APM 25 ANOS

Actas

XXII SIEM

07-08 SETEMBRO LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Título
Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática

Organizadores
Ana Henriques, Cláudia Nunes, Ana Silvestre, Hélia Jacinto, Hélia Pinto,
Ana Caseiro e João Pedro da Ponte

Edição
Associação de Professores de Matemática
Lisboa, Setembro de 2011

ISBN 978-972-8768-48-5

Apoios

Índice

Introdução ix

Conferência Plenária 1
Distanciamentos entre a atividade matemática escolar e a matemática acadêmica e do cotidiano: implicações para a formação de professores e para a prática docente na educação básica. 3
Maria Manuela David

Conferência Plenária 2
Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano 17
Joana Brocardo

Conferência Plenária 3
Perguntar, ouvir e responder: uma experiência de formação inicial. 19
Rosa Antónia Tomás Ferreira

Simpósio 1 — Ensino e Aprendizagem dos Números e Álgebra
Texto introdutório 23
Ema Mamede & Hélia Oliveira

Pensamento algébrico no 2.º ano de escolaridade: generalização de sequências 27
Teresa Ramos, Ana Boavida & Hélia Oliveira

O trabalho com sequências numa turma do 1.º ano de escolaridade 49
Ana Morais, Célia Cascais & João Pedro da Ponte

Generalizar estratégias de cálculo: um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. 65
Célia Mestre & Hélia Oliveira

Desenvolvimento do conhecimento do ensino da álgebra: contributo de uma experiência de formação 81
Neusa Branco & João Pedro da Ponte

Uma unidade de ensino de cunho exploratório para o desenvolvimento do raciocínio proporcional 93
Ana Silvestre & João Pedro da Ponte

Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula 107
Ana Patrícia Gafanhoto & Ana Paula Canavarro

Diagnóstico sobre o pensamento algébrico: estratégias de generalização de sequências . . . 123
Elsa Oliveira, Inês Campos & Joana Pereira

Os problemas históricos como artefactos mediadores da aprendizagem das equações 137
Ida Gonçalves, Elsa Fernandes & Nuno Silva

Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en torno a la modelización de la concentración de un medicamento. 151
Catarina Lucas, Cecílio Bon & Gascón Pérez

O pensamento algébrico no estudo das funções no 10.º ano de escolaridade 163
Adélia Prates, Celina Tavares, Rosa Dias & Cláudia Nunes

Representações no estudo das funções racionais 179
Lígia Carvalho, Rosa Antónia Ferreira & João Pedro da Ponte

O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade 193
Cristina Morais

O raciocínio aditivo e multiplicativo em crianças do pré-escolar 211
Florbela Soutinho & Ema Mamede

As contribuições dos jogos para o desenvolvimento e a aprendizagem da matemática em crianças da pré-escola 223
Rita Lepre, Nelson Pirola & Daniela Costa

As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação 237
Fátima Mendes, Hélia Oliveira & Joana Brocardo

A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos nºs racionais . . . 253
João Pedro da Ponte & Marisa Quaresma

Os raciocínios dos alunos na descoberta de dízimas finitas: uma experiência com alunos de uma turma de 9.º ano. 269
Cláudia Domingues & Helena Martinho

Estabelecendo conexões entre números racionais: o caso da percentagem 287
Hélia Ventura & Hélia Oliveira

A medida na formação do conceito de número 301
Marisa Dias

A complementaridade da conceituação de nº real 311
Sónia Igliori & Rogério Fonseca

O conhecimento dos significados de fracção de professores do 1.º ciclo do ensino básico . . 323
Paula Cardoso & Ema Mamede

Simpósio 2 — Ensino e Aprendizagem da Geometria
Texto introdutório 339
Margarida Rodrigues & Marisa Bernardo

Uma avaliação diagnóstica sobre a percepção de relações espaciais em crianças dos 3 aos 6 anos 345
Cristina Alves & Alexandra Gomes

A geometria na formação inicial de professores: representações de planificações do cubo . . 359
Tiago Tempera

História e ensino de matemática: o báculo e a geometria 371
Marisa Dias & Fumikazu Saito

Práticas culturais e comunicação matemática: o surf na aula de matemática 383
Joana Latas & Darlinda Moreira

Resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros: um estudo com alunos do curso de educação e formação. 397
Carla Lavrador & Henrique Guimarães

Simpósio 3 — Ensino e Aprendizagem da Estatística e das Probabilidades
Texto introdutório 417
José António Fernandes & Ana Cláudia Henriques

O desenvolvimento da literacia estatística no 5.º ano: uma experiência de ensino 423
Cátia Freitas

Planeamento estatístico: uma experiência de ensino no 8.º ano 439
Sandra Campelos & Darlinda Moreira

Planeamento estatístico no 3.º ciclo do ensino básico 451
Cristina Roque & João Pedro da Ponte

Realização de duas tarefas sobre construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano. 465
Paula Morais & José António Fernandes

Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada 479
Paulo Correia, José António Fernandes & José Miguel Contreras

Dificuldades na compreensão de intervalos de confiança: um estudo com alunos universitários. 493
Ana Henriques

Simpósio 4 — Avaliação das Aprendizagens em Matemática
Texto introdutório 511
Leonor Santos

Questionar para auto-avaliar: a acção do professor José 515
Paulo Dias & Leonor Santos

Apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos: estratégias desenvolvidas por uma professora num contexto de trabalho colaborativo 527
Sílvia Semana & Leonor Santos

O erro na aprendizagem das sequências e regularidades: o papel dos dispositivos de regulação 541
Luísa Vale, Rosa Antónia Ferreira & Leonor Santos

Simpósio 5 — Conhecimento e Práticas Profissionais dos Professores de Matemática
Texto introdutório 557
Rosa Antónia Ferreira & Luís Menezes

Formação continuada de professores de matemática: caminhos e possibilidades 567
Régis Souza

Os conhecimentos didáticos sobre as noções de área e perímetro verificados durante um estudo de caso com um grupo de professores 583
Cíntia Santos & Edda Curi

O programa de formação contínua em matemática: contributos da investigação 595
Lurdes Serrazina, Ana Paula Canavarro, António Guerreiro, Isabel Rocha & José Portela

Formação inicial de professores de matemática: a importância da parceria escola-universidade no desenvolvimento do estágio supervisionado 609
Raquel Oliveira

O sentido de número de futuros professores do 1.º ciclo 621
Dina Tavares, Hélia Pinto, Isabel Rocha & Marina Rodrigues

O conhecimento profissional em estatística de 3 professores do 1.º ciclo 635
Ana Caseiro

A prática profissional num contexto de utilização da calculadora gráfica 653
Helena Rocha

Práticas de gestão curricular de um grupo de matemática 671
Cláudia Nunes & João Pedro da Ponte

Jogos e resolução de problemas no ensino de probabilidades: percepções de professoras sobre mudanças em suas práticas 683
José Lopes & Inocêncio Bailieiro Filho

A compreensão dos resultados da prova brasil de matemática para o 5.º ano e implicações para sala de aula: a contribuição para um grupo colaborativo 695
Edda Curi & Cintia Santos

Negociação de significados na sala de aula de matemática. Práticas entre professoras e alunos do 1.º ciclo 707
António Guerreiro

A comunicação matemática: uma análise da prática de professores do 1.º ciclo do ensino básico 719
Lúcia Alves & Ema Mamede

O novo programa de matemática no 1.º ciclo. Concepções de cinco professoras 731
João Pedro da Ponte & Isabel Velez

Simpósio 6 — Tecnologias e Recursos no Ensino e Aprendizagem da Matemática
Texto introdutório 747
Susana Carreira & Hélia Jacinto

Aprender matemática, informática, e não só …com robots. O Projecto DROIDE II 751
Elsa Fernandes, Paula Abrantes, Eduardo Fermé, Luís Gaspar, Cristina Lopes, Sónia Martins, João Filipe Matos, Alcione Santos, Madalena Santos & Teresa Silva

