu-lhe também descobrir se seria possível construir uma figura com 121 smiles, (figura 5), não tendo, por isso, mostrado reversibilidade de pensamento. Com esta resolução o aluno encontrou uma regra que lhe permitiu descobrir o número de smiles para qualquer figura. Contudo, não a valorizou e não a utilizou em questões posteriores.



2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste. Se subtraíssemos ao nº1 ao 4 ficava 3 e assim dava a tabuada do 3, portanto se fossemos sempre

1ºT → 4
2ºT → 7
3ºT → 10
4ºT → 13
5ºT → 16
6ºT → 19
7ºT → 22
8ºT → 25
9ºT → 28
31

20ºT → 31 + 10×3 = 61
30ºT → 61 + 10×3 = 91
40ºT → 91 + 10×3 = 121
50ºT → 121 + 10×3 = 151
60ºT → 151 + 10×3 = 181
70ºT → 181 + 10×3 = 211
80ºT → 211 + 10×3 = 241
90ºT → 241 + 10×3 = 271
100ºT → 271 + 10×3 = 301

R: Terá 301 smiles. O 1ºT tem 4 smiles, o 2ºT tem 7 smiles. Está-se sempre a somar +3 smiles. De dez em dez T's avançam 30 smiles.

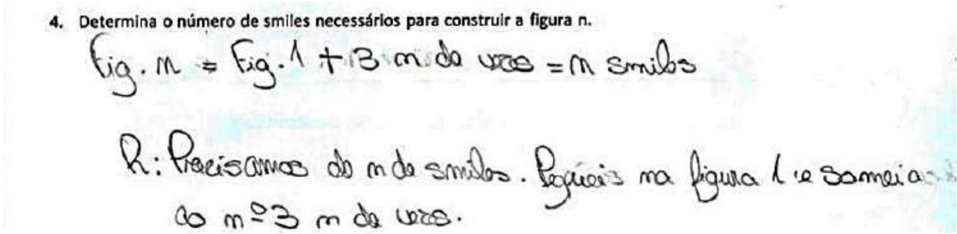
3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.

R: Sim, pois se somarmos seguidamente o nº3 aos smiles do T anterior vamos chegar ao nº 121.

*2 multiplicar chegámos ao nº 300 e de seguida somámos o nº1. Dava o nº 301.

Figura 5. Resolução do Daniel nas questões 2 e 3 da tarefa *Smiles*.

Na questão 4 revelou dificuldades na manipulação simbólica e não conseguiu encontrar uma expressão algébrica que permitisse calcular o número de smiles da figura n, possivelmente porque na resolução das questões anteriores teve por base o raciocínio recursivo (figura 6).



4. Determina o número de smiles necessários para construir a figura n.

Fig. n = Fig. 1 + 3 n de vezes = n smiles

R: Precisamos do n de smiles. Peguei na figura 1 e somei ao nº3 n de vezes.

Figura 6. Resolução do Daniel na questão 4 da tarefa *Smiles*.

O Daniel demonstrou dificuldades na visualização e no trabalho em contexto figurativo já que na questão 5 não conseguiu interpretar o significado das expressões numéricas apresentadas (figura 7).

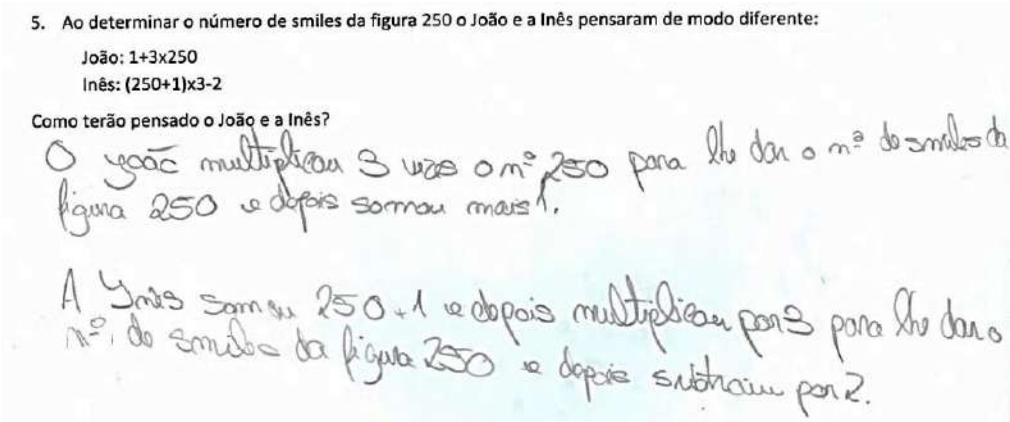


Figura 7. Resolução do Daniel na questão 5 da tarefa *Smiles*.

Pelo contrário, o André baseou o seu raciocínio no contexto figurativo, utilizando uma estratégia de natureza visual, a explícita, quer na generalização próxima, quer na generalização distante. O aluno aplicou uma regra representativa da relação entre as variáveis dependente e independente, baseando-se na forma como visualizou as figuras, descobrindo uma expressão numérica que lhe permitiria calcular o número de smiles para um termo de qualquer ordem. O aluno identificou um smile no centro e três grupos com o mesmo número de smiles à volta, o que corresponde a uma generalização construtiva, resultante da decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas, (figura 8).

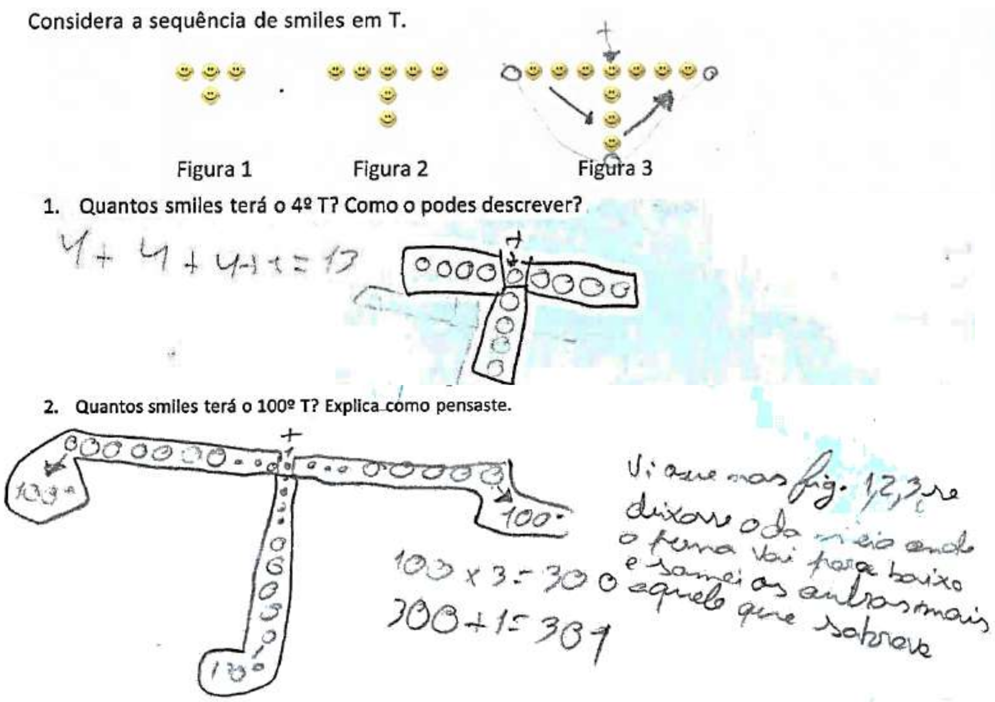


Figura 8. Resolução do André nas questões 1 e 2 da tarefa *Smiles*.

Na questão 3, foi capaz de aplicar a regra descoberta, usando o raciocínio inverso, revelando reversibilidade de pensamento (figura 9). Na resolução da questão 4 o André formulou uma expressão algébrica que traduzia a generalização algébrica (figura 9).

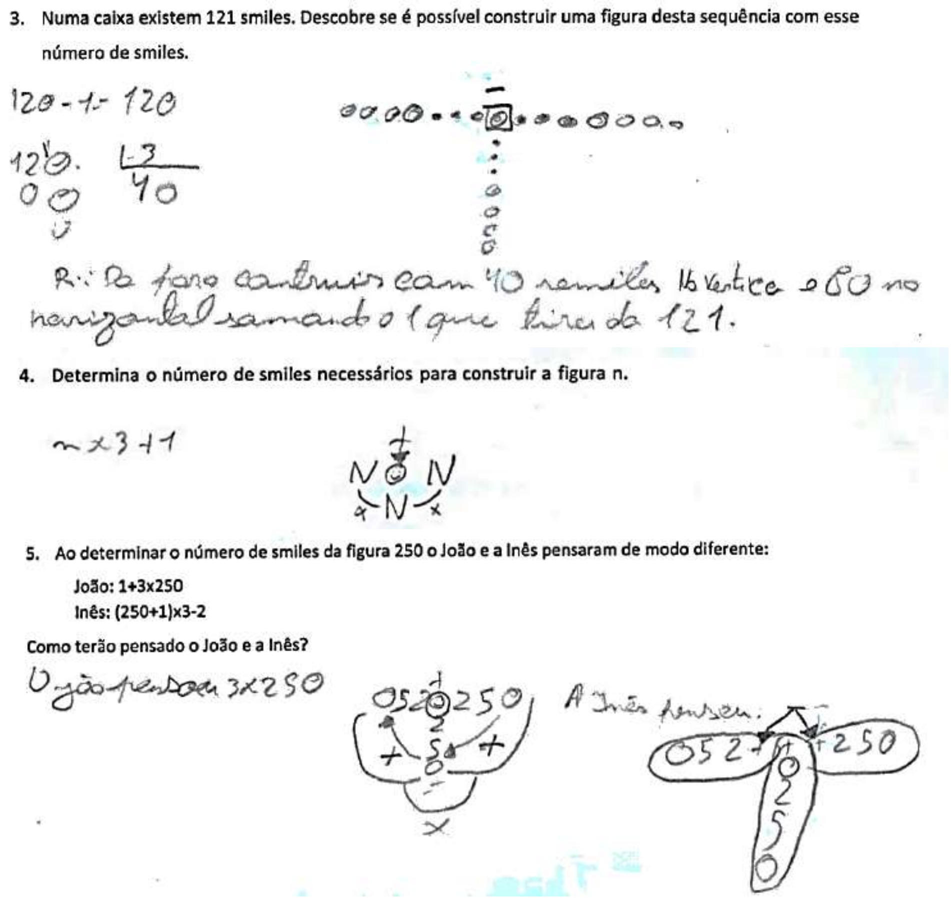
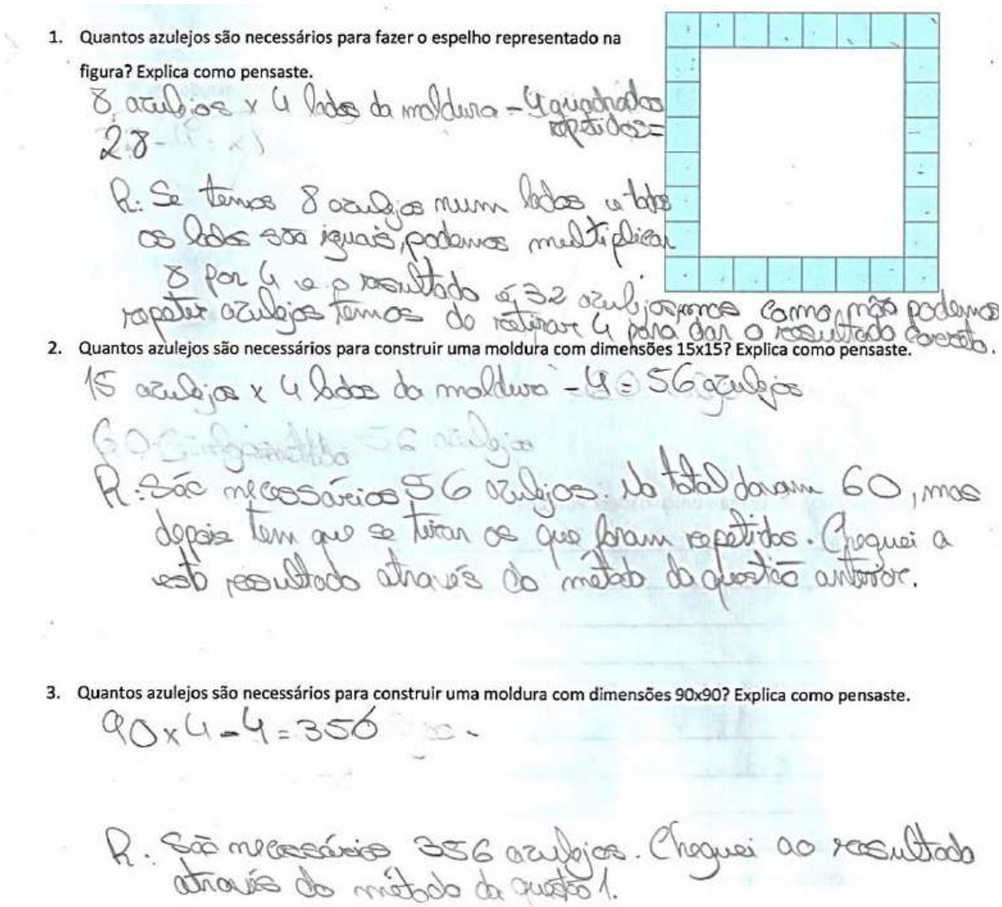


Figura 9. Resolução do André nas questões 3, 4 e 5 da tarefa *Smiles*.

Na questão 5, conseguiu dar significado às expressões numéricas apresentadas, fundamentando o seu raciocínio através de esquemas, quer na que representava a generalização construtiva (1+3×250), quer na representava a generalização desconstrutiva ((250+1)×3-2) (figura 9).

A moldura

A tarefa *A moldura* (Anexo 5) faz parte dos problemas com padrões e tem como principal objetivo a exploração de uma sequência que não é evidenciada de forma explícita, contemplando questões de generalização próxima e generalização distante. Ao contrário da tarefa *Smiles,* o Daniel visualizou a estrutura do padrão e identificou relações entre as variáveis dependente e independente, baseando o seu raciocínio no contexto figurativo. Utilizou uma estratégia de natureza visual, a explícita, quer em questões de generalização próxima (questões 1 e 2) quer nas de generalização distante (questão 3). Identificou em cada moldura quatro conjuntos com o mesmo número de azulejos, correspondente às dimensões do quadrado, subtraindo posteriormente os azulejos sobrepostos (os cantos da moldura), correspondendo assim a uma generalização de natureza desconstrutiva, sendo a única vez que utilizou uma estratégia desta natureza.


1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.

8 azulejos x 4 lados da moldura - 4 quadrados repetidos =

28

R: Se temos 8 azulejos num lados e todos os lados são iguais, podemos multiplicar 8 por 4 e o resultado é 32 azulejos, mas como não podemos repetir azulejos temos de retirar 4 para dar o resultado correto.

2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.

15 azulejos x 4 lados da moldura - 4 = 56 azulejos

R: São necessários 56 azulejos. No total davam 60, mas depois tem que se tirar os que foram repetidos. Cheguei a este resultado através do método da questão anterior.

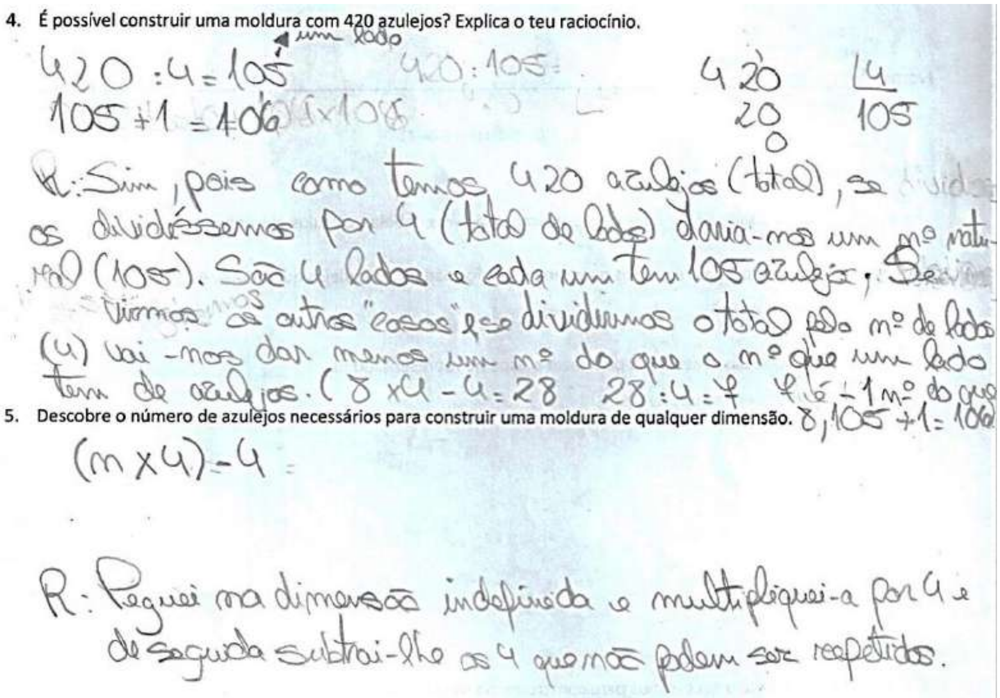
3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.

90x4-4=356

R. São necessários 356 azulejos. Cheguei ao resultado através do método da questão 1.

Figura 10. Resolução do Daniel nas questões 1, 2 e 3 da tarefa *A Moldura*.

Verifica-se que o contexto figurativo foi preponderante no sucesso da resolução desta tarefa. A análise do padrão figurativo permitiu ao aluno compreender a sua estrutura e deduzir uma regra que lhe permitiu descobrir o número de azulejos da moldura. Na questão 4 o Daniel não foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente, não revelando reversibilidade no pensamento. Contudo, conseguiu resolver de forma correta esta questão, recorrendo à estratégia explícita e baseando o seu raciocínio nas resoluções das questões anteriores (figura 11).


4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.

420 : 4 = 105 (um lado)

105 + 1 = 106

420 | 4
20 105
0

R: Sim, pois como temos 420 azulejos (total), se os dividíssemos por 4 (total de lados) dava-nos um nº natural (105). São 4 lados e cada um tem 105 azulejos; Se vimos nos outros "casos" que se dividirmos o total pelo nº de lados (4) vai-nos dar menos um nº do que o nº que um lado tem de azulejos. (8×4−4=28 28:4=7 7 é −1 nº do que 8), 105+1=106

5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.

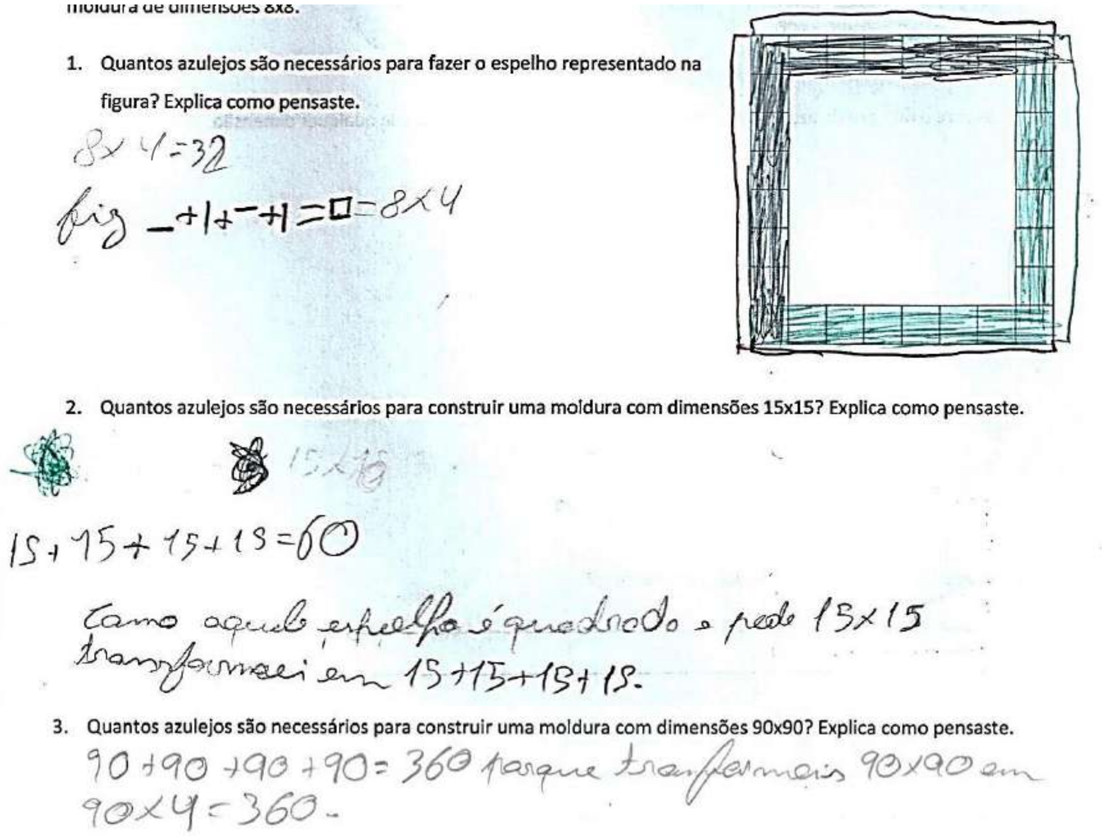
(n×4)−4

R: Peguei na dimensão indefinida e multipliquei-a por 4 e de seguida subtraí-lhe os 4 que não podem ser repetidos.

Figura 11. Resolução do Daniel nas questões 4 e 5 da tarefa *A Moldura*.

O Daniel conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a generalização (questão 5), revelando evolução na manipulação simbólica (figura 11).

Tal como o Daniel, o André utilizou sempre a estratégia explícita, quer nas questões de generalização próxima (questão 1 e 2) quer nas de generalização distante (questão 3). O aluno aplicou uma regra que entendeu ser representativa da relação entre as variáveis dependente e independente, baseando-se numa generalização construtiva, já que identificou a moldura composta por quatro grupos com o mesmo número de azulejos, correspondente às dimensões do quadrado. Contudo, essa regra não correspondia ao contexto apresentado pois calculava apenas o perímetro e não apresentava a subtração dos azulejos que já tinham sido contemplados, revelando dificuldades na generalização descontrutiva assim como na análise da estrutura do padrão (figura 12).


moldura de dimensões 8x8.

1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.

$8 \times 4 = 32$

fig _+|+_+| = □ = 8×4

2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.

~~15×15~~

$15+15+15+15=60$

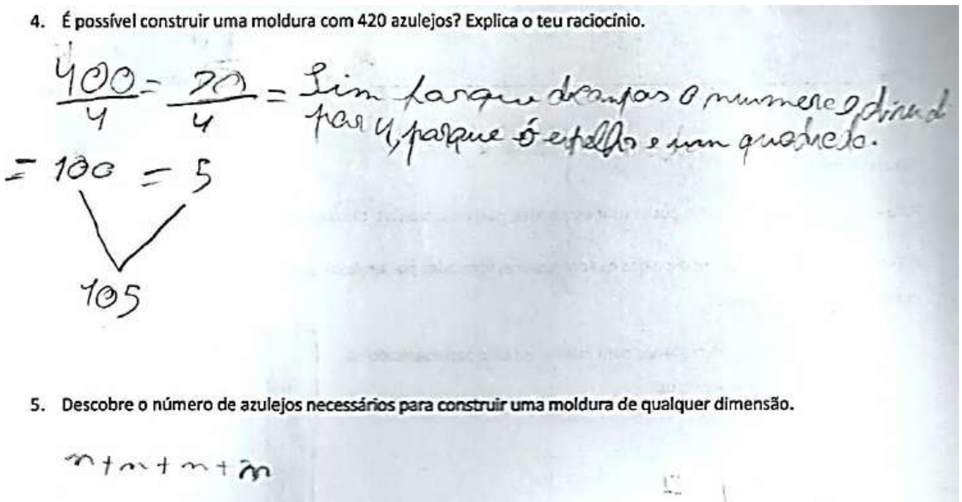
Como aquele espelho é quadrado e pede 15×15 transformei em 15+15+15+15.

3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.

90+90+90+90=360 porque transformei 90×90 em 90×4=360.

Figura 12. Resolução do André nas questões 1, 2 e 3 da tarefa *A Moldura*.

Na questão 4, o André foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente revelando reversibilidade no pensamento, recorrendo à estratégia explícita. Contudo, como essa regra não estava certa, o que não permitiu obter conclusões corretas (figura 13).


4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.

$\frac{400}{4} = \frac{20}{4}$ = Sim porque dividi o numero e dividi por 4, porque o espelho é um quadrado.

= 100 = 5

105

5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.

n+n+n+n

Figura 13. Resolução do André na questão 4 e 5 da tarefa *A Moldura*.

Na questão 5, conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a regra descoberta nas questões anteriores (figura 14) a qual, contudo, não correspondia ao contexto apresentado.

Conclusões

A análise do trabalho dos alunos caso evidencia que a exploração de padrões em contextos visuais propicia o desenvolvimento do pensamento algébrico. Estes alunos revelaram capacidade de explorar padrões e de estabelecer relações entre as variáveis, generalizando e apresentando a expressão algébrica que traduzia essa generalização. É de salientar a importância do contexto figurativo no seu desempenho: na análise da estrutura do padrão, recorrendo à perceção cognitiva, reconhecendo a existência de relações e revelando compreender a estrutura do padrão (Rivera & Becker, 2008); na generalização porque reconheceram, de forma explícita, o que existia de semelhante em termos específicos da sequência, tendo conseguido estender esse raciocínio a termos distantes (Kaput, 1999); na simbolização em que a expressão algébrica traduzia a forma de ver a figura, revelando compreender as relações simbólicas apresentadas, manipulando com maior facilidade esses símbolos (Rivera & Becker, 2008). Salienta-se ainda que, em questões de generalização distante, quando basearam o seu raciocínio no contexto figurativo, obtiveram mais sucesso do que quando se basearam no contexto numérico. Assim, verificou-se que a visualização constituiu um meio facilitador da generalização e do desenvolvimento do pensamento algébrico (Barbosa, 2010; Mason, 1996).

Verifica-se que os alunos recorreram a diversas estratégias (e.g. subitizing conceptual, recursiva, múltiplo da diferença, explícita), sugerindo que tarefas desta natureza propiciam o recurso a múltiplas estratégias (Barbosa, 2010; Lannin, 2005; Rivera & Becker, 2008). Apresentaram preferência por estratégias de generalização de tipo construtivo em detrimento das de tipo desconstrutivo, (Barbosa, 2010; River & Becker, 2008), revelando maior facilidade em questões de generalização próxima.

Apesar de serem capazes de interpretar o contexto figurativo apresentado, os alunos caso, na tarefa de contagens visuais, frequentemente trocaram a ordem dos fatores nas multiplicações. Revelaram dificuldades em estabelecer totalmente um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica que poderá ser explicado por uma forte habituação à manipulação dos números sem um contexto figurativo associado. Verificou-se maiores dificuldades em questões de generalização distante nomeadamente em questões que envolviam reversibilidade de pensamento. Estas dificuldades podem estar relacionadas com o facto de estas questões se basearem na relação entre as variáveis, exigindo uma boa compreensão das relações numéricas.

Esta investigação permitiu verificar que o pensamento algébrico pode ser explorado desde cedo, através de tarefas que envolvam a exploração de padrões, e que uma abordagem de natureza figurativa facilita o seu desenvolvimento de forma sustentada. Assim, tarefas em contextos figurativos revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico baseado na generalização de padrões tal como defendiam Vale et al. (2011a). Concluiu-se que este tipo de tarefas promove a utilização de diversas estratégias, podendo ser de natureza visual ou não visual. Foi notório que os alunos que suportaram o seu raciocínio no contexto figurativo conseguiram ser mais bem sucedidos e relevaram uma maior compreensão das relações existentes entre as variáveis dependente e independente, conseguindo explicar e justificar as regras apresentadas e expressar relações generalizadas em termos explícitos (Rivera & Becker, 2005).

Apesar de terem surgido dificuldades na manipulação simbólica, os resultados do estudo sugerem vantagens na utilização de tarefas que envolvem a exploração de padrões em contexto figurativo, como atividades introdutórias ao simbolismo algébrico (Radford, 2006), tendo-se revelado potenciadoras do desenvolvimento do simbolismo associado ao pensamento algébrico, fomentando a transição do pensamento numérico para o algébrico (Vale et al. 2011b).

Referências bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Dissertação de Doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom pratice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, a Global Dialogue from Multiple Perspectives Advances in Mathematics Education* (pp. 5-24). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers, grades 6-8*. Porstmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI*(1), 5-26.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordretch, The Netherlands: Kluwer.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassel.

Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and Pratical Contexts and the Perception of Pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassel.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *1*, pp. 2-21. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*, 65-82.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, *4*, pp. 161-168. Haifa, Israel: Technion Printing Center.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice.* New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & L. Rosamund (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vale, I. (2011). *Resolução de Tarefas com Padrões em Contextos Figurativos: exemplos de sala de aula*. Obtido em 9 de Janeiro de 2012, de Gterp: http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2011a). *Padrões em matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico*. Lisboa: Texto Editores.

Vale, I., Pimentel, T., Alvarenga, D., & Fão, A. (2011b). *Uma proposta didática envolvendo padrões (Material de apoio ao PMEB)*. Obtido em 15 de setembro de 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/071_Tarefas_Padroes.pdf

Yin, R. (2009). *Case study research: design and methods* (4th Ed.). Los Angeles: Sage.

Anexo 1

Planificação das tarefas aplicadas em cada sessão

Sessões		Tarefas	Tempo
1.ª Sessão	Contagens visuais	Qual tem mais estrelas? Dados Os grãos de café	1 bloco de 90’
2.ª Sessão	Contagens visuais	Os berlindes do Carlos A coleção de moedas	1 bloco de 90’
3.ª Sessão	Sequências – padrões de repetição	Nenúfares e rãs	1 bloco de 90’
4.ª Sessão	Sequências – padrões de crescimento	Smiles	1 bloco de 90’
5.ª Sessão	Sequências – padrões de crescimento	Os Z’s	1 bloco de 90’
6.ª Sessão	Problemas com padrões	Os lugares	1 bloco de 90’
7.ª Sessão	Problemas com padrões	A moldura	1 bloco de 90’

Anexo 2

Categorias e indicadores de análise

Categorias de análise			Descrição
Estratégias de contagem	Contagem um a um		O aluno conta cada elemento.
	Subitizing percetual		O aluno reconhece o número de imediato sem usar outro processo matemático.
	Subitizing conceptual		O aluno reconhece uma disposição padronizada de um número como a composição das partes que formam um todo.
Estratégias de generalização	Contagem		O aluno desenha a figura e conta os seus elementos.
	Recursiva		O aluno continua a sequência, baseando-se nos termos anteriores para construir os seguintes.
	Tentativa e Erro		O aluno testa valores na regra descoberta anteriormente até verificar as condições pretendidas.
	Parte unidade	Sem ajuste	O aluno recorre à proporcionalidade direta e utiliza uma parte ou termo da sequência como unidade, multiplicando-a para encontrar valores mais distantes.
		Com ajuste	O aluno recorre à proporcionalidade direta e utiliza uma parte ou termo da sequência como unidade multiplicando-a para encontrar valores mais distantes fazendo um ajuste do resultado.
	Múltiplo da diferença	Sem ajuste	O aluno usa múltiplos da diferença entre termos consecutivos sem ajustar o resultado.
		Com ajuste	O aluno usa múltiplos da diferença entre termos consecutivos fazendo um ajuste do resultado baseando-se no contexto
	Explícita		O aluno identifica a regra de construção da sequência permitindo-lhe o cálculo imediato de qualquer termo, sendo dado o número de ordem
Natureza das estratégias	Não visuais		As imagens apresentadas/criadas não são fundamentais para encontrar a solução do problema.
	Visuais		As imagens apresentadas/criadas são fundamentais para encontrar a solução do problema.
	Mistas		Evidencia o recurso às imagens apresentadas/criadas mas numa perspetiva de facilitação do cálculo.
Nível de generalização	Próxima		O termo é descoberto rapidamente através de uma abordagem recursiva ou recorrendo a desenhos.
	Distante		Não é possível a utilização de desenhos ou de uma abordagem recursiva, sendo necessário identificar a lei de formação.
Tipo de generalização	Construtiva		A regra surge da identificação de partes não sobrepostas que formam a figura inicial.
	Desconstrutiva		A regra surge da identificação de partes que se sobrepõem, sendo necessário subtrair esses elementos.

Anexo 3

Os berlindes do Carlos

1. Quantos berlindes vês na figura? Escreve a respetiva expressão numérica e explica como contaste.
2. Descobre outras formas de contar os berlindes e, para cada caso, escreve a expressão numérica correspondente, explicando como pensaste.
3. O que podes concluir ao analisares as diferentes expressões numéricas que obtiveste?

Anexo 4

Smiles

Considera a sequência de smiles em T.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Quantos smiles terá o 4º T? Como o podes descrever?
2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste.
3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.
4. Determina o número de smiles necessários para construir a figura n.
5. Ao determinar o número de smiles da figura 250 o João e a Inês pensaram de modo diferente:

   João: 1+3x250
   Inês: (250+1)x3-2

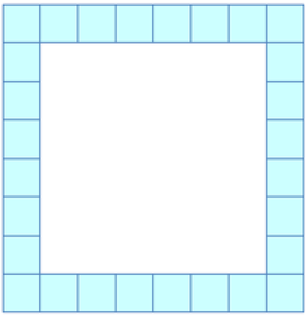
   Como terão pensado o João e a Inês?

Anexo 5

A moldura

Para explicares o teu raciocínio podes usar esquemas, palavras, tabelas, cálculos, desenhos...

A Esmoldura faz molduras em espelhos quadrangulares formadas por azulejos quadrados. A figura representa uma moldura de dimensões 8x8.



1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.
2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.
3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.
4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.
5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes

Paula Maria Barros[1], *Cláudia Mendes Araújo*[2], *José António Fernandes*[3]
[1]ESTiG - Instituto Politécnico de Bragança, pbarros@ipb.pt
[2]Centro de Matemática – Universidade do Minho, clmendes@math.uminho.pt
[3]CIEd – Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

No presente texto estudam-se os raciocínios desenvolvidos por estudantes do ensino superior na resolução de uma tarefa sobre matrizes, com particular ênfase nos erros e dificuldades por eles revelados. Participaram no estudo trezentos estudantes do ensino superior politécnico de vários cursos de engenharia, que se encontravam a frequentar a unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica do 1.º ano dos respetivos cursos. Inserido na avaliação, depois de abordados os diferentes temas da unidade curricular, os estudantes realizaram no ano letivo 2011/2012 vários trabalhos sobre esses temas, um dos quais incluía uma questão sobre matrizes, que é aqui estudada. Dos resultados obtidos conclui-se que os estudantes demonstraram dificuldades consideráveis na resolução da tarefa proposta, evidenciando-se também que a ausência de conhecimentos sobre lógica clássica induziu a que os alunos justificassem a sua resposta de forma incorreta.

Palavras-chave: álgebra linear; matrizes; raciocínios; ensino superior.

Introdução

A álgebra linear está subjacente a quase todos os domínios da matemática e até mesmo de outras áreas, como as ciências da computação, a engenharia e a física. É assim natural que os seus conteúdos sejam estudados em diversos cursos do ensino superior.

Apesar da sua grande aplicabilidade, "o ensino da álgebra a um nível universitário é quase universalmente considerado como uma experiência frustrante para professores e estudantes" (Hillel, 2000, p.191). Esta constatação é corroborada por investigadores como Gueudet-Chartier (2004) ao afirmar que "é um facto bem conhecido que os estudantes consideram este assunto difícil" (p. 491) e Dorier, Robert e Sierspinska (2000) ao referirem que "há um amplo consenso em afirmar que tanto o ensino como a aprendizagem da álgebra linear são difíceis" (p. 273).

Coloca-se então a questão de como promover um ensino da álgebra linear que, para além de manter os alunos motivados, permita que estes desenvolvam as competências consideradas essenciais para promover um bom desempenho sempre que precisarem de recorrer a esses conhecimentos.

Tendo por base esta preocupação, partindo do pressuposto que conhecer os erros e dificuldades dos alunos pode ser um bom princípio para o professor conseguir programar um ensino mais eficaz e adequado às necessidades destes (Godino, Batanero & Font, 2003; Ferreira & Brumatti, 2009) e tendo em atenção que a reflexão e discussão sobre os erros pode ser um ponto de partida para os estudantes participarem ativamente na sua superação (Pochulu, 2005), realizou-se um estudo, envolvendo estudantes do ensino superior politécnico, com o intuito de responder, entre outras, à seguinte questão de investigação: Quais os erros e dificuldades revelados pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos sobre matrizes e determinantes?

Mais especificamente, tendo em consideração as limitações de espaço, neste texto apresentam-se apenas os resultados obtidos numa questão sobre matrizes que se colocou aos alunos que participaram no estudo.

Investigação sobre dificuldades relativas a matrizes

A álgebra linear é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000) para o que contribui também a falta de conhecimentos sobre lógica elementar e sobre métodos de prova.

Como mencionam Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (2000), já no final dos anos oitenta Robert e Robinet, num trabalho de diagnóstico sobre dificuldades dos alunos, referem que estes criticam na álgebra linear o excessivo uso de formalismo, a enorme quantidade de novas definições e a falta de conexão com o que já sabem de matemática. Nesse estudo ficou patente que os alunos tinham a sensação de estar a aterrar num novo planeta não sendo capazes de encontrar o seu caminho nesse novo mundo.

Hurman (2007), numa investigação com alunos do primeiro ano da Licenciatura em Administração de uma universidade argentina, num exercício de um teste parcial que se relacionava com propriedades matriciais, em que os alunos tinham de completar afirmações indicando os passos intermédios, verificou que os estudantes não tinham em conta a característica dos entes com que estavam a operar, pelo que continuavam a trabalhar com as matrizes como se fossem números e com determinantes como se fossem matrizes. Para além disso, muitos dos erros comuns que cometiam com números eram transpostos para as matrizes. Por exemplo, numa das alíneas do exercício em que os alunos tinham de completar a afirmação "Se A e B são matrizes quadradas, então $(AB)^2 = ...$" houve alunos que recorreram ao que a autora chama de fenómenos didáticos, isto é, consideraram $(AB)^2 = A^2B^2$, $(AB)^2 = B^2A^2$ ou $(AB)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

A autora também observou que a não comutatividade do produto de matrizes é para os estudantes meramente declarativa pois não é considerada quando realizam as operações matriciais. Por exemplo, quando completam as afirmações "Se A é invertível e $AX = B$, então $X = ...$" e "Se P é invertível e $P^{-1}AP = B$, então $A = ...$", há alunos que multiplicam em qualquer lugar (à esquerda ou à direita) e, no caso da segunda afirmação, alguns esquecem-se de ter em conta a não comutatividade da multiplicação de matrizes.

Leder (1991, citado em Sanches, 2002) realizou um estudo em que dois professores de matemática do terceiro grau foram encorajados a apresentar o tema teorema de Pitágoras e matrizes de forma clara, lógica e compreensível a vinte e um professores universitários que não ensinavam matemática. Estes deviam prestar atenção, tomando notas, discutindo e fazendo perguntas sempre que algo não estivesse claro. Além disso, foi-lhes solicitado que anotassem as reflexões e conclusões da sua experiência pedagógica. A análise das anotações mostrou que, embora os sujeitos do estudo fossem professores universitários, apresentavam grande dificuldade em compreender o produto de matrizes e a sua não comutatividade.

Ozdag e Aygor (2012), num estudo com setenta e um estudantes do 1.º ano de licenciatura em matemática, em que pretendiam investigar o seu desempenho e os métodos utilizados para encontrar a factorização de um determinante de uma matriz de dimensão $n \times n$, verificaram que apenas dez estudantes conseguiram resolver a questão proposta completamente, tendo trinta e seis sido incapazes de a resolver. Confrontando o desempenho nessa questão com questões colocadas antes aos alunos, em que a dimensão da matriz era 3×3, os autores constataram que o desempenho piorou consideravelmente quando a dimensão da matriz aumentou, pelo que concluíram que a dimensão das matrizes afeta o desempenho dos estudantes negativamente.

Ferro (2011), num estudo com um grupo de estudantes do ensino secundário (2.º ano do Bachillerato), em que analisou provas de avaliação sobre a temática matrizes e determinantes, concluiu que o tema apresenta uma notável dificuldade para os alunos. Embora os exercícios que consistiam unicamente na repetição de uma rotina não lhes tenham levantado obstáculos, os estudantes sentiram dificuldades na compreensão e aplicação dos conceitos teóricos. O êxito que tiveram nas respostas às perguntas teóricas dos exames deveu-se à repetição de demonstrações observadas na aula, faltando-lhes conhecimentos teóricos suficientes para abordar outro tipo de situações. Mais concretamente, a autora menciona que os principais erros detetados foram:

- Incorreções nas operações simples (adição, subtração,...) que conduzem a erros de vulto ao longo do exercício. O aluno não se dá conta da incoerência de alguns resultados e não os verifica, mostrando uma falta de sentido crítico;
- Aplicação incorreta de resultados teóricos, sobretudo ao aplicar o teorema de Rouché-Fröbenius e as propriedades dos determinantes;
- Dificuldades em lidar com situações diversas que dependam de um parâmetro;
- Imprecisão nas definições de conceitos que indicam uma compreensão insuficiente;
- Confusão entre a notação e os conceitos de matriz e determinante;
- Realização incorreta de demonstrações, excetuando as realizadas com antecedência na aula e que só supõem a memorização.

Esta última constatação foi também mencionada por Hillel (2000), considerando este autor que as dificuldades em álgebra linear resultam simplesmente da inexperiência dos alunos com demonstrações. Mais concretamente, afirma que

> as dificuldades dos alunos relacionadas com as provas incluem: não compreender a necessidade de provas nem as várias técnicas de prova, não sendo capazes de lidar com os quantificadores, muitas vezes implícitos; confundir condições necessárias e suficientes; fazer generalizações apressadas com base em evidências muito instáveis e escassas (Hillel, 2000, p. 191).

No mesmo sentido, Alvarado e González (2009) referem que uma vez que durante os últimos anos as provas têm assumido um papel de menor relevo na escola secundária, quando os estudantes começam os seus estudos universitários têm grandes dificuldades no reconhecimento, compreensão e construção de provas. Estas autoras, num estudo com estudantes de matemáticas aplicadas que responderam a um questionário onde tinham de selecionar o argumento válido de entre várias afirmações apresentadas e justificar a sua escolha, constataram que os estudantes apresentaram, entre outras, as seguintes dificuldades: utilização indiferenciada da implicação ($p \Rightarrow q$) e da sua recíproca ($q \Rightarrow p$) ou da negação das suas premissas ($\neg p \Rightarrow \neg q$) e a crença de que um simples exemplo é suficiente para provar uma afirmação.

Alvarado e González (2013) argumentam ainda que a linguagem do quotidiano também representa um obstáculo para a aprendizagem de demonstrações. Particularizando, referem que uma implicação, em muitas ocasiões, admite diversas conotações de causalidade e temporalidade que fazem com que o seu significado se afaste do sentido matemático e que, noutras ocasiões, a linguagem comum lhe dá um significado diferente pela tendência a subentender o que não está dito. Corroborando esta opinião, Epp (2003) sugere que a diferença existente entre a linguagem informal do quotidiano e a linguagem da matemática pode conduzir a cometer "o erro da recíproca" (de se p então q e q, deduzir p), a dificuldades na interpretação de proposições quantificadas e na sua negação e a cometer erros na negação de implicações e de afirmações que contêm os conectivos e/ou.

Metodologia

O estudo dos raciocínios desenvolvidos na resolução das tarefas sobre matrizes e determinantes realizou-se a partir das respostas dadas pelos estudantes a um questionário escrito, assumindo-se como um estudo de natureza, fundamentalmente, quantitativa e descritiva, pois "em investigação quantitativa é normalmente possível obter dados sobre um conjunto alargado de pessoas relativos a um certo número de questões pré-determinadas" (Fernandes, 1991, p. 66).

A aplicação do questionário realizou-se no ano letivo de 2011/2012 e envolveu trezentos alunos (Ai, com $1 \leq i \leq 300$) do ensino superior politécnico inscritos em várias licenciaturas de engenharia e que se encontravam a frequentar a unidade curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica. Nos cursos em causa, a unidade curricular integra o 1.º ano do plano de estudos e inclui o tema matrizes e determinantes.

A unidade curricular foi lecionada por três professoras, uma das quais coautora deste estudo e responsável pela docência em alguns dos cursos. A preparação da unidade curricular foi efetuada em equipa, pelas três professoras, o que fez com todos os alunos tivessem tido acesso ao mesmo material de apoio às aulas (apontamentos teóricos e fichas de trabalho).

Em termos da avaliação das aprendizagens, por acordo entre os alunos e as docentes, foi decidido que ao longo do semestre se fariam pequenos trabalhos, ou seja, questionários escritos, durante as aulas, os quais consistiam na resolução de algumas questões sobre cada um dos temas lecionados, sendo matrizes e determinantes um dos temas em que isso aconteceu. Neste caso, o trabalho incluía também uma questão sobre o tema números complexos, que foi o primeiro tema lecionado na unidade curricular. Os alunos foram previamente avisados da realização do trabalho e aquando da sua resolução já tinham sido lecionados os conteúdos relativos aos respetivos temas.

As questões sobre as matrizes e determinantes eram três, tendo sido dados cerca de 30 minutos aos alunos para a sua resolução durante uma das aulas teóricas (incluindo também a questão sobre números complexos). Ao todo foram utilizadas doze versões diferentes do trabalho, pelo facto dos alunos em algumas turmas serem em número considerável e ser importante garantir que a resolução fosse realizada individualmente, tendo cada aluno respondido apenas a uma versão. Para facilitar o tratamento dos dados relativos ao tema matrizes e determinantes, agruparam-se as questões das várias versões tendo em conta a similaridade do tipo de pergunta efetuada, de que resultaram cinco grupos de questões.

Neste texto trata-se apenas um desses grupos de questões, envolvendo apenas o tema matrizes, cujas respostas às diferentes versões foram analisadas tendo em conta a classificação em três tipos de questões: X, Y e Z, conforme se apresenta na próxima secção.

Em termos de tratamento e análise de dados, começou-se por classificar as respostas dos alunos com base no recurso a raciocínios válidos e não válidos e, de seguida, definiram-se categorias, estabelecidas *a posteriori*, em cada um desses tipos de raciocínios (Gall, Gall & Borg, 2003). Essas categorias são apresentadas na secção seguinte, aquando da apresentação dos resultados.

Análise das respostas e raciocínios dos alunos

Nesta questão pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas foram:

- Questão do tipo X: Se B é uma matriz do tipo $m \times n$ e $A+(BC)$ está definida, então A e C são matrizes com a mesma dimensão;
- Questão do tipo Y: Se $A(BA)$ está definida, então A e B são matrizes quadradas;

−Questão do tipo Z: Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada, então A é uma matriz quadrada.

A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos é indicada na Tabela 1.

Tabela 1. Raciocínios dos alunos na questão apresentada

Raciocínios	Tipo de questão			Total
	X	Y	Z	
Válidos	48	8	10	66 (22,0%)
Não válidos	60	51	38	149 (49,7%)
Sem justificação ou não responde	45	22	18	85 (28,3%)
Total	153	81	66	300 (100%)

Genericamente, os dados da Tabela 1 mostram que os estudantes revelaram muitas dificuldades na resolução da questão, já que a grande maioria baseou as suas respostas em raciocínios não válidos, não apresentou qualquer justificação ou simplesmente não respondeu. Seguidamente, tendo em vista aprofundar a compreensão dos raciocínios dos alunos, analisam-se as suas justificações.

Os alunos que apresentaram raciocínios válidos indicaram um exemplo concreto de matrizes que contrariava a afirmação feita, efetuando ou não as operações envolvidas, explicitaram a possível dimensão das matrizes ou combinaram ambos os processos para justificarem a sua resposta. Ou seja, estes alunos recorreram a um exemplo ou a uma classe de exemplos para justificar a sua resposta. Por exemplo, o aluno A36 apresenta um exemplo concreto para cada uma das matrizes e efetua as respetivas operações (ver Figura 1).

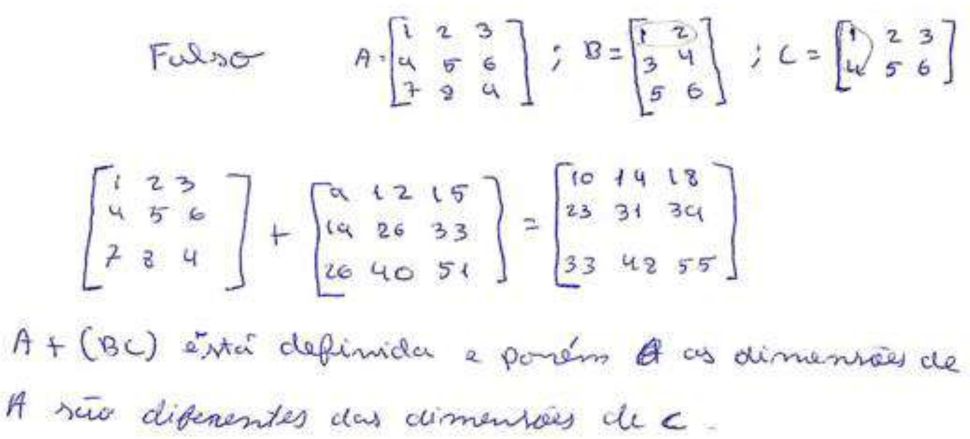


Figura 1. Apresentação de um contraexemplo (A36, questão do tipo X).

Já o aluno A207 opta por fazer apenas referência à dimensão de cada uma das matrizes, tendo em atenção a possibilidade de realizar as operações envolvidas (ver Figura 2).

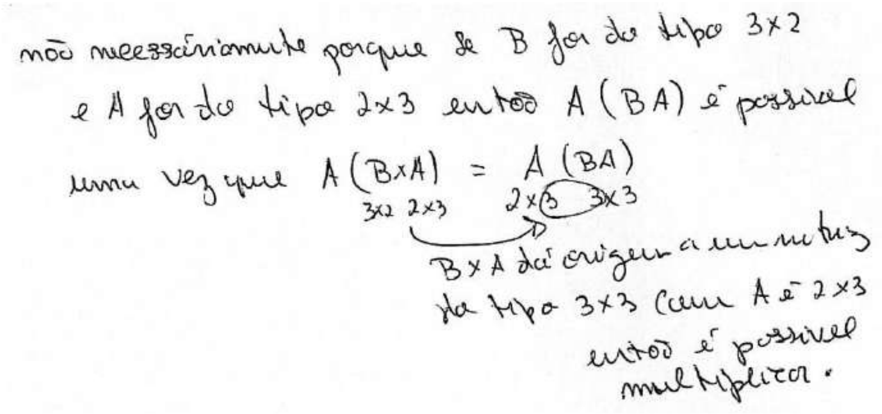


Figura 2. Referência à possível dimensão das matrizes (A207, questão do tipo Y).

Na categoria *sem justificação ou não responde* integraram-se as resoluções dos alunos que não deram qualquer resposta e os que mencionaram (45 alunos) que a afirmação era verdadeira ou falsa sem indicar qualquer justificação ou apenas reescreveram a afirmação dada ou a sua negação.

Analisadas as 149 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 2 com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 2. Categorização dos raciocínios não válidos na resolução da questão

Raciocínios	Tipo de questão			Total
	X	Y	Z	
Dificuldades nas operações com matrizes	26	15	7	48 (32,2%)
Exemplo que verifica a afirmação	9	19	11	39 (26,2%)
Análise incompleta	4	11	5	20 (13,4%)
Recurso a propriedades não válidas	6	2	8	16 (10,7%)
Incompreensão de conceitos	1	3	5	9 (6,1%)
Recurso a argumentos irrelevantes	8	–	1	9 (6,1%)
Prova da falsidade do recíproco	5	–	1	6 (4,0%)
Outros	1	1	–	2 (1,3%)

No raciocínio *dificuldades nas operações com matrizes* incluíram-se as resoluções dos alunos que revelaram dificuldades em trabalhar a operação de multiplicação (47 alunos) ou adição (1 aluno) de matrizes.

No caso das dificuldades na multiplicação, surgiram distintas situações: dificuldade no reconhecimento das condições em que é possível efetuar o produto (23 alunos); nas justificações baseadas na dimensão das matrizes, dedução incorreta da dimensão da matriz produto (13 alunos); apresentação de um exemplo concreto, mas multiplicando de forma incorreta as matrizes (11 alunos).

Por exemplo, o aluno A155 menciona que "só se pode multiplicar matrizes quadradas" e o aluno A82 multiplica as entradas correspondentes (produto de Hadamard) das matrizes que apresenta como exemplo (ver Figura 3).

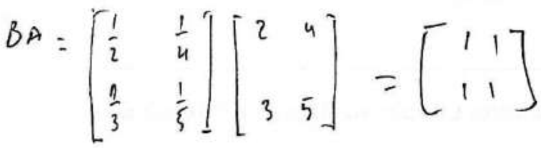


Figura 3. Multiplicação das entradas respetivas (A82, questão do tipo Y).

No raciocínio *exemplo que verifica a afirmação* incluíram-se as resoluções dos alunos que apresentam:

- Um exemplo concreto de matrizes que verificam a afirmação dada ou, de forma semelhante, referem a dimensão possível dessas matrizes de forma a comprovar a afirmação, pelo que concluem erradamente que a afirmação é verdadeira (30 alunos);
- Um exemplo concreto ou uma classe de exemplos, quando se referem apenas à dimensão, de matrizes que verificam o contrarrecíproco da afirmação dada (9 alunos). Como nem sempre interpretam de forma correta o resultado do seu raciocínio, alguns (5 alunos) chegam à conclusão (correta) de que a afirmação é falsa.

No primeiro caso, tem-se, por exemplo, o aluno A169 (ver Figura 4) que faz referência a matrizes de ordem 2, que permitem verificar a afirmação dada.

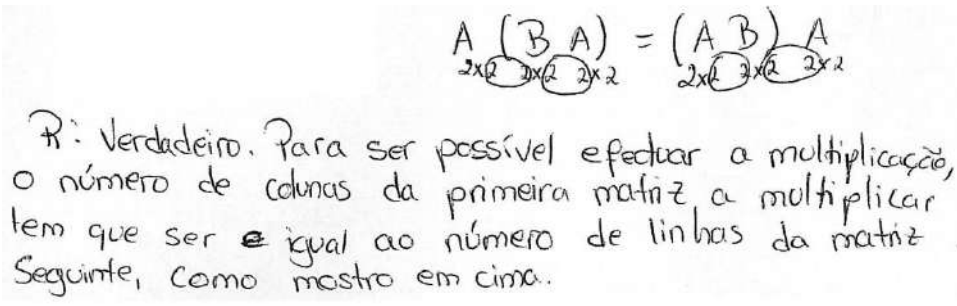


Figura 4. Classe de matrizes de ordem 2 que verificam a afirmação (A169, questão do tipo Y).

No segundo caso, verificar o contrarrecíproco, tem-se, por exemplo, o raciocínio do aluno A95 (ver Figura 5). Simbolicamente, se na afirmação dada traduzirmos o antecedente pela proposição p e o consequente pela proposição q, obtém-se a proposição $p \Rightarrow q$, concluindo-se que o aluno apresenta um exemplo que verifica a proposição $\neg q \Rightarrow \neg p$.

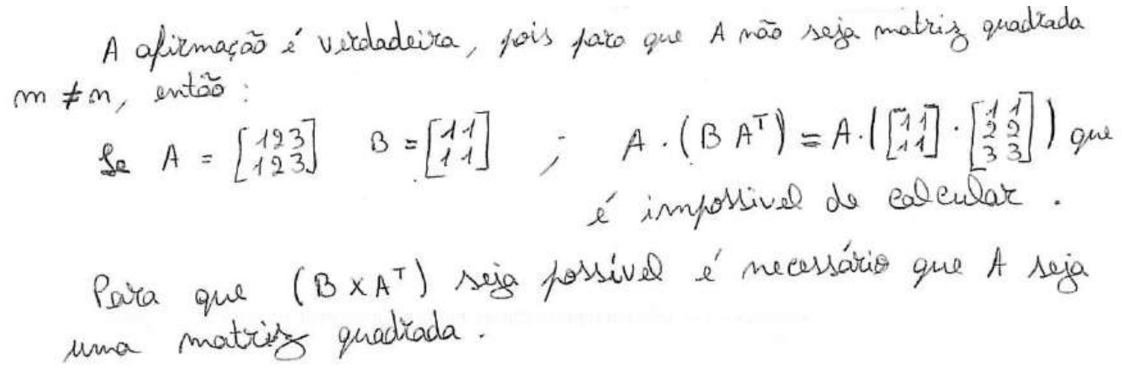


Figura 5. Exemplo que verifica o contrarrecíproco da afirmação (A95, questão do tipo Z).

De realçar que nesta categoria de raciocínio, mais do que dificuldades no âmbito da álgebra linear, estão presentes dificuldades no âmbito da lógica clássica, já que os alunos aceitam que basta um exemplo para confirmar a validade de uma afirmação e não reconhecem o tipo de raciocínio que utilizam quando verificam o contrarrecíproco.

No raciocínio *análise incompleta*, os alunos, com base num exemplo concreto ou fazendo referência à dimensão de matrizes, fazem apenas uma análise de parte da expressão dada, normalmente que está dentro de parêntesis. Embora, em alguns casos (10 alunos), os argumentos que os alunos apresentam não sirvam para justificar a situação na totalidade, há outros casos em que isso acontece (10 alunos). Assim, nestes últimos pode-se considerar que se está próximo da resposta correta, embora de forma incompleta.

Por exemplo, no caso da resposta do aluno A134 (ver Figura 6), este podia continuar a justificação para $A(BA^T)$ com base no exemplo dado.

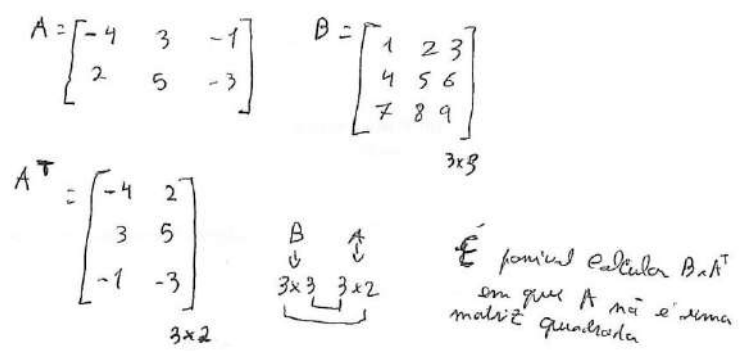


Figura 6. Referência apenas a BA^T (A134, questão do tipo Z).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas* incluíram-se as respostas dos alunos que recorrem a propriedades que parecem ser uma adaptação de várias propriedades válidas noutros contextos. Por exemplo, o aluno A281 (ver Figura 7) considera que $A(BA)$ é o mesmo que $AB + A^2$, resolvendo a expressão como se estivesse a aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

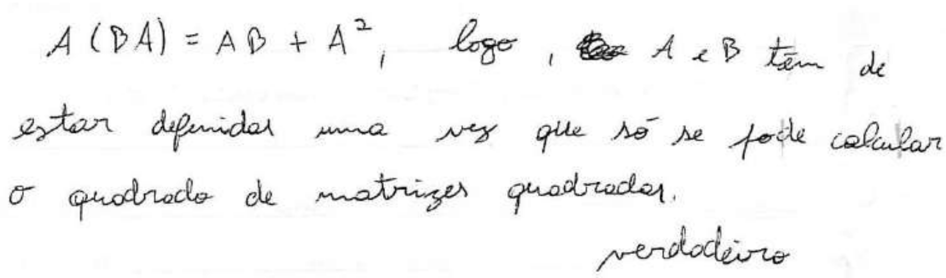

$A(BA) = AB + A^2$, logo, A e B têm de estar definidas uma vez que só se pode calcular o quadrado de matrizes quadradas.
verdadeiro

Figura 7. Recurso a propriedade não válida (A281, questão do tipo Y).

No raciocínio *incompreensão de conceitos*, os alunos demonstram que não têm ideais muito claras sobre os conceitos envolvidos na afirmação dada, entre eles o conceito de transposta de uma matriz, o de matriz quadrada e o de dimensão de uma matriz. Por exemplo, no caso da transposta, cinco alunos associam-na apenas a matrizes quadradas, como se pode exemplificar com a afirmação do aluno A18: “Verdadeiro, pois para ser transposta tem de ser quadrada” (questão do tipo Z).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes*, os alunos fazem referência a argumentos válidos mas que ou são irrelevantes para dar resposta à questão ou, embora tenham a ver com a questão, não são aplicados devidamente à situação em causa. O argumento mais usado é o que faz referência à possibilidade de adicionar matrizes: “Verdadeira, pois apenas se podem somar matrizes que tenham a mesma dimensão” (A240, questão do tipo X).

No raciocínio *prova da falsidade do recíproco*, os alunos partem de exemplos (concretizando as matrizes) ou de classes de exemplos (indicando a dimensão das matrizes) que confirmam o consequente da afirmação dada e concluem que o antecedente é falso, ou seja, que a expressão dada não está definida, pelo que, no geral, chegam à conclusão correta de que a afirmação é falsa mas utilizando um raciocínio que não é válido (ver Figura 8). Explicitando, em termos de lógica clássica, se na afirmação dada se traduzir o antecedente pela proposição p e o consequente pela proposição q, obtém-se a proposição $p \Rightarrow q$. Os alunos tentam provar que a implicação recíproca, $q \Rightarrow p$, é falsa, ou seja, que se tem $\neg(q \Rightarrow p)$, que é equivalente a $q \wedge \neg p$.

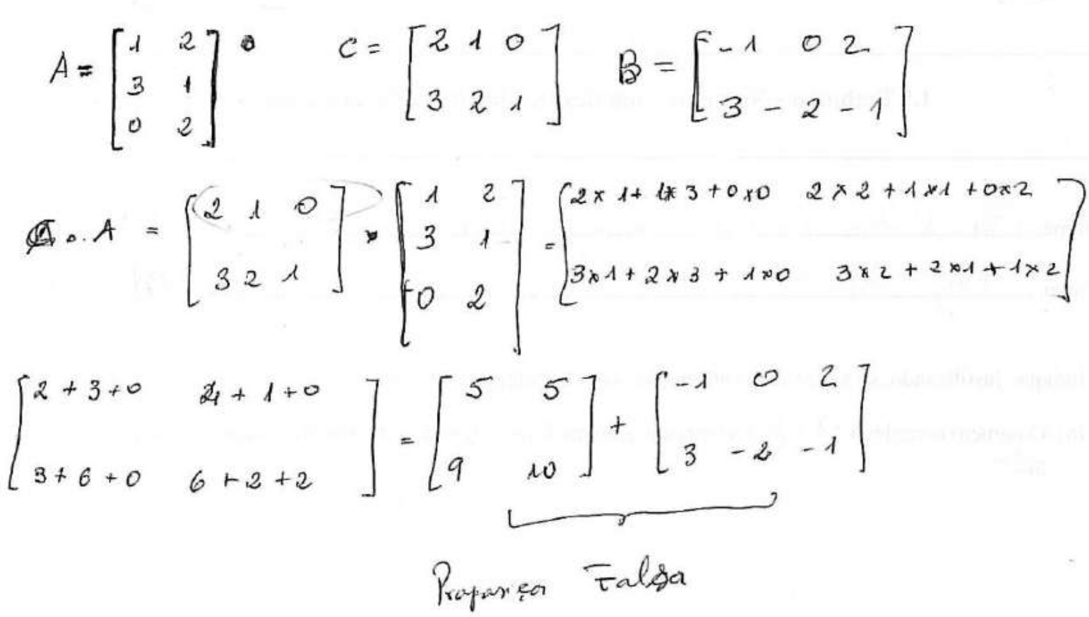


Figura 8. Exemplo para provar a falsidade do recíproco (A54, questão do tipo X).

Finalmente, no raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis face à pergunta formulada ou que se consideraram irrelevantes no contexto do estudo.

Conclusões

Perante a análise apresentada verifica-se que, mesmo podendo consultar os apontamentos das aulas, os alunos continuam a manifestar dificuldades consideráveis na resolução das tarefas propostas pois apenas 22% apresentaram resoluções que se consideraram corretas.

Diretamente relacionadas com o cálculo matricial, destacam-se as dificuldades relacionadas com a multiplicação de matrizes, facto explicável porque o algoritmo da multiplicação de matrizes é novo para os alunos e diferencia-se da habitual multiplicação de números reais. Também se evidenciam dificuldades que se relacionam mais especificamente com processos de prova e conhecimentos de lógica clássica (Alvarado & González, 2009; Epp, 2003). De notar que muitos dos alunos (29%) consideram que basta um exemplo que verifique a afirmação, ou a sua contrarrecíproca, para concluir que ela é verdadeira e outros (4%) consideram que mostrar que a afirmação é falsa é equivalente a provar a falsidade da afirmação recíproca.

É de realçar também o facto de bastantes alunos (13%) se centrarem apenas em parte da expressão dada, aspeto que também foi observado por Ferro (2011). Esta autora considera que este tipo de erros se encontra frequentemente em problemas onde é preciso fazer cálculos prévios para chegar ao resultado final, já que o aluno se centra na realização desse cálculos esquecendo-se da meta que tem em vista.

Concluindo, em termos de perspetivas futuras, o conhecimento dos erros que os alunos cometem pode proporcionar ao professor ideias sobre estratégias a utilizar no processo de ensino e aprendizagem dessas temáticas, nomeadamente servir como ponto de partida para explorações matemáticas criativas (Pochulu, 2005).

Referências bibliográficas

Alvarado, A., & González, M. T. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 37-63.

Alvarado, A., & González, M. T. (2009). A study of university student' performance with proof. *Proceedings CIAEM 61. In Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)* (Suplemento 2, pp.348-352). Universidade de Palermo, Itália.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra – A variety of studies from 1987 until 1995. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp.85-124). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.- L., Robert, A., & Sierpinska, A. (2000). Conclusion. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 273-276). Kluwer Academic Publishers.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110* (10), 886-899.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, *18*, 64-66.

Ferreira, D. H., & Brumatti, R. N. (2009). Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. *Horizontes*, *27*(1), 51-60.

Ferro, P. (2011). *Significado referencial e evaluado de los conceptos de matriz e determinante en estudiantes preuniversitarios*. *En estudio a partir de la práctica instruccional*. Tese de doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational Research: An introduction*. *Boston: Allyn and Bacon*.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros — Manual para el Estudiante*. Acedido em julho 29, 2011, em: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications*, *379*, 491-501.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Hurman, A. L. (2007). El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. In Ruiz, A. (Productor académico), *Enseñanza del algebra* (N.º3). Colección digital Eudoxus. Acedido em junho 11, 2013, em: www.cimm.ucr.ac.cr/.../Algebra%20Teaching/.../Hurman,%20A.%20El%20papel%20de%20las%20Aplicaciones%20en%20el%20.

Pochulu, M. D. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matematica en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, *35*(4).

Sanches, M.H. (2002). *Efeitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Desenvolvimento do conhecimento do ensino-aprendizagem da Álgebra na formação inicial de professores dos primeiros anos*

Neusa Branco[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, neusa.branco@ese.ipsantarem.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação tem por base uma experiência de formação em Álgebra, baseada numa abordagem exploratória e na articulação de conteúdo e pedagogia, que decorre na formação inicial de docentes dos primeiros anos, numa turma do 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica. Investigamos o contributo da análise de situações de ensino-aprendizagem, nomeadamente respostas de alunos e registos do trabalho na aula, no desenvolvimento do conhecimento dos formandos relativo às dificuldades dos alunos na interpretação de expressões numéricas e às suas estratégias de generalização em sequências pictóricas. Usamos uma metodologia de design research e procuramos compreender o processo de desenvolvimento dos formandos decorrente da experiência. Os resultados mostram o desenvolvimento do seu conhecimento didático, em particular no que respeita à aprendizagem dos alunos e a aspetos essenciais da prática do professor para a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos dos primeiros anos. A análise de respostas de alunos e de situações de sala de aula contribuiu de modo decisivo para esse desenvolvimento e para a melhoria da capacidade de análise da prática profissional por parte dos formandos.*

Palavras-chave: Formação inicial, Professores dos primeiros anos, Álgebra, Pensamento algébrico, Ensino-aprendizagem.

Introdução

Nas últimas décadas, as orientações curriculares para o ensino-aprendizagem da Álgebra têm dado particular atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico (ME, 2007; NCTM, 2000). Em particular, tem sido proposto que o trabalho com ideias algébricas se inicie nos primeiros anos com a generalização e a sua representação de modos cada vez mais formais ao longo da escolaridade. Esta perspetiva, designada *early algebra*, assenta em resultados de estudos que fomentam o trabalho com a generalização, com relações e com símbolos, focando o modo de pensar (Blanton &

* Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Kaput, 2011). Canavarro (2007) sugere que esta perspetiva promove o "aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber" (p. 92).

A formação inicial de docentes dos primeiros anos de escolaridade (educadores de infância e professores do 1.º e do 2.º ciclo) deve contemplar o desafio de proporcionar uma experiência significativa aos alunos relativamente ao pensamento algébrico. Com forte probabilidade, muitos dos futuros professores tiveram, nestes níveis de ensino, poucas experiências com atividades de generalização e formalização. Assumindo que a sua formação inicial tem um papel fundamental para o modo como irão desenvolver mais tarde a sua atividade profissional, devem organizar-se experiências de aprendizagem que contribuam para o desenvolvimento de um conhecimento neste campo.

Esta comunicação tem por base uma experiência na formação inicial de professores e educadores em Álgebra que contempla o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e do seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem deste tema de modo que na sua prática letiva futura possam mobilizar esse conhecimento para sustentar as suas decisões sobre a aprendizagem dos alunos no que respeita à promoção do pensamento algébrico. A comunicação discute o contributo da experiência de formação no seu conhecimento do ensino-aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, no que respeita à compreensão das dificuldades dos alunos quanto ao significado relacional do sinal de igual e de estratégias de generalização no trabalho com sequências pictóricas.

Desenvolvimento do conhecimento do ensino da Álgebra

Investigação recente identifica diversos aspetos a trabalhar na formação do professor com vista à promoção do conhecimento do ensino da Álgebra e ao modo de o fazer, sugerindo estratégias e recursos. Diversos documentos curriculares têm reforçado a visibilidade da Álgebra, assumindo-a como um fio condutor do currículo (ME, 2007; NCTM, 2000). O professor deve promover o desenvolvimento do pensamento algébrico desde cedo proporcionando situações "em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413).

O pensamento relacional envolve uma abordagem ao trabalho com números que foca a identificação de relações numéricas significativas. Carpenter et al. (2003) baseiam-se em igualdades numéricas e no uso de pensamento relacional por parte dos alunos para promover a compreensão do significado da relação de igualdade como equivalência e para promover o uso e a compreensão das propriedades dos números e operações. Estes aspetos são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos. Assim, as expressões numéricas a apresentar devem procurar fomentar esta perspetiva e não se limitar a promover a realização de cálculos (em que o sinal de igual indica o resultado de uma operação). Também o estudo de sequências se torna fundamental para o pensamento algébrico, no que respeita ao desenvolvimento do pensamento funcional. Nomeadamente, o trabalho com sequências pictóricas tem sido apontado como propício à promoção da generalização e da utilização da simbologia algébrica para a expressar. Com este trabalho os alunos podem ser incentivados a descrever relações entre duas variáveis (Blanton, 2008). O valor da variável independente, neste caso, o número da ordem do termo na sequência, pode influenciar as estratégias dos alunos para determinar o valor da variável dependente, podendo usar uma estratégia para termos próximos e outra para termos distantes.

A perceção que os futuros professores têm do trabalho a desenvolver para promover o pensamento algébrico é um aspeto a atender na formação inicial. Beswick (2005) investiga a ideia dos futuros professores dos primeiros anos sobre a promoção de uma compreensão relacional nos seus alunos. Os resultados revelam que os futuros professores evidenciam uma tendência para um ensino de cunho instrumentalista, salientando a natureza idiossincrática da construção do seu conhecimento. O foco numa perspetiva relacional, mais que numa procura de resultados e na aplicação de procedimentos, é fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico. Stephens (2006) estudou a compreensão da equivalência e o pensamento relacional manifestados por futuros professores dos primeiros anos de modo a verificar a sua preparação para envolver os alunos nestes dois aspetos do pensamento algébrico. Para tal, identifica que os futuros professores devem ter conhecimento de tarefas que fomentem o pensamento relacional dos alunos e a compreensão do significado do sinal de igual e conhecimento da compreensão dos alunos e das suas ideias erradas sobre estes aspetos. Estas tarefas estão relacionadas com igualdades numéricas verdadeiras ou falsas e com igualdades numéricas abertas e o conhecimento do pensamento dos alunos inclui o entendimento das diferentes abordagens que estes podem usar para resolver esse tipo de tarefas.

Nas tarefas de generalização, o professor deve estar muito atento ao que os alunos dizem, sendo este aspeto tão importante como o questionamento (Blanton, 2008). Identificar a expressão da generalização requer da parte do professor uma grande atenção ao que os alunos dizem (Kaput, 1999). Ouvir os alunos permite ao professor compreender o que os alunos estão a fazer, o entendimento que eles têm das situações e o porquê das suas resoluções. Esta compreensão pode contribuir para as decisões do professor na aula, identificando o que deve fazer para promover o pensamento algébrico (Blanton, 2008).

As experiências que se propõem aos futuros professores são essenciais para o desenvolvimento da sua compreensão do trabalho a realizar em sala de aula com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Capraro, Rangel-Chavez e Capraro. (2008) sugerem que os "professores dos primeiros anos compreendam os conteúdos algébricos, compreendam como os alunos aprendem e usem estratégias de ensino que fomentem a aprendizagem para desenvolver o pensamento algébrico" (p. 1). Estes autores realizaram um estudo que teve por base a concretização de um módulo *online* que envolvia simulações e exemplos interativos para desenvolver nos futuros professores "*algebraic thinking habits of mind*" (p. 3). Os formandos analisaram tarefas de sequências realizadas por alunos dos primeiros anos, tendo oportunidade de assim aprender sobre o conhecimento dos alunos, identificar erros e equívocos e observar o seu trabalho. Os resultados revelam que o trabalho realizado nos módulos *online* contribui para aprofundar o seu pensamento algébrico. Com isto, estes investigadores verificam que esse trabalho pode proporcionar o desenvolvimento "[d]os seus próprios hábitos de pensar algebricamente antes de lhes ser pedido que ajudem os seus alunos primários a desenvolver hábitos de pensar" (p. 6). Este estudo revela a pertinência do trabalho com situações de ensino-aprendizagem ao longo da formação inicial por possibilitarem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos próprios formandos e do seu conhecimento do ensino desta temática, por proporcionar a análise do trabalho dos alunos, a exploração de conceitos e a procura da generalização e por perspetivar o ensino.

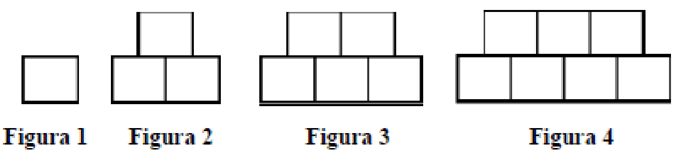
A experiência de formação

A experiência de formação envolve o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos e o seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra, numa abordagem exploratória no trabalho de aula. Os futuros professores devem envolver-se em situações problemáticas relevantes para a prática de ensino, sendo que a formação de professores enfrenta o desafio de combinar conteúdo e pedagogia (Ponte & Chapman, 2008).

A presente experiência de formação é, assim, orientada pela articulação entre conteúdo e pedagogia no âmbito de uma abordagem exploratória, proporcionando experiências de exploração e discussão que também eles, enquanto professores, devem proporcionar aos seus futuros alunos. As tarefas propostas proporcionam aos formandos a exploração de situações de carácter aberto (Ruthven, 1989) e o docente apoia essa exploração, “recolhe e analisa informação sobre as estratégias e teorias que são empregues pelos estudantes” (p. 451). Nesta experiência de formação são propostas sete tarefas, sendo que nesta comunicação analisamos o trabalho proporcionado pela Tarefa 1 e pela Tarefa 4.

As tarefas remetem para a análise de resoluções de alunos em situações de carácter algébrico e da prática do professor. A Tarefa 1 apresenta respostas de alunos dos primeiros anos (adaptadas de Carpenter, Franke & Levi, 2003) à seguinte questão do entrevistador: “Podes dizer-me que número deves colocar na caixa para tornar isto numa expressão numérica verdadeira? $8 + 4 = \square + 5$”. Lucy responde 12, Randy responde 17 e Barb coloca 12 na caixa e iguala a expressão $12 + 5$ a 17. A Tarefa 4 envolve a visualização de um vídeo de sala de aula numa turma de 2.º ano (descrita em Silvestre et al., 2010) na realização da seguinte tarefa (Figura 1):

Observa a sequência de blocos.



a) Continua a sequência e desenha as figuras 5 e 6.
b) Quantos peças foram utilizadas para construir cada uma das figuras? Escreve a tua resposta na tabela seguinte.
c) Sem usar desenhos, és capaz de descobrir quantos blocos tem a figura 20 da sequência? Explica como pensaste.

Figura 1 – Tarefa do 2.º ano (Tarefa 4).

As experiências de análise de respostas dos alunos visam proporcionar oportunidades de aprendizagem contextualizadas. Essa análise permite identificar aspetos relativos à aprendizagem dos alunos, bem como discutir o ensino da Matemática com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Deste modo, os formandos têm a possibilidade de relacionar teoria e prática, tendo em vista a compreensão do ensino da Matemática (Llinares & Valls, 2009).

Metodologia de investigação

Este estudo tem por base uma experiência de ensino que decorre na formação inicial de professores dos primeiros anos e educadores em Álgebra, envolvendo uma intervenção planeada e concretizada pela primeira autora. A investigação segue uma metodologia de *design research*. Esta metodologia visa testar ou aperfeiçoar modelos de ensino orientados por princípios teóricos, permitindo verificar como funciona o modelo ao ser concretizado e ser revisitado, ao longo da experiência, para ser ajustado e melhorado (Cobb et al., 2003). Deste modo, este estudo visa captar a complexidade do trabalho desenvolvido na sala de aula, permitindo compreender o processo de desenvolvimento dos formandos proporcionado pela experiência de formação e analisar essa experiência.

Os participantes do estudo são 30 formandos que frequentam a experiência de formação no 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica. Este estudo centra-se na aprendizagem individual de três formandas com diferentes experiências anteriores à entrada no ensino superior e diferentes objetivos futuros, Alice, Beatriz e Diana (Tabela 1). Os aspetos que as distinguem permitem tornar evidentes os contributos da experiência de formação.

Tabela 1 – Caracterização das formandas quanto à frequência na disciplina de Matemática e ao mestrado em que pretendem ingressar

Formanda	Frequência de Matemática	Mestrado visado
Alice	9.º ano	Educação Pré-Escolar
Beatriz	10.º ano	Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB
Diana	12.º ano	Ensino do 1.º e do 2.º CEB

Os dados são recolhidos por diferentes métodos tendo em vista descrever com pormenor e a partir de diversos ângulos as situações vividas pelos participantes (Bogdan & Biklen, 1982) ao longo da experiência de formação. Nesta comunicação apresentamos dados recolhido ao longo da experiência de formação, por entrevistas gravadas em áudio e vídeo a três formandas, por documentos produzidos pelas formandas na experiência (resoluções escritas das Tarefas 1 e 4 e portefólios) e pela observação participante nas aulas, complementada por gravações áudio e vídeo e registada em notas de campo (NC).

Assim, apresentamos e discutimos o trabalho realizado por Alice, Beatriz e Diana nas duas tarefas e o desenvolvimento proporcionado por esse trabalho. A análise dos dados assume, essencialmente, um cunho interpretativo e procura evidenciar o contributo da análise de situações de ensino-aprendizagem no desenvolvimento do conhecimento do ensino-aprendizagem da Álgebra. Assim, são organizados os dados de modo a descobrir regularidades relativas a ações e significados atribuídos por estas formandas no que respeita às dificuldades de interpretação dos alunos e às suas estratégias de generalização e à sua compreensão do ensino deste tema.

Resultados

Identificação de dificuldades dos alunos

A análise de respostas de alunos a questões envolvendo expressões numéricas abertas possibilita a Alice uma reflexão sobre o trabalho com cunho algébrico que se pode desenvolver no tema números e operações. Esta formanda refere que com este trabalho tomou "consciência das dificuldades que muitos alunos apresentam, inicialmente, ao interpretarem o significado do sinal de igual" (Portefólio, T1). Esta situação desperta-a para as interpretações que um trabalho sistemático com uma ênfase no cálculo pode promover nos alunos: "eu não tinha bem a noção que os alunos do primeiro ciclo ignorassem tanto o significado de equivalência, porque eu pensei que fosse mais trabalhado e que eles tivessem mais essa noção" (E2). Deste modo, Alice percebe a importância do professor promover nos alunos uma interpretação adequada do sinal de igual desde os primeiros anos, contribuindo para a compreensão da representação simbólica.

Na Tarefa 1, Beatriz identifica a importância de trabalhar com os alunos expressões numéricas diversificadas que permitam evidenciar o significado de equivalência do sinal de igual de modo que o trabalho na sala de aula não se centre apenas em expressões em que a seguir ao sinal de igual surge o resultado. Com base na análise das respostas erradas dos alunos e a identificação das suas interpretações as expressões numéricas daquele tipo sugere que "nós [enquanto professores] temos de dar mais exemplos destes [como na Tarefa 1]. Percebi que nós temos de dar mais exemplos destes e não só o exemplo de $3+4=7$, por exemplo" (E2). Considera, ainda, este trabalho importante para os alunos porque envolve as propriedades das operações e o conhecimento de relações numéricas.

Pelo seu lado, Diana identifica aspetos essenciais que os alunos devem aprender, como, por exemplo, o sentido de equivalência do sinal de igual:

> [não devem apenas] saber que a seguir ao igual é o resultado que vem da soma anterior, mas sim que tudo o que está para lá do igual, quer esteja mais coisas ou menos, tudo o que está lá, é igual ao que está no… Quer dizer, o primeiro membro ser igual ao segundo, e não apenas à primeira coisa que aparece a seguir ao sinal de igual. (E2)

A expressão oral de Diana nem sempre é organizada e o vocabulário que utiliza nem sempre é o mais apropriado. Contudo, identifica a importância do trabalho com expressões numéricas diversificadas para melhorar a interpretação dos alunos. Conclui que as crianças interpretam o sinal de igual como "um símbolo operacional, do tipo «operação=resultado»" (Portefólio, T1, aspas no original). Revela entender que as situações a propor aos alunos não devem limitar-se a expressões em que, a seguir ao sinal de igual, surge o resultado para que estes não se apropriem do seu significado de um modo limitado. Na experiência de formação reconhece que a exploração deste tipo de expressões com as crianças dos primeiros anos do ensino básico, nomeadamente com duas parcelas em cada um dos lados do sinal de igual, pode contribuir para a compreensão do sinal de igual como sinal de equivalência (NC, Tarefa 1).

Análise de diferentes estratégias de generalização

Na experiência de formação, o grupo de Alice identifica as estratégias de generalização da sequência pictórica dos alunos e escreve em linguagem algébrica simbólica o que estes expressam em linguagem natural (Figura 2).

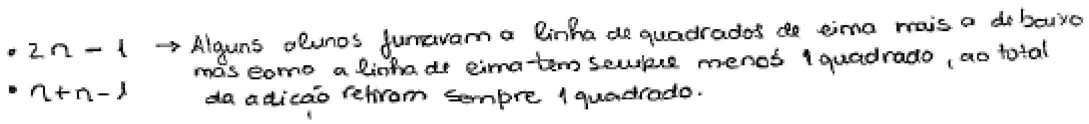


Figura 22 – Resolução do grupo de Alice, Tarefa 4.

Para Alice foi importante observar a sala de aula, o modo de trabalho dos alunos, as estratégias que usam para determinar termos distantes e o modo como conseguem expressar uma generalização. Indica ter ficado surpreendida por os alunos do 2.º ano conseguirem generalizar neste contexto de sequências pictóricas que era novo para si. Recorda-se da estratégia de um aluno que usa o seu conhecimento dos números, nomeadamente a noção de dobro e os números pares e ímpares, para encontrar uma regra geral para determinar um termo da sequência numérica. A análise desta situação de ensino-aprendizagem contribuiu para que conseguisse concretizar o trabalho que os alunos podem desenvolver e as potencialidades de estabelecer generalizações a partir destes contextos. Refere que os alunos "podem relacionar conceitos, como é o caso acho que era do Bruno que era o dobro, punha o dobro e tirava um" (E2).

Tendo por base o trabalho realizado na Tarefa 4, Beatriz salienta, na segunda entrevista, o contributo do trabalho com sequências pictóricas para o estabelecimento de generalizações a partir da determinação de termos distantes, logo desde os primeiros anos. Identifica que "os alunos olharam e interpretaram a sequência" (Portefólio, T4) de diferentes modos. Num deles os alunos relacionam a constituição de cada termo pictórico com a sua ordem. Identificam duas partes nos termos pictóricos, uma que relacionam com o número da ordem e outra com o número da ordem anterior. Esta generalização dos alunos é contextualizada pois estes recorrem sempre a um exemplo para a expressar:

> Substituiu os blocos por números e fez que para a figura 2, o 1 está em cima e o 2 está em baixo, na figura 3, o 2 que estava em baixo na figura anterior passou para cima na figura seguinte, ficando o 3 por baixo (…) Assim, para a figura 20 a criança pensou: o 19 que está por baixo na figura anterior, passa para cima na figura seguinte e por baixo deste 19, fica o 20, se somarmos o 19 com o 20, obtemos o número de blocos da figura 20 que é igual a 39. (Portefólio, T4)

A outra situação que destaca respeita à relação direta que um aluno expressa em linguagem natural ao relacionar o número de blocos de um termo com o número da sua ordem, a que ele chama "o segredo":

> Esta criança sugeriu que o segredo «não é o dobro, é o menos um que o dobro». A professora pediu para que a criança explicasse o «segredo», a criança utilizando o número da figura 12 disse: «12 + 12 = 24, mas como não pode ser 24 porque é par, é o 23, porque é sempre o dobro menos 1.». (Portefólio, T4, aspas no original)

Relativamente ao ensino, Beatriz destaca a importância do questionamento da professora para que os alunos procurem explicar o modo como pensaram aos seus colegas, para que todos compreendessem as suas conclusões.

Com base nesta situação e no trabalho de análise de sequências pictóricas e numéricas que desenvolve na experiência de formação, Diana sugere que para os alunos dos primeiros anos "é mais fácil para eles trabalharem em sequências pictóricas do que com sequências numéricas" (E2). Indica que nesses anos os alunos não usam a linguagem algébrica simbólica mas expressam a sua generalização em linguagem natural pelo que faz sentido trabalharem estas questões para determinarem termos próximos e distantes.

Diana recorda a estratégia de generalização explícita de alguns alunos, expressando-a em linguagem algébrica simbólica. Contudo, salienta que os eles não a expressam desse modo mas estabelecem essa relação em situações contextualizadas:

> *Diana* – Eles sabiam que em cima tinha sempre menos 1, logo quando era 50 eles tiravam 1, punham 49, e em baixo punham 50. Aí conseguem, eles estão a fazer isso sem dar por isso ao fazerem o $n-1+n$.
>
> *Investigadora* – $n-1+n$, sim uma das situações era.
>
> *Diana* – Eles, sem darem por isso, estavam a fazer, mas não escreveram. Não escreveram a expressão em si, pelo menos no 1.º ciclo, e mesmo até no 2.º ciclo penso que não. (E2)

Para Diana é importante que os alunos analisem termos próximos e distantes para "verem a relação que a ordem tem com os termos. Acho que é mesmo isso, a relação, compararem… Eles compararem qual é a relação que têm e se compreenderem os primeiros casos também vão conseguir compreender mais [distantes]" (E2). Na sua perspetiva, a procura de termos de ordens mais distantes promove o estabelecimento dessa relação mais que a indicação de termos muito próximos porque "por exemplo, aqui na quarta, o que provavelmente eles iriam fazer era fazer o desenho e contarem e não perceberem qual era mesmo a relação que tinha, o que é que havia a mais, a menos" (E2). Identifica que, para ordens próximas, os alunos podem privilegiar uma estratégia de representação enquanto a determinação de termos distantes pode fomentar que surja uma relação entre as duas variáveis.

Diana reconhece a importância da natureza do trabalho que se propõe aos alunos de modo a proporcionar situações de sala de aula semelhantes à visionada em que se fomenta a generalização. Considera que o bom desempenho que se verifica e o seu envolvimento deve advir de um trabalho regular com situações de exploração por parte dos alunos.

Conclusão

Esta experiência de formação proporcionou aos formandos o contacto com o trabalho de alunos de diferentes anos de escolaridade, em particular do 1.º e 2.º anos, relativamente a diferentes tópicos, como acontece nas duas tarefas aqui apresentadas. Com o trabalho realizado, os formandos passaram a dar importância ao significado de equivalência do sinal de igual e à realização de atividades na sala de aula para o promover. Até então não tinham consciência dos erros que os alunos podem cometer quando são colocados perante expressões numéricas com operações em ambos os lados do sinal, dado assumirem uma interpretação operacional do sinal de igual. Tal como em Stephens (2006), este estudo revela ser importante discutir, na formação inicial, a interpretação que os alunos fazem do sinal de igual e os erros que podem cometer devido a uma interpretação redutora da sua utilização. Com base na análise das respostas dos alunos, os formandos verificaram alguns dos seus erros e interpretações erradas do significado do sinal de igual, evidenciando a importância da realização, na sua prática futura, de um trabalho específico baseado em igualdades numéricas e em pensamento relacional para promover a compreensão do significado deste sinal e das propriedades das operações, como salientam Carpenter et al. (2003).

O estudo revela também a importância para a formação dos futuros professores e educadores da exploração de situações de ensino-aprendizagem com sequências pictóricas. As formandas identificam a generalização algébrica que os alunos estabelecem em linguagem natural, salientando duas estratégias. Verificam que alguns analisam a constituição dos termos pictóricos, relacionando uma parte com a sua ordem e a outra parte com a ordem anterior. Identificam a estratégia de um aluno em particular que, com base no seu conhecimento dos números, relaciona o número de blocos de um termo da sequência com o dobro da sua ordem, verificando que basta retirar um a esse dobro. Diana destaca ainda a importância de determinar termos próximos e distantes, sendo que a determinação de termos distantes pode fomentar a generalização algébrica, que os alunos expressam em linguagem natural. A utilização do vídeo da turma de 2.º ano relativo ao trabalho na aula com sequências pictóricas possibilitou uma análise do trabalho dos alunos e da prática do professor que, de outro modo, seria difícil de levar até à formação de um grupo alargado de formandos. O estudo mostra que, tal como referem Llinares e Valls (2009), a análise de vídeos permite aos formandos identificarem aspetos fundamentais do ensino-aprendizagem. O trabalho nesta tarefa permite, ainda, que as formandas identifiquem aspetos essenciais da prática letiva para o desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos, como a seleção das tarefas e a dinâmica de trabalho na aula. A análise de situações de ensino-aprendizagem nos primeiros anos contribui para que perspetivem situações de aprendizagem conducentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, um aspeto importante do papel do professor (Canavarro, 2007).

Assim, as situações propostas com base na análise do trabalho dos alunos e da prática do professor contribuem de modo decisivo para o desenvolvimento do conhecimento dos formandos sobre o ensino-aprendizagem deste tema e da sua capacidade de análise da prática profissional, essencial para a sua prática futura, nomeadamente atendendo às dificuldades dos alunos na interpretação do sinal de igual, às suas estratégias de generalização e às representações a que recorrem no trabalho com sequências pictóricas.

Referências

Beswick, K. (2005). Preservice teachers' understandings of relational and instrumental understanding. In H.L. Chick & Vincent J.L. (Eds.), *Proceedings of the 29th PME Conference* (Vol. 2, pp. 161-168). Melbourne, Australia.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S.K. (1982). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Canavarro, A.P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Capraro, M.M., Rangel-Chavez, A., & Capraro, R. M. (2008). *Effective preparation for teaching of algebra at the primary level*. Paper presented at ICME-11, Monterrey, México. Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/382.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience, Part I: Transforming Task Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*, 247-271.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 449-467.

Silvestre, A., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I., Santos, I., Molarinho, M.J., & Veladas, M. (2010). Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos de 2.º, 3.º e 5.º anos. In GTI (Org.), *O professor e o programa de matemática* (pp. 89-119). Lisboa: APM.

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking; preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 249-278.

POSTERS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens: usando a teoria da atividade*

Fernando Luís Santos[1], António *Domingos*[2]
[1]ESE Jean Piaget de Almada, UIED FCT-UNL, fsantos@almada.ipiaget.org
[2]Universidade Nova de Lisboa, UIED FCT-UNL, amdd@fct.unl.pt

Resumo. *A forma como os alunos respondem às questões colocadas é um instrumento importante para analisar a complexidade do seu pensamento matemático. Propomos um modelo de análise utilizando como enquadramento teórico as teorias de David Tall sobre a complexidade do pensamento matemático e o modelo SOLO de Biggs e Collis. Mostramos como, recorrendo à teoria da atividade, esta permite descrever a avaliação das respostas produzidas pelos alunos evidenciando os diferentes níveis de pensamento matemático envolvidos em três respostas analisadas.*

Palavras-chave: Complexidade do pensamento matemático; Níveis SOLO; Teoria da Atividade.

Este trabalho apresenta um segmento de um conjunto de estudos sobre a complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens. Neste estudo pretende-se aumentar a coerência da fundamentação teórica relativa ao papel das respostas dos alunos usando um modelo de análise baseado nas teorias de Tall (2002, 2007) e no modelo SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*) de Biggs e Collis (1982) e Biggs e Tang (2007).

No segmento apresentado aplicou-se o modelo de análise a três respostas de alunos de formação inicial de professores à questão:

> *Do porto de Leixões sai um navio de seis em seis dias e outro com destino diferente de 18 em 18 dias. Partiram juntos no dia 1 de Janeiro. Qual o primeiro dia em que tornam a sair juntos? Justifique.*

A questão foi classificada como possivelmente *relacional* indicando uma orquestração entre os factos e os conceitos envolvidos, suas ações e objetivos, baseado na categorização utilizada por Santos e Domingos (2013) elaborada a partir dos níveis SOLO de Biggs e Collis (1982) e de Ceia (2002).

A Teoria da Atividade (TdA) (Engeström et al, 1999) é utilizada como instrumento de análise utilizando a *atividade* (vista enquanto processo) como a unidade elementar para estudar as práticas, o que se reflete pelas ações e interações dos sujeitos com o contexto em que esta atividade é estudada.

---

* Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

Associando as respostas dadas pelos alunos à interpretação feita com base nas teorias de Tall (2002, 2007) sobre o Pensamento Matemático Avançado nomeadamente aos conceitos de *proceito*, *pensamento proceptual* e *bifurcação proceptual* (Gray & Tall, 1994) como enquadramento teórico, procura-se perceber a forma como os alunos operacionalizam os conceitos matemáticos e desenvolvem o seu raciocínio.

A metodologia utilizada neste estudo foi qualitativa e interpretativa integrando três respostas (alunos A, B e C), todas corretas, a análise das respostas foi efetuada recorrendo ao triângulo de Engeström (Engeström et al, 1999) e à categorização das mesmas.

O conteúdo das três respostas, apesar de corretas apresentam diferenças na categorização dos níveis SOLO, nomeadamente:

- Aluno A (nível *uni-estrutural* onde efetua conexões simples, identifica e memoriza procedimentos apontando apenas um dado relevante), definiu em extensão os múltiplos dos valores apresentados no enunciado identificando de seguida o menor múltiplo comum para chegar à resposta.
- Aluno B (nível *multi-estrutural*, efetua algumas conexões, agrupa e trabalha com algoritmos conseguindo identificar os dados relevantes), utilizou a definição de mínimo múltiplo comum para chegar à resposta fatorizando os valores apresentados no enunciado.
- Aluno C (nível *relacional*, efetua conexões mais complexas, compara e utiliza dados relevantes e interrelações), respondeu de forma simples indicando que um dos valores apresentados no enunciado era múltiplo do outro.

Este modelo de análise das respostas dos alunos permite expor a conceptualização de Tall pela análise dos raciocínios envolvidos, passando pela utilização dos níveis SOLO enquanto indicador do desempenho por intermédio da categorização.

Apesar das três respostas estarem corretas a resposta do aluno C pressupõe que este tenha evidenciado sinais da *bifurcação proceptual*, pois consegue sintetizar o conhecimento matemático de forma a explicar o seu raciocínio. Enquanto que o aluno B utiliza um algoritmo e o aluno A vai definir os conjuntos em extensão.

Pensamos que este modelo de análise centrado nas três dimensões: i) categorização do pensamento matemático utilizando os níveis SOLO; ii) a concepção de *bifurcação* *proceptual* sustentada pelas teorias de Tall e iii) o triângulo de Engeström como instrumento e análise permitem um estudo mais detalhado dos processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas matemáticos, permitindo assim aferir sobre a qualidade das aprendizagens.

Referências bibliográficas

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Biggs, J. & Tang, C. (2007). *Teaching for Quality Learning at University*. Berkshire. McGraw-Hill.

Ceia, M. (2002). A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. Visualizado em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_15_MJMCeia.pdf

Engeström, Y, Miettinen, R. & Punamäki, R-L (Eds) (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gray, E. & Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116–140.

Santos & Domingos (2013). A complexidade do raciocínio matemático e a qualidade das aprendizagens: a bifurcação proceptual. in A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa & R. Ferreira (Eds.). *Investigação em educação matemática 2013, raciocínio matemático*. Covilhã: SPIEM.

Tall, D. (2007). Developing a theory of mathematical growth. *ZDM 39* (1-2), 145-154, DOI: 10.1007/s11858-006-0010-3.

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Exploração matemática do triângulo de Pascal feita por alunos do 5.º ano

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, mvp@ipb.pt

Resumo. *A comunicação centra-se numa experiência de aprendizagem desenvolvida numa turma de vinte e cinco alunos do quinto ano de escolaridade na exploração de relações numéricas no triângulo de Pascal, com o propósito principal de identificar e analisar processos de resolução desenvolvidos pelos alunos em tarefas de cariz mais investigativo. É possível concluir que o trabalho proporcionado por este tipo de tarefas, apelando a processos matemáticos complexos, como conjeturar e generalizar, ajuda os alunos a dar mais sentido e significado às suas aprendizagens.*

Palavras-chave: Alunos; Conjeturas; Investigações matemáticas; Triângulo de Pascal.

As investigações matemáticas

As investigações matemáticas são tarefas que podem proporcionar uma atividade divergente em que se incentiva os alunos a serem curiosos, a procurar estratégias alternativas, a considerar o que sucederia se se alterassem certas condições ou a generalizar uma situação (Chamoso & Rawson, 2001). Geralmente exigem um trabalho muito próximo daquele que é produzido pelos matemáticos: face a uma dada situação a que pretendem dar resposta, os alunos têm de colocar questões, formular conjeturas, testar essas conjeturas e validar os resultados (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998).

Este processo de prova e validação é também uma prática social (Boavida, 2005), pois os alunos têm de argumentar e comunicar aos outros os seus resultados, eventualmente contra-argumentar, para que os resultados possam vir a ser validados por todos. Assim, tarefas de natureza mais aberta e investigativa, apelando a processos matemáticos complexos, proporcionam o contacto com dimensões essenciais do conhecimento matemático, contribuindo para o desenvolvimento da competência matemática dos alunos.

O propósito da comunicação é, então, apresentar e analisar o trabalho realizado pelos alunos na resolução de uma tarefa com características investigativas.

A experiência de aprendizagem

A experiência, que se apresenta, insere-se num estudo mais amplo (Pires, 2011), envolvendo uma professora de matemática do 2.º ciclo do ensino básico, com o principal intuito de conhecer como os professores integram as tarefas de investigação no desenvolvimento (normal) do currículo e como refletem sobre as suas práticas. Esta experiência de aprendizagem incide no trabalho desenvolvido numa aula pelos vinte e cinco alunos de uma turma do 5.º ano da referida professora, que lhes propôs que descobrissem, registassem e validassem "relações interessantes" no triângulo de Pascal. Anteriormente os alunos já tinham resolvido, embora de forma bastante esporádica, tarefas da mesma natureza.

O estudo segue uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Em particular, os dados da experiência foram recolhidos através das produções escritas feitas pelos alunos na resolução da tarefa e das notas de campo registadas na aula pela professora e pelo autor, como observador participante, e a sua análise foi orientada para a identificação e sistematização do trabalho desenvolvido pelos alunos.

Os alunos iniciaram a resolução da tarefa trabalhando em pares, o que facilitou o processo comunicativo de apresentação e validação das conjeturas "a dois". A apresentação de uma dada conjetura exigiu a cada criança do par um certo nível de organização e estruturação do argumento para poder ser entendido e, eventualmente, validado pelo seu colega. Foi frequente ouvir comentários do tipo:

> "isso não pode ser, nesta linha já não acontece", "e se fizéssemos... não, não dá!", "pode ser que tenhas razão, mas a mim não me parece", "não parecia que ia dar e deu", "essa é muito fácil, devemos procurar outra", "professora, qual de nós tem razão?"...

Os pares registaram um número significativo de conjeturas: umas mais evidentes, muito baseadas na observação direta, como a apresentada na Figura 1, e outras mais sofisticadas, envolvendo ligações entre conceitos matemáticos, de que a Figura 2 é exemplo. No entanto, esta arrumação não pretende hierarquizar ou comparar as conjeturas dos alunos, dado que cada uma delas teve significado matemático para quem a estabeleceu (Pires, 2011).

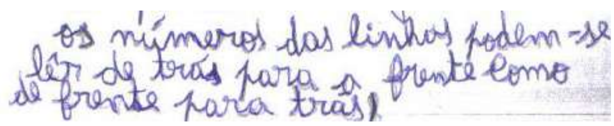


Figura 1. Exemplo de uma conjetura mais evidente.

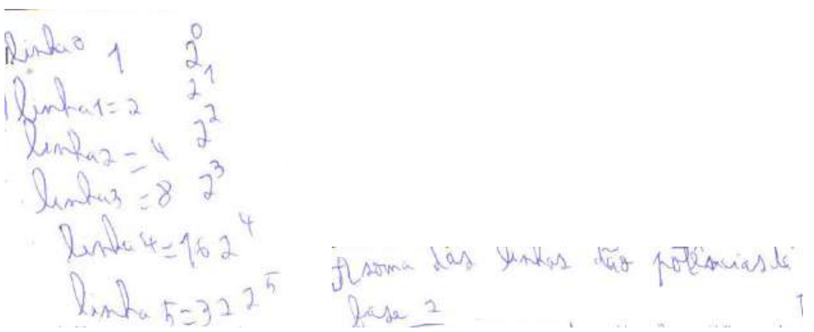


Figura 2. Exemplo de uma conjetura mais sofisticada.

Após todos os pares terem validado, pelo menos, uma relação no triângulo de Pascal, passou-se à discussão em grande grupo. Genericamente, os alunos souberam apresentar e defender os seus raciocínios. Também, em menor grau, souberam ouvir e compreender as opiniões dos outros. Mas, como revelavam um bom comportamento geral, o ambiente de validação (ou refutação) coletiva das conjeturas não foi *contaminado* negativamente pelas suas posturas (Boavida, 2005), o que poderia complicar a sua gestão.

Para retratar o ambiente de validação coletiva, atenda-se à conclusão da Figura 2. Esta conjetura levantou muitas interrogações ("potências?", "mas 2^0 vai dar mesmo 1?!"...) com muitos alunos a solicitar esclarecimentos, pois essa conclusão apenas tinha sido estabelecida por dois pares. As respostas avançadas pelo par ("quando o expoente é zero o resultado é sempre 1"...) foram bastante convincentes, tendo sido aceites pela generalidade dos alunos.

A concluir

A exploração de relações entre os números do triângulo de Pascal permitiu formas de trabalho de cariz mais investigativo, cujas características propiciaram mais sentido e significado às aprendizagens dos alunos (NCTM, 2007), desenvolvendo as suas capacidades de comunicar, argumentar e generalizar.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes & A. Boavida (Orgs.), *XVI SIEM – Atas* (pp. 13-43). Setúbal: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Chamoso, J., & Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *SUMA*, *36*, 33-41.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de matemática: Práticas de uma professora de matemática. *Quadrante*, *XX*(1), 31-53.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

SIMPÓSIO 4

Conhecimento e Práticas Profissionais de Professores de Matemática

Coordenadores: *Rosa Antónia Tomás Ferreira*, *Isabel Vale* & *Teresa Pimentel*

Conhecimento e práticas profissionais de professores de Matemática

Rosa Antónia Tomás Ferreira[1], *Isabel Vale*[2], *Teresa Pimentel*[3]
[1]Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, rferreir@fc.up.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo & CIEC
isabel.vale@ese.ipvc.pt
[3]Escola Secundária de Santa Maria Maior, Viana do Castelo, terpimentel@gmail.com

O professor é a figura central no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e também o agente fundamental no desenvolvimento do seu conhecimento profissional e das suas práticas. A formação do professor de Matemática no seu sentido mais amplo tem merecido grande atenção por parte da comunidade de investigação em Educação Matemática (e.g., Branco, 2013; Duarte, 2012; Guerreiro, 2011; Martinho, 2007; Menezes, 2004; Oliveira, 2004; Pimentel, 2010; Saraiva, 2002; Tomás Ferreira, 2005; Viseu, 2008). Em particular, as temáticas do conhecimento e da prática profissional do professor têm sido revisitadas nas últimas edições do Seminário de Investigação em Educação Matemática. No que se segue, fazemos uma breve introdução aos temas do simpósio 4 com o intuito de enquadrar as comunicações que o integram.

Quando se fala em conhecimento profissional ou em prática profissional do professor de Matemática, assume-se frequentemente que estas ideias estão suficientemente claras e são entendidas por todos mais ou menos da mesma maneira. Contudo, não existe um consenso em torno delas. De facto, as noções de conhecimento profissional e de prática profissional variam conforme o nosso ponto de partida é uma visão mais cognitivista ou uma perspetiva mais sociocultural. No entanto, seja qual for a visão escolhida, o conhecimento está fortemente ligado à ação (e.g. Bauersfeld, 1994, 1995; Piaget, 1967; Vygotsky, 1998).

São vários os autores que se têm debruçado sobre a temática do conhecimento profissional dos professores (de Matemática), enfatizando aspetos distintos (e.g., Ball, Thames & Phelps, 2008; Canavarro, 2003; Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002; Ruthven & Goodchild, 2008; Schön, 1983; Shulman, 1986). Destacamos aqui apenas alguns deles.

Inspirados no trabalho de Shulman (1986), Ball e colaboradores (2008) propõem a noção de conhecimento matemático para ensinar, enfatizando o conhecimento do conteúdo e destacando este conhecimento como algo que diferencia o conhecimento matemático exigido a outros profissionais. O conhecimento matemático para ensinar é o "conhecimento matemático necessário para levar a cabo o trabalho de ensinar Matemática aos alunos" (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 395).

Para Ponte (2012), o conhecimento profissional do professor de Matemática está sujeito à influência de vários fatores mas

> assume uma especificidade própria dependendo da sua atividade e também das condições em que é exercida. O conhecimento profissional do professor é, assim, acima de tudo, orientado para uma atividade prática (ensinar Matemática a grupos de alunos), embora se apoie em conhecimentos de natureza teórica (sobre a Matemática, a educação em geral e o ensino da Matemática) e também de natureza social e experiencial (sobre os alunos, a dinâmica da aula, os valores e a cultura da comunidade envolvente, a comunidade escolar e profissional, etc.). (p. 85)

Ponte e Oliveira (2002) designam por conhecimento didático a dimensão do conhecimento profissional chamado a intervir diretamente na prática letiva, e esta noção tem ganho relevo no nosso país. O conhecimento didático envolve quatro domínios: conhecimento do currículo, conhecimento da Matemática, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, e conhecimento dos processos de trabalho em sala de aula (Ponte & Oliveira, 2002). Contudo, estes domínios não esgotam a abrangência do conhecimento didático, que também inclui o conhecimento do contexto (escola e comunidade, entre outros) e o conhecimento de si mesmo como professor (Ponte, 2012).

Tal como o conhecimento profissional pode ser visto sob diferentes perspetivas, a prática profissional do professor (de Matemática) também pode ser percecionada de modos diversos (Ponte, Quaresma & Branco, 2012). Numa perspetiva cognitivista, Schoenfeld (2000) propõe ver a prática como um "modelo para o estudo do processo de ensino do professor, em que o centro da atenção está nas decisões e ações que este assume na sua prática" (p. 3). O autor procura explicar estas decisões e ações do professor baseando-se no conhecimento do professor, nas suas crenças e nos objetivos que tem no exercício da sua função; a noção de conhecimento pedagógico de conteúdo de Shulman (1986) desempenha um papel de relevo nesta análise das ações e decisões do professor (Ponte, Branco, Quaresma, Velez & Mata-Pereira, 2012). O modelo de Schoenfeld (2000) não pretende ser prescritivo de numa abordagem particular de ensino, nem pretende ter uma natureza avaliativa. Procura, sim, "ter em atenção o modo como o professor toma decisões, atendendo às prioridades que estabelece e aos planos de ação que formula, e atende também ao modo como estes planos são depois concretizados ou não em sequências de ação" (Ponte, Branco, Quaresma et al., 2012, p. 269).

Numa abordagem sociocultural, na qual as ideias centrais da teoria da atividade têm um papel importante, as práticas dos professores podem ser entendidas como as atividades que conduzem regularmente, tendo em conta o seu contexto de trabalho e os significados que atribuem a esses contextos e às suas próprias ações; neste sentido, as práticas incluem também as intenções com que os professores realizam essas ações (Ponte & Chapman, 2006). Nesta perspetiva, "as práticas profissionais do professor são co-construídas com outros intervenientes – colegas, alunos, diretores, formadores e outros atores sociais. Em particular, as práticas letivas na sala de aula são o resultado de uma construção conjunta de professor e alunos" (Ponte, Branco, Quaresma et al., 2012, p. 268).

Ponte e colaboradores defendem a necessidade de uma conciliação das duas perspetivas mencionadas:

> É preciso compreender o sentido global do que faz o professor, tendo em atenção os seus planos de ação e procurando caraterizar a sua atividade, bem como identificar o modo específico como são postos em prática, através de diversas decisões e ações apoiadas em operações e técnicas mais ou menos apropriadas. (Ponte, Branco, Quaresma et al., 2012, p. 275)

Assim, a articulação das duas perspetivas potencia o estudo da prática profissional, detendo-se na "natureza e estrutura da atividade do professor observada na sala de aula e estreitamente ligada aos seus planos de ação e decisões" (Ponte, Quaresma & Branco, 2012, p. 275).

Nesta conciliação de perspetivas, é enfatizada a prática letiva, um dos grandes domínios das práticas profissionais dos professores, na ótica de Ponte e Serrazina (2004). Os outros domínios são as práticas profissionais na instituição e as práticas de formação. As que maior atenção têm tido por parte da investigação, no passado mais recente, são as práticas letivas e as práticas de formação, e são também esses os domínios, sobretudo o primeiro, contemplados nas comunicações que constituem este simpósio. As práticas letivas ocorrem na sala de aula e relacionam-se de modo direto com as oportunidades de aprendizagem matemática dos alunos. Neste domínio, Ponte e Serrazina (2004) identificam cinco categoriais essenciais: (1) as tarefas que são propostas aos alunos e acompanhadas em sala de aula; (2) os materiais utilizados nas aulas; (3) a comunicação que é estabelecida dentro da sala de aula; (4) a gestão curricular; e (5) a avaliação das aprendizagens matemáticas dos alunos.

Cochran-Smith e Lytle (1999) discutem o papel da prática na génese e desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores, apontando três perspetivas: (1) *conhecimento para a prática*; (2) *conhecimento na prática*; e (3) *conhecimento da prática*. Na primeira perspetiva, o professor assume-se como um utilizador ou consumidor do conhecimento profissional, que adquire em fonte externa à profissão e à escola e aplica à prática. Na segunda perspetiva, destaca-se o conhecimento na ação (na aceção de Schön, 1998) e a experiência é a fonte privilegiada de conhecimento. Assim, a génese e o uso do conhecimento estão alicerçados no processo. Por fim, ao encarar a relação entre conhecimento e prática como refletindo o uso de ferramentas teóricas características da investigação educacional na análise do processo de ensino-aprendizagem, o professor é o protagonista do seu conhecimento, que é construído a partir da investigação de problemas profissionais emergindo das suas práticas.

Se é certo que as práticas letivas tradicionais dos professores têm de mudar, de modo a coadunarem-se com as novas exigências de formação dos jovens num mundo em mudança permanente, é de realçar que, mais do que preparar professores para a implementação de novas práticas, é necessário levar os professores a verem-se a si próprios como aprendizes, descobrindo práticas de sala de aula que respondam às necessidades dos alunos e avaliando e adaptando continuamente essas práticas (Vale & Pimentel, no prelo).

Como é natural, as práticas dos professores devem estar em consonância, não só com as suas perspetivas fundamentadas na investigação educacional, mas também com as orientações curriculares vigentes. Ora, tem-se vivido tempos agitados ultimamente no nosso país devido às mudanças curriculares. Depois da introdução e generalização do *Programa de Matemática do Ensino Básico* homologado há seis anos atrás (ME, 2007), outro programa surgiu (MEC, 2013) sem que o anterior tivesse terminado um ciclo completo de aplicação e sem que houvesse uma avaliação de todo o processo. Nos últimos dias surgiu ainda uma proposta de novo programa de Matemática A do Ensino Secundário na linha das alterações feitas no Ensino Básico, sem reflexo da investigação em Educação Matemática existente nem das recomendações para o ensino da Matemática nela baseadas e adotadas em países de referência. De uma visão da Matemática e do que significa ensinar e aprender Matemática sustentada na investigação nacional e internacional em Educação Matemática, passou-se para uma filosofia que retoma perspetivas e práticas de ensino há muito ultrapassadas e que não encontram eco na investigação educacional. Esta contradição pode conduzir os professores a indecisões e dilemas, com o risco de desmotivação para o exercício pleno das suas funções. Em última análise, será a aprendizagem dos alunos que sairá fortemente prejudicada.

As mudanças de práticas e conceções exigidas por cada mudança curricular são acompanhadas por diferentes exigências de conhecimento profissional. A formação inicial proporciona as condições para o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor mas é apenas o ponto de partida. Na prática profissional, o conhecimento inicial enraíza-se, mas é a formação contínua que permite o seu aprofundamento e consolidação (Ponte, 1998, 2012). Cabe ao professor ser agente ativo da sua própria formação ao longo da vida, procurando identificar as suas necessidades de formação e ancorando-as na prática (Sowder, 2007). Reforçando a ideia desta autora, Vale e Pimentel (no prelo) referem que este envolvimento do professor ao longo da vida inclui uma aprendizagem não individualista mas de cooperação e responsabilidade partilhada, e ainda de reflexão crítica e de investigação da prática profissional. Esta perspetiva de desenvolvimento profissional vai permitir ao professor aprender por períodos alargados de tempo, superando a visão tradicionalista da união de dois momentos disjuntos: a formação inicial e depois, mais tarde, formações de reciclagem ou aperfeiçoamento. Há assim um crescente reconhecimento de que, por um lado, a formação de professores é prioritária e, por outro, deve obedecer a esta visão abrangente.

Vários estudos sustentam a influência de iniciativas de formação no desenvolvimento do conhecimento profissional (e.g., Branco, 2013; Martinho, 2007; Menezes, 2005; Pimentel, 2010; Saraiva, 2002). No entanto, os contextos em que os professores exercem a sua profissão são também importantes no desenvolvimento das suas práticas e do seu conhecimento. Também neste âmbito a investigação tem feito várias recomendações, por exemplo mostrando as potencialidades do trabalho colaborativo entre docentes ou com peritos e/ou investigadores (e.g. Boavida & Ponte, 2002; Ferreira, 2006; Hargreaves, 1998; Nunes & Ponte, 2008; Pimentel, 2010; Santos, 2000; Saraiva, 2002; Sowder, 2007).

As várias comunicações que constituem este simpósio 4 abordam as questões do conhecimento e das práticas profissionais, colocando, contudo, enfoques distintos e relacionando estas duas áreas de formas diferentes. As comunicações estão divididas em três grupos, por afinidades temáticas, de modo a melhor promover a discussão. Procurámos também, sempre que possível, que em todos os grupos se abordassem questões relativas ao conhecimento e questões relativas às práticas, embora a relação entre estes dois aspetos fosse necessariamente vista de modos distintos.

Num primeiro grupo, organizado em torno de aspetos transversais das práticas de ensino relacionados com a gestão curricular (como a multiculturalidade, as tecnologias e as necessidades educativas especiais), encontramos os trabalhos de: (1) Lucília Teles e João Pedro da Ponte; (2) Helena Rocha; e (3) Joana Tinoco, Maria Helena Martinho e Anabela Cruz-Santos. O primeiro texto, *A realização de miniprojetos de educação intercultural no ensino da Matemática: As experiências vividas por quatro professoras*, debruça-se sobre a influência da realização de projetos tirando partido da multiculturalidade no desenvolvimento profissional das professoras envolvidas, sobretudo ao nível do seu conhecimento didático em várias das suas vertentes. A colaboração mostra ser uma condição fundamental para a adesão a práticas menos familiares e para a ultrapassagem de dificuldades; além disso, é realçada a importância de uma cuidadosa preparação das propostas de trabalho, seguida de uma reflexão profunda sobre a sua adequação, não só aos tópicos matemáticos mas também aos propósitos de educação intercultural que se pretendem alcançar com os miniprojetos. O segundo texto, *A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de Matemática*, detém-se nas práticas de uma professora relativas à forma como promove a apropriação, pelos alunos, do significado da janela de visualização da calculadora gráfica. Mostra-se particularmente importante a análise da complexidade das tarefas para uma sequenciação de propostas de trabalho que permita aos alunos irem construindo ideias sólidas e lidando com situações progressivamente mais exigentes, a par de uma valorização explícita dos procedimentos que levam à escolha de janelas de visualização apropriadas a cada situação. O terceiro texto, *As aulas de Matemática com alunos com deficiência auditiva: Perspetivas de uma professora e de uma intérprete*, aborda questões relativas ao processo de ensino-aprendizagem de alunos com necessidades educativas especiais, nomeadamente com deficiência auditiva. As autoras procuram compreender as perspetivas da professora e da intérprete que acompanha as atividades letivas sobre a comunicação com os alunos nas aulas de Matemática e o papel da língua gestual portuguesa nesse processo, bem como sobre a relação entre as tarefas propostas e a atividade que os alunos conseguem desenvolver. As dificuldades de comunicação com os alunos passam muito pela ausência de tradução para linguagem gestual de muitos termos matemáticos, o que aponta para o importante papel da intérprete para minimizar este problema. Por outro lado, é necessário um cuidado especial na elaboração das tarefas, por exemplo, incluindo elementos visuais que facilitem a sua apropriação, evitando enunciados muito extensos e substituindo termos mais complexos por sinónimos de mais simples compreensão.

O segundo grupo de comunicações debate a temática abrangente da comunicação matemática em sala de aula e os textos apresentados são da autoria de: (1) Olga Seabra e Maria Helena Martinho; (2) Sílvia Semana e Leonor Santos; e (3) Marisa Quaresma e João Pedro da Ponte. O primeiro texto, *Comunicação matemática em contexto de sala de aula: O papel da professora de uma turma do 5º ano de escolaridade*, enfatiza o papel da professora na promoção do desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente dos alunos, salientando a importância de um modo de comunicação instrutiva ou reflexiva. As práticas de questionamento da professora bem como das formas como lhes responde sobressaem na promoção destes modos de comunicação na sala de aula, sobretudo nos momentos de discussão coletiva, em que os pedidos de explicitação do raciocínio e de justificação dos procedimentos seguidos desempenham um papel central. A temática das discussões coletivas e das formas de o professor responder aos alunos é retomada no segundo texto deste grupo, *Responder aos alunos em discussões coletivas: Oportunidades para a autorregulação da aprendizagem em Matemática*, que, contudo, se foca nas práticas de promoção da autorregulação das aprendizagens dos alunos. Durante as discussões coletivas, ações como o encaminhar de questões para o grupo turma, o responsabilizar os alunos pela função de avaliar, e o promover a identificação e correção do erro pelos alunos mostram-se favoráveis ao desenvolvimento de comportamentos de autorregulação. No entanto, responder aos alunos de modo a promover a autorregulação das aprendizagens apresenta desafios vários ao professor, em particular quando o professor enfrenta dificuldades generalizadas na turma, quando o fator tempo exerce pressão, ou quando a paciência começa a esgotar-se devido ao desempenho menos satisfatório dos alunos. Se as discussões coletivas são o contexto chave dos dois textos anteriores, elas são o foco de investigação no terceiro texto deste grupo, *A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor*. Os autores procuram identificar as ações empreendidas pelo professor nas práticas de condução de discussões matemáticas em aulas de cariz exploratório. As ações de convidar, desafiar, apoiar/guiar e informar/sugerir pautam a atividade do professor embora com expressividades diversas. Além disso, a condução de discussões matemáticas traz desafios particularmente importantes quando surgem situações imprevistas que são igualmente abordados neste texto.

Finalmente, no terceiro grupo de textos encontramos um traço comum que diz respeito à formação do professor que ensina Matemática, seja como o contexto em que decorre a investigação, seja como um aspeto central a ter em conta perante os resultados da investigação realizada. Os trabalhos incluídos neste grupo são da autoria de: (1) Hélia Oliveira e Renata Carvalho; (2) Hélia Pinto, Carlos Miguel Ribeiro e Nádia Ferreira; e (3) António Guerreiro. O primeiro texto, *Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório*, tem a formação (contínua) como contexto de investigação, pautada pelo recurso a casos multimédia como veículos de reflexão sobre o ensino exploratório da Matemática. A análise dos planos de aula e de vídeos de excertos de uma aula de ensino exploratório são os aspetos dos casos multimédia destacados pelos participantes no estudo. Estes aspetos são também determinantes no desenvolvimento de uma perspetiva global sobre o ensino exploratório da Matemática, em particular os desafios colocados ao professor na planificação e concretização de aulas desta natureza. O segundo texto, *O sentido de adição e subtração de números racionais de futuros professores dos primeiros anos*, realça aspetos relacionados com o conhecimento matemático para ensinar revelado por futuros professores quando se considera a adição e subtração de números racionais e a formulação de problemas envolvendo estes números. Os resultados obtidos apontam direções para melhorar a formação inicial de professores de Educação Básica no sentido de minimizarem as dificuldades encontradas no conhecimento matemático para ensinar. Por fim, o texto intitulado *Negociação de significados no 1.º ano de escolaridade: Conceitos e processos matemáticos* aborda a negociação de significados em aulas do 1.º ano de escolaridade, ilustrando-a com situações numéricas e espaciais. Os resultados são discutidos, tal como no texto anterior, com vista à melhoria das experiências de formação inicial e contínua proporcionadas aos professores de Educação Básica. Este simpósio 4 conta ainda com uma comunicação em poster da autoria de Rodrigo Terradas e Josimar de Sousa que se debruça sobre as contribuições da História da Matemática para potenciar a compreensão de conceitos numéricos no âmbito da Educação de Jovens e Adultos no Brasil.

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R. Shooz, R. Sträβer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in the mathematics classroom: Their function and their effects. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 271-291). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Boavida, A. (2006). Colaboração a propósito da argumentação na aula de Matemática. *Quadrante*, *15*, 65-93.

Boavida, A., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores nos primeiros anos*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in a community. *Review of Research in Education*, *24*, 249-305.

Duarte, J. (2012). *Tecnologias e pensamento algébrico: Um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de Matemática*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Ferreira, A. (2006). Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras. *Quadrante*, *15*, 121-144.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança*. Lisboa: Mc Graw-Hill.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Lisboa: APM, Coleção Teses.

Menezes, L., & Ponte, J. (2006). Da reflexão à investigação: percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo na área de Matemática. *Quadrante*, *15*, 3-32.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

MEC (2013). *Programa e metas curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Piaget, J. (1967). *Seis estudos de Psicologia*. Lisboa: Dom Quixote.

Pimentel, M. T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações* *com um programa de formação contínua?* Tese de doutoramento, Universidade do Minho.

Ponte, J. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In APM (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Coord.), *Teoria, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83 – 98). Barcelona: GRAO.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, *1*, 65-86.

Ponte, J.P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, O., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais de professores de Matemática. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 267-277). Portalegre: SPIEM.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking research with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 565-592). New York, NY: Routledge.

Santos, L. (2000*). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses.

Saraiva, M. (2002). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Um projecto colaborativo*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.

Schön, D. A. (1998). A la recherche d'une nouvelle épistémologie de la pratique et de qu'elle implique pour l'éducation des adultes. In J. Barbier (Ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 201-222). Paris: PUF.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sowder, S. (2007). The Mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. I, pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Tomás Ferreira, R. A. (2005). *Portuguese student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment*. Tese de doutoramento, Illinois State University, USA.

Vale, I. & Pimentel, T. (no prelo). *O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores*.

Viseu, F. (2008). *A formação do professor de Matemática apoiada por um dispositivo de interacção virtual no estágio pedagógico*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Vygotsky, L. (1998). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

COMUNICAÇÕES

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A realização de miniprojetos de educação intercultural no ensino da Matemática: As experiências vividas por quatro professoras

Lucília Teles[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, luciliateles@gmail.com
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação analisa a influência que a realização de miniprojetos baseados num tema de educação intercultural em quatro turmas de ensino básico teve no desenvolvimento profissional das professoras de Matemática envolvidas. A metodologia de investigação segue uma abordagem interpretativa, segundo um design de estudo de caso, sendo os dados recolhidos através de entrevistas. Os resultados evidenciam diversas aprendizagens realizadas e reconhecidas pelas professoras, em particular, no que se refere à importância de articular a exploração de aspetos multiculturais e aspetos matemáticos, o valor da colaboração com outros professores e a necessidade de um planeamento cuidadoso na realização deste tipo de atividades, garantindo as necessárias condições e apoios.*

Palavras-chave: Projeto; Educação Matemática; Desenvolvimento Profissional do Professor.

Introdução

A dinâmica da aula, os temas abordados e o modo como é feita essa abordagem, a natureza das tarefas propostas pelo professor e o papel que os alunos assumem na sua realização são aspetos determinantes na sua adesão e empenho. Em particular, a realização de projetos assume especial interesse, possibilitando aos alunos importantes aprendizagens relativas à Matemática e também de ordem mais geral.

Entre os projetos que se podem propor aos alunos, destacam-se os que assumem um caráter intercultural, que promovem a interação e o diálogo articulado entre culturas (Pereira & Moreira, 2005), evidenciando e valorizando as diferenças e singularidades de cada uma. Os próprios processos de ensino-aprendizagem devem, também, respeitar a diversidade de cada aluno, as suas características e interesses. Deste modo, é importante que a formação de professores lhes possibilite a construção de conhecimentos sobre as culturas em que participam e em que participam os alunos, sendo igualmente importante que saibam integrá-los na preparação e realização da prática letiva (Gerdes, 1996).

A realização de projetos na sala de aula pode constituir uma fonte de experiências significativas para os professores, quer em termos de abordagem de determinados tópicos, quer na gestão do tempo e do trabalho dos alunos, contribuindo para o seu desenvolvimento profissional. Este processo, que se concretiza ao longo da carreira docente, depende do contexto em que se insere e de tudo o que a ele se associa. A colaboração com outros professores pode enriquecer o processo de desenvolvimento profissional e, ao mesmo tempo, estimular a sua capacidade reflexiva sobre a sua própria prática. Nesta comunicação, analisamos o modo como quatro professoras de Matemática perspetivam a sua experiência de realização de miniprojetos de cariz intercultural no ensino básico, em termos do seu desenvolvimento profissional.

Desenvolvimento profissional do professor

A prática profissional do professor é uma atividade extremamente complexa, que exige a mobilização de diversos saberes de natureza científica e didática e de um conjunto de valores profissionais. Shulman (1986) sublinha que é necessário que o professor possua *conhecimento não só do conteúdo disciplinar*, mas também *conhecimento pedagógico do conteúdo* e *conhecimento curricular*. O modo como o professor concebe o seu ensino é determinante no modo como desenvolve a sua função. A opção por um ensino "direto" ou por um ensino-aprendizagem "exploratório" (Ponte, 2005) derivam de diferentes conceções sobre o que é ensinar e aprender e sobre o papel que professor e alunos desempenham na sala de aula. O ensino direto baseia-se essencialmente na exposição e na prática de exercícios, vendo o professor como o responsável pela transmissão do conhecimento. Ao invés, o ensino-aprendizagem exploratório valoriza a realização de tarefas desafiantes pelos alunos, que assumem assim um papel ativo na construção do conhecimento, sob a orientação do professor.

A gestão curricular realizada pelo professor na sala de aula é influenciada por fatores como o currículo, as características dos alunos (as suas capacidades e os seus interesses), pelas condições e recursos disponíveis e, ainda, pelo contexto escolar e social envolvente (Ponte, 2005). Trata-se de um processo que exige do professor capacidade de análise rápida e criatividade para tomar decisões no momento em que decorre a ação, de resolver problemas e/ou de impulsionar a dinâmica da aula quando necessário. No ensino-aprendizagem de cunho exploratório, os momentos de discussão geral e de síntese dos conceitos abordados e do trabalho desenvolvido, assumem uma relevância particular, na medida em que constituem momentos em que, primeiramente, os alunos apresentam o trabalho realizado à turma e, posteriormente, o professor resume as aprendizagens realizadas, fazendo-o com base na fase anterior, bem como em toda a informação que foi recolhendo ao longo do tempo em que os alunos realizaram a tarefa proposta, habitualmente aos pares ou em grupo.

O desenvolvimento profissional do professor é habitualmente associado a um processo de mudança, tanto ao nível da própria prática do professor como do processo de ensino-aprendizagem dos alunos (Fullan, 1990; Heideman, 1990). É, por natureza, um processo sempre incompleto (Ponte, 1998), que se vai concretizando ao longo da vida e da carreira profissional do professor (Day, 2001), contribuindo, deste modo, para a construção da sua identidade profissional.

Também a colaboração assume destaque no processo de desenvolvimento profissional. Esta poderá ser concretizada ao nível disciplinar, numa conjugação e partilha entre professores que lecionam a mesma disciplina, ou assumir uma natureza pluri ou interdisciplinar, envolvendo outras valências e possibilitando integração de diferentes olhares e saberes (Hargreaves, 1998; Roldão, 1999). Uma possível forma de colaboração entre professores reside na observação de aulas uns dos outros, permitindo-lhes construir um conhecimento especializado sobre a profissão e sobre a própria prática (Loucks-Horsley, Love, Stiles, Mundry, & Hewson, 2003; Smith, 2001). O desenvolvimento de projetos pode igualmente ser potenciador de colaboração entre professores.

Metodologia de investigação

Esta investigação segue uma metodologia interpretativa, segundo um *design* de estudo de caso interpretativo (Merriam, 1988) e intrínseco (Stake, 2007), atendendo ao interesse na interpretação e compreensão de cada caso em si mesmo, valorizando um olhar global e comparativo. Cada caso é composto por um miniprojeto realizado numa turma de uma professora de Matemática. As quatro professoras (Ana, Bárbara, Carolina e Daniela – nomes fictícios) foram convidadas a participar num projeto mais abrangente, que pressupunha a realização de um miniprojeto com uma turma de 3.º ciclo de ensino básico que incluía a elaboração de batiques (panos de algodão tingidos, onde se destaca um desenho), na sala de aula e posterior exploração de tópicos matemáticos a partir da experiência. A opção dos batiques justifica-se pela natureza intercultural dos miniprojetos. Sendo um artefacto cultural típico de culturas africanas, os batiques constituíam uma possível base para a exploração de tópicos matemáticos a partir do seu processo de elaboração, ao mesmo tempo que permitiam reconhecer e valorizar culturas socialmente pouco reconhecidas em Portugal, nomeadamente africanas.

Em três dos quatro casos houve participação de uma professora de uma outra área disciplinar, na procura de interdisciplinaridade, tendo esta colaboração assumido, no entanto, naturezas distintas. Assim, no Caso A apenas participou a professora de Matemática; no Caso B, a participação da professora de Educação Tecnológica (Fernanda) foi muito pouco significativa; no Caso C, o projeto assumiu uma natureza pluridisciplinar entre Matemática e Educação Visual, com a participação de Mariana; e no Caso D observou-se um trabalho interdisciplinar, contando com a colaboração de Teresa, a professora de Cálculo Financeiro. Por motivos diversos, apenas nos Casos C e D houve exploração de tópicos matemáticos associados a esta experiência nas aulas que se seguiram à elaboração de batiques. No primeiro caso, numa turma de 8.º ano, foi abordado o tópico Proporcionalidade direta e Funções, e no segundo caso, numa turma de 9.º ano de um curso de educação e formação de Assistente Administrativo, foram abordados os tópicos de Proporcionalidade direta e inversa.

Os dados analisados foram recolhidos através de três entrevistas (assinaladas por E1, E2, E3), realizadas entre 2007 e 2012, às quatro professoras de Matemática, tendo em vista compreender o modo como viveram a experiência. Numa análise mais alargada, que ultrapassa esta comunicação, estes dados foram completados com outros recolhidos a partir da análise de diversos documentos, entre os quais a observação de vídeos das aulas de realização dos miniprojetos.

Desenvolvimento profissional das professoras de Matemática

De seguida, procuramos analisar o significado que a participação das professoras de Matemática nos miniprojetos teve em termos do seu desenvolvimento profissional. A tónica deste olhar reside fundamentalmente nas aprendizagens realizadas a partir da experiência, com especial atenção às práticas letivas, à colaboração com outros professores e às condições necessárias para a realização deste tipo de projetos.

Práticas letivas

A adesão das professoras à proposta que lhes foi feita, no sentido de pôr em prática estes miniprojetos, foi muito facilitada pela altura em que estes se realizaram, muito próxima da conclusão da licenciatura e da realização do estágio pedagógico. Foi também muito facilitada pela participação de três das quatro professoras como membros da equipa na fase inicial do projeto que esteve na sua base. A sua inexperiência levantou-lhes alguns receios mas aguçou-lhes também a curiosidade de viver uma experiência nova, que acreditavam poder trazer-lhes algum enriquecimento profissional. Nunca tendo realizado aulas deste tipo, trata-se de experimentar uma mudança significativa com o vivido até então no seu curto período de exercício profissional.

Para Ana, a experiência possibilitou-lhe uma maior consciência da importância de proporcionar aos alunos atividades mais práticas mas, sobretudo, a necessidade de uma boa gestão do tempo, para que estas atividades não sejam demasiado prolongadas:

> Eu lembro-me de aquilo ter durado muitas aulas. Tentaria dar a volta à questão para não... (…) Eu acho que nas aulas práticas eles já fizeram muito de proporcionalidade direta e de tudo. Depois, claro que é preciso assentar e ver na prática, pronto, no papel, e mexerem. Pronto, é diferente. É preciso também terem essa parte. Eu tenho ideia que foi muito tempo. Nesse aspeto acho que tentava ser mais prática. (Ana, E3)

Para Bárbara, a experiência ficou marcada pela ausência de exploração de tópicos programáticos a partir do miniprojeto, constituindo o aspeto que menos a satisfez e que lhe deixou um sentimento de algo que ficou incompleto. Como referiu, a experiência valia, acima de tudo, pela exploração matemática que poderia potenciar posteriormente, considerando, por isso, que se perdeu uma oportunidade de facilitar aos alunos a construção do conhecimento matemático a partir de uma experiência prática, onde a Matemática foi utilizada por necessidade e como auxiliar:

> Acho que ficou a faltar qualquer coisa. Ou melhor, podíamos ter feito muito mais. E hoje, e hoje se fizesse, essas atividades teriam que estar todas programadas antes de fazermos as... E acho que, se calhar, até fazíamos mais atividades do que as que foram feitas na altura, não é?! Porque a experiência também já é outra. E conhecemos os alunos de outra maneira. E acho que a exploração... Acima de tudo, os batiques valem pela sua exploração. E eu senti que ficou a faltar a... (…) Essa parte. (Bárbara, E3)

Contudo, esta professora considera ter-se tratado de uma oportunidade dos alunos olharem para a Matemática numa perspetiva mais global, presente em diferentes culturas e países, levando-os mais facilmente a relacionarem com atividades do seu quotidiano. Também para si, enquanto profissional, a experiência constituiu uma oportunidade para entender a Matemática como mais abrangente do que considerava até então.

Pelo seu lado, Carolina sublinha o prazer e o entusiasmo com que preparou e concretizou o miniprojeto com a sua turma. Reconhece o trabalho e o cansaço que sentiu, mas identifica esse entusiasmo como uma mais-valia para si enquanto professora. Sem indicar aprendizagens específicas, realça a importância para o professor, enquanto profissional, de realizar experiências de ensino que o preencham. Considera ainda que a experiência possibilitou à generalidade dos alunos uma ligação mais fácil da Matemática ao real. Em seu entendimento, a experiência assumiu, também, um caráter motivador de aprendizagens posteriores. Como referiu, a partir de então, bastava falar em batiques para conseguir despertar a atenção e curiosidade dos alunos:

> Em termos de matéria lecionada também porque acabou por ser, em algumas situações, mais fácil dar a matéria porque recorri aos batiques... (...) Embora muito, muito cansada e com muito trabalho também entusiasmei-me muito com, com os batiques… (...) Havia alguns alunos que era difícil motivar para algumas matérias e como eu te disse o facto de se falar em batiques para eles já era… Uma coisa boa, pronto. Portanto, já encaravam aquilo de outra maneira e a atitude já era logo diferente, portanto já não era aquela: "Ah não! Que horror! … Isto ou aquilo…", "Ai! Isso tem um nome esquisito ou…" (Carolina, E1)

> Era facilitador. A gente falava em batiques e eles parece que já estavam a ouvir mais e melhor aquilo que eu ia dizer. (Carolina, E3)

Finalmente, Daniela evidencia também este aspeto relativamente à sua turma e aos tópicos abordados, destacando a importância da experiência vivida em termos de aprendizagens matemáticas. Considera que os alunos evoluíram relativamente a diversos domínios, entre os quais a capacidade de resolver problemas e de comunicar, tendo constituído uma oportunidade de serem eles a construir o seu próprio conhecimento:

> Em termos de aprendizagens, quais é que foram mais, mais efetivos, não é?! Ah... Em termos de conceitos, acho que sim. Procedimentos, também. Claro que sim. Capacidade de resolver problemas, mais, mais para o final. E a capacidade de comunicação. E o papel, o papel da Matemática na sociedade. Pelo menos do ponto de vista da conceção que eles têm, a conceção da Matemática em si. (Daniela, E3)

Bárbara e Daniela destacam o efeito motivador de participação que a realização dos miniprojetos teve em alguns alunos, nomeadamente aqueles que tinham ligações a culturas africanas. As duas professoras reconhecem que passaram a dar mais atenção às características dos alunos e à relevância de realizar atividades relacionadas com as culturas em que eles participam. Além disso, Daniela sublinha também a importância das conexões com outras áreas:

> Portanto, era uma turma de... Que tinha alunos de cor e que era um bocadinho, no fundo... Eles estavam todos integrados, mas não participavam, não eram miúdos que solicitassem muito (…). E acho que depois, eles conseguiram perceber que, pronto, que eu também estava interessada neles e acho que foi também isso que melhorou. Portanto, no fundo, acho que entre a turma também houve uma maior ligação. Porque eles ficaram a conhecer-se, portanto, conheceram-se melhor através da, da, da elaboração dos batiques. (Bárbara, E3)

> Por exemplo, agora estou-me a lembrar do que aconteceu na aula passada [em 2006/07], estávamos a trabalhar com equações literais para resolver equações a ordem… uma equação em relação a uma dada variável (...) e, eu lembrei-me de ir buscar a Físico-química, por exemplo. Isto… Só para te dar o exemplo, do tipo… Eles com os batiques, não é? Eu percebi que tinha mais significado quando eles trabalharam, quando eles estão a fazer exercícios, problemas matemáticos relacionados com algo que eles já tenham feito anteriormente. Com a própria experiência. (Daniela, E1)

Colaboração com outros professores

Um dos aspetos apontados pelas professoras como mais positivo na realização dos miniprojetos consiste na oportunidade que lhes conferiu de trabalharem colaborativamente com outros professores. Para Ana, a colaboração com Bárbara, Carolina e outros colegas na preparação do miniprojeto e na posterior elaboração de materiais para exploração de tópicos matemáticos constituiu uma oportunidade importante de enriquecimento profissional. Bárbara destaca também esta colaboração, sobretudo com Ana, lamentando que a participação de Fernanda, a professora de Educação Tecnológica da sua turma, tenha sido tão pouco significativa:

> Ela participou... Ela participou na altura, mas não foi ah... Não entrou naquilo assim... Ela não quis saber antes... Ela quis primeiro ver. Ver como é que as coisas correriam e só depois é que...” (Bárbara, E2).

Para Carolina, que sublinha a necessidade de haver colaboração de outros professores na escola aquando da realização deste tipo de atividades, a parceria desenvolvida com Mariana, a professora de Educação Visual, foi o que considera um verdadeiro trabalho de equipa, tanto antes como durante o miniprojeto:

> Foi mesmo em conjunto. Foi. Ah... Organizámos... Quer dizer, a parte de, do início, coube-me a mim. (...) Depois, tudo o que fez parte, portanto, da conceção dos batiques, ela esteve (…) sempre comigo. Ou quase sempre. Fizemos sempre... Houve uma vez que eu não pude estar numa parte da aula e ela é que deu a aula. (...) sabíamos muito bem as duas o que é que estávamos a fazer, o que é que queríamos fazer, pronto. Acho que foi um todo. Não uma soma de partes. (Carolina, E2)

Daniela destaca o trabalho desenvolvido com Teresa, a professora de Cálculo Financeiro. Esta colaboração iniciou-se antes da realização do miniprojeto com sua turma, na sua preparação, mantendo-se durante a sua concretização e estendendo-se depois em aulas das duas disciplinas dedicadas à exploração dos tópicos Proporcionalidade direta e inversa a partir da experiência. Tratou-se de um trabalho de natureza interdisciplinar, numa partilha de tarefas e de responsabilidades na preparação, elaboração de materiais e dinamização das aulas. Como refere, a própria avaliação destes tópicos programáticos foi realizada num momento comum:

> Foi positivo, sem dúvida nenhuma. Porque acabei por dar, até ao final do período, eu ia às aulas de Cálculo Financeiro e ela vinha às aulas de Matemática. E, pronto, foi um bocadinho repetir outra vez o ano de estágio, digamos. Mas... E é pena isso não acontecer mais vezes. Mas, mas, considero que foi positivo, tanto para ela como para mim... Já falámos várias vezes nisso... Tanto a nível pessoal como a nível profissional. (…) Olha, nós não combinávamos "Fazes tu isto. Fazes tu isto." Não era nada. Não era muito assim. Em termos de sala de aula, quando havia discussão das fichas de trabalho, dos temas e assim, não, não... Estava planeado, tudo bem, mas não dizíamos, não planeávamos ao pormenor. Era, ia decorrendo. (…) Tínhamos exatamente o mesmo papel. (…) Até porque éramos as duas professoras da mesma turma. (Daniela, E2)

A relevância da colaboração na experiência é percetível sobretudo nos casos de Carolina e Daniela, pela natureza que os miniprojetos assumiram, sendo particularmente bem conseguida na parceria estabelecida por Daniela e Teresa.

A natureza intercultural do miniprojeto poderá ter condicionado a adesão de outros professores, por falta de conhecimento sobre o tema e falta de vontade de investir no desconhecido. O modo como cada miniprojeto chegou ao seu conhecimento poderá também ter inibido a sua participação na medida em que, embora já totalmente planificada, constituía uma proposta de uma experiência algo complexa, que carecia de uma preparação e organização cuidadas, para além de condições físicas e materiais específicas. Deste modo, o projeto surgia praticamente como um plano a executar num curto espaço de tempo, e sem grandes apelos à criatividade e espontaneidade dos professores que se envolvessem. Finalmente, a adesão de outros professores aos miniprojetos parece ter sido influenciada pela própria cultura de escola, sendo que as duas professoras que aderiram de modo mais efetivo (Mariana e Teresa) se encontravam nas escolas há muito pouco tempo, tal como Carolina e Daniela.

Condições necessárias à realização do miniprojeto

Não obstante aquilo que cada professora conseguiu em termos de participação de outros e das mais-valias que reconhecem na realização da experiência, nenhuma voltou a fazê-lo noutra escola, com outros alunos. As professoras justificam-no por variadíssimos fatores, nomeadamente a inadequação do contexto à natureza intercultural do miniprojeto, como apontaram Bárbara e Daniela:

> Ah, acima de tudo, também, porque, portanto, mudei de escola. Portanto, o ambiente era outro. Era outra realidade. Era outro tipo de alunos que, se calhar, não fazia tanto sentido aplicar os batiques, como nessa escola onde eu apliquei. Ah... Depois também a envolvência da escola. A pessoa sentir-se integrada. A escola onde eu estive depois era uma escola muito segregada. Portanto, os professores novos... Era aquela escola típica onde havia uma cadeira... As cadeiras, os sítios próprios, e portanto... E, tudo o que era diferente, era olhado de lado, pronto. Tínhamos que ser cordeirinhos e fazermos todos mais ou menos igual e, portanto, foi assim que eu fiz. Não me quis estar também a destacar para não, não... Percebi que não era o ambiente bom para o fazer isso. (Bárbara, E3)

> Pois, nunca mais. (…) É um trabalho que tem resultados, mas que também tem, lá está, muito trabalho da nossa parte. Muito tempo, muito dinheiro também. Este projeto foi todo ele financiado. Nós não pagamos. Foi financiado! Os materiais e tudo aquilo que nós... Todos os recursos que nós tivemos foram financiados. O tempo que nós perdemos com ele, foi nosso e ganho por nós, mas de resto, se calhar, foi um pouco por aí. E depois também a população da escola era... Nem sempre era... É que nesse ano fez mesmo sentido! (Daniela, E3)

Ana identifica a falta de condições físicas, materiais e o tempo necessário à sua preparação e concretização como os principais motivos pelos quais ainda não repetiu a experiência. Além disso, considera que o trabalho realizado com outros professores que lecionam os mesmos níveis de escolaridade nem sempre é facilitador da realização deste tipo de atividades:

> Quando fiz esse projeto senti-me extremamente apoiada. Em termos de materiais, em termos de espaços físicos, de tudo e, portanto, fui para a frente. Nos anos seguintes, não senti apoio tanto nos espaços físicos, que era uma coisa que me preocupava. (...) Além disso, senti que, em algumas situações, fazeres atividades diferentes que levam três aulas ou quatro aulas, porque depois ainda há todo um balanço... Mais aulas até do que isso! Ah, às vezes, com os outros colegas, até em termos de planificação e tudo, às vezes complicam-nos um bocadinho a vida. (Ana, E3)

Para Carolina, a falta de apoio, sobretudo apoio externo à escola (como teve qualquer das professoras no ano em que realizou o miniprojeto) e a pressão da avaliação externa associada ao 9.º ano, que tem lecionado desde há uns anos, têm-na feito adiar a repetição da experiência:

> Então quando se tem 9.º ano há muito tempo, como eu que tenho quase sempre todos os anos 9.º ano, e agora com… Pronto desde há três anos para cá com a ideia do exame e… Nananan… Fugimos um bocadinho em fazer outro tipo de atividades, embora eu faça mas não tão direc… Portanto,

muito mais direcionadas para a matéria só do que para outras, outras coisas. (Carolina, E1)

A distância temporal que separa as professoras da experiência vivida conferiu-lhes uma outra capacidade de análise. Ana e Bárbara, por exemplo, reconhecem as limitações da experiência que realizaram, apesar de tudo o que procuraram fazer, em cada caso, para a enriquecer. O modo como cada uma das professoras entende a educação, o que é ensinar e o que é aprender, o que faz sentido em cada contexto e em cada realidade, tem sido decisivo nas opções que têm tomado ao longo do seu percurso profissional e têm moldado o seu próprio desenvolvimento profissional. O caminho que decidiram seguir desde a realização dos miniprojetos, nomeadamente a decisão de não voltar a repetir a experiência, resulta de opções tomadas por cada uma tendo em consideração os alunos e as suas características, os contextos de cada escola e a adequação das tarefas na globalidade do processo de ensino-aprendizagem.

Conclusões

Apesar de não terem sido as mentoras dos miniprojetos, as quatro professoras aderiram à proposta que lhes foi apresentada, assumindo que seria uma experiência interessante para os alunos e para o seu próprio desenvolvimento profissional. No fim da experiência e, sobretudo, ao fim de alguns anos, as professoras reconhecem ter realizado diversas aprendizagens a partir do que viveram naquele âmbito, que têm moldado as suas práticas ao longo dos anos, evidenciando o reconhecimento da importância do professor possuir conhecimentos para além do conhecimento do seu campo de ensino e destacando o caráter continuado e incompleto do processo de desenvolvimento profissional. A maior atenção ao enquadramento e adequação das tarefas à globalidade do trabalho realizado com os alunos, a necessidade de uma maior coerência, foi um aspeto sensível a todas as professoras, mas sobretudo a Ana e Bárbara que desenvolveram os miniprojetos sem posterior exploração de tópicos matemáticos.

No que se refere à colaboração com outros professores, a experiência possibilitou-lhes a continuação de um trabalho conjunto, muito à semelhança do que tinham realizado no âmbito do estágio pedagógico (casos de Ana, Bárbara e Carolina) e de viverem experiências de parceria com professores de outras áreas, como aconteceu com Daniela, possibilitando um cruzamento de diferentes olhares e um trabalho conjunto que lhe conferiu uma maior coerência. Carolina sublinhou também que a realização da experiência tornou evidente a necessidade de colaboração de outros professores nas escolas quando se pretende desenvolver este tipo de tarefas com os alunos. A falta deste apoio e/ou de outras condições que consideram essenciais tem-nas afastado de qualquer repetição da experiência. Apontam a falta de apoio externo, a ausência de condições físicas (como sala com lavatório), os níveis de escolaridade lecionados e a realização de avaliação externa como os principais responsáveis pela decisão tomada.

Guardam, por isso, a memória de uma experiência que lhes marcou o início de carreira e que acreditam ter marcado aqueles alunos essencialmente pela diferença relativamente ao que estavam habituados na disciplina de Matemática. Acreditam terem-lhes proporcionado uma oportunidade de se envolverem numa experiência que foi do seu agrado e que influenciou algumas relações entre eles e com as próprias professoras.

A realização deste tipo de projetos pode ter implicações significativas no desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. Este trabalho evidenciou a necessidade de uma preparação cuidadosa e pormenorizada de uma atividade a desenvolver com os alunos, em que a sua intervenção se pretende significativa e determinante. Uma reflexão sobre a atividade, os seus objetivos, a adequação ao público-alvo, os custos que lhe estão associados, o tempo necessário, tudo isso poderá ajudar a decidir relativamente à pertinência da sua realização em determinado contexto. Para os formadores de professores, este trabalho foca a importância de que as experiências com intenção de articulação entre uma componente intercultural e uma ou mais áreas disciplinares, tenham por base uma reflexão cuidada sobre o modo como será concretizada.

Referências bibliográficas

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Fullan, M. (1990). Staff development innovation and institutional development. In B. Joyce (Ed.), *School culture through staff development* (pp. 3-25). Alexandria, VA: ASCD.

Gerdes, P. (1996). Etnomatemática e educação matemática: Uma panorâmica geral. *Quadrante, 5*(2), 105-138.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Lisboa: McGraw Hill.

Heideman, C. (1990). Introduction to staff development. In P. Burke, R. Heideman, & C. Heideman (Eds.), *Programming for staff development* (pp. 3-9). London: Falmer.

Loucks-Horsley, S., Love, N., Stiles, K., Mundry, S, & Hewson, P. (2003). *Designing professional development for teachers of science and mathematics* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Corwin.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Pereira, G., & Moreira, D. (2005). Cálculo mental: Estratégia de "escape", dos alunos ciganos, ao uso dos algoritmos escolares. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI SIEM* (pp. 253-272). Évora: APM.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Roldão, M. C. (1999). *Gestão curricular: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Smith, M. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (2007). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Responder aos alunos em discussões coletivas: Oportunidades para a autorregulação da aprendizagem em Matemática

Sílvia Semana[1], *Leonor Santos*[2]
[1] Doutoranda do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, silviasemana@yahoo.com.br
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mlsantos@ie.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação reporta um estudo de caso relativamente ao modo como uma professora, Joana, responde aos alunos, no âmbito de uma intervenção de ensino dirigida à promoção da autorregulação da aprendizagem em Matemática. O estudo revela que Joana tende a reencaminhar questões para a turma e a responsabilizar os alunos pelas funções de avaliar e corrigir, promovendo oportunidades efetivas para a regulação da aprendizagem pelos alunos (os próprios ou os pares). São, contudo, evidentes dificuldades/limitações, associadas a fatores internos e externos à professora.*

Palavras-chave: responder aos alunos; prática do professor; autorregulação da aprendizagem em Matemática

Introdução

A autorregulação é uma forma de regulação privilegiada com potencialidades para a aprendizagem (Zimmerman & Schunk, 2011; Zumbrunn, Tadlock & Roberts, 2011). O desenvolvimento desta capacidade pressupõe um processo de aprendizagem do aluno, que deve ser favorecido pelo professor (Allal, 2007; De Corte, Mason, Depaepe & Verschaffel, 2011), através de uma prática de avaliação formativa (Wiliam, 2011). Nesse âmbito, o modo como o professor promove a comunicação na sala de aula, e em particular responde aos alunos, deve ser pensado e efetivado de forma a potenciar a autorregulação pelos alunos (Wiliam, 2011; Santos, 2008; Simão, 2004) e a aprendizagem matemática (Henning, Mckeny, Foley & Balong, 2012; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

O estudo que motiva esta comunicação integra uma investigação mais ampla em que se procura compreender a prática avaliativa de professores, no âmbito de uma intervenção de ensino que visa a promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática e é concebida num contexto de trabalho colaborativo entre cinco professores do 3.º ciclo do ensino básico e a investigadora (primeira autora). Nesta comunicação, o foco é colocado na prática de uma professora. Procura-se compreender o modo como responde aos alunos em discussões matemáticas coletivas e as potencialidades decorrentes para a autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática.

Enquadramento Teórico

A prática profissional dos professores pode ser entendida como o conjunto das atividades por eles desenvolvida regularmente, com determinados significados e intenções, nos seus contextos de trabalho (Ponte & Chapman, 2006). Quando essa prática envolve a elicitação, a interpretação e o uso de evidências para tomar decisões fundamentadas sobre o ensino e a aprendizagem, tendo em vista a sua melhoria, podemos falar de uma avaliação formativa. A responsabilidade destas ações e decisões é geralmente do professor, mas deve ser estendida aos alunos, enquanto agentes reguladores da sua aprendizagem (Wiliam, 2011).

A autorregulação da aprendizagem refere-se à capacidade dos alunos regularem as suas atividades cognitivas, afetivas e sociais, através de processos que incluem: fixar objetivos e planear a ação de acordo com estes; controlar a realização da ação face aos objetivos; assegurar feedback à ação; confirmar/reorientar a ação ou redefinir os objetivos (Allal, 2007). O feedback fornece informação sobre a diferença entre o estado atual de aprendizagem/desempenho e os objetivos e é usado, pelo aluno, para melhorar/avançar na sua aprendizagem. Esse feedback pode ser interno, se gerado pelo aluno enquanto monitoriza o seu trabalho e avalia o seu progresso; ou externo, por exemplo do professor ou de colegas (Nicol & Macfarlane-Dick, 2006).

A investigação evidencia que a autorregulação apresenta inúmeras potencialidades na aprendizagem, inclusivamente no desempenho académico dos alunos (Zimmerman & Schunk, 2011; Zumbrunn et al., 2011). Em particular, é reconhecida como essencial a uma aprendizagem matemática efetiva, mas também como um objetivo de aprendizagem, tendo em conta que a capacidade de autorregulação não se desenvolve espontânea e automaticamente (De Corte et al., 2011). O seu aperfeiçoamento exige um processo de aprendizagem, que deve ser promovido pelo professor (Allal, 2007; De Corte et al., 2011).

A comunicação é uma dimensão importante no território da avaliação formativa, já que pode e deve ser usada pelo professor para elicitar evidência sobre a aprendizagem dos alunos e promover essa aprendizagem (Wiliam, 2011). Além disso, apresenta responsabilidades na promoção da autorregulação, com ligação a múltiplos instrumentos e métodos de intervenção com esse propósito (Simão, 2004).

As discussões matemáticas coletivas, perspetivadas como oportunidades privilegiadas de comunicação e aprendizagem matemática (Stein et al., 2008) e propícias a práticas de avaliação formativa pelo professor e de regulação pelos alunos, pressupõem um papel multifacetado do professor, que inclui: (i) envolver os alunos em práticas discursivas e argumentativas (Henning et al., 2012; Stein et al., 2008); (ii) fomentar um ambiente de respeito e confiança, em que os alunos se sintam confortáveis para intervir sem receio de errar (Santos, 2008; Wiliam, 2011); (iii) promover o reconhecimento coletivo da autoridade e da responsabilidade dos alunos nas funções de validar, refutar e corrigir (Chazan & Ball, 1995; Santos, 2008); (iv) acautelar o desenvolvimento de aspetos matemáticos importantes (Chazan & Ball, 1995).

Questionar, ouvir e responder aos alunos são tarefas exigentes e o modo como o professor as desempenha é determinante para a comunicação na sala de aula e a regulação da aprendizagem pelos alunos. Em particular, responder aos alunos de forma apropriada pressupõe que o professor ouça atentamente os alunos, compreenda as suas intervenções e desencadeie ações que favoreçam a aprendizagem (Nicol, 1999; Ferreira, 2005). Perante a intervenção de um aluno, o professor deve ponderar a resposta a dar para que seja eficaz. Em particular, pode dar feedback para estimular o aluno a monitorizar e avançar na sua aprendizagem; ou redirecionar questões para a turma, promovendo o reconhecimento da turma como campo de validação matemática e a responsabilidade dos alunos como agentes da sua aprendizagem (Ferreira, 2005; Nicol, 1999; Santos, 2008; Wiliam, 2011).

Desenvolver uma prática avaliativa formativa, nomeadamente através da comunicação (como proposto neste estudo), não é comum e configura-se exigente para o professor (Henning et al., 2012; Santos, 2008; Stein et al., 2008; Wiliam, 2011). A colaboração, no sentido atribuído por Boavida e Ponte (2002), é uma forma de trabalho privilegiada para lidar com eventuais problemas e apoiar os professores na superação de dificuldades emergentes.

Metodologia

Nesta comunicação, apresentamos um estudo de caso (Yin, 2009), relativamente ao modo como a professora Joana responde aos alunos tendo em vista a promoção da autorregulação pelos alunos. A opção por este *design* prende-se, entre outros aspetos, com o facto de se procurar compreender um fenómeno particular no seu contexto, valorizando-se os processos e significados e especialmente o "como" e o "porquê".

Joana é uma professora de Matemática que integra o grupo colaborativo constituído no âmbito da investigação mais ampla. É licenciada em Matemática – ramo educacional – e, à data de início do estudo, tem 41 anos de idade e 18 anos de tempo de serviço. Nessa altura, reconhece à avaliação uma função reguladora da aprendizagem, mas admite que não costuma promover, intencionalmente, a autorregulação pelos alunos. Reconhece também a importância da comunicação para a aprendizagem matemática, mas admite que, em grupo-turma, tende a centralizá-la em si e nem sempre dá oportunidade para os alunos partilharem as suas ideias, chegando a apresentar as respostas esperadas. Revela-se muito preocupada com a gestão do tempo.

O trabalho colaborativo entre os professores participantes e a investigadora decorreu, essencialmente, em sessões semanais durante 25 meses e incidiu, em particular, sobre a planificação e a avaliação da intervenção de ensino, configurando um ciclo de planificação, prática e reflexão. A intervenção foi implementada numa turma de Joana durante dois anos letivos, correspondentes aos 8.º e 9.º de escolaridade, na lecionação do Programa de Matemática de 1991 (ME, 1991).