A gênese instrumental em propostas de atividades com o uso do GeoGebra 761
Celina Abar & Sergio Alencar

Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo 775
Madalena Consciência & Hélia Oliveira

A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática 791
Graça Magalhães & Helena Martinho

Resolução de equações de 2.º grau recorrendo à folha de cálculo. 807
Luís Santos & António Domingos

Lugares geométricos: uma abordagem com o software GeoGebra 821
Gerson Oliveira & Péricles Araújo

O GeoGebra na construção de modelos matemáticos: uma experiência no estudo da variação linear 835
Fátima Canário, Nélia Amado & Susana Carreira

Processos de modelação no ensino profissional: uma tarefa envolvendo funções 849
Cláudia Oliveira & Hélia Oliveira

Posters

Análise comparativa de distribuições numa turma de 7.ºano 867
Inês Campos, Joana Mata Pereira & Nuno Raínho

Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 10º ano de escolaridade 871
Adélia Prates, Celina Tavares & Rosa Pedro Dias

Jogos e resolução de problemas no ensino e aprendizagem dos conceitos básicos de probabilidade. 875
José Marcos Lopes & Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

Um projeto para a melhoria do processo ensinoaprendizagem da matemática: observatório da educação 879
Maria Madalena Dullius

Sobre o conceito de número: discutindo a formação de concepções com base nas experiências vivenciadas no curso de licenciatura em matemática 883
Inocêncio Fernandes Balieiro Filho & Neide Cristina Sabaraense Balieiro

Identidade profissional do professor de matemática não habilitado e formação inicial — contributos e configuradores. 885
Josimar de Sousa

A resolução de problemas online e a criatividade dos nativos digitais — o projecto Problem@Web. 887
Susana Carreira, Hélia Jacinto, Jaime Carvalho e Silva, Juan Rodriguez, Nélia Amado, Nuno Amaral, Rosa Antónia Ferreira & Sandra Nobre

Introdução

O SIEM — Seminário de Investigação em Educação Matemática — é uma organização do Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática. No 25.º aniversário desta associação, o XXII SIEM voltou a realizar-se em Lisboa, nos dias 7 e 8 de Setembro de 2011, no Instituto de Educação.

A tradição de aliar a investigação à prática é longa e rica. Por isso, para além de criar um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da Educação Matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados, este Seminário tem vindo a promover a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática.

O Seminário contou com a participação de cerca de uma centena e meia de professores e investigadores oriundos de Portugal, Espanha e Brasil, 67 dos quais estiveram envolvidos na apresentação de comunicações orais e posters. Acreditamos que esta grande participação é prova que muitos de nós partilham as mesmas preocupações no que diz respeito à Matemática e que tal afluência contribuiu para o sucesso do XXII SIEM. As comunicações orais e os posters foram organizados em 6 simpósios, coordenados por investigadores convidados e focados nos seguintes temas: Ensino e Aprendizagem dos Números e Álgebra; Ensino e Aprendizagem da Geometria; Ensino e Aprendizagem da Estatística e das Probabilidades; Avaliação das Aprendizagens em Matemática; Conhecimento e Práticas dos Professores de Matemática e Tecnologias e Recursos no Ensino e Aprendizagem da Matemática. O propósito dos simpósios é juntar os participantes com alguma afinidade de interesse nos temas versados nas comunicações apresentadas de forma a constituírem-se como espaços de discussão aprofundada.

Para além das comunicações, o XXII SIEM incluiu três conferências plenárias, uma delas a cargo de um convidado estrangeiro, e um painel temático dedicado à apresentação de um projeto de investigação. As conferências plenárias tiveram como objectivo reunir os participantes numa reflexão sobre temas mais transversais ou ilustrar aspectos mais particulares do que se vai realizando em termos de investigação e da educação matemática em Portugal. A primeira conferência plenária, subordinada ao tema: "Distanciamentos entre a Atividade Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica e do Cotidiano: Implicações para a Formação de Professores e para a Prática Docente na Educação Básica", foi proferida por Maria Manuela David da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil. As outras duas conferências estiveram a cargo de investigadores nacionais convidados, Joana Brocardo, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, subordinada ao tema: "Uma Linha de Desenvolvimento do Cálculo Mental: Começando no 1.º Ano e Continuando até ao 12.º Ano" e Rosa Antónia Ferreira, do CMUP, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto que orientou a sua intervenção desenvolvendo o tema "Perguntar, Ouvir e Responder: uma Experiência de Formação Inicial".

No painel temático foi explorada uma outra vertente da investigação em educação matemática, com a apresentação do projeto de investigação *IMLNA — Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra*, apoiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, cuja moderação foi da responsabilidade de António Domingos e Joana Pereira, no qual participaram João Pedro da Ponte, Hélia Oliveira, Manuel Saraiva, Ana Isabel Silvestre, Magda Pereira e Neusa Branco.

Neste documento, apresentam-se os textos remetidos pelos autores das conferências e das diversas comunicações orais e em poster que foram aceites pelo painel de revisores. Esperamos que o que foi apresentado no XXII SIEM seja uma contribuição interessante para divulgar os avanços, as novas tendências e o importante trabalho realizado, quer na investigação em Educação Matemática, quer na prática do ensino e aprendizagem da Matemática e que todos os participantes sintam que o tempo dispendido no seminário tenha sido profícuo.

Lisboa, 8 de Setembro de 2011
A Comissão Organizadora

CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS

DISTANCIAMENTOS ENTRE A ATIVIDADE MATEMÁTICA ESCOLAR E A MATEMÁTICA ACADÊMICA E DO COTIDIANO: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E PARA A PRÁTICA DOCENTE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Maria Manuela David
Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais – Brasil
manueladavid@uol.com.br

Resumo

Toma-se como pressuposto para essa discussão que a matemática escolar não pode ser reduzida a uma versão simplificada e *didatizada* da matemática acadêmica, nem pode ficar limitada ao reconhecimento das práticas matemáticas do cotidiano. Isto é, assume-se a perspectiva de que a matemática escolar, embora referenciada na prática dos matemáticos profissionais e nas práticas matemáticas cotidianas, se transforma numa construção própria da escola, sem chegar a ser, entretanto, exclusivamente endógena à escola. Para caracterizar melhor o modo como entendo a Atividade Matemática Escolar, no nível da Educação Básica (6 a 18 anos de idade, no Brasil), apresento alguns exemplos de distanciamentos, ou pontos de tensão, entre essa atividade e as outras duas a que ela está referenciada, e ressalto a relevância de mais pesquisas nessa área. Discuto a importância de esses distanciamentos serem mais claramente explicitados e tratados de forma mais aprofundada no processo de formação do professor. Para discutir alguns modos como esses distanciamentos se refletem na prática docente, analiso uma atividade em uma sala de aula da Educação Básica, onde um deles se fez presente.

Palavras-chave: formação de professores, prática docente, matemática escolar, matemática acadêmica, matemática do cotidiano.

A questão em pauta, no cenário da minha instituição

Pretendo apresentar um programa de pesquisas em uma área que considero ainda relativamente pouco explorada, para a qual, entretanto, o nosso grupo da Educação Matemática na UFMG[1] tem dado algumas contribuições. Esse programa de pesquisas foi iniciado com a tese de doutorado de Plínio Moreira (Moreira, 2004), vem sendo desenvolvido em trabalhos posteriores do mesmo autor, alguns em colaboração comigo (Moreira & David, 2005, 2008), e atualmente está tendo continuidade com a tese de doutorado da Maria Cristina Ferreira, em andamento.

---

[1] Universidade Federal de Minas Gerais/Belo Horizonte, MG, Brasil

Moreira (2004) parte de uma distinção entre a matemática escolar[2] e a matemática acadêmica[3] e faz um confronto entre o conhecimento sobre os números veiculado no curso de formação de professores na UFMG e as questões que a literatura de pesquisa indica como envolvidas na prática do professor de matemática da Escola Básica. Esse confronto o leva a concluir pela necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, equacionando os papeis da matemática escolar e da matemática acadêmica de forma a diminuir a preponderância dos valores da matemática acadêmica e a valorizar mais questões essenciais da prática escolar. Posteriormente, em Moreira & David (2005, 2008), aprofunda-se a discussão dos conflitos e distanciamentos entre a matemática acadêmica e escolar, no caso dos conjuntos numéricos, e ressalta-se a importância da explicitação desses conflitos na formação matemática dos professores.

Um dos exemplos apresentados é o do conjunto dos números racionais, mostrando como para a matemática acadêmica ele é considerado um objeto extremamente simples e, na matemática escolar, a sua introdução é considerada pelos professores um dos momentos mais complexos de sua prática. Pode-se dizer que a sua abordagem na matemática acadêmica comprime em uma única forma abstrata – aquela que expressa a "essência" do conceito – as várias maneiras de interpretar 'concretamente' a ideia de razão de inteiros. Do ponto de vista da prática de ensino, pelo contrário, o que parece ser importante é "decompor" essa ideia em uma variedade de formas (sub-construtos) considerando explicitamente suas diferentes possibilidades de interpretação, uma vez que se acredita que a construção escolar do conceito de número racional pode ser desenvolvida a partir de uma integração progressiva de sub-construtos (Moreira & David, 2008).

Tomando uma direção semelhante, o trabalho de Ferreira (2010)[4] amplia essa discussão em termos do conhecimento matemático, passando a focar a álgebra, e dos procedimentos para a identificação dos conceitos de álgebra reconhecidos ou

---

[2] Conjunto de saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática. Isto é, não é só aquilo que se ensina na escola, uma vez que inclui os saberes docentes oriundos desse processo de educação.

[3] Corpo científico de conhecimentos, conforme produzido e percebido pelos matemáticos profissionais.

[4] Projeto de pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação da FAE/UFMG, em Maio de 2010 (documento interno).

mobiliados pelo professor em seu trabalho na escola básica que, entre outros, vão incluir uma pesquisa de orientação etnográfica, com observação direta em sala de aula.

A pesquisa feita por Vanessa Tomaz em sua tese de doutorado e em trabalhos que se seguiram (Tomaz, 2007; Tomaz & David, 2008) tomou um rumo diferente, proporcionando uma discussão das relações entre a matemática escolar e, desta vez, a matemática do cotidiano[5]. Focando essas outras relações, Tomaz (2007) percebeu indícios de distanciamentos ou tensões de certo modo semelhantes aqueles que foram explicitados por Moreira & David (2005, 2008). Veremos mais adiante como esses distanciamentos se tornaram perceptíveis para o caso da 'regra de três', quando ela é usada em situações escolares *genéricas* ou para fazer cálculos com a conta de água de cada aluno.

Tomaz (2007) apoia-se em referenciais de análise desenvolvidos a partir dos trabalhos de A. N. Leont'ev e Yrjö Engeström, que tomam a atividade humana como conceito chave. Como explicarei a seguir, considero que a perspectiva por ela adotada tem grande potencial para ampliar a nossa compreensão sobre a complexidade da atividade matemática, seja no contexto acadêmico, escolar ou do cotidiano, ou das suas relações.

Ainda na UFMG, vêm sendo realizadas várias pesquisas relacionadas com *práticas de numeramento*[6] sob orientação, ou em colaboração, com a professora Maria da Conceição Fonseca. Ela apresenta uma conceituação para *numeramento*, como "um conjunto de práticas em contextos específicos de uso, nos quais se fazem presentes necessidades, sentidos, valores, critérios, tanto quanto conhecimentos, registros, habilidades e encaminhamentos dos procedimentos matemáticos[7], sejam eles orais, sejam escritos" (Fonseca, 2010, p. 329). Algumas dessas pesquisas focam as relações entre práticas escolares e não-escolares de *numeramento*, e aí surgem indícios de alguns distanciamentos entre elas, mesmo que esse não tenha sido o objetivo principal da pesquisa[8].

---

[5] Ideias, procedimentos e práticas com um correspondente na matemática escolar, utilizados em situações do cotidiano das pessoas, fora da escola.

[6] Outros autores têm utilizado termos como numeracia, alfabetização matemática, etc., para se referirem a práticas que apresentam bastante proximidade com a ideia de numeramento.

[7] Entre esses procedimentos matemáticos, são considerados os de quantificação, ordenação, classificação, organização do espaço e das formas.

[8] Por exemplo, Faria relata que as professoras envolvidas em seu estudo e as atividades por elas propostas aos estudantes "provocam" a mobilização, em sala de aula, de práticas de *numeramento* não escolares, o

A questão em pauta, num cenário mais amplo

No ICMI Study 2010[9] vários capítulos tocam na questão e/ou aprofundam a discussão sobre a caracterização da matemática escolar. Entre eles, Sfard (2010) explica como os pesquisadores em educação matemática foram se afastando dos matemáticos profissionais e como o distanciamento entre as duas comunidades deve ser visto como um problema que requer atenção, em especial por parte dos primeiros. Apresenta dois exemplos que, segundo ela, mostram como educadores matemáticos e matemáticos profissionais avaliam atividades e materiais escolares de forma totalmente distinta, e acrescenta que as diferenças entre eles são tão grandes que não faz sentido pretender transformar as duas matemáticas que eles praticam em uma só. Ao contrário, diz que a única questão que deve ser colocada é se essa disparidade importa, e, se importar, o que deve ser feito para que ambos os lados convivam com ela, mantendo um diálogo frutífero. Do meu ponto de vista, a existência de uma maior clareza quanto às aproximações e distanciamentos entre a matemática escolar e acadêmica pode facilitar esse diálogo.

Esse também parece ser o ponto de vista de Steinbring (2010), que chama a atenção para a ambiguidade do termo 'matemática' no contexto didático e defende que as semelhanças e diferenças entre a matemática como disciplina científica e como disciplina escolar devem ser ressaltadas. Para isso, Steinbring explica que a perspectiva de investigação precisa ser ampliada, do 'corpo de conhecimentos' para as interrelações entre o conhecimento matemático e o contexto social. Conclui que, ao contrário da matemática científica, a matemática escolar é dependente de contextos de referência específicos que levam em consideração as experiências cotidianas dos estudantes e o seu desenvolvimento cognitivo anterior.

---

que lhe permite caracterizar três tipos de relação entre práticas de *numeramento* escolares e não-escolares: solidariedade (quando são identificadas aproximações entre ambas), questionamento (quando são percebidos conflitos e contradições entre elas) e paralelismo (quando as práticas se distanciam e funcionam de forma independente). (Faria, J. B. (2007). *Relações entre práticas de numeramento mobilizadas e em constituição nas interações entre os sujeitos da Educação de Jovens e Adultos*. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.). Nas suas duas últimas categorias encontram-se indícios do tipo de distanciamentos que me interessa discutir.

[9] Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Eds.) (2010). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. London: Kluwer.

Na outra direção, dos trabalhos que tocam nas relações entre a matemática escolar e do cotidiano, existe uma longa tradição de pesquisa no Brasil, desde os trabalhos de Ubiratan D'Ambrósio e todo o programa da Etnomatemática, passando pelas pesquisas que deram origem ao clássico da literatura na área "Na vida dez na escola zero", e mais recentemente os estudos sobre *numeramento*, já mencionados.

Štech (2008) parte de uma pergunta que também se coloca para nós: o que significa 'fazer matemática' em um dado contexto? Apoiando-se em Vygotsky e Leont'ev, ele vai discuti-la do ponto de vista epistemológico focando o contexto da escola e das práticas do cotidiano. Štech critica o fato da aprendizagem situada em contextos da vida prática ter sido colocada em um pedestal pelo discurso educacional das últimas décadas, diminuindo a importância da aprendizagem escolar. Defende que é papel da educação escolar, e só dela, criar rupturas e 'intelectualizar' as funções mentais de tal forma que níveis de conceituação abstrata possam ser alcançados: muda-se assim a atitude da criança perante o mundo, de meramente prática para epistêmica, o que lhe abre novos horizontes em outros domínios do conhecimento. Isto é, para Štech, a matemática escolar deve ir além do conhecimento prático, por processos (aparentemente não problemáticos) de generalização, abstração e 'intelectualização', para que cumpra sua função de desenvolvimento intelectual dos estudantes. Štech apresenta alguns exemplos para marcar diferenças epistemológicas entre o que considera como conhecimento escolar e conhecimento cotidiano, mas não toca nas relações entre essas duas formas de conhecimento e o conhecimento acadêmico, que por vezes parece identificar com o próprio conhecimento escolar (dito 'científico' descontextualizado).