A recolha de dados incluiu a observação de aulas e de sessões de trabalho colaborativo (gravação áudio e vídeo); e entrevistas individuais semiestruturadas (gravação áudio), três à professora e cinco a alunos escolhidos como informantes privilegiados. Foram observadas 42 aulas de Joana, que incluíram 19 discussões coletivas (DC1 a DC19). As entrevistas à professora foram realizadas em fases distintas do estudo – no início, decorrido um ano e no fim – e visaram compreender as perspetivas de Joana (e eventuais mudanças), face à sua prática (em relação com o problema do estudo) e a respetivas potencialidades/limitações para a autorregulação pelos alunos. Para obter mais informação relativamente aos efeitos da prática da professora na autorregulação pelos alunos, foram selecionados, cinco alunos informantes privilegiados, a quem foram realizadas cinco entrevistas distribuídas pelos dois anos letivos. A seleção dos alunos foi concretizada de forma a contemplar a diversidade de desempenhos em Matemática; combinada com uma variedade de perspetivas e hábitos relativos à autorregulação.

O processo de análise de dados contemplou as fases de redução, apresentação e interpretação dos dados (Merrian, 1988). Foram definidas as seguintes categorias, emergentes a partir dos dados, com base no referencial teórico (Ferreira, 2005; Nicol, 1999; Santos, 2008; Wiliam, 2011) e no problema do estudo: reencaminhar questões para a turma; encarregar os alunos da função de avaliar; promover a identificação e correção do erro; dificuldades e limitações.

Apresentação e discussão de resultados

Reencaminhar questões para a turma

Joana tende a reencaminhar as questões que lhe são dirigidas para a turma. Considere-se, como exemplo, um episódio na discussão de uma tarefa para introdução ao estudo da proporcionalidade inversa. André questiona a professora relativamente ao gráfico de uma função, no âmbito da comparação de funções de proporcionalidade direta e inversa. Joana remete a questão para a turma e Bruna responde ao colega, sugerindo que, ao contrário do que se verifica numa função de proporcionalidade direta, o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa não compreende a origem do referencial cartesiano. Esta resposta é validada pela turma a pedido da professora:

> *André*: Porque é que não passa pelo (0;0)? (dirigido para a professora)
>
> *Professora*: Boa pergunta. O André está a perguntar porque é que naquelas funções que vocês fizeram o gráfico não passava pelo (0;0)?
>
> *Bruna*: Porque não é proporcionalidade direta.
>
> *Professora*: Então na proporcionalidade inversa o gráfico também passa no (0;0)?
>
> *Vários alunos*: Não. (DC12)

Conforme sugere o episódio anterior, ao reencaminhar questões para a turma, Joana valoriza o conhecimento matemático dos alunos e propicia a regulação da aprendizagem pelos alunos, nomeadamente pelos pares. Joana reconhece esta preocupação de evitar dar a resposta e de remeter questões para a turma:

> [Agora] lembro-me de dizer "Não sou eu que vou responder. Então, o que é que vocês acham?" (…) às vezes já penso nisso e quando me perguntam "Eu não sei…" – "Então, mas alguém consegue fazer? Conseguem explicar…?", nesse sentido. Tenho essa preocupação. (Joana, Entrevista3)

Encarregar os alunos da função de avaliar

Joana tende a encarregar os alunos de validar, refutar e decidir sobre a adequação/eficiência das resoluções/respostas apresentadas, reforçando o papel dos alunos como autoridade matemática e reguladores da aprendizagem. Considere-se, como exemplo, um episódio na discussão de uma tarefa de modelação da altura de uma vela a arder (em função do tempo). Após Sandro propor um processo para estimar a altura da vela consumida ao fim de cinco minutos, Joana sugere a comparação desse processo com outro apresentado anteriormente e encoraja os alunos a decidir qual dos dois é mais adequado. Eduardo manifesta-se, aparentemente, no sentido de privilegiar um deles e Joana insiste para que os alunos tomem uma decisão sobre qual é mais adequado. Esta interação parece desencadear em Sandro processos de autorregulação. Aparentemente, o aluno usa o feedback recebido, para avaliar ambas as resoluções e acaba por eleger a dos colegas como mais adequada face aos dados. No seguimento, Sandro parece redefinir os seus objetivos e reorienta a sua ação, ao problematizar os dados experimentais usados (aparentemente por não traduzirem uma relação de proporcionalidade direta entre o comprimento da vela consumida e o tempo) e ao reconhecer, com a ajuda de uma colega, um outro conjunto de dados (do grupo 3) como mais apropriado para traduzir o fenómeno e como objeto passível de usar a estratégia que havia proposto inicialmente:

> *Sandro*: Eu… subtraí 6 pelo 4,7, que é um minuto, e deu-me 1,3. Ah… dos zero… durante 1 minuto, consumiu… consumiu 1,3 cm e eu fiz 1,3 a multiplicar por 5, que eram os 5 minutos e deu-me 6,5… ou seja, já está consumida.
>
> (…)
>
> *Professora*: Oh Sandro, viste o que o grupo da Bruna fez? (…) Eles consideraram só, por exemplo, do segundo para o terceiro. O que é que vocês acham? Qual é que terá sido a melhor escolha?
>
> *Eduardo*: Oh stora… nós fizemos do primeiro, do primeiro minuto, no segundo minuto e no terceiro minuto (…) E obtivemos (…) 1,3 cm que ardeu ao fim do primeiro minuto (…) do primeiro para o segundo ardeu 0,4 e do (…) segundo para o terceiro também ardeu 0,4. Então o valor que nós utilizámos foi o 0,4. Fizemos da mesma maneira que a Bruna fez.
>
> *Professora*: O que é que vocês acham?
>
> *Sandro*: Acho que é mais correta a maneira da Bruna.
>
> (…)
>
> *Sandro*: Oh stora, então os valores desde o segundo zero até ao minuto devem estar ligeiramente mal (…) Porque para dar 1,3 é preciso …
>
> (…)
>
> *Andreia*: Oh stora, no grupo 3… fica… praticamente como dos 40 para os 60 segundos.
>
> *Sandro*: Eu acho que no grupo 3…
>
> *Professora*: Dos 40 para os 60? Decresceu de 0,2, é isso?

Andreia: Dos 0 aos 20 segundos, também… passou de 5,9 para 5,7. Depois…

(…)

Sandro: O grupo 3… se se usasse, por exemplo, o grupo 3… já iria dar… a minha resolução já dava… (DC14)

Promover a identificação e correção do erro

Face ao erro, Joana tende a promover a sua identificação e correção pelos alunos. Uma das estratégias que usa é aguardar pela reação dos alunos, sem intervir oralmente. Como exemplo, analise-se um episódio na discussão do número de casos possíveis para calcular a probabilidade de escolhendo três vértices de um cubo, eles definirem uma face. Sandro está no quadro a apresentar a sua resolução. O aluno já havia identificado, por exaustão, o número de possibilidades fixando um dos vértices – o vértice A – e está a registar as possibilidades (sem repetição) fixando o vértice B. Nesse registo, Sandro comete um erro e Joana aguarda que os alunos se pronunciem. É Daniel quem acaba por fazê-lo, identificando o erro do colega. Sandro é encaminhado por colegas para a correção do erro e é incentivado pela professora a continuar a resolução. Andreia e Maria antecipam-se e dão indicação de outra possibilidade que não deve ser contemplada. Desta vez, Joana remete a validação da contribuição das alunas para Sandro, aparentemente, para que ele se aproprie da situação e das contribuições dos colegas e possa, autonomamente, avançar na resolução. As oportunidades concedidas revelam-se bem-sucedidas, com Sandro a revelar processos de autorregulação. O aluno usa o feedback recebido para reorientar a sua ação inicial (que havia conduzido ao erro) e parece monitorizar, de forma eficaz, a nova ação que lhe permite continuar corretamente a resolução e avançar com uma conjetura matemática. Além disso, identifica obstáculos que se lhe colocaram na resolução inicial:

(Sandro faz registos fixando vértice B, até ser interrompido por Daniel)

Daniel: Oh Sandro (…) o A já não conta.

Eduardo: Pois (…) já não vale a pena pores o A. Porque agora tu vais pôr BAC, por exemplo, não é?

Sandro: Sim.

Eduardo: E já está ali ABC.

(Sandro aponta para o registo correspondente)

Eduardo: E depois vais pôr BAD e já está ali ABD (Pausa) Podes apagar o A.

(Sandro apaga registo)

> *Professora*: Portanto, ali, em vez de começar com o A, já só vais começar com…?
>
> *Eduardo*: O C.
>
> (Sandro recomeça registos no quadro)
>
> *Andreia*: Oh stora, também não vai pôr BCA.
>
> *Andreia* e *Maria*: Porque já está ABC.
>
> *Professora*: Agora vamos ver o que é que ele vai… Agora, é que ele vai ver. Vamos ver. Oh Sandro, agora para terceiro vértice, então? Tu já começarias a escrever as possibilidades…
>
> *Sandro*: B, C, D.
>
> (…)
>
> *Professora*: E a seguir?
>
> *Daniel*: BCE.
>
> *Sandro*: BCE.
>
> (Sandro conclui registos para vértices B e C. Discute-se o número de possibilidades consideradas fixando alguns vértices, até que Sandro avança com uma conclusão)
>
> *Sandro*: Está sempre a reduzir 1.
>
> *Professora*: Está sempre a reduzir 1. Então, se calhar faz sentido o que o Eduardo e o Guilherme estavam a dizer, não é?
>
> (Sandro acena que sim)
>
> *Professora*: Hum. E o que eu estava a...
>
> *Sandro*: Eu não tinha percebido isto.
>
> *Professora*: Não tinhas pensado na situação de estares a repetir os vértices, não era?
>
> (Sandro acena que sim) (DC10)

Muitas vezes, perante respostas incorretas ou incompletas, Joana solicita explicações ou justificações adicionais, dirigindo a atenção dos alunos para aspetos críticos, ou dá pistas para que os alunos corrijam ou completem as respostas. A título de exemplo, considere-se um episódio na discussão em torno de duas sequências pictóricas – Letra V e Letra T. Andreia propõe uma estratégia incorreta para determinar se 600 é termo da sequência numérica associada à Letra T. Em resposta, Joana remete para a situação correspondente, resolvida por Bruna para a Letra V. Bruna recorda o procedimento então usado e propõe, por sua iniciativa, um análogo para a Letra T. Esse procedimento é validado pela turma, em resposta ao questionamento de Joana:

> *Andreia*: Na quinta figura (…) tem 5 pontos, mais 5, mais 5, são… em cada lado dá 5 e depois tem mais 1. Por isso nós dividimos o 600 por 3 e dava

200, mas depois se tentássemos fazer 200 mais 1 dava 201 deste lado (aponta para um dos braços da figura) e dava 200 nos outros, por isso não dava. E se fizéssemos o mesmo para aqui e para aqui (aponta para os restantes dois braços da figura), um dos lados ia ficar com 201 e não dava, e não ficavam todos iguais.

Professora: Hum. Ela, a Andreia, não está bem, bem, a pensar como pensou a Bruna. Oh Bruna, mas se pensares como vocês pensaram para a vossa figura, lembram-se como é que vocês fizeram na letra V? O que é que começaram por fazer ao número da figura? Lembras-te?

Grupo da Bruna: Primeiro tirámos 1.

Professora: Primeiro tiraram 1, que era o número que ficava ali no meio.
Bruna: Ali… ali podiam tirar 1 e depois dividir por 3.

Eduardo: Pois.

Professora: Seria? O que é que acham?

Vários alunos (incluindo Andreia): Sim. (DC1)

Joana reconhece estas formas de reagir ao erro – aguardar pela reação dos alunos ou dar pistas – apesar de admitir dificuldades na sua implementação, especialmente quando se colocam constrangimentos de tempo:

> Isso é muito difícil. Ficar assim a ver aquilo [erro] e esperar um bocadinho para ver se alguém descobre. Depois, se ninguém descobrir (…) tento dar uma pista para tentarem perceber se aquilo estará mesmo bem, porque se dizem mal [pergunto] "Então pensa, se isso for assim, o que é que acontece se…?" para eles perceberem que aquilo não pode estar bem e tentarem encontrar a resposta. Claro que isso nem sempre se consegue e às vezes, quando temos pouco tempo, a tendência é logo para dizer qual é a resposta e não esperar que eles por eles sejam capazes de se corrigirem, não é? (Joana, Entrevista3)

Em geral, estas formas de reagir ao erro culminam com a identificação e correção do erro pelos alunos (como ilustrado pelos episódios apresentados), no concretizar de processos de autorregulação ou regulação pelos pares. Os próprios alunos reconhecem estes processos de regulação e potencialidades ao erro para a sua aprendizagem:

> … percebemos porque é que fizemos mal, o que é que fizemos mal… E percebemos depois, se aparecer outro exercício parecido, como é que temos que fazer. (Andreia, Entrevista5)
>
> … às vezes apresentámos as nossas resoluções e estavam mal (…) Os nossos colegas explicaram-nos que estávamos errados, porque é que estava mal e nós conseguimos perceber… e conseguimos corrigir, com eles a ajudarem (…) e depois até já conseguimos os outros fazer bem. (Ivan, Entrevista5)

Dificuldades e limitações

Na forma como responde aos alunos, Joana reconhece algumas dificuldades (por exemplo na forma como reage ao erro) e evidencia algumas limitações. Em particular, verificam-se alguns casos, raros, em que Joana valida/invalida as respostas dos alunos e apresenta as respostas matemáticas pretendidas. Esses casos registam-se especialmente quando se assiste a dificuldades generalizadas na turma. Tome-se como exemplo um episódio em que se discute a posição relativa de duas retas. Joana questiona a turma e invalida sucessivamente as respostas incorretas dos alunos, seja repetindo a pergunta, ignorando a resposta dada ou através da sua expressão facial ou entoação. Joana insiste no questionamento, sem apresentar, nessa fase, a resposta pretendida. A questão colocada por um aluno e dificuldades generalizadas da turma levam-na, contudo, a apresentar indiretamente uma noção informal para retas perpendiculares. Perante a persistência de dificuldades dos alunos e depois de invalidar mais uma resposta incorreta, acaba por ser ela a dar a resposta pretendida:

> *Professora*: Olhem, o Guilherme está a sugerir que comecem por traçar duas retas, que se calhar têm que ser o quê?
>
> *Um aluno*: Proporcionais.
>
> *Professora*: Retas proporcionais? (faz “cara de reprovação”)
>
> *Vários alunos*: Perpendiculares.
>
> *Ivan*: Não, paralelas!
>
> *Professora*: Essas são perpendiculares, as que estão aí?
>
> *Bruna*: São.
>
> *Professora*: Perpendiculares? (com “entoação de reprovação”)
>
> *Bruna*: Ai, não, não.
>
> *Professora*: Não, pois não? São o quê? Como é que era a designação? (…) os colegas estavam a falar em perpendiculares, parecem-vos perpendiculares?
>
> *Telma*: Não.
>
> *Daniel*: Perpendiculares são aquelas que se cruzam?
>
> *Professora*: Também, também cruzam, mas… não só, mais qualquer coisa. São perpendiculares? Essas que estão aí são perpendiculares? (Silêncio) Hum, hum, pois é, basta olhar para a figura e vê-se logo que as retas formam um ângulo de 90º que é para serem perpendiculares, não é?
>
> *Bárbara*: Não.
>
> *Professora*: Não, pois não Bárbara? (…) E como não são perpendiculares, são o quê?

(…)

Ivan: Congruentes?

Professora: (Acena que não) A posição relativa de duas retas… Elas cruzam-se, mas há… a terminologia correta está a faltar. Olhem, são secantes, e no caso são oblíquas. (DC5)

Uma forma menos apropriada de responder aos alunos, apesar de rara, tende também a emergir em associação com um sentimento de insatisfação generalizada face ao desempenho da turma e alguma impaciência, evidenciados por Joana em momentos particulares. Como exemplo, analise-se um episódio em que a professora insiste para que os alunos ajudem a colega Maria na resolução de uma equação, mas, perante uma série de contributos em sentidos diversos, acaba por, num tom algo agressivo, rejeitar a sugestão apresentada por um aluno (no caso $8x-8x+(-64)=8x-8x-64$), apesar da sua validade:

Professora: E então queres dizer como é que fica? Que ela não sabe!

Bruna: x ao quadrado (Maria regista e Bruna vai à calculadora)…

Eduardo: É preciso ir à máquina?!

Alguns alunos: Mais 8x …

Bruna: Não, mais -64.

Eduardo: 8 menos 8?

Guilherme: 8x-8x-64…

Maria: Isso é o que está aqui em cima!

Tomás: Mas é mais, menos. Agora é só menos.

Maria: Aqui tem menos.

Andreia: Pois, mas tiras o mais.

Professora: Olha Maria, não tens nada que tirar o mais. O que está aí é exatamente igual ao que eles disseram. Vocês tenham lá paciência! (DC17)

Conclusões

Joana tende a responder aos alunos reencaminhando questões para a turma e encarregando os alunos das funções de avaliar e corrigir. Face ao erro, incentiva a sua identificação e correção pelos alunos, rentabilizando as suas potencialidades como fonte de aprendizagem. Deste modo, Joana adota uma prática concordante com as recomendações de diversos autores, promove o reconhecimento coletivo da autoridade matemática dos alunos e propicia condições favoráveis à regulação da aprendizagem pelos alunos (Chazan & Ball, 1995; Santos, 2008; Simão, 2004; Wiliam, 2011). As oportunidades propiciadas tendem a resultar numa efetiva regulação pelos alunos (os próprios ou os pares), na medida em que eles: partilham o seu conhecimento matemático com os colegas, apoiando-os na regulação da sua aprendizagem; avaliam resoluções/respostas, decidindo sobre a sua validade, eficácia ou eficiência; identificam e corrigem o erro; aperfeiçoam/completam resoluções e avançam na exploração de situações matemáticas, no desenvolver de processos de monitorização, mas também de ação para melhorar (Allal, 2007; Nicol & Macfarlane-Dick, 2006; Santos, 2008).

Tendo em vista a regulação da aprendizagem pelos alunos, por vezes Joana revela algumas dificuldades/limitações na forma como lhes responde (por exemplo, ao invalidar respostas dos alunos ou apresentar a resposta pretendida). O modo como responde aos alunos parece condicionado por alguns fatores, nomeadamente: gestão do tempo, desempenho/dificuldades dos alunos e fatores internos (por exemplo, impaciência para lidar com desempenho insatisfatório/dificuldades dos alunos). Responder adequadamente aos alunos revela-se, portanto, uma tarefa exigente, conforme referenciado por outros estudos (Nicol, 1999; Ferreira, 2005), que depende, neste caso, de fatores internos e externos à professora.

Este estudo, além de contribuir para a compreensão de uma vertente da prática do professor relativamente pouco estudada, a forma como responde aos alunos, favorece a sua compreensão enquanto parte integrante da prática avaliativa, numa perspetiva formativa e dirigida à promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática. Os resultados revelam que responder aos alunos de forma adequada favorece a autorregulação pelos alunos e regulação pelos pares em Matemática. Naturalmente, esta vertente da prática do professor, isolada ou por si só, é limitada, pelo que deve ser articulada com outras estratégias e percebida em contexto.

Referências bibliográficas

Allal, L. (2007). Régulations dês apprenstissages: orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. In L. Allal; L. Mottier López (Dir.). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (pp. 7-23). Bruxelles: De Boeck Université.

Boavida, A M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Chazan, D., & Ball, D. (1995). *Beyond exhortations not to tell: The teacher's role in discussion intensive mathematics classes*. (Craft 95–2). East Lansing: Michigan State University, NCRTL.

De Corte, E., Mason, L., Depaepe, F., & Verschaffel, L. (2011). Self-regulation of mathematical knowledge and skills. In B. J. Zimmerman, & D. H. Schunk (Eds.*), Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 155-172). New York: Routledge.

Ferreira, R. T. (2005). *Portuguese mathematics student teachers' evolving teaching modes: a modified teacher development experiment*. (Ph.D. Thesis, Illinois State University).

Henning, J.; McKeny, T.; Foley, G. & Balong, M. (2012). Mathematics discussion: creating opportunities for purposeful participation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 453-479.

ME (1991). *Organização Curricular e Programas*. *Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: DGEBS, Ministério da Educação, vol. I e vol. II.

Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Nicol, C. (1999). Learning to teach mathematics: Questioning, listening, and responding. *Educational Studies in Mathematics, 37*(1), 45-66.

Nicol, D. J. & Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education, 31*(2), 199-218.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Simão, A. M. (2004). O conhecimento estratégico e a auto-regulação da aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Eds.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.77-94). Porto: Porto Editora.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *10*(4), 313-340.

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Bloomington, IN: Solution Tree Press.

Yin, R. K. (2009) *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Porto Alegre: Artemed Editora S.A.

Zimmerman, B., & Schunk, D. (2011). Self-regulated learning and performance: an introduction and an overview. In B. J. Zimmerman, & D. H. Schunk (Eds.*), Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 1-14). New York: Routledge.

Zumbrunn, S., Tadlock, J., & Roberts, E. D. (2011). Encouraging SelfRegulated Learning in the Classroom: A Review of the Literature. *Metropolitan Educational Research Consortium*, Virginia Commonwealth University.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de Matemática

Helena Rocha
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

Resumo. *As usuais dificuldades dos alunos relativamente à escolha duma janela de visualização adequada quando usam a calculadora gráfica no estudo de funções e a importância do papel do professor na sua superação, conduziram à realização deste estudo, onde se procurou conhecer e compreender as opções do professor relativamente à forma como promove a apropriação por parte dos alunos do significado de janela de visualização. Neste âmbito foi adoptada uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa e realizado um estudo de caso de uma professora que lecionava a disciplina de Matemática A ao 10.º ano de escolaridade. As conclusões alcançadas apontam para a exclusão de situações complexas, em termos de escolha da janela de visualização, numa fase inicial; para uma explicitação do processo de procura da janela de visualização; e para a inclusão de situações que envolvam visões parciais e incompletas de gráficos*.

Palavras-chave: calculadora gráfica; janela de visualização; conhecimento e prática profissional

Introdução

A utilização da calculadora gráfica no ensino da Matemática obriga alunos e professor a depararem-se com aspectos que até então não eram usuais (Bosley *et al*., 2007; Cavanagh & Mitchelmore, 2003), fazendo surgir um conjunto específico de dificuldades. Muitos dos problemas estão frequentemente associados àquilo a que Cavanagh e Mitchelmore (2000) designam por questões de escala e que englobam todas as tomadas de decisão relativamente à escolha da janela de visualização e à ponderação de eventuais alterações. Essas tomadas de decisão requerem um conjunto de conhecimentos de carácter matemático que aqui designarei por conhecimento do significado da janela de visualização.

Com este estudo pretende-se conhecer e compreender as opções do professor relativamente à forma como durante o estudo das funções promove a apropriação por parte dos alunos do significado da janela de visualização da calculadora gráfica. Concretamente, pretende-se conhecer e compreender:

- de que forma tem em conta o grau de dificuldade associado à escolha da janela de visualização em diferentes situações,

- como se caracterizam as orientações que dá aos alunos relativamente à escolha da janela de visualização,
- que atenção dá às situações em que na janela *standard* são obtidas visualizações parciais ou incompletas do gráfico.

Quadro teórico

Na literatura existente são muitas as referências às questões relacionadas com a escolha da janela de visualização da calculadora gráfica. Cavanagh (2006) menciona a grande preferência dos alunos pela adopção de valores simétricos e iguais nos dois eixos, a que se associa dificuldade em compreender o impacto sobre o gráfico da adopção de valores diferentes para cada eixo. Hodges e Kissane (1994) referem ainda a falta de consciência dos alunos relativamente ao impacto que uma qualquer alteração da janela de visualização tem sobre o gráfico observado. Por seu turno Ward (2000) e Rocha (2000) descrevem situações em que os alunos adoptam estratégias absurdas para a escolha da janela, como seja considerar os valores que surgem na expressão da função.

Nestas dificuldades transparece obviamente um deficiente domínio das noções envolvidas, no entanto, Cavanagh e Mitchelmore (2000) atribuem a sua origem à anterior experiência matemática dos alunos, onde todos os gráficos eram traçados com papel e lápis em referenciais onde os valores representados eram quase sempre os mesmos, enfatizando a atenção que o professor precisa de atribuir a essas noções, reflectindo em torno das novas ênfases que o recurso à tecnologia tende a colocar sobre os conteúdos matemáticos. Como refere Hector (1992), a utilização da calculadora gráfica veio permitir a exploração de outro tipo de situações e transformou a escolha dos valores representados em cada eixo e da escala, em aspectos fundamentais. Esta alteração revelou que a opção por simplificações permanentes impediu os alunos não só de se aperceberem da importância das noções envolvidas, como também, e principalmente, de as compreenderem convenientemente.

Directamente associada a uma adequada escolha da janela de visualização encontram-se as dificuldades em identificar os casos em que o ecrã não exibe uma vista global do gráfico da função (Cavanagh, 2006; Rocha, 2000). A identificação de vistas parciais ou incompletas de gráficos requer uma adequada articulação da informação obtida a partir de diferentes representações, algo que os alunos não estão habituados a fazer (Cavanagh & Mitchelmore, 2003).

Cavanagh e Mitchelmore (2000) e Consciência (2008) apontam a falta de articulação entre o conhecimento algébrico dos alunos e a interpretação das imagens visualizadas, que se traduz numa aceitação acrítica do que é apresentado no ecrã da máquina (como por exemplo, admitir como representação gráfica de uma função quadrática algo distinto de uma parábola). Boers e Jones (1994) mencionam dificuldades de integração da informação proveniente de diferentes vias e Rocha (2000) refere-se mesmo a uma adequação dos conhecimentos matemáticos de modo a permitir a integração da informação veiculada pela máquina (uma aluna afirma que o gráfico de uma função quadrática *geralmente* é uma parábola, adaptando o seu conhecimento de modo a evitar o conflito com a recta que observa no ecrã da calculadora).

Existem ainda referências a efeitos visuais ilusórios, associados à escolha da janela de visualização. Ward (2000) aborda a forma como os gráficos são traçados, da esquerda para a direita, que leva alguns alunos a assumir que a parte do gráfico que não foi representada se encontra para o lado direito do visor, assumindo que a representação começa a ser feita do lado esquerdo, no "início do gráfico", e que portanto qualquer parte em falta terá obrigatoriamente que se situar para a direita da imagem apresentada.

Cavanagh e Mitchelmore (2003) apontam a não apresentação conjunta com o gráfico dos valores marcados nos eixos como potencialmente problemática. Este é aliás um dos aspectos a que Ruthven (1996) e Rocha (2000) aludem, considerando-o potencialmente enganador, especialmente na sequência da realização de *zooms*. Com efeito, como observou Rocha (2000), a realização sucessiva de *zooms* rapidamente faz perder a noção da ordem de grandeza dos valores representados. Quer a opção recaia sobre a utilização do comando *zoom in* ou *zoom out*, rapidamente deixa de estar presente no gráfico qualquer indicação da escala. A partir desse momento a interpretação da informação veiculada pelo gráfico encontra-se dificultada, mesmo para um aluno que está ciente do efeito de um *zoom* (*in* ou *out*) sobre a janela de visualização.

Cabe ao professor o importante papel de minimizar as dificuldades com que os alunos se deparam na sequência da utilização da calculadora (Dick, 1992). Segundo Doerr e Zangor (2000) e Kastberg e Leatham (2005), o conhecimento do professor é determinante na forma como integra a tecnologia na sua prática, valorizando a articulação entre conhecimentos e o desenvolvimento do espírito crítico. E a este nível Cavanagh e Mitchelmore (2003) consideram que o professor deve fazer mais do que simplesmente informar os alunos relativamente às limitações da calculadora e à forma como esta pode apresentar informação de forma enganadora. Com efeito, é necessário que este reforce as ligações entre diferentes representações, chamando continuamente a atenção para as discrepâncias entre, por exemplo, o gráfico que seria de esperar e aquele que é exibido pela calculadora gráfica. É ainda fundamental, no que respeita aos aspectos relativos à escolha da janela de visualização, que o professor apele ao significado dos valores representados, para que estes façam sentido para os alunos (Almeida & Oliveira, 2009).

Muito do que tem sido feito na investigação nesta área passa, no entanto, por dizer ao professor o que a integração da calculadora gráfica deve envolver e não por analisar a sua prática para, a partir desta, apoiar e promover de forma relevante o desenvolvimento profissional do professor (Kissane, 2003).

Metodologia e contexto

A investigação que aqui se apresenta faz parte de um estudo mais abrangente (ver Rocha, 2012) e adopta uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, envolvendo a realização de um estudo de caso sobre a professora Teresa. A recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de 14 aulas e recolha documental. As entrevistas foram de diversos tipos, mas todas se caracterizaram por ser semi-estruturadas. Foram realizadas duas entrevistas focadas na professora e nas suas opiniões (uma no início e outra no final do estudo) e foram também realizadas entrevistas antes e depois de cada aula observada, com a intenção de conhecer o que preparara e as razões base dessas opções (entrevistas pré-aula) e o balanço que fazia da forma como a aula decorrera (entrevistas pós-aula). Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das aulas observadas e recolhidos diversos documentos como fichas de trabalho, enunciados de testes e outros materiais disponibilizados pela professora aos alunos. A análise de dados revestiu-se essencialmente dum carácter descritivo e interpretativo.

Teresa é uma professora com mais de 30 anos de experiência profissional, que no decorrer deste estudo leccionava o tema Funções na disciplina de Matemática A a uma turma do 10.º ano de escolaridade de uma escola da grande Lisboa e que possui uma longa experiência de utilização de calculadoras gráficas com alunos e um profundo conhecimento do funcionamento da máquina.

Ao longo do ano Teresa dispôs de 45 minutos semanais para apoio aos alunos, a que estes recorriam quando sentiam necessidade. Durante o 1.º período a professora foi utilizando este tempo para, à medida que os alunos iam adquirindo a sua calculadora, lhes ensinar individualmente a trabalhar com ela. Consequentemente, quando a máquina começou a ser usada na aula já todos conheciam os comandos mais básicos. Assim, nas aulas de Matemática raramente existiram referências a como proceder para introduzir a expressão de uma função, como alterar os valores da janela, como calcular um máximo ou um zero, ou como realizar um zoom. No decorrer das aulas o foco esteve em como a Matemática determinava a utilização do comando (por exemplo, em como perante a situação escolher os valores a introduzir na janela de visualização) ou no conhecimento e utilização de comandos mais sofisticados.

Resultados

Ao longo do estudo das funções, Teresa propôs aos alunos um amplo conjunto de tarefas. Nesta secção apresentam-se sucintamente algumas dessas tarefas, dando atenção à ênfase que em cada uma delas foi atribuída à janela de visualização.

Função quadrática

Esta tarefa consiste numa investigação em torno do efeito da mudança de determinados parâmetros numa família de funções sobre o aspecto do respectivo gráfico. Neste sentido a utilização da calculadora é fundamental, mas não exige nada de muito sofisticado em termos de utilização da máquina. De um modo geral todas as funções escolhidas pelos alunos são passíveis de ser representadas graficamente de forma adequada utilizando a janela *standard*.

No eixo da parábola

Nesta proposta de trabalho os alunos devem conjecturar relativamente ao declive da recta que passa por dois pontos situados em lados opostos do eixo de simetria duma parábola. Posteriormente devem demonstrar a veracidade da conjectura formulada. Num primeiro momento a calculadora gráfica surge como um elemento fundamental para a realização do trabalho de natureza investigativa, o mesmo já não sucedendo no segundo momento dedicado à demonstração.

A janela de visualização a considerar é um dos aspectos ponderados pela professora. Tendo em conta que a experiência dos alunos com a calculadora ainda não é muita e que já existem vários aspectos a que vão ter que dar atenção ao nível da calculadora (marcar pontos no gráfico, traçar a recta, determinar o seu declive, etc.), opta então por escolher uma janela de visualização e por a disponibilizar desde logo no enunciado da tarefa:

> Isto é assim, não podes fazer tudo ao mesmo tempo. Os alunos ainda não estão muito habituados a trabalhar com a calculadora e aqui já vão ter que conseguir fazer várias coisas com a máquina. É preferível focar. E nesta tarefa o foco não é na escolha da janela de visualização. Por isso acho que é melhor dar logo a janela, evitas perder tempo que pode vir a fazer falta e evitas que o foco se desvie daquilo que é o foco da tarefa. (pré-aula 2)

Ainda assim, aproveita a ocasião para introduzir a expressão "janela de visualização" e para apontar aos alunos duas formas diferentes de a indicarem:

> Para facilitar o estudo nesta ficha, eu dou logo à partida a janela de visualização. Uma janela de visualização boa. Eu nunca utilizei este termo, janela de visualização, vai aparecer agora na ficha, mas o que é a janela de visualização?... Quando eu faço a representação de um gráfico, este fica sem leitura se nós não tivermos aqui indicada a escala. Tenho sempre insistido nisto. Um valor no eixo dos xx e um valor no eixo dos yy, para nós percebermos a escala. É também o que acontece aqui, mas no fundo quando eu estou a ver um gráfico na calculadora ou num ecrã do computador, estou a vê-lo numa determinada janela, porque nós sabemos que o gráfico vai continuar, neste caso sabemos como é que vai continuar e nalguns casos até podemos nem saber como é que vai continuar para além desta janela. Ora esta janela tem um x que vai desde -10 até 10 e um y que vai desde -6.65 até 6.67. Portanto eu posso à partida, em vez de estar a colocar aqui os valores, ou simultaneamente, dizer estou a estudar o gráfico na janela de visualização e posso escrevê-la de duas formas: $[-10, 10] \times [-6.65, 6.67]$ ou $x \in [-10, 10]$ e $y \in [-6.65, 6.67]$. (aula 2)

Mesmo assim, sente necessidade de, no decorrer da aula, tornar a alertar os alunos para aspectos relacionados com a janela de visualização, pois há quem escolha valores para a abcissa do ponto a considerar que vão para além desta: "Tenham cuidado com a janela. Não atribuir coisas fora da janela" (aula 2).

A caixa

Esta é uma tarefa onde a calculadora assume um papel importante, pois o lado do quadrado a cortar na cartolina para construir a caixa com volume máximo não pode ser determinado sem recurso à máquina. É também uma tarefa onde encontrar uma janela de visualização aceitável exige algum trabalho da parte dos alunos. E este é precisamente um dos aspectos a que Teresa dá atenção ao apoiar os alunos, procurando que ponderem os valores que faz sentido considerar:

Prof- Então vamos alterar um bocadinho a janela para se ver melhor. (…) Vamos pensar mais um bocadinho. Entre que valores pode variar o x?

Aluna- (…) Então é entre o 0 e o l.

Prof- Não. Quanto é que isto mede na folha de papel? Isto é uma folha de papel.

Aluna- 80.

Prof- 80. Até onde é que tu podes cortar? Cortas dum lado e doutro. Podes cortar até quanto?

Aluna- Ah! 40.

Prof- Então varia entre 0 e 40. Quer dizer, só te interessa o x entre 0 e, em vez de ser até 1, posso pôr?...

Aluna- 0,4.

Prof- 0,4. Ponho mais um bocadinho que é para não ficar mesmo no limite. Certo?... Vou ver. Repara, já tenho a função só na parte que me interessa.

Aluna- Uhm uhm.

Prof- Está aqui tão baixinho tão baixinho. Então o que é que eu vou fazer? Pôr aqui um bocadinho negativo e cortar aqui (aponta a parte superior do ecrã) (…) Então vamos lá, janela… Estás a começar em 0, vou pôr -0.5, certo? (…) yMin -0.5. E o yMax? Tu tens 1. 1 está lá em cima, portanto é um valor muito mais pequenino. Que valor é que queres pôr? Experimenta lá tu.

Aluna- 0.2?

Prof- Põe lá. Experimenta! (aula 7)

Mas Teresa tem também presente que a calculadora disponibiliza várias formas de alterar a janela de visualização. Assim, ao longo da aula vai apontando aos alunos as diferentes possibilidades a que podem recorrer e, no final, ao abordar com toda a turma o problema, opta por ponderar os valores adequados para o x e depois por recorrer a sucessivos *zoom box*, até alcançar uma janela de visualização que seja considerada adequada:

Prof- Bom, o que a maior parte das pessoas fez foi isto e apareceu ali a função. (…) E agora nós não podemos esquecer que estamos no contexto de um problema concreto. (…) Quer dizer que eu agora podia adaptar a janela da calculadora de acordo com as condições do problema. E uma das hipóteses… claro que tinha várias maneiras de adaptar a janela, mas uma delas era ir à janela e nas definições da janela dizer que o xMin era 0, ou se quiserem menos um bocadinho para se ver melhor, e que o Max era… era quanto?

Aluno- 0.4.

Prof- 0.4. Ok. Se fizesse isto o que é que acontecia? A seguir não via praticamente nada, mas percebia que a curva estava aqui assim, só que

> estava tão juntinha ao eixo dos xx que eu não conseguia perceber. Agora tinha duas hipóteses. Ou ia perceber entre que valores variava o y ou utilizava (…) o *zoom box*. E o que me interessa, reparem, é ampliar aqui nesta zona, ali à volta. Então se eu fizer aqui o primeiro canto, aqui assim… (…) E agora já tenho um gráfico que me permite de forma muito razoável perceber que há aqui assim um volume que é máximo e que acontece para um determinado x. (aula 7)

Mas não é só a diversidade de formas disponíveis para alterar a janela de visualização e a sua explicitação junto dos alunos que são valorizadas pela professora. Mais do que conhecer os comandos da calculadora, esta pretende que os alunos compreendam o que foi feito e as razões por que foi feito, para que no futuro sejam capazes de lidar sozinhos com uma situação semelhante. Opta assim por abordar a procura de uma boa janela de visualização como um processo, em que ponderando a situação e utilizando as funcionalidades disponibilizadas pela calculadora, se vai progressivamente alterando a janela até se encontrar uma que possa ser considerada satisfatória. E esta é uma opção consciente de Teresa:

> P - Eh pá, porque é assim, eu acho que se a gente faz logo bem, eles depois da próxima vez sentem outra vez dificuldades, não é?
>
> I - Portanto é uma forma de lhes mostrares, digamos, o processo?
>
> P - É uma forma. (…) Poderá haver situações em que eu percebo logo qual é a janela óptima, mas se não perceber, tenho que sentir que tenho alguns meios de a ir procurando. E foi um bocadinho isso que eu procurei fazer. (…) Porque se não, se eu fizer ali, se fizer logo certo, eles nem percebem que há alguma dificuldade. Não conseguiram, mas pronto, era aquela e ponto final. (pós-aula 7)

Dobrando o canto da folha

Nesta tarefa é pedido para dobrar uma folha de modo a que o canto superior esquerdo toque no lado inferior (ver figura 1), sendo perguntado qual o triângulo de maior área que a dobragem faz surgir no canto inferior esquerdo da folha.

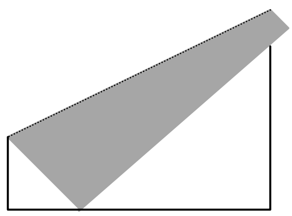


Figura 1. Dobragem da folha de papel

Os alunos trabalham em pares e começam por fazer várias dobragens e respectivas medições para obter um conjunto de dados que lhes permita encontrar uma função que se adeqúe aos dados e, posteriormente, responder ao problema.

No decorrer da tarefa os alunos são confrontados com um conjunto de dados que sugere uma função quadrática, quando a função correspondente é afinal uma cúbica. Os alunos apercebem-se que a função quadrática não se adequa perfeitamente aos dados que recolheram, mas quando pensam em funções alternativas são guiados pela visualização dos dados e consideram uma função quártica:

> Aluno- Oh stora, nós aqui experimentámos uma quadrática (…) porque os pontos ficam assim… em forma de parábola, mas isto não fica mesmo…
>
> Prof- Sim, não passa mesmo por todos os pontos. E então?
>
> Aluno- Pode ficar assim?
>
> Prof- Então o que é que isso quer dizer? Nós estamos a trabalhar com dados experimentais, portanto ou vocês não foram muito exactos nas medições, e há sempre um erro nas medições que fazemos, ou essa não é a função que melhor se adequa aos vossos dados. Experimentaram outra função?
>
> Aluno- Sim, experimentámos esta, a quártica.
>
> Prof- A quártica, e então? O que aconteceu?
>
> Aluno- É melhor aqui no início, mas depois também não passa pelos pontos.
>
> Prof- Certo. E experimentaram outras funções?
>
> Aluno- Não, só vimos estas (…) como os pontos são assim… (o aluno aponta a forma em U da distribuição dos pontos), estas vão ser as melhores. A menos que seja de grau 6… é? (aula 12)

A maioria dos alunos procurou a função que melhor se adequava aos dados entre as funções polinomiais do 2.º e do 4.º grau. Apenas consideraram uma função polinomial do 3.º grau os alunos que simplesmente optaram por experimentar todos os tipos de funções disponibilizados pela calculadora para então escolher a que mais se adequava:

> Prof- Então e vocês, a que conclusão chegaram?
>
> Aluno- Nós achamos que é esta a função…
>
> Prof- Uma cúbica. E porque é que escolheram essa função?
>
> Aluno- Então, começámos por ver a quadrática porque achámos que era, mas não passava bem nos pontos todos. E então fomos experimentando as que vêm aqui na calculadora e esta é a que dá melhor… passa em todos. (aula 12)

A discussão da tarefa, realizada na aula seguinte, parte do trabalho realizado pelos alunos. São apresentadas as funções escolhidas por alguns dos pares de alunos e a respectiva representação gráfica em conjunto com os dados recolhidos. As primeiras apresentações são de funções polinomiais do 2.º e 4.º graus, pois são essas as respostas dominantes na sala. A professora tem que insistir, perguntando por algo diferente, para que surja a referência à função do 3.º grau. Perante a forma obviamente melhor como esta função se adequa aos dados, a professora aproveita para realçar alguns aspectos relativos à janela de visualização e aos casos em que esta não nos mostra uma imagem global do gráfico:

> A maioria olhou para estes pontos e achou que se tratava de uma função quadrática, mas vocês não podem concluir isso assim. Vocês tem que ter presente que só estão a ver o gráfico numa janela e que aquilo que vêem não vos diz nada sobre o que não vêem, ou seja, sobre o gráfico que está fora da janela. (…) Quando eu introduzo um polinómio do 2.º grau na máquina e peço o gráfico, eu sei que vai ser uma parábola porque eu conheço estas funções, porque a Matemática me permite saber isso (…) mas ao ver uma representação gráfica com a forma de um U, sem mais informação eu não posso concluir que aquela função é uma quadrática… porque o gráfico pode inverter a concavidade fora da minha janela… eu não sei… (aula 13)

A professora faz assim uma análise da importância da janela de visualização e de como uma visão parcial do gráfico nos pode levar facilmente a conclusões erradas.

Análise e discussão dos resultados

Teresa está ciente que são várias as dificuldades que a escolha de uma janela de visualização adequada tende a originar nos alunos. Como tal, a professora tem a preocupação de fazer uma introdução progressiva à questão. As primeiras tarefas que coloca não são muito exigentes em termos de encontrar uma janela de visualização adequada, como é o caso da tarefa "Função quadrática", onde o trabalho podia ser todo realizado na janela *standard*, pelo menos se os alunos não optassem por atribuir valores grandes aos parâmetros que considerassem. Posteriormente, opta por dar directamente a indicação da janela de visualização a considerar, como sucede na tarefa "No eixo da parábola". Com esta opção Teresa pretendia minimizar as dificuldades dos alunos numa fase inicial da utilização da calculadora e também reduzir o tempo dispendido em aspectos para além daqueles onde pretendia colocar o foco da tarefa. Só mais tarde vão então surgindo situações onde efectivamente é necessário ponderar a janela de visualização a considerar, como na tarefa "A caixa".

São ainda consideradas as dificuldades associadas ao facto do aspecto do gráfico que se vê numa determinada janela poder ser muito diferente daquele que efectivamente é o gráfico global da função. E a professora procura abordar esta questão na tarefa "Dobrando o canto da folha", numa fase em que já foi realizado bastante trabalho em torno da janela de visualização.

Conclusão

A professora participante nesta investigação reconhece claramente as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação com a janela de visualização, tal como referido por autores como Cavanagh (2006) e Rocha (2002). Parece ainda ciente da importância e delicadeza da forma e momento em que o contacto com essas dificuldades deve ocorrer, em consonância com as ideias preconizadas por Cavanagh e Mitchelmore (2003).

Uma análise às práticas da professora permite identificar algumas estratégias adoptadas por esta e potencialmente facilitadoras do desenvolvimento da compreensão dos alunos relativamente à janela de visualização e ao seu impacto sobre o gráfico visualizado no ecrã da máquina. Assim, a ponderação que faz das dificuldades usualmente sentidas pelos alunos levam-na a optar por evitar o contacto com situações complexas, numa fase inicial, colocando aos alunos situações simples ou optando por indicar explicitamente a janela de visualização a considerar. Mais tarde, ao confrontar os alunos com situações onde é necessário proceder a alterações da janela, procura apresentar o processo, não se limitando a mostrar uma boa janela, sugerindo diferentes vias possíveis e discutindo o mérito de cada uma em função das circunstâncias. Quando os alunos já vivenciaram algumas experiências de alteração da janela de visualização inclui também situações que englobam o trabalho em torno de vistas parciais ou incompletas de gráficos, discutindo-as cuidadosamente.

Os resultados deste estudo apontam pois para a importância do professor e para a complexidade do seu papel na gestão curricular que protagoniza e na forma como esta promove a abordagem à janela de visualização.

Referências bibliográficas

Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, XVIII (1 e 2), 87-118.

Boers, M., & Jones, P. (1994). Is calculus made easier with the graphics calculator?. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 65-72). Adelaide: AAMT.

Bosley, J., Hong, Y., Santos, A., & Thomas, M. (2007). Calculators in the Mathemastics classroom: a longitudinal study. In W-C. Yang, T. Alwis & J-C. Chuan (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 37-47). Taipei: ATCM.

Cavanagh, M. (2006). Enhancing teachers' knowledge of students' thinking: the case of graphics calculator graphs. In P. Jeffery (Ed.), *Creative dissent, constructive solutions*. Parramatta, NSW: AARE.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2000). Graphics calculators in mathematics learning: studies of student and teacher understanding. In M. Thomas (Ed.), *Proceedings of TIME 2000: an International Conference on Technology in Mathematics Education* (pp. 112-119). Auckland, NZ: TIME.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.

Consciência, M. (2008). Calculadoras gráficas: alguns aspectos técnicos a ter em conta na sua utilização. In A. Canavarro, D. Moreira & M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 250-265). Lisboa: SEM-SPCE.

Dick, T. (1992). Super calculators: implications for calculus curriculum, instruction, and assessment. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 145-157). Reston, Va.: NCTM.

Doer, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.

Hector, J. (1992). Graphical insight into elementary functions. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 131-137). Reston, Va.: NCTM.

Hodges, A., & Kissane, B. (1994). Learning about functions and graphs using a graphics calculator. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 39-48). Adelaide: AAMT.

Kastberg, S., & Leatham, K. (2005). Research on graphing calculators at the secondary level: implications for mathematics teacher education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5(1), 25-37.

Kissane, B. (2003). A model for professional development for graphics calculator use. In A. Rogerson (Ed.), *The humanistic renaissance in mathematics education: Proceedings of the International Conference* (pp. 191-199). Palermo, Sicily: The Mathematics Education into the 21st Century Project.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Colecção Teses. Lisboa: APM.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, XI (2), 3-28.

Rocha, H. (2012). *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: estudo sobre as práticas curriculares de professores do ensino secundário*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. In A. Bishop *et al*. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 435-468). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ward, R. (2000). *Observing high school student's strategies and misconceptions as they use graphing calculators*. Acedido em Outubro 21, 2000, em: http://www.calpoly.edu/~raward/nctm.html. [Texto online]

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor

Marisa Quaresma[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mq@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação analisa a diversidade de ações que o professor empreende nos momentos de discussão coletiva, em aulas de natureza exploratória em que os alunos são chamados a usar estratégias próprias para resolver as tarefas propostas. A investigação é qualitativa e interpretativa, sendo os dados recolhidos por observação participante, com videogravação e transcrição das aulas observadas. Os participantes são uma professora do 6.º ano e os respetivos alunos. Os resultados mostram que a professora tem de tomar muitas decisões em relação às situações problemáticas que surgem, com especial atenção à interpretação dos enunciados e dos raciocínios e explicações dos alunos. Mostram ainda que a abordagem seguida nas aulas favorece o surgimento de desacordos e a formulação de generalizações e justificações por parte dos alunos, aspetos essenciais do raciocínio matemático.*

Palavras-chave: Discussões matemáticas; Comunicação; Raciocínio; Prática profissional; Números racionais.

Introdução

No ensino da Matemática, a abordagem exploratória pretende proporcionar aos alunos a oportunidade de enfrentarem situações para as quais não possuem um método imediato de resolução, levando-os a construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. Os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação dada e na conceção e concretização de estratégias de resolução que devem depois saber apresentar e justificar. Este tipo de ensino encontra o seu fundamento na distinção fundamental teorizada por Christiansen e Walther (1986) entre tarefa (o objetivo a alcançar) e atividade (o trabalho a fazer para concretizar esse objetivo). Daqui decorre naturalmente a organização do trabalho na aula de Matemática em três grandes fases (ver Ponte, 2005): (i) apresentação e interpretação da tarefa; (ii) realização da tarefa; e (iii) apresentação e discussão dos resultados e síntese final.

Neste estudo, centramos a nossa atenção no momento de discussão, no qual os alunos apresentam e justificam as suas resoluções e questionam, de forma argumentada, as resoluções dos colegas. O nosso objetivo não é estabelecer um quadro normativo, dizendo o que o professor “deve” fazer, mas sim analisar os fenómenos que têm lugar neste momento da aula, de modo a compreender as situações que ocorrem e as ações que o professor pode desenvolver perante essas situações. Neste tipo de trabalho é muito grande a diversidade de situações que podem surgir em função do nível etário dos alunos, da sua capacidade matemática, da cultura da sala de aula, dos tópicos matemáticos em estudo. Para além disso é preciso ter ainda em atenção a influência de outros fatores como as preocupações com a avaliação (tanto de alunos como de professores), as determinações da escola e do coletivo de docentes sobre a gestão curricular, os manuais escolares e outros recursos disponíveis, as condições físicas da sala de aula, etc. Deste modo, não procuramos estabelecer normas gerais abstratas, supostamente válidas para todas as situações. O nosso estudo tem um cunho essencialmente analítico, tendo em vista construir um quadro conceptual que possa ser útil na análise de situações de discussão conduzidas no quadro de uma abordagem exploratória. Nesta comunicação, especificamente, procuramos analisar a diversidade de ações que o professor é chamado a empreender nos momentos de discussão coletiva.

A dinâmica dos momentos de discussão matemática na sala de aula

Na aula de Matemática, as tarefas propostas são um ponto de partida fundamental para a aprendizagem dos alunos. Numa tarefa em que apenas está em causa a seleção e aplicação de um método de resolução já conhecido dos alunos, as questões que se colocam são sobretudo a identificação e execução desse método. Em contrapartida, uma tarefa com caraterísticas desafiantes propicia uma diversidade de estratégias que podem ser comparadas e avaliadas, originando discussões interessantes. Outro aspeto que marca decisivamente as oportunidades de aprendizagem é a comunicação que se estabelece (Bishop & Goffree, 1986; Franke, Kazemi & Battey, 2007). Os momentos de discussão coletiva são uma forma particular dessa comunicação que vem merecendo o interesse crescente da investigação em Didática da Matemática.

Cabe ao professor preparar o momento de discussão, aproveitando o melhor possível o trabalho realizado pelos alunos e o tempo de aula disponível. Para o efeito, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) destacam a importância do professor antecipar o modo como os alunos podem pensar, monitorizar o seu trabalho, recolhendo a informação necessária, selecionar os aspetos a salientar durante a discussão e sequenciar as suas intervenções e, já durante a discussão, estabelecer conexões entre as diversas resoluções. Uma preparação feita nestas condições é um apoio importante à condução da discussão, mas esta envolve muitos aspetos para além do estabelecimento de conexões, que não podem ser previstos numa etapa prévia, que o professor tem de estar preparado para enfrentar e que, como mostra Sherin (2002), envolve a necessidade de equilibrar aspetos relativos aos conhecimentos matemáticos, o que requer a filtragem de ideias, focando a atenção dos alunos nas ideias fundamentais e, também, a atenção frequente a aspetos dos processos matemáticos.

Procurando identificar situações de discussão especialmente produtivas, tanto McCrone (2005) como Potari e Jaworski (2002) chamam a atenção para os momentos em que o professor desafia matematicamente os alunos. Wood (1999) sublinha as potencialidades da exploração de desacordos entre alunos, procurando que eles justifiquem as suas posições e encorajando os restantes alunos a associarem-se à discussão. Fraivillig, Murphy e Fuson (1999) e, posteriormente, Cengiz, Kline e Grant (2011) desenvolveram um quadro de análise para as ações do professor na condução de discussões matemáticas que distingue três tipos de ações fundamentais, visando levar os alunos a apresentar os seus métodos (*eliciting actions*), apoiar a sua compreensão concetual (*supporting actions*) e alargar ou aprofundar o seu pensamento (*extending actions*).

Pelo seu lado, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (em publicação) desenvolveram um quadro de análise que pressupõe que o professor realiza ações diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e ações que têm a ver com a gestão da aprendizagem (Figura 1). Centrando a sua atenção nas ações relacionadas com os aspetos matemáticos, assinalam que as ações de *convidar* servem para iniciar uma discussão e as ações de *apoiar/guiar* permitem conduzir os alunos na resolução de uma tarefa através de perguntas ou observações que apontam, de forma implícita, o caminho a seguir. Nas ações de *informar/sugerir* o professor introduz informação, apresenta argumentos ou valida respostas dos alunos. Finalmente, nas ações de *desafiar* procura que os alunos assumam esse papel, seja na produção de novas representações, na interpretação de um enunciado, no estabelecimento de conexões, ou no estabelecimento de um raciocínio ou de uma avaliação. Em qualquer destas ações reconhecem-se aspetos fundamentais de processos matemáticos como representar (na mesma linguagem ou noutra representação), interpretar (incluindo o estabelecimento de conexões), raciocinar (incluindo fazer conjeturas e apresentar justificações) e avaliar (fazendo julgamentos gerais sobre o valor de um conceito, uma representação, uma resolução de uma tarefa).

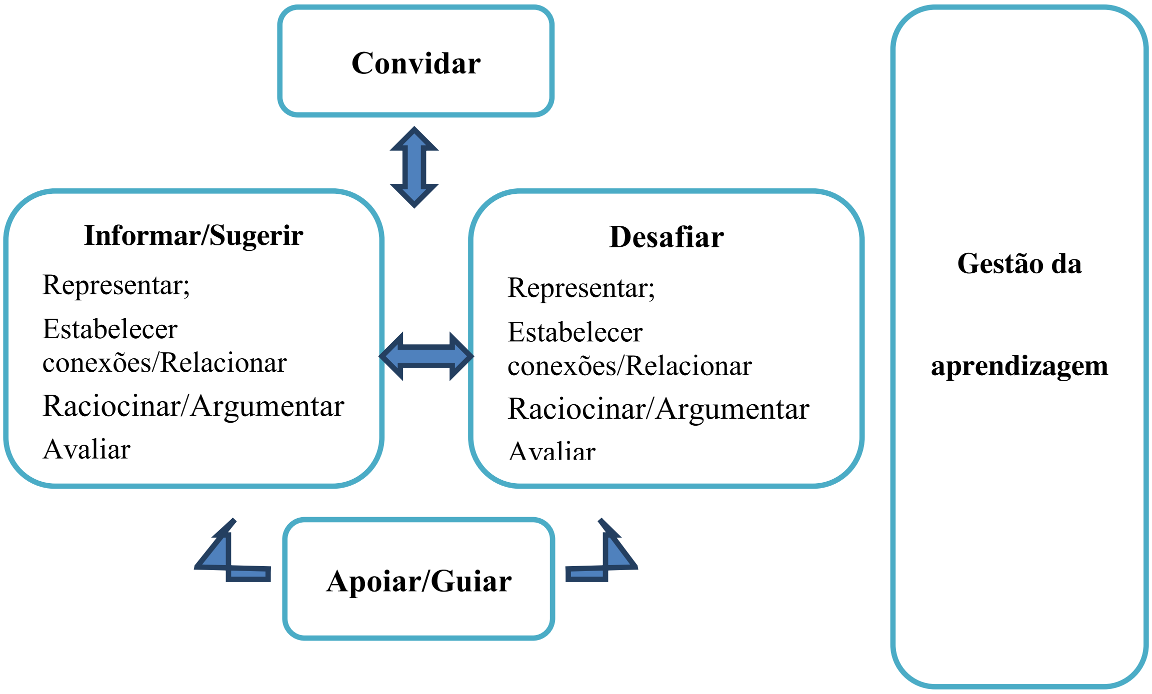


Figura 1. Quadro de análise para as ações do professor.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) uma vez que pretendemos estudar as ações do professor tendo em conta o significado que este lhes atribui. Usámos observação participante (Jorgensen, 1989), metodologia que permite uma relação próxima do investigador com o objeto de estudo no seu contexto natural – os momentos de discussão coletiva das tarefas realizadas na aula.

O estudo decorreu nas aulas de uma professora do 2.º ciclo, com 6 anos de experiência, empenhada em pôr em prática aulas de natureza exploratória (primeira autora desta comunicação). Participam também os alunos de uma turma do 6.º ano de uma escola básica rural do ensino público (escola TEIP) a 50 km de Lisboa. Os pais dos alunos, em geral, são de classe baixa ou média-baixa com habilitações que não vão além do 2.º ou 3.º ciclo. A turma tem 19 alunos, dos quais 4 já reprovaram em anos anteriores, e revela reduzido empenho e poucos hábitos de trabalho.

O estudo envolve cinco aulas de 90 minutos, onde foram realizadas diversas tarefas apresentadas em três fichas de trabalho. A primeira ficha inclui questões de comparação, ordenação, adição e subtração de números racionais, a segunda visa introduzir a multiplicação de um número natural por uma fração e a multiplicação de duas frações e a terceira pretende desenvolver a noção de operador no contexto da resolução de problemas. Durante uma parte de cada uma das aulas os alunos trabalharam a pares e a professora acompanhou o trabalho dos alunos, tirando possíveis dúvidas ou desbloqueando alguns impasses. Na outra parte realizou-se uma discussão coletiva, num registo de comunicação dialógica (Ponte, 2005).

As aulas foram registadas em vídeo, sendo as discussões coletivas integralmente transcritas. A análise dos dados começou por identificar os segmentos na discussão da resolução de cada tarefa, codificando as ações do professor de acordo com as categorias apresentadas na Figura 1. De seguida, procurámos estabelecer relações entre estas ações e eventos marcantes no que respeita a interpretações, representações e raciocínio (generalizações e justificações) realizados pelos alunos. Para esta comunicação, selecionámos dois episódios onde se evidenciam vários aspetos destas relações.

Episódio 1 – Desigualdade verdadeira?

O primeiro episódio decorre durante a realização de uma tarefa (Figura 2) que solicita aos alunos que avaliem a validade de uma afirmação onde se comparam duas frações, sendo os dados apresentados e pedidos em forma de fração e o contexto puramente matemático. Destacamos neste episódio três segmentos.

Tarefa. $\frac{2}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ é maior do que $\frac{3}{4}$. Será que podemos fazer a seguinte afirmação: "Se quisermos comparar duas frações e verificarmos que uma delas tem o numerador e o denominador maiores do que a outra, podemos logo concluir que essa é a fração maior"? Justifica a tua resposta.

Figura 2. Tarefa de comparação de frações.

Apresentada a tarefa, os alunos apresentam dificuldade em compreender o que se pretende, pelo que a professora sente necessidade de promover a interpretação coletiva do enunciado e de procurar ajudar os alunos a encontrar uma estratégia de resolução:

Professora: Os dois casos são verdadeiros. E, a seguir o que eles, o que está aí é… OK, isto e isto [$\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$ e $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$] é verdade. Eu posso dizer que sempre que o numerador e o denominador de uma fração forem maiores que o numerador e o denominador de outra fração, então esta (4/5), que tem o numerador e o denominador maiores, é sempre maior que a segunda [fração]? Isto acontece sempre?

Um aluno: Não…

Professora: Como é que vocês podem tentar perceber se acontece sempre ou não?

Daniel: Fazendo mais frações…

Professora: Encontrando outros exemplos, não é… Pode ser uma… Uma boa sugestão do Daniel, não sei (…).

A professora começa por recordar os aspetos principais do enunciado (“isto e isto é verdade”…) para depois fazer uma afirmação de natureza mais geral (“sempre que o numerador e o denominador de uma fração forem maiores…”). Os alunos conseguem perceber que $\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$ e que $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ mas têm dificuldade em saber o que podem fazer para saber se outras afirmações são corretas ou não. A pergunta de inquirição da professora (“Como é que vocês podem tentar perceber se acontece sempre ou não?”) é bem-sucedida, levando Daniel a sugerir uma estratégia prometedora (“fazendo mais frações”), que a professora apoia, ao mesmo tempo que aproveita para a redizer em termos formalmente mais apropriados (verificando “outros exemplos”).

Assim, neste segmento, a primeira intervenção da professora ajuda os alunos na interpretação do enunciado e é da esfera do guiar, a pergunta de inquirição do desafiar e a intervenção final do sugerir. A tónica da sua intervenção está no raciocinar, pois procura-se saber se uma dada afirmação é ou não matematicamente válida.

Um aluno, Guilherme, na sua resolução, identifica um contraexemplo para a afirmação em causa, identificando diversas frações que estão nas condições dadas (2/4, 3/5 e 3/16) mas para as quais não se verifica a desigualdade. Para comparar estas frações transforma-as em percentagem, a professora considera interessante pôr esta estratégia à consideração de toda a turma. Como vários alunos mostram dificuldade em perceber esta resolução, a professora leva-os a comparar a representação usada por Guilherme (percentagem) e a representação usada pelos restantes colegas (numeral decimal):

Professora: Então o Guilherme encontrou lá em casa uma forma de transformar as frações em percentagens e… descobriu que $\frac{2}{4}$ é 50%, certo? E o que é que vocês descobriram sobre $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ era quanto? Alguns de vocês descobriram… transformaram a fração em decimal…

Jaime: Era 0,5.

Professora: Ah… era 0,5. Então e 0,5 em percentagem é…

Guilherme: É 50%.

Professora: Ah, é 50%. Ah, então quer dizer que ele chegou à mesma conclusão do que vocês mas com uma representação diferente, e o que é que… vocês se calhar não pensaram no $\frac{3}{5}$ e no $\frac{3}{16}$, mas se pensarem vão perceber que é exatamente a mesma coisa. Portanto, o Guilherme gosta mais de trabalhar com as percentagens, sente-se melhor com as percentagens do que com os números decimais e então fez este esquema, para comparar, não é? Ele fez estas, ele fez este esquema para comparar as várias frações. Então, descobriu que $\frac{2}{4}$ é 50%; $\frac{3}{5}$ é 60% e $\frac{3}{16}$ é 18,75%… Porque é que tu fizeste isto Guilherme?

A professora promove o estabelecimento da relação entre a representação usada por Guilherme e pelos restantes colegas, com a pergunta final e tenta guiar o aluno, apoiando-o na explicação da sua resolução.

Assim, neste segmento a professora pede a um aluno que apresente aos colegas a sua resolução, que se revestia de assinalável originalidade, mas confronta-se com o problema do aluno manifestar grande dificuldade em explicar o seu raciocínio. Ao longo do segmento a atuação da professora alterna entre o guiar e o sugerir. A tónica das suas intervenções está no interpretar, redizendo afirmações do aluno de modo mais compreensível e mais correto, de forma a proporcionar uma interpretação e compreensão por parte dos restantes alunos da turma.

Mais adiante, a professora convida dois alunos, Edgar e Juliana, a apresentarem à turma a sua resolução, onde mostram dois contraexemplos para a afirmação proposta na forma de fração e que considera bastante interessantes. Assim, começa por pedir a Edgar que explique oralmente a sua resolução, o que se revela insuficiente dada a dificuldade de comunicação evidenciada pelo aluno. De seguida pede-lhe que escreva os seus exemplos no quadro para que os restantes colegas possam perceber melhor (Figura 3).

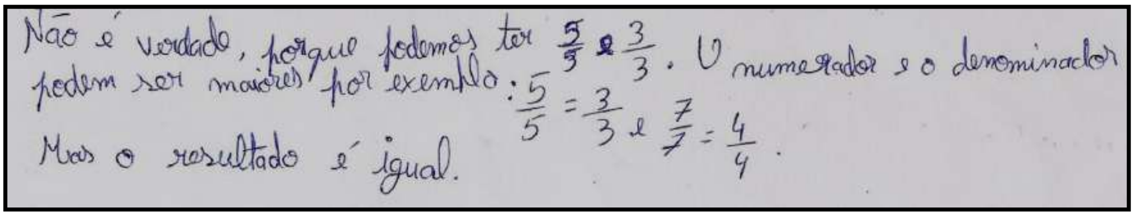

Não é verdade, porque podemos ter $\frac{5}{5}$ e $\frac{3}{3}$. O numerador e o denominador podem ser maiores por exemplo: $\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$ e $\frac{7}{7} = \frac{4}{4}$.
Mas o resultado é igual.

Figura 3. Resposta de Edgar e Juliana.

A professora pede então ao aluno que explique a sua resolução:

Professora: … Vá lá… Então? Edgar, o que é que isso significa?

Edgar: São os dois (as duas frações) 1.

Edgar e Juliana encontraram dois casos de pares de frações que satisfazem a condição dada e para os quais a desigualdade não se verifica. Tal como Guilherme, estes alunos também recorrem a exemplos concretos para avaliar a afirmação. A professora desafia então Edgar a comparar a sua resolução com a do colega:

Professora: Tu encontraste, fizeste mais ou menos a mesma coisa que o Guilherme, foi isso?

Edgar: Foi mais ou menos isso. O numerador e o denominador $\left(\frac{5}{5}\right)$ são maiores do que aquele $\left(\frac{3}{3}\right)$.

Edgar indica que encontrou um par de frações nas condições do problema dando a entender que se trata de um contraexemplo para a afirmação. Parece considerar que a comparação pedida pela professora se limita a saber se a sua resposta coincide com a de Guilherme.

A professora desafia Edgar a comparar a sua resolução com a do colega mas a resposta do aluno não traz nenhum elemento novo para a discussão. A professora procura então apoiar o aluno na continuação da sua explicação:

Professora: Explica lá Edgar, então como é que chegaste a essa conclusão? Que informação é que tens dos exemplos que foram dados? OK. Os exemplos que foram dados diziam… Sempre que o numerador e o denominador são maiores, então essa fração é maior que a outra e tu descobriste o quê? Que é verdade ou que não é verdade?

Edgar: Não é verdade.

Como o aluno usa uma resposta muito breve e não a justifica, a professora desafia-o a apresentar uma justificação para a sua afirmação.

Professora: Porquê?

Edgar: Porque… O resultado desta é maior e o numerador e o denominador são maiores… Ai. Sim!

Professora: O resultado não é maior, o resultado é igual. Apesar de ter…

Edgar: Ah, entre estas duas…

Professora: Entre essas duas, apesar de [serem] maiores os termos na primeira fração do que na segunda, o resultado é…

Edgar: Igual.

Edgar mostra dificuldade em utilizar a linguagem matemática das frações e acaba por se confundir a si próprio. A professora procura apoiá-lo a interpretar a sua própria resolução verificando que apresentou frações nas condições do enunciado e que não verificam a condição de desigualdade (mas sim a igualdade).

Finalmente, perante a conclusão do aluno, a professora incentiva-o a refletir sobre o significado e o alcance da sua conclusão:

> *Professora*: Igual, pronto, então, é um exemplo que contraria aquilo que está escrito no, no enunciado. É suficiente para ti, para dizeres que então é mentira aquilo que lá está escrito?
>
> *Edgar*: Posso… Tenho outras aqui…
>
> *Professora*: Então faz… Tens outras?
>
> *Edgar*: Iguais…
>
> *Professora*: Ah, mas são iguais a essa?
>
> *Edgar*: É 7 e 7 é igual a…
>
> *Professora*: Pronto, então a ideia é a mesma… OK. Certo.

Ainda que não verbalize uma justificação matematicamente válida, Edgar manifesta compreender que basta um contraexemplo para refutar uma afirmação ao dizer que os outros exemplos atestam a mesma coisa ("são iguais") e, por isso, não é necessário escrevê-los também. Apesar de no enunciado surgir uma fração maior do que a outra, Juliana e Edgar apresentam um contraexemplo onde as frações são iguais, o que a professora considera surpreendente.

Neste segmento a professora desafia Edgar a apresentar uma justificação para a sua afirmação e, mais adiante, quando o incentiva a refletir sobre o significado da sua conclusão. Pelo meio, para levar o aluno a explicar oralmente o seu raciocínio, realiza diversas ações da esfera do guiar e do sugerir, procurando estabelecer as bases mínimas para a discussão e assim criar as condições para que os restantes alunos cheguem à conclusão pretendida. Embora incluindo aspetos de representar e interpretar, a tónica principal deste segmento está no raciocinar, nomeadamente quando mostra exemplos que invalidam a afirmação dada.

Episódio 2 – Frações equivalentes

Este episódio tem lugar durante a realização de uma tarefa (Figura 4) em que, dada uma certa grandeza, se pede o valor correspondente a sete repetições. A situação é contextualizada, os dados são apresentados em forma de fração e não são fornecidas indicações sobre a representação a usar na resposta. Embora os alunos não tenham aprendido ainda a multiplicar um número inteiro por uma fração, espera-se que possam resolver a tarefa através de adições sucessivas ou por outra estratégia.

Tarefa. Na turma do 6.º A da escola Vasto Horizonte, a professora colocou o seguinte problema: "Todos os dias de manhã, a Raquel bebe $\frac{1}{4}$ de litro de leite. Que quantidade de leite bebe ao fim de uma semana?" Resolve tu também o problema e justifica a tua resposta.

Figura 4. Tarefa envolvendo frações equivalentes.

Duas alunas resolveram a tarefa encarando-a como uma adição sucessiva de sete frações iguais. No entanto, no decurso da sua resolução indicaram erradamente $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ como sendo $\frac{2}{8}$. A professora decidiu então lançar uma discussão sobre quanto seria $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Os alunos foram indicando diversas respostas, umas corretas, como $\frac{2}{4}$ e 0,50, outras incorretas como $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{8}$. Para distinguir as respostas corretas e incorretas, a professora recorre a uma representação pictórica (um retângulo dividido em partes iguais). A certa altura, Daniel, que já antes tinha apresentado uma resposta para a questão $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ como numeral decimal, (0,50), sugere agora uma nova resposta, usando uma fração, $\frac{8}{4}$, que logo emenda para $\frac{4}{8}$. A professora percebe que o aluno está a pensar em frações equivalentes a $\frac{2}{4}$ e pede-lhe uma justificação:

Daniel: Professora, eu tenho uma hipótese… Outra… $\frac{8}{4}$! Não sei como hei de dizer, é… $\frac{4}{8}$.

Professora: É $\frac{4}{8}$… exatamente, $\frac{4}{8}$ seria, seria também uma resposta. Porquê? Porque $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$? (…)

Guilherme: Porque é 0,50.

Professora: $\frac{2}{4}$, se eu tiver $\frac{2}{4}$… $\frac{1}{4}$ e mais $\frac{1}{4}$, eu tenho $\frac{1}{2}$… ou não?

Guilherme: Sim!

Professora: Então… $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, eu posso dizer $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{2}{4}$ e é igual a $\frac{1}{2}$…?

Perante esta resposta de Daniel, a professora decide recordar as frações equivalentes sugerindo a relação existente entre $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$.

Impulsionado pela descoberta do colega e pela sugestão da professora, outro aluno, Edgar sugere uma outra fração equivalente, tendo por base uma generalização feita na aula anterior. Tem lugar o seguinte diálogo:

Edgar: Oh professora, eu sei outra…

Professora: Hum…

Edgar: 8 a dividir por 16 dá!

Professora: Também dá… (…) $\frac{8}{16}$ também dá… Sim senhor… Mais algum que também dá?

Neste ponto a professora recorda que dois alunos (Juliana e Edgar), na última aula, também tinham feito uma descoberta interessante relacionada com esta questão e incentiva-os a enunciá-la. Juliana corresponde, enunciando a generalização:

Juliana: Um número a dividir pelo seu dobro vai dar sempre a metade.

Professora: Um número a dividir pelo seu dobro vai dar sempre…

Guilherme: Vai dar sempre $\frac{1}{2}$.

Professora: Vai dar sempre a metade…

A professora desafia então os alunos a darem mais frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, ao que estes correspondem com entusiasmo:

Professora: Sim senhora… Não, mas isto assim está bem encaminhado… $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ que é igual a $\frac{8}{16}$… E já agora quero mais uma!

Rui: Então e agora 16 a dividir por 32…

Professora: Dezasseis, trinta e dois avos. Eu já agora quero mais outra…

Alunos: 32 por 64.

Professora: Ah… sim senhor, trinta e dois, sessenta e quatro avos. Mais outra…?

Alunos: 64 e 128…

Professora: 64 e…?

Alunos: 128.

Professora: 128… avos!

Os restantes alunos da turma juntam-se à discussão sugerindo também novas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$. Por sua vez, a professora apoia este entusiamo dos alunos e vai redizendo as suas sugestões usando a linguagem correta das frações, ao mesmo tempo que os desafia a encontrarem outras frações que satisfaçam a condição em causa.

Neste episódio muitos alunos mostram não se recordar dos procedimentos para somar duas frações com o mesmo denominador. A professora desafia-os sistematicamente a apresentarem diversas respostas para as questões que coloca, fazendo com que surjam situações de desacordo, que procura usar para levar os alunos a argumentarem e justificarem as suas sugestões. Tendo compreendido que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ e levado pelo incentivo a apresentar outras respostas, um aluno sugere $\frac{4}{8}$ como solução possível e logo de seguida outro indica $\frac{8}{16}$. Os alunos, motivados pelo sucessivo questionamento e desafio da professora, continuam a sugerir novas respostas, usando desta vez frações equivalentes, que relacionam com uma generalização formulada por dois alunos numa aula anterior. As ações da professora mais marcantes são as de desafiar, embora se reconheça ações de convidar, apoiar/guiar e até informar/sugerir. Num primeiro momento, a professora procura levar os alunos a compreender a regra para adicionar duas frações unitárias, usando para o efeito uma representação pictórica, após o que conduz um questionamento orientado para o raciocínio, com o estabelecimento e uso de uma generalização para produzir frações equivalentes.

Conclusão

Nestes dois episódios reconhece-se uma diversidade de ações por parte da professora em momentos de discussão coletiva em que passa em revista o trabalho realizado pelos alunos sobre o qual se documentou na fase em que estes resolviam a tarefa a pares (tal como, de resto sugerem Stein et al., 2008). No primeiro episódio a professora procura que os alunos que resolveram corretamente uma questão de raciocínio a expliquem aos colegas, o que se revela uma tarefa muito mais complicada que o previsto, dada a dificuldade dos alunos em explicar oralmente o seu raciocínio. Para isso a professora usa sobretudo ações de guiar e sugerir, embora sem revelar a resolução completa. Procura, assim, tornar presentes à generalidade dos alunos da turma os elementos necessários para que possam concluir da falsidade da afirmação, apoiando-se em contraexemplos. No segundo episódio, a professora desafia os alunos a apresentarem mais do que uma resposta para as diversas questões, procurando fazer emergir situações de desacordo. Este incentivo a encontrar mais de uma resposta leva os alunos a produzirem uma sequência de frações equivalentes, que relacionam com uma generalização já formulada por dois alunos numa aula anterior. As ações da professora que se salientam são as de desafiar, sustentadas por ações dos outros tipos. Estes episódios mostram também a interligação entre aspetos de representar e interpretar, bem como a possibilidade de fazer salientar aspetos relacionados com o raciocinar, nomeadamente promovendo a formulação de generalizações e de justificações para as afirmações feitas e as regras usadas.

Os episódios da discussão apresentados incluem muitos momentos em que a professora é chamada a tomar decisões relativamente a situações imprevistas, que se constituem como problemas que ela tem de resolver no decurso da ação. Alguns destes problemas têm a ver com dificuldades dos alunos em compreender o que podem fazer perante a tarefa proposta, ou, de modo mais circunscrito, com passagens específicas de uma ou outra resolução. Outros problemas decorrem de respostas inesperadas dos alunos, uma vezes corretas e outras incorretas. Existem ainda problemas que decorrem da dificuldade dos alunos em explicar o seu raciocínio. Finalmente, outros problemas decorrem da necessidade de gerir, do modo mais produtivo, a variedade das respostas dos alunos. Estes momentos proporcionam diversas oportunidades para interpretação de enunciados e a transformação de representações (Bishop & Goffree, 1986), para aperfeiçoar a linguagem dos alunos redizendo as suas afirmações (Franke, Kazemi & Battey, 2007) para o estabelecimento de desacordos (tal como sugere Wood, 1999), e formulação de generalizações e justificações, aspetos essenciais do raciocínio matemático (Lannin, Ellis & Elliot, 2011). São momentos produtivos de trabalho que decorrem da abordagem exploratória seguida nestas aulas, em que foram propostas tarefas aos alunos que estes não poderiam resolver de uma forma imediata, mas sim recorrendo aos seus conhecimentos anteriores, e onde a comunicação na sala de aula é marcada pelo incentivo à participação dos alunos, num registo essencialmente dialógico.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 355–374.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children’s mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage.

Lannin, J., Ellis, A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111–133.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 351-380.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (em publicação). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Comunicação matemática em contexto de sala de aula: O papel da professora de uma turma do 5º ano de escolaridade*

Olga Seabra[1], *Maria Helena Martinho*[2]
[1]EB 2/3 de Santa Bárbara, olgaseabra2@gmail.com
[2]CIEd - Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt

Resumo. *A presente comunicação tem como objetivo mostrar a importância do papel do professor no desenvolvimento da comunicação numa aula de Matemática. Tendo a convicção de que o desenvolvimento desta capacidade é uma condição necessária ao bom desempenho dos alunos na disciplina, veremos de que forma esta se desenvolve, a partir da interação de uma professora com um grupo de alunos. A consciencialização da importância do desenvolvimento nos alunos da comunicação matemática enquanto capacidade transversal materializa-se no decorrer de cada aula e dos registos escritos que constam do caderno diário dos alunos envolvidos. Neste contexto serão aqui analisadas algumas interações entre alunos e alunos e professor, relevantes para a promoção da comunicação matemática em sala de aula. São também abordados alguns aspetos essenciais diretamente relacionados com esta capacidade, de realçar, a seleção refletida das tarefas, a valorização das produções dos alunos, o incentivo à explicação de estratégias de resolução e gestão do trabalho a desenvolver nos diversos momentos da aula. Este estudo seguiu uma metodologia de estudo de caso, centrado numa professora do 5.º ano de escolaridade e baseando-se na observação direta da interação com uma turma. Com este estudo foi possível concluir que a professora dava uma particular atenção aos momentos de interação em pequeno e grande grupo e que valorizava a colocação de questões procurando não dar respostas aos alunos*.

Palavras-chave: Comunicação, o papel do professor, tarefas.

Introdução

O tema da comunicação matemática tem vindo a ganhar bastante importância no meio escolar, uma vez que a comunicação que acontece na sala de aula de Matemática influencia, de forma marcante, o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina. A comunicação, em particular na componente escrita, conquistou uma posição de maior destaque no ensino da Matemática, aparecendo como um dos objetivos curriculares da disciplina (ME, 2007). Assim, torna-se fundamental compreender como se desenvolve a comunicação no processo de ensino e aprendizagem, especificamente, no que respeita

* Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

ao modo como os professores desenvolvem as capacidades comunicativas nos alunos nas aulas de Matemática.

Com o surgimento do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, reforçou-se o enfoque na comunicação matemática, como uma importante capacidade transversal a toda a aprendizagem da Matemática, juntamente com a Resolução de Problemas e o Raciocínio Matemático, realçando que "os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático" (ME, 2007, p. 5). Nesse sentido, os alunos devem ser capazes de interpretar enunciados apresentados de forma oral ou escrita, expressar ideias usando uma linguagem matemática precisa, descrever e explicar estratégias e processos utilizados nas suas produções, argumentar e discutir argumentações apresentadas por outros (ME, 2007).