Com olhares, pressupostos, e referenciais teóricos diferentes, todos esses trabalhos fornecem elementos para o aprofundamento da compreensão das relações entre os conhecimentos, saberes, práticas e atividades que podem ser identificadas como *matemáticas* nos diferentes contextos. Entretanto, julgo que ainda não se pode dizer que essas relações já estão claras para a maioria dos pesquisadores e educadores matemáticos. Creio poder afirmar que a maioria desses trabalhos tem focado mais nas *aproximações* entre a matemática que se faz nesses diferentes contextos do que nos seus *distanciamentos*. Penso ser esse o caso de trabalhos, como os que exploram as investigações matemáticas em sala de aula, de forte tradição em Portugal (Ponte, Brocado & Oliveira, 2005).

Concluindo, acredito que cabe dentro do nosso programa de pesquisas:

- um esforço para uma melhor caracterização do que pode ser considerado como matemática escolar, e
- um aprofundamento das relações entre a matemática escolar e a matemática acadêmica e do cotidiano, focado principalmente nos seus pontos de distanciamento e de conflito.

Cabe aqui registrar que não estou supondo que exista apenas *uma* forma de matemática escolar, evidentemente existem muitas. Isso não invalida o nosso esforço de tentar caracterizar melhor algumas dessas formas ou de procurar aspectos que sejam comuns a algumas delas. No caso da matemática acadêmica, parece existir um razoável consenso de que a visão dos matemáticos profissionais sobre o que é a matemática é relativamente estável (Sfard, 2010). Entretanto, tanto no caso da matemática escolar como do cotidiano, não há como evitar de ter que lidar com as suas variadas formas, associadas aos contextos específicos a que se referem.

Implicações para a formação de professores

Tradicionalmente, pelo menos no Brasil, tem-se considerado que o conhecimento matemático mais fundamental para a formação inicial dos professores é aquele que chamamos de conhecimento matemático acadêmico, abordado em disciplinas ditas de conteúdo específico. Outras formas de conhecimento matemático (como a usada no cotidiano, ou em outras áreas do conhecimento e profissões, bem como aquela específica da prática docente na educação básica) recebem uma ênfase menor, até mesmo em termos de carga horária, e são em geral abordadas em disciplinas das faculdades de educação, chamadas disciplinas integradoras.

Já existe uma vasta literatura voltada para a formação inicial e desenvolvimento profissional do professor de matemática onde essa tradição vem sendo questionada. Tanto em Portugal como no Brasil existem vários pesquisadores com trabalhos de grande relevância nessa área, como João Pedro da Ponte, Dario Fiorentini, entre outros. Uns, elegem os conhecimentos, saberes e desenvolvimento profissional dos professores como centro de suas atenções e utilizam, ou desenvolvem, categorias de análise que servem para estruturar a sua discussão. Outros olham para o fenômeno da educação matemática sob a perspectiva de uma prática social, ou tomando-o como um sistema complexo de atividades, em que a formação de professores está inserida.

Em muitos desses trabalhos, mesmo que esse não fosse seu objetivo, surgem indícios de tensões e distanciamentos entre os conhecimentos matemáticos a que os professores tiveram acesso em cursos de formação inicial e continuada, e os conhecimentos matemáticos que eles mobilizam e desenvolvem em sua prática docente. Desse conjunto de estudos, destaco os que tomam as práticas como ponto de partida para investigar os conhecimentos mobilizados e os saberes desenvolvidos pelos professores nessas práticas. Essas pesquisas destacam alguns saberes da prática dos professsores, mostrando como são saberes específicos, situados, que articulam várias componentes, como se pode ver nos trabalhos de Deborath Ball, Nadine Bednarz e Jérôme Proulx, entre outros. Explicitam, também, algumas tensões e distanciamentos entre as experiências matemáticas vivenciadas pelos professores nos cursos de formação inicial e continuada e as experiências vividas na sua prática docente (Proulx & Benarz, 2010), mas ainda de forma não muito organizada.

Assim, considero importante incluir dentro do nosso programa de pesquisa:

- mais estudos focados nesses indícios de distanciamentos entre as experiências matemáticas vivenciadas pelos professores nos cursos de formação e as experiências vividas na sua prática docente, investigando-os de forma mais sistemática e organizada.

Implicações para a prática docente: Exemplo de distanciamento e pontos de tensão entre uma atividade matemática escolar e a matemática do cotidiano

Tomaz (2007) utiliza a perspectiva histórico-cultural da Teoria da Atividade[10] para descrever a historicidade e complexidade de uma *atividade matemática escolar* com alunos de 13-14 anos de idade (7º ano de escolaridade). Os alunos participam de uma atividade que envolve resolução de problemas a partir da sua conta de água, como parte de uma Atividade Interdisciplinar sobre Água, desenvolvida conjuntamente por várias disciplinas. Na disciplina de matemática, a 'regra de três' era o assunto em estudo naquele momento, por isso era o procedimento supostamente indicado para a realização dos cálculos nos problemas propostos pela professora.

[10] Conceitos chave da Teoria da Atividade, como os de atividade, sistema de atividades, ações, operações, tensões, contradições, aprendizagem expansiva, serão usados nesta apresentação sem maiores explicações, com um significado mais livre, dadas as restrições impostas à dimensão deste texto.

Após ter solicitado que os alunos levassem para a aula a conta de água de cada um, a professora Telma propôs um trabalho para casa utilizando essa conta, e deu orientações sobre como encontrar no formulário da conta as informações para resolver os problemas propostos e sobre os procedimentos de cálculo a serem utilizados. Tomando sua própria conta como exemplo, efetuou os cálculos ressaltando o uso da 'regra de três' como o caminho para resolver os problemas propostos. Em casa, os alunos deveriam consultar suas contas de água e responder várias perguntas: número de dias de consumo, cálculo da média de consumo da família por dia, média de consumo por pessoa, média de consumo por pessoa, por dia.

Na data prevista para discussão em sala, muitos alunos relataram ter tido dúvidas no trabalho. Diante disso, a professora tentou centralizar a discussão na sua própria conta de água novamente, mas nesta aula ela não conseguiu manter essa estratégia. Cria-se uma tensão provocada pela presença simultânea de múltiplas ações e práticas do cotidiano (referenciadas em aspectos particulares da conta de água de cada aluno) ao mesmo tempo que a professora insiste para que eles utilizem ações características da matemática escolar (usar a conta da professora como uma conta genérica, da qual a conta de cada um seria um caso particular, e realizar os mesmos procedimentos em ambas), ao que os alunos resistem. Nesse momento, é possível 'decompor' a atividade em vários segmentos, marcados pelas ações dos sujeitos, alguns ocorrendo simultaneamente.

Fazendo uma retrospectiva da historicidade dessa atividade, percebemos (Tomaz, 2007; Tomaz & David, 2008) que em determinado momento ela está centrada na aplicação da 'regra de três' para cálculo da média de consumo diário, leitura do formulário (conta), transformação de unidades de medida e regras de arredondamento. De início, exige apenas saber extrair dados de um formulário (conta) e realizar um procedimento de cálculo usando um algoritmo previamente dado. Em seguida surge uma tensão, quando os alunos percebem que o resultado encontrado diverge do que está expresso no formulário. Isso gera grande discussão sobre as regras de arredondamento utilizadas pela Companhia das Águas e pelos alunos, impulsionando uma ressignificação da noção de arredondamento.

Outro momento é marcado pelas ações e discussões em torno da definição do número de pessoas ou consumidores de água de cada família, a ser usado no cálculo da média de consumo por pessoa. Este segmento foi protagonizado principalmente por uma aluna

que questionava como definir esse número, se os membros de sua família não permaneciam a mesma quantidade de tempo em casa. Também aqui são percebidos conflitos na definição do número de pessoas para calcular a média pretendida, impulsionando uma ressignificação desse número.

Outro momento, ainda, é marcado pela definição da natureza das grandezas intervenientes no cálculo do consumo médio diário, por pessoa, quando a professora abre uma discussão sobre o que é consumo. Nesse momento, os alunos precisaram redirecionar suas ações para a relação de proporcionalidade, e não mais para a manipulação de números e realização de cálculos com o algoritmo.

Tudo indica que, até o momento do cálculo da média diária de consumo por pessoa, os alunos resolviam os problemas sem tomar consciência das grandezas envolvidas nos cálculos, isto é, participavam da atividade no nível das ações. Entretanto, no decorrer da discussão, e principalmente quando são levados a pensar no significado da grandeza consumo, é possível perceber diferentes significados emergindo, mostrando que os alunos vão se movendo do nível das ações, de aplicação da 'regra de três', para o nível das operações, isto é, da determinação das grandezas que devem ser consideradas para efetuar o cálculo do consumo médio diário por pessoa. Consideramos que esse movimento, que leva os alunos a refletir criticamente sobre os procedimentos utilizados, pode ser visto como um *ciclo potencialmente expansivo de aprendizagem inovadora*[11].

Concluimos assim que ocorreu um movimento no sentido de uma expansão da compreensão da 'regra de três' por parte dos alunos. No primeiro momento, ela serve apenas para realizar os cálculos da conta de água, como um meio para calcular o consumo familiar, mas com o desenvolvimento da atividade ela passa a ser usada de forma mais reflexiva, associada à noção de proporcionalidade.

Acreditamos que um dos elementos que contribuiu para esta mudança foi a discussão ocorrida em sala, impulsionada por uma tensão entre procedimentos escolares e não escolares, que resultou na tomada de consciência das diferenças que existem entre eles por parte dos alunos e da professora. Embora não tenham chegado a uma explicitação clara de quais são exatamente essas diferenças, os alunos e a professora declaram que as diferenças existem.

---

[11] Engeström, Y. & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review, 5*, 1-24.

Entrevista com Telma:

39. V: todos os alunos que eu entrevistei disseram que é diferente...
40. Telma: aplica-se a regra de três no cotidiano...mas não pode ser regra de três porque regra de três é uma coisa que eles fazem na escola...eu acho que pode estar havendo esta distância...escola é escola...minha casa é minha casa...a rua é a rua...então o que eu faço lá no supermercado...não é o que eu faço na escola...é uma regra de três lá no supermercado...mas não é a da escola...porque escola é escola...

Entrevista com Cássia:

29. V: muda alguma coisa no que você já sabia de regra de três quando você faz para calcular conta de água?
30. Cássia: ah:: mais ou menos...porque assim já está olhando [na conta] tudo que tem que medir direitinho...o que a gente gasta...assim...acho que muda um pouquinho...por causa que...igual você falou...real da gente mesmo...porque antes não era né?...era normal tipo um problema assim...então acho que tinha até os números iguais...mas acho que foi diferente...
31. V: você acha que a regra de três aqui é diferente daquela regra de três dos probleminhas lá?
32. Cássia: eh:: porque aqui você fica mais ligada assim...mais assim para poder fazer...saber quanto que é...

Neste caso, os procedimentos não-escolares afloraram independentemente de uma provocação direta por parte da professora, eles surgiram em decorrência da situação proposta. Essa situação - analisar a conta de água de cada um - apesar de ter sido "transportada" para dentro da sala de aula, acredito que seja o mais próxima possível daquilo que se pode chamar, na escola, uma *situação do cotidiano dos alunos*.

Desde que haja um mínimo de abertura para que os alunos se manifestem, sempre que situações do cotidiano forem "levadas" para a sala de aula, o professor certamente terá que lidar com as tensões provocadas pelos distanciamentos existentes entre procedimentos e práticas do cotidiano (inevitavelmente trazidos pelos alunos) e os escolares. Assim, parece-me claro que é desejável que o professor se prepare para trabalhar com essas tensões, não as ignorando, mas enfrentando-as, de forma a contribuir para a expansão de significados pelos alunos, como no exemplo apresentado.

Quanto aos distanciamentos entre a matemática acadêmica e escolar, a sua importância na formação e para a prática docente impõe-se de outra forma. Neste caso, as tensões que eles provocam são vividas principalmente pelos professores, no confronto entre a sua formação e a prática docente, e podem impulsionar, ou não, uma expansão dos

saberes dos professores. Para que as tensões impulsionem essa expansão, é fundamental que o professor tome consciência delas e as enfrente.

Isso me leva a acrescentar ao nosso programa de pesquisas mais um aprofundamento de estudos:

- refletindo sobre os distanciamentos e tensões entre a atividade matemática escolar e elementos da atividade matemática do cotidiano, percebidos na prática de sala de aula pelo professor e pelos alunos (explorando o potencial do referencial de análise utilizado por Tomaz (2007)), e
- refletindo sobre os distanciamentos e tensões entre a atividade matemática escolar e a formação acadêmica, que o professor percebe em sua prática docente (como M.C. Ferreira propõe).

Considerações finais

Se passarmos a considerar o sistema de atividades do ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica, que envolve as três atividades a que venho me referindo (atividade matemática acadêmica, escolar e do cotidiano), nele certamente surgem muitas tensões, principalmente quando se procura fazer articulações entre elas. Como se viu no exemplo, as tensões entre a atividade matemática escolar e do cotidiano afloram quase inevitavelmente na sala de aula mas, aparentemente, elas se tornam menos problemáticas neste caso. Apesar de não existir ainda um estudo que considero muito aprofundado dos distanciamentos entre essas duas atividades, já existe uma vasta produção científica que discute algumas relações entre elas[12]. Por outro lado, em determinadas situações, quando confrontados com essas tensões em sua prática, alguns professores acabam desenvolvendo saberes práticos para contornar e/ou confrontar essas tensões de forma produtiva em termos da aprendizagem dos alunos, como parece ter ocorrido no caso de Telma. Acredito que isto se torna mais fácil para aqueles professores que trabalham com os primeiros anos de escolaridade, tendo em vista a maior proximidade dos conteúdos previstos para esses anos com a matemática do cotidiano.

[12] Parte dessa produção já está sendo discutida, principalmente com os professores dos anos iniciais, nos cursos de Pedagogia.

Entretanto, os distanciamentos entre a matemática acadêmica e escolar têm sido menos discutidos na literatura e na formação inicial dos professores, pelo menos no Brasil. Considero isto problemático quando, na escola, por ausência dessa discussão, alguns professores tendem a se aproximar excessivamente dos valores e padrões de rigor da matemática acadêmica e poucos alunos conseguem atribuir-lhes algum significado, ou passam a negar essa forma de se conhecer matemática e trabalham apenas com um certo conjunto de procedimentos, tipicamente escolares, que também não fazem muito sentido para os alunos.

Nesta conferência fiz opção por destacar os distanciamentos entre essas diferentes formas de se conhecer matemática, em vez das aproximações, não por negar que existam aproximações, ou por considerar que elas sejam menos importantes de pesquisar, mas por acreditar que elas têm sido menos evidenciadas nas pesquisas do que as aproximações, e que a explicitação desses distanciamentos e tensões é importante para uma melhor caracterização daquilo que chamamos matemática escolar, e pode contribuir para um diálogo mais frutífero entre os educadores matemáticos e os matemáticos profissionais. Pode fornecer elementos importantes, também, para um melhor redimensionamento das componentes relativas à formação matemática na licenciatura, como propõe Moreira (2004), e para que os professores desenvolvam práticas em que as tensões provocadas por esses distanciamentos possam ser enfrentadas, em vez de simplesmente ignoradas.