Também Wood, Cobb e Yackel (1992) defendem que as diferentes interações em sala de aula estimulam a colaboração entre pares bem como uma posterior discussão em plenário. Estes espaços de interação possibilitam aos alunos o envolvimento numa forma de discurso em que os seus significados pessoais ficam sujeitos ao questionamento dos colegas, havendo, consequentemente, um espaço de negociação dos diferentes significados individuais até se chegar a um acordo. Para Veia (1996), a intervenção do professor durante a discussão pode ajudar a imprimir nos alunos o respeito por saber ouvir os outros, definindo com eles regras de funcionamento, dispensando tempo suficiente para ouvir as suas ideias e encorajando-os a pensar em questões a colocar quando ouvem os seus colegas. Mas para tudo isto se tornar viável, cabe ao professor a tarefa de realizar uma seleção adequada das tarefas a propor aos seus alunos, bem como o ser capaz de gerir os distintos momentos da aula de Matemática.

Assim, no estudo apresentado nesta comunicação, pretende-se mostrar a forma como uma professora procura desenvolver a capacidade de comunicação matemática de um grupo de alunos do 5º ano de escolaridade em atividade na sala de aula de Matemática. A esse grupo foi solicitada a resolução de uma tarefa sobre números naturais inserida no tema Números e Operações.

Na secção seguinte é apresentada uma fundamentação relativa à comunicação matemática, focada essencialmente no papel do professor, bem como à importância da organização de toda a estrutura de uma aula de matemática. Segue-se a indicação da metodologia adotada, a apresentação dos resultados, e por fim, as conclusões.

O papel do professor no desenvolvimento da comunicação

É através da comunicação que as nossas ideias são partilhadas, devendo a forma como as comunicamos ser clara e percetível pelos outros. Entende-se por comunicação matemática todo o processo de comunicação que permite a construção de significado, consolidação das ideias e respetiva divulgação. A comunicação matemática é referida por Brendefur e Frykolm (2000) como de extrema importância na formação de professores, não só para melhor compreensão da forma como os futuros professores comunicam matematicamente, mas também como as suas conceções poderão influenciar todo este processo. Apesar das várias interpretações sobre esta temática, estes autores organizaram os modos de comunicação em sala de aula em quatro categorias, designadamente: unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva. Na comunicação *unidirecional*, o professor domina o diálogo através da leitura, fazendo questões de resposta fechada e dando poucas oportunidades de os alunos expressarem as suas estratégias, ideias e raciocínios. Neste modo de comunicação, frequentemente usada pelo professor de Matemática na sala de aula, este primeiro transmite o conhecimento e interpreta-o e, de seguida, os alunos recebem-no passivamente, ou seja, o professor fala e os alunos ouvem. Na comunicação *contributiva*, o professor centraliza a comunicação entre os alunos e entre o professor e os alunos, mas de uma forma limitada. Tratando-se de uma comunicação orientada que não permite raciocínios profundos, é corretiva por natureza e o trabalho de grupo já revela ser uma das formas de trabalho na resolução de tarefas matemáticas. A comunicação *reflexiva* verifica-se quando os alunos têm como prioridade a intervenção e participação nos debates que surgem na sala de aula, partilhando ideias, estratégias de resolução e soluções com os seus pares e com o professor. O discurso reflexivo nos alunos surge na argumentação e na exposição de ideias perante os seus pares. A comunicação *instrutiva* é considerada como sendo uma comunicação muito poderosa que envolve muito mais do que as interações entre alunos e professores. Com esta comunicação os alunos alteram a sua compreensão matemática de forma construtiva, o professor apercebe-se das suas dificuldades e tem uma melhor perceção do conhecimento matemático que os seus alunos possuem. As atividades matemáticas serão realizadas de forma a explorarem situações que fomentem a comunicação instrutiva uma vez que a mesma é um instrumento poderoso e favorável ao desenvolvimento matemático na sala de aula. Brendefur e Frykolm (2000) ligaram as várias formas de comunicação acima descritas, dando a entender que coexistem e obedecem a uma certa ordem (unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva), sendo obrigatória a passagem por todos os níveis.

Por exemplo, os alunos que comunicam reflexivamente também comunicam de forma unidirecional e de forma construtiva.

O desenvolvimento da capacidade de comunicar, por parte do aluno, é considerado no programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) um objetivo curricular de elevada importância, estando em completa concordância com as duas últimas categorias de comunicação (a reflexiva e a instrutiva) definidas por Brendefur e Frykolm (2000), assim como a criação de oportunidades de comunicação adequadas ao trabalho que se realiza na sala de aula. Mais recentemente, outros autores, Boavida, Silva e Fonseca (2009) reforçam esta mesma ideia, ao considerarem que a valorização da comunicação reflexiva e instrutiva, na implementação do novo programa, provocará mudanças significativas no papel dos alunos e do professor, o que "pressupõe alunos disponíveis e professores ousados, dispostos a aceitar o desafio de trocarem algumas tarefas previsíveis e rotineiras para se lançarem em atividades mais abertas e exigentes" (p. 3). Segundo as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994), "os alunos, habituados a que o professor fale a maior parte do tempo enquanto permanecem passivos, precisam de ser orientados e encorajados de forma a participar ativamente no discurso de uma comunidade cooperante" (p. 37). O professor deve ter um "papel dominante na estruturação do discurso produzido na aula, nomeadamente através das suas perguntas" (Martinho, 2005, p. 2). Ainda referindo as normas profissionais (NCTM, 1994), o desempenho deste papel incide no questionamento aos alunos, ajudando-os a trabalhar em conjunto, a confiarem em si próprios, a verificarem se uma afirmação está matematicamente correta e ajudando-os a raciocinar.

Como é referido no programa (ME, 2007) que esteve em vigor até ao ano letivo 2012/2013, os alunos ao raciocinar matematicamente devem ser capazes de "desenvolver e discutir argumentos matemáticos" (p. 5). Boavida (1999) afirmou que a argumentação é uma forma racional de comunicar, dando ênfase às explicações e justificações apresentadas pelos alunos não menosprezando os desacordos que emergiam das situações criadas e que proporcionavam o desenvolvimento de atividades argumentativas. Refere ainda que o discurso numa aula de Matemática com carácter argumentativo, provoca nos alunos a defesa das suas ideias, o debate e a análise das contribuições dos colegas, a fundamentação e validação de raciocínios com carácter matemático, sendo que podemos encarar a argumentação, essencialmente como, comunicação, diálogo e discussão. Deste modo considera-se que a comunicação matemática e a argumentação matemática estão intimamente ligadas.

As conversas produtivas tão necessárias na aula de Matemática irão promover momentos de discussão, que segundo Ponte (2005), constituem "oportunidades fundamentais para negociação de significados e construção de novo conhecimento" (p. 16). Com a discussão em sala de aula, os alunos têm um papel ativo na sua própria aprendizagem, proporcionando-lhes "oportunidades públicas de falar e jogar com as suas próprias ideias" (Arends, 2008, p. 413), motivando-os a estender esse envolvimento para além da sala de aula. É através da troca de ideias entre os intervenientes dessas conversas (professor e alunos) que se fica a conhecer melhor os referentes de cada um dos intervenientes e as suas ligações com o conhecimento matemático, facto referido por Ponte (2005). Esta direciona os objetivos de ensino na sala de aula para a interação entre os alunos, o professor e o conhecimento matemático, na procura de um sentido comum. O significado do conhecimento matemático é partilhado e assumido pelos intervenientes que aceitam a validade dos exemplos e das conexões apresentadas por estes (Bishop & Goffree, 1986).

As tarefas de investigação são as que melhor permitem compreender a natureza dos processos de pensar matematicamente, ou seja, experimentar, explorar, identificar padrões, formular e testar conjeturas, generalizar e demonstrar. As investigações estimulam o pensamento relacionando conhecimentos matemáticos, permitem o trabalho diferenciado de alunos com diferentes níveis de aprendizagem e promovem o desenvolvimento de atitudes, capacidades e conhecimentos (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999). As tarefas de investigação na sala de aula de Matemática são importantes porque constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência para além de estimular o envolvimento dos alunos fomentando uma aprendizagem significativa. Estas tarefas promovem a discussão, e se desenvolvidas em trabalho cooperativo, são as ideais para fomentar a comunicação e a argumentação nos alunos, estes ao ouvirem os argumentos dos colegas e refletirem sobre eles, aprendem a criticar matematicamente.

As práticas dos professores são caracterizadas, essencialmente, pela comunicação. Estas práticas estão, por vezes, submersas nas visões e nos valores dos professores, mais concretamente, no que se relaciona com o lugar da linguagem e da comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática. A qualidade do trabalho realizado por uma turma, e naturalmente o tipo de linguagem e a qualidade da comunicação, vão estar diretamente relacionadas, com a maneira como o professor planifica e leva a cabo, nomeadamente: as situações de ensino/aprendizagem, o trabalho dos alunos e de como conduz as tarefas que apresenta (Martinho, 2005).

Tendo em conta os seus objetivos, o professor pode: enunciar, decifrar, solicitar, questionar, aconselhar, entre outros. Love e Mason (1995) organizam assim os atos comunicativos orais a cargo ou com participação do professor: (i) o professor diz coisas aos alunos (expor, explicar ou conjecturar); (ii) o professor faz perguntas aos alunos, (iii) os alunos discutem entre si e com o professor. Estas dinâmicas vão ser determinantes para o papel assumido pelo aluno em sala de aula, mais passivo ou mais ativo.

A arte de questionar tem sido bastante usada nas escolas como um meio a que o professor pode recorrer para aumentar e para melhorar a participação dos alunos. São vários os benefícios do questionamento, referidos por alguns investigadores (Ainley, 1988; Menezes, 1996; Vacc, 1993). Segundo Sadker (1982), o ato de questionar faculta ao professor descobrir dificuldades de aprendizagem, ter feedback sobre aprendizagens prévias, motivar o aluno e auxiliá-lo a pensar. As questões, por sua vez, podem produzir a discussão na sala de aula, estimulando o desenvolvimento de capacidades e de atitudes. Para Long (1992), as questões que os professores apresentam e as consequentes respostas dos alunos são interações imprescindíveis na sala de aula, sendo o questionar um versátil e enérgico recurso para estimular a compreensão e fomentar a investigação de novas ideias. Estes serão pontos importantes a ter em conta, pois pretende-se mostrar a forma como uma professora procura desenvolver a capacidade de comunicação matemática de um grupo de alunos do 5º ano de escolaridade em atividade na sala de aula de Matemática.

Metodologia de investigação

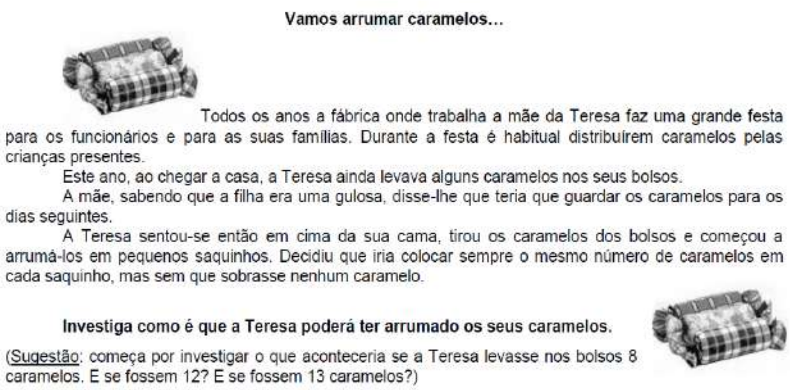
Este estudo seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa, mais especificamente, estudo de caso (Yin, 1994). O estudo tem como objeto uma professora de uma turma do 5º ano de escolaridade com 29 alunos. A escolha da professora prendeu-se com o facto se tratar de uma docente muito dinâmica e se revelar durante os dez anos da sua carreira sempre muito interessada em inovar e melhorar a sua prática letiva, com a realização de inúmeras ações de formação relacionadas com a matemática. Mostrou-se muito recetiva à presença da investigadora na sua sala de aula. Várias tarefas foram desenvolvidas com os alunos ao longo do ano letivo 10/11 relativas aos diferentes temas previstos no programa. Um dos objetivos da professora na seleção dessas tarefas era desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos. A professora da turma, juntamente com a investigadora, primeira autora desta comunicação, discutiam e selecionavam antecipadamente as tarefas. Para esta comunicação, será apenas usada na análise, uma das tarefas realizadas durante o ano letivo.

Para este estudo recolheram-se dados através da observação direta e das produções dos alunos. A *observação direta*, suportada por registo áudio e vídeo, possibilitou presenciar a atividade realizada na aula. As *produções dos alunos* na resolução da tarefa foram utilizadas como complemento da observação da aula.

Trabalho realizado com uma turma de 5º ano de escolaridade do ensino básico

Aula de 18 de janeiro de 2011

É de referir que todos os nomes dos alunos constantes na descrição do desenrolar da aula são fictícios. Os alunos começaram por receber os quadrados de esponja e o enunciado da tarefa (figura 1), sem que esta fosse lida, apenas foi entregue e a partir daí iniciou-se o trabalho.


Vamos arrumar caramelos...

Todos os anos a fábrica onde trabalha a mãe da Teresa faz uma grande festa para os funcionários e para as suas famílias. Durante a festa é habitual distribuírem caramelos pelas crianças presentes.

Este ano, ao chegar a casa, a Teresa ainda levava alguns caramelos nos seus bolsos.

A mãe, sabendo que a filha era uma gulosa, disse-lhe que teria que guardar os caramelos para os dias seguintes.

A Teresa sentou-se então em cima da sua cama, tirou os caramelos dos bolsos e começou a arrumá-los em pequenos saquinhos. Decidiu que iria colocar sempre o mesmo número de caramelos em cada saquinho, mas sem que sobrasse nenhum caramelo.

Investiga como é que a Teresa poderá ter arrumado os seus caramelos.

(Sugestão: começa por investigar o que aconteceria se a Teresa levasse nos bolsos 8 caramelos. E se fossem 12? E se fossem 13 caramelos?)

Figura 1. Tarefa proposta.

Para esta tarefa, "Vamos arrumar Caramelos…", foram distribuídos 30 quadrados de esponja, que seriam os caramelos, de modo a facilitar o desenvolvimento da tarefa, caso os alunos sentissem alguma dificuldade. Os alunos começaram por fazer pequenos "montinhos" com o número de caramelos sugeridos. Coube à professora ir colocando *questões* e dando *feedback*, por exemplo: "Escolham as possibilidades todas. São só essas as possibilidades?"; "Aqui… dois sacos com seis, muito bem, muito bem. Vamos lá, mais… Pensar…"; "Qual é aqui a questão? Patrícia? Qual é a questão que se estava a levantar? Que eu ouvi-te aí a discutir qualquer coisa".

Os alunos, em grupo, discutiam bastante as suas opiniões e demonstravam comunicar de uma forma clara, utilizando uma linguagem apropriada, para que, mais tarde, fossem capazes de argumentar e justificar as suas opções, vejamos excertos do decorrer da aula:

A1: Ó Carla porque é que não desenhamos um saquinho com quatro bombons lá dentro? Pomos quatro caramelos num saco e depois desenhamos (figura 2).

A2: Tens que fazer da mesma forma que nós estamos a fazer.

A3: Como é que vocês estão a fazer?

A2: Estamos a fazer assim.

A3: É a mesma coisa que eu estou a fazer.

A2: Não, não. Tu estás a escrever… Deixa ver...

(…)

A1: Dá, dá. Dois mais dois mais dois mais dois…

A2: E depois são quatro sacas.

A1: Uma hipótese.

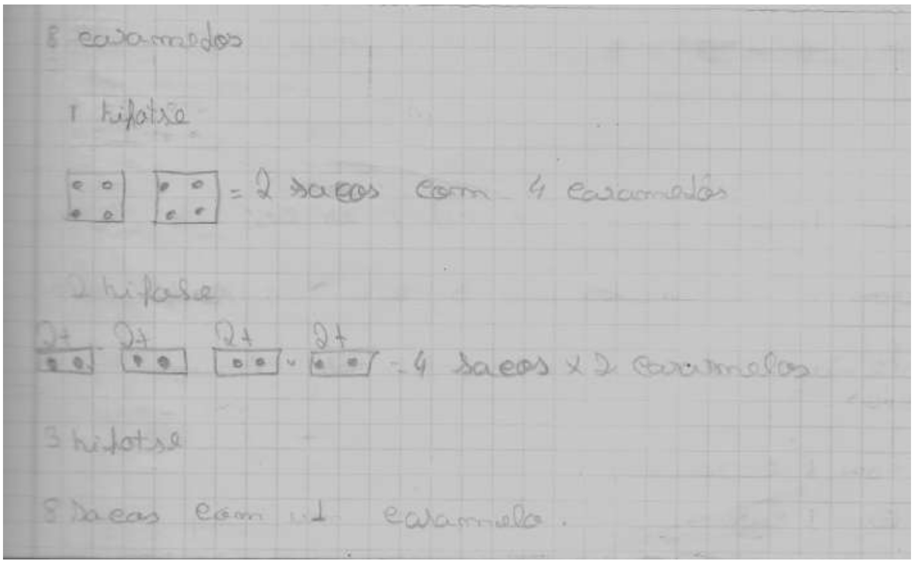


Figura 2. Registos dos alunos por esquema (8 caramelos).

Com o decorrer da aula, chegou o momento da discussão em plenário onde seriam apresentadas as conclusões dos diferentes grupos. Vejamos então as conclusões a que os alunos chegaram:

P: Ao um e ao cinco. Agora vamos parar. Ora, vamos lá pensar, o que é que nós estivemos a fazer aos caramelos?

Vários: A distribui-los por sacos.

P: A distribui-los igualmente por sacos, de forma a quê?

A1: Não sobre nenhum.

P: Não sobre nenhum. Ou seja…

A2: E que nos sacos tenha o mesmo número.

P: Eu estive a repartir os caramelos, a repartir, ou seja, a?

Vários: Distribuir.

No extrato acima mencionado podemos observar que a professora começa por colocar questões de modo a que seja percetível se os alunos perceberam o que se pretendia com a realização desta tarefa, nomeadamente, que teriam de efetuar divisões inteiras. A partir daqui procura que os alunos encontrem os divisores de cada um dos exemplos dados.

P: Eu estou a dividir o oito. Vou dividir o oito por quem?

A3: Por quatro.

A2: Por dois.

A1: Pelo um, pelo dois, pelo quatro e pelo oito.

P: Pelo um, pelo dois, pelo quatro e pelo oito. Mas porque é que eu só posso dividir por estes números?

A3: Ó professora, porque são…

A1: Que o resto seja zero.

P: De forma a que o resto seja zero, mais?

A5: Só podemos por no divisor o dois, o quatro e o oito.

P: E…É, como é que é? Ora, pensem lá?

Vários: É sempre inteiro.

P: Então não é só dar resto zero, é dar resto zero e quociente inteiro.

(…)

P: Resto zero. Exatamente. Então aquilo que nós estivemos a fazer com esta tarefa foi encontrar…

Vários: Os divisores.

P: Os divisores de…

Vários: Oito, doze, treze e quinze e sete e cinco.

Verifica-se também a valorização da participação, dando um reforço positivo aquando das respostas dos alunos. Com o decorrer desta interação, os alunos já chegaram a uma nova noção, a de divisores, dando a perceção que este desenvolvimento da aula ocorre de forma natural, sem pressões e com um notório envolvimento por parte dos alunos, promovendo a participação destes no discurso que vai decorrendo na aula.

P: Agora vamos chegar a conclusões. Já sabemos, então, que andamos à procura, dos...?

Vários: Divisores.

P: Divisores de um número e que os divisores de um número são todos aqueles que o dividem…

A1: E que dão resto zero.

P: Resto zero, exatamente. Mais conclusões? Olhando para aqui que mais conclusões é que nós podemos chegar? Patrícia?

A5: Que os números que só dão para dividir por si próprio e por um só têm duas opções.

P: Ou seja, vocês verificaram que há aqui alguns números…

A4: O treze, o sete e o cinco (figura 3).

P: Há aqui alguns números, por exemplo, o…

Vários: Treze.

P: O sete e o cinco, apenas dão para dividir por…

Vários: Por si próprio…

Vários: E por um.

A1: Esses se partirmos a meio não dá.

A2: Dá meio.

P: Não dá. Os divisores de, desses números, os divisores, vamos agora começar a chamar os nomes…

A2: Ó professora, por exemplo, o número treze partido a meio dá seis e meio.

P: Exatamente. Ou seja, o treze, meninos, o treze, eu só consigo dividir o treze por…

Vários: Um e por treze.

P: Aconteceu o mesmo ao sete e ao…

Vários: Ao cinco.

P: E, entretanto, eu fui vendo pelos números que me disseram, ah, então todos os números ímpares só dão...

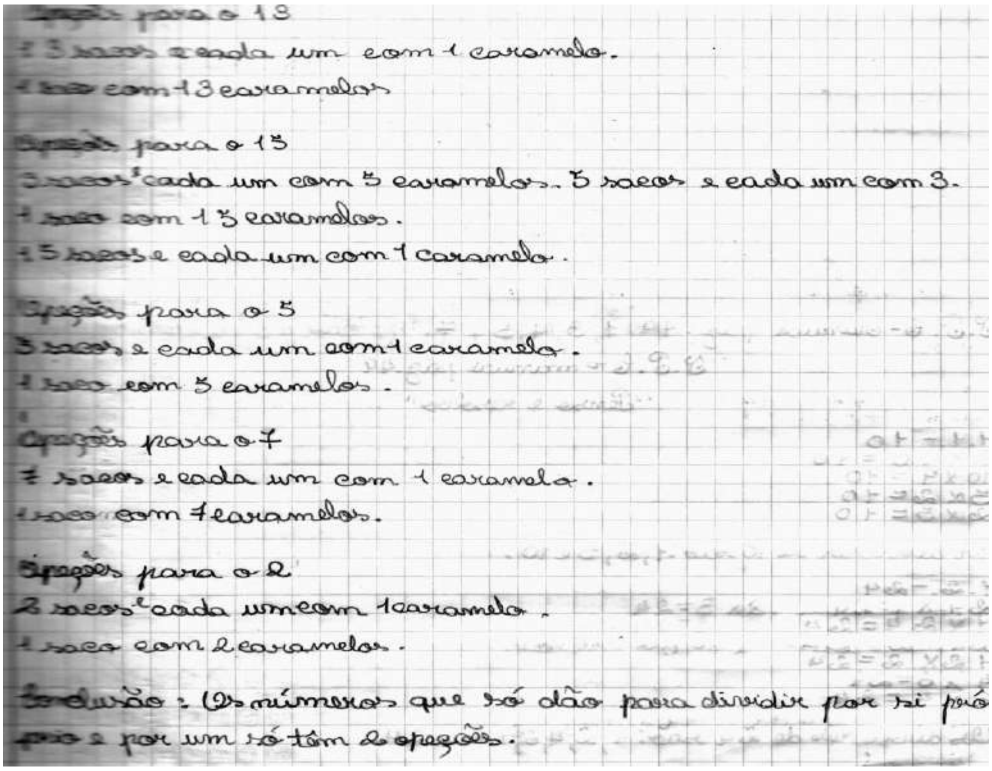
A1: Mas o quinze dá para quatro formas.

P: Eu posso chegar, essa é a regra? Os números ímpares?

Vários: Não.

P: Porque temos aqui o quinze…

Vários: O quinze é número ímpar e dá mais.


Opções para o 13
13 sacos e cada um com 1 caramelo.
1 saco com 13 caramelos

Opções para o 15
3 sacos e cada um com 5 caramelos. 5 sacos e cada um com 3.
1 saco com 15 caramelos.
15 sacos e cada um com 1 caramelo.

Opções para o 5
5 sacos e cada um com 1 caramelo.
1 saco com 5 caramelos.

Opções para o 7
7 sacos e cada um com 1 caramelo.
1 saco com 7 caramelos.

Opções para o 2
2 sacos e cada um com 1 caramelo.
1 saco com 2 caramelos.

Conclusão: Os números que só dão para dividir por si próprio e por um só têm 2 opções.

Figura 3. Registos dos alunos em texto (2, 5, 7, 13 e 15 caramelos).

Nesta secção da aula os alunos começam a apresentar as suas conclusões, sendo que a professora coloca questões de modo a que estes sejam capazes de chegar às conclusões pretendidas. Os alunos, através destas questões vão constatando alguns factos e, mesmo quando respondem de forma incorreta, de imediato se autocorrigem. O facto de a professora levar os alunos a dar um nome aos “números especiais” é bastante interessante, pois leva a que os alunos fiquem muito curiosos.

P:	Então há aqui uns numerozinhos especiais. Diz alto?
A1:	Devem ter um nome.
P:	Devem ter um nome. Porque é que devem ter um nome?
Vários:	Porque são especiais.
P:	Mas porque é que são especiais?
A1:	Porque não dão…
A5:	Porque só têm duas formas de se dividir.
P:	Vamos lá chamar os nomes, porque só têm dois?
Vários:	Divisores.
P:	Divisores. O um e o ele próprio. Têm um nome especial, sim senhora, chamam-se números primos.
Vários:	Primos? (risos)
P:	Então os números primos são só números impares.

A1: Claro.

P: É?

Vários: Não, não!

P: Então?

A5: O dois também.

A2: O dois também não dá.

A3: O dois, o dois também não dá, só dá para dividir por ele…

P: Divisores de dois?

A5: Por ele próprio e por um.

Os alunos neste momento da aula, atingiram um dos objetivos propostos, nomeadamente, a definição de número primo, identificando que estes apenas têm dois divisores, a unidade e ele próprio. Mais uma vez, é visível a valorização da participação dos alunos na sala de aula, o que, torno a reforçar, é sem dúvida uma mais valia para a aprendizagem do aluno, pois permite que seja ele próprio a chegar às suas conclusões e por tal construir o seu próprio conhecimento, sentindo-se muito mais à vontade e confiante para comunicar matematicamente com os seus pares e com a professora.

P: Um outro nome, e são, ouçam, chamam-se números compostos. Então, números compostos são todos aqueles que têm mais do que dois?

Vários: Divisores.

Inicialmente os grupos foram apresentando as suas principais conclusões, ao mesmo tempo que a professora foi levantando questões que centrassem a discussão nos aspetos fundamentais (que depois fariam parte dos registos finais). Ao mesmo tempo que se ia desenrolando a discussão, os alunos foram, com a ajuda da professora, apresentando as suas conclusões e os seus registos, realizando um diálogo constante entre professora e alunos e entre os próprios alunos, levando a que estes fossem a parte central de toda a aula e os construtores do seu próprio conhecimento. Os alunos foram sempre incitados a comunicar por escrito ou oralmente as suas conclusões, estimulando a sua capacidade de comunicação.

Conclusão

Verificamos que a escolha das tarefas, bem como as questões colocadas pela professora, estimularam o pensamento matemático dos alunos. Na aplicação desta tarefa em particular, a professora mostra valorizar a participação dos alunos no processo de comunicação. Esta situação é sobretudo visível nas discussões em grande grupo, aquando da discussão em plenário das conclusões obtidas relativas à resolução da tarefa proposta.

A professora revela algum cuidado no modo de questionar os alunos, promovendo o seu pensamento em vez de lhe dar diretamente as respostas, e de estimular a troca de ideias direta entre os alunos de um mesmo grupo. Penso ser igualmente percetível, a importância que a professora dá ao facto de levar os alunos a explicar os raciocínios, justificar as suas ideias, desenvolver significados e de realizar discussões na sala de aula, aspetos extraordinariamente importantes da comunicação, como forma de promover o desenvolvimento das aprendizagens matemáticas, aspetos sublinhados por Ponte (2005) e Boavida, Silva, e Fonseca (2009).

Nesta situação em particular, existe a preocupação de promover um maior envolvimento dos alunos no discurso, pela reflexão, discussão e partilha de ideias matemáticas, o que leva a que a capacidade de comunicar matematicamente seja desenvolvida por parte dos alunos. Ora, é assumido que a comunicação é uma capacidade a desenvolver nos alunos. As estratégias apresentadas para desenvolver a capacidade de comunicação estão relacionadas com a escolha adequada das tarefas, com questionamento do professor e com a necessidade de que o discurso dos alunos seja valorizado, bem como a organização e apresentação dos seus registos escritos, como defendem Bishop e Goffree (1986), Ainley (1988) e Brendefur e Frykholm (2000).

De modo geral, foi percetível a preocupação dada pela professora em não responder diretamente aos alunos, levando-os a chegar às conclusões pretendidas, recorrendo para isso a um conjunto de questões. Além disso, verificou-se uma valorização da participação dos alunos, com a utilização de *feedback* positivo, o que encoraja uma maior e melhor participação dos alunos na sala de aula.

Referências bibliográficas

Ainley, J. (1988). Perceptions of teachers´ questioning styles. Proceedings of *PME XII* (pp. I/92-99), Veszprém, Hungary.

Arends, R. (2008). *Aprender a ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Springer Netherlands.

Boavida, A., Silva, M., & Fonseca, P. (2009). Pequenos investigadores matemáticos: Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento. Revista *Educação Matemática*, Nº102, Março/Abril 2009, p.2-4.

Boavida, R., (1999). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do Professor. Apresentação realizada em 19 de Abril de 1999 no simpósio *Fostering Argumentation in the Mathematis Classroom: The Role of the Teacher*, incluído no encontro anual da AERA.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 2-33.

Long, E. (1992). Teachers´questionning and students´responses in classroom Mathematics. *Proceedings of PME XVI* (pp. III/ 172), Durham, USA.

Love, E., & Mason, J. (1995). *Telling and asking*. Londres: Routlegde.

Martinho , M. H., & Ponte, J. P. (2005), A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor, *Comunicação nas Atas do V CIBEM*, realizado na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Menezes, L. (1996). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original publicado em 1991).

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Direcção Geral de Investigação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., (2005), *Gestão curricular em Matemática*. In GTI, O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Sadker, M., & Sadker, D. (1982). Questionning skills. In J. Cooper (Ed.), *Classroom teaching skills*. USA: D.C. Heath ad Company.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Vacc, N. (1993). Implementing the professional standards for teaching Mathematics: Questioning in the Mathematics classroom. *Arithematic Teacher*, *2*, 88-91.

Veia, L. (1996). *A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico: três estudos de caso*. Consultado em setembro 12, 2010, em: http://hdl.handle.net/10400.1/1940.

Yin, R. (1994). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM & CIEd da Universidade do Minho.

Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório[a]

Hélia Oliveira[1], *Renata Carvalho*[2]
[1]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, hmoliveira@ie.ul.pt
[2]Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, renatacarvalho@campus.ul.pt

Resumo. *Partindo de um contexto de uma oficina de formação com recurso a um caso multimédia centrado no ensino exploratório numa aula do 2.º ciclo do ensino básico, analisamos, neste estudo, as potencialidades deste dispositivo com base nas perspetivas de quatro professoras que leccionam neste nível de ensino e que participaram na formação. Pretendemos assim perceber que características do ensino exploratório destacam as professoras, a relevância que atribuem à atividade de planificação do professor e os aspetos que realçam na exploração do caso multimédia como promotores do seu conhecimento sobre este tipo de ensino. O estudo segue uma abordagem qualitativa, assente na análise das reflexões escritas das professoras e na apresentação oral de um trabalho realizado no âmbito da formação. A análise de dados evidencia que as professoras associam o ensino exploratório a uma visão dialógica da aprendizagem da matemática, identificam características fundamentais das tarefas compatíveis com a perspetiva de ensino exploratório e referem a planificação como uma atividade exigente mas imprescindível. A formação com recurso a casos multimédia, principalmente através da análise de vídeos e planos de aula, contribuiu para que as professoras criassem não só uma perspetiva global sobre este tipo de ensino, mas também desenvolvessem um conhecimento contextualizado sobre como planear e desenvolver uma aula de ensino exploratório.*

Palavras-chave: Ensino exploratório; Formação contínua; Conhecimento profissional; Recursos multimédia.

Introdução

A investigação que está na base desta comunicação desenrolou-se no contexto de uma oficina de formação com professoras do 2.º ciclo do ensino básico assente na exploração de um caso multimédia sobre a prática de ensino exploratório (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012). Através deste estudo pretendemos compreender as perspetivas das professoras sobre o contributo da formação realizada para o desenvolvimento do seu conhecimento sobre este tipo de ensino. Em particular, procuramos responder às seguintes questões: Que características do ensino exploratório destacam as professoras? Que relevância atribuem à atividade de planificação do professor neste tipo de ensino?

[a] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Que aspetos destacam na exploração do caso multimédia que consideram ter contribuído para o seu conhecimento sobre o ensino exploratório?

O ensino exploratório

A ideia de ensino exploratório, adotada neste estudo, e de acordo com Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), diz respeito a um certo tipo de prática do professor (Canavarro, 2011), também denominada como ensino-aprendizagem exploratória (Ponte, 2005). Surge em oposição a práticas letivas de carácter diretivo, as quais seguem uma lógica de transmissão de conhecimentos do professor para o aluno. Adotando uma perspetiva dialógica de construção de conhecimento (Wells, 2004), considera-se que no processo de ensino e aprendizagem a ênfase deve ser colocada no aluno e nas condições que favoreçam a participação, individual e coletiva, numa atividade de inquirição, em que o conhecimento matemático é construído a partir de situações práticas específicas, nas quais os alunos levantam questões, formulam conjeturas e exploram possíveis caminhos, apoiando-se nas suas experiências anteriores. Deste modo, no âmbito do ensino exploratório, as tarefas matemáticas assumem particular relevância, dado que é a partir delas que a atividade matemática do aluno se desenvolve. Estas devem favorecer o "raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas" (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012, p. 256).

Na perspetiva dialógica apresentada, "o que aprendemos é o que fazemos" e, como tal, as aprendizagens matemáticas dos alunos são também fortemente influenciadas pelas práticas de ensino do professor, sendo o seu papel muito importante. No âmbito do projeto P3M foi desenvolvido um quadro síntese de ações e intenções do professor relativo à prática de ensino exploratório (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012), que tem subjacente uma estrutura de aula em quatro fases (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens), nas quais se identificam ações específicas do professor em cada uma das fases com dois objetivos distintos mas interrelacionados: promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e gerir a aula.

Quadro 1 – Quadro simplificado das ações e intenções do professor relativo à prática de ensino exploratório adaptado de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

	Promoção da aprendizagem matemática	**Gestão da aula**
Introdução da tarefa	*Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos;* *Promover a adesão dos alunos à tarefa.*	*Organizar o trabalho dos alunos.*
Realização da tarefa	*Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos;* *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos.*	*Promover o trabalho de pares/grupos;* *Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos;* *Organizar a discussão a fazer.*
Discussão da tarefa	*Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos;* *Regular as interações entre os alunos na discussão:*	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão;* *Gerir relações entre os alunos.*
Sistematização das aprendizagens matemáticas	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa;* *Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento das capacidades transversais suscitado pela exploração da tarefa;* *Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores.*	*Criar ambiente adequado à sistematização;* *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização.*

Neste quadro (Quadro 1) incluem-se aspetos importantes que podem orientar a ação do professor, numa lógica de ensino exploratório como, por exemplo, no que diz respeito à promoção das aprendizagens dos alunos, na fase de introdução, a ação do professor deve ser no sentido de *garantir a apropriação da tarefa pelos alunos*, ou no que diz respeito à gestão da aula, por exemplo, na fase de discussão da tarefa, a ação do professor deve ser no sentido de gerir relações entre alunos, estando assim associado a qualquer um desses aspetos um conjunto de possíveis ações do professor[b].

Casos multimédia e a formação

Os recursos multimédia, em particular, o vídeo de situações de sala de aula, têm registado uma crescente utilização na formação de professores de matemática, evidenciando a investigação que estes recursos podem transmitir uma imagem realística

[b] Para mais pormenores sobre estas ações consultar Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

da sala de aula, permitindo capturar as vozes, linguagem corporal e ambiente da sala de aula (McGraw, Lynch, Koc, Budak & Brown, 2007). Com a variedade de recursos que podem hoje ser disponibilizados eletronicamente, abarcando a complexidade e as diferentes vertentes da prática letiva, é possível um contacto com práticas que são menos familiares, como o ensino exploratório, favorecendo a capacidade de análise da prática profissional (Koc, Peker & Osmanoglu, 2009; Stürmer, Königs & Seidel, 2013) que se afigura importante para o seu desenvolvimento profissional.

Deste modo, os casos multimédia[c], criados pelo projeto P3M, integram numa plataforma de apoio, planos de aula, vídeos das várias fases da aula, resoluções dos alunos e entrevistas à professora e disponibilizam uma bibliografia variada. Na formação realizada, e que deu origem a este estudo, foi explorado um dos casos multimédia, referente a uma aula de Matemática do 2.º ciclo, possibilitando a análise da prática da professora, em cada fase da aula, e também do trabalho de preparação que lhe está associado.

Nesta formação assume-se uma perspetiva dialógica sobre o desenvolvimento do conhecimento do professor, considerando que este assenta em processos interativos e sociais, uma vez que "o indivíduo está envolvido na construção de significado com os outros na procura de estender e transformar o seu entendimento coletivo relativamente a algum aspeto da atividade que é desenvolvida em conjunto" (Wells, 2004, p. 84).

A oficina de formação foi concebida[d], desenvolvida e avaliada tendo por base um trabalho de colaboração entre as duas autoras deste artigo, desenrolando-se em 25 horas de trabalho presencial e 25 de trabalho autónomo. Esta teve como objetivos promover: o reconhecimento do papel da planificação do professor na promoção das aprendizagens; o conhecimento de estratégias promotoras de um ensino exploratório; o reconhecimento das características de tarefas matematicamente significativas e articuladas; a capacidade de análise de situações de ensino; e o desenvolvimento da capacidade de reflexão sobre a prática profissional. O caso multimédia, em torno do qual se desenvolveu a oficina de formação, está organizado de acordo com o quadro de ensino exploratório (Quadro 1), a partir de uma aula assente na realização de uma tarefa matemática (em anexo), ancorada no programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). Para além da análise e

[c] Menezes, L., Oliveira, H., & Canavarro, A. P. (2012). Subidas e descidas dos combustíveis (2.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática*. (Acessível em http://p3m.ie.ul.pt/caso2-subidas-e-descidas-dos-combustiveis-2-ciclo).
[d] Neusa Branco, membro do Projeto P3M, participou na conceção da oficina de formação com as autoras.

discussão do caso multimédia, as formandas realizaram um plano para uma aula que lecionaram e que foi depois objeto de análise e reflexão. Ao longo da formação as atividades foram desenvolvidas colaborativamente, quer em sessões presenciais, quer em momentos de trabalho autónomo das formandas. Presencialmente procedeu-se à análise e discussão do caso multimédia em pares, discussão e síntese coletivas do trabalho realizado, bem como a discussão dos planos de aula realizados pelas formandas e a apresentação e discussão coletiva das aulas lecionadas. Nos momentos de trabalho autónomo, as formandas prepararam a pares o plano da aula a lecionar e as respetivas tarefas. Tais opções são compatíveis com a perspetiva de que o conhecimento do professor sobre o ensino exploratório vai desenvolver-se em diferentes momentos, a partir de múltiplas experiências, através das interações que estabelece.

Metodologia do estudo

Este estudo segue uma abordagem qualitativa (Denzin & Lincoln, 2005) visando a interpretação das perspetivas das professoras em torno do processo formativo vivido. A investigação foi realizada com um grupo de 10 professoras de Matemática do 2.º ciclo, e as autoras no papel de formadoras e investigadoras. Na dinamização das sessões de formação, a segunda autora assumiu um papel mais ativo, embora a primeira autora tenha estado sempre presente e intervindo livremente. Esta comunicação centra-se em dois pares de professoras (Iara e Cátia e Sílvia e Rita[e]) selecionadas de acordo com a variedade de experiências profissionais (entre os 6 e os 30 anos de serviço).

A recolha de dados decorreu entre fevereiro e maio de 2013, com recurso a observação direta das sessões de formação, onde se explorou o caso multimédia, gravação vídeo da última sessão onde foram apresentados os trabalhos finais, notas de campo das formadoras/investigadoras e o relatório escrito das formandas. Este último consistiu numa reflexão individual acerca das aprendizagens mais relevantes a partir da análise do caso multimédia e suas implicações para a prática letiva, dificuldades vivenciadas ou antecipadas relativamente ao ensino exploratório e aspetos valorizados no caso multimédia e no processo de formação.

A análise de dados foi realizada de forma indutiva, principalmente, a partir dos relatórios escritos das professoras (R), e também da transcrição da apresentação dos trabalhos finais (A).

[e] Pseudónimos.

Análise de dados

Na análise de dados começamos por descrever os aspetos destacados pelas professoras acerca do ensino exploratório, seguidamente, a relevância que atribuem à planificação do professor neste tipo de ensino e, por fim, os aspetos da exploração do caso multimédia que consideram uma mais-valia no processo de formação.

O que destacam as professoras no ensino exploratório

Na primeira sessão de formação, quando questionadas acerca do que conhecem sobre o ensino exploratório em Matemática, a maioria das professoras refere saber o que é mas não entra em pormenores na sua explicação. Referem-se, principalmente, a obstáculos relacionados com a gestão de sala de aula e a extensão do programa que condicionam ou impedem um trabalho na disciplina assente realização de tarefas matemáticas pelos alunos.

No final da formação, na apresentação oral do trabalho realizado e no relatório escrito, as quatro professoras expressam as suas perspetivas sobre o que é o ensino exploratório, seu objetivo e potencialidades. Este surge associado à ideia de um trabalho autónomo dos alunos em torno de tarefas matemáticas que estimulam o raciocínio e a comunicação matemáticos. As professoras parecem evidenciar a visão de que os alunos podem construir o seu próprio conhecimento através da atividade que realizam. Por exemplo, Iara refere que neste tipo de ensino "os alunos a partir de uma tarefa (…) definem aos pares ou em grupo uma estratégia que conduza à sua resolução, tendo posteriormente de explicar e justificar o seu raciocínio perante outros pares, desenvolvendo a sua capacidade de comunicação" (R). Para Cátia este "é um processo de ensino-aprendizagem em que os alunos aprendem através do seu trabalho na realização de tarefas e da discussão e partilha de ideias. Existe uma construção coletiva com a qual os alunos adquirem conhecimentos e procedimentos matemáticos" (R). Rita acrescenta que: "Há uma aposta no raciocínio dos alunos e um acreditar na possibilidade destes construírem conhecimento matemático, através do levantamento de conjeturas, da sua discussão, confronto de ideias, argumentação, e construção de generalizações coletivas" (R). Por sua vez, Sílvia considera que no ensino exploratório se "parte de um problema para o qual são elaboradas hipóteses/conjeturas que são experimentadas, partilhadas, discutidas e questionadas e, posteriormente, validadas, chegando a uma conclusão, como resposta a um problema inicial" (R). A forma como esta professora descreve o ensino exploratório, está muito próxima do que observou na aula retratada no caso multimédia.

Para além do desenvolvimento de capacidades matemáticas do aluno, as professoras referem outras potencialidades do ensino exploratório. Iara refere-se à possibilidade de uma aprendizagem mais significativa, maior motivação dos alunos e um conhecimento do professor mais aprofundado sobre os alunos:

> Todo este processo leva, por um lado, a uma aprendizagem mais significativa e consolidada por parte dos alunos e, por outro lado, permite ao professor conhecer melhor o nível de aprendizagem destes e as suas efetivas dificuldades podendo atuar sobre elas de forma a colmatá-las. Pode-se ainda referir que estas tarefas geralmente motivam os alunos promovendo o seu gosto pela matemática. (R)

Também Sílvia associa este tipo de ensino a abordagens que contribuem para a motivação dos alunos, para além de promoverem o seu raciocínio matemático: "(…) é indispensável que o professor os consiga cativar e motivar, recorrendo a estratégias lúdicas, dinâmicas, interessantes, que apelem à autonomia dos alunos e que estimulem o seu raciocínio matemático e o gosto pela disciplina" (R). O uso de tarefas não rotineiras é referido por Cátia como uma possibilidade de formalização de conceitos matemáticos a partir da atividade do aluno: "Esta tarefa, ao contrário das que nós consideramos rotineiras, aquelas do dia a dia, não se esgota na própria solução e dá ao professor a oportunidade de, em contexto, clarificar e formalizar os conceitos envolvidos" (A). Por sua vez, Rita refere observar que este tipo de abordagem contribui para tornar a matemática mais acessível aos alunos envolvendo-os mais na disciplina: "A variedade de atividades e as estratégias adotadas têm suscitado interesse na grande maioria dos alunos que passam a encarar a Matemática como uma área cada vez mais familiar e menos assustadora" (R).

A relevância da planificação do professor no ensino exploratório

No ensino exploratório, a importância da seleção da tarefa matemática a propor aos alunos é um dos aspetos mais destacados pelas professoras. Cátia e Sílvia assumem que esta foi uma das aprendizagens realizadas na formação. Segundo Cátia: "Nesta ação aprendi, a partir da análise do caso multimédia, que a escolha da tarefa é muito importante para todo o desenvolvimento da aula e otimização do processo ensino-aprendizagem" (R). Sílvia reforça esta ideia e acrescenta características que considera fundamentais numa tarefa de ensino exploratório: "A análise do caso multimédia permitiu uma maior consciência (…) da necessidade da escolha de tarefas adequadas, de preferência abertas, que sejam desafiantes e que permitam aos alunos desenvolver conhecimentos matemáticos e competências transversais" (R). Iara, que assume propor regularmente este tipo de tarefa, procura ao selecionar uma tarefa que esta "por um lado, cumpra os objetivos pretendidos e, por outro lado, seja estimulante intelectualmente para os alunos …" (R). Rita acrescenta a importância de escolher tarefas que se adaptem às características da turma e integrem questões que promovam uma atividade matemática estimulante e rica para os alunos, nomeadamente: "Colocar questões pertinentes que suscitem nos alunos a reflexão e validação de conjeturas e resultados e estimulem a apresentação de diferentes estratégias ou resoluções" (R).

As professoras referem a dificuldade em selecionar e adaptar tarefas que preencham os requisitos referidos e, como consequência, reconhecem que esta atividade carece de ser contemplada na preparação da aula pelo professor. Iara, por exemplo, considera-a uma atividade exigente ao procurar atender à diversidade existente na turma: "Um contexto que achamos interessante para uns, não é interessante para todos, mesmo dentro da própria turma" (R).

Contudo, as professoras reconhecem que o sucesso da aula, de ensino exploratório, não depende somente da tarefa escolhida mas da forma como esta é desenvolvida em aula. Rita explicita esta ideia: "Não é fácil a elaboração/seleção de tarefas válidas, das quais dependem o objetivo da aula, no entanto, será a sua exploração (…), que definirá o êxito da sua aplicação" (R). Também reconhecem que este tipo de ensino requer uma persistência no tempo para que os alunos assumam essa forma de trabalho na aula. Rita refere, por exemplo, que "não basta a aplicação de tarefas exploratórias esporadicamente para que esse método passe a ser assumido como tal, é necessário que seja verificado na maioria das aulas" (R).

As professoras reconhecem pois que, no ensino exploratório, é necessário planear cuidadosamente cada aula, a partir da seleção da tarefa matemática, de acordo com os objetivos definidos. A exemplo do material que analisaram no caso multimédia e da própria experiência de elaboração de um plano de aula que lecionaram no âmbito da formação, as professoras reconhecem-lhe a sua importância e indicam aspetos a ser contemplados na preparação da aula, como a antecipação de estratégias e dificuldades que os alunos podem enfrentar, e a forma como o professor pensa vir a lidar com estas. Neste sentido, Sílvia considera necessário: "A elaboração de um plano de aula o mais completo possível, com o máximo de antecipações possíveis, de dificuldades e delineamento de estratégias em cada uma das fases do ensino exploratório" (R). Rita reconhece que o planeamento é necessário neste tipo de prática, dada a dificuldade de que se reveste para o professor: "Não é uma prática fácil: exige planeamento, flexibilidade, preparação, aperfeiçoamento e também alguma capacidade de improviso" (R). Iara acrescenta que este é um "processo moroso", a escolha da tarefa e a elaboração do plano para a aula que lecionaram no âmbito desta formação, considerando que "as tarefas que tínhamos ou que fomos encontrando nas nossas pesquisas não nos agradavam pois não promoviam a dinâmica de aula pretendida" (R). Também Rita e Sílvia reconhecem o desafio que representou a elaboração do plano para a aula que lecionaram. Sílvia refere que "Em especial na antecipação, revelou-se exigente, pois temos de nos preparar para o inesperado, e colocar-nos no lugar dos alunos, tentar pensar como eles, que estratégias poderão utilizar, e para isso apelar às nossas experiências profissionais anteriores" (R), acrescentando que a planificação de uma aula com estas características "requer empenho, disponibilidade e tempo que, infelizmente, muitas vezes não conseguimos encontrar" (R).

Aspetos que realçam da exploração do caso multimédia

As professoras referiram diversos aspetos da formação, desenvolvidos em torno da exploração do caso multimédia, como tendo contribuído para o desenvolvimento do seu conhecimento sobre o ensino exploratório, em particular, para levarem a cabo a planificação de uma aula com estas características. Segundo as quatro professoras, o conhecimento que referem ter desenvolvido acerca do ensino exploratório em Matemática deve-se às características e dinâmica da própria formação.

Em termos gerais, Iara destaca o facto de a formação se basear na análise e reflexão de situações de sala de aula, como contribuindo para um conhecimento mais "real" deste tipo de ensino:

> A formação assente em casos multimédia apoiados pelas produções dos alunos, parece-me ser uma formação com bastantes potencialidades. Não se trabalha sobre tarefas que hipoteticamente terão sucesso na aprendizagem dos alunos, mas num caso experienciado, tendo para analisar o plano de aula, as produções dos alunos e as reflexões da professora, com a mais-valia de podermos acompanhar estes registos com o visionamento da aula, o que permite uma perceção muito mais real do seu desenvolvimento. (R)

Todas as professoras salientam a estrutura do caso multimédia, enfatizando as quatro fases da aula – introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas – como tendo contribuído significativamente para o seu conhecimento sobre o ensino exploratório. Esta estrutura, segundo Sílvia, levou a um esforço de antecipação de como desenvolveriam a sua prática em situações idênticas: “O facto do plano de aula nos ser apresentado aos poucos de acordo com as fases da aula, permitiu-nos pensar: *E se fossemos nós, o que faríamos e como faríamos?*” (R). A sua parceira na exploração do caso, Rita, complementa esta ideia, considerando esta estrutura como um fator promotor de reflexão para o professor, uma vez que permite confrontar a planificação com o modo como cada uma dessas fases se concretizou:

> Analisando sequencialmente os quatro momentos da aula, e em cada um, confrontar a preparação com a concretização e o sintetizando, permitiu a tomada de consciência do distanciamento que muitas vezes existe entre as intenções da planificação e a sua implementação. (R)

Iara salienta ainda a importância das leituras recomendadas no caso multimédia e do apoio das formadoras para o desenvolvimento de um conhecimento sobre o ensino exploratório. Como refere: ”Várias leituras foram feitas, quer do ponto de vista científico quer didático, antes da elaboração do plano de aula. Foi fundamental neste processo o apoio das formadoras” (R). Como aprendizagem realizada durante esta formação, Iara destaca a necessidade de antecipação por parte do professor e a importância da síntese final como forma de sistematizar as aprendizagens dos alunos:

> A apropriação da importância de antever algumas situações no plano de aula e a realização de uma síntese final, a mais-valia, para mim, desta ação de formação. Há ainda a referir a utilidade do quadro de intenções e ações que é um precioso auxiliar se não for encarado de forma prescritiva. (R)

Cátia e Sílvia, à semelhança de Iara, realçam a importância do quadro de intenções e ações da professora como um instrumento orientador da planificação e realização de aulas de ensino exploratório. No caso de Cátia, este quadro, analisado na formação, permitiu-lhe:

> Estabelecer um contacto mais direto com todas as suas dimensões e parâmetros [promoção da aprendizagem matemática e gestão da aula nas quatro fases de uma aula de ensino exploratório], desenvolver as minhas competências para as práticas de ensino exploratório da matemática e reforçar a minha opinião de que o ensino exploratório na matemática é bastante pertinente. (R)

Para Sílvia, para além do contributo para a reflexão dos diversos materiais disponibilizados na formação (vídeos e documentos em papel) o quadro de intenções e ações da professora: “É um ótimo registo orientador, quer em observação de uma aula, quer para a reflexão das nossas aulas diárias, permitindo uma autoavaliação da nossa prática pedagógica, em cada uma das fases do ensino exploratório” (R).

O trabalho colaborativo entre as professoras e entre estas e as formadoras, ao longo de todo o processo, é um aspeto positivo que é salientado. Cátia, por exemplo, menciona que “A análise em pequeno grupo seguida da discussão em grande grupo das nossas conclusões, em cada sessão, foi, quanto a mim, uma mais-valia para as nossas reflexões e aprendizagens sobre as práticas de ensino exploratório” (R). Também Sílvia considera que “O caso multimédia permitiu um trabalho colaborativo entre pares (em especial com a minha colega e as nossas formadoras), sempre facilitador pela partilha de ideias e de experiências” (R). Iara destaca positivamente a reflexão coletiva sobre o material analisado e a reflexão final, sustentada pelas formadoras: “O confronto final das diferentes reflexões/ideias também é altamente positivo. Esta reflexão final apoiada pelas perspetivas das formadoras é pois essencial” (R).

Conclusão

Da análise realizada ressaltam diversos elementos que nos permitem compreender as perspetivas das quatro professoras sobre o contributo da formação realizada para o desenvolvimento de um conhecimento sobre o ensino exploratório. Relativamente à primeira questão do estudo, verifica-se que as professoras identificam o ensino exploratório com uma visão dialógica da aprendizagem da matemática, assumindo a perspetiva de que os alunos podem construir o seu próprio conhecimento através da atividade que realizam, em interação com os colegas e o professor (Wells, 2004). Identificam o ensino exploratório com uma metodologia de trabalho em sala de aula, a partir do trabalho autónomo dos alunos em torno de tarefas matemáticas não rotineiras e que pode contribuir para uma aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades transversais, como o raciocínio e a comunicação. Salienta-se também a importância que atribuem à discussão das ideias matemáticas entre os alunos. De referir que inicialmente apresentaram uma noção de ensino exploratório muito vaga e relacionada essencialmente com a gestão da aula.

Pela experiência de análise do caso multimédia, as professoras identificam características importantes das tarefas: possuírem uma natureza mais aberta (ser aberta, no sentido que lhes é atribuído pelas professoras), representarem um desafio para os alunos, irem ao encontro dos objetivos visados, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. A possibilidade de a tarefa ser resolvida de diferentes formas e de estimular a formulação de conjeturas, relaciona-se com a perspetiva dialógica de aprendizagem que as professoras associam ao ensino exploratório, como referimos. No entanto, consideram que selecionar e adaptar tarefas que preencham os requisitos referidos é uma atividade exigente para o professor e, como tal, enfatizam a necessidade de uma planificação detalhada destas aulas. A complexidade de que se reveste a prática de planificação é, igualmente, retratada no estudo de Morris, Hiebert e Spitzer (2009) mas nem sempre é reconhecida pelo professor. No entanto, estas quatro professoras referem, também, a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, como uma atividade imprescindível, de modo a lidarem com as situações que surjam no decorrer da aula. Procurar colocar-se no papel do aluno e pensar como ele é referido, pelas professoras, como um exercício de antecipação difícil, assim como conseguir integrar esta atividade de planificação na sua rotina profissional, tanto mais que reconhecem que o ensino exploratório não resultará se for realizado de forma esporádica.

As professoras destacam diversos aspetos da exploração do caso multimédia que consideram ter contribuído para desenvolverem um conhecimento sobre este tipo de ensino. Salientam o facto de terem acesso ao visionamento de uma aula com as características de ensino exploratório e de a analisarem tendo por base a planificação que a professora retratada realizou. A potencialidade dos recursos multimédia apresentarem uma imagem realística de uma aula, aspeto enfatizado por McGraw et al. (2007), terá contribuído para que as professoras criassem não só uma perspetiva global sobre este tipo de ensino, mas começassem também a desenvolver um conhecimento contextualizado sobre como planear e realizar uma aula com estas características. Neste aspeto, parece-nos fundamental a construção de uma perspetiva dialógica sobre a aprendizagem, que foi fomentada pela estrutura do caso multimédia, bem como pelas metodologias de trabalho adotadas na formação. De facto, estas são também valorizadas pelas professoras quando salientam, por exemplo, o papel importante da interação entre pares nas sessões em que analisaram o caso e das sínteses e reflexões conjuntas.

A investigação em torno desta formação irá prosseguir com a análise da atividade de planificação e lecionação, e posterior reflexão das professoras sobre a aula que lecionaram, o que permitirá ter uma compreensão mais aprofundada sobre o conhecimento construído sobre este tipo de ensino, assim como dos desafios que enfrentaram.

Referências bibliográficas

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In L. Santos, A. P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Denzin, N. & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: The Discipline and Practice of Qualitative Research. In N. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.) *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks: SAGE.

Koc, Y., Peker, D., & Osmanoglu, A. (2009). Supporting teacher professional development through online video case study discussions: An assemblage of preservice and inservice teachers and the case teacher. *Teacher and Teacher Education, 25*, 1158-1168.

MacGraw, R., Lynch, K., Koc, Y., Budak, A., & Brown, C. (2007). The multimedia case as a tool for professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 95-121.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: what can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 491–529.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, P. (2012). The use of classroom videos as a context for research on teachers' practice and teacher education. In *Proceedings of ICME 12 (*pp. 4280-4289). Seoul: ICME.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Stürmer, K., Königs, K., & Seidel, T. (2013). Declarative knowledge and professional vision in teacher education: Effect of courses in teaching and learning. *British Journal of Educational Psychology*, *83*(3), 467-483.

Wells, G. (2004). *Dialogic Inquiry: Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Anexo

Tarefa "Petrolex, Lda"

Como já deves ter dado conta, os preços dos combustíveis variam, com muita frequência, consoante o preço do barril de petróleo.

As bombas de combustível Petrolex Lda aumentaram o preço da gasolina em 10%, o que fez com que os automobilistas protestassem imenso. Perante isto, o Director da Petrolex Lda mandou voltar a baixar o preço da gasolina em 10%.

Será que a gasolina voltou ao preço anterior? Justifica a tua resposta.

Menezes, L., Oliveira, H., & Canavarro, A. P. (2012). Subidas e descidas dos combustíveis (2.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática*. (Acessível em http://p3m.ie.ul.pt/caso2-subidas-e-descidas-dos-combustiveis-2-ciclo)

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

As aulas de matemática com alunos com deficiência auditiva: perspetivas de uma professora e uma intérprete*

Joana Margarida Tinoco[1], *Maria Helena Martinho*[2], *Anabela Cruz-Santos*[3]
[1] CIEd, Universidade do Minho, joanamargaridatinoco@gmail.com
[2] CIEd, Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt
[3] CIEd, Universidade do Minho, acs@ie.uminho.pt

Resumo. *O abraçar da inclusão colocou vários alunos, que até então se encontravam, na sua maioria, em instituições próprias, na escola regular. Criaram-se escolas de referência para determinadas necessidades educativas especiais (NEE) e tentou-se proporcionar condições para a existência de uma igualdade de oportunidades plena. Com este artigo, pretende-se fazer uma reflexão sobre as perspetivas que uma professora de matemática, a lecionar numa escola de referência para o ensino bilingue, a quem foi atribuída uma turma de alunos com deficiência auditiva (DA), e da intérprete que a acompanhou durante a lecionação dessas aulas, possuem sobre a comunicação com alunos com DA nas aulas de matemática, o papel da intérprete de língua gestual portuguesa (LGP) e as tarefas matemáticas e atividade do aluno. Esta reflexão teve por base entrevistas realizadas à professora e à intérprete e realçam uma grande proximidade relativamente às conclusões de estudos existentes.*

Palavras-chave: matemática; comunicação matemática; deficiência auditiva.

Introdução

Na sociedade atual, as várias formas de comunicação nas mais diversas situações têm assumido cada vez mais importância. Mas até que ponto conseguimos que a comunicação presente na escola seja eficaz de modo a envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem, tornando-os participativos? Ao falarmos de comunicação, estamos sem dúvida a referir-nos a noções diferentes, de acordo com as vivências de cada um, o contexto socioeconómico e até cultural, na medida em que o processo de comunicação envolve interações mútuas nas quais os atores partilham ideias, pensamentos, experiências e sentimentos (Most, 2003). Sendo a escola cada vez mais um meio multicultural, não podemos deixar de nos lembrar de um grupo de alunos que estão inseridos nesta escola inclusiva e que gozam de uma língua e cultura próprias: os alunos com deficiência auditiva (DA).

* Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Em Portugal, o Decreto-Lei n.º3/2008, de 7 de Janeiro, adota uma atitude claramente inclusiva, relativamente à educação, assumindo a importância da promoção da igualdade de oportunidades, quer no acesso quer nos resultados, da valorização da educação e da promoção da melhoria da qualidade do ensino. Na sequência da Convenção dos Direitos da Pessoa com Deficiência e através da Resolução da Assembleia da República n.º56/2009, de 30 de Julho, é confirmada a determinação do Estado Português em manter a educação inclusiva no centro da Agenda Política.

Atualmente, a tónica do conceito de inclusão tem sido, cada vez mais, a qualidade da educação e as mudanças a introduzir nos contextos educativos para responder às necessidades de todos os alunos:

> A inclusão é vista como um processo de atender e de dar resposta à diversidade de necessidades de todos os alunos através de uma participação cada vez maior na aprendizagem, culturas e comunidades, e reduzir a exclusão da educação e dentro da educação. Isso envolve modificação de conteúdos, abordagens, estruturas e estratégias, com uma visão comum que abranja todas as crianças de um nível etário apropriado e a convicção de que educar todas as crianças é responsabilidade do sistema regular de ensino. (UNESCO, 2005, p. 10)

De modo a garantir a plena igualdade de oportunidades, Correia (2008) sugere que a escola deve equacionar um conjunto de experiências construídas a partir das realizações iniciais dos alunos e da observação dos seus ambientes de aprendizagem com a finalidade de maximizar as suas aprendizagens académicas e sociais.

A inclusão em contexto escolar passa também por uma aceitação e valorização da cultura, ou das várias culturas dos alunos que engloba a aceitação e valorização da língua usada em casa, já que muitas vezes a língua materna dos educadores e educandos não é a mesma, como é o caso dos alunos com DA (Borges & César, 2011).

No caso particular dos alunos com DA, Antia, Jones, Reed e Kreimeiyer (2009) referem que, para que o processo de inclusão seja satisfatório, é necessário a presença de um intérprete de língua gestual (LG), boas adequações curriculares, adaptações metodológicas e didáticas, conhecimentos sobre a DA e sobre a LG, por parte de todos os intervenientes.

Com este artigo pretendeu-se refletir sobre: a) a comunicação com alunos com DA nas aulas de matemática; b) o papel da intérprete de língua gestual portuguesa (LGP) e c) as tarefas matemáticas e atividade do aluno. Esta reflexão teve por base duas entrevistas realizadas à professora de matemática, e uma à intérprete de LGP.

Na próxima secção, iremos referir alguns estudos feitos nesta área, orientados pelas três questões que constituem o nosso objeto de estudo e posteriormente, alguns aspetos relativos às opções metodológicas seguidas na elaboração de um projeto mais vasto e no qual se insere este artigo. Em seguida, iremos elencar as perspetivas da professora e da intérprete, que sobressaem das entrevistas realizadas. Finalmente, pretendemos proceder à discussão das perspetivas da professora e da intérprete à luz dos estudos referidos.

As aulas de matemática com alunos com DA

Os estudos existentes não nos permitem generalizar sobre a facilidade, ou dificuldade, com que os alunos com DA encaram a matemática, chegando alguns relatos a ser contraditórios.

Comunicação com alunos com DA

De forma unanime, os estudos existentes consideraram que os alunos com perda auditiva se encontram em desvantagem na aquisição da linguagem, uma vez que a maioria do vocabulário, gramática, expressões, significados e muitos outros aspetos das expressões verbais é adquirido, de forma espontânea, através da audição de conversas entre as pessoas que as rodeiam, de programas de televisão ou rádio (Heward, 2000; Sousa, 2011; Ruiz & Ortega, 1995).

No que se refere a conceitos matemáticos, são apontados, por exemplo, atrasos ao nível do conceito de número, do desenvolvimento do conceito de fração, da resolução de problemas aritméticos de comparação, de conhecimentos de contagem e de estimativas (Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004; Kritzer, 2009), na leitura e escrita de números compostos por vários algarismos (Kritzer, 2009) do raciocínio multiplicativo informal (Nunes et al., 2009) da composição aditiva de números e da compreensão da relação inversa entre adição e subtração (Nunes, Evans, Barros & Burman, 2011) ou do processamento de informação temporal (Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004).

Kelly e Gaustad (2007) e Júnior e Ramos (2008) que o consideram um dos grandes desafios da comunicação de pessoas com DA ao nível da matemática (bem como de outras áreas científicas) é a inexistência de gestos que simbolizem termos específicos desta disciplina. Além disso, segundo Lang e Pagliaro (2007), os alunos com DA memorizam significativamente melhor termos que são transmitidos na forma de um único gesto do que os transmitidos com recurso ao soletrar ou à combinação de gestos.

Segundo Silva, Sales e Bentes (2009), a comunicação é a verdadeira chave para o sucesso em situações escolares, enquanto meio de interação privilegiado através do qual todos os alunos, quer tenham DA ou não, podem indicar aos professores se os objetivos curriculares estão a ser alcançados com sucesso.

No mesmo sentido, Borges e César (2012) chamam a atenção para a importância dos professores de alunos com DA conseguirem distinguir as dificuldades de comunicação dos seus alunos das dificuldades de aprendizagem ou da não mobilização de alguns conhecimentos lecionados.

Tarefas matemáticas e atividade do aluno

Ao nível das tarefas realizadas em sala de aula, Kelly, Lang e Pagliaro (2003), Pagliaro e Ansell (2002) e Ansell e Pagliaro (2006) referem que o enfoque das aulas de matemática para estes alunos se encontra na resolução de exercícios, mais ou menos rotineiros, favorecendo a aquisição de regras e treino de procedimentos e não em verdadeiras situações de resolução de problemas cognitivamente desafiadores. O que pode vedar, a estes alunos, a possibilidade de aceder a uma matemática de um nível cognitivamente mais exigente.

Um outro motivo que leva a que não sejam exploradas verdadeiras situações de resolução de problemas são as dificuldades acrescidas que os alunos com DA evidenciam na leitura e interpretação de enunciados de problemas matemáticos. Este facto faz com que quando estas situações são exploradas, seja dada mais importância e mais tempo à análise e compreensão de enunciados do que ao desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínios, síntese de informação e aspetos inerentes à análise da resolução do problema e à análise e desenvolvimento de outras possíveis estratégias de resolução (Kelly, Lang & Pagliaro, 2003; Nunes & Moreno, 2002; Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004). Em particular, o apoio dado na fase inicial da resolução do problema, em que se tenta clarificar de tal forma o enunciado, pode transformá-lo numa mera resolução de exercícios.

Ansell e Pagliaro (2006), Fávero e Pimenta (2006) e Kritzer (2009) referem que os alunos com DA evidenciam dificuldades acrescidas em traduzir a situação problemática, tentando solucionar o problema por meio de operações aritméticas desvinculadas da questão, considerando possível qualquer solução que ocorra. Além disso, tentam seguir um padrão de atuação no que diz respeito à resolução de problemas: utilizam os números na sequência que aparecem no enunciado, associando-os com os sinais convencionais das operações aritméticas, sem evidenciar espírito crítico, quer durante a resolução quer na apresentação de resultados.

Os alunos com DA evidenciam mais dificuldades em transferir conhecimentos de umas situações para outras e em recordar o que foi aprendido em situações anteriores (Kelly & Mousley, 2001), tendem a focar a sua atenção em itens individuais ou dimensões únicas de uma tarefa em vez de desenvolver procedimentos relacionais e integrados (Borgna et al., 2011), a ter mais dificuldade em perceber relações entre os vários componentes em tarefas multidimensionais complexas e a apresentar um comportamento mais irrefletido demonstrando menos persistência ao trabalhar problemas mais complexos (Blatto-Valle et al., 2007).

Um resultado extraído de um estudo levado a cabo por Kelly, Lang e Pagliaro (2003) é a noção de que, para colmatar possíveis dificuldades de comunicação oral, estes alunos tendem a ser sujeitos a situações que envolvem estratégias visuais concretas em detrimento das estratégias analíticas. Os autores chamam a atenção para o facto da representação visual ser uma excelente estratégia para perceber as variáveis de um problema (para qualquer aluno), mas é insuficiente, por si mesma, quando se trata da resolução de problemas mais avançados, mais desafiantes ou mais complexos.

O papel da intérprete de língua gestual portuguesa

Mas o papel da intérprete na sala de aula passa também por um apoio ao nível da discussão das metodologias mais eficazes a utilizar no ensino destes alunos pois, tal como defendem Ansell e Pagliaro (2006) e Nogueira e Zanquetta (2008), a escola não se deve limitar a traduzir para LG as metodologias, estratégias e procedimentos utilizados nas turmas regulares. Deve, sim, organizar tarefas e atividades eficazes que promovam o trabalho matemático dos alunos com DA.

Metodologia do estudo

Este artigo tem por base uma investigação mais vasta que assumiu uma metodologia de caráter qualitativo e interpretativo (Erickson, 1986), através da análise de um estudo de caso cujo objeto são a professora e a intérprete, que trabalham em conjunto, nas aulas de matemática, de uma turma de alunos com DA.

Neste artigo, a análise é feita, unicamente, através das perspetivas da professora e da intérprete que trabalharam com os alunos nas aulas de matemática. A presença da intérprete de LGP nas aulas é justificada pelo facto destes alunos estarem inseridos num currículo bilingue.

Para tal, foram realizadas duas entrevistas à professora de matemática, uma realizada antes da observação das aulas e muito próxima do início do ano letivo 2012/2013 (EP1) e outra no final do mesmo ano letivo, após a conclusão das aulas e da realização dos exames nacionais de 6º ano (EP2), e uma à intérprete, antes do período de observação das aulas (EI).

Os alunos da turma em questão eram portadores de deficiência auditiva, tinham idades compreendidas entre os 11 e os 12 anos e constituíam, na íntegra, uma turma do 6.º ano de escolaridade, numa escola de referência para a educação bilingue.

Os alunos têm uma surdez que varia entre moderada a profunda. Três alunas têm vestígios auditivos, o que lhes permite oralizar. Apenas um aluno, não oraliza. Os pais destes alunos são todos ouvintes mas nem todos conhecem a LGP.

A professora de matemática é professora do quadro de nomeação definitiva daquela escola há 12 anos. Com mais de 39 anos de serviço, leciona as disciplinas de matemática e ciências da natureza ao 2.º ciclo do ensino básico. Já foi professora de alunos categorizados como tendo NEE, que frequentavam turmas regulares, mas nunca uma turma de alunos com DA. Fez uma formação em LGP, naquela escola, seis anos antes de receber esta turma, pelo que considera que de pouco serviu, pois tudo o que tinha aprendido já tinha esquecido (EP1).

A intérprete de LGP é contratada anualmente e foi colocada nesta escola em 1 de outubro de 2012. Tem 7 anos de serviço e formação especializada na interpretação de LGP quer ao nível da licenciatura quer ao nível de mestrado. Já trabalhou com alunos com DA nos 1.º, 2.º e 3.º ciclos, em todas as disciplinas. Apesar da sua contratação ser anual, uma vez que no ano letivo anterior foi colocada na mesma escola, conseguiu acompanhar estes alunos desde o 5.º ano, mantendo uma boa relação com todos eles.

As perspetivas da professora e da intérprete

Seguindo a estrutura adotada na introdução teórica, iremos agora analisar as perspetivas da professora de matemática e intérprete de LGP, tendo por base as entrevistas efetuadas.

Comunicação com alunos com DA

Na perspetiva da professora, estes alunos encontram-se em grande desvantagem em relação aos seus colegas:

> *Decididamente estes meninos entram com um handicap muito grande. Entram. Não há dúvida nenhuma que é um handicap muito grande. Não ouvir o que os outros dizem… a gente aprende ouvindo, imitando, o facto de eles não ouvirem é um handicap enorme para eles, e um esforço.* (EP2)

A professora considera que o contacto que eles têm com o mundo exterior é mais reduzido pelo que sente que eles estão mais limitados em termos de vocabulário, significados e, acima de tudo, "cultura geral". A professora chega a sugerir que a escola deveria pensar uma forma de dar a estes alunos mais do que as disciplinas usuais de um currículo normal, mais experiências, que, para a grande maioria dos alunos são banais e que estes alunos desconhecem. Dá, como exemplo, uma aluna que não sabia o significado de aquário, inserido num problema sobre o cálculo de volumes; de um aluno que não sabia o que era produzir azeite, inserido num problema envolvendo números racionais, ou de nenhum deles conhecer Leonardo DiCaprio, do filme Titanic, que surgiu numa conversa informal (EP2).

Um outro aspeto salientado pela professora e intérprete é a pouca fluência destes alunos na língua portuguesa escrita: "*Eles não percebem, ou partirão já do princípio que não percebem, o que vão ler, estão atidos à intérprete, e eu aqui acho que também há alguma coisa que se perde*" (EP2), e que tinham muitas dificuldades quer em perceber o enunciado e estruturar a expressão algébrica que permitia a sua resolução, quer em dar uma resposta a um problema porque não relacionavam o enunciado com o resultado algébrico a que tinham chegado.

Segundo a intérprete, um outro fator que pode potenciar a perda de informação é o facto de não existirem muitos gestos para termos específicos de matemática. Nesse caso, a intérprete recorre à datilologia e à combinação de um determinado gesto para determinado termo. No entanto, isto exige tempo, ou seja, implica que os professores progridam de forma mais lenta. Quando não há termos específicos, a tradução torna-se mais demorada, o que pode levar a que os alunos, intérprete ou até a professora percam a linha de raciocínio. Além disso, estes gestos combinados acabam por ser aproximações dos termos científicos, o que retira algum rigor à matemática.

Em contexto de sala de aula, até a atitude de todos tem de ser diferente. A professora fala, essencialmente, voltada para os alunos. No entanto, os alunos, principalmente os que possuem vestígios auditivos menores, alternam o seu olhar entre a professora e a intérprete. No início, este facto fez bastante confusão à professora, que insistia com os alunos para que olhassem para ela. Só depois se lembrava que a fonte de informação estava na intérprete e, portanto, seria natural que os alunos estivessem a "olhar para o lado". No entanto, quando querem esclarecer alguma dúvida, os alunos chamam diretamente a professora a fim de a questionar. Apenas o Daniel necessitava da ajuda permanente da intérprete. Mas não eram raras as vezes que ele se entendia diretamente com a professora através da utilização de mimicas ou de gestos que a professora foi aprendendo ao longo do ano.

Tarefas matemáticas e atividade do aluno

A professora afirma ter notado mais dificuldades "*em tudo o que seja [resolução de] problemas, em qualquer um dos tópicos*" (EP2), no trabalho com números racionais: "*Como uma fração que tinha o papel de calcular um produto… esta noção de partição não é uma coisa que esteja muito… muito adquirida*." (EP2), mas em especial na memorização de regras das operações, e na realização de operações algébricas, nomeadamente ao nível da divisão e da multiplicação. Em relação a este último ponto, a professora referiu que eles são totalmente dependentes da máquina de calcular o que conduziu a uma enorme dificuldade em realizar as operações sem máquina ou a não ter espírito crítico quanto aos resultados que ela gera: "*Até porque estão muito habituados a fazer com a máquina, não sabem dividir. E também o conceito de multiplicar não é uma coisa muito adquirida*" (EP2).

A professora referiu que estes alunos teriam também evidenciado dificuldades a nível da distinção entre áreas e perímetros, mas ressalvou que também é problema recorrente nos alunos ouvintes: "*A confusão entre áreas e perímetros, não sei como é que se há de resolver isto, porque não é só destes alunos. É transversal*" (EP2).

Com base em conversas mais ou menos informais que tinha com a intérprete e na experiência que ia adquirindo, a professora optou por adaptar os enunciados substituindo termos mais complexos por sinónimos que fossem melhor entendidos pelos alunos e pôr de lado quer as tarefas mais longas, com várias alíneas encadeadas umas nas outras, quer as tarefas com enunciados mais extensos ou mais complexos:

> *Logo de lado as do livro mais longas. Porque de princípio eu tinha a ideia de que, bom, são as mais longas mas por acaso até estão bem orientadas, são progressivas. Esquece. Porque, enquanto para os não surdos, os ouvintes, se calhar a questão de ser progressivo eles não esquecem o que*

está ali, e portanto vão usar. Nestes miúdos, cinco ou seis… eu tentei isso, cinco ou seis perguntas na mesma tarefa, esquece, porque não fazem ligação. De facto é uma memória muito curta. (EP2)

Quer a professora, quer a intérprete referiram também a falta de autonomia generalizada e a necessidade que demonstraram em ver validados todos os passos que iam fazendo durante a resolução de uma tarefa e durante a realização de fichas de avaliação: "*A insegurança, a falta de autonomia. A necessidade de estar sempre a dizer sim está bem… anda, faz!"* (EP2). No caso das fichas de avaliação, como, de uma maneira geral, evidenciam pouca fluência na leitura, estão muito dependentes da intérprete para traduzir as questões para LGP.

A professora também sentiu necessidade de recorrer a aspetos visuais na expetativa de potenciar a aprendizagem dos seus alunos como se pode verificar pelos excertos:

> *Eu tive muitas vezes na preparação de aulas, ao perceber que aquele termo, no léxico deles, não lhes dizia nada, então procurei até através de imagens (…) quando foi os números negativos, por exemplo, fui através do Google, buscar o fundo do mar, o acima do mar.* (EP2)

Papel da intérprete

Tanto a professora como a intérprete consideram que o papel da intérprete na sala de aula é o de traduzir o que a professora diz para os alunos e vice-versa. Ou seja, serve de elo de comunicação entre pessoas que não possuem a mesma língua materna. No entanto, quando questionadas sobre se a tradução era plena, as respostas foram algo divergentes. Ao passo que a intérprete considera que traduz a totalidade das aulas, a professora tem a sensação de que há partes da informação que se perdem neste trajeto professor-intérprete-aluno:

> *E eu aqui acho que também há alguma coisa que se perde. Ou a intérprete podia ser uma especialista de matemática e também me ajudava. Não sendo, a própria [intérprete] disse-me que às vezes se perde. Não há gestos, ou… linguagem própria… são aproximações que são feitas.* (EP2)

No entanto, também a intérprete reconhece que há algumas partes da comunicação em sala de aula que não são traduzidas para a professora. Isto acontece essencialmente quando se verificam conversas paralelas e a intérprete, percebendo que a dúvida ficou esclarecida, não a devolve à professora:

> *Às vezes em situações em que o professor está a explicar uma matéria a um aluno, está tirar uma dúvida a um aluno, e entretanto o professor já acabou mas eu ainda estou a traduzir, por exemplo, e há outro aluno que está a tirar outra dúvida, ora eu não consigo traduzir a outra dúvida do aluno.* (EI)

Também quando há trabalhos de grupo, as conversas que os alunos vão tendo entre eles não são traduzidas, pelo que a professora não se consegue aperceber, a menos que eles oralizem, da qualidade das discussões matemáticas que se realizam no grupo de trabalho.

Na perspetiva da professora, o papel da intérprete passava também pelo seu auxílio no sentido de aferir se os alunos estavam ou não a perceber a matéria, se eles conheciam determinada palavra ou conceito, se eles tinham conhecimentos anteriores que lhes permitissem progredir em determinado conceito ou se a linguagem que utilizava era adequada, por exemplo.

Conclusão

Da análise das perspetivas da professora de matemática e da intérprete de LGP, realçamos que, tal como defendem Heward (2000), Sousa (2011) e Ruiz & Ortega (1995), a professora considera que estes alunos se encontram em grande desvantagem em relação aos seus pares, uma vez que se aprende muito ouvindo. Encontram-se também em desvantagem ao nível da fluência na língua portuguesa escrita.

Também foi referido o facto de não existirem muitos gestos para termos específicos de matemática, obrigando a intérprete a recorrer à datilologia e à combinação de determinado gesto para determinado termo, à semelhança dos estudos de Kelly e Gaustad (2007) e Júnior e Ramos (2008).