Referências bibliográficas

Fonseca, M. C. (2010). Matemática, cultura escrita e numeramento. In M. Marinho & G. T. Carvalho (Orgs.), *Cultura escrita e letramento* (pp. 321-335). Belo Horizonte: Editora UFMG.

Moreira, P. C. (2004). *O conhecimento matemático do professor: Formação na licenciatura e prática docente na escola básica*. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.

Moreira, P.C., & David, M.M. (2005). *A formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica.

Moreira, P.C., & David, M.M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 23-40.

Ponte, J. P., Brocado, J., & Oliveira, H. (2005). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Proulx, J., & Benarz, N. (2010). Enhancing teachers' mathematics of their practice: A professional development project. In M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 65-72). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Sfard, A. (2010). The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing? In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 491-511). London: Kluwer.

Štech, S. (2008). School mathematics as a developmental activity. In A.Watson & P. Winbourne (Eds.), *New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education* (pp. 13-30). New York: Springer.

Steinbring, H. (2010). Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 513-526). London: Kluwer.

Tomaz, V. S. (2007). *Prática de transferência de aprendizagem situada em uma atividade interdisciplinar*. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.

Tomaz, V. S., & David, M. M. (2008). *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

UMA LINHA DE DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO MENTAL: COMEÇANDO NO 1.º ANO E CONTINUANDO ATÉ AO 12.º ANO

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joana.brocardo@ese.ips.pt

A indicação curricular de focar particular atenção no ensino do cálculo mental não é recente. No entanto, ao nível da prática escolar, parece ainda difuso o modo como pode ser planeado o desenvolvimento do cálculo mental desde o 1º ano até 12º ano.

Esta conferência parte da análise de episódios que ilustram o modo como crianças e adultos calculam (ou não) mentalmente para propor um conjunto de princípios orientadores para o desenvolvimento sistemático e continuado do cálculo metal dos alunos do Ensino Básico e Secundário. Discute-se, ainda, a estreita relação entre o desenvolvimento do cálculo metal e a compreensão e uso inteligentes de conhecimentos sobre números e relações matemáticas.

PERGUNTAR, OUVIR E RESPONDER:
UMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO INICIAL

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP
rferreir@fc.up.pt

Esta comunicação gira em torno de um estudo em que se procurou descrever e compreender a evolução dos modos de ensino de quatro professores estagiários (Tomás Ferreira, 2005). De forma muito resumida, os modos de ensino englobam as práticas inter-relacionadas de o professor questionar, ouvir e responder aos alunos em contexto de sala de aula. Os modos de ensino estão relacionados com as concepções dos professores acerca do que é ensinar e aprender matemática, com os seus níveis de pensamento reflexivo e com os padrões de interacção predominantes nas suas salas de aula. Foram considerados três modos de ensino: avaliativo, interpretativo e gerador.

O estudo seguiu uma metodologia de investigação qualitativa e foi centrado numa experiência de formação (Simon, 2000) inicial de professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Com base em desenvolvimentos teóricos no campo da Educação Matemática, foi construído um quadro conceptual que guiou todo o processo de recolha e análise de dados. Contudo, o próprio quadro conceptual foi objecto de escrutínio no que respeita à sua adequabilidade para analisar e interpretar aspectos do ensino da Matemática em contexto de sala de aula, com o objectivo último de melhorar as aprendizagens dos alunos nesta disciplina. Os modos de ensino constituíram, assim, uma trajectória hipotética de desenvolvimento profissional. Ao longo dos quatro ciclos de recolha e análise de dados, foram gerados relatos de prática (Simon & Tzur, 1999) de cada um dos participantes com o objectivo de descrever as suas práticas actuais e de promover de forma sustentada o desenvolvimento dessas práticas, em sintonia com as actuais recomendações para o ensino da Matemática.

É minha intenção dar a conhecer alguns resultados do estudo e discutir o que pode levar um professor estagiário a seguir determinadas trajectórias e não outras. Tentarei igualmente levantar algumas questões para futura investigação.

Referências

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335 – 359). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.

Simon, M., & Tzur, R. (1999). Explicating the teacher's perspective from the researchers' perspectives: Generating accounts of mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(3), 252 – 264.

Tomás Ferreira, R. A. (2005). *Portuguese student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment*. Unpublished Doctoral Dissertation. Illinois State University, Normal, IL, USA.

SIMPÓSIO 1

ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS E ÁLGEBRA

SIMPÓSIO 1 – ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS E ÁLGEBRA

Ema Mamede
CIEC, Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Hélia Oliveira
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

O Simpósio "Ensino e aprendizagem do número e álgebra" do XXII SIEM procura possibilitar a discussão e divulgação de trabalhos de investigação desenvolvidos nestes domínios. No âmbito do ensino e aprendizagem do número, este simpósio conta com contribuições diversificadas, nacionais e estrangeiras, que incluem trabalhos de investigação realizados em vários níveis de ensino, desde o pré-escolar ao ensino superior. Esta diversidade traduz uma pluralidade de interesses e de projectos de investigação que se procura que resultem no enriquecimento do simpósio. No âmbito do ensino e aprendizagem do número, os trabalhos centram-se mais em torno da aprendizagem dos alunos do que do ensino, sendo poucas as comunicações focadas no professor. As contribuições sobre a aprendizagem dos alunos permitiram distinguir seis grandes grupos: *resolução de problemas*, que contempla trabalhos sobre estratégias de resolução e sobre o cálculo mental, ambos envolvendo alunos dos níveis elementares de ensino (1.º e 2.º ciclos); *operações elementares da aritmética*, que integra contribuições sobre o raciocínio aditivo e multiplicativo em crianças do pré-escolar e a aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, com alunos do 3.º ano de escolaridade; *desenvolvimento do sentido de número racional*, que contempla trabalhos sobre a compreensão da construção das partes e a reconstrução da unidade por alunos do 5.º ano de escolaridade, sobre a noção de dízima finita de alunos do 9.º ano e um outro centrado no conhecimento de alunos do 5.º ano sobre percentagem; *jogo*, como catalisador da construção do conceito de número no pré-escolar; e ainda o conceito de número, que ganha expressão através de um trabalho, realizado com alunos de uma licenciatura em Matemática, centrado neste conceito e de outro focado na abordagem filosófica e epistemológica do conceito de número real.

As contribuições sobre o ensino do número, centradas no professor, são duas. Uma aborda as conexões matemáticas, em que o conceito de medida é utilizado para promover a formação do conceito de número, no âmbito de um curso de formação contínua, com professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio. Outra reporta-se a parte de um estudo mais amplo sobre o ensino de fracções, abordando o conhecimento dos significados de fracção de professores do 1.º ciclo do Ensino Básico.

Também no que diz respeito à temática do ensino e aprendizagem da álgebra, há uma quase total incidência dos trabalhos na aprendizagem dos alunos. Podemos identificar, entre as comunicações que se centram no domínio da aprendizagem, alguns temas principais. O primeiro destes é o trabalho em torno das *regularidades e sequências* no 1.º ciclo (1.º e 2.º anos) mas também no início do 3.º ciclo. Nestas comunicações, tal como numa outra que incide sobre a exploração de regularidades numéricas e das propriedades das operações no 4.º ano, é dado destaque à problemática da *generalização* com alunos de níveis elementares. Outro tema bastante presente no conjunto das comunicações são as *representações* na aprendizagem da Matemática, em particular, quando os alunos usam tecnologia (por exemplo, o Geogebra), quer no ensino básico como no secundário. Destaca-se também a *resolução de problemas* como um dos temas fortes deste Simpósio, ao analisar-se a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos ao resolverem determinado tipos de problemas, ou ainda a actividade matemática em torno de problemas históricos, no ensino básico. A *transição do ensino secundário para o superior* é um outro tema presente, embora apenas numa comunicação e que incide sobre o ensino das derivadas.

Por fim, a única contribuição na temática do ensino da álgebra, situa-se no campo da formação inicial de professores. Incide, por um lado, na aprendizagem de conceitos algébricos pelo futuro professor e, por outro, no conhecimento sobre situações que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos dos níveis elementares.