No que respeita às tarefas, esta desvantagem está espelhada nas dificuldades acrescidas que ela verificou em relação à capacidade transversal de resolução de problemas, ou aos tópicos como trabalho com números racionais, memorização de regras de operações e realização de operações algébricas, nomeadamente ao nível da multiplicação e divisão e da distinção entre áreas e perímetros, tal como defendem Zarfaty, Nunes & Bryant (2004) e Kritzer (2009).

Para minimizar estas dificuldades, a professora adaptou os enunciados das tarefas substituindo termos mais complexos por sinónimos, pôs de lado quer as tarefas mais longas, com várias alíneas encadeadas umas nas outras, quer as tarefas com enunciados mais extensos ou mais complexos e recorreu a aspetos visuais na expetativa de potenciar a aprendizagem dos seus alunos, à semelhança de Kelly, Lang e Pagliaro (2003).

Em relação ao papel que a intérprete adota a sala de aula, ambas consideram que fundamentalmente é o de traduzir o que a professora diz para os alunos e vice-versa. No entanto, reconheceram que há partes da comunicação em sala de aula que não vão sendo traduzidas para a professora.

Após este ano e trabalho com alunos com DA, a professora diz sentir falta de um maior apoio no sentido de melhor perceber a DA para poder agir de forma mais consistente. Diz que seria fundamental que houvesse uma formação, logo no início do ano, em que fossem transmitidas algumas noções básicas de LGP mas, essencialmente, algumas dicas sobre a forma de potenciar as aprendizagens destes alunos.

Referências bibliográficas

Ansell, E., & Pagliaro, C. (2006). The relative difficulty of signed arithmetic story problems for primary level deaf and hard-of-hearing students. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 11*(2), 153-170. doi: 10.1093/deafed/enj030

Antia, S., Jones, P., Reed, S., & Keimeyer, K. (2009). Academic status and progress of deaf and hard-of-hearing students in general education classrooms. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 14*(3), 293-311. doi: 10.1093/deafed/enp009

Blatto-Valle, G., Kelly, R., Gaustad, M., Porter, J., & Fonzi, J. (2007). Visual-spatial representation in mathematical problem solving by deaf and hearing students. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 12*(4), 432-448. doi: 10.1093/deafed/enm022

Borges, I., César, M. (2011). Processos de inclusão de dois alunos surdos nas aulas de matemática de 12º ano de escolaridade. *Educação Inclusiva, 2*(2), 8-17.Associação nacional de docentes de educação especial: Almada.

Borges, I., César, M. (2012). Eu leio, tu ouves, nós aprendemos: experiências de aprendizagem matemática e vivências de inclusão de dois estudantes surdos, no ensino regular. *Interacções, 8*(20), 141-180.

Borgna, G., Convetiono, C., Marschark, M., Morrison, C., & Rizzolo, K. (2011). Enhancing deaf students' learning from sign language and text: Metacognition, modality, and the effectiveness of content scaffolding. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *16*(1), 79-100. doi: 10.1093/deafed/enq036

Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais: um guia para educadores e professores*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C.Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Mac Millan.

Fávero, M., & Pimenta, M (2006). Pensamento e linguagem: a língua de sinais na resolução de problemas. *Psicologia e reflexão crítica*, *19*(2). Disponível em http://redalyc.uaemex.mx/pdf/188/18819208.pdf

Heward, W. (2000). *Exceptional children: an introduction to special education* (6th ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kelly, R., & Mousley, K. (2001). Solving word problems: more than reading issues for deaf students. *American Annals of the Deaf*, *146*(3), 251-262.

Kelly, R., Lang, H., & Pagliaro, C. (2003). Mathematics word problem solving for deaf students: a survey of practices in grade 6-12. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *8*(2), 104-119. doi: 10.1093/deafed/eng007

Kelly, R., Gaustad, M. (2007). Deaf college student's mathematical skills relative to morphological knowledge, reading level and language proficiency. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *12*(1), 25-37. doi: 10.1093/deafed/en1012

Kritzer, K. (2009). Barely started and already left behind: a descriptive analysis of the mathematics ability demonstrated by young deaf children. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *14*(4), 409-421. doi: 10.1093/deafed/enp015

Lang, H., & Pagliaro, C. (2007). Factors predicting recall of mathematics terms by deaf students: implications for teaching. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *12*(4), 449-460. doi: 10.1093/deafed/enm021

Most, T. (2003). The use of repair strategies: bilingual deaf children using sign language and spoken language. *American Annals of the Deaf*, *148*(4), 308-314.a).

Nogueira, C., & Zanquetta, M. (2008). Surdez, bilinguismo e o ensino tradicional de matemática: uma avaliação piagetiana. *Zetetiké Cempem Fe Unicamp*, *16*(30), 219-237. Disponível em http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2523.

Nunes, T., Bryant, P., Burman, D., Bell, D., Evans, D., & Hallett, D. (2009). Deaf children's informal knowledge on multiplicative reasoning. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *14*(2), 260-277. doi: 10.1093/deafed/enn040

Nunes, T., Evans, D., Barros, R., & Burman, D. (2011, junho). Promovendo o sucesso das crianças surdas em matemática: uma intervenção precoce. Comunicação oral apresentada no XIII CIAEM-IACME, Recife: Brasil.

Nunes, T., Moreno, C. (2002). An intervention program for promoting deaf pupils' achievement in mathematics. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *7*(2), 120-133. doi: 10.1093/deafed/7.2.120

Pagliaro, C., & Ansell, E. (2002). Story problems in the deaf education classroom: frequency and mode of presentation. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *7*(2), 107-119. doi: 10.1093/deafed/7.2.107

Ruiz, J. R., & Ortega, J. L. (1995). Alteraciones del language en el deficiente auditivo. In J.R. Galhardo Ruiz, J.L. Gallego Ortega (Ed.), *Manual de logopedia escolar: um enfoque práctico*. (pp. 375-419). Málaga: Ediciones Aljibe.

Silva, F., Sales, E., & Bentes, N. (2009). A comunicação matemática e os desafios da inclusão. Arqueiro, 17, 7-18. Rio de Janeiro. Disponível em http://ersalles.files.wordpress.com/2009/05/a-comunicacao-matematica-e-os-desafios-da-inclusao.pdf

Sousa, A. (2011). *Problemas de audição e atividades pedagógicas*. Lisboa: Instituto Piaget.

UNESCO (2005). *Orientações para a inclusão: garantindo o acesso à educação para todos*. Paris: UNESCO.

Zarfaty, Y., Nunes, T., & Bryant, P. (2004). The performance of young deaf children in spatial and temporal number tasks. *Journalof Deaf Studies and Deaf Education*, *9*(3), 315-326. doi: 10.1093/deafed/enh034.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O sentido de adição e subtração de números racionais de futuros professores dos primeiros anos

Hélia Pinto[1], *C. Miguel Ribeiro*[2], *Nádia Ferreira*[3]
[1]Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, helia.pinto@ipleiria.pt
[2]Centro de Investigação sobre os Espaços e as Organizações; Universidade do Algarve, cmribeiro@ualg.pt
[3]Instituto Superior de Ciências Educativas, Odivelas, nadiadferreira@gmail.com

Resumo. *O conhecimento do professor é fundamental no processo de ensino e nas oportunidades de aprender que promove. Este conhecimento engloba, entre outros, saber responder ao tipo de questões que se espera que os (seus) alunos possam responder, mas também um conhecimento matemático que lhe permita responder a questões de porquês e enunciar problemas (de contexto real) que possam ser modelados por determinadas expressões. Para uma melhoria da formação é vital identificar, discutir e refletir as situações que sejam matematicamente (mais) críticas no conhecimento dos professores, de modo a delinear formas de a centrar onde é efetivamente necessária. Neste texto discutimos alguns resultados preliminares de um estudo sobre o conhecimento de futuros professores relativamente às componentes do sentido de adição e subtração de números racionais. Os resultados permitem-nos refletir sobre a necessidade de delinear formas que melhorem a formação de professores neste âmbito.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores, conhecimento matemático para ensinar, números racionais.

Introdução

Os números racionais configuram-se como um dos tópicos matematicamente críticos para os alunos. Esta criticidade poderá prender-se, entre outras, com a dificuldade de os alunos relacionarem o seu conhecimento sobre frações com o sentido de operação (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Kieren, 1988), ou mesmo ser fundamentada nas abordagens com que foram confrontados aquando do seu ensino (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993) pois, tal como refere Lamon (2007), por vezes "os professores lutam com as mesmas dificuldades e apresentam os mesmos mal-entendidos dos alunos" (p. 633).

O conhecimento do professor é considerado o fator crucial nas aprendizagens (e resultados) dos alunos (e.g., Nye, Konstantopoulos & Hedges (2004)). Assim, torna-se, portanto, essencial equacionar, de forma explícita, a necessidade de que a formação de professores se passe a focar mais no conhecimento do professor, nas tarefas de ensinar (entendidas aqui no sentido de Ball, Thames e Phelps (2008)) e nas situações matematicamente críticas identificadas (que podem ser tanto ao nível dos conteúdos como das capacidades transversais ou das estratégias de ensino). Esse foco contribuirá para um incremento do nível de significação das tarefas propostas (matematicamente ricas, desafiadoras e com efetivo significado) bem como possibilitando uma passagem suave (efetiva e profícua) dos alunos entre os diferentes tópicos e as diferentes etapas educativas.

Apesar de um reconhecimento das dificuldades dos alunos nos números racionais, bem como do papel do professor e do seu conhecimento nas aprendizagens dos alunos, a maioria das investigações sobre estes números tem, ainda, como foco essencial os alunos (e.g., Behr et al. (1993); Mamede e Silva (2012)) Assim, tem deixado à margem o professor e sua importância no processo de ensino, bem como o impacto que o seu conhecimento assume na promoção das aprendizagens e resultados dos alunos. O conhecimento do professor é aqui considerado, tendo em conta as suas especificidades quando comparado com o conhecimento (matemático) de outros profissionais, seguindo a concetualização do *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball et al., 2008).

Por conseguinte, conjugando as duas dimensões (dificuldades dos alunos e papel do conhecimento do professor), iniciou-se uma investigação que tem por foco último, contribuir para desenvolver o conhecimento dos (futuros) professores. Uma das dimensões desse projeto refere-se ao conhecimento que futuros professores revelam das diferentes componentes do sentido de operação, envolvendo números racionais. Neste texto iremos apresentar alguns resultados preliminares relativos ao conhecimento matemático para ensinar revelado por futuros professores, ao resolverem expressões numéricas que envolvem a adição e subtração de números racionais, na sua representação fracionária, e ao formularem problemas para essas expressões. Partindo desses resultados discutiremos alguns aspetos que sustentam a necessidade de delinear formas que permitam/conduzam a uma efetiva melhoria da formação de professores.

Números racionais, operações e conhecimento do professor

Os números racionais são um dos tópicos em que os alunos revelam dificuldades e onde, portanto, apresentam um sucesso reduzido (e.g., Monteiro & Pinto (2006)). Estas dificuldades relacionam-se, também, com o facto de ser um tema complexo, tanto no aspeto matemático como pedagógico (Lamon, 2007).

Deste modo, o trabalho com números racionais e respetivas operações implica um conhecimento matemático por parte do professor, quer ao nível das componentes do sentido de número racional, quer ao nível das componentes do sentido de operações com números racionais, bem como das situações que potenciam/limitam o desenvolvimento dos referidos sentidos por parte dos aprendentes.

A designação "sentido" implica que se veja o aluno como um pensador, uma pessoa capaz de compreender os domínios matemáticos. Por conseguinte, a referida expressão está associada a um ensino-aprendizagem da Matemática com "sentido", ou seja, promovendo a compreensão (e.g., Huinker (2002); McIntosh, Reys & Reys (1992); NCTM (2000) e Slavit (1999)). Assim, sentido de número e sentido de operação são semelhantes, na medida em que representam uma maneira de pensar, em vez de um corpo de conhecimentos a ser transmitidos. Segundo Huinker (2002) desenvolver estes sentidos requer uma construção a longo prazo, de uma compreensão flexível dos números, operações e suas relações. Refere que a manipulação prematura de símbolos promove equívocos entre conceitos e procedimentos e contextos reais dos alunos. Porém, considera que se for desenvolvida uma base conceptual para o sentido de número racional e o sentido de operação, os alunos aprendem significativamente, podendo criar algoritmos apropriados para números racionais.

Dado o foco deste artigo importa clarificar sentido de operação, que de acordo com Slavit (1999) é a capacidade de usar operações em pelo menos, um conjunto de objetos matemáticos. O autor salienta que o referido sentido envolve vários tipos de conceções flexíveis que podem ser inter-relacionadas pelo aluno, nomeadamente a estrutura subjacente à operação, suas propriedades, seu uso, suas relações com outras operações e estruturas matemáticas, suas generalizações e as várias formas e contextos em que as operações podem existir. Com base em Huinker (2002), McIntosh, Reys e Reys (1992) e Slavit (1999), Pinto (2011) apresenta um modelo para caraterizar o sentido de operação, que requer o desenvolvimento integrado de quatro componentes, nomeadamente (i) estar familiarizado com diferentes significados e contextos das operações – significados que são essencialmente os mesmos dos números naturais, mas requerem algumas adaptações e cuidados na contextualização das operações, tendo em atenção que existem algoritmos diferentes (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010). Assim, a adição continua a significar "juntar/combinar" e "acrescentar" e a subtração a significar "retirar", "comparar" e "completar", alterando apenas as quantidades envolvidas e a(s) forma(s) como estas se encontram expressas (nestes casos são um quociente entre uma parte e um todo e antes eram cardinais ou ordinais); (ii) ter flexibilidade no uso das propriedades das operações – que requer o desenvolvimento de capacidades de cálculo, como o uso de factos operacionais básicos (compor e decompor números), entre outras estratégias de cálculo baseadas nas propriedades das operações; (iii) ser razoável na análise de processos e resultado – que requer o desenvolvimento da capacidade de conhecer o efeito de uma operação sobre um par de números, entre outras; e (iv) usar símbolos e linguagem matemática formal com significado – que requer o desenvolvimento da capacidade de formular problemas, entre outras.

Conforme referido, de acordo com Pinto (2011), o modelo apresentado para caraterizar o sentido de operação requer o desenvolvimento integrado das suas quatro componentes. Assim, os alunos revelam sentido de operação ao evidenciarem conhecimento simultâneo das referidas componentes.

Porém, para que os alunos possam desenvolver os referidos sentidos é essencial que o professor prepare e desenvolva tarefas com esse intuito, assumindo o seu conhecimento um papel central na preparação e implementação de tais tarefas (e.g., Charalambous, (2008) e Ribeiro e Carrillo (2011)). Este conhecimento do professor pode ser considerado sob distintas perspetivas, sendo que a maioria destas encontra a sua génese nos trabalhos de Shulman e colegas (e.g., Shulman (1986)). De entre esses trabalhos destacamos a concetualização do *mathematical knowledge for teaching* – MKT (Ball et al., 2008). Complementar ao conhecimento do conteúdo matemático, às especificidades deste, e sustentado nele – considerando os subdomínios definidos por Ball e colegas (Ball, et al., 2008) – de modo a dar corpo às tarefas de ensinar de forma a que os alunos entendam o que fazem e porque o fazem a cada momento, é também importante um conhecimento didático do conteúdo. Este conhecimento permite operacionalizar a prática letiva tornando o conhecimento matemático acessível aos outros (alunos), mas esse tornar acessível apenas se poderá efetivar se o professor for detentor de um sólido e amplo conhecimento do conteúdo, considerando-o integrado nos três subdomínios considerados no MKT (Cf. Figura 1). Esta concetualização considera os domínios do conhecimento do conteúdo e didático do conteúdo subdivididos, cada um deles, em três subdomínios. Pelo contexto específico do trabalho que temos vindo a desenvolver, aqui abordamos apenas o domínio do conhecimento do conteúdo e, em particular, os subdomínios do *common e specialized content knowledge*. Esta opção tem em consideração também o facto de que apenas sendo detentores de um amplo e sólido conhecimento do conteúdo, na perspetiva que o encaramos e, portanto, de forma compreensiva, será possível ao professor, desenvolver os subdomínios do conhecimento didático do conteúdo (Baumert et al., 2010).

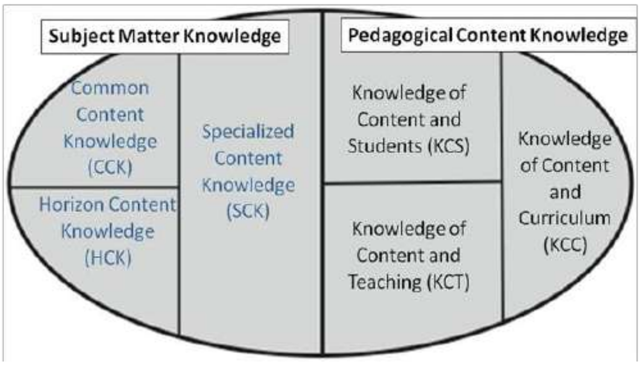


Figura 1. Domínios do MKT (Ball et al., 2008)

O *Common Content Knowledge* (CCK) corresponde a um conhecimento matemático que nos permite saber fazer – na ótica do utilizador. Corresponde ao conhecimento de um qualquer indivíduo com alguma formação matemática e que lhe permite, entre outros, encontrar respostas corretas para determinada operação ou resolver problemas do seu contexto laboral. Associa-se, também, entre outros, a um conhecimento que permite reconhecer respostas algebricamente incorretas e usar notações matemáticas corretas. Associado aos números racionais corresponde, por exemplo, a saber determinar o resultado correto de (3/8+1/2) e, portanto, a identificar como incorreto o resultado de 4/10. No âmbito da enunciação de problemas, relaciona-se, também com o conhecimento que permite identificar como sem sentido/significado o enunciado "O João tinha 3/8 de um berlinde, depois ganhou mais meio berlinde. Com quantos berlindes ficou?".

O *Specialized Content Knowledge* (SCK), complementar do CCK, corresponde a um aspeto do conhecimento especificamente associado à atuação docente e que se associa, entre outros, ao entender os porquês subjacentes a determinada resolução, à atribuição de sentido aos erros dos alunos, ao avaliar ideias alternativas e explicações matemáticas, ao usar representações matemáticas distintas para uma mesma noção (conhecendo em profundidade os porquês da possibilidade de navegar frutiferamente entre elas – Ribeiro, 2011) e na precisão (e adequação) da linguagem matemática utilizada na prática. Corresponde, assim, e no contexto deste trabalho, por exemplo, a um conhecimento que permite atribuir sentido aos motivos matemáticos (complementares a um saber calcular o mínimo múltiplo comum – *mmc*) que levam a que para adicionar duas quantidades representadas por frações tenhamos de ter essas quantidades representadas sob uma mesma unidade dividida num mesmo número de partes (atribuição de sentido ao *mmc* num contexto de adição de frações). Em termos de enunciação de problemas, será expetável que um professor que tenha a intenção de permitir aos seus alunos a possibilidade de entenderem o que fazem e porque o fazem, detenha também um conhecimento relativo aos sentidos das operações e das suas especialidades envolvendo quantidades inteiras ou não.

Considerando que este conhecimento matemático para ensinar pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004) – e, portanto, aprendido, é fundamental aceder às áreas onde os professores (atuais e futuros) apresentam mais dificuldades, de modo a que formação se possa focar onde é, efetivamente, necessária (Ribeiro & Carrillo, 2011). O desenvolvimento destes aspetos poderá ser potenciado com a confrontação e vivência de situações similares às que se espera que os (futuros) professores possam vir a facultar aos seus alunos (e.g., Magiera, van den Kieboom & Moyer (2011)), discutindo-as e encarando-as como ponto de partida para o desenvolvimento de um tal conhecimento.

Metodologia

Tendo por intuito explícito obter informações que nos permitam concetualizar formas para contribuir, de modo efetivo, para a melhoria da formação de professores facultada nas nossas instituições, concetualizamos um projeto que tem como um dos seus objetivos aceder e desenvolver o MKT de (futuros) professores dos Primeiros Anos. Este texto é um dos resultados desse projeto no âmbito dos números racionais, no sentido de efetuar uma contextualização e de definir um ponto de partida acedendo ao *estado da arte* relativamente a alguns dos aspetos do conhecimento matemático dos futuros professores.

O estudo combina uma metodologia quantitativa com um estudo de caso instrumental (Stake, 2005) tendo sido aplicado um conjunto de tarefas a futuros professores dos Primeiros Anos nas nossas Instituições no ano letivo de 2012/2013. Estas tarefas envolvem um conhecimento sobre números racionais e operações com estes números, que qualquer aluno do 6.º ano deveria estar em condições de resolver, considerando o que se encontra explícito no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Esta escolha tem também por base o facto de pretendermos discutir, posteriormente, com os estudantes, o conhecimento matemático para ensinar idealmente envolvido numa plena compreensão e posterior exploração em contexto de sala, de modo a que os futuros professores possam ser confrontados com situações similares às que esperamos possam facultar aos seus alunos (na linha do que refere Magiera et al. (2011)).

Estas tarefas foram respondidas individualmente por um conjunto de 56 estudantes no âmbito de Unidades Curriculares em três contextos distintos – tanto em termos de Unidades Curriculares distintas (sendo os autores deste texto os docentes de cada uma delas) como em termos da fase de formação em que se encontravam (1.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo e do 2.º Ciclo do Ensino Básico; 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica; 1.º ano do Mestrado em ensino do 1º. Ciclo). Esta diversidade de contextos foi propositada uma vez que não se pretende (nesta fase do trabalho) comparar as formações ou os níveis dos estudantes, mas sim obter uma mais ampla compreensão dos aspetos em análise, sendo essa diversidade encarada como mais um elemento de riqueza para um maior entendimento sobre os possíveis motivos que sustentam as dificuldades identificadas.

Aqui, por uma questão de gestão de espaço disponível, focamo-nos apenas nas respostas dos estudantes de duas das IES (correspondendo a 29 futuros professores) e discutimos, em concreto, uma das tarefas (com duas alíneas). Nesta foram fornecidas duas expressões numéricas (1- (3/8 + ½); 4–3 3/7) e solicitou-se aos estudantes que calculassem cada uma delas e formulassem um problema (com contexto real) que pudesse ser resolvido por cada uma das referidas expressões numéricas.

A análise efetuada centra-se na discussão e reflexão sobre os possíveis porquês associados às dificuldades nas componentes do sentido de operação evidenciadas pelos futuros professores aquando do cálculo das expressões numéricas apresentadas e formulação de problemas envolvendo as mesmas. Estas dificuldades são encaradas, por um lado, como uma oportunidade de aprendizagem e, por outro, como mais uma forma de contribuir para uma maior clarificação relativamente ao conteúdo do conhecimento matemático para ensinar e da sua especificidade.

Alguns resultados

Dos estudantes cujas produções aqui discutimos (29), apenas nove tentaram calcular o resultado das expressões apresentadas (e nem sempre corretamente) e, destes, apenas sete efetivamente tentaram formular problemas que consideraram puderem ser resolvidos pelas expressões fornecidas.

Para o cálculo de uma mesma expressão os estudantes apresentaram diferentes respostas revelando, algumas delas, desconhecimento sobre como adicionar e subtrair números racionais (considerado CCK). Houve, por exemplo, estudantes para quem a subtração à unidade de uma determinada quantidade diferente de zero, não os impediu de obterem uma quantidade igual à unidade (Figura 2). Revelam desconhecer o efeito da operação sobre um par de números racionais diferentes de zero e por conseguinte, falta de razoabilidade na análise de processos e resultados, evidenciando, assim, dificuldades nesta componente do sentido de operação (Pinto, 2011).

$$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{\overset{\times 4}{1}}{\underset{\times 4}{2}}\right) = 1-\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\right) = \frac{\overset{\times 8}{1}}{\underset{\times 8}{1}}-\frac{7}{8} = 8-7=1$$

Figura 2. Produção evidenciando desconhecimento do efeito da subtração sobre um par de números racionais

Houve ainda estudantes a revelarem pouca familiaridade com numerais mistos, evidenciando dificuldades em conectar esta representação de números racionais, com a representação em fração (Figura 3, abaixo). Por conseguinte, manifestaram dificuldades em recorrerem a factos operacionais básicos, que se repercutem na falta de flexibilidade no uso das propriedades das operações, mais uma das componentes identificadas por Pinto (2011) para caraterizar o sentido de operação. Estes estudantes também evidenciaram desconhecimento do efeito da operação sobre um par de números racionais, ou seja, falta de razoabilidade na análise de processos e resultados.

$$4-3\frac{3}{7} = 4-\frac{6}{7} = \frac{28}{7}-\frac{6}{7} = \frac{22}{7}$$

Figura 3. Produção evidenciando desconhecimento de factos operacionais básicos, bem como do efeito da operação sobre um par de números racionais

Outros estudantes, apesar de terem evidenciado algum entendimento de numeral misto, já que o consideraram corretamente como representando uma adição entre a parte inteira e a parte decimal, revelaram desconhecimento relativamente ao que se entende por subtrair – que quando subtraem este numeral têm de subtrair quer a parte inteira, quer a parte fracionária (Figura 4, abaixo). Assim, e ao contrário do que seria expectável, subtraem a parte inteira e adicionam a parte fracionária – revelando mais uma vez, desconhecimento de factos operacionais básicos, bem como do efeito da operação sobre um par de números racionais e por conseguinte, dificuldades respetivamente na flexibilidade no uso das propriedades das operações e na razoabilidade na análise de processos e resultados.

$$4-3+\frac{3}{7} = 1+\frac{3}{7} = \frac{7}{7}+\frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

$$4-3+\frac{3}{7} = 1\frac{3}{7}$$

Figura 4. Produções evidenciando desconhecimento relativamente à subtração de quantidades representadas em numeral misto

Dos sete estudantes que criaram enunciados, alguns optaram por "simplificar" a situação de partida e o enunciado do problema proposto, considerava uma expressão equivalente à apresentada, assumindo a unidade dividida já num mesmo número de partes – dividida em oito fatias (Figura 5).

$$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right) = 1-\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\right) = 1-\frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

A Joana comeu bolo que a sua mãe fez, durante o fim de semana. ~~no sábado, comeu 3~~ Sabendo que o bolo estava dividido em oito fatias e a Joana comeu 3 fatias no sábado e 4 no domingo, quantas fatias sobraram e que fração do bolo corresponde.

Figura 5. Produção de um enunciado para uma expressão equivalente à apresentada

Esta opção revela, por um lado, uma boa estratégia de resolução de problemas pois, se o que estava a criar dificuldades se prendia com o facto de existirem duas divisões diferentes do todo – considerando aqui a fração como parte-todo, então uma forma de solucionar o problema seria a de considerar uma sua representação equivalente. Porém, revela, por outro lado, dificuldades em relacionar símbolos com ações e conhecimentos informais, que pode decorrer da pouca familiaridade com os diferentes significados e contextos das operações de adição e subtração de números racionais. Deste modo, fica condicionada, também, a sua capacidade (conhecimento) de enunciar problemas que possam ser resolvidos por expressões numéricas dadas (algo que corresponde a um dos conteúdos do SCK do professor), e por consequência, a sua capacidade de usar símbolos e linguagem matemática formal com significado, outra das componentes identificadas por Pinto (2011) para caraterizar o sentido de operação.

Outro dos estudantes considerou uma unidade discreta (berlindes) e, uma vez que dividiu a unidade em oito partes iguais, assumiu que cada uma dessas partes correspondia a 20 berlindes (Figura 6).

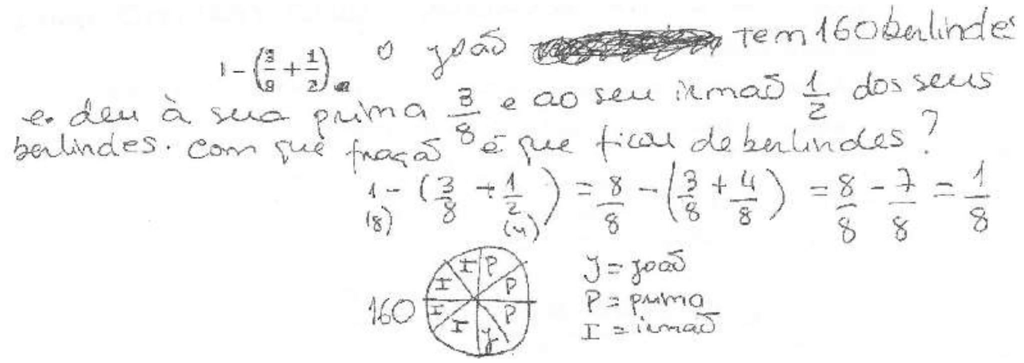


Figura 6. Produção de um enunciado com recurso à unidade discreta e à representação pictórica

Porém o recurso à unidade discreta parece ter sido apenas uma forma de auxiliar o seu raciocínio, dado que ao elaborar o enunciado para a expressão não teve em linha de conta a unidade considerada "(…). Com que fração ficou de berlindes?", sendo esta completamente irrelevante para o contexto do problema enunciado. De salientar ainda, que este foi o único estudante que recorreu a uma representação pictórica para a resolução do problema, o que parece ter-lhe permitido atribuir sentido às diferentes etapas dos procedimentos que efetuou.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e faz parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), financiado pelo Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. NY: NCTM.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd IGPME* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, México: PME.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hilbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. VII, pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

McIntosh, A., Reys, J., & Reys, E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8, 44.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, to appear.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ribeiro, C. M. (2011). Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 4, pp. 41-48). Ancara, Turquia: PME.

Ribeiro, C. M., & Guerreiro, P. (em preparação). Quando os alunos elaboram e resolvem problemas envolvendo racionais – o que podemos aprender também para a formação de professores.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Alemanha: PME.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J., & Silver, E. A. (2009). Problem posing in mathematics learning: Establishing a theoretical base for research. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd IGPME* (Vol. 1, pp. 299). Thessaloniki: PME.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Negociação de significados no 1.º ano de escolaridade: Conceitos e processos matemáticos[1]

António Guerreiro
ESEC, Universidade do Algarve, aguerrei@ualg.pt

Resumo. *Este artigo discute o papel da negociação de significados na definição de conceitos e processos matemáticos em aulas do 1.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do ensino básico. Os dados foram recolhidos por mim, por vídeo gravação, em aulas do 1.º ano de escolaridade de dois professores com habilitação profissional para a docência no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, na variante matemática/ciências da natureza. A análise de dados assume uma orientação interpretativa da ação e significação da prática profissional dos professores. Os resultados apontam para a importância da partilha e negociação de significados matemáticos no desenvolvimento de conceitos e processos matemáticos na aprendizagem da matemática e para o aprofundamento da formação matemática dos professores do ensino básico.*

Palavras-chave: negociação de significados; práticas profissionais; conceitos e processos matemáticos; comunicação matemática.

Introdução

A comunicação matemática como suporte do processo de ensino e de aprendizagem da matemática resulta do reconhecimento das interações culturais em sala de aula, entre o professor, os alunos e o conhecimento matemático (Sierpinska, 1998), reconhecendo o discurso como uma prática social (Godino & Llinares, 2000), em que sobressai a relevância de todos os intervenientes na negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). O conhecimento matemático dos alunos (e do professor) advém de contextos de negociação de significados, através da integração dos conhecimentos da ciência matemática com os conhecimentos pessoais de cada indivíduo.

O desenvolvimento da compreensão de conceitos e processos matemáticos (Guerreiro, 2011a, 2011b; Jiménez, Suárez & Galindo, 2010) determina a partilha e negociação de múltiplos significados, de acordo com o seu uso, em contextos específicos da matemática, e segundo as perspetivas e ações dos intervenientes (Araújo, 2004). A assunção da negociação de significados na partilha e interpretação dos conceitos e processos matemáticos pressupõe uma participação ativa dos indivíduos na conjugação das rotinas e procedimentos matemáticos conhecidos com a sua reinterpretação e a

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

negociação de novos significados e processos que ampliam os conhecimentos matemáticos dos alunos (e do professor).

Este artigo discute o papel da negociação de significados em aulas do 1.º ano de escolaridade (início da escolaridade formal) na definição de conceitos matemáticos, relacionados com a comutação de situações numéricas e espaciais, e de processos matemáticos, associados à sistematização do pensamento combinatório, tendo por objetivo valorizar a pertinência do aprofundamento do conhecimento matemático na formação inicial e contínua de professores do ensino básico. A negociação de significados matemáticos é ilustrada empiricamente por relatos de sala de aula de dois professores do 1.º ciclo do ensino básico (com formação em matemática/ciências da natureza), recolhidos no âmbito de estudos sobre práticas de comunicação matemática no 1.º ciclo do ensino básico.

Negociação de significados matemáticos

A negociação de significados matemáticos caracteriza-se por um processo dinâmico de construção de significados durante a atividade matemática na sala de aula (Meira, 1996), em resultado da construção interativa da intersubjetividade (Godino & Llinares, 2000), em que se confrontam distintas interpretações e soluções na busca de consensos (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010). As ambiguidades resultantes entre os significados matemáticos do professor e os significados atribuídos pelos alunos, especialmente nos primeiros anos de escolaridade, como (ainda) não membros da cultura de sala de aula (Voigt, 1994), são progressivamente resolvidas através de um processo de negociação de significados intrínseco ao ensino e à aprendizagem da matemática (Meira, 1996).

Esta ambiguidade é gerada pela significativa diferença entre os conhecimentos do professor e dos alunos, especialmente na introdução de conceitos matemáticos (Voigt, 1994), por vezes descorada, em resultado de uma cultura matemática tradicional de transmissão de informação e conhecimentos sem a participação ativa dos alunos (Frid & Malone, 1994). As ideias e os significados matemáticos da sala de aula são significativos à medida que os alunos são capazes de fazer conexões com outras ideias matemáticas e com outros aspetos do seu conhecimento pessoal e de construir novos significados a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com os outros indivíduos (Bishop & Goffree, 1986).

O poder e a autoridade do professor na sala de aula de matemática é uma das complexidades do processo de negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). O controlo do professor na sala de aula pode ser usado de modo a permitir a negociação de significados matemáticos ou a prescrever um conhecimento matemático sustentado na memorização e mecanização de procedimentos matemáticos. Bishop e Goffree (1986) defendem que o professor tem que desenvolver uma real consciência da autoridade que exerce na sala de aula, dos seus efeitos no discurso e na negociação de significados matemáticos e da necessidade de compreensão das estratégias singulares dos alunos, para assumir o discurso e a comunicação como alicerce da construção do conhecimento matemático.

Nesta perspetiva, a negociação de conceitos e processos matemáticos (Guerreiro, 2011a, 2011b; Jiménez , Suárez & Galindo, 2010) resulta das relações sociais entre os alunos e o professor (Voigt, 1994), emergindo do confronto interpretativo em múltiplas práticas sociais e culturais (Meira, 1996), cada uma delas em constante transformação, com especial relevo da cultura escolar matemática (Pinto & Fiorentini, 1997), suportada por premissas comunicativas na sala de aula que sustentam e impõem limites à atividade do professor e dos alunos.

Breve descrição da metodologia

Os dados empíricos desta comunicação resultam de estudos sobre a comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática no 1.º ciclo do ensino básico, desenvolvidos segundo uma perspetiva interpretativa da análise de dados, nomeadamente em relação à ação e significação sobre a ação da prática profissional dos professores. Os episódios de sala de aula retratam a prática profissional de dois jovens professores do 1.º ciclo do ensino básico (Beatriz e José – nomes ficcionados), ambos licenciados em Professores do Ensino Básico, variante Matemática/Ciências da Natureza, com oito anos de serviço docente (aquando das filmagens) nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, em duas turmas do 1.º ano de escolaridade da Escola Básica do 1.º Ciclo D. Francisca de Aragão, em Quarteira. A recolha de dados (no ano letivo 2007/2008) conjugou a utilização das técnicas de observação participante com a colaboração (Stake, 2000), com registos áudio e vídeo, entre os professores e o investigador (eu próprio) e a análise de dados sustentou-se na redução de dados (Goetz & LeCompte, 1984) com o intuito de espelhar a natureza das interações entre o professor e os alunos na negociação de significados matemáticos em sala de aula do 1.º ciclo do ensino básico.

Negociação de conceitos matemáticos

A negociação de conceitos matemáticos resulta da confrontação dos conceitos e representações matemáticas do professor, fundados no seu conhecimento matemático, com conceitos e representações matemáticas e sociais dos alunos, estabelecidos pelos seus conhecimentos matemáticos e sociais. A ambiguidade dos significados matemáticos resultantes da distinção entre quantidade e localização, associada às propriedades da adição, gerou conflito de interpretação nas aulas do 1.º ano de escolaridade, cuja tarefa matemática consistia na localização de cinco pássaros em duas árvores distintas (uma menor e outra maior). O aluno Michael apresentou a hipótese de dois pássaros na árvore pequena (com fundo vermelho) e três pássaros na árvore grande (com fundo verde), acompanhado do registo numérico 2 – 3. A aluna Taíssa dispôs três pássaros na árvore pequena e dois pássaros na árvore grande.

> Professora: − Que maneira é esta? É igual ou diferente à do Michael?
>
> Alunos: − É diferente.
>
> Professora: − É diferente. Então escreve lá (solicita à aluna o registo numérico da situação).
>
> Michael: − É igual.
>
> Professora: − Diz lá. É igual? Ele diz que é igual, o Michael diz que é igual.
>
> Aluno: − Igual, só que é diferente, o lado mudado…
>
> Professora: − O lado…
>
> Aluno: − O lado mudado.
>
> Professora: − O que é que é o lado mudado?
>
> Aluno: − O vermelho (árvore pequena) estava no verde (árvore grande) e o verde estava ali…
>
> Professora: − E agora tro…
>
> Aluno: − Trocou.
>
> Professora: − Trocou.
>
> [Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Perante o desacordo do aluno Michael em relação à diferença matemática entre as duas situações, Beatriz gera um processo coletivo de explicação e negociação da diferença das situações apresentadas, apesar da sua similaridade, através do conceito de comutação (troca). Este conflito relacionado com a comutação dos objetos, desta vez em relação a flores amarelas e vermelhas numa jarra, também ocorreu na outra turma, a do professor José. O professor pretendia saber quantas flores amarelas e vermelhas, num total de sete flores, estavam numa jarra. A aluna Marta tinha proposto uma jarra com quatro flores amarelas e três flores vermelhas. Um outro aluno propôs três flores amarelas e quatro flores vermelhas. Os alunos reagiram por considerarem duas soluções matematicamente iguais.

> Professor: − É igual ao dela?
>
> Alunos: − Não, é diferente, é ao contrário.
>
> Professor: − Ai é! Então, e qual é que está certa?
>
> Alunos: − É a da Marta (quatro flores amarelas e três flores vermelhas).
>
> Professor: − É a da Marta?
>
> Alunos: − Sim.
>
> Professor: − A outra está mal? Quantas flores estão lá?
>
> Alunos: − Sete.
>
> Professor: − Estão sete flores na jarra! A pergunta era «Quantas flores são vermelhas e quantas são amarelas?», não é? Estão lá flores de outra cor?
>
> Alunos: − Não.
>
> Professor: − Amarelas e vermelhas, não estão?
>
> Alunos: − Sim.
>
> Professor: − Então, o que é que está mal?
>
> Alunos: − Nada.
>
> Professor: − Então, qual é que está certa?
>
> Alunos: − As duas.
>
> Professor: − Estão as duas certas. Aqui temos quantas vermelhas? Vermelhas temos uma, duas, três, quatro (contando as flores), quatro vermelhas. E amarelas temos…
>
> Alunos: − Três.
>
> Professor: − Temos três. Quantas vermelhas agora aqui?
>
> Alunos: − Três.
>
> Professor: − E amarelas?
>
> Alunos: − Quatro.
>
> Professor: − São diferentes respostas?
>
> Alunos: − Sim.
>
> [Aula _ 1.º ano _ José]

A situação de permuta entre os pássaros nas árvores ocorreu igualmente na situação extrema de todos os cinco pássaros numa das árvores. O aluno Rui coloca 5 pássaros na árvore pequena e zero pássaros na árvore grande como solução diferente das anteriores, nomeadamente a do aluno André que colocou todos os pássaros na árvore grande.

Professora: − Então? Imitou quem?

Aluno: − Eu.

Professora: − O André?

Alunos: − Não.

Rui: − O André pôs aqui cinco (indicando a árvore grande) e aqui zero (indicando a árvore pequena).

Professora: − E tu?

Rui: − Pus aqui cinco (árvore pequena) e ali zero (árvore grande).

Professora: − Está igual ou diferente?

Alunos: − Diferente.

Professora: − O Rui sabe explicar que não fez igual ao André, pois não?

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

As ambiguidades geradas pela localização dos pássaros e pelas cores das flores foram facilmente ultrapassadas pelos alunos através da negociação do significado de permuta associada a resoluções matematicamente distintas. Os alunos assumiram sem dificuldade aparente a existência da situação extrema (cinco pássaros numa das árvores) sem se questionarem sobre a necessidade ou não da existência de pássaros nas duas árvores. Na turma do professor, que apresentou a tarefa das árvores com esquilos em vez de pássaros, um dos alunos questionou a existência dos cinco esquilos numa mesma árvore porque, atendendo à dimensão das árvores e dos esquilos, na sua perspetiva as árvores não suportavam todos os esquilos em simultâneo. A aluna Carolina vai ao quadro e coloca os cinco esquilos na árvore pequena.

Aluno: − Agora pôs todos na mesma árvore.

Professor: − A Carolina pôs… Foi assim que puseste, Carolina? (Aluna confirma gestualmente) Os cinco escondidos nesta árvore. Pode ser ou não pode ser?

Alunos: − Não.

Professor: − Quem é que diz que não, põe o braço no ar. (Alguns alunos colocam o braço no ar). Marco, então porque é que não pode ser?

Aluno: − Porque não cabem todos.

Professor: − Cabem, não estão lá todos agora?

(…)

Professor: − Estão cinco esquilos na árvore pequena, quantos estão na árvore grande?

Alunos: − Zero.

Professor: − Zero. Então, quer dizer que, para a Carolina, podem estar cinco na árvore pequena escondidos e zero aqui escondidos.

[Aula _ 1.º ano _ José]

A existência de zero pássaros ou esquilos numa das árvores não se refletiu na ausência de pintura, como uma solução no caso da tarefa da pintura das listas (com três e quatro listas) de uma bandeira, para a esmagadora maioria dos alunos. A ideia de uma bandeira não pintada como solução matematicamente possível só ocorreu na turma de Beatriz. Este episódio de sala de aula gerou uma situação de conflito secundada por uma negociação do significado de não pintada associada ao conceito matemático de nada como sinónimo de zero.

Professora: − O Tiago disse que falta uma (bandeira), qual é a que falta?

Tiago: − O nada.

Professora: − O nada, o que é que é o nada?

Tiago: − Falta aí uma não pintada.

Professora: − Não pintada. Concordam com ele?

Alunos: − Não.

Professora: − Então, explica lá aos teus colegas, porque é que pensaste assim.

Tiago: − É porque aqui não está nenhuma pintada. Estão todas pintadas…

Professora: − Sim…

Tiago: − Mas não há nenhuma que não esteja pintada.

Aluno: − São só pintadas.

Professora: − Ele está a dizer que pode haver outra bandeira que não tenha nenhuma risca pintada. E é uma bandeira diferente ou igual àquelas que pintaram?

Alunos: − Sim.

Professora: − É uma bandeira…

Alunos: − Diferente.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

A ausência de pintura como solução matemática na pintura de listas em bandeiras, com três ou quatro listas, foi abordada por José como uma ideia matemática pouco provável na sua turma de alunos do 1.º ano: “A instrução foi para eles pintarem as riscas de modo a obterem bandeiras diferentes, mas não houve nenhum que me pusesse uma bandeira completamente branca” [Aula _ 1.º ano _ José]. A existência ou não de uma bandeira não pintada, como solução matemática, direciona a discussão para o conhecimento matemático dos professores, neste caso para a importância de associar este tipo de tarefas matemáticas (pintura de listas de bandeiras) ao cálculo combinatório. A solução da bandeira não pintada existe associada às combinações de n, zero a zero, o que sugere a importância do papel do professor em estimular os alunos a esgotar todas as situações matematicamente possíveis, incluindo as situações extremas da bandeira integralmente pintada e da bandeira não pintada.

As situações extremas na pintura de bandeiras geraram alguma ambiguidade junto dos alunos, como casos extremos do cálculo combinatório, em contraponto com a localização dos pássaros ou esquilos nas árvores, propriedades da adição, denotando um entendimento matematicamente distinto das situações e, provavelmente, uma maior proximidade dos alunos com os problemas de adição, em relação ao cálculo combinatório. O episódio seguinte ilustra a negociação do professor e dos alunos sobre a possibilidade da pintura total das listas de uma bandeira.

> Aluna: − Podemos pintar as três riscas?
>
> Professor: − Acham que podem pintar as três riscas?
>
> Alunos: − Não.
>
> Professor: − E porque é que não podem pintar as três riscas? Não é uma maneira diferente de pintar a bandeira?
>
> Alunos: − É… Sim…
>
> Professor: − É ou não é?
>
> [Aula _ 1.º ano _ José]

A constante negociação de significados matemáticos na sala de aula é descrita pelo professor, ainda a propósito desta tarefa matemática, ao relatar que, para um dos alunos, a diferença limitava-se ao número de listas pintadas (limitação do pensamento ao aritmético): “A dificuldade dele era que, se pintasse só uma risca era uma hipótese, se pintasse duas riscas era outra hipótese e três riscas era outra hipótese, não havia mais hipóteses” [Aula _ 1.º ano _ José]. A discussão entre a localização e a quantidade foi recorrente na sala de aula, aludindo regularmente à igualdade ou diferença matemática das soluções analisadas. José negoceia com os alunos a valorização da quantidade em detrimento da localização (na tarefa matemática das árvores, associada às propriedade da adição): “Eu já disse que não me importa se é no tronco, se é na copa, não interessa. O que interessa é em qual das árvores eles (os esquilos) ficaram escondidos” [Aula _ 1.º ano _ José]. O conhecimento matemático profundo das tarefas matemáticas pelo professor pode promover uma maior consciência sobre o sentido matemático das situações e, consequentemente, sobre a natureza matemática da negociação de significados matemáticos com os alunos.

Numa outra tarefa matemática com sentido combinatório (localização de três árvores em torno das quatro paredes de uma escola), as ambiguidades entre a quantidade (em relação a cada uma das paredes) e a sua localização espacial foram progressivamente ultrapassadas por negociação de significados matemáticos. O conforto entre duas perspetivas sobre o sentido de diferença matemática é esgrimido entre dois alunos com a mediação e incentivo da professora. O Aluno Michael coloca três cruzes (em representação de três árvores) em forma de V junto à parede da frente (localizada em baixo) da escola (representada por um quadrado).

> Professora: − Olhem lá para esta maneira do Michael!
>
> Taíssa: − Já está (representada anteriormente).
>
> Professora: − Explica lá. Onde é que já está Taíssa?
>
> Taíssa: − Está ali, terceira de cima.
>
> Professora: − Explica lá, achas que é igual ou diferente.
>
> (…)
>
> Michael: − Aqui faz assim (indica V), diferente.
>
> Taíssa: − Não professora, é igual porque ali está três cruzinhas e ali também está três cruzinhas.
>
> (…)
>
> Professora: − Se contarmos o número de árvores, aqui estão três e aqui estão três e a parede é a mesma, elas são…
>
> Aluna: − Diferente.
>
> Professora: − Diferentes? Taíssa, elas são iguais.
>
> [Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

A ambiguidade entre as parcelas e a sua soma num problema matemático relacionado com padrões (matematicamente associados aos termos de uma sucessão e à série correspondente) é negociado por ambos os professores. A distinção entre parcelas e soma numa situação de observação de uma gravura com pessoas à janela (n pessoas na janela de posição n).

> Professora: − Quantas pessoas estão em cada uma das janelas?
>
> Alunos: − Dez.
>
> (…)
>
> Professora: − Em cada janela? Não perguntei «Quantas estão ao todo?»

(…)

Jorge: − A primeira janela só tem uma pessoa, a segunda tem duas, a terceira tem três e a quarta tem quatro.

Professora: − A resposta dele está certa?

Alunos: − Sim.

Professora: − Pedia tudo junto? O que é que pedia lá na pergunta?

Jorge: − Não era tudo junto.

Professora: − Era o quê?

Jorge: − Era tudo separado.

Professora: − Era tudo separado, era em cada uma das janelas. Tinham que contar quantas pessoas estão na… primeira, quantas estão na…

Alunos: − Segunda, terceira e quarta.

Professora: − E na quarta. Vocês todos perceberam mal a pergunta, só o Jorge e a Inês é que perceberam.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Apesar da negociação de significados entre parcelas e soma, a ambiguidade tornou-se recorrente nas situações de extensão da tarefa anterior.

Professor: − A minha pergunta foi: «Se eu desenhar outra janela, quantas pessoas irão cá estar?

Aluno: − Cinco.

Outro Aluno: − Cinco?

Joaquim: − Quinze.

Alunos: − Cinco.

Professor: − Porque é que dizes quinze, Joaquim? Como é que tu contas? Vem cá (ao quadro) contar. Explica lá como é que estão quinze.

Aluno Joaquim escreve no quadro.

Professor: − Um, duas pessoas, três pessoas, quatro pessoas, cinco pessoas (acompanhando os registos do aluno). Então, estavam cinco pessoas. Estás a dizer que o total dá é…

Joaquim: − Quinze.

Professor: − A minha pergunta era «Quantas pessoas estavam aqui nesta janela (a quinta)?». Nesta janela vão estar quantas pessoas? Nesta aqui?

Joaquim: − Cinco.

Professor: − Nesta vão estar cinco. Ao todo vão estar quantas?

Alunos: − Cinco.

Professor: − Quando eu digo «ao todo», é todas. Quando eu digo «nesta», é só nesta. Nesta janela vão estar…

Alunos: − Cinco.

Professor: − Nesta janela vão estar cinco pessoas. Ao todo é que passam a estar quinze. Ao todo é que vão estar…

Alunos: − Quinze.

Professor: − Mas nesta janela só vão estar?

Alunos: − Cinco.

[Aula _ 1.º ano _ José]

A negociação de significados matemáticos revela uma significativa relevância do conhecimento matemático do professor na abordagem com os alunos sobre os conceitos matemáticos, associados a cada uma das tarefas matemáticas, especialmente em relação aos problemas e outras atividades de natureza investigativa. Nos episódios de sala de aula apresentados, parece existir uma familiaridade social e escolar dos alunos com as situações resultantes de propriedades numéricas em contraponto com o pensamento combinatório e com a regularidade de padrões. Nestas circunstâncias, a profundidade do conhecimento matemático do professor pode condicionar o sentido matemático da negociação de significados na sala de aula.

Negociação de processos matemáticos

A negociação de processos matemáticos confronta processos matemáticos e sociais condicionados pelo espaço institucional da escola e do contexto da aula de matemática (Meira, 1996). Neste sentido, uma das linhas estruturantes do papel do professor emerge do ensino de processos matemáticos estruturantes do conhecimento e pensamento matemático. O professor José desafia os alunos a estruturarem o seu pensamento em torno de uma tarefa matemática associada ao pensamento combinatório. A aluna Eva começou por pintar (no quadro da sala de aula) uma bandeira com as quatro listas pintadas, seguida de uma bandeira com duas listas pintadas (a primeira e a quarta). O professor José propõe aos alunos uma sequência lógica na pintura das bandeiras.

Professor: − Pintou uma (bandeira) de quatro riscas, sim senhora. Continua. Agora optou por pintar uma de duas riscas. E agora o que é que a Eva podia fazer?

(…)

Aluna: − Pode pintar uma e depois outra.

Alunos de dedos no ar.

Professor: − Martins?

Martins: − Pode pintar duas juntas. E na outra fazer duas juntas diferentes, para cima e para baixo.

(…)

Professor: − O que o Martins está a fazer, ele já vai explicar.

(…)

Professor: − O Martins pintou na mesma duas risquinhas de maneira diferente (terceira e quarta) e voltou a pintar outra vez duas risquinhas de maneira diferente (primeira e segunda). O que é que o Martins está a fazer? O que é que ele está a fazer?

(…)

Professor: − Está a tentar ver… Pintando duas riscas quantas maneiras há. Há mais alguma de duas riscas, Martins?

(…)

Professor: − O que o Martins está a fazer é esgotar as hipóteses todas com duas (listas pintadas)…

Alunos: − Riscas.

[Aula _ 1.º ano _ José]

Esta negociação de processos matemáticos emerge na sala de aula de Beatriz com uma tarefa matemática baseada no produto cartesiano. Neste contexto, Beatriz tenta organizar o pensamento dos alunos estimulando a organização deste produto por fixação de um dos fatores. A tarefa proposta aos alunos consistia no vestir de uma menina com uma camisola amarela, azul ou cor-de-rosa e uma saía verde ou vermelha. Após a realização dos alunos, a professora aproveita a sistematização da tarefa matemática para incentivar numa sequência lógica a pintura das camisolas e saías.

Professora: − Qual será destas todas a maneira mais fácil e de não se enganarem?

Alunos de dedos no ar.

(…)

Professora: − Pintam a camisola amarela com a saía… (indicando as camisolas e saías em folha colorida no quadro)

Alunos: − Verde.

Professora: − Pintam a camisola…

Alunos: − Azul…

Professora: − Com a saía…

Alunos: − Verde.

Professora: − A camisola…

Alunos: − Rosa…

Professora: − Com a saía…

Alunos: − Verde.

Professora: − Já estão todas as maneiras de vestir a saía verde. Agora, a camisola…

Alunos: − Amarela…

Aluna: − Com a saía vermelha.

Professora: − Com a saía vermelha. A camisola…

Alunos: − Azul com a saía vermelha.

Professora: − E a camisola…

Alunos: − Rosa com a saía vermelha.

Professora: − E assim nunca se enganam. Vão seguindo a ordem e vão pintando.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Esta organização do pensamento dos alunos foi igualmente estimulada pela professora em torno de uma tarefa matemática associada ao cálculo combinatório. A professora Beatriz estrutura a atividade dos alunos atendendo à estruturação do pensamento matemático. A aluna Cláudia fez 3 cruzes (a representarem árvores) à direita do quadrado (representante da escola).

Professora: − Olhem lá esta que a Cláudia fez. Agora qual é a que vocês faziam a seguir?

David: − Do outro lado.

Professora: − De qual lado?

David: − Deste (esquerda).

Professora: − E fazias ali quantas árvores?

David: − Três.

Professora: − Três. David vem cá fazer como estavas a dizer que fazias. A Cláudia fez aquela, agora o David diz que faria outra no outro lado.

David desenha 3 cruzes no lado esquerdo.

Professora: − Ele fez agora daquele lado. Agora, quem é que fazia… De que maneira… Diz lá Tiago.

Tiago: − Em cima.

Professora: − Agora fazias?

Tiago: − Todos em cima.

Professora: − Todos em cima. Vem lá fazer.

Tiago faz as 3 cruzes em cima.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Esta organização do pensamento dos alunos esteve igualmente presente nas aulas do professor José: “O Vasco, o amigo Vasquinho está a fazer sempre o quê? Diga lá, qual é a sua lógica, senhor Vasco? O Vasco está sempre a fazer as duas árvores neste lado (direito) e a outra árvore é que vai mudando de sítio, é verdade ou mentira?” [Aula _ 1.º ano _ José].

A negociação de processos matemáticos parece estruturante na construção do conhecimento e pensamento matemático dos alunos. O desenvolvimento de um ensino matemático baseado em processos de negociação de significados pode estar condicionado ao conhecimento matemático dos professores ao nível do conhecimento de e sobre matemática, incluindo conceitos e processos matemáticos.

Considerações finais

A negociação de significados matemáticos emerge do conflito entre as interpretações que os alunos, neste caso do primeiro ano de escolaridade, têm dos conceitos e processos matemáticos e dos conceitos e processos sociais, como referem Meira (1996) e Voigt (1994). Neste sentido, o conhecimento matemático do professor, mesmo na abordagem de tarefas matemáticas elementares, propostas aos alunos do primeiro ano, pode ser estruturante da natureza do conhecimento matemático dos alunos, nomeadamente em relação ao conhecimento profundo dos conceitos matemáticos e à estruturação do seu pensamento matemático.

A aparente familiaridade dos alunos com as propriedades numéricas em detrimento do pensamento combinatório e algébrico pode sugerir um desnível de conhecimento dos professores em relação aos mesmos temas matemáticos, implicando uma deficiente negociação de significados dos conceitos e processos matemáticos, neste caso combinatórios e algébricos. Nesta perspetiva, a formação inicial e contínua de professores de matemática deve valorizar a reflexão sobre as estratégias de negociação de significados matemáticos do professor, como defendem Bishop e Goffree (1986), evidenciando a partilha de conhecimentos entre os alunos e o professor, o questionamento do professor, a linguagem matemática e os processos de raciocínio matemático.

Nesta ótica, advogo uma formação matemática dos professores do ensino básico com incidência no conhecimento de e sobre matemática, nomeadamente em relação aos conceitos e processos matemáticos que excedem significativamente o conhecimento de regras e procedimentos matemáticos, a partir de tarefas com características figurativas e outras relacionadas com o ensino básico, equacionando as interpretações alternativas dos conceitos e processos matemáticos dos alunos.

Referências bibliográficas

Araújo, J. (2004). Um diálogo sobre comunicação na sala de aula de matemática. *Veritati*, 4, 81-93.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Frid, S. & Malone, J. (1995). Negotiation of Meaning in Mathematics Classrooms: A Study of Two Year 5 Classes. *Mathematics Education Research Journal*, 7(2), 132-147.

Godino, J. & Llinares, S. (2000). El Interaccionismo Simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática,* Vol. 12, 1, 70-92.

Goetz, J. & LeCompte, M (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Orlando: Academic Press, Inc.

Guerreiro, A. (2011a). Imposição ou negociação de significados matemáticos. *Educação e Matemática,* 115, Novembro/Dezembro 2011, 73-75.

Guerreiro, A. (2011b). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Jiménez, A., Suárez, N., Y Galindo, S. (2010). la comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Práxis & Saber*, Vol. 1, 2, 173-202.

Meira, L. L. (1996): Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula, *in*: Mira, M.; Brito, M. (Org) *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica* (Vol. 5, pp. 95-112). Rio de Janeiro: ANPEPP.

Pinto, R. A. & Fiorentini, D. (1997). Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para a “coisa”. *Zetetiké*, Vol. 5, 8, 45-71.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (1994). Case studies. In. Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Londres: Sage.

Voigt J. (1994). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

POSTERS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Da História da Matemática na Educação de Jovens e Adultos: Relações de saberes e contribuições pedagógicas

Rodrigo Donizete Terradas[1], *Josimar de Sousa*[2]
[1]SESI – Serviço Social da Indústria, Brasil, rodrigoterradasmt@hotmail.com
[2]Universidade do Estado de Mato Grosso, Brasil, jsousa.mt@unemat.br

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo central compreender como a História da Matemática contribui no processo de ensino/aprendizagem dos sistemas de numeração na Educação de Jovens e Adultos (EJA). A base teórica desta pesquisa está apoiada em: (1) Miguel e Miorim (2004) e D'Ambrósio (1999), que discutem os conceitos e interrelações da História da Matemática com o ensino da Matemática; (2) Fonseca (2002), que trata a Educação Matemática no âmbito do EJA; e em Fantinato (2004), que aborda a Etnomatemática na EJA. O poster que apresentamos resulta de uma pesquisa qualitativa. A coleta de dados baseou-se na aplicação de uma Sequência Didática aos alunos do II Segmento (Ensino Fundamental) da EJA na cidade de São Jose dos Quatro Marcos - Brasil. Participaram no estudo vinte e três alunos do II Seguimento. A Sequência Didática foi concebida seguindo as indicações de Miguel (1993) relativas aos objetivos do uso da História da Matemática no ensino desta ciência. Os dados recolhidos provêm das respostas dos alunos dadas aos problemas propostos em sala de aula. Os resultados sugerem que a integração da História da Matemática na sala de aula contribui para a compreensão do conceito de sistema de numeração a partir do estudo de sistemas organizados por civilizações antigas. Percebeu-se que, aproximando os sistemas de numeração da Antiguidade com os que atualmente são usados no cotidiano, os alunos não só compreenderam o conceito de sistema de numeração como também tiveram a oportunidade de perceber que a Matemática é criação humana e está presente em todas as culturas, classificando, contando, enumerando as coisas na vida social ou de trabalho, como a dos alunos da EJA.*

Palavras-chave: História da Matemática; ensino-aprendizagem da Matemática; Ensino de Jovens e Adultos.

Referências Bibliográficas

D'Ambrósio, U. (1999). A História da Matemática: Questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In. Bicudo, M. (Org.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP.

Fantinato, M. (2004). A construção de saberes matemáticos de jovens e adultos no Morro de São Carlos. In: *Revista Brasileira de Educação*, *27*, 109-124.

Fonseca, C. (2002). *Educação Matemática de Jovens e Adultos*. Belo Horizonte: Autêntica.

Miguel, A. (1993). *Três Estudos sobre História e Educação Matemática* – Tese de Doutorado – Faculdade de Educação, Unicamp.Campinas.

Miguel, A., & Miorim, A. (2004). *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autentica.

SIMPÓSIO 5

MATERIAIS DIDÁTICOS E RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Coordenadores: *Manuel Vara Pires* & *Nélia Amado*

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática

Manuel Vara Pires[1], *Nélia Amado*[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, mvp@ipb.pt
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt

O ensino e aprendizagem da matemática não podem dissociar-se da sociedade em que vivemos. Os alunos do século XXI estão permanentemente ligados ao mundo e em contacto com o conhecimento, através das mais variadas tecnologias, não aprendendo da mesma forma que os seus pais aprenderam. O acesso à informação está disponível em todo o lado e a escola deve tirar partido desta situação e enquadrá-la. Contudo, fazê-lo não é uma tarefa fácil. A existência de inúmeros recursos e materiais não é, por si só, garantia de melhores aprendizagens. A questão reside na forma como eles são potencializados e aproveitados. Os professores estão perante um novo desafio e um novo dilema, o de gerir a infinidade de materiais e recursos que o século XXI lhes proporciona a cada momento. Apesar da atenção que a formação, inicial e contínua, de professores tem dado à integração dos recursos e materiais no ensino e na aprendizagem da matemática, este é um campo vasto e em permanente desenvolvimento.

Em educação matemática, quando nos referimos a "recursos", devemos pensar para além dos objetos materiais que habitualmente se reconhecem como tal para a aprendizagem da matemática (Adler, 2000). Geralmente, associava-se recursos a materiais manipuláveis, a réguas e compassos, ao quadro ou ao manual escolar, sem dúvida o recurso dominante (Pepin, 2009). Depois surgiram os recursos tecnológicos, como as calculadoras gráficas, os computadores, a Internet ou os quadros interativos. Ao mesmo tempo desenvolveram-se inúmeros *softwares* para a aprendizagem da matemática, como o GeoGebra. Atualmente os recursos devem ser encarados numa perspetiva mais ampla, envolvendo também, como defende Adler (2000), recursos humanos e culturais, dado serem igualmente importantes na formação matemática dos cidadãos.

Desde há várias décadas que os contextos exteriores à sala de aula começaram a ganhar relevância. Em 1987, a UNESCO publica um livro totalmente dedicado às atividades exteriores à sala de aula, mostrando a importância destas no sucesso escolar dos alunos. Em 2008, o 16th ICMI Study é igualmente dedicado a atividades e recursos para o enriquecimento da aprendizagem da matemática, designadamente tecnológicos, em ambientes que se prolongam para além da sala de aula.

As obras referidas apresentam recursos, que podem ser encarados como culturais e humanos no sentido atribuído por Adler (2000), dos quais são exemplos as visitas de estudo, as escolas de verão de matemática, as Olimpíadas e outras competições matemáticas, os museus de ciências ou os clubes de matemática. É nesta perspetiva ampla de materiais didáticos e recursos que se situam as diversas propostas presentes neste seminário.

As comunicações e os pósteres apresentados no simpósio "Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática" incluem várias contribuições resultantes de trabalhos de investigação em desenvolvimento, em Portugal e no Brasil, que ilustram exemplos da utilização de recursos e materiais didáticos, dentro e fora da sala de aula.

O professor e a sala de aula

Entre os recursos humanos, o professor e o seu conhecimento é, sem dúvida, o mais importante, na medida em que é ele que escolhe e seleciona os recursos, os transforma e reinventa nas suas práticas da sala de aula. São os professores que selecionam os problemas criando oportunidades significativas de aprendizagem e de desenvolvimento de capacidades, tal como a criatividade matemática.

Os alunos são igualmente recursos humanos, tal como as suas famílias ou amigos. Os recursos culturais são indiscutivelmente decisivos e devem ser tidos em conta, já que o meio em que cada aluno está inserido, o contexto rural ou urbano, é um recurso cultural determinante que influencia naturalmente as suas experiências e aprendizagens. De facto,

> os recursos, políticas, práticas e ambiente de uma escola ajudam a explicar porque é que os estudantes são mais propensos a ter sucesso numa escola do que noutra e também a força da vantagem educacional que os estudantes obtêm nas escolas com níveis socioeconómicos mais favorecidos (OCDE, 2010, p. 103).

Assim, concluímos que os recursos e as condições mais favoráveis para o ensino e aprendizagem da matemática podem estar tanto dentro como fora da sala de aula.

Sandra Pinheiro e Isabel Vale, na comunicação *Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática*, referem uma experiência didática numa turma do

5.º ano de escolaridade, que procura analisar a forma de desenvolver a criatividade dos alunos, recorrendo à resolução e à formulação de problemas. Os resultados demonstram que os alunos são, de um modo geral, recetivos às tarefas abertas, revelando grande entusiasmo, empenho e interesse na concretização das mesmas. Os alunos envolvidos mostraram não estar habituados a este tipo de tarefas, razão pela qual os enunciados dos problemas por eles produzidos revelavam alguma desorganização, escassez de dados e, por vezes, eram de difícil compreensão. As autoras destacam o facto de nem sempre as produções mais criativas ao nível da formulação de problemas pertencerem aos alunos com melhores desempenhos.

Ana Barbosa apresenta o póster *Experiências matemáticas na educação pré-escolar: A importância da articulação,* que descreve as potencialidades de algumas tarefas que promovem a articulação entre diferentes áreas ou domínios do currículo da educação pré-escolar, com especial enfoque na área da matemática.

Kátia Medeiros e Misleide Santiago, no póster *Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: Explicitando o intertexto*, procuram identificar como é que o professor e os seus alunos concebem a formulação e a resolução de problemas matemáticos. Procuram, ainda, compreender como estes alunos formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto.

As competições matemáticas

Em Portugal, tal como em outras partes do mundo, temos assistido ao surgimento de competições matemáticas em diversos contextos escolares, sendo muitas delas organizadas por grupos de professores das universidades portuguesas. Geralmente estas competições, não estando vinculados diretamente ao currículo, podem permitir uma maior liberdade e oferecer um carácter desafiante. Por outro lado, os participantes dispõem de um período de tempo para a elaboração das respostas que possibilita o desenvolvimento de competências que não se coadunam com o tempo limitado da sala de aula. Segundo Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich & Taylor (2008), "estas atividades extracurriculares, como as competições matemáticas complementam, ampliam e enriquecem o trabalho feito em sala de aula" (p. 53).

As quatro comunicações seguintes têm como contexto de investigação os Campeonatos de Resolução de Problemas SUB 12 e SUB 14, desenvolvidos na Universidade do

Algarve, que se constituem como competições matemáticas de natureza inclusiva e baseadas na Internet.

A comunicação *O contributo da participação numa competição matemática para a aprendizagem de um aluno com necessidades especiais: O caso de Rui*, de Nélia Amado e Susana Carreira, relata o caso de um aluno com deficiência visual, dando destaque à importância da sua participação, ao longo de quatro anos, numa competição matemática de natureza inclusiva. No texto estão patentes aspetos que ilustram a evolução das suas competências matemáticas e tecnológicas e apresentam-se evidências de que a participação deste jovem, do 5.º ao 8.º ano de escolaridade, teve um papel muito significativo no seu desenvolvimento, nomeadamente na forma como estimulou a leitura e a comunicação matemática e o ajudou a superar obstáculos mais globais.

A comunicação *Fatores afetivos na resolução de problemas matemáticos desafiantes no contexto de uma competição inclusiva baseada na Web*, da autoria de Susana Carreira, Rosa Antónia Ferreira e Nélia Amado, foca a questão da procura de ajuda na resolução de problemas, o grau de apreciação e a dificuldade sentida pelos alunos ao resolver os mesmos. Os resultados sugerem que os participantes procuram ajuda sobretudo junto da família e dos professores, e que gostam bastante dos desafios colocados ao longo da competição, desafios esses que consideram, em geral, ser fáceis ou de dificuldade média. Indicam, ainda, a existência de uma forte correlação entre o gosto e o baixo grau de dificuldade sentida, bem como entre o gosto e a ausência de necessidade de procura de ajuda.

A comunicação *Criatividade matemática e flexibilidade de representação na resolução de problemas para além da sala de aula*, apresentada por Nuno Amaral e Susana Carreira, analisa a flexibilidade de representação associada à criatividade, a partir das resoluções enviadas pelos participantes. Os autores apresentam evidências da relação entre a criatividade expressa nas resoluções e a flexibilidade representacional. Concluem que a representação tabular assume elementos específicos e distintivos, num dado espetro de resoluções, permitindo afirmar que cada participante fez criativamente uma utilização própria desta forma particular de representação matemática.

Finalmente, Hélia Jacinto e Susana Carreira, na sua comunicação *"Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra,* mostram como uma concorrente nestes campeonatos coloca em interação os seus conhecimentos matemáticos e a sua fluência tecnológica para solucionar dois problemas do campeonato, com recurso ao GeoGebra. Os dados revelam que a jovem utiliza o programa como uma ferramenta-para-pensar, e que é o reconhecimento das potencialidades de ação do GeoGebra em estreita articulação com as suas aptidões que geram esta atividade de resolução de problemas.

As visitas de estudo

Este recurso cultural (Adler, 2000) tem sido pouco estudado e divulgado na educação matemática. Dificilmente encontraremos um estudante que, durante o seu percurso escolar, não tenha realizado, pelo menos, uma visita de estudo. No entanto, não é habitual que a disciplina de matemática esteja envolvida em visitas de estudo ou saídas de campo. Tal facto pode não ser alheio à necessidade de se elaborar uma planificação minuciosa e com objetivos precisos da visita, realizar a ação e efetuar uma reflexão que permita avaliar se foram alcançados os objetivos propostos. A dificuldade em encarar a visita de estudo como um recurso no ensino e na aprendizagem da matemática pode estar relacionada com conceções mais formais e estáticas desta disciplina e da sua aprendizagem. No entanto, uma visita de estudo pode ajudar-nos a mergulhar na vida real do dia a dia e permitir contactar de perto com a aplicabilidade da matemática e a sua contextualização.

Nesta perspetiva, na comunicação *Atividades matemáticas na interseção de saberes no 1.º ciclo do ensino básico*, apresentada por Fátima Regina Jorge, Fátima Paixão, Helena Martins e Maria Fernanda Nunes, a visita de estudo ao *Jardim do Paço de Castelo Branco* realizada pelos alunos do 4.º ano do 1.º CEB constituiu um excelente recurso no ensino e na aprendizagem da matemática em contexto real, permitindo estabelecer conexões entre a matemática e outras disciplinas. No texto são apresentados alguns dados relacionados com a planificação da visita de estudo. A importância da planificação da utilização de qualquer recurso é um dos aspetos enfatizado por Adler (2000), referindo que não é a existência de recursos mais sofisticados que melhora as aprendizagens mas a forma como o professor os coloca em prática. Uma visita de estudo não planificada poderia reduzir-se a um mero passeio ao Jardim, importando, por isso, definir inicialmente o que se pretende que os alunos aprendam e como o devem aprender. As autoras destacam a importância desta visita na aplicação de conhecimentos matemáticos em situações da vida real, bem como no desenvolvimento de aspetos afetivos essenciais na aprendizagem da matemática (Malmivuori, 2006).

Os projetos

Os projetos, a par de outras iniciativas, são um importante recurso na aprendizagem, em particular quando promovem as conexões entre várias áreas do conhecimento e um contacto direto com a matemática no mundo real. A realização de projetos pode conjugar diversos recursos ou materiais, culturais e humanos.

O póster *Do ponto ao espaço: Contributos do croché para a matemática do planeta Terra,* apresentado por Maria Antónia Forjaz, Alexandra Nobre, Cristina Almeida Aguiar e Maria Judite Almeida, destaca a relação da matemática com a biologia, em particular, no âmbito da geometria. Segundo as autoras este projeto propicia o desenvolvimento de diversas competências fundamentais e a aprendizagem dos diversos conceitos geométricos, assim como da interdisciplinaridade.

Referências bibliográficas

Adler, J. (2000) Conceptualising resources as a theme for mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*. *3*(3), 205-224.

Barbeau, E., & Taylor, P. (Eds.) (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Tayor, P. (2009). Challenges beyond the classroom – Sources and organizational issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Malmivuori, M. (2006). Affect and self-regulation. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 149-164.

Morris, R. (Ed.) (1987). *Studies in mathematics education – Out-of-school mathematics education*. Paris: UNESCO.

OCDE (2010). *PISA 2009 results: What makes a school successful? – Resources, policies and practices*. Acedido em setembro, 2013, em http://dx.doi.org/10.1787/9789264091559-en;.

Pepin, B. (2009). The role of textbooks in the 'figured world' of English, French and German classrooms – a comparative perspective. In L. Black, H. Mendick & Y. Solomon (Eds.), *Mathematical relationships: Identities and participation*. London: Routledge.

COMUNICAÇÕES

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM & CIEd da Universidade do Minho.

Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática

Sandra Pinheiro[1], *Isabel Vale*[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, sandrapinheiro@ipvc.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo. *Este artigo apresenta parte de uma investigação mais ampla que decorreu numa turma de 5.º ano de escolaridade, onde se desenvolveu uma experiência didática com o propósito de analisar de que modo é possível desenvolver a criatividade dos alunos, recorrendo à resolução e à formulação de problemas realizadas pelos alunos em díades. Optou-se por uma abordagem qualitativa, segundo o design de estudo de caso. Apresenta-se uma breve análise da criatividade na formulação de problemas, nas suas dimensões, fluência, flexibilidade e originalidade, aquando da resolução de três tarefas por duas díades. Os resultados demonstraram que os alunos, de uma forma geral, encontram-se bastante recetivos às tarefas abertas, demonstrando grande entusiasmo, empenho e interesse na concretização das mesmas. Por outro lado foi possível verificar que os alunos não estão habituados a tarefas desta natureza o que leva a criarem enunciados com escassez de dados, desorganizados e, por vezes, de difícil compreensão. Simultaneamente, verificou-se que na aula de matemática é possível surgirem produções criativas ao nível da formulação de problemas sem que estas pertençam necessariamente aos alunos de melhor desempenho.*

Palavras-chave: Criatividade; formulação de problemas; matemática.

Introdução

Criatividade, segundo a etimologia da palavra, vem do verbo *creare* que significa originar, gerar, formar e tem na sua origem a dimensão de nascimento e transformação (Cavalcanti, 2006). Leikin(2009) assegura que a definição de criatividade não é simples, pois existem variadas conceções e que estas estão em permanente mudança. Nesta sociedade que desperta para a criatividade em todas as áreas do saber, considerou-se pertinente verificar, ao nível da educação, até que ponto é possível encontrar criatividade no campo da matemática. É possível encontrá-la em todas as áreas da atividade humana (e.g. artes, ciências, trabalho, jogo) e todas as pessoas têm habilidades criativas. (National Advisory Committee on Creative and Cultural Education [NACCCE], 1999).

Nas escolas, nem sempre há espaço para explorar a criatividade assim como a própria formulação de problemas, que também é pouco explorada. A resolução de problemas é parte imprescindível em toda a aprendizagem matemática utilizando-a de um modo transversal permitindo que os alunos pensem de modos diferentes, estimulando a perseverança e curiosidade, promovendo a confiança quando se enfrentam situações desconhecidas, sendo estas capacidades de extrema importância no contexto extra sala de aula e na própria vida do dia-a-dia de cada aluno (NCTM, 2007).

A tarefa de formular problemas na aula de matemática

Uma tarefa só é um problema se exigir uma solução tendo em conta condições próprias: se o aluno entende a tarefa, mas não se depara de imediato com uma estratégia para a sua resolução e, em simultâneo, se se sente aliciado a procurar uma solução (Díaz & Poblete, 2001). Enquanto que Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), entre outros autores, consideram que a "resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjeturas " e "constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática" (p. 14). Por outro lado, a solução desses mesmos problemas de diferentes formas torna-se uma ferramenta poderosa para a construção de conexões matemáticas (Leikin, 2009).

As tarefas desafiadoras, onde se incluem os problemas, habitualmente exigem uma visão que promove o pensamento divergente, mais rico, complexo e produtivo, movimentando conhecimentos prévios e necessitando de perseverança, constituindo em si um estímulo para os alunos (Vale & Pimentel, 2012). Considera-se que o pensamento divergente durante a resolução de problemas carateriza-se pela observação atenta do problema, analisando todas as possibilidades de resolução e explorando a melhor estratégia para alcançar a solução do mesmo.

Polya (2003) refere que numa aula de matemática a resolução de problemas fica empobrecida se não for articulada com a formulação de problemas. Esta articulação é benéfica no processo de aprendizagem da matemática nomedamente pelo facto de contribui positivamente no desenvolvimento das habilidades na resolução de problemas, ao mesmo tempo que permite aprofundar os conceitos matemáticos envolvidos e estimular o pensamento crítico bem como capacidades de raciocínio (Boavida et al., 2008; NCTM, 2007).

Yuan e Sriraman (2011) afirmam que existem diferentes modos de referir formulação de problemas tais como descoberta de problemas, deteção de problemas, descobrindo problemas criativos, criação de problemas e prevendo problemas. Silver(1997) considera que a formulação de problemas se refere quer à criação de novos problemas quer à reformulação de um dado problema. O importante desta atividade não é chegar a uma solução de um determinado problema, mas sim a criação desse novo problema. Esta investigação assumiu como fio condutor ao nível da formulação de problemas a perspetiva de Silver (1997).

Singer, Pelczer e Voica (2011) referem que os alunos para serem criativos em matemática devem ser capazes de colocar questões matemáticas que alarguem e aprofundem o problema original, assim como resolver problemas de diferentes modos, exibindo desta forma capacidade de formulação de problemas, uma condição da criatividade matemática. A literatura sobre a formulação de problemas revela que esta atividade é pertinente em diversas perspetivas e refere também conexões entre a formulação de problemas e a criatividade. Na disciplina de matemática, a essência do pensamento matemático e a sua conexão com a criatividade deriva da ligação entre a formulação e a resolução de problemas. A atividade criativa vê-se no jogo de formular, na tentativa de resolver, reformulando resolvendo um problema (Silver, 1997). Segundo Singer, Ellerton, Cai e Leung (2011) formular um problema matemático pode aliciar os alunos a realizar uma autêntica atividade matemática, pois permite-lhes encontrar muitos problemas, métodos e soluções e simultaneamente promove-lhes a criatividade, incentivam-nos na procura de novos problemas, métodos alternativos e soluções inovadoras.

Boavida et al. (2008) apresentam duas estratégias para a formulação de problemas: *E se em vez de*? – com esta estratégia é pedida a criação de novos problemas através da modificação de dados de problemas já apresentados; *Aceitando os dados* – com esta estratégia são apresentadas situações estáticas, sejam elas figuras, expressões ou simplesmente um conjunto de dados, a partir das quais os alunos são convidados a criar um problema. Stoyanova e Ellerton(1996), por sua vez, identificam três tipos de situações na formulação de problemas: situações livres, estruturadas e semiestruturadas. Na formulação de problemas *em situações livres*, os alunos são desafiados a criar um problema a partir de uma dada situação, naturalista ou artificial. Na formulação de problemas *em situações estruturadas*, os alunos realizam a atividade com base num problema, sendo estimulados a explorar a sua estrutura ou a completá-la. Finalmente, na formulação de problemas *em situações semiestruturadas*, é dada aos alunos uma situação aberta, nomeadamente com a apresentação de fotos, desigualdades, equações, onde os alunos são convidados a apresentar problemas. Neste estudo optou-se por propor aos alunos situações de formulação de problemas *semiestruturadas* com vista a aplicação da estratégia *Aceitando os dados*.

A criatividade na formulação de problemas

Silver (1997) e Guerra (2007) consideram que a criatividade não é apenas própria dos alunos sobredotados ou excecionais, visão clássica de criatividade, mas assumem a visão contemporânea da conceção de criatividade em matemática. Segundo esta visão, contemporânea da criatividade Silver (1997) considera que, na matemática, a criatividade pode ser "promovida amplamente na população escolar em geral"(p. 75) e pode ser desenvolvida na maioria dos estudantes (Har & Kaur, 1998). Estas duas linhas de pensamento, apesar de divergirem no tipo de população onde é possível encontrar a criatividade, convergem quando consideram que a atividade criativa resulta da focalização do trabalho nos métodos criadores de formulação e resolução de problemas (Silver, 1997; Leikin, 2009). Silver (1997) refere ainda que a ligação da matemática com a criatividade não reside apenas na problematização, mas resulta da ligação entre a formulação e resolução de problemas e sugere que se pode promover a criatividade na matemática, mas tendo em atenção ao tipo de ensino utilizado, sempre alargado a todos os estudantes.

No âmbito da matemática criativa, de acordo com Pelczer e Rodríguez (2011), a investigação em educação matemática, é sustentada pelo propósito de que a criatividade é possível estar presente em todos os alunos e pode ser promovida utilizando tarefas com estrutura ajustada. A criatividade matemática é essencial no desenvolvimento de talento em matemática mas também é muito difícil de identificar e de avaliar (Mann, 2006).

Conway (1999) afirma que devem ser identificadas as categorias que incluem respostas que o investigador acredita serem originais ou matematicamente perspicazes. Ainda no âmbito da originalidade, Conway (1999) e Vale (2012) afirmam que para verificar a originalidade de uma solução no contexto de uma turma, pode-se recorrer a outros professores para colaborar na validação da escolha. Conway (1999) indica um método para a avaliação da fluência, flexibilidade e originalidade na resolução de problemas abertos sendo este composto por quatro fases: organização das possíveis soluções do problema por categorias; resolução dos problemas pelos alunos; identificação das categorias em que se enquadram as respostas; pontuação dos estudantes para cada dimensão. Esta pontuação é dada às respostas dos alunos de acordo com cada área – fluência, flexibilidade e originalidade. Esta metodologia foi seguida ao longo deste estudo também para formulação de problemas. Neste sentido, após a organização dos problemas formulados pelas díades de acordo com a sua tipologia, foi analisado o desempenho geral quer da turma quer de cada um dos casos, em termos de formulação de problemas, seguida da atribuição de pontuação a cada dimensão da criatividade.

Do produto da atividade matemática, nomeadamente aquando da formulação de problemas, também resultam novos problemas, pelo que é possível adaptar as técnicas avaliativas da extensiva investigação no campo da resolução de problemas (Leung & Silver, 1997). De acordo com Kontorovich, Koichu, Leikin e Berman (2011) as tarefas de formulação de problemas podem ser uma ferramenta potente para avaliação da matemática criativa. Estes mesmos autores referem também o benefício de incorporar as tarefas de formulação de problemas no processo de ensino/aprendizagem da matemática.

Para analisar a criatividade na formulação de problemas são utilizadas as suas três dimensões – fluência, flexibilidade, originalidade – à semelhança do que acontece com a resolução de problemas. Leikin, Koichu e Berman (2009), afirmam que *fluência* corresponde ao número de problemas levantados que se ajustam aos requisitos da tarefa; *flexibilidade* corresponde ao número de diferentes tipos de problemas colocados; *originalidade* corresponde ao número de problemas colocados que são únicos ou raros. Nesta investigação, foi seguido este procedimento para a análise ao nível da formulação de problemas. No entanto foi realizada uma adaptação da metodologia em termos de originalidade. Para esta dimensão da criatividade, serão considerados os diferentes tipos de problemas formulados pelas díades serem únicos ou até mesmo raros, quando apenas se regista este tipo de problemas num máximo de duas díades (Pinheiro, 2013).

Contexto e metodologia

Neste texto descrevem-se parte dos resultados de um estudo qualitativo mais alargado segundo o *design* de estudo de caso, com o propósito de analisar e compreender de que modo é possível desenvolver a criatividade dos alunos, recorrendo à resolução e à formulação de problemas. A metodologia adotada decorre sobretudo do propósito do estudo onde se pretendia compreender o fenómeno a investigar em contexto natural (e.g. Bogdan e Biklen, 1994; Stake, 2009; Yin, 2011). A investigadora assumiu duplo papel na realização deste estudo, professora/investigadora, sendo observadora participante, com um papel privilegiado na recolha de dados, que segundo Yin (2011) reforça a ideia de que a fonte de recolha de dados primordial é o investigador. A construção da experiência didática resultou, por parte da investigadora, de uma pesquisa intensa quer no campo da resolução e formulação de problemas quer no campo da criatividade. Os critérios para a escolha dos casos, que tiveram como propósito obter o máximo de informação sobre o problema em estudo, incidiram em alunos com diferentes níveis de aproveitamento e sobretudo serem bons comunicadores revelando capacidades em termos de expressão escrita e expressão oral.

A experiência didática subjacente a esta investigação decorreu, ao longo das aulas de matemática, no 5.º ano de escolaridade, numa turma de vinte e um alunos, entre os nove e os onze anos, organizados em díades. Esta investigação, como já referido, teve como propósito estudar a criatividade dos alunos através da resolução e formulação de problemas, tendo em conta a tipologia de tarefas e analisando as representações que os alunos utilizam nas suas resoluções. Neste sentido, tornou-se pertinente explorar diferentes estratégias de resolução de problemas, dotando os alunos de ferramentas que facilitassem a realização das tarefas (Pinheiro & Vale, 2013). Neste artigo apenas serão analisadas resoluções de duas díades no âmbito da formulação de problemas, contextualizados na turma da qual faziam parte.

Nesta experiência didática as tarefas têm um papel fundamental, onde a professora aplicou o modelo de Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), tendo: realizado a previsão das resoluções das tarefas; acompanhado o trabalho realizado pelas díades durante a aplicação das tarefas num ambiente descontraído; selecionado os alunos para a apresentação do seu trabalho à turma; organizado os trabalhos, de forma sequencial, do mais comum para o mais diverso e escolhendo os alunos para fazerem a apresentação dos mesmos; e promovido discussões com a turma evidenciando as conexões entre as resoluções com as ideias matemáticas.

A experiência didática recaiu no tópico “Números racionais não negativos”. Em todas as tarefas, os alunos foram convidados a analisar, resolver e discutir as tarefas propostas, dando relevo à comunicação quer oral, quer escrita, nomeadamente às representações realizadas pelos alunos. A recolha dos dados foi realizada de forma holística, onde se incluem as observações na sala de aula, questionário, notas de campo, entrevistas e produções escritas dos alunos. Para melhor percecionar a ideia que possuíam de criatividade em matemática, foi realizado um inquérito no início da operacionalização da experiência didática. No fim da aplicação das tarefas, foi realizado um inquérito final onde os alunos exprimiam a sua opinião relativamente ao facto das tarefas serem criativas ou serem promotoras de produções criativas, ao grau de dificuldade das tarefas, assim como à metodologia de trabalho em díade. Também se utilizaram entrevistas às duas díades que constituíam os casos em estudo.

Ao longo deste estudo todos os dados recolhidos durante a investigação (e.g. as produções das díades, as gravações áudio e vídeo, notas de campo, relatos da investigadora redigidos tendo por base as observações realizadas, vários documentos escritos) foram cuidadosamente organizados e analisados de acordo com o problema em estudo e o enquadramento teórico adotado e, paralelamente, dando resposta às questões da investigação.

Resultados e discussão

O conjunto de tarefas foi selecionado de forma criteriosa, possibilitando a criação de problemas dentro do tema dos números racionais não negativos ou em outros temas, pois não existiam limitações neste campo. As tarefas[1] de formulação de problemas utilizadas eram de variados contextos de forma a possibilitar diferentes interpretações e ideias. Foram apresentadas figuras, gráficos, expressões algébricas e numéricas para as quais os alunos teriam que formular problemas. Por outro lado, as tarefas foram apresentadas segundo uma sequência atendendo ao grau de dificuldade das mesmas assim como aos tópicos que foram sendo abordados ao longo das aulas.

Para estas tarefas, perspetivava-se que a maioria das díades fosse capaz de criar pelo menos um problema de cálculo de um passo para cada uma das situações propostas. Eventualmente, alguma díade poderia apresentar um problema de cálculo de dois ou mais passos.

Nos problemas formulados, foi possível identificar algumas caraterísticas comuns a várias díades, nomeadamente: apresentaram textos sem formularem qualquer questão,

[1] Adaptadas de *Materiais da Unidade Curricular Didática da Matemática e das Ciências, no âmbito do Mestrado em Didática da Matemática e das Ciências da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*.

mas apresentaram respostas; criaram problemas com dados reais mas que revelam a falta de conhecimento da realidade; após apresentarem o contexto, questionaram quanto a uma situação e responderam relativamente a outra; criaram problemas demasiadamente básicos para o nível de ensino a que pertenciam e muitas vezes confusos e desorganizados ao nível das ideias; criaram textos que não estavam adequados à situação dada e enunciados com falta de dados que impossibilitam a compreensão da situação problemática.

Seguidamente são apresentadas as propostas de três tarefas, as formulações apresentadas por algumas das díades, independentemente de serem os casos do estudo principal ou não.

A Figura 1 mostra a tarefa 2F, a qual apresenta uma figura a partir da qual as díades tinham que formular dois problemas.

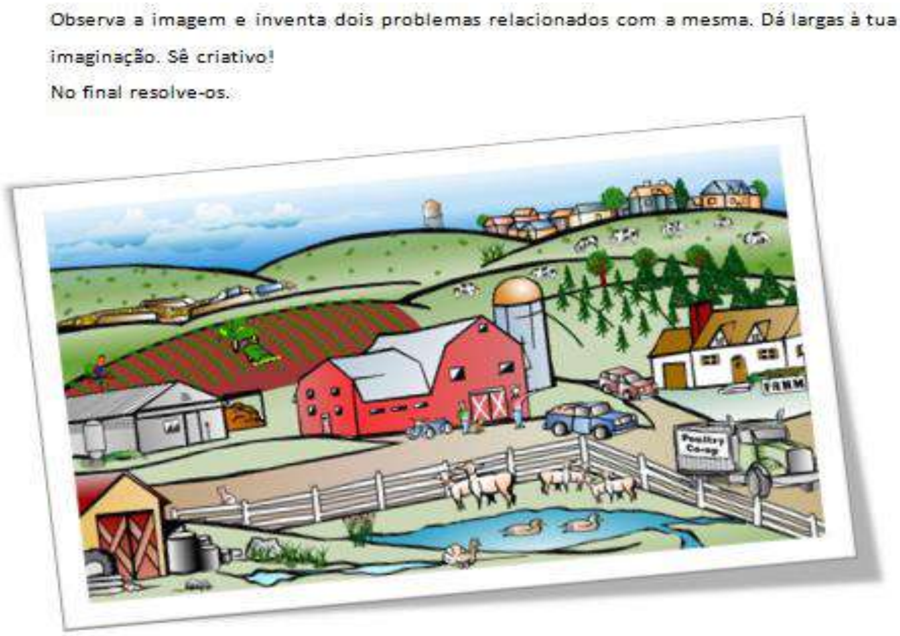


Figura 1. Tarefa 2F.

Para esta tarefa surgiram diferentes propostas, como podemos observar na Figura 2.

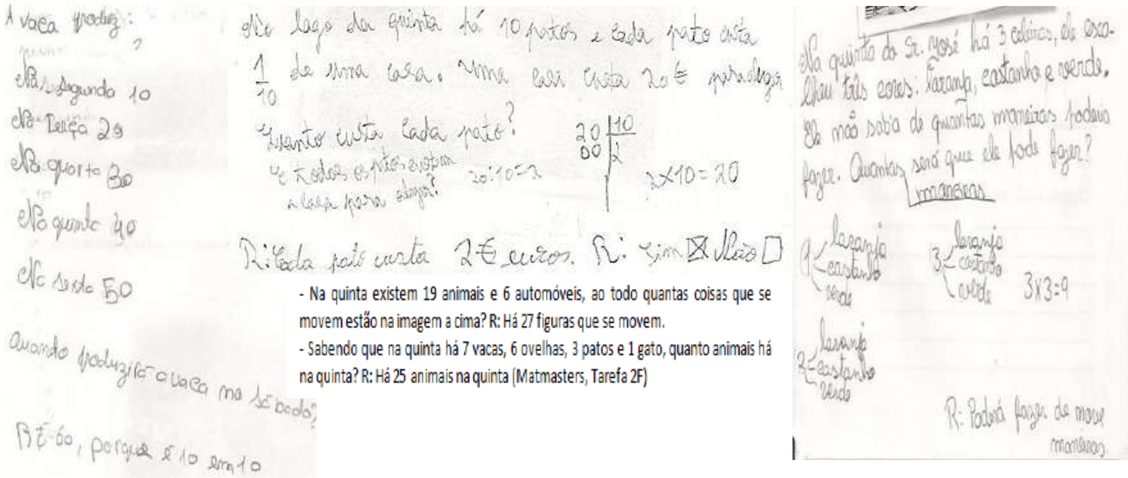


Figura 2. Tarefa 2F dos Resolucionistas, Matmasters e díades da turma.

As díades apresentaram variadíssimos problemas, desde os mais simples, que envolvem apenas um cálculo até àqueles um pouco mais sofisticados, que por meio de combinações apresentam várias soluções.

Na Figura 3 é possível observar a quinta tarefa de formulação de problemas proposta.

Utiliza os seguintes esquemas para formulares um problema. Solta a tua imaginação e apresenta diferentes ideias para o resolveres.

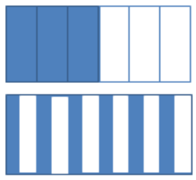


Figura 3: Tarefa 5F.

Um dos casos, para a tarefa 5F apresentou a proposta patente na Figura 4.

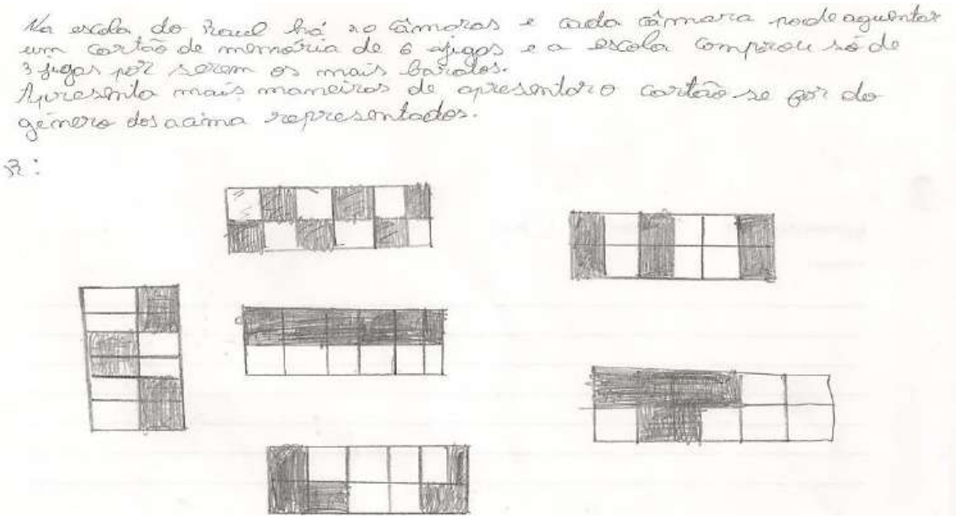


Figura 4. Formulação e resolução da tarefa 5F por parte dos Matmasters.

Após a entrevista à díade que apresentou este trabalho, tornou-se compreensível o que pretendiam com esta formulação. Verificou-se que, apesar da escassez de informação no enunciado, a díade criou um problema aberto que possibilita múltiplas soluções. A díade também foi capaz de apresentar soluções ao problema. Esta formulação, no contexto da turma é original uma vez que mais nenhuma díade apresentou uma formulação desta natureza.

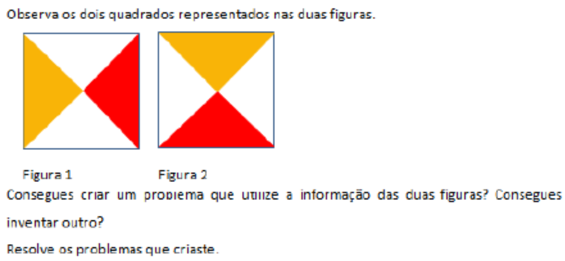
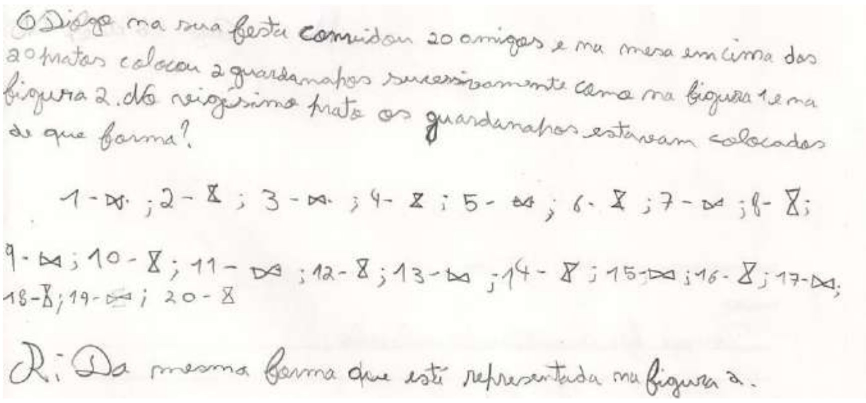


Figura 5: Tarefa 6F.

Para esta tarefa, apresenta-se na Figura 6, uma proposta original realizada por uma díade da turma que se destacou-se das demais, uma vez que mais nenhuma díade apresentou uma formulação com um problema desta tipologia.


O Diogo na sua festa convidou 20 amigos e na mesa em cima dos 20 pratos colocou 2 guardanapos sucessivamente como na figura 1 e na figura 2. Ao vigésimo prato os guardanapos estavam colocados de que forma?

1 - ⋈ ; 2 - ⧖ ; 3 - ⋈ ; 4 - ⧖ ; 5 - ⋈ ; 6 - ⧖ ; 7 - ⋈ ; 8 - ⧖ ;
9 - ⋈ ; 10 - ⧖ ; 11 - ⋈ ; 12 - ⧖ ; 13 - ⋈ ; 14 - ⧖ ; 15 - ⋈ ; 16 - ⧖ ; 17 - ⋈ ;
18 - ⧖ ; 19 - ⋈ ; 20 - ⧖

R: Da mesma forma que está representada na figura 2.

Figura 6. Formulação e respetiva resolução para a tarefa 6F.

Este trata-se de um problema em que, apesar de um enunciado desorganizado, em termos de linguagem, compreende-se o objetivo do problema. É bastante simples para o nível de ensino, no entanto, a díade contextualiza o problema de forma a trabalhar um padrão de repetição, sendo este um tópico pouco abordado pelos alunos.

Na análise da criatividade na formulação de problemas, utilizou-se uma estrutura da tabela que assenta igualmente nas três dimensões da criatividade – fluência, flexibilidade, originalidade. Esta análise foi realizada sobre o conjunto das tarefas. Neste sentido, foi apresentado o desempenho dos dois casos, Matmasters e Resolucionistas, e da turma, em termos de fluência, flexibilidade e originalidade. Contabilizando o número de situações propostas para formularem problemas, num total de oito, foram atribuídos pontos ao nível das dimensões: na fluência um ponto por cada problema criado, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução; na flexibilidade, um ponto por cada tipo de problema criado, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução; na originalidade, um ponto por cada problema criado único ou raro, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução, sendo que raro foi considerado aquele em que no máximo duas díades apresentam um problema do mesmo tipo. Em termos das díades da turma, foi utilizado o mesmo processo, registando-se na referida tabela a díade com maior pontuação, naquela dimensão, no conjunto das díades da turma. Após a análise cuidadosa de todo o trabalho desenvolvido, foi possível preencher a seguinte tabela:

Tabela 1. Comparação do desempenho entre os casos e a turma segundo das dimensões da criatividade no âmbito da formulação de problemas.

Formulação de problemas				
Tarefas	Díades	Dimensões da Criatividade		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade
Todas	Matmasters	8	3	2
	Resolucionistas	8	2	3
	Turma	7	3	1

Da análise da tabela, verificamos que os Matmasters e Resolucionistas, apesar dos resultados não se destacarem muito em relação à turma, no geral, revelam melhor desempenho em relação à mesma no âmbito das dimensões da criatividade.

Apesar do grande empenho na realização das tarefas, as díades, consideraram complexas as tarefas de formulação de problemas. Revelaram dificuldade em redigir os enunciados dos problemas de forma coerente, organizada e esclarecedora, sem que faltassem dados que permitissem a sua resolução e enquadrados com a situação proposta. Verificaram-se falhas ao nível dos enunciados criados com escassez de dados, sustentando-se quer em figuras quer em cálculos das situações propostas mas, na maioria das situações sem proceder a alusão das mesmas sem que haja referência a tal necessidade. No desempenho apresentado pelas díades aquando da aplicação destas tarefas de formulação de problemas, denota-se, por parte dos alunos, a falta de contacto com tarefas desta natureza, uma vez que revelam inúmeras dificuldades aquando da sua resolução. Finalmente os alunos formulam problemas com contextos reais mas não realistas uma vez que, podem ser resolvidos matematicamente mas não refletem a realidade.

Algumas considerações finais

O desenvolvimento da experiência didática em díade revelou-se bastante motivador para os alunos e simultaneamente eficaz no que respeita ao seu desempenho, o que vem de encontro ao referido por Ventura, Branco, Matos e César (2002), que afirmam que a emoção e a criatividade demonstradas pelos alunos, bem como o sentimento de realização matemática revelado por muitos indicam a importância da realização deste tipo de atividades em díade.

A formulação de problemas não pode dissociar-se da resolução de problemas pois formam um todo uma vez que a cada formulação precede a resolução do problema criado sendo esta uma forma de testar o que foi anteriormente criado. Como já foi referido anteriormente, os alunos não estavam familiarizados com este tipo de atividades, no entanto, surgiram diversas produções uma vez que é a formulação de problemas é algo que "surge naturalmente às crianças" (NCTM, 2007, p. 58), revelando-se estas criativas visto que evidenciam as dimensões da criatividade (Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2011). Os alunos foram incentivados na procura de diferentes soluções para as tarefas propostas promovendo deste modo o pensamento divergente (Pinheiro & Vale, 2012).

O trabalho desenvolvido em torno da criatividade com base na formulação de problemas proporcionou variadas experiências, ricas e desafiantes, como seja a própria resolução de problemas mas também o raciocínio e a comunicação, ideia partilhada por Vale (2012). Para concluir, apresenta-se um comentário proferido por uma aluna relativamente à matemática: "[a matemática] é uma disciplina criativa e é com criatividade que se aprende matemática." (Pinheiro, 2013, p. 140).

Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico* - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: um introdução à teoria e aos métodos*. (S. S. Maria Alvarez, Trad.) Porto (Trabalho original publicado em 1991): Porto Editora.

Cavalcanti, J. (2006). A criatividade no processo de humanização. *Saber (e) educar , 11*, 89-98.

Conway, K. (1999). Assessing Open-Ended Problems. *Mathematics Teaching in the Middle School , 4*, 510-514.

Díaz, M. V., & Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 45*, 33-41.

Guerra, E. (2007). Creatividad en Educación Matemática. In S. d. Torre, & V. Violant, *Compreender y Evaluer La Creatividad* (Vol. 1, pp. 457-469). Archidona, Málaga: Aljibe.

Har, Y. B., & Kaur, B. (1998). Mathematical problem solving, thinking and creativity: emerging themes for classroom instruction. *The Mathematics Educators, 3(2)*, 108-119.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they? *Proceedings of the 6th International Conference of Creativity in Mathematics* (pp. 120-125). Latvia: Latvia University.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R., Koichu, B., & Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality of problem-solving acts. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and Education of Gifted Students* (pp. 115-128). Rotterdam: Sense Publishers.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge and Creative Thinking on The Aritmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal , 9(1)*, 5-24.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted,* 30(2), 236-260.

NACCCE. (1999). All Our Futures: Creativity, Culture and Education. London: NACCCE.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Pelczer, I., & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity assessement in school setting through problem posing tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 8, n.º 1 e 2, 383-398.

Pinheiro, S. (2013). *A criatividade na resolução e formulação de problemas: Uma experiência didática numa turma de 5.º ano de escolaridade*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Pinheiro, S., & Vale, I. (2013). Criatividade e Matemática: Um caminho partilhado. *Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos* (*Atas*) (pp. 30-39). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Pinheiro, S., & Vale, I. (2012). Criatividade: onde a encontrar na sala de aula? *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 621-636). Lisboa: APM.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (1.ª ed.). (L. Moreira, Trad.) Lisboa: Gradiva.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3* , 75-80.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. In T. Rowland, & E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Math Education (CERME 7)* (pp. 1133-1142). Poland: University of Rzeszów.

Singer, F., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mahtematics Education*. *1*, pp. 137-166. Ankara, Turkey: PME.

Stake, R. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso* (2.ª ed.). Lisboa. (Trabalho original publicado em 1995): Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Shown and Tell. *Mathematical Thinking and Learning* , 313-340.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problemposing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Groupof Australasia.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interações , 20*, 181-207.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Ed.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347-360). Lisboa: SPIEM.

Ventura, C., Branco, N., Matos, A., & César, M. (2002). Um aventura fantástica: Contributo do trabalho em díade para o sucesso de uma actividade de investigação. In APM, *Actas do ProfMat2002*. Viseu: APM.

Yin, R. (2011). *Qualitative Research from Start to Finish*. New York: The Guilford Press.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between student's creativity and mathematical problem-posing abilities. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics* (pp. 5-28). The Netherlands: Sense Publishers.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Criatividade matemática e flexibilidade de representação na resolução de problemas para além da sala de aula

Nuno Amaral[1], *Susana Carreira*[2]
[1]EB 2,3 das Naus, Lagos, nualroam@gmail.com
[2]Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Nesta comunicação pretende-se examinar a criatividade matemática associada à flexibilidade de representação, a partir de resoluções produzidas por participantes no Campeonato de Matemática SUB12 a um dos problemas da edição 2012/2013. Procurámos evidências da relação entre a criatividade expressa nas resoluções e a flexibilidade representacional manifestada, numa atividade que decorre para além da sala de aula, tendo em conta que os ambientes escolares são muitas vezes restritivos para o desenvolvimento da criatividade matemática. Concluiu-se que a representação tabular, sendo claramente apropriada para a compreensão do problema e para a construção da respetiva solução, assumiu elementos específicos e distintivos num dado espetro de resoluções, permitindo afirmar que cada participante fez criativamente uma utilização própria e flexível desta forma particular de representação matemática.*

Palavras-chave: criatividade; resolução de problemas; flexibilidade representacional; representações matemáticas; competição matemática.

Criatividade matemática para além da sala de aula

A criatividade pressupõe a manifestação de ideias ou produtos originais e inovadores adequados ao contexto e cultura onde o fenómeno se manifesta (Starko, 2010) e deve ser entendida através das habilidades e prontidão de qualquer indivíduo para criar algo de novo (Gusev & Safuanov, 2012).

Neste estudo, a criatividade é entendida, na atividade de resolução de problemas de matemática, no sentido em que desta resultam resoluções originais, diferentes e perspicazes, no contexto específico em que a atividade decorre (isto é, com alunos de determinado nível etário, para além da sala de aula, no âmbito de uma competição matemática). A criatividade traduz-se, nesse contexto, na originalidade de produtos únicos e novos, do ponto de vista de quem os constrói, diferentes dos restantes quando comparados com os demais, num determinado grupo alvo, e perspicazes na revelação do pensamento matemático que conduziu à solução, de forma clara, compreensível e esclarecedora para quem examina a resolução (por ex., o professor, os colegas, o leitor a quem se dirigem).

A criatividade é uma característica inerente ao saber matemático e embora seja, muitas vezes, associada à genialidade ou a habilidades excecionais, ela pode ser amplamente estimulada na população escolar em geral (Mann, 2005; Pelczer & Rodríguez, 2011; Silver, 1997). A criatividade dos alunos nem sempre é visível em sala de aula. No entanto, defendemos que os alunos têm imensas capacidades latentes de inovação, pensamento criativo e formas alternativas de ver as coisas que precisam de ser estimuladas para se revelarem. Por isso, é importante um clima que inclua atividades e tarefas criativas, designadamente que suscitem desafio e curiosidade, cujas resoluções estimulem o raciocínio e a comunicação matemática e em que seja dada liberdade de resolução e expressão. Devem ser atividades e tarefas pensadas, não só com o propósito de estimular os alunos com melhor desempenho em matemática, mas também aqueles que têm potencial matemático e que se veem impedidos de manifestarem as suas capacidades em contextos curriculares restritivos, centrados em regras formais e algoritmos (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2011). A liberdade de trabalhar matematicamente é fundamental, uma vez que a criatividade se evidencia quando os alunos têm a possibilidade de encontrar e utilizar os seus próprios métodos de resolução (Pehkonen, 1997). Pode ter-se todos os recursos necessários para pensar de forma criativa mas sem um ambiente favorável, gratificante e promotor de ideias novas, é muito difícil ou praticamente impossível a qualquer indivíduo exibir a criatividade que tem dentro de si (Sternberg, 2007).

As atividades de resolução de problemas, para além da sala de aula, de que é exemplo o Campeonato de Matemática SUB12®, destacam-se pelas oportunidades de realização do potencial intelectual e criativo dos alunos e pelo importante papel que desempenham no apoio à educação matemática dos jovens em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009). Oferecem circunstâncias para o desenvolvimento do poder matemático dos alunos, para além daquelas que existem no contexto escolar, tendo em conta os níveis de aptidão de cada um. São contextos que permitem, não apenas estimular as capacidades de resolução de problemas, comunicação e raciocínio, como também atrair os alunos para a matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2009). Disponibilizam o tempo de que os alunos precisam para o desenvolvimento da criatividade matemática que, muitas vezes, não existe na sala de aula. Prestam um serviço importante à educação matemática e a um grande número de alunos promissores, com potencial talento matemático, constituindo um complemento natural ao trabalho realizado na escola (Koichu & Andzans, 2009).

Nesta perspetiva, as competições matemáticas surgem como parceiros da escola, ou seja, como promotores de uma aprendizagem paralela e complementar àquela que é intencionada pelo currículo escolar.

Flexibilidade de representação e criatividade na resolução de problemas

Conhecer e lidar com representações e ser capaz de representar matematicamente, constitui uma competência que aumenta a capacidade de pensar matematicamente (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). O acesso a uma variedade de representações e a capacidade de as pôr em funcionamento contribui para o desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos (Berthold & Renkl, 2005; Harries, Lopez, Reid, Barmby & Suggate, 2008) e para fortalecer o raciocínio matemático (Ponte & Velez, 2011).

As representações não são produtos estáticos, na medida em que refletem o processo de raciocínio e o conhecimento utilizado pelos alunos na construção de relações ou de conceitos matemáticos (Steele, 2008). Podem ser caraterizadas como construções inerentes à descrição de conceitos, através de componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos e simbólicos, que retratam aspetos dos conceitos e que, ao mesmo tempo, permitem interpretar, comunicar e discutir ideias (Tripathi, 2008).

Os alunos que são capazes de recorrer a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, são mais inclinados a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009). A flexibilidade de representação é uma caraterística dos alunos que fazem escolhas adequadas de representações matemáticas, tendo em conta as tarefas em mão (Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009). No entanto, as tarefas, só por si, não definem a flexibilidade de representação, pois o conhecimento e o domínio representacional também devem ser tomados em conta (Nistal et al, 2009). Nesta investigação, entende-se a flexibilidade de representação como a capacidade de selecionar, combinar, usar e adaptar representações úteis, de acordo com as caraterísticas dos problemas a resolver.

As representações matemáticas são centrais na resolução de problemas e a sua construção, de acordo com o conhecimento matemático dos alunos, é uma etapa crucial do processo de resolução (Stylianou, 2008). O conhecimento matemático, conjugado com a liberdade para pensar profundamente e construir representações, permitem que os alunos testem e explorem com mais detalhe as suas próprias representações e estabeleçam conexões significativas, de modo a que os problemas façam sentido para si (Benko & Maher, 2006). Dar espaço para que os alunos possam construir as suas representações aumenta o sucesso na resolução de problemas, proporciona o desenvolvimento de métodos próprios de resolução e leva a que considerem e apreciem representações alternativas (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000).

A facilidade de utilização e adaptação de múltiplas representações e a habilidade de alternar entre diversas representações é parte de uma variabilidade cognitiva que permite resolver problemas com maior rapidez e precisão (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Cada forma de representação exprime elementos do raciocínio utilizado, subjacente à escolha da estratégia e à forma da sua comunicação (Preston & Garner, 2003). Quando os alunos são pensadores flexíveis, desenvolvem representações geralmente muito ricas (Steele, 2008). À medida que refletem sobre as suas ações, as suas representações podem evoluir para versões cada vez mais sofisticadas.

Os ambientes que possibilitam o uso de múltiplas representações e que promovem esse uso de forma flexível, como por exemplo o SUB12, são considerados eficazes em privilegiar a compreensão de noções matemáticas. Neste contexto, a liberdade para usar múltiplas representações permite que os alunos as escolham e explorem, de acordo com o seu grau de experiência e de conhecimento (Ainsworth, 1999). Incentivar sistematicamente os alunos a usarem várias representações, pode aumentar a consciência de que há uma diversidade de representações possíveis na resolução de um problema (Friedlander & Tabach, 2001). Por outro lado, encorajar os alunos a refletir ativamente sobre a adequação de representações específicas para situações particulares, é um meio para o desenvolvimento da flexibilidade de representação (Nistal et al., 2009).

Campo empírico e procedimentos metodológicos

O Campeonato de Matemática SUB12 (para alunos de 5.º e 6.º ano), promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, inclui duas fases distintas: a fase de apuramento, que é constituída por 10 problemas e decorre através da Internet; e a fase final, na qual os alunos finalistas participam num torneio presencial. Na fase de apuramento, de janeiro a junho, quinzenalmente, os participantes têm acesso aos problemas publicados no website do campeonato e enviam as suas resoluções por e-mail ou através de um formulário de resposta disponível na página, podendo enviar ficheiros em anexo. O presente estudo tem como objetivo investigar a relação entre a flexibilidade de representação e a criatividade matemática, fixando-se num tipo particular de representação matemática, a tabela, utilizada por participantes no Campeonato, num dos problemas da fase de apuramento.

A incidência num tipo específico de representação – a representação tabular – justifica-se pelo problema proposto, que envolve uma contagem sistemática associada a uma sequência de números naturais. Embora este problema tenha sido resolvido por diversos processos pelos participantes no campeonato, é claro que a representação tabular constitui uma representação adequada que apoia a obtenção da solução, sobretudo no caso de resolvedores que não dispõem de um conhecimento mais sofisticado, como cálculo combinatório ou progressões aritméticas, por exemplo. Por outro lado, interessou-nos saber em que sentido a construção de uma tabela pode ser original e revelar flexibilidade representacional, uma vez que, à partida, a noção de tabela parece relativamente inocente e, quase poderia dizer-se, indiscutível. Tendo em conta que o nosso propósito é compreender a criatividade matemática à luz dos parâmetros originalidade e flexibilidade de representação, optámos por considerar uma amostra de resoluções de 9 participantes em que a representação matemática essencial para solucionarem o problema foi a tabela. O pequeno número de resoluções consideradas foi intencional, na medida em que quisemos perceber como, num conjunto reduzido de produções do mesmo "género" (i.e., centradas na utilização de tabelas), se distinguem variações e particularidades que podemos relacionar com originalidade (dentro da identidade do tipo geral de representação tabular) e com flexibilidade (face à intencionalidade e à estruturação colocada na construção de cada tabela). O objetivo não se traduz numa avaliação ou medição da criatividade matemática dos 9 participantes ou das suas produções; pretende-se, antes, dar corpo a uma visão qualitativa e relativa da presença da criatividade matemática. Em certo sentido, pretendemos estudar a criatividade inclusiva (do pequeno-c, em vez do grande-C) que nos deixe ver a diversidade na aparente uniformidade (Beghetto & Kaufman, 2009).

> Tradicionalmente, os estudiosos da criatividade têm-se centrado em resultados criativos classificados como Grande-C (eminente) ou pequeno-c (quotidiano). A criatividade Grande-C centra-se em exemplos de rasgos de grande expressão criativa (por exemplo, o teorema de Pitágoras, a poesia de

Dickinson, as composições de Mozart). Em contraste, a criatividade pequeno-c concentra-se mais na criatividade da vida quotidiana, acessível a quase toda a gente (Runco & Richards, 1998). Um exemplo de criatividade do dia-a-dia poderia ser a forma criativa com que alguém organiza as plantas e flores no seu jardim, um arranjo que recebe elogios de amigos e familiares (Beghetto & Kaufman, 2009, p. 40).

Este estudo integra-se num paradigma interpretativo de investigação, adotando uma abordagem qualitativa, uma vez que nos interessa compreender o fenómeno da criatividade matemática no contexto em que ele acontece, privilegiando-se essencialmente os produtos enviados pelos participantes no campeonato por via eletrónica. Na investigação qualitativa os dados são geralmente descritivos e a fonte direta é o ambiente natural em que se produzem. Neste caso, os dados foram obtidos a partir das resoluções de alguns participantes, a um problema da fase de apuramento, que foram publicadas na página web do SUB12 (http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/).

Análise de dados

O problema considerado não exige a aplicação de conteúdos curriculares específicos (Fig. 1). Deste modo, os participantes tiveram de conceber e pôr em prática as suas próprias estratégias e representações para resolver o problema. A situação colocada no problema das chaves e dos cadeados apela a um raciocínio indutivo, na medida em que é preciso testar, uma a uma, cada chave em todos os cadeados para saber qual o cadeado que lhe corresponde. O problema refere ainda uma situação limite (a pior das hipóteses) em que só se encontra o par chave-cadeado na última tentativa, quando todos os cadeados, menos um, já foram testados e rejeitados. O raciocínio indutivo pode sugerir uma ordenação das chaves, v_1, v_2, …, v_{20}, e dos cadeados, d_1, d_2, …, d_{20}, e uma estratégia que estabelece todos os testes feitos com a chave v_1 (em 19 cadeados), com a chave v_2 (em 18 cadeados), etc., considerando que só o último cadeado combinará com a chave que está a ser testada. Assim, trata-se de pensar organizadamente no número de testes que irá ser realizado com cada chave e isso permitirá chegar ao total de testes: a soma dos primeiros 19 números naturais.

Problema7: Fechado a cadeado

Numa gaveta temos 20 cadeados e 20 chaves. Cada chave abre um e um só cadeado mas não sabemos que chave corresponde a cada cadeado. Para associar cada chave ao cadeado que lhe corresponde teremos de proceder por tentativas. Suponhamos então que uma tentativa significa experimentar uma chave num cadeado.
Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

Figura 1: Problema 7 do SUB12, edição 2012/13.

O uso de ferramentas comuns, disponibilizadas pelo computador (Word, Excel, PowerPoint), a que muitos participantes recorrem na resolução dos problemas é revelador das capacidades e competências destes alunos – matemáticas e tecnológicas (Jacinto & Carreira, 2008). O recurso ao computador conjuga dois aspetos poderosos – por um lado, é um meio de tornar a comunicação eficiente e, por outro, acentua o poder da visualização e organização da informação na atividade matemática dos alunos, o que se torna evidente nas formas de representação propostas. Desta forma, a comunicação matemática é destacada para primeiro plano, tendo por base formas eficazes de representação de ideias e processos matemáticos.

As resoluções apresentadas pelos participantes (ver Anexo) mostram que compreenderam o problema, uma vez que identificaram a informação importante e o objetivo a atingir. Foram capazes de definir e aplicar um plano, escolher uma estratégia e selecionar as representações e os recursos digitais adequados à sua execução. No que diz respeito ao raciocínio matemático produzido, as resoluções mostram a explicação dos processos e resultados, através de deduções formais e informais, expressas nas representações utilizadas.

As resoluções selecionadas associam e combinam a tabela, como elemento central, com representações icónicas, designadamente imagens, e representações simbólicas, em particular relacionadas com números e expressões numéricas, conjugadas com linguagem natural, na descrição e registo do processo desenvolvido. Em cada caso, a combinação das representações utilizadas é reveladora do modelo conceptual que está na base da solução do problema.

Em todas as resoluções, o recurso a tabelas funciona essencialmente para organizar a informação e transformá-la, de modo a revelar regularidades e a gerar uma imagem (ou modelo) da situação. No entanto, cada tabela é única, revelando diferenças significativas ao nível da forma, organização e representação da informação e evidenciando caraterísticas do raciocínio próprias de quem a construiu.

Na resolução 1, (ver Anexo) o participante recorreu a ícones representativos de cadeados e chaves, combinados com representações simbólicas, traduzidas em sequências de números naturais, por ordem decrescente, organizados numa tabela de três colunas. A primeira coluna refere-se a cadeados e indica o número de cadeados a testar; a segunda coluna refere-se a chaves e indica o número de chaves por testar; a terceira coluna refere-se ao número de tentativas atribuídas a cada caso, usando ícones representativos de cadeados-com-chave. A justificação dada por palavras – "a última chave pertence ao último cadeado" – repete-se sucessivamente após a indicação do número de tentativas e é um elemento importante para justificar o número total de tentativas.

A resolução 2 (ver Anexo) revela uma tabela com duas colunas, ainda que esta tabela tenha um caráter eminentemente gráfico. Na verdade, a primeira coluna é preenchida por uma sucessão de ícones representativos de cadeados excluídos (com a letra X a vermelho) seguida de uma outra sucessão de cadeados aprovados (com a letra V a verde), num total de 20 cadeados. De uma linha para a seguinte, diminui um cadeado excluído e aumenta um cadeado aprovado. Na coluna 2, representam-se as tentativas falhadas (correspondentes ao número de cadeados excluídos), gerando uma sequência de números naturais por ordem decrescente. Ao lado da tabela, é dada a explicação da racionalidade da mesma e do modo como esta permitiu obter o total de tentativas.

No conjunto das resoluções 3, 4, 5 e 6, (ver Anexo) a organização da informação representada nas tabelas é semelhante, tratando-se agora de tabelas de dupla entrada. Numa das dimensões são representadas as chaves e, na outra, os cadeados. Nas células das tabelas a informação registada tem diferentes sentidos e propósitos. A tabela da resolução 3 indicia o teste de cada chave (numerada) em cada um dos cadeados (numerados) e assume que o par é encontrado na última tentativa. Assim, a organização dos pares é indicada pelos elementos da diagonal, preenchidos a negrito (chave 1 - cadeado 20, chave 2 - cadeado 19, …, chave 20 - cadeado 1). A tabela pode ser lida ao longo de cada uma das duas entradas (por linhas ou por colunas). A tabela da resolução 4 tem uma estrutura idêntica mas assinala com um X cada combinação falhada entre a chave p e o cadeado q. Assim, ficam registadas as tentativas falhadas e a solução do problema é obtida, contando-se o número de células marcadas com um X. Numa coluna adicional é colocado o número de tentativas falhadas (por cada cadeado testado) e, por fim, é calculado o total. A tabela 5 usa uma ideia análoga à anterior mas recorre à cor vermelha para registar as tentativas falhadas e à cor verde (com um V) para indicar a tentativa que tem sucesso. Todas estas tabelas recorrem a alguma forma de representação visual traduzida por destaques com cores, letras ou ícones. A tabela da resolução 6, igualmente de dupla entrada, inscreve em cada célula o número de tentativas falhadas, à medida que estas se vão sucedendo, tendo em conta que a última tentativa em cada sequência foi a que teve sucesso. Assim, a função da tabela usada na resolução 6 é a de realizar a contagem ininterrupta de tentativas falhadas. É de notar que, nesta tabela, as duas dimensões não são legendadas (colunas ou cadeados), parecendo evidenciar o facto de que estas são comutáveis, pois é indiferente considerar-se cada uma das chaves a testar os vários cadeados ou cada um dos cadeados a testar as várias chaves. Neste caso, sobressai uma estratégia de contagem sistemática em vez de uma estratégia de adição do número de tentativas feitas até acontecer cada emparelhamento.

Observando as resoluções 7, 8 e 9, (ver Anexo) percebe-se que os participantes usam uma maior quantidade de texto para explicar a forma como organizaram a informação representada nas suas tabelas. Em todas elas, é facilmente compreensível a estratégia e o raciocínio utilizado para chegar à solução do problema, devido à forma como explicitam o significado da tabela construída. As resoluções 7 e 8 apresentam tabelas com uma estrutura idêntica à das tabelas usadas nas resoluções 1 e 2. No entanto, dispensam elementos figurativos e concentram-se no registo do número de tentativas (por cada chave testada nos vários cadeados). A tabela da resolução 9 destaca-se das anteriores por introduzir a ideia de soma acumulada, isto é, na coluna destinada ao número de tentativas, vai sendo feita a adição de todas as tentativas falhadas nos ensaios anteriores.

Em todas as resoluções (à exceção da tabela que funciona como ferramenta de contagem), bastou aos participantes adicionarem sucessivamente o número de tentativas ensaiadas, para cada caso, para responderem à questão colocada no problema.

Conclusões

De uma forma geral, tendo em conta o contexto e a pequena amostra selecionada, todas as resoluções revelam originalidade, uma vez que não há duas formas de representação tabular que se possam considerar iguais, dada a singularidade visível em cada uma delas (Starko, 2010). Combinam representações simbólicas, icónicas e verbais, unindo estes elementos representacionais a um dispositivo central – a tabela – para organizar e representar informação. Recorrem a imagens, destaques com cores e outro tipo de inscrições, revelando estratégias interessantes e próprias de quem as produziu (Preston & Garner, 2003). É facilmente reconhecida a flexibilidade de representação, através da forma como a tabela é construída e moldada, em cada caso, ajustando-se e adaptando-se aos propósitos de cada indivíduo para resolver o problema, resumindo o raciocínio feito e permitindo reconstruí-lo de forma clara. Para além da subtileza específica de cada uma das tabelas, a flexibilidade de representação começa pela adequação das representações tabulares utilizadas pelos participantes, revelando o seu domínio de conhecimento matemático para a resolução do problema (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). As formas de representação escolhidas e transportadas para o contexto do problema revelam também um evidente sentido estético na expressão das resoluções, o que constitui uma caraterística de alunos matematicamente criativos.

Resolver problemas, para além da sala de aula, usando as ferramentas tecnológicas disponibilizadas pelo computador, estimula os participantes a procurar formas eficazes e simultaneamente interessantes de comunicarem as suas resoluções, contribui para a riqueza das representações que produzem e para o desenvolvimento da sua criatividade matemática (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Parece evidente que as tecnologias usadas têm valor pedagógico na resolução de problemas de matemática, exibindo o desenvolvimento de competências tecnológicas, associadas à representação, inovação e criatividade, não se traduzindo numa utilização trivial das tecnologias (Jacinto & Carreira, 2008).

As tecnologias usadas permitiram aos participantes recorrer a formas de representação eminentemente visuais, como as cores, as imagens e os destaques, para darem corpo ao seu raciocínio matemático. A criatividade matemática pode, portanto, ser encarada de um ponto de vista micro-analítico, isto é, a forma como diferentes indivíduos dão corpo e fazem uso de uma estrutura tabular – uma representação geralmente vista como genérica ou indiferenciada – para resolverem e exprimirem o seu pensamento matemático, constitui uma importante evidência de originalidade e de flexibilidade representacional. Em geral, parece resultar da análise apresentada que aquilo que é novo, único e diferente, em cada uma das resoluções apresentadas, não se resume a simples detalhes superficiais mas reveste-se de sentido matemático e está associado à capacidade de cada um de criar e reinventar a representação tabular e, portanto, à sua flexibilidade representacional.

A interação entre a tecnologia, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, parece igualmente ter influência na promoção de resoluções matemáticas pessoais, inventivas e distintivas. Este fenómeno está em sintonia com as características do Campeonato de Matemática SUB12, uma vez que possibilita aos participantes a liberdade de usar os seus próprios processos e recursos, nomeadamente, digitais.

Referências bibliográficas

Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & Education*, *33*, 131-152.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009). Do we all have multicreative potential?. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 39-44.

Benko, P. & Maher, C. A. (2006). Students constructing representations for outcomes of experiments. In J. N. H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-143), Prague, Czech Republic: PME.

Berthold, K. & Renkl, A. (2005). Fostering the Understanding of Multi-Representational Examples by Self-Explanation Prompts. In B. G. Bara, L. Barsalou & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the CogSci* (pp. 250-255). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Freiman, V. & Lirette-Pitre, N. (2009). Building a virtual learning community of problem solvers: example of CASMI community. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 245-256.

Friedlander, A & Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The Roles of Representation in School Mathematics* (pp.173-185). Reston, Virginia: NCTM.

Gusev, V. & Safuanov, I. (2012). Fostering Creativity of Pupils in Russia. In *ICME 12 – Pre-Proceedings* (pp. 1513- 1518), Seoul, South Korea.

Harries. T., Lopez, P., Reid, H., Barmby, P. & Suggate, J. (2008). Observing children's inductive reasoning processes with visual representations for multiplication. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, p. 268). Morelia, México: PME.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 553-540.

Jacinto, H. & Carreira, S. (2008). "Assunto: resposta ao problema do Sub14" – A Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 434-446). Secção de Educação Matemática da SPCE.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). Does Mathematical Creativity Differentiate Mathematical Ability? In M, Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1056-1065). University of Rzeszów, Poland.

Koichu, B. & Andzans, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R. A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 286-307). Rotterdam: Sense Publishers.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. (Tese de Doutoramento não publicada), University of Connecticut, USA.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa de NCTM, 2000).

Nistal, A. A., Dooren, V., Clarebout, G., Helen, J. & Verschaffel (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(3), 627-636.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 63-67.

Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity Assessment In School Settings Through Problem Posing Tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *8*(1&2), 383-398.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim do GEPEM*, *59*, 53-68.

Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(1), 38-43.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 88-100). Rotterdam: Sense.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 75-80.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the Classroom: Schools of Curious Delight*. New York: Routledge.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*, 97-110.

Sternberg, R. (2007). Creativity as a Habit. In A-G. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 3-25). Singapore: World Scientific.

Stylianou, D. (2008). Representation as a cognitive and social pratice. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, p. 289-296). Morelia, México: PME.

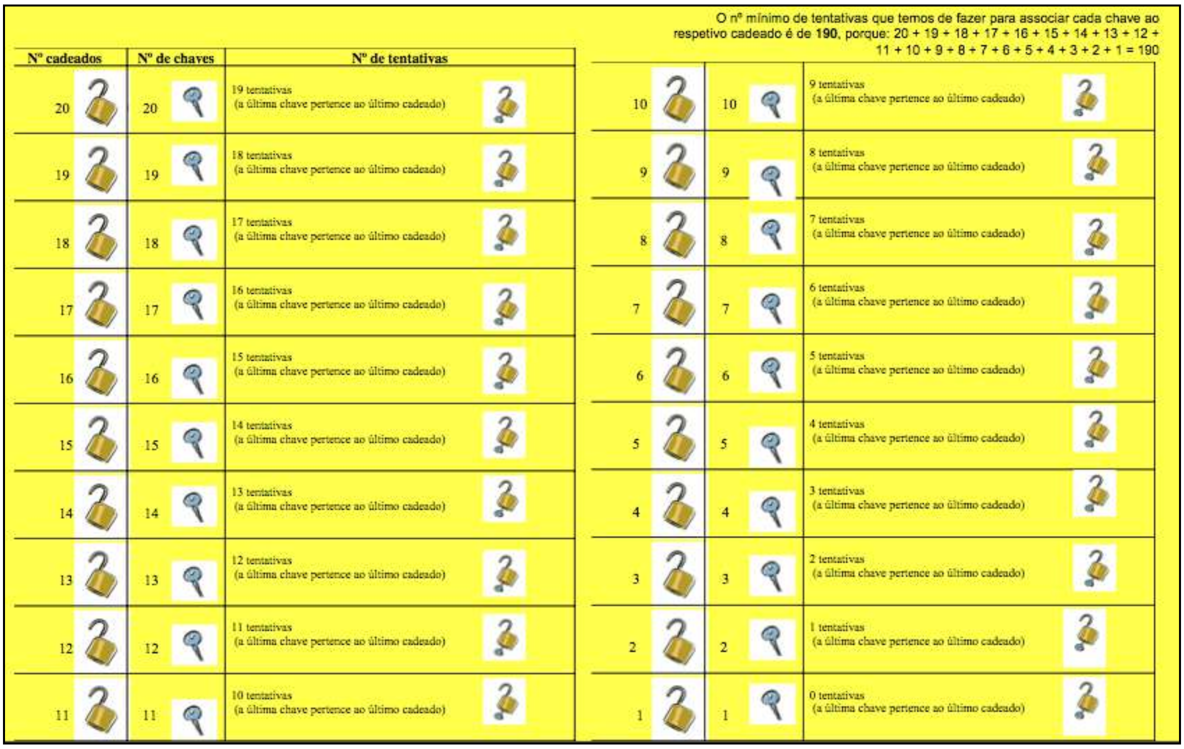
Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Reconhecimento

Este trabalho teve o apoio e foi desenvolvido no âmbito do projeto de investigação Problem@Web – Projeto n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

ANEXO

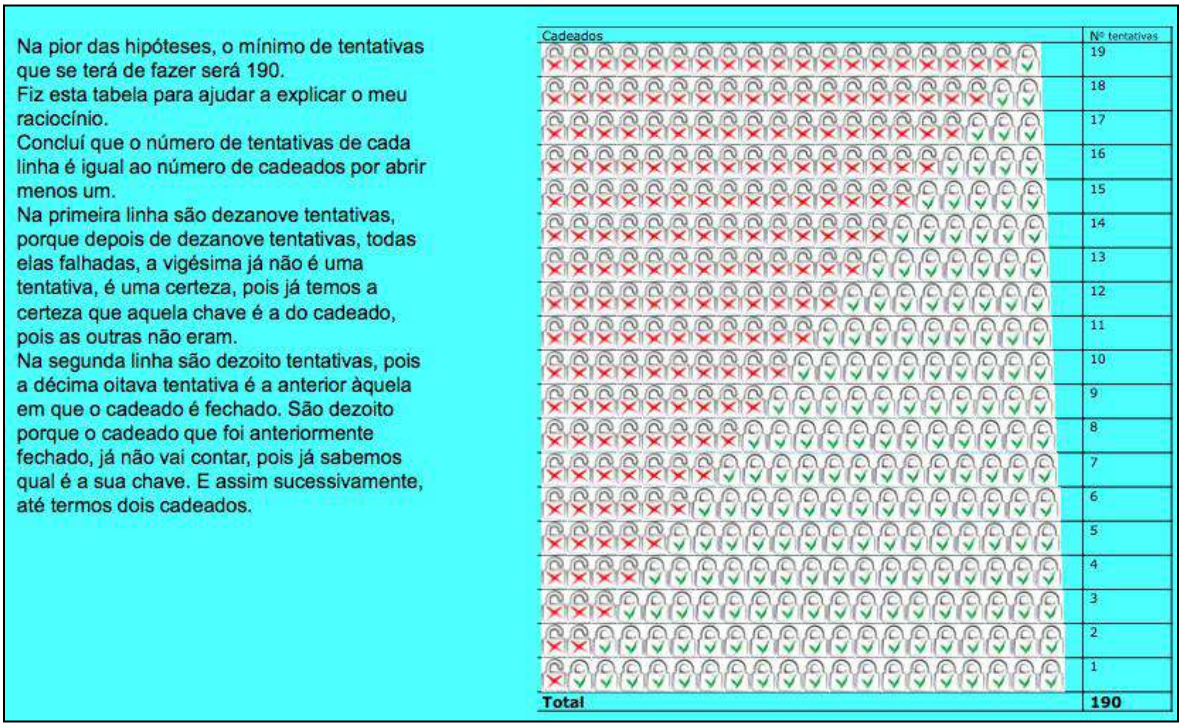
Resoluções de participantes com representação tabular



O nº mínimo de tentativas que temos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado é de **190**, porque: 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 190

Nº cadeados	Nº de chaves	Nº de tentativas
20	20	19 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
19	19	18 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
18	18	17 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
17	17	16 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
16	16	15 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
15	15	14 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
14	14	13 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
13	13	12 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
12	12	11 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
11	11	10 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
10	10	9 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
9	9	8 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
8	8	7 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
7	7	6 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
6	6	5 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
5	5	4 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
4	4	3 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
3	3	2 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
2	2	1 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)
1	1	0 tentativas (a última chave pertence ao último cadeado)

Resolução 1



Na pior das hipóteses, o mínimo de tentativas que se terá de fazer será 190.
Fiz esta tabela para ajudar a explicar o meu raciocínio.
Concluí que o número de tentativas de cada linha é igual ao número de cadeados por abrir menos um.
Na primeira linha são dezanove tentativas, porque depois de dezanove tentativas, todas elas falhadas, a vigésima já não é uma tentativa, é uma certeza, pois já temos a certeza que aquela chave é a do cadeado, pois as outras não eram.
Na segunda linha são dezoito tentativas, pois a décima oitava tentativa é a anterior àquela em que o cadeado é fechado. São dezoito porque o cadeado que foi anteriormente fechado, já não vai contar, pois já sabemos qual é a sua chave. E assim sucessivamente, até termos dois cadeados.

Cadeados	Nº tentativas
	19
	18
	17
	16
	15
	14
	13
	12
	11
	10
	9
	8
	7
	6
	5
	4
	3
	2
	1
Total	190

Resolução 2

Primeiro pensámos em experimentar as chaves para cada um dos cadeados. No primeiro descobrimos que teríamos de experimentar pelo menos 19 chaves para ter a certeza que a chave era a certa. No segundo teriam de se experimentar 18 chaves e era sempre assim. Depois de somarmos todas as tentativas descobrimos que seriam precisas 190 tentativas para descobrir todas as chaves e cadeados.

	Cadeados																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chaves	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	**3**		
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**			
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	**5**				
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	**6**					
	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	**7**						
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	**8**							
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	**9**								
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**									
	11	11	11	11	11	11	11	11	11	**11**										
	12	12	12	12	12	12	12	12	**12**											
	13	13	13	13	13	13	13	**13**												
	14	14	14	14	14	14	**14**													
	15	15	15	15	15	**15**														
	16	16	16	16	**16**															
	17	17	17	**17**																
	18	18	**18**																	
	19	**19**																		
	20																			
Tentati-vas	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Resolução 3

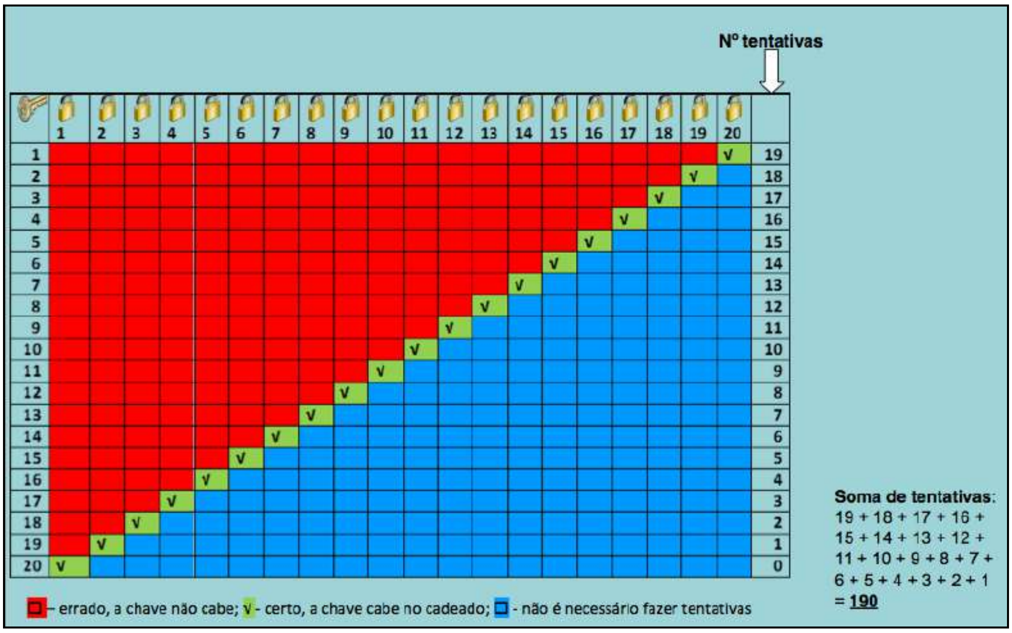
T= tentativas

Chaves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Cadeados																					
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		19 T
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			18 T
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				17 T
4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					16 T
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						15 T
6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X							14 T
7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								13 T
8	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X									12 T
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X										11 T
10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											10 T
11	X	X	X	X	X	X	X	X	X												9 T
12	X	X	X	X	X	X	X	X													8 T
13	X	X	X	X	X	X	X														7 T
14	X	X	X	X	X	X															6 T
15	X	X	X	X	X																5 T
16	X	X	X	X																	4 T
17	X	X	X																		3 T
18	X	X																			2 T
19	X																				1 T
20																					0 T

19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 190 T

Resposta: Na pior das hipóteses, o mínimo de tentativas são 190.

Resolução 4



Resolução 5

1. Li e compreendi
2. Dados: 20 cadeados e 20 chaves.
Cada chave abre um cadeado
3. Questão: Na pior da hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

4. Tabela:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	X
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	X	X
3	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	X	X	X
4	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	X	X	X	X
5	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	X	X	X	X	X
6	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	X	X	X	X	X	X
7	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	X	X	X	X	X	X	X
8	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	X	X	X	X	X	X	X	X
9	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	146	147	148	149	150	151	152	153	154	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	155	156	157	158	159	160	161	162	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
13	163	164	165	166	167	168	169	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
14	170	171	172	173	174	175	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	176	177	178	179	180	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
16	181	182	183	184	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
17	185	186	187	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
18	188	189	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
19	190	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
20	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5. Contagem: 190

6. Resposta: 190 tentativas.

Resolução 6

Inicialmente, tenho 20 chaves para 20 cadeados.
Vou numerar as chaves de 1 a 20.
Para a chave nº1 tenho 20 cadeados, dos quais 19 estão errados e só um está certo.
Por isso, na pior das hipóteses faço 19 tentativas para a chave nº1, sendo que depois destas tentativas a associo ao cadeado correto.
A chave nº2 já só tem 19 cadeados ao dispor, pelo que faço 18 tentativas para chegar ao cadeado certo, e assim sucessivamente, como está indicado nesta tabela:

chaves	tentativas	cadeados
1ª	19	20
2ª	18	19
3ª	17	18
4ª	16	17
5ª	15	16
6ª	14	15
7ª	13	14
8ª	12	13
9ª	11	12
10ª	10	11
11ª	9	10
12ª	8	9
13ª	7	8
14ª	6	7
15ª	5	6
16ª	4	5
17ª	3	4
18ª	2	3
19ª	1	2
20ª	0	1

Resposta:
Para associar todas as chaves aos respetivos cadeados, assim, são precisas 190 tentativas, no total (1+2+3+4+5+....+18+19).

Resolução 7

1.- Para resolver o problema, recolhi o número de cadeados. Depois vi que a pior das hipóteses para descobrir a chave correspondente a um cadeado, em 20 cadeados, era 19 tentativas falhadas;
2.- Para abrir o 2º cadeado tinha de fazer a mesma coisa com 19 cadeados e na pior das hipóteses tinha de fazer 18 tentativas e assim sucessivamente.
3 - Até ficar com dois cadeados, e na pior das hipóteses fiz apenas 1 tentativa falhada. Depois somei tudo, dando 190 tentativas.
4 - Somei com o computador, mas outra das maneiras de o fazer era :
19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =
= (19 + 1) + (18 + 2) + (17 + 3) + (16 + 4) + (15 + 5) + (14 + 6) + (13 + 7) + (12 + 8) + (11 + 9) + 10 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 10 =
= 20 x 9 + 10 =
=180 + 10=
= 190

Cadeados	Máximo de tentativas
20	19
19	18
18	17
17	16
16	15
15	14
14	13
13	12
12	11
11	10
10	9
9	8
8	7
7	6
6	5
5	4
4	3
3	2
2	1
1	

Resolução 8

1.Li enunciado até o perceber.
2.Quando fui lendo, tirei os seguintes dados:
-Há 20 cadeados e 20 chaves, baralhados;
-Cada chave só corresponde a um cadeado;
3.Expermentar uma chave é o mesmo que fazer uma tentativa;
4.Quero saber: "Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?".
5.Por ser mais fácil, comecei a trabalhar com um número pequeno de chaves e igual ao número de cadeados.
6.Fui aumentando o número de chaves e de cadeados e organizei tudo numa tabela.
7.A tabela fica assim.

Chaves e cadeados	Tentativas	Soma das Tentativas
1	0	0
2	1	1
3	2+1	3
4	3+2+1	6
5	4+3+2+1	10
6	5+4+3+2+1	15
7	6+5+4+3+2+1	21
8	7+6+5+4+3+2+1	28
9	8+7+6+5+4+3+2+1	36
10	9+8+7+6+5+4+3+2+1	45
11	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	55
12	11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	66
13	12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	78
14	13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	91
15	14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	105
16	15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	120
17	16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	136
18	17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	153
19	18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	171
20	19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	190

8.Em resumo, a resposta ao problema é : O mínimo de tentativas que terei de fazer para ter a certeza que cada chave descobriu o seu cadeado são 190 tentativas.

Resolução 9

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

"Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra

Hélia Jacinto[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Escola Básica José Saramago e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, helia_jacinto@hotmail.com
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Este artigo aborda a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias no âmbito de um Campeonato extraescolar – o Sub14. A investigação, de natureza qualitativa, apoiada em diversos tipos de dados, visa compreender de que forma uma concorrente coloca em interação os seus conhecimentos matemáticos e a sua fluência tecnológica para solucionar dois problemas do campeonato, com recurso ao GeoGebra. Os dados revelam que a jovem utiliza o programa como uma ferramenta-para-pensar, e que é o reconhecimento das potencialidades de ação do GeoGebra em estreita articulação com as suas aptidões que geram esta atividade de resolução de problemas. Assim, uma forma de compreender e caraterizar a influência mútua entre literacia tecnológica e aptidão matemática do sujeito consiste em reconhecer e descrever aquilo a que chamaremos a sua literacia tecno-matemática.*

Palavras-chave: Competições matemáticas; resolução de problemas; literacia tecnológica; literacia tecno-matemática; GeoGebra.

Atividades matemáticas para além da sala de aula

Nos últimos anos têm surgido inúmeras competições matemáticas extracurriculares com o intuito de fomentar o gosto pela disciplina e complementar as aprendizagens formais. Apesar da popularidade, poucos são os estudos que se debruçam sobre este fenómeno, pelo que alguns autores frisam a necessidade de maior compreensão sobre essas atividades, em particular as que assentam em contextos tecnologicamente ricos e são extensões do currículo escolar (Barbeau & Taylor, 2009).

O Campeonato de Matemática Sub14®, organizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, destina-se a alunos de 7.º e 8.º ano do Algarve e Alentejo. Os concorrentes acedem a um problema publicado quinzenalmente na página *web* do Sub14 e enviam a sua resolução por correio eletrónico, num formato à sua escolha, para a comissão organizadora. As regras definem que é necessário apresentar o raciocínio e o processo de resolução com detalhe e clareza.

Estudos anteriores, com foco no fenómeno "resolução de problemas de matemática com tecnologias", revelaram o elevado grau de sofisticação tecnológica dos participantes na apresentação das suas resoluções, cuja fluência é desenvolvida, sobretudo, fora da sala-de-aula (Jacinto & Carreira, 2012a). Identificaram-se, ainda, determinadas características dos resolvedores de problemas, observando-se uma certa concomitância entre o uso de conhecimento matemático e do conhecimento da tecnologia durante essa atividade. Outro conjunto de evidências ilustra diferentes modos de pensar e de agir sobre um mesmo problema, recorrendo a uma mesma ferramenta, o que constituiu um forte indício de como o uso da tecnologia modifica e transforma a atividade de resolução de problemas (Jacinto & Carreira, 2012b; Jacinto & Carreira, 2013).

Pretende-se aqui compreender e clarificar de que modo o conhecimento matemático e a fluência tecnológica se inter-relacionam, na atividade de resolução de problemas de uma concorrente, quando recorre ao GeoGebra para solucionar e exprimir a solução de alguns problemas do campeonato.

Literacia para o século XXI

Vivemos numa sociedade de tal forma *e-permeada* (Martin & Grudziecki, 2006) e matematizada que se tem vindo a assistir a uma significativa transformação nas formas de representação do conhecimento. As representações digitais estão a modificar a natureza do conhecimento matemático, pelo que a capacidade para compreender como é que a informação se transforma em conhecimento é uma faceta fundamental, indispensável à existência plena de um indivíduo no século XXI (Noss, 2001).

Quem são estes jovens que resolvem problemas no computador?

Várias propostas teóricas têm sido avançadas com o fim de contribuírem para uma compreensão mais profunda dos seres humanos em ação no mundo tecnológico. Consideraremos neste estudo a contribuição teórica de Borba e Villarreal (2005), apoiada nas ideias de Lévy (1990) e consistente com a perspetiva de Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), que tem por base o argumento de que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana, e de que o próprio conhecimento resulta de uma simbiose entre os seres humanos e a tecnologia com que agem. Essa estreita relação origina uma nova entidade – "humanos-com-media" – metáfora que explica como o pensamento é reorganizado na presença de tecnologias. Os autores recorrem a duas noções basilares para fundamentar esta construção teórica: por um lado, consideram a natureza social e coletiva da cognição e, por outro, assumem que a própria cognição compreende as ferramentas que fazem a mediação da produção de conhecimento. Os *media* são considerados parte constitutiva do sujeito que age, não se limitando a auxiliar ou complementar a atividade, pelo que as ferramentas tecnológicas que são usadas para comunicar, para produzir ou representar ideias matemáticas, têm influência no tipo de matemática e de pensamento matemático que resultam dessas ações. Perspetiva-se, portanto, que a introdução de uma ferramenta no sistema humanos-com-media impele modificações ao nível da atividade, isto é, o coletivo humanos-com-media altera-se consoante o tipo de *media* que o integre: diferentes coletivos originam diferentes modos de pensar e de conhecer. Por exemplo, o conhecimento matemático produzido por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquele que é produzido por humanos-com-GeoGebra (Villarreal & Borba, 2010).

Como interagem com a tecnologia?

Na origem da produção de diferentes tipos de conhecimento está o reconhecimento, pelo sujeito, das *possibilidades de ação* (*affordances*, em inglês) com a ferramenta. Esta noção, atribuída a Gibson (1979), define o conjunto de particularidades arrogadas a uma dada ferramenta tecnológica que convidam o indivíduo a executar uma ação sobre ela.

Mais recentemente, Chemero (2003) defende que "percecionar as possibilidades de ação é colocar atributos, é observar que a situação possibilita uma certa ação" (p. 187). Esta posição sustenta que as *possibilidades de ação* emergem das interações entre o agente e o próprio objeto (Chemero, 2003; Greeno, 1994). Mas, apesar de a perceção das *possibilidades de ação* ser condição prévia para que exista atividade, nem sempre a sua existência determina que essa atividade ocorra. Para Greeno (1994), dado que a expressão "possibilidades de ação" se refere a tudo o que existe no sistema, que contribui para o tipo de interação que ocorre, torna-se necessário recorrer a uma expressão que designe tudo o que existe no agente, que também contribui para essa mesma interação, e propõe as designações "capacidade" ou "aptidão". Esta relação intrínseca traduz-se numa impossibilidade de separar as *possibilidades de ação* da *aptidão* do agente, isto é, as *possibilidades de ação* e a *aptidão* não são especificáveis na ausência uma da outra.

Que conhecimento é posto em ação durante esta atividade?

Importa, pois, clarificar o que se entende por "aptidão". Até meados dos anos sessenta, perdurou uma certa ideia de que ser-se letrado, ter literacia, era possuir um conjunto de destrezas de índole técnica: ler, escrever, calcular. Bélisle (2006), tendo estudado a evolução histórica do conceito de literacia, organizou as diferentes visões em três modelos: o *modelo funcional*, o *modelo de prática sociocultural* e o *modelo de* *aquisição de poder intelectual*, segundo o qual "a literacia não só providencia os meios e as capacidades para lidar com textos escritos e números (…) mas confere um enriquecimento profundo e, eventualmente, envolve uma transformação ao nível do pensamento humano" (p. 54). Este empoderamento intelectual, associado às novas "ferramentas cognitivas", tem sido suporte para o desenvolvimento de conceitos como o de literacia tecnológica ou digital.

O projeto DigEuLit (Martin, 2006) propunha-se desenvolver um referencial teórico que permitisse a professores e alunos europeus partilhar um entendimento comum sobre o que constitui a literacia digital, que é vista como a capacidade de ter sucesso nas interações com as ferramentas eletrónicas que tornam possível o mundo do século XXI.

Tabela 1 – Processos da literacia tecnológica (adaptado de Martin & Grudziecki, 2006)

Processo	**Tarefa digital**
Definição	Definir claramente a tarefa ou o problema a ser resolvido, bem como as ações que, previsivelmente, serão necessárias.
Identificação	Identificar os recursos digitais necessários para resolver o problema / completar a tarefa.
Acessibilidade	Localizar e obter o recurso digital necessário.
Avaliação	Avaliar a possibilidade de concretização, a precisão e a fiabilidade do recurso digital bem como a sua relevância para a resolução do problema / tarefa.
Interpretação	Compreender o significado emanado pelo recurso digital.
Organização	Organizar e definir os recursos digitais de forma a permitir a resolução do problema / a realização da tarefa.
Integração	Aliar diferentes recursos digitais de forma a encontrar uma combinação relevante para o problema / tarefa.
Análise	Examinar recursos digitais a partir de conceitos e modelos que permitam solucionar o problema / realizar a tarefa com êxito.
Síntese	Combinar recursos digitais de novas formas para permitir solucionar o problema / realizar a tarefa.
Criação	Criar novos objetos de conhecimento, unidades de informação ou outros produtos digitais que irão contribuir para a resolução do problema / realização da tarefa.
Comunicação	Interagir de forma relevante com outros enquanto se lida com o problema / tarefa.
Disseminação	Apresentar a solução ou os produtos a outros.
Reflexão	Considerar o sucesso do cumprimento da tarefa e refletir sobre o seu próprio desenvolvimento enquanto pessoa com literacia digital.

Este referencial pressupõe que a aprendizagem é uma atividade construtiva, reflexiva e social pelo que, entre outros, a literacia digital envolve: a aquisição e a utilização de conhecimentos, técnicas, atitudes e características pessoais do indivíduo, como a capacidade de planificar, executar e avaliar ações digitais na resolução de problemas reais, e ainda a aptidão para refletir sobre o seu desenvolvimento. O *framework* desenvolvido faz emergir treze processos (Tabela 1) executados com uma ferramenta digital, sobre um qualquer recurso digital, no contexto específico de uma tarefa ou problema (Martin & Grudziecki, 2006).

Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson e Kent (2002), num estudo centrado em atividades laborais, identificaram uma interdependência entre a utilização das tecnologias da informação e os conhecimentos matemáticos dos trabalhadores que, segundo os autores, contribuía para uma transformação no tipo de capacidades matemáticas necessárias no mundo do trabalho. Esta relação de dependência constituiu a origem do termo Literacias Tecno-matemáticas (LTm), noção que envolve três aspetos essenciais: (i) o contexto em que a atividade decorre; (ii) a matemática necessária à ação e (iii) as ferramentas tecnológicas necessárias à ação (Hoyles, Noss, Kent, & Bakker, 2010). O termo Literacias Tecno-matemáticas designa o conhecimento matemático funcional mediado por ferramentas tecnológicas e está ancorado em contextos específicos de trabalho.

Metodologia de investigação

Este estudo, visando compreender a influência mútua entre conhecimento matemático e fluência tecnológica na atividade de resolução de problemas com tecnologias, segue uma abordagem naturalista que envolve técnicas qualitativas de recolha, sistematização e análise de dados (Quivy & Campenhoudt, 2008).

Reporta-se, aqui, o caso de uma concorrente, de nome fictício Jéssica, que se destacou em trabalhos anteriores (Jacinto & Carreira, 2013) por revelar à-vontade na utilização de ferramentas tecnológicas para resolver os problemas do campeonato, em particular o GeoGebra. O processo de recolha documental envolveu coligir as produções da concorrente em duas edições do Sub14, bem como todas as mensagens eletrónicas trocadas com a comissão organizadora. Realizou-se uma entrevista semiestruturada à concorrente, gravada em suporte vídeo, focando aspetos da aula de matemática e da sua participação no Sub14, incluindo um momento dedicado a relembrar algumas resoluções submetidas ao Campeonato.

Selecionaram-se para análise mais detalhada as produções da concorrente em dois problemas da edição 2011 do Sub14, que a concorrente resolveu recorrendo ao GeoGebra. Enquanto estes dados (ficheiros GGB e respetivos protocolos de construção, justificações, e-mails) foram analisados com a intenção de revelar interações entre conhecimento matemático e fluência tecnológica nas suas resoluções com o GeoGebra e outras ferramentas tecnológicas generalistas, as informações recolhidas por entrevista sustentam um enquadramento geral das características da jovem enquanto aluna, resolvedora de problemas ou utilizadora de tecnologias.

Os dados provenientes desta diversidade de fontes foram organizados e analisados à luz das perspetivas teóricas discutidas, para ilustrar o caso "Jéssica a resolver problemas com o GeoGebra" e assim obter uma maior compreensão de como incorpora conhecimentos matemáticos e fluência tecnológica na resolução destes problemas.

Jéssica a resolver problemas com o GeoGebra

A Jéssica participou em duas edições do Sub14, durante os seus 7.º e 8.º anos. Sempre demonstrou muito empenho, quer na disciplina de Matemática, quer no Campeonato. Na escola gosta de ter boas notas e esforça-se para isso, embora reconheça que tem algumas facilidades. Não gosta muito de trabalhar em grupo, mas não se importa de ajudar os colegas quando precisam. No Campeonato o seu desempenho é exemplar: responde sempre dentro do prazo estabelecido, prima pela clareza, completude e correção das suas respostas, e orgulha-se disso.

Embora não seja habitual resolver problemas do género dos do Sub14 nas aulas, nem tampouco utilizar tecnologias para além da calculadora, desenvolveu um gosto muito particular pelos desafios e pela utilização de algumas ferramentas, como o GeoGebra. Este interesse foi motivado pela professora de Matemática, de quem gosta muito, porque a incentiva a participar em inúmeras atividades e já a acompanhou à Universidade do Algarve a uma final do Sub14. É muito autónoma, na escola e em casa, mas não se inibe de procurar ajuda sempre que enfrenta alguma dificuldade. Para resolver alguns problemas do Sub14, a Jéssica contou com ajuda da professora que lhe fazia perguntas sobre o problema ou dava dicas, mas nunca lhe dizia a resposta diretamente. Ocasionalmente, pesquisou na Internet sobre alguns conteúdos que ainda não tinha dado nas aulas, mas que imaginava serem úteis para resolver determinado problema.

Segundo a Jéssica, a sua professora também utilizava com bastante regularidade o GeoGebra como forma de ilustrar alguns aspetos dos conteúdos que lecionava.

> J: Como já disse usamos muito as tecnologias. Nós temos o quadro de… de caneta, e depois temos o quadro interativo. E utilizamos muito. Quando estivemos a dar geometria e isometrias utilizámos muito o GeoGebra.
>
> I: Quando dizes "utilizam", é a professora que faz?
>
> J: Exatamente. E nós vemos.

Esta utilização frequente, embora centrada na professora, incentivou a concorrente a instalar o programa no seu computador pessoal e a explorá-lo em casa, com calma.

Parece gostar bastante dos problemas de geometria porque, numa primeira reflexão, pode usar o GeoGebra para aperfeiçoar o arranjo gráfico das suas resoluções. A propósito da sua resolução do Problema 5 da edição 2012, a Jéssica afirma:

> J: "Eu acho que fui direitinha ao GeoGebra. Sabia que era qualquer coisa de geometria, pronto! (…) vi que formava um triângulo, que isto formava um triângulo e que pondo assim de uma maneira muito simples era só fazer a área toda disto tudo e tirar a área do triângulo, que era fácil: base vezes altura sobre dois. E depois assim… «Ah, boa! Geometria! Vou por isto tudo direitinho!» [e aponta com orgulho para as suas construções em GeoGebra]."