Através da publicação dos trabalhos em actas procuramos apresentar e partilhar parte da actividade deste Simpósio, tendo consciência de que apenas podemos ilustrar, parcialmente, a riqueza do trabalho desenvolvido, ficando de fora os comentários e os debates que ocorreram, apenas vividos por aqueles que estiveram presentes.

Esperamos que este simpósio contribua para a continuidade da investigação em educação matemática, despertando ideias e suscitado questões relevantes para o desenvolvimento de e aprofundamento da investigação nesta área, em Portugal.

Resta-nos agradecer à comissão organizadora deste seminário que em muito contribuiu para o sucesso deste simpósio e tornou possível a elaboração atempada desta publicação como marco de mais um Seminário de Investigação em Educação Matemática.

PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE: GENERALIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Teresa Ramos
Agrupamento de Escolas da Boa Água
teresa.ramos@gmail.com

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
ana.boavida@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

É inquestionável a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Neste âmbito, a exploração de sequências é um meio privilegiado de promover o pensamento funcional, permitindo a expressão de generalizações em linguagem natural. Neste texto analisa-se a actividade de alunos do 2.º ano numa tarefa de exploração de uma sequência crescente. Os resultados indiciam que a maior parte resolve com facilidade questões de generalização próxima usando estratégias de representação e contagem. Nas de generalização distante sentem mais dificuldades e recorrem a outras estratégias resultantes da forma como visualizam as figuras da sequência.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Generalização, Pensamento funcional, Sequências.

Introdução

Considera-se, actualmente, que a álgebra é, sobretudo, um modo de pensar, um método para ver e expressar relações que proporciona instrumentos poderosos para entender o mundo e que, por isso, deve ser um dos objectivos a privilegiar em todos os níveis de ensino (Kieran, 2007). Esta ideia encontra eco nas actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática. Em Portugal, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), salienta que é essencial desenvolver o pensamento algébrico desde os primeiros anos, o que pressupõe a realização de actividades de observação, descrição e construção de sequências numéricas e/ou pictóricas, a identificação e descrição de relações e a generalização de regularidades. A nível internacional, o NCTM(2007) considera a álgebra como um tema transversal, sublinhando o seu potencial no estabelecimento de relações com outros temas matemáticos. A introdução das ideias

algébricas no 1.º ciclo do ensino básico é, assim, um tema integrador que traz significado, profundidade e coerência ao currículo.

Esta comunicação, que se insere num estudo mais amplo, tem como objectivo analisar estratégias de generalização usadas por alunos do 2.º ano de escolaridade numa tarefa de exploração de uma sequência crescente, bem como os tipos de generalização e dificuldades que emergem do seu trabalho.

Pensamento algébrico nos primeiros anos

Existe algum consenso em torno da ideia de que o pensamento algébrico se manifesta e desenvolve quando os alunos estabelecem generalizações a partir da observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas e expressam essas generalizações usando recursos diversos, nomeadamente a linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos (Kaput, 2008).

Nos primeiros anos de escolaridade é através do estudo de sequências, regularidades e padrões, bem como das relações numéricas associadas aos números, operações e suas propriedades, que se favorece a iniciação ao pensamento algébrico, valorizando-se duas das três vertentes consideradas por Kaput (2008): a álgebra como aritmética generalizada e a álgebra como o estudo das funções, relações e (co)variação.

A álgebra como aritmética generalizada baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética que, se for explorado explicita e sistematicamente, permite expôr a sua generalidade; o pensamento funcional envolve a generalização através da ideia de função encarada como a descrição da variação (Canavarro, 2009). Este pensamento inicia-se, amiúde, com a generalização de padrões, estabelecendo conexões entre padrões geométricos e numéricos para descrever relações funcionais.

Ponte, Branco e Matos (2009) consideram quatro tipos de sequências: *pictóricas*, *numéricas*, *repetitivas* e *crescentes*, sendo esta a nomenclatura adoptada neste texto. Os autores sublinham que, nos primeiros anos de escolaridade, é importante que os alunos, de forma articulada com o desenvolvimento do sentido de número, elaborem sequências numéricas e pictóricas de acordo com uma dada lei de formação e as generalizem usando linguagem natural.

Quando, no ensino básico, se pretende que a álgebra esteja num plano central, há três aspectos que, segundo Darrel e Balti (2008), importa ter em conta: utilizar expressões

numéricas não resolvidas que permitem a análise dos números e operações; estender o problema a números grandes para que os alunos considerem a relação entre entradas e saídas; e utilizar contextos representacionais – interacções e discursos construídos em torno de uma representação específica. Este último aspecto remete para a importância de se dedicar uma atenção especial a diversos modos de representar ideias e conceitos matemáticos bem como às conexões entre representações. Neste âmbito, Tripathi (2008) salienta a relevância de se considerarem representações concretas, verbais, simbólicas, contextuais e visuais de modo a retratar os vários aspectos de um conceito. Nas representações visuais inclui "formas como tabelas ou diagramas organizados, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas ou em movimento, e "word pictures" (a descrição em palavras do que estamos a tentar fazer)" (p. 440).

Um aspecto central do pensamento algébrico é a generalização que envolve a extensão deliberada do raciocínio ou comunicação para além do(s) caso(s) considerado(s), identificando e expondo explicitamente o que é comum, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e as relações através de e entre eles (Canavarro, 2009, cit. Kaput).

Focando-se nos primeiros passos para a generalização em sequências de crescimento pictóricas, Ursini (1991, cit. Mason et al.) refere quatro etapas: "ver" – apreender mentalmente um padrão ou uma regularidade; "dizer" – articular a percepção em palavras; "gravar" – utilizar símbolos para formular a generalização; e "testar" – verificar a validade da formulação. Para generalizar, as crianças precisam de compreender que existem duas representações da mesma situação (a visual e a numérica), ser capaz de passar de uma representação para outra, apreender a regra de crescimento evidenciada em ambas e perceber que se trata da mesma regra. Quando conseguem construir uma nova representação que identificam com a original, facilita-se a descoberta de regularidades que permitem expressar a generalização.

Quanto ao tipo de generalização, Stacey (1989) distingue a próxima e a distante. A "generalização próxima" remete para uma questão que pode ser resolvida passo a passo por desenho ou contagem; a "generalização distante" refere-se a questões que vão além dos limites práticos razoáveis de uma abordagem passo a passo. A autora identifica quatro métodos de generalização:

- *De contagem* – contar a partir de um desenho;
- *Da diferença* – calcular a diferença entre dois termos consecutivos e assumir implicitamente que a adição sucessiva de um mesmo número (a diferença) se traduz num termo geral que é múltiplo desse número;
- *Do objecto inteiro* – assumir que um termo de uma dada ordem é múltiplo de um termo de ordem inferior;
- *Linear* – reconhecer que tanto a multiplicação como a adição estão envolvidas e que importa considerar a ordem das operações, ou seja, usar implicitamente, um modelo linear.

Estes métodos têm significativas semelhanças com as estratégias de generalização referidas por Ponte, Branco e Matos (2009), embora estes autores usem, por vezes, designações e caracterizações um pouco diferentes.

Metodologia

Este estudo, de cunho interpretativo, foi realizado no âmbito de uma experiência de ensino. Os participantes são 25 alunos de uma turma do 2.º ano de escolaridade, composta por 13 rapazes e 12 raparigas, entre os 7 e os 9 anos.

Neste texto analisar-se-á o modo como os alunos resolveram a tarefa *As mesas do restaurante da Carolina* (anexo I). Foram analisados os documentos produzidos pelos alunos e a gravação em vídeo das duas aulas em que a tarefa foi explorada. A investigadora (primeira autora) assumiu o papel de observadora-participante, coadjuvando e apoiando a professora titular da turma. Em algumas ocasiões desempenhou o papel de professora, uma medida que foi acordada.