Os seus instrumentos de trabalho são, por norma, o computador (mas raramente imprime o enunciado), um bloco de notas, muitas canetas coloridas e uma calculadora.

> J: Aaa… normalmente é sempre primeiro bloco de notas e caneta, depois o Word e depois vou sempre a… vou sempre ao GeoGebra ou a outro programa para adicionar ao Word, para ficar assim um trabalho mais completo.
>
> E: Mas… só vais quando já resolveste?
>
> J: Sim, mas… também depende. Se o GeoGebra ou outro programa me ajudar a perceber melhor o problema, então vou primeiro a esse programa e depois é que apresento no Word.
>
> E: Ok, então também usas enquanto ainda não chegaste à solução…
>
> J: Sim, por exemplo, num dos quadrados que é esse [Problema 5] eu fui primeiro ao GeoGebra para perceber bem como é que aquilo era, e depois é que descobri "Ah, aquilo faz um triângulo e depois é só tirar a área do triângulo". Aí tive que ir primeiro ao GeoGebra para perceber melhor.

A Jéssica parece, assim, reconhecer outras potencialidades do GeoGebra além do embelezamento da resolução, nomeadamente, o facto da manipulação da construção lhe permitir "perceber bem" o problema. Embora identifique casos esporádicos em que isso acontece, este papel do GeoGebra está patente noutras resoluções.

O problema "Um quadrado dividido"

Na figura está representado um quadrado que foi dividido em 14 quadrados representados a amarelo, de dimensões diferentes e inteiras, e 1 rectângulo representado a branco, também de dimensões inteiras. O rectângulo branco tem 30464 cm² de área.

Qual é a área do quadrado grande?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

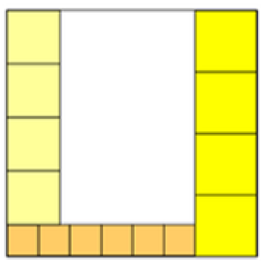


Figura 1 – Enunciado do problema 9, edição 2011

O ficheiro enviado pela Jéssica contém uma representação da figura do enunciado do problema e um pequeno texto que apresenta, simultaneamente, uma legenda para melhor interpretação da sua construção e a resolução do problema com a determinação da área pedida (Figura 6). O protocolo de construção revela que este trabalho requereu um total de 195 passos, sendo os dois últimos a inserção de uma imagem com quatro parágrafos de descrição (do exterior) e a inserção de texto com a resposta final (no GeoGebra).

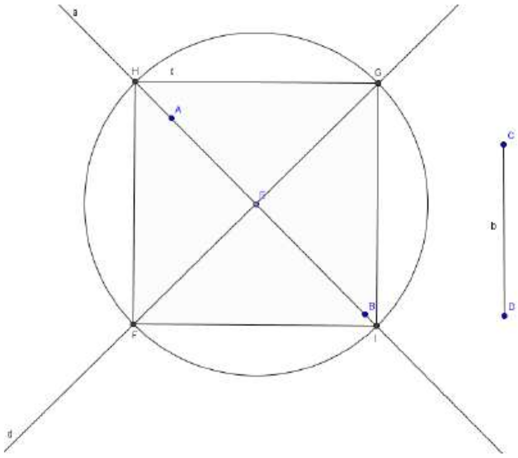


Figura 2 – Construção do quadrado inicial

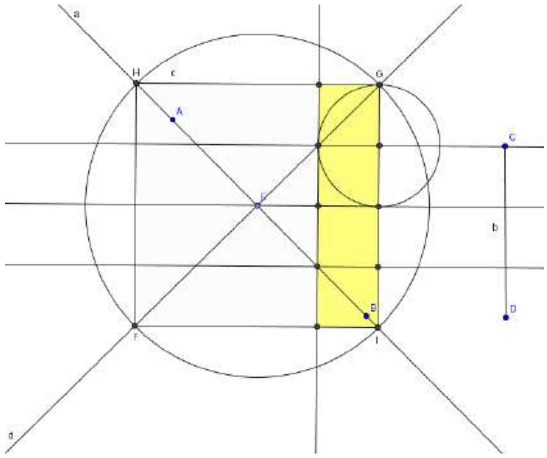


Figura 3 – Construção dos quadrados à direita

Em traços gerais, a Jéssica começa por representar o quadrado maior que sustenta a construção: desenha duas retas perpendiculares e uma circunferência com centro no ponto de interseção dessas retas e com um raio de comprimento definido pelo segmento CD (portanto, variável). Em seguida dedica-se à construção dos quatro quadrados à direita: marca pontos médios, constrói uma circunferência e, através de retas paralelas, perpendiculares e suas interseções, constrói os quatro polígonos regulares (Figura 3).

Quanto à construção dos quadrados inferiores (Figura 4), a Jéssica começa por marcar o ponto médio, R. Seguidamente utiliza uma reflexão do vértice I relativamente à reta vertical que passa por F'_1 para obter o ponto I', e designa o ponto médio do segmento $I'F'_1$ por S. Constrói então uma circunferência de centro R, a passar por I', e designa U à sua interseção com FI. Encontra V, o ponto médio de FU. Continua com a construção de retas paralelas, circunferências com determinado centro e raio, e determina interseções até concluir a representação dos quadradinhos inferiores. De forma análoga, constrói os quatro quadrados em falta no lado esquerdo (Figura 5).

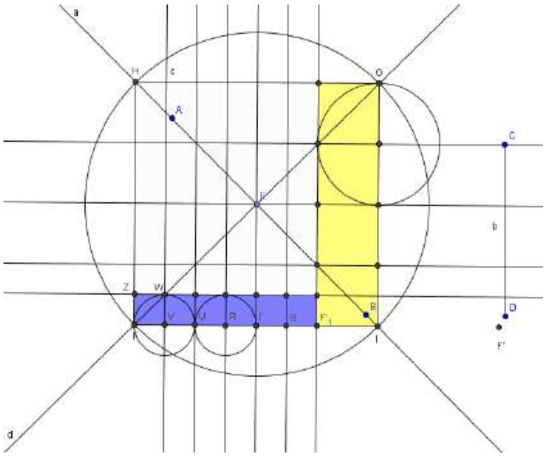


Figura 4 – Construção dos quadrados inferiores

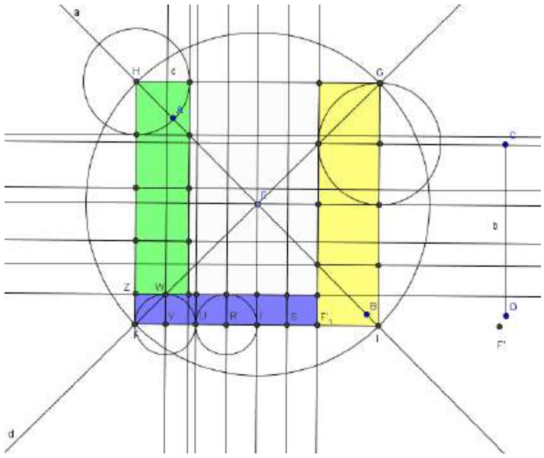


Figura 5 – Construção dos quadrados à esquerda

Em seguida destaca alguns aspetos do seu trabalho, colorindo polígonos e acrescentando quadradinhos exteriores ao quadrado inicial e algumas circunferências, em baixo à esquerda, que permitem identificar visualmente as relações entre os diversos comprimentos (Figura 6). À direita, acrescenta uma legenda que ajuda a interpretar a sua produção e a quantificar as relações referidas. Posteriormente, define como incógnita a medida do lado do quadradinho azul e, recorrendo às relações identificadas, estabelece que esse valor desconhecido é a solução da equação $4{,}25x \times 7x = 30264$. Com esse valor, determina o comprimento do lado do quadrado maior e, em seguida, a sua área.

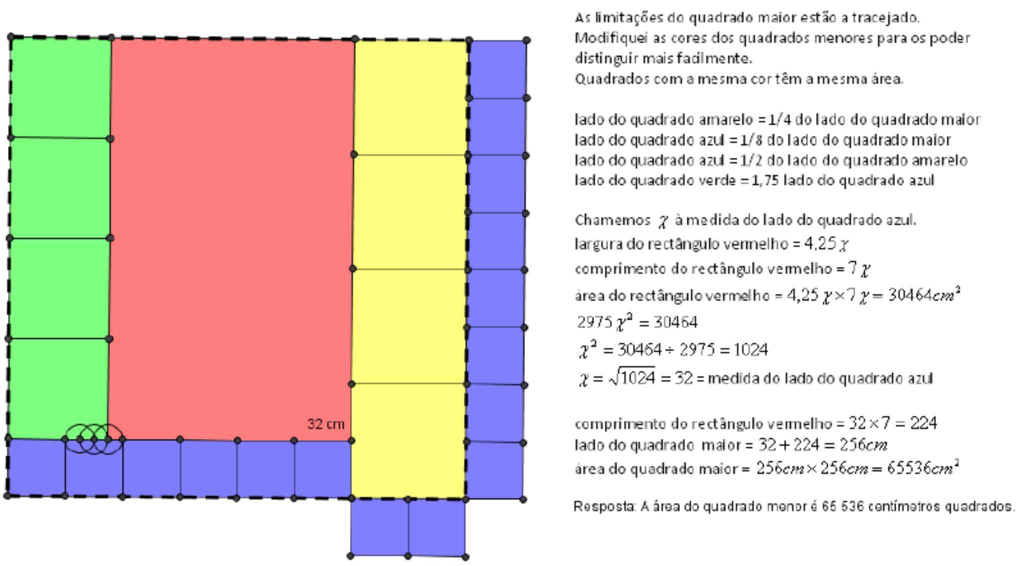
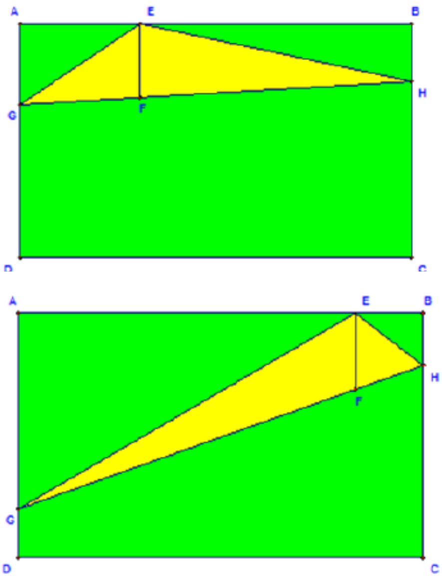


Figura 6 – Aspeto final da resolução do problema

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva retangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do retângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH].

No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do retângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!

Figura 7 – Enunciado do problema 6, edição 2011

A Jéssica também recorre ao GeoGebra para simular a construção do relvado retangular e do canteiro triangular (Figura 8). Começa por representar dois pontos, A e B, e a reta que passa por eles, designada por *a*, que servirá de suporte ao lado direito do retângulo. Marca um ponto C sobre essa reta, mas fora do segmento AB, e uma reta *b*, perpendicular à reta *a* que passa por C. Sobre esta reta marca o ponto D e por ele traça a reta *c* que é perpendicular a *a*. Em seguida marca o ponto E sobre a reta inicial *a* e por ele fez passar uma reta perpendicular a *a*, designada por *d*. Encontra então os pontos F, G e H, resultantes da interseção de várias retas.

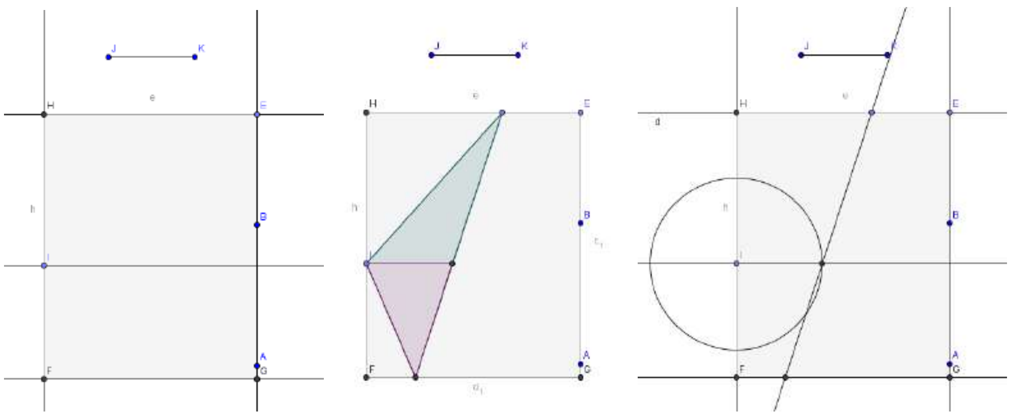


Figura 8 – Três fases da construção

Em seguida constrói o quadrilátero EHFG, usando as Ferramentas de Polígono, o ponto I sobre o segmento HF, e por I faz passar uma perpendicular a HF, ou seja, a reta *f*.

O próximo passo da concorrente leva-a a construir um seletor: marca dois pontos, J e K, fora do retângulo, e constrói o segmento JK. Regressa agora à construção e desenha uma circunferência com centro no ponto I e com raio de comprimento igual ao do segmento JK. Ao ponto de interseção da circunferência com a reta *f*, interior ao retângulo, chama L, e constrói também o segmento LI, a que corresponde a "vara". Sobre o segmento HE marca o ponto M, e por L e M traça a reta *j*. Ao ponto de interseção de *j* com o segmento DC chama N. Em seguida, constrói o triângulo NIM, o triângulo ILM e o triângulo ILN, alterando a cor do seu preenchimento.

A explicação enviada pela Jéssica completa a construção e permite acompanhar o seu raciocínio (Figura 9). A jovem reconhece que a área do canteiro triangular coincide com o valor escolhido para comprimento do lado do retângulo. Obtém esse resultado a partir da manipulação da variável "altura" de cada um dos triângulos obtidos da decomposição do canteiro triangular pelo segmento que representa a vara.

Resposta:
O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2

Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.

Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.

Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

Figura 9 - Excerto da resolução enviada pela Jéssica por e-mail

Discussão

A fluência tecnológica identificada anteriormente nas produções dos concorrentes do Sub14 era bastante visível ao nível da comunicação dos seus processos de resolução dos problemas. Mais recentemente, emergiu um conjunto de evidências que mostram como essa sofisticação tecnológica permeia também outras fases da resolução de problemas. Nestas produções desta concorrente sobressai a elevada complexidade das construções, mas estas não se limitam a ilustrar as situações descritas nos enunciados ou a complementar os cálculos apresentados. A análise das ações detalhadas da Jéssica com o GeoGebra revela a importância da construção na compreensão do problema e no deslindar de uma estratégia que lhe permita vir a obter a solução pretendida.

Este caso ilustra a complexidade da simbiose que Borba e Villarreal (2005) descrevem, pois as estratégias de resolução dos problemas revelam uma concorrente "a pensar com o GeoGebra". Jéssica revela várias outras características dos "humanos-com-media": por um lado, mostra alguma indiferença relativamente ao papel que as tecnologias desempenham na sua atividade de resolução de problemas, embora goste de mostrar que conhece a linguagem própria da era digital e que é capaz de usar uma multiplicidade de ferramentas, aprendizagens motivadas na Escola mas que decorreram sobretudo à sua conta, muito para além da sala de aula.

A concorrente reconhece e responde a uma grande diversidade de convites para a ação com o GeoGebra, pois é nessa relação simbiótica entre a utilização de conceitos matemáticos, favorecida pela representação visual, que vai compreendendo os problemas e deslindando um caminho para a sua resolução. Esta fluência em lidar com a ferramenta é revelada pela perceção daquilo que é capaz de fazer no GeoGebra, ou seja, marcar pontos, desenhar retas paralelas ou perpendiculares a outras, circunferências com determinado centro e raio, encontrar pontos médios de segmentos, fixar distâncias e transportá-las para outras construções, dividir um segmento em partes iguais, determinar a reflexão de um ponto relativamente a uma reta, usar um seletor para fazer variar o comprimento de um segmento, arrastar e explorar famílias de figuras. Curiosamente, a Jéssica opta sempre por não recorrer às ferramentas de medida. Nestes seus trabalhos, o GeoGebra assume o papel de ferramenta-para-pensar e não de ferramenta-para-calcular, pelo que as suas resoluções só ficam completas com a inclusão de uma justificação detalhada, onde explica o seu raciocínio e indica os cálculos que julga necessários. Na primeira resolução, parece ser a própria atividade de construção que lhe permite "ver as relações" entre os lados dos vários tipos de quadrados. Já no segundo problema parece ter sido a construção rigorosa, suportada pela possibilidade de uma total manipulação das dimensões dos entes geométricos, o que leva a uma visão mais abrangente do problema proposto, estendendo as várias condições e permitindo uma generalização da solução.

Tal como a teoria sustenta, é o reconhecimento das potencialidades de ação da ferramenta em estreita articulação com as aptidões da concorrente que geram atividade. Essa articulação envolve, pois, dois tipos de conhecimento: o matemático e o tecnológico, que se influenciam e inter-relacionam, pelo que nesta atividade de resolução de problemas de matemática com o GeoGebra é possível identificar vários dos processos que Martin e Grudziecki (2006) sugeriram para caracterizar a literacia digital, e que aqui se propõem como base para descrever a literacia tecno-matemática desta concorrente.

Numa primeira abordagem a estes problemas, a Jéssica começa por detetar o tema matemático envolvido, Geometria, o que remete para a identificação de um repertório matemático associado, e imediatamente reconhece o GeoGebra como o recurso digital imprescindível à resolução (*identificação*), ferramentas estas – matemáticas e GeoGebra – que já são do seu conhecimento e, portanto, às quais tem acesso garantido (*acessibilidade*), não só porque lhe permitem uma elevada precisão e fiabilidade (*avaliação*), mas também porque consegue executar determinados procedimentos e compreendê-los no âmbito do problema (*interpretação*). Tanto a atividade que a concorrente relatou como a que foi observada sugerem que a compreensão em extensão do problema e a decisão sobre o conjunto de ações que serão necessárias à sua resolução (*definição*) têm início aqui, mas não se esgotam nesta etapa.

A esta fase de "observação e decisão", segue-se a de "produção da solução". A concorrente organiza então diferentes recursos materiais, como o bloco de notas, canetas coloridas, calculadora, GeoGebra, Word, Paint, e-mail, e diversos recursos matemáticos, por exemplo, propriedades de retas paralelas ou perpendiculares, de circunferências e suas representações, determinação de áreas ou manipulação de uma expressão algébrica, e combina-os de forma relevante à criação e desenvolvimento da estratégia (*organização*, *integração* e *análise*). A partir dessa construção e da própria manipulação da construção, a Jéssica cria novos objetos de conhecimento, por exemplo, uma estratégia, uma representação, um modelo conceptual (*criação*), podendo interagir com a professora, a mãe ou a equipa do Sub14 de forma relevante para a resolução (*comunicação*). Tal como a jovem refere, e as resoluções evidenciam, a sua compreensão do problema aprofunda-se durante esta etapa de realização de construções e aquando da sua manipulação.

A última fase diz respeito ao "reportar" da atividade ou do processo de resolução dos problemas a outros de relevo, neste caso, a equipa do Sub14. Esse relato é composto pelo trabalho em GeoGebra e por uma explicação detalhada dos procedimentos: na primeira solução destaca-se uma pequena legenda, a representação das relações entre os lados dos quadrados e os cálculos necessários à solução; na segunda solução destaca-se o texto escrito, onde a Jéssica explica o seu raciocínio e prova que a área do canteiro triangular se mantém, independentemente da posição da vara (*disseminação*). O último processo mencionado por Martin e Grudziecki (2006), *reflexão*, não emerge imediatamente da análise das produções da concorrente embora o facto de as ter enviado para a equipa do Sub14 seja indicador de que considera que cumpriu a tarefa com sucesso.

O *framework* concebido para explicar a literacia tecnológica oferece grandes potencialidades para clarificar a literacia tecno-matemática na atividade de resolução de problemas com tecnologias, que constitui um conceito operacional para descrever a inter-relação entre o sujeito e a tecnologia, permitindo explicitar o que ocorre no sistema humanos-com-media na resolução de problemas matemáticos. Trabalhos futuros debruçar-se-ão sobre o aperfeiçoamento deste conceito e prosseguirão no apuramento da adaptação do *framework* aqui utilizado.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 – "Resolução de Problemas de Matemática: perspectivas sobre uma competição interactiva na web - Sub12&Sub14", e pela Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/73363/2010, da FCT.

Referências

Barbeau, E. J., & Taylor, P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Bélisle, C. (2006). Literacy and the Digital Knowledge Revolution. In A. Martin, & D. Madigan (Eds.) *Digital Literacies for Learning* (pp. 51-67), London: Facet.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York, NY: Springer.

Chemero, A. (2003). An outline of a theory of affordances. *Ecological Psychology*, *15*(2), 181–195.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. Em R. Shaw & J. Bransford (Eds.) *Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Greeno, J. (1994). Gibson's Affordances. *Psychological Review*, 101(2), 336-342.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker. A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. London: Routledge.

Hoyles, C., Wolf, A., Molyneux-Hodgson, S., & Kent, P. (2002). *Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council*. Relatório do Projeto. Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012a). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web-based mathematical competition. *International Congress on Mathematics Education - ICME 12*, pp. 2933-2942. Seoul: ICMI.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012b). Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com tecnologias. Em H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), *Atas do XXIII SIEM*, pp. 677-691. Coimbra: APM. ISBN: 978-972-8768-53-9.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). Beyond-school mathematical problem solving: a case of students-with-media. Em A. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the IGPME*, Vol. 3, pp. 105-112. Kiel, Germany: PME.

Lévy, P. (1990). *As Tecnologias da Inteligência*. *O Futuro do Pensamento na Era da Informática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Martin, A. (2006). A European framework for digital literacy. *Digital Kompetanse*, 2, 151-161.

Martin, A., & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and Tools for Digital Literacy Development. *Innovation in Teaching And Learning in Information and Computer Sciences*, *5*(4), 249 -267.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 21-46.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Villarreal, M., & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, *42*(1), 49-62.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O contributo da participação numa competição matemática para a aprendizagem de um aluno com necessidades especiais: O caso de Rui

Nélia Amado[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *As competições, a par de outras atividades matemáticas desafiadoras que se realizam para além da sala de aula, têm vindo a merecer atenção recente por parte da investigação em educação matemática. As competições de caráter inclusivo, como é o caso dos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14, são atualmente encaradas como oportunidades de aprendizagem e de desenvolvimento. Neste estudo elegemos como foco de investigação a relação entre a participação de um aluno com necessidades especiais nestas competições e o seu percurso de aprendizagem e de transformação. Analisando o caso de Rui, com base em dados qualitativos recolhidos ao longo de quatro anos, descrevemos a sua evolução na resolução de problemas, no uso do computador e na sua autoconfiança, face às dificuldades e ao sucesso que experimentou enquanto concorrente.*

Palavras-chave: competições matemáticas inclusivas; resolução de problemas; tecnologias; necessidades educativas especiais.

Atividades matemáticas para além da escola

A escola e, em particular a sala de aula, foi durante décadas o principal espaço de aprendizagem. Hoje, a Internet, a comunicação à distância, os media e os cada vez mais abundantes recursos digitais e multimédia constituem fatores responsáveis pela atenção acrescida ao conhecimento obtido fora da sala de aula. Atualmente é possível aceder à informação e ao conhecimento em qualquer momento e em qualquer local. Esta é uma circunstância importante pela qual a investigação em educação matemática começou a mostrar maior consciência da relevância dos espaços de aprendizagem "para além da sala de aula" (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich & Taylor, 2009).

Apesar de ser recente, em Portugal, o interesse pelas aprendizagens matemáticas fora da escola, a nível internacional este tema tem merecido atenção por parte de diversas organizações. Estas e outras atividades têm por objetivo expor aos alunos a uma matemática estimulante, procurando motivá-los para o estudo desta disciplina ou dar-lhes a oportunidade de aprender mais.

A crescente participação dos jovens neste tipo de atividades não deve ser encarada como um sinal de insuficiência da sala de aula mas, pelo contrário, pode e deve ser vista como mais uma oportunidade para novas e diferentes aprendizagens que podem contribuir para melhorar o desempenho escolar dos alunos.

Em Portugal são conhecidas várias atividades desta natureza, em particular concursos ou competições, tais como os campeonatos de jogos matemáticos, e outros projetos ligados à matemática, como o Equamat, o Canguru Matemático, o matUTAD ou os Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14. Estudos nacionais e internacionais (Kenderov et al, 2009; Wedege & Skott, 2007, Jacinto & Carreira, 2011) permitem afirmar que este tipo atividades realizadas para além da sala de aula tem resultados importantes para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, da capacidade de comunicação matemática, da ligação afetiva dos jovens e das famílias com a matemática, da utilização pertinente e interessante das tecnologias digitais como ferramentas para lidar com a matemática.

Nesta comunicação apresentamos e analisamos o percurso evolutivo de um participante com necessidades educativas especiais nos Campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 (http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/subs/sub12.html), mostrando evidências do desenvolvimento da comunicação matemática, da sua fluência tecnológica e da sua autoconfiança ao longo da sua participação, durante quatro anos consecutivos, dois em cada um dos campeonatos.

Enquadramento teórico

Competições matemáticas inclusivas

A maior parte das competições matemáticas existentes têm lugar fora da sala de aula e assumem uma caracter voluntário. Protasov, Applebaum, Karp, Kasuba, Sossinsky, Barbeau & Taylor (2009) defendem que nenhum educador deve forçar ou obrigar os alunos a participar e recomendam ainda um cuidado especial na seleção dos desafios ou problemas a apresentar, de modo a garantir o sucesso nas atividades. A escolha e seleção dos desafios está diretamente relacionada com o objetivo das competições.

Nos últimos anos surgiram diversas competições matemáticas dirigidas a todos os alunos, conhecidas como inclusivas (Kenderov, 2009), com objetivo primordial de despertar o gosto e o interesse dos participantes pela matemática. Estas competições envolvem um número muito elevado de alunos devido ao facto das atividades propostas serem de um nível mais acessível, estimando-se que milhões de alunos pelo mundo estejam envolvidos em competições desta natureza.

A resolução de problemas e os Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14

A resolução de problemas é reconhecida como uma competência essencial no ensino e aprendizagem da matemática (Schoenfeld, 1992), sendo simultaneamente notada como uma das áreas de dificuldade de muitos alunos. A competência de resolução de problemas pode assumir vários significados na investigação em educação matemática (Callejo & Vila, 2009). Neste artigo adotamos a definição de competência de resolução de problemas apresentada no PISA (OCDE, 2012):

> A competência de resolução de problemas é a capacidade individual para levar a cabo um processo cognitivo que permita ao indivíduo compreender e resolver situações problemáticas para as quais não dispõe de um método imediato. Inclui a vontade de se envolver com tais situações como forma de realização do seu potencial enquanto cidadão construtivo e reflexivo (p. 4).

Desta definição depreende-se que a resolução de problemas de matemática exige mais do que conhecimento de procedimentos e técnicas, exige a capacidade de os mobilizar e colocar em ação, de pensar em estratégias que à partida não são diretas nem pré-estabelecidas e de recorrer a diversas formas de comunicar o raciocínio e o processo de resolução. Enfim, implica mobilizar e desenvolver uma variedade de competências para atingir um determinado fim, numa situação em que o indivíduo não tem, de antemão, um algoritmo ou procedimento já construído que lhe garanta a solução.

Os problemas propostos nos Campeonatos Sub 12 e Sub 14 não procuram ajustar-se aos temas curriculares, antes pretendem que os alunos mobilizem conceitos, procedimentos e formas diversas de raciocínio matemático. Além disso, os problemas são projetados para dar aos alunos a possibilidade de usar diferentes abordagens (papel e lápis, recurso às TIC, uso de materiais concretos, etc.), diversas estratégias (tentativa e erro, procedimentos algébricos ou numéricos, propriedades geométricas, etc.) e várias representações (figuras, tabelas, diagramas, linguagem simbólica e natural, resultados obtidos com o computador, etc.), permitindo assim o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, em sentido amplo. Aos alunos é dada plena liberdade relativamente ao modo de apresentar as suas soluções (escritas à mão e digitalizadas, usando o computador – com ou sem a ajuda de software específico –, recorrendo a imagens, etc.). O registo escrito é um requisito indispensável nesta competição, independentemente da linguagem utilizada. O recurso à escrita é visto por Cooper (2012) como uma excelente oportunidade para os alunos expressarem o seu raciocínio e ampliar a sua compreensão muito para além daquilo que é possível quando se limitam a apresentar cálculos e operações. A qualidade das respostas dos alunos não é aferida em função das suas escolhas de abordagens, estratégias, representações e formas de apresentação, mas sim em termos da exatidão e justificação do processo de resolução. Neste sentido, independentemente do grau de sofisticação matemática, todas as respostas corretas e completas são igualmente valorizadas.

Os jovens do século XXI e as tecnologias

Atualmente, o computador, a Internet ou o telemóvel fazem parte dos recursos disponíveis da maioria dos jovens e adolescentes. O recurso às novas tecnologias tem vindo a provocar alterações profundas na comunicação escrita, em geral e, na matemática, em particular. Cooper (2012) destaca os benefícios da utilização das tecnologias como estímulo para a comunicação, nomeadamente na matemática. Para esta autora, a utilização dos recursos tecnológicos tem provocado mudanças relevantes na forma como os alunos escrevem e expressam as suas ideias e conhecimentos. Tal facto também tem sido constatado por Jacinto e Carreira (2011) que evidenciam a forma como os participantes no Sub 12 e Sub 14 recorrem aos recursos digitais para "pensar, agir e comunicar". Igualmente, Zemelman, Daniels & Hyde (2005) destacam a necessidade de conjugar o raciocínio, a resolução de problemas, a comunicação, o estabelecimento de conexões e a criação de representações como forma de promover uma verdadeira compreensão da matemática. Ao responderem aos desafios dos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14 os participantes conjugam estas diversas habilidades. Os campeonatos proporcionam aos alunos oportunidades de utilizar os conhecimentos e competências adquiridos na escola mas, em simultâneo, dão-lhes a liberdade de experimentarem os recursos tecnológicos de que dispõem e a possibilidade de usarem um largo período de tempo para produzirem a sua resolução, o que é impensável na sala de aula. Os resultados da investigação mostram que muitos participantes recorrem com frequência aos conhecimentos adquiridos em sala de aula mas evidenciam uma criatividade, que pode ser explicada pela oportunidade de: i) escolherem livremente entre várias abordagens, ii) recorrerem às tecnologias (Amado, Amaral & Carreira, 2009; Moyer, Niezgoda & Stanley, 2005) e iii) disporem de duas semanas para resolver os problemas.

Em suma, a aprendizagem da matemática, para além da sala de aula, está hoje muito suportada por ambientes tecnológicos cada vez mais versáteis e acessíveis (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdnyakov & Stedøy, 2009).

Alunos com necessidades educativas especiais

A razão pela qual nos propomos abordar o caso de um aluno com necessidades educativas especiais, prende-se com a perspetiva inclusiva dos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14. O facto de esta competição *ser inclusiva* não significa ter baixas expetativas em relação aos participantes (Freire, 2008), designadamente no que se refere à criatividade.

Em educação, o conceito de necessidades educativas especiais está presente sempre que seja exigida educação ou atenção especial a uma criança, nomeadamente devido a deficiências sensoriais, auditivas ou visuais (Correia, 2004; Rodd, 2006). Os alunos com necessidades educativas especiais são aqueles que por exibirem determinada condição específica podem necessitar do apoio de um serviço de educação especial durante todo ou parte do seu percurso escolar, de modo a facilitar o seu desenvolvimento académico, pessoal e socio emocional. Entre as condições específicas referidas, pelos diversos autores, encontramos a deficiência visual.

Procedimentos metodológicos

Atendendo à natureza deste estudo optou-se por uma metodologia qualitativa, de natureza interpretativa. Apresentamos o caso de Rui, um jovem da região do Alentejo, que durante quatro anos participou nos Campeonatos de Matemática Sub 12 (5.º e 6.º anos de escolaridade) e Sub 14 (7.º e 8.º anos de escolaridade). Rui foi apurado para a final presencial em todas as edições dos campeonatos em que participou.

Recorremos a diversas formas de recolha de dados: entrevistas, observação e recolha documental das produções de Rui ao longo dos quatro anos de participação. As observações tiveram lugar em cada uma das Finais dos Campeonatos, em junho de cada ano, de 2009 a 2012. Nestes contactos pessoais com Rui e a sua mãe tivemos oportunidade de observar o participante durante a resolução da prova e as suas atitudes e comportamentos durante outros momentos das finais, tais como receção aos finalistas, lanche e sessão de encerramento.

As entrevistas, uma à mãe e outra ao participante, assumiram formatos diferentes no que se refere à sua estrutura e em ambos os casos foram realizadas à distância. À mãe foi pedido um testemunho acerca da participação do Rui nos Campeonatos, em maio de 2012. Com o Rui, a opção tomada foi por uma entrevista estruturada cujo guião foi enviado por correio eletrónico, dando-lhe o tempo necessário para o envio da resposta. Esta entrevista teve lugar após terminar a sua participação nos Campeonatos, em outubro de 2012. Recorremos ainda a diversas mensagens trocadas entre a organização do Campeonato e a mãe de Rui, nomeadamente no que se refere à caraterização da deficiência visual e às necessidades especiais do jovem durante a realização das finais.

No que se refere às produções de Rui, selecionámos as que marcam as diferentes fases do seu percurso: o início da participação, a primeira mudança e a alteração profunda que ocorre nos últimos anos.

Rui é o verdadeiro nome deste jovem participante. A razão pela qual não usaremos um nome fictício prende-se com a vontade do próprio e da mãe, tendo sido obtida a devida autorização para a realização das entrevistas e registado por escrito o desejo da encarregada da educação de não atribuição do anonimato em possíveis trabalhos de investigação publicados a partir dos dados fornecidos por ambos.

A deficiência visual de Rui é descrita pelas próprias palavras da mãe:

> Mãe: A extrema sensibilidade à luz, o diagnóstico de afaquia conjuntamente com nistagmus e esotropia... são responsáveis por um crescimento com pouco acesso à visão e condicionam o Rui na manutenção da atenção, equilíbrio, motricidade fina, na realização de tarefas de leitura e escrita… e impossibilitam-no de usufruir, na sua totalidade, das acuidades visuais que já adquiriu. De referir que quanto maior o cansaço menores são as suas produções, adotando uma postura incomum a nível de movimentos.

Esta descrição está de acordo com a definição encontrada na literatura (Correia, 2004; Rodd, 2006), pelo que Rui é um participante com necessidades educativas especiais. Contudo importa sublinhar que tal facto não foi impeditivo da sua participação nas duas fases do campeonato (através da Internet, na fase de apuramento, e presencial na final).

Análise de dados – O caso de Rui

O primeiro contacto com os Campeonatos

Rui iniciou a sua participação quando frequentava o 5.º ano, em 2008/09 e explicou-nos como foi o seu primeiro contacto com o Sub 12:

> Rui: Vi um cartaz na escola mas não liguei muito. A minha professora de matemática explicou, numa aula, o que era e perguntou se queríamos participar. Vim para casa com muita vontade de participar.

A mãe recordou o dia em que Rui recebeu o flyer de divulgação. Como habitualmente, esperava-o à entrada da escola e viu-o a correr na sua direcção, a gritar: "Mãäeeeeeeeeeeeee... e aquele pequeno papel que continha um simples endereço eletrónico, serviu de mote a uma noite sem dormir".

As primeiras dificuldades

Rui confessou que o gosto pela matemática e por "coisas novas, diferentes e interessantes" contribuíram para se aventurar a ser um dos concorrentes. Mas o início não foi fácil.

> Mãe: O começo não foi fácil, ampliávamos e imprimíamos os problemas, o Rui juntava algumas letrinhas, a mãe completava a leitura. (…) Este contato com a "nova Matemática", não foi propriamente um momento calmo e doce, senti o choque do meu filho.

As dificuldades de Rui estavam relacionadas com dois aspetos distintos: em primeiro lugar, como consequência da sua deficiência visual, era difícil a leitura dos problemas e depois a escrita da resolução. Em segundo lugar, a própria atividade da resolução de problemas provocou alguns dilemas e conflitos, como foi descrito pela mãe:

> Mãe: A rotina do 'sei e aplico o conhecimento adquirido ao longo dos anos escolares' havia-se quebrado. As respostas não eram óbvias, requeriam: uma maior estruturação do pensamento matemático, formular hipóteses, a experimentação e enfrentar esse monstro que atormenta qualquer criança 'fazer, refazer, recomeçar, explicar'. Apesar do silêncio, nos dias seguintes à leitura de mais um desafio, podia sentir as faíscas da encruzilhada de neurónios que se criou no interior daquela cabecita. Aos poucos surgiam desenhos, tabelas, hipóteses... que a mãe pacientemente ia registando.

Rui nunca perdeu o entusiasmo, nem desanimou; o gosto pela matemática é evidente neste aluno. Por outro lado, a necessidade de aceder à Internet para consultar a página do campeonato e a oportunidade de usar o computador, foram atrativos que Rui destacou.

> Rui: Era algo diferente: o ser pela Internet. Não era a matemática da aula, era algo em que se tinha que pensar mais. Os problemas 'puxavam pela cabeça' de uma forma diferente.

Rui mostra gostar de resolver problemas, destacando que esta atividade é diferente do que faz na sala de aula. Como foi referido, os problemas dos Campeonatos não pretendem estar alinhados com os conteúdos curriculares, até porque o Sub 12 ao abranger os alunos de 5.º e 6.º ano não pode dirigir-se especificamente a tópicos matemáticos focados nos programas pois colocaria os alunos de 5.º ano em posição de desvantagem. São, por isso, problemas que estão ao alcance dos jovens, mediante estratégias e processos de raciocínio que estes podem construir, usando pensamento matemático e desenvolvendo modelos concetuais que permitem a sua resolução.

As dificuldades muitas vezes sentidas pelos alunos quando tentam aplicar mecanicamente o que sabem ou aprenderam, em problemas rotineiros, à resolução de problemas de índole mais desafiadora são bem conhecidas da investigação (Callejo & Vila, 2009). Em muitos casos, perante problemas menos usuais, os comportamentos dos alunos refletem as suas conceções e crenças acerca da atividade de resolução de problemas, muitas das quais impregnadas pela sua experiência escolar.

A resolução de problemas e a utilização do computador

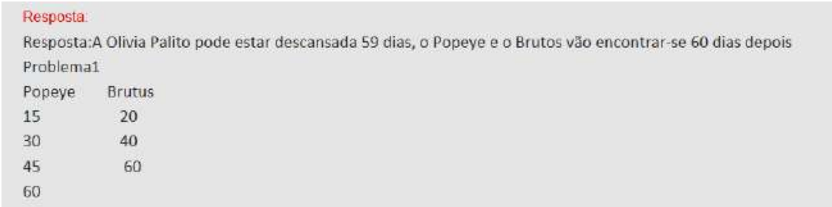
A oportunidade de ler e resolver os problemas, recorrendo ao computador surgiu como uma dupla vantagem para o Rui. Por um lado, foi motivante e aliciante recorrer a esta ferramenta, mas foi também um precioso recurso que o ajudou a transpor as dificuldades visuais. Com o computador tornou-se muito fácil ampliar o texto e as imagens do enunciado do problema, facilidade que não encontra ao consultar os manuais escolares, por exemplo. Ao mesmo tempo, permitiu ir ensaiando e produzindo as respostas aos problemas sem ter de usar o papel e o lápis.

> Rui: Gostava de usar o computador e este ajudava-me por causa das minhas dificuldades. Permitia-me participar. O seu uso era importante porque eu não escrevia e tinha muitas dificuldades a ler. Não conseguia escrever com a mão. O computador ampliava os problemas, o que me permitia ler. Em termos de escrita era muito mais fácil fazê-lo no computador. O computador também me ajudou a descobrir funcionalidades novas. Também devo aos Subs parte do gosto que tenho em relação a computadores.

A possibilidade de recorrer ao computador foi uma mais-valia para Rui em diversos aspetos como se pode concluir das suas palavras. Foi facilitador da sua participação no campeonato mas revelou-se igualmente uma oportunidade para novas e diferentes aprendizagens que extravasaram a própria matemática. São aliás, de destacar as competências desenvolvidas ao nível da utilização das tecnologias. Rui, para exprimir as suas ideias, sentiu necessidade de descobrir e usar múltiplas funcionalidades do computador que lhe permitiam ir elaborando as suas respostas e torná-las progressivamente mais completas, mais desenvolvidas e mais expressivas do seu processo de resolução, como adiante se pode constatar.

Das poucas palavras às produções digitais

As duas primeiras respostas que apresenta aos problemas do Sub 12 são curtas e escritas diretamente no formulário online existente na página do campeonato (Fig. 1).



Resposta:
Resposta:A Olivia Palito pode estar descansada 59 dias, o Popeye e o Brutus vão encontrar-se 60 dias depois
Problema1

Popeye	Brutus
15	20
30	40
45	60
60	

Figura 1. Resposta ao problema 2 do Sub 12 (5.º ano).

Como se pode ver, Rui é parco em palavras nas suas primeiras resoluções. Não utiliza anexos, não faz esquemas nem usa outras representações e pouco escreve para apresentar o seu processo. Esta dificuldade não é exclusiva de Rui; a maioria dos participantes mostra uma grande dificuldade inicial em expressar as suas ideias. Ao apresentar a resposta ao terceiro problema, ainda no 5.º ano, Rui envia um primeiro anexo em formato Word (Fig. 2) onde se percebe já uma diferença; não se limita a escrever algumas palavras e números como nas respostas anteriores, apresenta um pequeno esquema feito por si no computador com as ferramentas disponíveis.

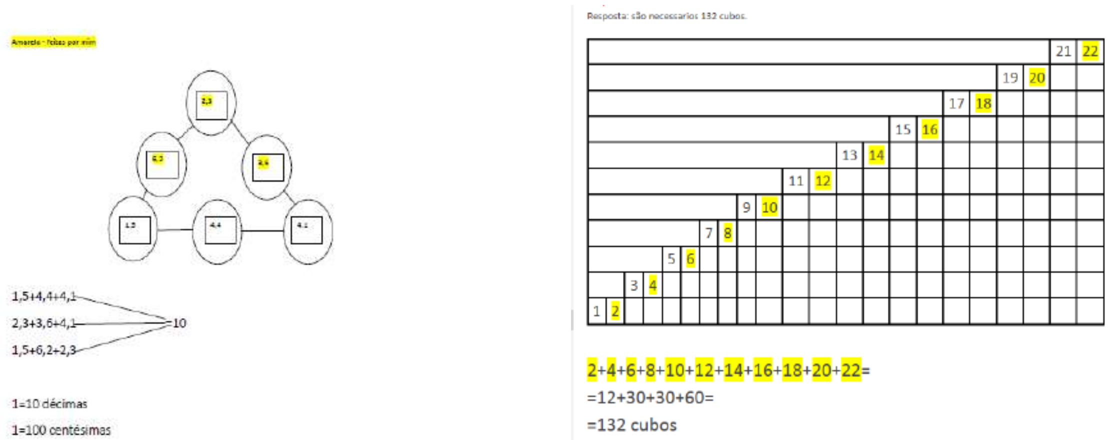


Figura 2. Resposta aos problemas 3 e 4 do Sub 12 (5.º ano).

O mesmo sucede na resposta ao quarto problema, sendo que, desta vez, surge uma tabela e o recurso a cores para distinguir alguns aspetos que considera relevantes (Fig. 2). Ao longo da sua participação no 5.º ano, Rui apresenta todas as respostas aos problemas corretas, dentro do prazo indicado pela organização, mostrando-se muito responsável e interessado.

Durante o 6.º ano, a sua participação na fase de apuramento assumiu caraterísticas semelhantes às do ano anterior, mas foi sendo notório o seu progresso na forma como comunicava as resoluções, sendo evidente que ia explicando cada vez melhor o seu processo de resolução.

No último ano de participação, no Sub 14, quando frequentava o 8.º ano, Rui era um participante bastante diferente do menino tímido e de poucas palavras que se mostrava anos antes. As suas resoluções vinham num documento em anexo, com mais de uma página. As suas respostas incluíam sempre tabelas, gráficos ou esquemas acompanhados de uma justificação em linguagem corrente. Ao contrário do que aconteceu várias vezes no início da sua participação, escrevia sempre uma mensagem na caixa de resposta apesar de enviar um anexo. As suas palavras deixavam transparecer uma atitude de confiança e de segurança que não existia nos primeiros anos. Como exemplo, apresentamos a resposta dada pelo Rui ao problema 1 do Sub 14 em 2012 (Fig. 3).

Para responder a este problema, Rui escolhe duas imagens distintas para representar cada um dos amigos: Alexandre e Bernardo. Em seguida cria um esquema que mostra cada um dos amigos a sair de casa a uma hora diferente, marca o espaço percorrido por cada um de acordo com a velocidade, como é dado no problema. E por fim, marca com um traço mais grosso a hora a que se encontram. Esta resolução, com que Rui enceta a sua participação no último ano do campeonato, mostra que este jovem desenvolveu uma variedade de competências ao longo da sua participação nestes campeonatos, confirmando a importância de manter expetativas elevadas em relação a um aluno com necessidades educativas especiais.

Rui desenvolve um conjunto de competências que permite colocar as suas resoluções entre as melhores de um Campeonato que envolveu mais de um milhar de participantes.

Cada aluno ou participante tem o seu ritmo; Rui é um jovem que necessita de mais tempo para elaborar as suas respostas devido às dificuldades visuais que apresenta, mas tal não o impediu de ser um dos melhores participantes.

A troca de mensagens entre Rui e a equipa organizadora também registou uma grande alteração ao longo do campeonato.

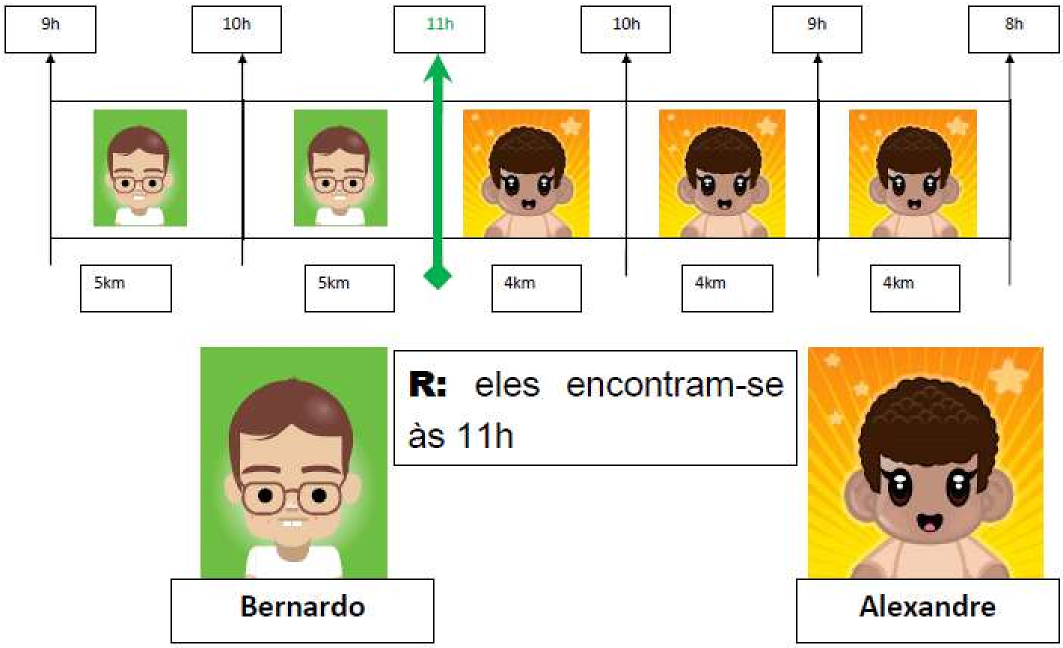


Figura 3. Resposta de Rui ao problema 1 do Sub 14 (8.º ano).

Na entrevista confessou que apreciava particularmente as mensagens que recebia quando as suas resoluções eram mais elaboradas:

> Rui: Gostava. Quando resolvia um problema de uma forma melhor recebia uma mensagem diferente que me fazia ficar com um sorriso. Se errava, as mensagens incentivavam-me a continuar. Motivavam-me bastante.

A presença nas Finais

Quando Rui foi apurado para a Final no primeiro ano de participação, a mãe enviou uma mensagem à organização, expondo a situação do Rui e solicitando que o enunciado da prova fosse escrito com letra de tamanho 20, visto não estar prevista a utilização de computador, e informando da sua necessidade de utilizar uma lupa binocular. A organização procurou criar as condições necessárias à participação deste aluno, tanto no que se refere à escrita da prova como dando mais tempo para a resolução dos problemas, visto Rui ter dificuldades na escrita à mão.

> Rui: Sentia-me apertado com o tempo. Sentia que se tivesse um dia resolvia aqueles 5 problemas totalmente certos. A meia hora que tinha a mais, era insuficiente para mim e não me ajudava a concluir pois encontrava-me bastante cansado. Os meus tempos sempre foram diferentes. Apesar de não ter conseguido aproveitar o tempo extra, o esforço que a equipa [organizadora] fez permitiu-me participar.

Ao longo destes quatro anos fomos testemunhando as mudanças de atitude do Rui nas finais. No primeiro ano era uma criança tímida, de poucas palavras. De ano para ano, assistimos a uma mudança de atitude e à medida que o tempo passava, mostrava-se mais confiante, seguro e, no último ano, já não era o menino acanhado de outrora. Ele falava e sorria para os elementos da organização com um grande carinho. A propósito da sua participação nas finais, comentou:

> Rui: Adorava o lanche. Sentia-me emocionado e feliz.

No final de quatro anos de participação ativa nos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14, Rui resume nestas palavras a importância que estes campeonatos tiveram na sua vida:

> Rui: Os Subs ajudaram-me a gostar ainda mais da matemática. Ajudaram-me a desenvolver a leitura e o registo das coisas, acabaram por me influenciar em tudo. Devo aos subs as notas que tenho.

Considerações finais

Rui é um exemplo de como a matemática, a resolução de problemas e, mais ainda, as competições matemáticas podem estar ao alcance de todos. A investigação alerta-nos para o erro de ter baixas expetativas (Freire, 2008) perante alunos com necessidades educativas especiais (Correia, 2004, Rood, 2006). Apesar das dificuldades iniciais na leitura e na escrita, resultantes dos seus problemas de visão, Rui fez um percurso notável ao longo da sua participação nos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14.

Outros estudos têm demonstrado o valor e o interesse das competições matemáticas inclusivas, pautadas por desafios moderados e pelo objetivo de envolver um grande número de jovens, em comparação com as competições seletivas e destinadas à procura de talentos em matemática (Grugnetti & Jaquet, 2005). Uma das vantagens das competições inclusivas está no facto de produzir efeitos positivos tanto em alunos com níveis de desempenho mais elevado como em alunos de desempenho mais baixo em matemática. O caso de Rui revela como o seu interesse pela matemática, por coisas novas e diferentes, a atitude de curiosidade e o entusiasmo por participar, encontraram eco nalgumas das condições presentes nos campeonatos em que se envolveu ao longo de quatro anos consecutivos. A sua participação tornou-se numa experiência de aprendizagem rica, em vários domínios, e gerou importantes oportunidades de desenvolvimento. Transformou-se num jovem confiante, entusiasta e capaz de se equiparar aos demais concorrentes, apesar das suas limitações físicas. Tal como a mãe de Rui faz notar, o percurso evolutivo deste jovem não foi isento de dificuldades e de esforço mas traduziu-se na sua própria capacidade de ultrapassar limitações e, como refere o próprio aluno, ter sucesso numa competição de resolução de problemas influenciou o progresso que fez a nível escolar.

A participação nestes campeonatos exige o recurso ao computador para consultar o enunciado e responder ao problema, o que foi uma mais-valia para Rui. A utilização do computador foi um aspeto motivador e mostrou-se vantajoso para ultrapassar as suas restrições específicas. Mas revelou-se ainda uma ferramenta muito valiosa, ao promover uma verdadeira aprendizagem da matemática. O computador foi fundamental na produção de respostas progressivamente mais elaboradas, justificadas e completas. Atendendo à natureza do campeonato, a escrita apresenta-se como uma característica determinante para apresentar e exprimir todo o processo de resolução. Cooper (2012) destaca a forma como os recursos tecnológicos podem constituir uma poderosa ferramenta na melhoria da competência da escrita, o que foi muito evidente com este participante. Por outro lado, nos últimos dois anos, Rui mostrou ser capaz de desenvolver e pôr em prática uma variedade de habilidades (Zemelman et al, 2005), indicadoras de uma sólida compreensão da matemática que foi trabalhando nos problemas propostos. Por fim, é de sublinhar a mudança na sua maneira de estar e o seu crescente à-vontade entre os seus pares e entre os adultos com que ia dialogando ao longo dos campeonatos. Este é um outro aspeto que importa referir a propósito de competições inclusivas e de outras iniciativas apostadas em captar o interesse e o gosto dos alunos pela matemática. Corresponde a uma componente afetiva que passa pela valorização das capacidades individuais, pela importância do encorajamento e do estímulo, pelo reconhecimento do valor do envolvimento parental e da construção da autoconfiança em matemática. Rui é hoje um jovem seguro e confiante na sua capacidade de aprender matemática, na escola e fora da escola.

Referências bibliográficas

Amado, N., Amaral, N. & Carreira, S. (2009). A liberdade que as tecnologias permitem: Trabalhando os números e as capacidades matemáticas transversais. In C. Costa, E. Mamede e F. Guimarães (Orgs.). *Números e Estatística: refletindo no presente perspetivando o futuro*. Secção de Educação Matemática, SPCE

Callejo, M., & Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two cases studies. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 111-126.

Cooper, A. (2012). Today´s Technologies Enhance Writing in Mathematics, The Clearing House, 85, 80-85.

Correia, L. (2004). Problematização das dificuldades de aprendizagem nas necessidades educativas especiais. *Análise Psicológica* 2 (XXII) 369-376. Acedido em agosto, 2013, em http://www.scielo.gpeari.mctes.pt/pdf/aps/v22n2/v22n2a05.pdf.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). NY: Springer.

Freire, S. (2008). Um olhar sobre a inclusão. Revista Educação, Vol. XVI, n.º 1, 5-10.

Grugnetti, L., & Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 373-384.

Jacinto, H. & Carreira, J. (2011). Nativos digitais em atividade de resolução de problemas de matemática. Conferência Online de Informática Educacional. Lisboa, UCP. Acedido em agosto, 2013, em http://www.coied.com/2011/actividades/artigos/tema1/.

Kenderov, P. (2009). A short history of the World Federation of National Mathematics Competition. *Mathematics Competitions*, *22*(2).

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the Classroom – Sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer

OCDE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. Acedido em agosto, 2013, em http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

Protasov, V., Applebaum, M., Karp, A., Kasuba, R., Sossinsky, A., Barbeau, E., & Taylor, P. (2009). Challenging Problems: Mathematical Contents and Sources. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 11-51). New York, NY: Springer

Rodd, M. (2006). Commentary: mathematics, emotions and special needs. *Educational Studies in Mathematics,63,* 227-234.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Wedege, T., & Skott, J. (2007). Potential for change of views in the mathematics classroom? In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 389-398). Larnaca, Cyprus. Acedido em agosto, 2013, em http://ermeweb.free.fr/CERME5b/.

Zemelman, S., Daniels, H., & Hyde, A. (2005). *Best practice: Today´s standards for teaching and learning in America´s schools*, 3rd Ed. Portsmouth, NH: Heinemann.

Reconhecimento de apoio

Este trabalho é parte do Problem@Web financiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, Projeto n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Fatores Afetivos na Resolução de Problemas Matemáticos Desafiantes no Contexto de uma Competição Inclusiva Baseada na Web*

Susana Carreira[1], *Rosa Antónia Tomás-Ferreira*[2], *Nélia Amado*[3]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt
[2]Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Centro de Investigação da Universidade do Porto, rferreir@fc.up.pt
[3]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt

Resumo. *Nesta comunicação, procuramos descrever os padrões de comportamento dos participantes numa competição de resolução de problemas, de natureza inclusiva e baseada na Web, no que toca à procura de ajuda para resolver os problemas propostos e aos graus de apreciação e dificuldade sentidas ao resolver os mesmos. Os resultados sustentam o carácter desafiador dos problemas do SUB12, em particular o seu grau de desafio moderado. Sugerem que os participantes procuram ajuda sobretudo junto da família e dos professores, e que gostam bastante dos desafios colocados ao longo da competição, desafios esses que consideram, em geral, ser fáceis ou de dificuldade média. Indicam ainda a existência de uma forte correlação entre o gosto e o baixo grau de dificuldade sentida, bem como entre o gosto e a ausência de necessidade de procura de ajuda. Algumas questões para investigação futura são levantadas.*

Palavras-chave: *competições matemáticas inclusivas; resolução de problemas; gosto; procura de ajuda; dificuldade sentida.*

Contexto e objetivos do estudo

As competições matemáticas inclusivas

O número de competições matemáticas (regionais, nacionais ou internacionais) tem vindo a crescer em todo o mundo. Estas competições têm formas, conteúdos e durações distintas, e dirigem-se a grupos variados de estudantes tanto em termos de idade como de desempenho em matemática.

A natureza desafiante e competitiva de atividades de enriquecimento curricular parece estar associada ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos e a sentimentos positivos relativos à matemática. A participação dos alunos,

* Trabalho financiado por fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito dos projetos PTDC/CPE-CED/101635/2008 e PEst-C/MAT/UI0144/2011, e por fundos do FEDER através do programa COMPETE.

sobretudo os mais novos, em competições matemáticas influencia positivamente sua motivação para aprender matemática (Freiman & Vézina, 2006). Freiman e Applebaum (2011) argumentam que as competições matemáticas apresentam bastantes vantagens relacionadas com fatores afetivos e emocionais, como satisfação, sentido de eficácia, gosto e interesse pela matemática. As competições inclusivas (isto é, dirigidas a todos os alunos) têm vindo a manifestar-se como contextos onde a matemática é apresentada como desafiante, entusiasmante, acessível, social e emocionalmente envolvente, e próxima da vida quotidiana dos alunos.

O SUB12 e as questões de investigação

O SUB12 é uma competição regional de resolução de problemas de matemática para alunos de 5.º e 6.º anos, baseada na Web e promovida pela Universidade do Algarve (http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/). A explicação do processo de resolução é um requisito fundamental para que as respostas possam ser consideradas completas. Todos os participantes recebem *feedback* às respostas enviadas, com sugestões para ultrapassar obstáculos ou efetuar correções, podendo voltar a submeter as suas respostas tantas vezes quantas quiserem durante o prazo permitido. Reconhecendo o papel dos fatores afetivos no âmbito das competições matemáticas inclusivas, pretendemos descrever os padrões de comportamento dos participantes no SUB12 no que toca à procura de ajuda para resolver os problemas e aos graus de apreciação e de dificuldade sentidas na resolução desses problemas. Foram colocadas as questões seguintes: (1) Que significância tem a ajuda prestada aos participantes durante a fase de apuramento? (2) Que grau de apreciação manifestam os participantes em relação aos problemas propostos?; (3) Que grau de dificuldade sentem os participantes na resolução dos problemas propostos?; e (4) Que tendências se podem identificar combinando estas dimensões?

Perspetivas teóricas

Problemas matemáticos desafiantes

Desenvolvimentos teóricos recentes não se limitam à identificação de relações causais entre afetos e cognição. A visão de que afetos e cognição são duas faces da mesma moeda está a ser abandonada pois os afetos são cada vez mais entendidos como fazendo parte integrante do pensamento: “Os afetos influenciam o pensamento, da mesma forma que o pensamento influencia os afetos. Os dois interagem” (Walshaw & Brown, 2012, p. 186).

A própria noção de desafio reflete como os afetos podem ser integrados nos aspetos cognitivos que lhe estão inerentes. Por definição, um desafio pressupõe algum grau de dificuldade, a necessidade de ultrapassar um obstáculo. Segundo Barbeau (2009), os desafios matemáticos incitam deliberadamente os seus recetores a tentar uma resolução. Um desafio é bom quando um indivíduo possui um reportório matemático suficiente para o resolver mas requer que o aborde de uma forma inovadora; estas características levam à sensação de estar intelectualmente ativo e à emoção de descobrir novas abordagens, tal como acontece aos matemáticos profissionais. Os bons desafios matemáticos são normalmente vistos pelos alunos como sendo diferentes das atividades usuais de resolução de problemas com que se deparam na escola e, mesmo quando os alunos os veem como difíceis, estimulam sentimentos de prazer e satisfação (Jones & Simons, 1999).

Os problemas do SUB12 apresentam uma situação contextualizada e uma questão bem definida; no entanto, espera-se que os participantes os vejam como verdadeiros desafios, sentindo vontade genuína de os resolver. Um *problema matemático desafiante* inclui um forte apelo afetivo, envolvendo curiosidade, imaginação e criatividade, resultando, assim, num problema que dá gozo resolver, independentemente de a resolução ser ou não fácil de alcançar (Freiman, Kadijevich, Kuntz, et al., 2009).

A ideia de desafio moderado

A investigação tem sublinhado a necessidade de equilíbrio nas questões desafiantes que se propõem aos alunos (Schweinle, Turner & Meyer, 2006) e a ideia de *desafio moderado* tem tomado corpo (Turner & Meyer, 2004). Os desafios moderados são os que estão ao alcance de todos os alunos mas exigem esforço para que haver sucesso na sua resolução. Tais desafios parecem ser meios privilegiados para persuadir os alunos a tentar resolvê-los e para os encorajar a procurar e explicar estratégias alternativas, compreender e avaliar abordagens distintas e valorizar possíveis soluções múltiplas. Em suma, uma característica marcante da promoção de desafios moderados é persuadir os indivíduos a tentar (Schweinle, Berg & Sorensen, 2013).

A predisposição para resolver uma tarefa parece diminuir em duas situações: quando as expetativas acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil). Turner e Meyer (2004) sugerem que, em média, os alunos preferem situações com alguma dificuldade, conjugada com um certo sentimento de medo ou desconforto associado à possibilidade de errar.

O uso de desafios moderados pode ser bastante potenciado em contextos cujas características são valorizadoras do desafio *per se*. Uma delas é a perceção da procura de ajuda como algo legítimo; outra está associada ao requisito de explicar o processo de resolução do desafio e de o submeter a apreciação (Schweinle et al., 2006). Estes dois aspetos estão claramente presentes no SUB12 – não só a procura de ajuda é explicitamente encorajada nas regras de participação na competição como a explicitação e explicação do processo de resolução são ambas requeridas.

A procura de ajuda pelos participantes

Quando um participante procura ajuda, podemos assumir que o problema foi, de facto, percecionado como um desafio? Se o não foi, porquê? O grau de dificuldade do problema pode ter sido demasiado elevado, resultando na necessidade de obter ajuda para o resolver. No entanto, para os participantes, pedir ajuda pode ser comprometedor do caráter desafiador da tarefa uma vez que a sensação de realização (ou sucesso), sobretudo se associada à demonstração de desempenho, pode não ser completa – o reconhecimento por uma resposta correta não é apenas do participante mas é partilhado com terceiros.

O papel da procura de ajuda no processo de aprendizagem tem recebido cada vez mais atenção da comunidade de investigação, destacando-se vários desenvolvimentos na concetualização da procura de ajuda bem como da evasão à ajuda (Zusho & Barnett, 2011). Em particular, têm sido enfatizadas as conotações sociais da procura de ajuda com os custos envolvidos: por exemplo, ser visto como alguém que precisa de ajuda e admitir falhas ou mesmo incapacidade para realizar uma tarefa. Há evidências de que os alunos que exibem confiança e comportamentos de autorregulação tendem a procurar ajuda porque desejam aprender e compreender a situação em questão e não porque escolhem um caminho (mais) fácil para realizar a tarefa (Zusho & Barnett, 2011).

Dados empíricos (e.g., Kitsantas & Chow (2002) e Ryan & Pintrich (1997), citados em Zusho & Barnett, 2011) sugerem que os alunos com pior desempenho veem tendencialmente a procura de ajuda como uma ameaça e, por conseguinte, manifestam níveis de evasão à ajuda mais elevados; por seu turno, alunos com perceções de competência cognitiva mais elevada mostram níveis mais baixos de evasão à ajuda. “Tomados em conjunto, estes resultados sugerem uma ligação relativamente forte entre as expetativas dos alunos e a sua confiança no sucesso académico, e os padrões de procura de ajuda ou de evasão à mesma” (Zusho & Barnett, 2011, p. 153).

Além disto, os alunos cujos objetivos de sucesso se focam no desenvolvimento de competências tendem a ver na procura de ajuda uma boa estratégia para melhorar as suas capacidades e compreensão. Pelo contrário, os que privilegiam objetivos de demonstração exterior de competência já veem na procura de ajuda um sinal de fraqueza e entendem que a ajuda deve ser evitada (Zusho & Barnett, 2011).

A procura de ajuda articula-se com fatores contextuais, designadamente quando existe um ambiente de aprendizagem afetuoso e exploratório. A preferência por atividades desafiantes está muitas vezes associada ao envolvimento e à sensação de satisfação dos alunos. Em tais ambientes, pode aumentar a preferência dos alunos por resolver os problemas sozinhos, e a procura de ajuda torna-se próxima de procurar pistas em vez de respostas (Zusho & Barnett, 2011).

O grau de dificuldade sentida pelos participantes

A forma como os jovens percecionam a dificuldade de uma tarefa amadurece com o seu desenvolvimento cognitivo e social. Para os mais novos, a dificuldade de uma tarefa é “uma propriedade endémica à tarefa (…) enquanto os mais velhos associam ao termo uma maior complexidade, colocando a ênfase na rapidez com que ela é realizada…” (Schweinle et al., 2013, p. 1). Com a idade, há a tendência de associar maior dificuldade da tarefa a maior esforço e ao menor número de indivíduos que a consegue resolver. Existe, assim, “uma comparação social inerente à perceção de dificuldade” (p. 3).

Embora as ideias de desafio e dificuldade tenham pontos em comum – por exemplo, ambas requerem esforço e implicam um certo nível de complexidade – e sejam usadas muitas vezes como sinónimos, elas são distintas. Às tarefas desafiantes são dados valor e importância, ao passo que estes atributos não estão necessariamente presentes nas tarefas difíceis; além disto, “os desafios são suscetíveis de encorajar orientações motivacionais positivas” (Schweinle et al., 2013, p. 5) ao passo que as tarefas difíceis já não. Assim, nem todas as tarefas difíceis são suficientemente desafiadoras para quem as enfrenta e o sucesso nos desafios "não é determinado pela comparação com terceiros" (p. 5).

Quando os alunos veem o seu próprio sucesso em comparação com o de outrém, tendem a envolver-se apenas em tarefas para as quais se sentem confiantes. Para estes, os desafios podem ser "tanto oportunidades para melhorar o seu desempenho como ameaças, pois podem conduzir ao fracasso" (Schweinle et al., 2013, p. 4). Porém, quando os alunos veem o seu sucesso como reflexo do desenvolvimento dos seus conhecimentos ou capacidades, tendem a ver os desafios como oportunidades para promover esse desenvolvimento; por seu turno, a natureza das tarefas desafiantes contribui para que os alunos adotem esta visão do seu próprio sucesso (Schweinle et al., 2013).

Relação entre desafios e afetos

O significado de desafio moderado não é universal pois diferentes: um mesmo indivíduo pode sentir níveis distintos de desafio numa mesma tarefa dependendo de ter voluntariamente escolhido realizá-la ou de esta lhe ter sido imposta (Schweinle et al., 2006). A perceção de desafio também está associada ao interesse da tarefa – o interesse é um fator importante para que possam ocorrer experiências emocionalmente ricas e para promover a compreensão em contextos de aprendizagem. Os desafios vistos como importantes relacionam-se essencialmente com os interesses dos alunos e não saem fora da sua zona de conforto em termos da sua perceção de sucesso na sua resolução. "As tarefas difíceis requerem (…) mais esforço e, ao mesmo tempo, ameaçam o sentido de eficácia" (Schweinle et al., 2013, p. 16).

Apesar do carácter relativo dos desafios moderados, há indicadores que sustentam que eles favorecem o desenvolvimento de afetos positivos. Porém, outras condições devem girar em torno dos desafios moderados, entre as quais um ambiente social que promova sentimentos de satisfação, gozo e autoconfiança, bem como de apreciação pela matemática (Schweinle et al., 2006), desencorajando a comparação social e realçando o valor e importância das tarefas desafiantes (Schweinle et al., 2013). Estas características estão presentes no SUB12 contribuindo para a natureza inclusiva da competição. A inclusão tem também em vista promover a satisfação e o prazer na resolução de problemas de matemática desafiantes – diminuindo a frustração, dando reforço positivo, encorajando a persistência. "Níveis ótimos de desafio, rodeados por apoio afetivo e motivacional, podem proporcionar contextos muito propícios a sentimentos de satisfação, prazer, eficácia e valor na matemática por parte dos alunos" (Schweinle et al., 2006, p. 289).

Parece existir uma relação bastante interativa entre afetos positivos, desafio e valor atribuído à matemática (em particular, às tarefas matemáticas). Simultaneamente, encontramos dois tipos de ameaça, que os alunos identificam sobre a sua capacidade: a dificuldade da tarefa e a necessidade de procurar ajuda.

Metodologia

Nesta comunicação, abordamos três dimensões relativas a fatores afetivos manifestadas pelos participantes na edição do SUB12 de 2012/13: a procura de ajuda, o grau de apreciação e o grau de dificuldade sentida na resolução dos problemas propostos ao longo da fase de apuramento. Os dados provêm das respostas dos participantes a um miniquestionário (MQ), constituído por três questões de escolha múltipla, colocadas no formulário na página Web do SUB12 para submeter as respostas a cada problema. Para cada questão: (1) Com ajuda de: a) Professor; b) Familiares; c) Amigos; d) SUB12; e) Ninguém; (2) Gostei do problema: a) Muito; b) Mais ou menos; c) Pouco; e (3) Achei o problema: a) Difícil; b) Mais ou menos; c) Fácil, os participantes devem escolher apenas uma das opções.

A resposta é apenas obrigatória quando a resolução é enviada através do formulário, não sendo obrigatório no envio por correio eletrónico. Quando os participantes enviaram a resolução mais do que uma vez, foram consideradas as respostas relativas à última resolução submetida.

O número de participantes que respondeu ao MQ é ligeiramente inferior a 50% dos envolvidos em cada jornada, o que corresponde aos que usaram o formulário da página Web para enviar a sua resolução. O número de participantes diminui a cada jornada tal como o número de respondentes ao MQ (de 691 respostas no início para 63 na última jornada – Figura 1).

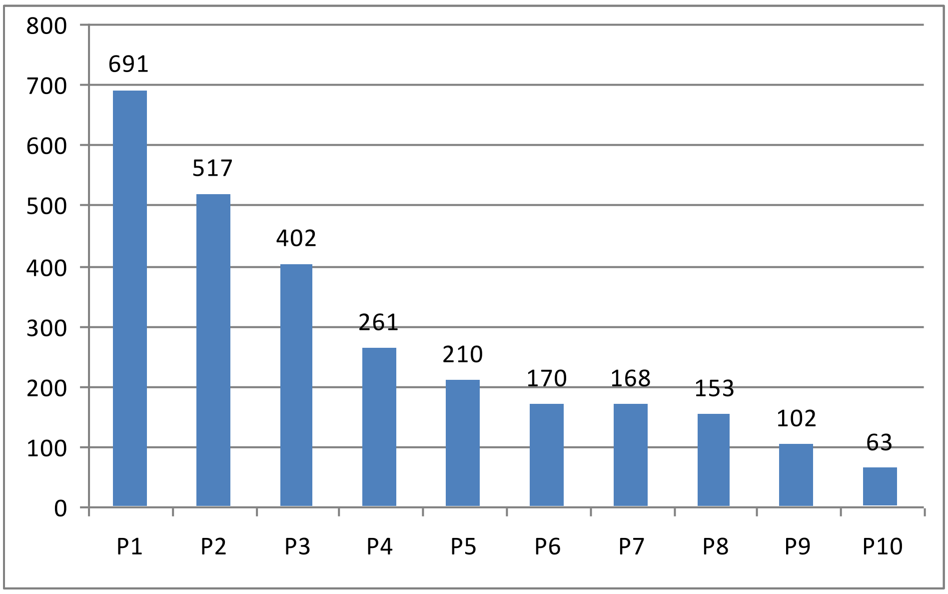
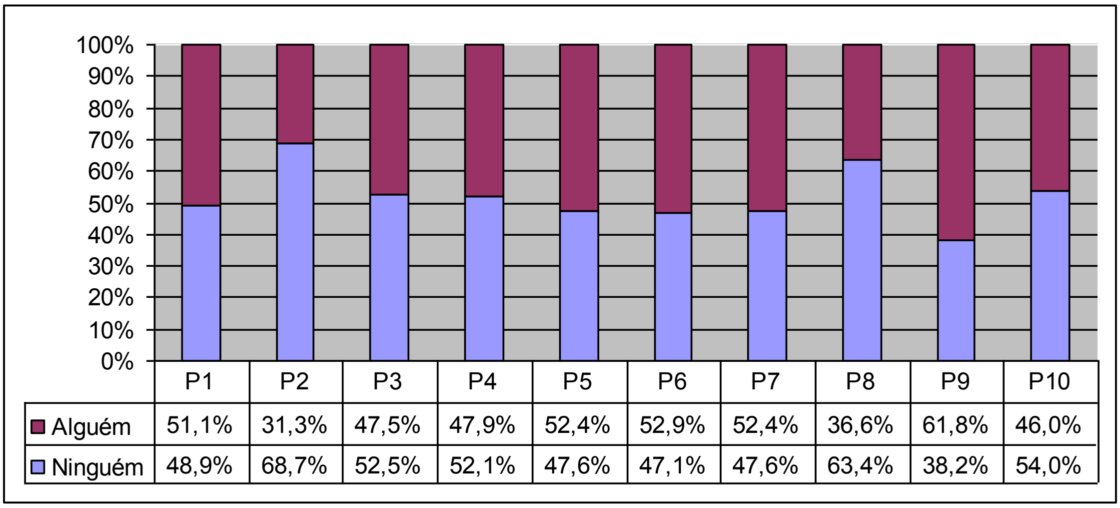


Figura 1. Número de respostas ao MQ.

A análise de dados é guiada pelas questões de investigação e pretende sobretudo encontrar padrões que possam ajudar a compreender a significância dos aspetos afetivos considerados, bem como possíveis associações entre eles. A nossa abordagem, baseada em contagens e correlações, é essencialmente descritiva, baseada no número de respostas e percentagens relativas a cada opção do MQ para cada problema, procurando também cruzar os dados no conjunto de todos os problemas propostos na fase de apuramento.

Análise de dados

A procura de ajuda teve uma expressão bastante visível na maioria dos problemas (Figura 2), destacando-se o problema P9 como aquele em que os participantes mais sentiram necessidade de pedir ajuda. A indicação de procura de ajuda foi sempre superior a 46%, exceto nos problemas P2 e P8, com apenas 31,3% e 36,6% dos participantes, respetivamente, a recorrer a terceiros. Os problemas P2 e P8 são usuais nesta competição (um problema de contagens e outro de raciocínio lógico) e, portanto, podem não se ter apresentado como complexos aos participantes.



	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Alguém	51,1%	31,3%	47,5%	47,9%	52,4%	52,9%	52,4%	36,6%	61,8%	46,0%
Ninguém	48,9%	68,7%	52,5%	52,1%	47,6%	47,1%	47,6%	63,4%	38,2%	54,0%

Figura 2. Procura de ajuda indicada pelos participantes por problema.

As duas principais fontes de ajuda são os familiares e os professores, com expressividades em geral muito próximas (Figura 3), seguindo-se os amigos, com uma

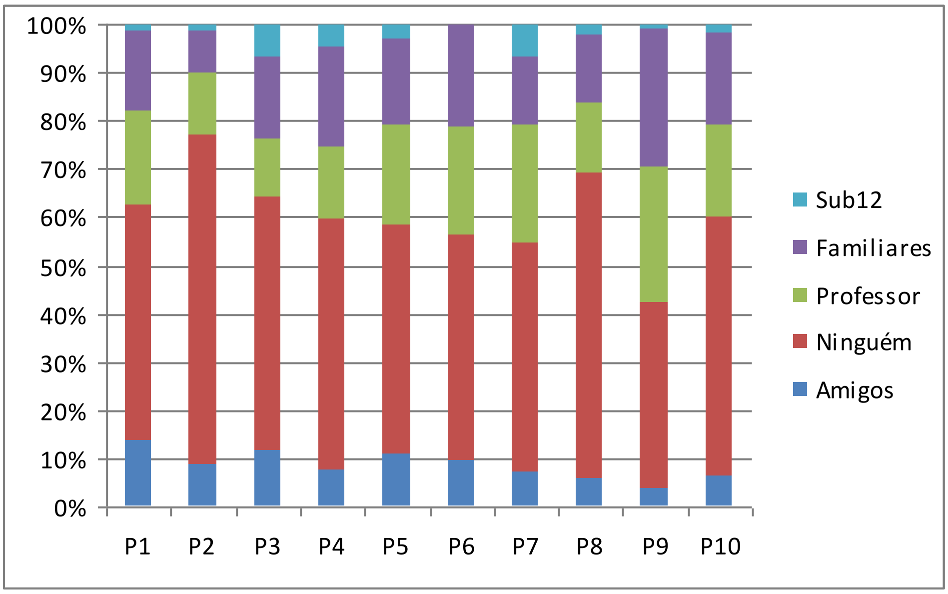


Figura 3. Fontes de ajuda indicadas pelos participantes por problema.

expressividade bastante menor. Os amigos podem incluir os colegas, por exemplo se o problema foi resolvido em contexto escolar – como sabemos ser uma realidade frequente (Carreira et al., 2012) – ou se foi resolvido em grupo e não individualmente.

Finalmente, a ajuda da organização da competição com quem os participantes contactam via correio eletrónico tem apenas uma expressão residual. No entanto, todos os participantes que enviam uma resposta incorreta ou incompleta recebem feedback da organização incitando à reformulação da resposta e fornecendo algumas pistas se necessário; e em vários casos isto resulta numa resposta correta e completa. Levanta-se a questão: será que os participantes apenas reconhecem que receberam ajuda do SUB12 quando a pedem? São poucos os casos em que os participantes pedem ajuda ao SUB12 de forma explícita, por exemplo, para começar a resolver um problema. Nestes casos, declaram, de facto, que tiveram ajuda do SUB12, reconhecendo esta fonte de ajuda.

Na Figura 4 exprimimos graficamente o grau de apreciação sentido pelos participantes ao resolver cada um dos problemas da fase de apuramento. Em geral, revelam ter emoções positivas na resolução destes desafios. No entanto, nos problemas P3, P4 e P9, o número de respostas exprimindo ter gostado *muito* do problema é menor que nos restantes. A percentagem de participantes que indica ter gostado pouco dos desafios nunca ultrapassa os 13%.

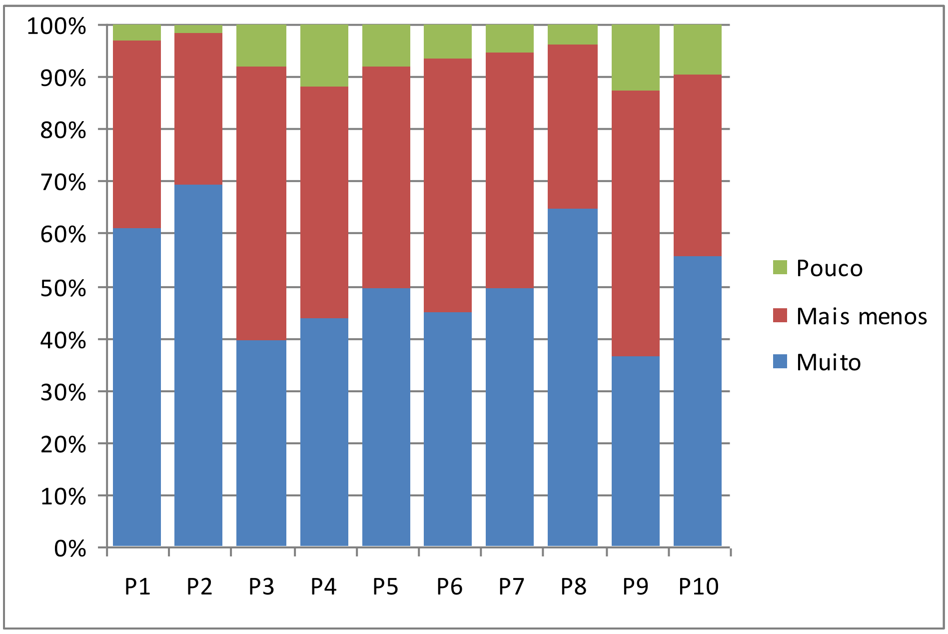


Figura 4. Grau de apreciação reportado pelos participantes por problema.

O problema P9 suscitou maior procura de ajuda, despoletando também um sentimento de apreciação mais reduzido. Ao contrário do problema P3 (em que houve necessidade de bastante ajuda), que lida com tópicos geométricos (em que os alunos habitualmente têm dificuldades na matemática escolar), o problema P9 relaciona-se com números e regularidades, um tópico usualmente bem recebido pelos alunos e que não lhes coloca tantos entraves na sala de aula. Assim, a procura de ajuda pode ser dependente do problema em causa e não tanto do conteúdo curricular central.

Finalmente, a Figura 5 ilustra o grau de dificuldade sentida pelos participantes na resolução de cada problema da fase de apuramento. Os problemas P2 e P8 são aqueles que os participantes sentiram como os mais fáceis e são também aqueles em que a percentagem de ajuda pedida é claramente a mais baixa: 68,7% e 63,4% dos respondentes, respetivamente, declaram não ter tido ajuda de ninguém para os resolver.

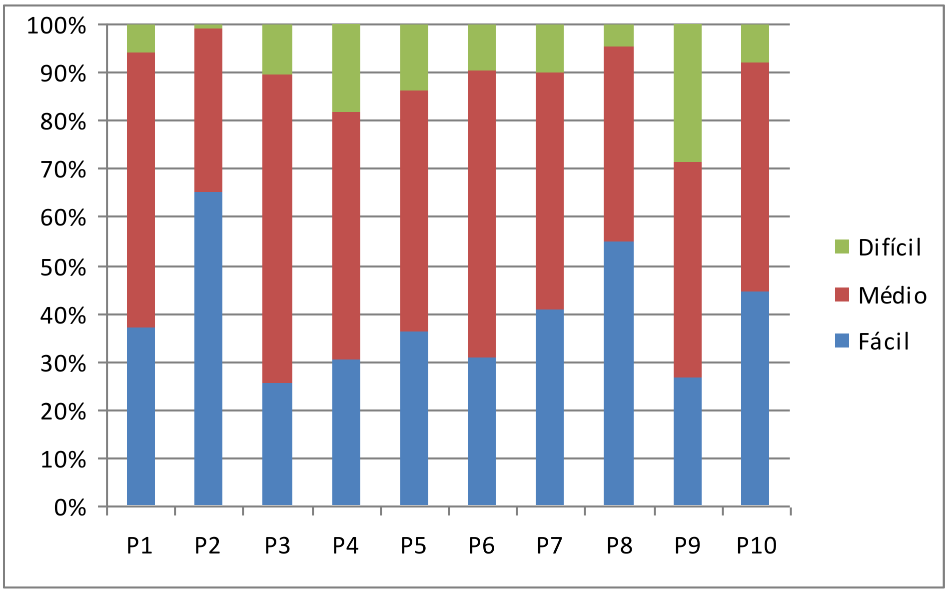


Figura 5. Grau de dificuldade sentida pelos participantes na resolução de cada problema.

Os problemas P3 e P9 destacam-se novamente, desta vez por serem os que mais dificuldades colocam aos participantes: apenas 25,1% e 26,5% dos respondentes, respetivamente, consideram aqueles problemas como fáceis. Se o contexto geométrico do problema P3, como já referimos, pode estar associado a uma maior dificuldade do problema e à necessidade de pedir ajuda, o contexto numérico e de regularidades que rodeia o problema P9 já não surge como uma hipótese explicativa forte para o grau de dificuldade sentida pelos participantes neste problema em particular. Os dados parecem sugerir que os problemas que os participantes sentiram como sendo os mais difíceis são também aqueles em que eles sentiram maior necessidade de ajuda para os resolver e a procuraram efetivamente.

Cruzando os dados obtidos acerca da procura de ajuda, grau de apreciação e grau de dificuldade sentida na resolução de todos os problemas da fase de apuramento do SUB12 podemos identificar algumas tendências. Por exemplo, não é surpreendente que exista uma correlação positiva significativa (coeficiente de correlação de 0,78) entre achar um problema *difícil* e sentir necessidade de *pedir ajuda* (Figura 6), bem como uma correlação negativa igualmente significativa (coeficiente de correlação de -0,85) entre achar um problema *fácil* e *procurar ajuda* junto das fontes disponíveis.

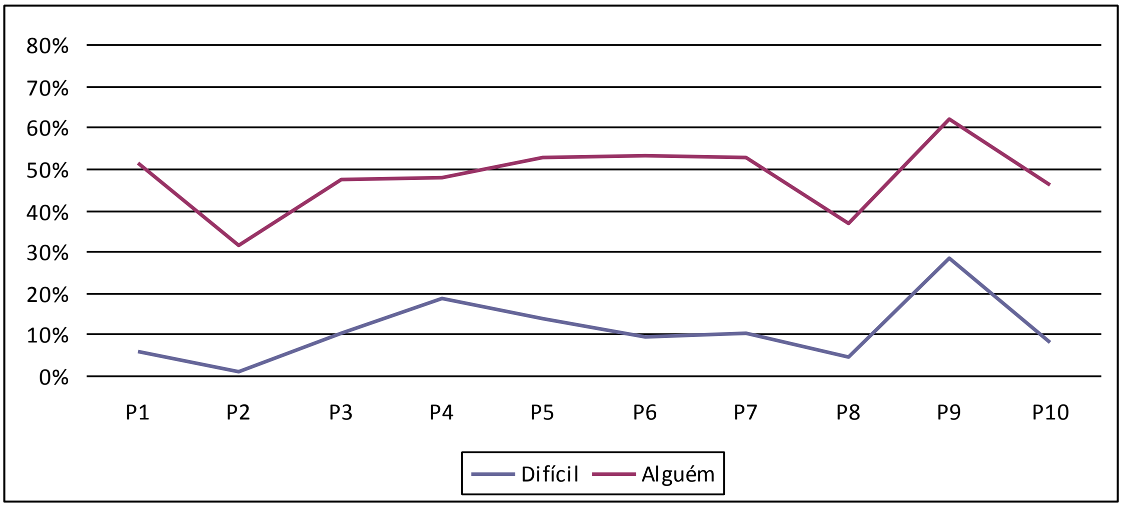


Figura 6. Correlação entre achar um problema difícil e procurar ajuda junto de alguém.

No entanto, como vimos, pedir ajuda é *bem aceite* entre os participantes no SUB12 dado o elevado número que reportou ter tido ajuda de alguma fonte. Pedir ajuda quando se sente dificuldade parece ser também *bem aceite* e natural.

Os dados indicam existir uma correlação positiva muito forte (coeficiente de correlação de 0,91) entre *gostar muito* de um problema e achá-lo *fácil*, ao mesmo tempo que existe uma correlação negativa também forte (embora ligeiramente inferior – coeficiente de correlação de 0,88) entre *gostar pouco* de um problema e achá-lo *difícil*. As figuras 7 e 8 ilustram bem estas relações.

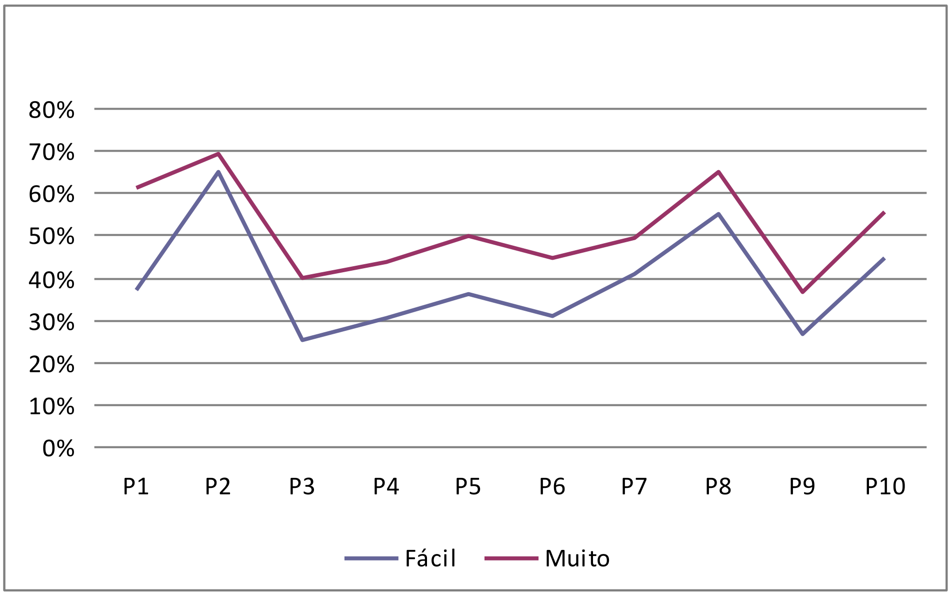


Figura 7. Correlação entre gostar muito de um problema e achá-lo fácil.

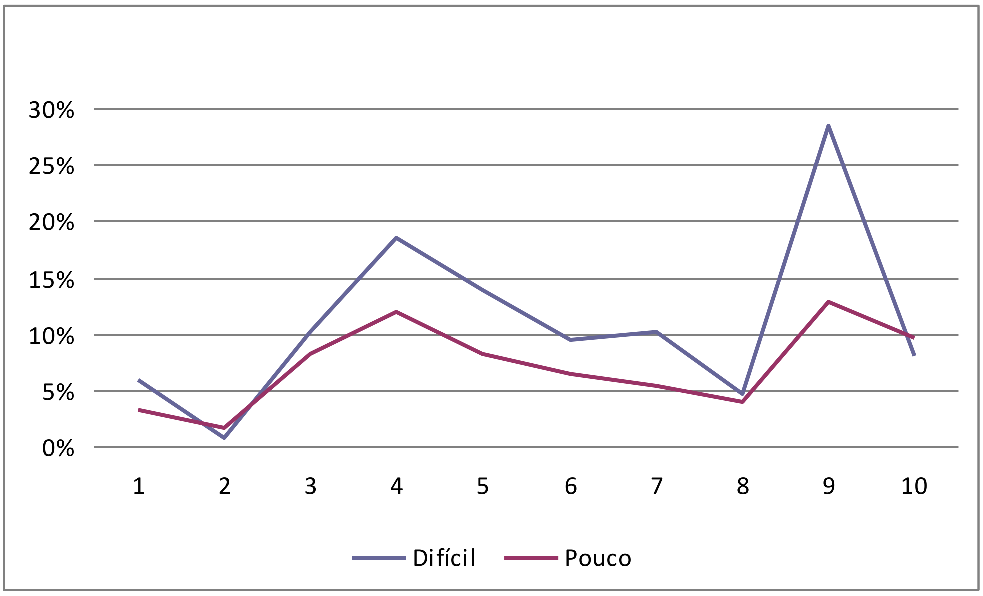


Figura 8. Correlação entre gostar pouco de um problema e achá-lo difícil.

Gostar *muito* de um problema está também correlacionado positivamente (coeficiente de correlação de 0,79) com *não* sentir necessidade de *pedir ajuda* e, observando a Figura 9, este fenómeno é aparentemente mais visível a partir da segunda metade da fase de apuramento.

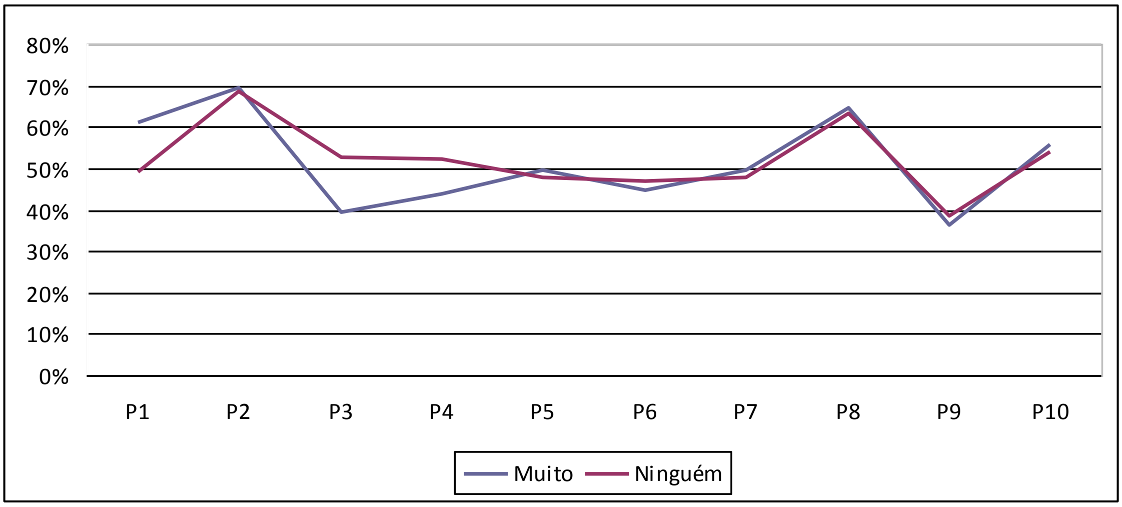


Figura 9. Correlação entre gostar muito de um problema e não procurar ajuda.

Apesar de positiva, a correlação entre gostar *pouco* de um problema e sentir necessidade de *pedir ajuda* junto de alguém não é muito elevada (coeficiente de correlação de 0,63). Mais uma vez, e observando a Figura 10, a reta final da fase de apuramento do SUB12 parece ser a altura desta competição em que mais se evidencia a relação entre apreciar pouco (ou mesmo muito pouco) um problema (o caso do problema P9 é paradigmático) e uma maior necessidade de procurar ajuda junto das fontes disponíveis.

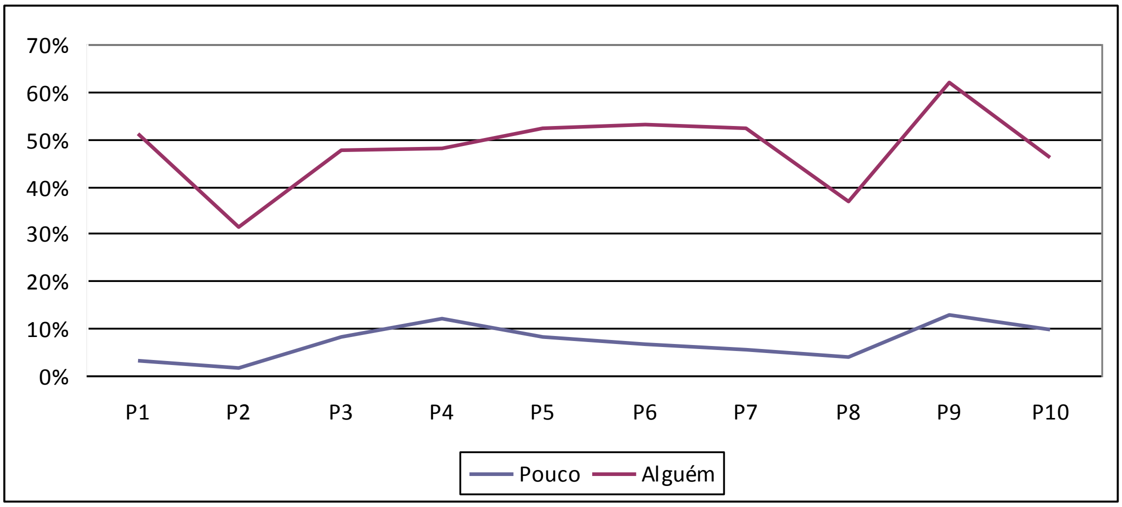


Figura 10. Correlação entre gostar pouco de um problema e procurar ajuda junto de alguém.

Reunindo as respostas relativas a *gostar muito* ou *gostar mais ou menos* de um problema e procurando uma associação com a *procura de ajuda* junto de alguma fonte, obtemos um coeficiente de correlação de – 1, o que evidencia uma forte correlação negativa entre aquelas duas dimensões (Figura 11). Deste modo, *não desgostar* de um problema está fortemente relacionado com resolvê-lo sem a ajuda de ninguém.

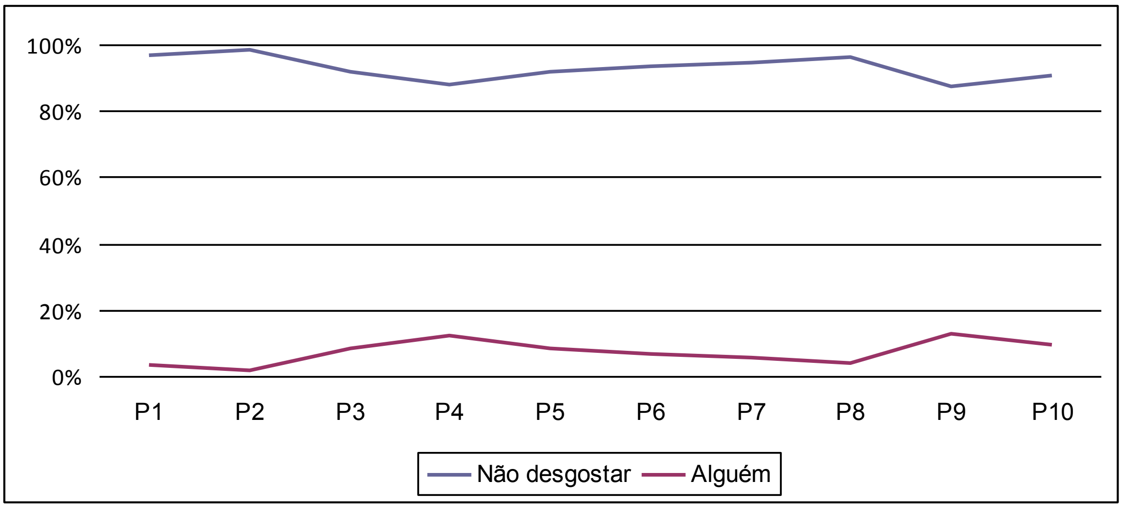


Figura 11. Correlação entre não desgostar de um problema e procurar ajuda junto de alguém.

Discussão e conclusões

No âmbito de uma competição inclusiva de resolução de problemas matemáticos desafiantes (SUB12), procurámos identificar que tendências existem quanto à procura de ajuda por parte dos participantes para resolver os problemas propostos, ao grau de apreciação desses problemas e ao grau de dificuldade sentida nessa resolução. Os dados recolhidos espelham as perceções dos participantes relativamente a estes três aspetos.

A procura de ajuda é um aspeto importante, em particular no seio de uma competição matemática inclusiva; no caso do SUB12, a procura de ajuda é explicitamente encorajada pela organização. Os dados recolhidos indicam uma elevada significância da procura de ajuda por parte dos participantes. A ajuda fornecida por diferentes fontes contribui positivamente para o sucesso ao longo da fase de apuramento do SUB12 e para um sentimento de realização; além disso, influencia positivamente a quantidade e diversidade de alunos que decidem participar naquela competição. Assim, os participantes no SUB12 mostram-se, em geral, à vontade em procurar ajuda para resolver os problemas da fase de apuramento.

Existem duas fontes primordiais de ajuda: os familiares e os professores. Isto é sinal de um envolvimento parental significativo, ao longo da fase de apuramento do SUB12, que já tínhamos detetado, e reforça também a presença desta competição no ambiente escolar (Carreira et al., 2012, 2013). É muito provável que um mesmo professor seja fonte de ajuda para um número elevado de participantes – vários professores revelaram dar apoio aos seus alunos durante a competição e, portanto, esta fonte de ajuda pode abranger muitos participantes (Carreira et al., 2012).

Será importante perceber no futuro como é que os participantes percecionam o ato de procurar ajuda conforme as várias fontes disponíveis, em particular a própria organização do SUB12, uma vez que apenas parece ser reconhecida como uma fonte efetiva de ajuda quando os participantes a solicitam de forma explícita (cf. Carreira et al., 2013). Além disso, os participantes podem não reconhecer no feedback que lhes é dado pelo SUB12 uma ajuda efetiva, talvez porque esse feedback é dado sem ser pedido. Assim, o SUB12 pode ser visto como quem *avalia* a resposta enviada e, portanto, esta ajuda pode ter, aos olhos dos participantes, um carácter avaliativo não regulador. O facto de toda a comunicação estabelecida entre os participantes e o SUB12 ser feita à distância pode também condicionar o reconhecimento do SUB12 como uma fonte de ajuda. A comunicação à distância torna a organização da competição mais *distante* que outras fontes de ajuda, que estarão mais *à mão*!

Em geral, os participantes apreciam positivamente os desafios do SUB12 e relatam sentir dificuldade reduzida ou mediana na sua resolução. Os problemas P3 e P9 são os menos apreciados ao longo da competição, sendo que o P9 é o que coloca mais dificuldades. A complexidade deste problema pode estar associada a um menor grau de apreciação, o que pode sugerir que o grau de desafio deste problema pode ser demasiado elevado, levando a emoções menos positivas. Num estudo anterior, a um menor grau de apreciação de um problema estava associado um conteúdo temático tipicamente complexo na matemática escolar (Carreira et al., 2013), mas tal não é evidente nos dados do presente estudo. O gosto por um problema pode depender do problema em si: a forma como foram percecionados o valor e o interesse dos problemas P3 e P9 pode ter condicionado o apreço nutrido pelos participantes. Ao não serem vistos como interessantes, os participantes podem não os ter encarado como desafios, indo ao encontro das ideias de Schweinle e colaboradores (2013).

Num estudo anterior (Carreira et al., 2013), tanto o grau de apreciação como a procura de ajuda pareceram depender do problema em questão. No entanto, os dados agora recolhidos parecem indicar que tal pode não ser o caso. De facto, enquanto o problema P9 foi aquele que reuniu menor apreciação e maior necessidade de ajuda, o problema P3, apesar de não ter sido particularmente apreciado pelos participantes, teve associada uma procura de ajuda mediana em relação aos restantes desafios. Além disso, os participantes podem confundir o gosto por um problema com a sensação de o conseguir, ou ter conseguido, resolver, o que pode distorcer os dados recolhidos. Uma abordagem qualitativa poderá ajudar a melhor compreender estes aspetos.

É possível identificar correlações positivas fortes entre gostar muito de um problema e achá-lo fácil, bem como gostar pouco de um problema e achá-lo difícil. As correlações encontradas parecem ir ao encontro das sugestões de Turner e Meyer (2004), fornecendo evidências de que os problemas propostos na fase de apuramento do SUB12 são, em geral, problemas matemáticos desafiantes e de desafio moderado, e que o *design* desta competição é consistente com práticas que apoiam o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Além disso, os resultados corroboram a ligação entre a natureza do SUB12, os desafios moderados e os afetos positivos relativos à resolução de problemas (Freiman & Vézina, 2006).

Os desafios considerados fáceis estão negativamente correlacionados, de modo significativo, com a ausência de necessidade de pedir ajuda para os resolver, ao passo que os considerados difíceis se correlacionam significativa e positivamente com a necessidade de obter ajuda. Estes resultados desmontam, de algum modo, que pedir ajuda não diminui o sentimento de autoeficácia dos participantes, mesmo enfrentando problemas vistos como difíceis.

Neste estudo e em relação ao grau de apreciação por um problema, foi considerada a última resposta dada pelos participantes, podendo ter existido mais do que uma, no caso de terem submetido várias resoluções. Por muito regulador e formativo que este feedback seja, carrega consigo um elemento avaliativo pois o participante é informado sobre a correção ou completude da resposta enviada, o que pode alterar a apreciação do problema inicialmente feita. Uma análise mais detalhada da forma como este aspeto evolui ao longo do vaivém de respostas e feedback poderá iluminá-lo melhor.

Referências bibliográficas

Barbeau, E. (2009). Introduction. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 1-9). New York, NY: Springer.

Carreira, S., Amado, N., Tomás-Ferreira, R. A., Silva, J. C., Rodriguez, J., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre. R. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs*. Faro: Universidade do Algarve – Projeto Problem@Web.

Carreira, S., Tomás-Ferreira, R. A., & Amado, N. (2013). Young students solving challenging mathematical problems in an inclusive competition: Enjoyment vis-à-vis help-seeking. Artigo apresentado no CERME8, Antalya, Turquia.

Freiman, V., & Applebaum, M. (2011). Online mathematical competition: Using virtual marathon to challenge promising students and to develop their persistence. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 55–66.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). New York, NY: Springer.

Freiman, V., & Véniza, N. (2006). *Challenging virtual mathematical environments: The case of the CAMI Project*. Pre-conference paper of the Study Conference for ICMI Study 16 – Challenging mathematics in and beyond the classroom [Acedido em http://www.amt.edu.au/icmis16pcanfreiman.pdf].

Jones, K., & Simons, H. (1999). *Online mathematics enrichment: An evaluation of the NRICH project*. Southampton: University of Southampton.

Kitsantas, A. & Chow, A. (2007). College students' perceived threat and preference for seeking help in traditional, distributed, and distance learning environments. *Computers and Education, 48*, 383-395.

Ryan, A. M., & Pintrich, P. R. (1997). "Should I ask for help?" The role of motivation and attitudes in adolescents' help seeking in math class. *Journal of Educational Psychology, 89*, 329-341.

Schweinle, A., Turner, J., & Meyer, D. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *Journal of Educational Research*, *99*(5), 271-293.

Schweinle, A., Berg, P. J., & Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychologist*. (Published online: May 2013). DOI:10.1080/01443410.2013.785049.

Turner, J., & Meyer, D. (2004). A classroom perspective on the principle of moderate challenge in mathematics. *Journal of Educational Research*, *97*(6), 311-318.

Walshaw, M., & Brown, T. (2012). Affective productions of mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1-2), 185-199.

Zusho, A., & Barnett, P. (2011). Personal and contextual determinants of ethnically diverse female high school students' patterns of academic help seeking and help avoidance in English and mathematics. *Contemporary Educational Psychology*, *36*(2), 152-164.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Atividades matemáticas na interseção de saberes no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Fátima Regina Jorge[1], *Fátima Paixão*[2], *Helena Martins*[3], *Maria Fernanda Nunes*[4]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, frjorge@ipcb.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, mfpaixão@ipcb.pt
[3]Jardim de Infância da Santa Casa da Misericórdia de Castelo Branco, hellenmartins04@hotmail.com
[4]Mestre em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico, fernandahnunes@hotmail.com

Resumo. *Um aspeto essencial da educação no 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) prende-se com a implementação de práticas de ensino direcionadas para o desenvolvimento integrado de atividades e áreas do saber, promotoras do desenvolvimento cognitivo dos alunos, do crescimento das capacidades relacionais e da aquisição de cultura científica. Nesse âmbito, cada vez mais se requerem oportunidades de aprendizagem diversificadas, estabelecendo a complementaridade entre os espaços formais, associados à escola, e os espaços não formais, pelo seu potencial de interdisciplinaridade, criatividade e motivação. Tomando como referência dois estudos desenvolvidos com uma turma de 4.º ano do 1.º CEB, apresentamos alguns dos recursos didáticos desenvolvidos para apoiar a exploração didática de um espaço de educação não formal – o Jardim do Paço de Castelo Branco – e implementar práticas de ensino integrando as áreas de estudo do meio e matemática. Apresentam-se evidências das atividades desenvolvidas pelos alunos, analisam-se os resultados obtidos e sustenta-se a pertinência da utilização dos espaços não formais para a promoção de aprendizagens de índole curricular.*

Palavras-chave: Ensino Básico; integração curricular; interação de contextos formais e não formais de educação; Geometria e medida.

Introdução

No atual contexto socioeducativo não podemos considerar a instituição escolar com exclusividade na aquisição de conhecimentos, devendo adequar-se aos desafios que lhe são colocados pela sociedade. Reconhecendo que existe uma multiplicidade de saberes, muitos autores têm vindo a defender o grande valor educativo de atividades desenvolvidas em contextos não formais, como é o caso de Museus, Centros de Ciência e exposições científicas, entre outros, congregadores de estímulos sociais, cognitivos e afetivos. As aprendizagens curriculares podem, deste modo, evidenciar a sua ligação a aspetos concretos do quotidiano dos alunos, de forma contextualizada, estabelecendo a complementaridade entre os espaços formais, tradicionalmente associados ao sistema de ensino e os espaços não formais, pela sua riqueza, diversidade e potencial na criação de oportunidades de desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e de despertar o interesse e a curiosidade dos alunos (Oliva, Matos & Acevedo, 2004; Praia, 2006).

O Jardim do Paço de Castelo Branco, envolvente do Paço Episcopal construído no século XVIII, é um espaço de educação não formal de grande valor educativo que advém do facto de aliar a dimensão estética, geometricamente equilibrada do seu traçado, a uma dimensão iconográfica bem percetível na estatuária de granito, disposta entre ruas de buxo, simultaneamente labirínticas e ordenadas, mas que tem subjacente uma organização em temáticas e percursos distintos.

Neste contexto, desenvolveram-se dois projetos inseridos na problemática da inter-relação entre as aprendizagens realizadas em espaços de educação não formal e as realizadas em sala de aula. As investigações, inseridas na prática de ensino supervisionada no 1.º Ciclo do Ensino Básico, contemplaram a construção de recursos didáticos em que se tomaram como ponto de partida a organização e os elementos iconográficos do Jardim e se enfatizaram experiências de aprendizagem centradas no desenvolvimento do sentido espacial, transversal às diferentes áreas curriculares.

Enquadramento

A organização curricular do 1.º CEB preconiza a articulação e contextualização dos saberes e a integração das várias áreas do currículo. Essa integração remete para uma abordagem interdisciplinar em que são esbatidas as fronteiras das disciplinas, identificados temas comuns a diferentes áreas curriculares e enfatizado o desenvolvimento de conceitos e competências transversais (Drake & Burns, 2004; Martins, Paixão & Vieira, 2004). Lederman e Neiss (citados em Eichinger, 2009, pp. 4-5) sublinham que tal abordagem deve salientar as interações entre as disciplinas, mas, ao mesmo tempo, ter em conta os seus traços diferenciadores, pois só deste modo, o aluno pode desenvolver uma visão adequada da natureza das diferentes áreas do saber.

A preocupação da integração da matemática com outras áreas curriculares está bem presente em documentos de orientação curricular, portugueses e internacionais. Por exemplo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, pode ler-se "o estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar" (ME, 2007, p. 6).

Do exposto, sobressai que no 1.º CEB se recomendam práticas de ensino da matemática, contextualizadas e direcionadas para o desenvolvimento integrado de atividades e áreas do saber, indispensáveis ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Tais práticas requerem o uso de tarefas que atendam ao conhecimento e às capacidades que se pretendem desenvolver, mas a que o aluno consiga atribuir significado (NCTM, 2007; ME, 2007; Planas & Alsina, 2009). Em paralelo, devem ser considerados o estabelecimento de conexões criativas e pessoais com os conteúdos, a promoção de uma aprendizagem com compreensão e da motivação para a aprendizagem (Eichinger, 2009). Assim, cabe aos professores promover ligações da matemática com outras áreas do currículo e o mundo real, seja destacando as muitas situações em que os alunos encontram matemática dentro e fora da escola, seja planeando aulas em que as competências e os conceitos surgem interligados.

De entre os vários temas do currículo de matemática, a Geometria surge como um campo com muitas potencialidades para se fazerem conexões com a realidade física e com outras áreas curriculares. "As ideias geométricas revelam-se muito úteis (…) em situações do dia-a-dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível, com outras áreas" (NCTM, 2007, p. 44).

Um aspeto essencial do ensino da Geometria é o desenvolvimento do sentido espacial. De acordo com vários autores, o sentido espacial adquire-se gradualmente a partir das interações da criança com os objetos e o meio físico em que se movimenta, nomeadamente através do envolvimento ativo em atividades espaciais concretas e envolve três componentes fundamentais, a visualização espacial, as figuras geométricas e a orientação espacial (Breda *et al*., 2011).

A visualização espacial, que tem a ver com a forma como se perceciona e interpreta o mundo físico, implica "observação, manipulação e transformação de objectos e suas representações, e a interpretação de relações entre os objectos e entre estes e as suas representações" (ME, 2007, p. 20) e constitui um aspeto fundamental do raciocínio geométrico (NCTM, 2007). Para Matos e Gordo (1993), a visualização espacial envolve sete capacidades, entre as quais se incluem a:

- Coordenação visual motora: capacidade de coordenação da visão com os movimentos do corpo.
- Memória visual: capacidade de recordar objetos que não estão visíveis.

- Constância percetual: capacidade de reconhecer figuras geométricas em diferentes posições, tamanhos e contextos.
- Perceção da posição no espaço: capacidade de ver ou imaginar dois objetos em relação consigo próprios ou em relação com o observador.
- Perceção das relações espaciais: capacidade de ver ou imaginar dois objetos em relação consigo próprios ou em relação com o observador.
- Discriminação visual: capacidade de identificar semelhanças e diferenças entre figuras.

A orientação espacial está relacionada com a posição relativa das formas e dos objetos bem como a relatividade dos seus tamanhos (Breda *et al*., 2011) e implica a capacidade para detetar combinações de objetos segundo um padrão e a capacidade de manter precisas as perceções, face à mudança de orientação (Bishop, 1993, citado em Gordo, 1994). Em termos do currículo de matemática, este tópico envolve conceitos e procedimentos relacionados com a posição e localização, pontos de referência e itinerários, mapas, plantas e maquetas.

O programa de Matemática recomenda que "a abordagem de aspectos históricos, artísticos e culturais relacionados com a Geometria favorece a exploração e compreensão dos tópicos abordados" (ME, 2007, p. 20). Nesse âmbito, o recurso a espaços de educação não formal pode viabilizar uma apresentação mais realista e interativa dos assuntos, nomeadamente quando as atividades aí desenvolvidas complementem e estejam articuladas com o trabalho desenvolvido em sala de aula (Martins, 2011, Nunes, 2011; Jorge & Paixão, 2012).

Assumindo que a formação de crianças bem incluídas na cultura do seu tempo passa por inseri-las no seu quotidiano e nos seus contextos próximos, ultrapassando a tradicional dicotomia entre escola e realidade, os espaços urbanos, pela sua acessibilidade e riqueza em termos de património científico, natural e cultural, apresentam um elevado potencial educativo, quase sempre inexplorado (Paixão, 2006, Praia, 2006). Assim, a escola pode e deve tirar proveito de tais espaços de educação não formal, no sentido da promoção de aprendizagens dos conteúdos curriculares, da valorização da cultura regional, da aquisição de valores de cidadania e de pertença a uma comunidade (Paixão, 2006).

Problemática e objetivos

No reconhecimento da importância de promover um ensino e aprendizagem de cariz interdisciplinar e de integrar as áreas de matemática e de estudo do meio (físico e social), apresentamos dois estudos convergentes centrados na problemática da interação entre as aprendizagens realizadas em espaços de educação não formal e as realizadas em sala de aula (Martins, 2011; Nunes, 2011). Como já referido, a opção do espaço de educação não formal recaiu no Jardim do Paço Episcopal de Castelo Branco.

A questão que desencadeou e orientou o desenvolvimento dos dois estudos enunciou-se da seguinte forma: Em que medida a realização de atividades no Jardim do Paço de Castelo Branco estimula e se repercute nas aprendizagens dos alunos do 4.º ano do 1.º CEB, nas áreas de Estudo do Meio (Físico e Social) e de Matemática?

Para responder a esta questão definiram-se, entre outros, os seguintes objetivos:

(i) Construir e validar recursos didáticos para a aprendizagem não formal no Jardim do Paço, que incluam o desenvolvimento de atividades promotoras de aquisição de conhecimento nas áreas de Estudo do Meio e Matemática.

(ii) Evidenciar o contributo das atividades realizadas no Jardim do Paço para as aprendizagens de Estudo do Meio e Matemática, dos alunos de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Foram valorizadas as dimensões dessas aprendizagens relacionadas com o desenvolvimento de processos de pensamento e ação, realizando atividades de natureza diversificada, relevando a aplicação de conhecimentos curriculares em situações da vida real.

Metodologia

Tendo em conta a problemática investigativa, as questões e os objetivos do estudo, visando a compreensão e exploração da complementaridade de dois espaços de aprendizagem, formal e não formal, o desenvolvimento da visita de estudo ao Jardim do Paço teve subjacente uma intervenção no contexto da prática de ensino-aprendizagem.

Na medida em que estava em causa a compreensão e exploração de situações que se desenrolam na ação educativa e se pretendia a sua descrição e interpretação optou-se por uma metodologia qualitativa, de cariz interpretativo. De facto, abordagens interpretativas permitem um maior entendimento crítico das situações e dos fenómenos educativos (Santomé,1988 in Goetz e LeCompte, 1998; Pérez Serrano, 2004).

A recolha de dados privilegiou diversos procedimentos, onde se incluem a observação participante, as notas de campo, os registos escritos dos alunos (textos e desenhos), o registo fotográfico e uma entrevista semiestruturada à Professora Titular. Para a codificação e posterior análise dos dados adotou-se a técnica de categorização analítica (Bogdan & Biklen, 1994), tendo sido consideradas duas categorias: aprendizagem (desenvolvimento de competências científicas - observar, classificar, descrever, prever, medir, efetuar registos, recolher e organizar material; desenvolvimento de competências transversais-autonomia, responsabilidade e trabalho com os pares); e perspetivas dos alunos relativamente à visita ao Jardim do Paço. No que concerne à validade, recorreu-se à triangulação metodológica que requer uma combinação de várias práticas, materiais empíricos, perspetivas e observadores; neste caso, realizou-se entre diferentes métodos de recolha de dados sobre o mesmo objeto de estudo (Pérez Serrano, 2004).

O estudo envolveu, de modo ativo e direto, uma turma de 24 alunos de 4.º ano do 1.º CEB e a sua Professora Titular, em duas visitas de estudo ao Jardim do Paço, correspondentes aos dois estudos convergentes e complementares que se integram num projeto de investigação mais amplo.

Desenvolvimento da atividade

O Jardim do Paço de Castelo Branco é visitado por alunos de muitas escolas, de vários níveis de ensino, que abordam, essencialmente, uma perspetiva histórica e não disponibiliza recursos didáticos ou qualquer outra documentação, existindo apenas um folheto informativo, direcionado para o turismo. Como exceção da perspetiva turística da literatura sobre o Jardim, salientamos o "Roteiro de uma visita de estudo" que propõe uma visita explorando uma visão atenta dos pormenores (lagos, fontes, estátuas e vegetação), permitindo perceber a simbologia do Jardim (Salvado, 1999). Considerando que o planeamento adequado de uma visita de estudo é condição fundamental para o seu sucesso, estruturámos as diversas etapas, de modo a proporcionar aos alunos atividades lúdicas sendo, simultaneamente, fonte de aprendizagem.

No dia anterior à visita, fizemos, em sala de aula, a par do enquadramento histórico-social do espaço, uma abordagem prévia, salientando os cuidados a ter no Jardim e a importância da coesão e autonomia dos grupos, com vista à consecução com êxito, das atividades a realizar.

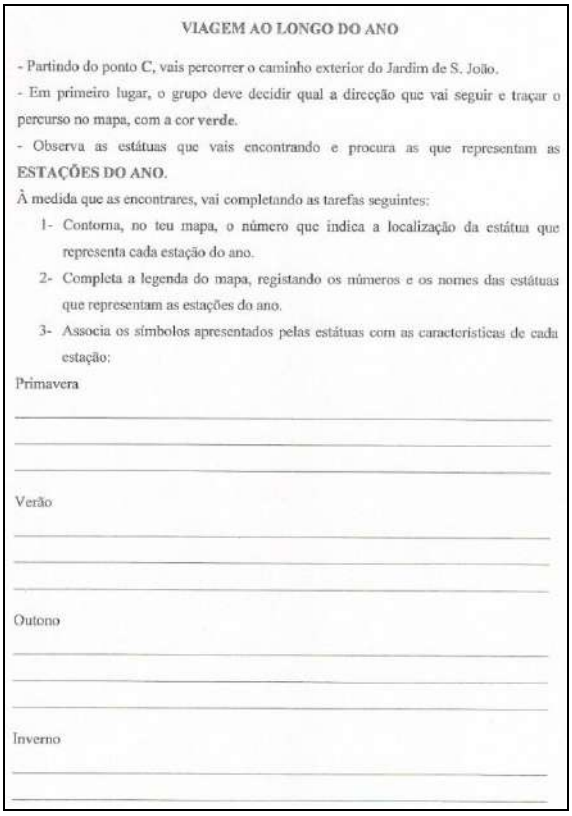
A visita de estudo envolveu o desenvolvimento de um conjunto de tarefas no Jardim, tendo-se definido os seguintes objetivos gerais:

- Proporcionar experiências de aprendizagens diversificadas, em contexto não formal;
- Promover o trabalho colaborativo;
- Fomentar a curiosidade científica;
- Valorizar e compreender a utilidade das áreas de Estudo do Meio e Matemática na vida quotidiana;
- Apreciar e valorizar o património histórico e cultural.

Para a realização de cada atividade os alunos dispunham de um Guião com instruções detalhadas dos procedimentos a seguir e onde deviam fazer os registos e reflexões acerca das conclusões obtidas e a Planta do Jardim, onde deviam assinalar os diversos percursos realizados.

Das várias tarefas propostas, salientamos duas, "Viagem ao longo do ano" e "Nem todos somos iguais", que englobaram, no seu conjunto, aspetos interdisciplinares, em particular, das áreas de Estudo do Meio e Matemática. Em ambas, esteve presente a leitura e interpretação da Planta do Jardim, a orientação no espaço no espaço físico, o registo de itinerários, a localização de objetos e locais e a especificação das suas posições na Planta.

Na atividade "Viagem ao longo do ano" (figura 1), a leitura da Planta do Jardim tinha um papel essencial para o desenvolvimento de referenciais de orientação espacial. O traçado do itinerário a seguir, segundo as instruções do Guião, possibilitava aos alunos fazerem, mais tarde, a explicação do local onde tinham iniciado a atividade e qual a direção tomada pelo grupo. Mesmo sendo um espaço restrito, fomenta-se, deste modo, a ligação ao exterior da escola, estimula-se a autonomia dos alunos nas suas deslocações e estabelece-se a ligação da Matemática, mais concretamente de tópicos de orientação espacial, com o Meio Social.


VIAGEM AO LONGO DO ANO

- Partindo do ponto C, vais percorrer o caminho exterior do Jardim de S. João.
- Em primeiro lugar, o grupo deve decidir qual a direcção que vai seguir e traçar o percurso no mapa, com a cor **verde**.
- Observa as estátuas que vais encontrando e procura as que representam as **ESTAÇÕES DO ANO.**

À medida que as encontrares, vai completando as tarefas seguintes:

1- Contorna, no teu mapa, o número que indica a localização da estátua que representa cada estação do ano.
2- Completa a legenda do mapa, registando os números e os nomes das estátuas que representam as estações do ano.
3- Associa os símbolos apresentados pelas estátuas com as caracteristicas de cada estação:

Primavera

Verão

Outono

Inverno

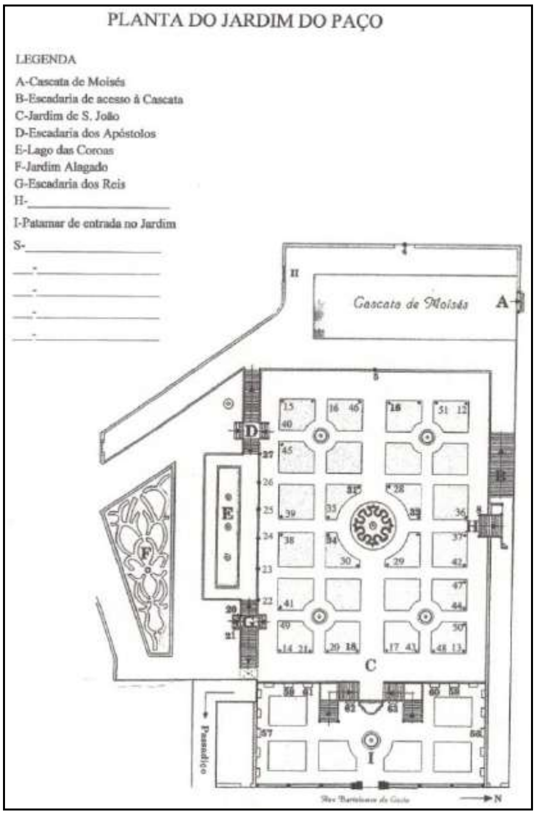


Figura 1. Guião da atividade “Viagem ao longo do ano”.

Figura 2. Planta do Jardim do Paço.

No percurso pelo caminho exterior do Jardim, os alunos deveriam encontrar cada uma das estátuas, assinalar a sua localização na planta e completar a legenda. Tendo em conta que as estações do ano surgem representadas por figuras humanas (figura 3), propunha-se aos alunos a sua descrição, associando os elementos simbólicos às caraterísticas de cada uma. A apreciação estética das estátuas e a observação cuidada dos pormenores, num espaço muito rico em termos de património histórico e cultural pretendia estimular nos alunos a valorização da cultura local, o desenvolvimento de valores de cidadania e o interesse pela cultura regional, em estreita ligação com os conteúdos curriculares.

Figura 3. Representações da Primavera, Verão, Outono e Inverno no Jardim do Paço.

Para a realização da atividade “Nem todos somos iguais” os alunos deviam dirigir-se ao local indicado no Guião, que se referia à Escadaria dos Reis, traçando na planta o itinerário seguido. Em seguida, os grupos eram confrontados com um enigma, que devia ser decifrado e que remetia para a diferença de tamanho entre as estátuas. Os alunos deviam estabelecer a ligação entre a altura das estátuas e a sua posição relativa com o papel que os reis representados tiveram na História de Portugal (figura 4).

NEM TODOS SOMOS IGUAIS

Dirige-te ao ponto G. Traça na planta o itinerário que seguiste. Decifra:

"Nem todos somos iguais no traje e na pose.

Mas todos fomos iguais em função.

Só que, de nós, alguns foram mais iguais do que outros."

Quem poderia ter proferido estas palavras? ______________________

Onde estão representados? ______________________________

O que te parece querer dizer a expressão?

"Alguns são mais iguais do que outros"

____

____

Porquê?

____

____

Figura 4. Guião da atividade “Nem todos somos iguais”.

Com efeito, neste Jardim, as estátuas do Cardeal D. Henrique e dos Reis Espanhóis apresentam uma altura bastante menor, além da sua colocação ser estrategicamente relegada para um plano secundário (figura 5). Pretendia-se que os alunos conectassem a condição - altura das estátuas - e a sua posição relativa no conjunto estatuário temático. A justificação pedida seria respondida de acordo com os conhecimentos adquiridos na área curricular de Estudo do Meio. A atividade incluía uma Sopa de Letras que pressupunha o recurso a conhecimentos adquiridos, designadamente a identificação do nome de oito dos reis de Portugal.

Figura 5. Pormenores da escadaria dos reis de Portugal no Jardim do Paço

Complementando a visita ao Jardim do Paço, e já em sala de aula, os alunos também registaram, em desenho e em texto individual, as suas observações e comentários acerca do desenvolvimento da atividade (aprendizagens, dificuldades, colaboração no trabalho de grupo, apreciação global, …) tendo em conta o espaço onde decorreram, distinto do contexto de sala de aula.

Análise e discussão dos resultados

A observação do desempenho dos alunos na realização das tarefas propostas e a análise dos registos acerca das suas perspetivas sobre a visita ao Jardim do Paço, sugerem-nos que a atividade e os recursos didáticos concebidos/construídos contribuíram para desenvolver/proporcionar uma boa parte das aprendizagens expectáveis. A observação e a interação com o meio envolvente revelaram as possibilidades pedagógicas dos espaços não formais, neste caso, o Jardim do Paço, estimulando o processo de formação pessoal e social dos alunos.

De um modo global, os alunos referem nos textos o facto de terem feito aprendizagens de maneira diferente, mas muito interessantes:

> -*Era uma aula fora da sala de aula, mas ao mesmo tempo estivemos a aprender (...).*
>
> -*Foi uma maneira mais interessante de aprender*.

Aliando a componente afetiva à apreciação estética do Jardim, os alunos demonstraram interesse em visitar o espaço mais vezes, revelando envolvimento e motivação para novas aprendizagens.

No que se refere à descrição das estátuas que representam as estações do ano, os alunos associaram os elementos simbólicos com as caraterísticas de cada época, como se pode observar nos seus registos:

> -*A Primavera tem um ramo de flores na mão, uma coroa de flores e é muito alegre*.
>
> -*O Verão, como é muito quente, tem as pernas descobertas e cabelo curto*.
>
> -*O Outono tem uma taça de frutos na mão, frutos secos…*
>
> -*O Inverno (...) tem um manto, está ao pé do lume.*

Na segunda atividade, registaram-se algumas dificuldades na decifração do enigma. Em particular, a descodificação do sentido da expressão "Alguns são mais iguais que outros", suscitou em todos os alunos muitas hesitações.

Num dos grupos, um aluno sugeriu que isso se devia a que uns tinham espadas e outros não. Esta ideia de associar o enigma ao vestuário e adereços apresentados pelas estátuas foi, após uma observação mais atenta das estátuas dos diferentes reis, refutada pelo grupo. Após algumas discussões e indecisões, em que se denotou que os alunos foram capazes de considerar os pontos de vista uns dos outros e de colaborar ativamente para encontrar uma explicação, acabaram por notar a diferença entre a altura das estátuas. Um dos alunos registou o seguinte: "Pensei, porque é que os Filipes I, II e III eram pequenos e o Conde D. Henrique também porque [também] é pequeno". Esta resposta revela a observação atenta das estátuas, a perceção que a diferença na altura estava associada a determinadas figuras históricas, e, o mais importante, refletir sobre a razão dessa diferença. A conclusão a que chega o seu grupo está reproduzida na figura 6.

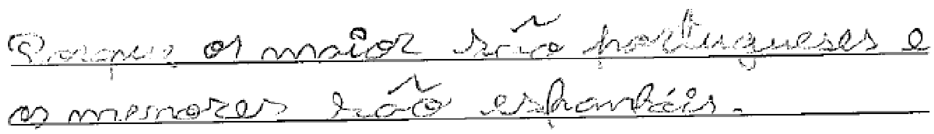

Porque os maior são portugueses e
os menores são espanhóis.

Figura 6. Explicação sobre a diferença de altura das estátuas dos reis

Outro grupo observou que os reis portugueses estão colocados à mesma distância uns dos outros, todos no mesmo patamar e com a mesma orientação. Já os reis espanhóis, para além de serem bem mais pequenos, estão colocados noutro patamar, a menor distância entre si, ainda estão de costas voltadas para os reis portugueses. Por exemplo, um aluno escreveu: "(…) os reis estarem todos à mesma distância uns dos outros menos os espanhóis, que estão mais pequenos e encostados e virados para o outro lado".

Dos dados recolhidos, é de destacar que os alunos foram sensíveis ao caráter interdisciplinar das atividades:

> *-Trabalhámos três matérias, Língua Portuguesa ao lermos o que fazermos, Estudo do Meio dos reis e da História, e de Matemática (...).*
>
> *- No Jardim do Paço há muita matemática e arte.*
>
> *- Em vez de estarmos a aprender uma coisa de cada vez, juntámos tudo.*
>
> *- Eu descobri que no Jardim do Paço há matemática.*
>
> *- Eu antes de chegar ao Jardim do Paço julgava que era um pouco esquisito fazer experiências lá (...).*

Também a componente colaborativa exigida pelas atividades foi igualmente reconhecida e valorizada pelos alunos:

> *- Aprendemos, aprendemos a trabalhar em equipa.*

- *Eu acho que as visitas de estudo são muito importantes, para nós aprendermos a trabalhar em equipa.*

- *Aprendemos a trabalhar em grupo e porque depois quando quisermos trabalhar em grupo já sabemos trabalhar melhor.*

Relativamente ao ambiente de aprendizagem, ou seja, inter-relação entre contextos formal e não formal, os alunos fazem igualmente uma apreciação muito positiva:

- *Foi uma maneira diferente de aprender, sem estar sentado na cadeira da sala de aula e acho que aprendemos mais.*

- *O Jardim do Paço tem tudo para animar uma pessoa, principalmente uma criança, tem água, plantas, reis, diversão e muita matemática.*

- *Eu acho que é melhor irmos mesmo aos sítios do que estar a ver fotografias do livro.*

- *Eu antes de irmos, quando faltavam 2 dias estava a pensar como seria esta visita, porque já lá tinha ido cinco vezes, mas nunca lá tinha ido fazer matemática.*

Com vista à avaliação das aprendizagens propiciadas pelas atividades, identificou-se para além de conhecimentos conceptuais a desenvolver com a atividade, um conjunto de capacidades científicas e transversais, cuja síntese se apresenta na Tabela 1.

Tabela 1. Síntese das aprendizagens propiciadas pelas atividades

		Capacidades										Conhecimentos		Componente atitudinal e afetiva					
		Interpretar informação	Observar e descrever	Inferir	Classificar	Registar	Recolher e organizar material	Representar	Resolver problemas	Simular a situação	Mobilizar conhecimentos	Termos e conceitos relacionados com o conteúdo de Estudo do Meio e Matemática	Conhecimentos transversais/ interdisciplinares	Autonomia	Trabalho colaborativo	Responsabilidade	Envolvimento	Apreciação	Curiosidade
Atividades	Viagem ao Longo do Ano	X	X	X		X						X	X	X	X	X	X	X	X
	Nem todos somos iguais	X	X	X		X					X	X	X	X	X	X	X	X	X

Do exposto, sobressai que as aprendizagens favorecidas pelas atividades e as perspetivas dos alunos sobre as atividades desenvolvidas em contexto não formal são de molde a confirmar a pertinência do recurso a este espaço, para a promoção de aprendizagens integrando diferentes áreas curriculares e o desenvolvimento de capacidades e atitudes, inferência também sustentada pela opinião da Professora Titular:

Estar sempre na sala de aula, sempre a fazer o mesmo tipo de trabalhos, os alunos não aprendem mais por isso. O facto de saírem, viverem *experiências diferentes, ao mesmo tempo enriquecem mais as aprendizagens e motivam-se mais, …*

Conclusões e implicações

Tendo em conta o interesse e a motivação dos alunos durante a visita de estudo, resolvendo os desafios propostos com manifesto empenho, de modo autónomo e havendo colaboração entre os elementos do grupo consideramos que a aprendizagem proporcionada pelos espaços não formais se assume como uma componente fundamental no desenvolvimento do currículo.

Da análise efetuada, pode inferir-se que as diversas atividades complementaram o trabalho realizado em aula de aula e podem continuar a servir de mote para o aprofundamento de alguns aspetos relacionados com esta temática. Por parte dos alunos verificou-se grande interesse, tentando corresponder aos desafios colocados, estando embora num espaço aberto, circulando de forma autónoma e onde conseguiram experimentar e aprender, nomeadamente, aplicando conhecimentos já adquiridos.

Num espaço social que apresenta elementos simbólicos, com grande profusão de formas e elementos decorativos, os alunos fizeram aprendizagens relacionadas com a aplicação de conceitos matemáticos, estimulando a compreensão do papel da matemática na sociedade, ao longo dos tempos.

Com base nos recursos do próprio Jardim, a natureza das atividades propostas contribuiu para uma maior motivação da turma, estimulando a promoção de aprendizagens matemáticas, desenvolvendo atitudes positivas face à disciplina e salientando o grande valor didático deste espaço.

A análise das atividades e os dados recolhidos evidenciam o reconhecimento, pelos participantes, do estímulo proporcionado pelo espaço social onde se desenvolveram e o interesse em continuar a participar em novas experiências, voltando ao Jardim para fazer outras aprendizagens.

Posteriormente, em sala de aula, será fundamental que a exploração das visitas de estudo tenha continuidade, para dar sentido às observações e aos conceitos dos alunos, articulando as aprendizagens realizadas nos espaços não formais com as aprendizagens curriculares.

Das opiniões expressas pelos alunos e pela Professora Titular cremos que o Jardim do Paço foi determinante para a promoção de aprendizagens contextualizadas, de cariz interdisciplinar, aliadas à apreciação estética do espaço e que o estudo realizado permite evidenciar.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L. Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Drake, S. M. & Burns, R. C. (2004). *Meeting Standards Through Integrated Curriculum*. Danvers: ASCD.

Eichinger, John (2009). *Activities linking science with math, K-4*. Arlington (VA): NSTA Press.

Gordo, M. F. (1993). *A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática. Um estudo no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado. Acedido em Outubro, 20, 20132, em http://run.unl.pt/bitstream/10362/278/1/gordo_1993.pdf.

Jorge, F. R. & Paixão, M. F. (2012). Horto de Amato Lusitano – um espaço de educação não formal na formação em ciências de professores para o ensino básico. In J. M. Domínguez Castiñeiras (Ed.), *XXV Encuentro de Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp. 675-681). Santiago de Compostela: USC.

Martins, I. P.; Paixão F. e Vieira, R. (Org.). (2004). *Perspectivas Ciência - Tecnologia - Sociedade na Inovação da Educação em Ciência*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Martins, M. H. (2011). *Relatório de Estágio. À descoberta das ciências no Jardim do Paço: Interacção dos contextos formais e não formais para a aprendizagem das ciências no 1.º CEB*. Castelo Branco: IPCB. Escola Superior de Educação.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, 26.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.

Nunes, M. F. (2011). *Relatório de Estágio: Experiências Matemáticas no Jardim do Paço*. Castelo Branco: IPCB. Escola Superior de Educação.

Oliva, J. M., Matos, J. & Acevedo, J. A. (2004). Las exposiciones científicas escolares y su contribución al desarrollo profesional docente de los profesores participantes. In I. P. Martins, F. Paixão & R. Vieira (Org.), *Perspetivas Ciência Tecnologia e Sociedade na Inovação da Educação em Ciência* (pp.189-193). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Paixão, M. F. (2006). (Coord.). *Educação em Ciência Cultura e Cidadania. Encontros em Castelo Branco*. Coimbra: Alma Azul.

Pérez Serrano, G. (2004). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes - Métodos*. Madrid: Editorial La Muralla.

Planas, N. & Alsina, A. (2009). Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas. In N. Planas & A. Alsina (Coords), *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior* (pp. 9-30). Barcelona: Gráo.

Praia, J. (2006). A Importância da Cultura Científica nas Sociedades Contemporâneas e formas de a Promover. *Educare-Educere*, 18(1), 9-30.

Salvado, M. A. (1999). *O Jardim do Paço de Castelo Branco – roteiro de uma visita de estudo*. Coimbra: A Mar Arte.

Santomé, J. T. (1988). La investigación etnográfica y la reconstrucción crítica en educación. In J. P. Goetz & M. D. LeCompte, *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa* (pp.11-22). Madrid: Ediciones Morata.

POSTERS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Experiências matemáticas na educação pré-escolar: a importância da articulação

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo. *Nesta comunicação pretende-se explorar as potencialidades de algumas tarefas que promovem a articulação entre diferentes áreas/domínios do currículo da educação pré-escolar, com especial enfoque no domínio da Matemática. O principal objetivo deste estudo passa por explorar o potencial desta abordagem, procurando compreender que matemática pode ser aprendida por crianças desta etapa educativa, através da operacionalização de diferentes tipos de conexões*.

Palavras-chave: Matemática; Educação Pré-escolar; Conexões.

Introdução

Muito do que se passa no mundo que nos rodeia pode ser compreendido através de uma lente matemática. A educação pré-escolar pode ser um ponto de partida para que as crianças se interessem por explorar fenómenos que as conduzam à contagem, à seriação, à medição, à exploração de formas, à descoberta de padrões, à estimativa, entre outras experiências (Clements, 2001). Frequentemente, na formação de professores, em particular na formação inicial direcionada para a educação pré-escolar, há algumas questões que usualmente surgem: (1) Como e quando deve a matemática ser explorada nesta etapa educativa?; (2) Qual é o impacto da integração curricular na aprendizagem da matemática no pré-escolar?

A Matemática na educação pré-escolar

As bases necessárias ao desenvolvimento matemático das crianças estabelece-se nos primeiros anos, através da interação com o meio envolvente e das experiências do dia a dia (DEB, 1997; NCTM, 2000). As orientações curriculares para a educação pré-escolar sugerem que as crianças construam gradualmente ideias matemáticas, tendo como ponto de partida situações do seu quotidiano. O professor deve avaliar o conhecimento informal que possuem para proporcionar experiências diversificadas que desenvolvam o seu pensamento matemático. A resolução de problemas é encarada como a metodologia privilegiada nesta etapa educativa, possibilitando que as crianças descubram as suas próprias soluções e as discutam.

As experiências matemáticas proporcionadas devem desafiar as crianças a explorar ideias relacionadas com padrões, formas, números, medida e espaço, com cada vez maior sofisticação. Tão importantes como os conteúdos matemáticos são os processos como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação, as conexões e as representações (Clements, 2001). Em geral, os professores devem focar-se em tarefas matemáticas desafiantes, que suscitem a curiosidade das crianças e apelem ao raciocínio e à comunicação matemáticos, na criação de oportunidades para as crianças trabalharem colaborativamente e em encorajá-las a falar e *escrever* sobre a matemática aprendida (Van de Walle, 2004).

A importância das conexões

Os conteúdos patentes no currículo do pré-escolar não devem ser concebidos separadamente. Considerando o caso da Matemática, surge nos primeiros anos através de tarefas que reflitam contextos significativos e a conexão entre conteúdos. Uma abordagem efetiva da matemática não deve limitar-se a um determinado período do dia, deve procurar-se explorá-la ao longo do dia, atravessando o currículo. É fundamental integrar a matemática nas atividades destinadas a outras áreas, como a literatura, linguagem, ciências, conhecimento do mundo, artes, música, entre outras (DEB, 1997; NCTM, 2000). Considera-se assim relevante ajudar as crianças a relacionar a matemática com outros domínios do saber, uma vez que desenvolve conhecimentos específicos de cada um e permite o reconhecimento da aplicabilidade da matemática.

Metodologia

Dada a natureza do estudo, e de forma a responder às questões enunciadas, adotou-se uma metodologia qualitativa (Erickson, 1986). O estudo envolveu vinte e duas crianças de 5-6 anos, de uma turma do pré-escolar, associada ao contexto da formação inicial de professores. Para compreender o potencial da integração curricular nas primeiras experiências matemáticas, foram exploradas várias tarefas, em pequeno e grande grupo, que emergiram dos interesses das crianças ou foram intencionalmente planeadas com a finalidade de realçar conexões entre a matemática e outras áreas (ver exemplos em anexo).

Discussão

Foi evidente que tarefas que contemplam a integração curricular constituem experiências de aprendizagem mais efetivas e naturais. O conhecimento é percebido como um todo e os conceitos específicos de cada área, envolvidos nas explorações efetuadas, são interligados de modo a produzir uma sequência de referências comuns. Focando algumas das tarefas abordadas, pode afirmar-se que: (a) há várias conexões que emergem entre a expressão plástica e a matemática, principalmente porque existe uma componente visual que facilita a exploração de formas, padrões, cores, transformações geométricas; (b) atividades diárias (e.g. receitas, lanche, rotinas) constituem contextos privilegiados para desenvolver competências de medição e aspetos relacionados com o sentido de número; (c) as ciências naturais focam o ambiente e a compreensão de fenómenos, o que conduz à previsão, observação, comparação, classificação, procura de padrões; (d) a literatura infantil também despoleta experiências matemáticas uma vez que muitos livros têm elementos que se relacionam com outras áreas, como a matemática.

Referências bibliográficas

Clements, D. (2001). Mathematics in the Preschool. *Teaching Children Mathematics, 7*, 270-275.

DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (5th Edition). Boston: Pearson Education Inc.

Anexo

Tarefa 1

!

Com!a!aproximação!do!dia!da!Mãe,!o!grupo! decidiu! construir! o! seu! próprio! papel! de! embrulho,! que! iria! ser! utilizado! para! embrulhar!o!presente!a!oferecer!à!mãe.!

!
!
!
!
!
!
!
!

Tarefa 2

!

Após! um! diálogo! em! grande! grupo,! as! crianças! propuseram! fazer! na! sala! queques!de!chocolate.!Discutiram!quais! os! ingredientes! a! utilizar,! os! utensílios! necessários! e! os! procedimentos! a! seguir.!!

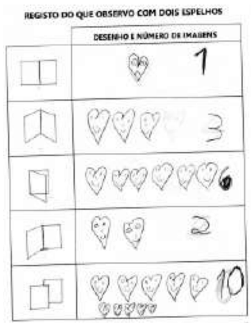
!
!
!
!
!
!
!

Tarefa 3

!

!A!partir!da!leitura!de!uma!história!centrada! no!conceito!de!reflexão,!emergiu!a!questão:! O!que!podemos!observar!num!espelho?! Em!pequeno!grupo!manipularam!um!e!dois! espelhos,!registando!as!suas!conclusões.!

!



Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: explicitando o intertexto*

Kátia Maria de Medeiros[1], *Misleide Silva Santiago*[2]
[1]Universidade Estadual da Paraíba, katiamedeirosuepb@gmail.com
[2]Universidade Estadual da Paraíba, misleide.santiago@hotmail.com

Resumo. *O objetivo geral desta pesquisa foi identificar como o professor e os alunos de uma turma do 1.º Ano do Ensino Médio, que se encontravam na faixa etária dos 14 aos 16 anos, de uma escola pública estadual de Campina Grande, na Paraíba, Brasil, concebem a formulação e a resolução de problemas matemáticos e compreender como estes alunos formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, um estudo de caso, cuja unidade de análise é a turma. Os dados foram recolhidos a partir de entrevistas semi-estruturadas com o professor de Matemática e com os alunos, da observação, da formulação e resolução de problemas matemáticos por parte dos alunos e de um questionário por eles respondido. Neste poster apresentaremos excertos da entrevista do professor e dos alunos e de formulações e resoluções de problemas matemáticos dos alunos. Os resultados apontam que o professor concebe a formulação e a resolução de problemas matemáticos como uma metodologia de ensino eficaz. Os alunos concebem a formulação de problemas matemáticos como importante e difícil e a resolução de problemas como fácil, difícil e importante. Além disso, os problemas formulados e resolvidos foram fechados, na maioria das sessões. Um pequeno número de alunos conseguiu explicitar plenamente o intertexto. Tais resultados sugerem a necessidade da reflexão sobre as atividades com estas tarefas e da maior frequência na utilização da formulação e resolução de problemas nas aulas de Matemática.*

Palavras-chave Formulação e resolução de problemas matemáticos; Concepções; Intertextualidade; Ensino Médio; Sala de aula.

Referencial teórico

Ponte (1992) considera que as concepções constituem uma forma de encarar o mundo ou de pensar, funcionam como um obstáculo a novas realidades ou a alguns problemas, atuando "como uma espécie de filtro" (p. 1). A formulação e a resolução de problemas matemáticos na sala de aula, por sua vez, são tarefas com um potencial didático

* Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, no âmbito do Projeto Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade, do Programa Observatório da Educação (Edital 049/2012/CAPES/INEP), que financiou passagens e diárias da primeira autora.

relevante (Brown & Walter, 2005; Medeiros & Santos, 2007). Por outro lado, a formulação de problemas matemáticos não é uma tarefa comum nas aulas de Matemática, uma vez que, frequentemente, a tarefa predominante nestas aulas é o problema fechado ou exercício (Medeiros & Santos, 2007; Ponte, 2005).

Atualmente, o texto é um todo coerente e com significado (Bakhtin, 2003). Pode ser uma palavra, um quadro, um filme, um problema matemático, há muitos outros exemplos. Não apenas o texto escrito. Os alunos podem utilizar estes textos para as suas formulações. Esse texto pode ter a sua significação composta não apenas de um único texto, mas do cruzamento de vários textos, numa relação de intertextualidade. Nos diferentes de tipos de texto os alunos podem interpretar o subtexto ou intertexto a ser compreendido, que pode estar relacionado a um dos Temas Transversais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998).

A metodologia da investigação

O projeto aqui apresentado foi metodologicamente desenvolvido numa pesquisa qualitativa (Yin, 2003) numa sala de aula de uma escola pública estadual localizada em Campina Grande, Paraíba, Brasil, recorrendo a um estudo de caso, cuja unidade de análise é a turma. Inicialmente, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com o professor de Matemática e com os alunos da turma, a fim de identificar as suas concepções sobre a formulação e a resolução de problemas matemáticos na sala de aula. A seguir, os alunos formularam e resolveram problemas matemáticos a partir de dez diferentes tipos de textos. Dois Temas Transversais distintos, a cidadania e o meio-ambiente, foram utilizados. A seguir, os alunos responderam a um questionário, num encontro extra, similar ao utilizado em Medeiros e Santos (2007), para identificar o intertexto (tema implícito), presente nos problemas (textos), referentes a um dos Temas Transversais. No terceiro momento da pesquisa, os dados coletados nas entrevistas, nas formulações e nas resoluções de problemas matemáticos e no questionário, foram analisados. A seguir escreveu-se o estudo de caso.

Resultados

O professor concebe a formulação e a resolução de problemas matemáticos como uma metodologia de ensino eficaz, porque propicia melhor perspectiva para a compreenssão do aluno. Os alunos, por sua vez, concebem a formulação de problemas matemáticos como importante e difícil. A resolução de problemas é concebida pelos alunos como fácil, difícil e importante. Além disso, os problemas formulados e resolvidos foram fechados, na maioria das sessões, uma exceção foi a formulação com o texto referente ao *Projeto Tamar*, na qual os alunos utilizaram, na resolução, a escrita em língua materna para escrever a resposta.Um pequeno número de alunos conseguiu explicitar plenamente o intertexto meio ambiente.

Conclusões

As concepções do professor e dos alunos sobre a formulação e a resolução de problemas matemáticos parecem influenciar os tipos de problemas que foram formulados e resolvidos pelos alunos, sendo estes, predominantemente, fechados (Medeiros & Santos, 2007), e a dificuldade destes alunos em explicitar o intertexto, uma vez que tal explicitação refere-se à capacidade de interpretar os enunciados dos problemas matemáticos**.** Nas atividades com problemas fechados, a interpretação não é imprescindível na resolução.

Tais resultados sugerem a necessidade de maior frequência na utilização da formulação e da resolução de problemas matemáticos, a partir de textos no sentido bakhtiniano. A reflexão sobre as atividades com estas tarefas (Ponte, 2005) também nos parece relevante para contribuir com a interpretação do enunciado e a explicitação do intertexto emergente na relação intertextual.

Referências bibliográficas

Bakhtin, M. (2003). *Estética da criação verbal*. São Paulo: Martins Fontes.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF.

Brown, S., & Walter. M. (2005). *The art of problem posing*. (3.ª ed). New York: Routledge.

Medeiros, K. M., & Santos, A. (2007). Uma experiência didática com a formulação de problemas matemáticos. *Zetetiké 28*(15) pp. 87-118.

Ponte, J. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Coords.), *Educação Matemática* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Do ponto ao espaço: Contributo do croché para a Matemática do planeta Terra

Maria Antónia Forjaz[1], *Alexandra Nobre*[2], *Cristina Almeida Aguiar*[2], *Maria Judite Almeida*[2]
[1]CMAT, Centro de Matemática da Universidade do Minho, & DMAT, Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho, & STOL, *Science Through Our Lives*, maf@math.uminho.pt
[2]CBMA, Centro de Biologia Molecular e Ambiental da Universidade do Minho, & DB, Departamento de Biologia da Universidade do Minho, & STOL, *Science Through Our Lives*, anobre@bio.uminho.pt, cristina.aguiar@bio.uminho.pt, juditealmeida@bio.uminho.pt

Resumo. *O projeto "Ponto a Ponto enche a Ciência o Espaço" assenta numa iniciativa intergeracional colaborativa e evidencia a relação entre a Biologia e a Matemática no âmbito da geometria hiperbólica. As atividades desenvolvidas têm por base uma Instalação em croché que recria um recife em coral e procuram proporcionar aos seus participantes ambientes interdisciplinares de ensino e aprendizagem ricos na diversidade, estimulantes e desafiantes, que lhes permitam desenvolver a sua capacidade para explorar, conjeturar e raciocinar logicamente. O tema da Geometria, neste caso particular da geometria hiperbólica, propicia o desenvolvimento dessas competências ao requerer a aprendizagem dos diversos conceitos geométricos, das suas relações e propriedades, aliadas a capacidades, entre outras, de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais (Vale, 2012).*

Palavras-chave: geometrias não-euclidianas; geometria hiperbólica; crescimento biológico; croché; ambientes interdisciplinares de ensino-aprendizagem.

Uma Instalação de Arte

Tendo por objetivo comunicar, divulgar, democratizar e pensar a Ciência com "consciência", o STOL, *Science Through Our Lives*[1], tem em mãos o projeto "Ponto a Ponto enche a Ciência o Espaço" que evidencia a relação entre a Biologia e a Matemática no âmbito da geometria hiperbólica (Almeida, *et al*., 2012). O projeto tem por base uma *Instalação* de um recife de coral em croché tradicional. O desenvolvimento deste projeto passa pelo envolvimento de comunidades escolares e da sociedade.

[1] Pode obter mais informações em: http://www.cbma.bio.uminho.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=240:stol&catid=102:stol&Itemid=169)

Em 1997, D. Taimina executou o primeiro plano hiperbólico em croché (Figura 1) (Henderson & Taimina, 2001). Até hoje o croché é a única técnica que permite construir modelos tridimensionais da geometria hiperbólica.

Figura 1. Pseudoesfera hiperbólica (Taimina, Lamb, 2011).

Na sequência da *ilustração* de um capítulo do livro de J. Buescu (Buescu, 2011) com modelos em croché, o STOL abraçou a criação de um recife de corais, que já foi exposto na Festa da Ciência ECUM 2012, Biblioteca Lúcio Craveiro da Silva, Braga, associou-se ao projeto "A Matemática dos Nossos Avós" do Museu da Ciência da Universidade de Coimbra, esteve na “Exposição Ciência e Arte” do Museu Nacional Soares dos Reis, Porto, na exposição “Ver Arte Prever Ciência”, no Mosteiro de Tibães, Braga e na abertura do Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra (MPT2013), <http://www.mat.uc.pt/mpt2013/>, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa (Figura 2).

Figura 2. Instalação em croché. Geometrias não-euclidianas.

A Geometria constitui uma óptima forma de relacionar a Matemática com a realidade e, consequentemente, com outras ciências, como a Biologia. São as geometrias não-euclidianas que permitem explicar alguns dos fenómenos. Ao enfatizar a existência e importância das geometrias não-euclidianas, a sua exploração com a verificação de algumas propriedades dadas como irrefutáveis na geometria euclidiana, pode contribuir para melhor compreensão do mundo pelos alunos.

Croché: potencialidades e aplicações

No âmbito da iniciativa internacional MPT2013, propomos dois *workshops,* tendo por base os ecossistemas de corais e as diferenças entre as Geometrias Hiperbólica e

Euclidiana. Os *workshops* pressupõem a presença da instalação do recife de corais em croché (Figura 3). Esta, em construção permanente, serve-se das formas dos corais como exemplo de estruturas geométricas hiperbólicas que exemplificam um modo de crescimento onde há um significativo aumento de área de superfície, limitada a um dado volume. Este facto é vantajoso pois permite uma forma de nutrição muito eficiente. O referido recife serve também para alertar para as causas de degradação nos corais, como sejam a poluição, a pesca excessiva, as mudanças climáticas ou a acidez dos oceanos (Buddemeie *et al*., 2004; Cohen, 2008). Nos *workshops* os participantes são convidados a manipular os modelos de croché com o objetivo de uma melhor visualização das suas propriedades.

Atividade 1: Visita guiada à Instalação de Arte

Propõe-se a exploração do "recife" de forma dirigida a aspetos relativos à nova (porque será certamente uma novidade para a grande generalidade do público) geometria hiperbólica e suas propriedades.

Figura 3. A Instalação de Arte.

Atividade 2: Exploração orientada

Propõe-se a exploração do recife de croché (i) no sentido *hands-on* ou de realização de um modelo (Figura 4); (ii) na pesquisa de propriedades da geometria hiperbólica, comparando com as mesmas propriedades em geometria euclidiana; e (iii) com o "desenho" de "retas" paralelas (Figura 5A), determinação de distâncias, medição da amplitude de ângulos, soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo (Figura 5B), cálculo das áreas e aplicação (ou não!) do Teorema de Pitágoras.

Figura 4. Workshop – realização de modelos em croché.

(A) **(B)**

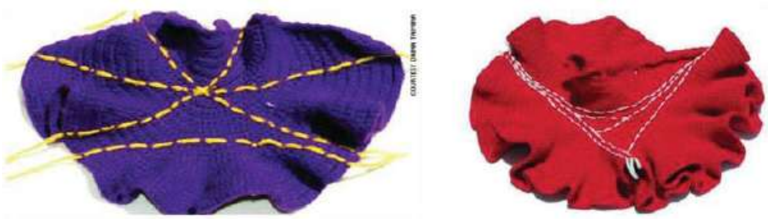


Figura 5. Geometria hiperbólica. (A) Retas paralelas. (B) Triângulo em que a soma dos ângulos internos é menor que 180º e a área se aproxima de zero (Taimina, 2009).

Referências bibliográficas

Almeida, M. J., Nobre, A. Maciel, M., Forjaz, A., & Almeida Aguiar, C. (2012). Stitch by Stitch the Science Fills the Space. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *55*, 935-944, Third International Conference on New Horizons in Education, INTE 2012.

Buddemeier, R. W., Kleypas, J. A., & Aronson, R. B., (2004). *Coral reefs & Global Climate Change Potential Contributions of Climate Change to Stresses on Coral Reef Ecosystems*. Prepared for the Pew Center on Global Climate Change.

Buescu, J. (2011). *Casamentos e Outros Desencontros*. Lisboa. Gradiva Publicações.

Cohen, P. (2008). Crochê ecológico defende Grande Barreira de Coral. *The New York Times*.

Henderson, D. W., & Taimina, D. (2001). Crocheting the Hyperbolic Plane. *Mathematical Intelligencer*, *23*(2), 17-28.

Henderson, D. W., & Taimina, D. (2004). *Experiencing Geometry* (3rd Edition). Pearson PUB.

Taimina, D. (2009). *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes*. A. K. Peters Pub.

Vale, I. (2012). A utilização da visualização para ensinar e aprender matemática. In *Atas do SIEM XXXIII*. Lisboa: APM.

LISTA DE REVISORES

Abigail Lins
Ana Barbosa
Ana Boavida
Ana Henriques
António Domingos
António Guerreiro
António Ribeiro
Assumpta Estrada
Carlos Miguel Ribeiro
Cecília Costa
Cecília Monteiro
Cláudia Mendes Araújo
Conceição Costa
Cristina Martins
Darlinda Moreira
Ema Mamede
Fátima Mendes
Fátima Paixão
Fátima Regina Jorge
Gabriela Gonçalves
Gustavo Cañadas
Helena Rocha
Hélia Jacinto
Hélia Oliveira
Hélia Pinto
Isabel Cabrita
Isabel Vale
Isabel Velez
Isolina Oliveira
Joana Brocardo
Joana Tinoco
João Pedro da Ponte
José António Fernandes
José Duarte
José Marcos Lopes
José Miguel Contreras
Josimar de Sousa
Júlio Paiva
Kátia Maria de Medeiros
Leonor Santos
Lina Fonseca
Luciano Veia
Lucília Teles
Luís Menezes
Lurdes Serrazina
Manuel Saraiva
Manuel Vara Pires
Maria Alexandra Oliveira Gomes
Maria Antónia Forjaz
Maria Helena Martinho
Maria Manuel Nascimento
Marisa Quaresma
Mercedes Carvalho
Nádia Ferreira
Nélia Amado
Olga Seabra
Patrícia Beites
Patrícia Sândalo
Paula Vieira da Silva
Paulo Ferreira Correia
Pedro Palhares
Renata Carvalho
Rodrigo Terradas
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Rosário Contente Monteiro
Sandra Nobre
Sandra Pinheiro
Sandra Quintas
Sílvia Semana
Susana Carreira
Susana Colaço
Teresa Pimentel

AGRADECIMENTOS

Instituto de Educação da Universidade do Minho

Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho

Departamento de Estudos Integrados de Literacia, Didática e Supervisão

Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Câmara Municipal de Braga

Edições ASA