A experiência de ensino decorreu em 2010/11, em 14 aulas de 90 minutos cada, nas quais foram exploradas 12 tarefas organizadas numa sequência previamente preparada com a professora. Num primeiro momento (26 Nov. a 7 de Dez.), foram apresentadas 5 tarefas com as quais se pretendeu trabalhar aspectos do pensamento relacional. No segundo momento (26 Jan. a 15 de Mar.), foram exploradas 7 tarefas com sequências, pretendendo-se trabalhar aspectos do pensamento funcional e da generalização. O presente texto incide apenas nos dados referentes ao segundo momento.

Ao se propor a tarefa *As mesas do restaurante da Carolina*, os alunos já tinham analisado sequências pictóricas crescentes, identificado regularidades com base na

análise de representações visuais e tentado generalizar, exprimindo as regularidades em linguagem corrente. No anexo II apresentam-se as tarefas exploradas anteriormente a esta e respectivos objectivos.

As mesas do restaurante da Carolina

A exploração desta tarefa decorreu em duas fases: uma em que os alunos trabalharam sobretudo individualmente; outra em que se analisou e discutiu colectivamente o trabalho realizado, visando a explicação das expressões encontradas e a formulação de generalizações. Neste texto serão objecto de análise as produções escritas dos alunos, realizadas durante a fase de trabalho individual, recorrendo-se pontualmente a episódios de sala de aula para ilustrar os seus raciocínios.

O enunciado da tarefa tem 8 questões que, no seu conjunto, permitem trabalhar os aspectos indicados por Darrel e Balti (2008), anteriormente referidos.

Apresentação da tarefa

A professora (P) começa por chamar a atenção para a primeira figura e pergunta quantas mesas e cadeiras a compõem e como estão dispostas. Este foi o mote para os alunos explicarem diferentes processos de contagem:

Episódio 1

P: Como estão dispostas as cadeiras?
CPP: Uma em cada ponta.
G: Uma em cima, uma em baixo, uma no lado direito, uma no lado esquerdo.

(...)

P: Explica como é que contaste?
T: É uma conta 3 + 1
P: Três mais um como?
T: Pus uma no lado esquerdo, uma no lado de cima e outra do lado de baixo, é 3 e juntei uma do lado direito.
P: Eu ainda queria outra maneira diferente... Margarida!
MC: Na de baixo... separámos a mesa e pusemos mais uma cadeira.

(...)

RR: Eu pus 2 em recta e 2 deitadas

Como é visível no episódio, a professora tenta focar a atenção dos alunos nas representações visuais e incentivar a sua análise, aspecto essencial para que posteriormente consigam generalizar. Constata-se que muitos descobrem processos de

contagem eficazes, associados à figura. Pouco depois os alunos são encaminhados para o trabalho individual.

Análise da actividade dos alunos

Questões 1 e 2. Pretendia-se que os alunos analisassem as figuras apresentadas e descrevessem o processo de contagem do número de cadeiras. Cinco, apesar de traçarem linhas a unir cadeiras, contam-nas, uma a uma, a partir da representação visual (fig. 1).

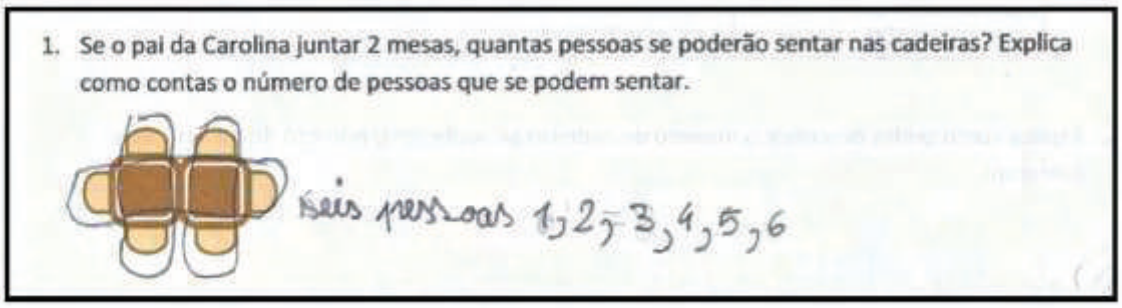


Fig. 1 – Resolução da questão 1 (JJ)

Cerca de 19 alunos recorrem a estratégias de contagem baseadas na visualização e interpretação da figura, sendo possível distinguir quatro processos de contagem diferentes.

1. Cinco retiram cadeiras na zona em que as mesas se unem, as mesas dos extremos ficam com três e as interiores com duas (figs. 2 e 3).

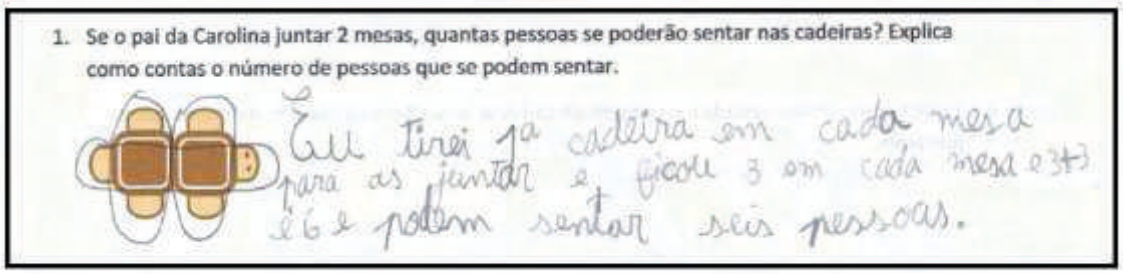


Fig. 2 – Resolução da questão 1 (RA)

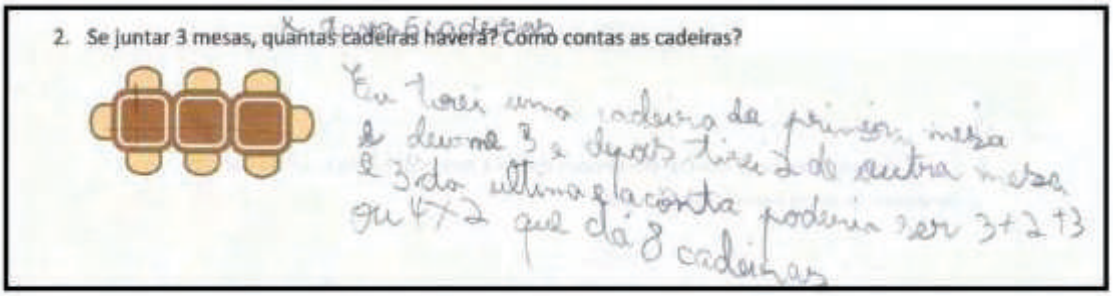


Fig. 3 – Resolução da questão 2 (MC)

2. Cerca de onze agrupam as cadeiras em três linhas: a de cima; a de baixo; e a do meio, formada pelas cadeiras dos lados (figs. 4 e 5).

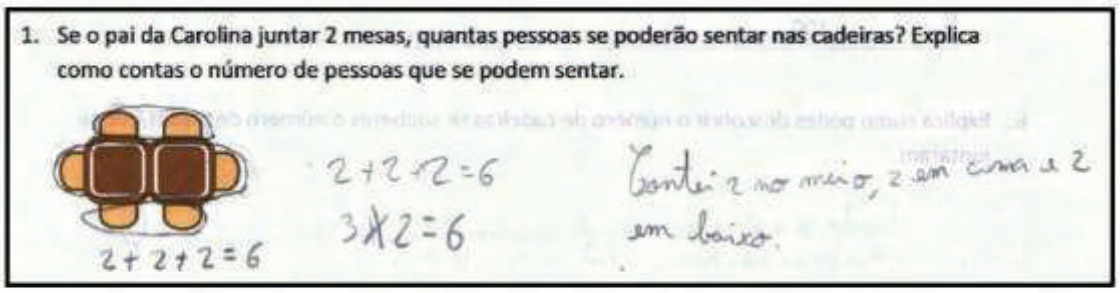


Fig. 4 – Resolução da questão 1 (G)

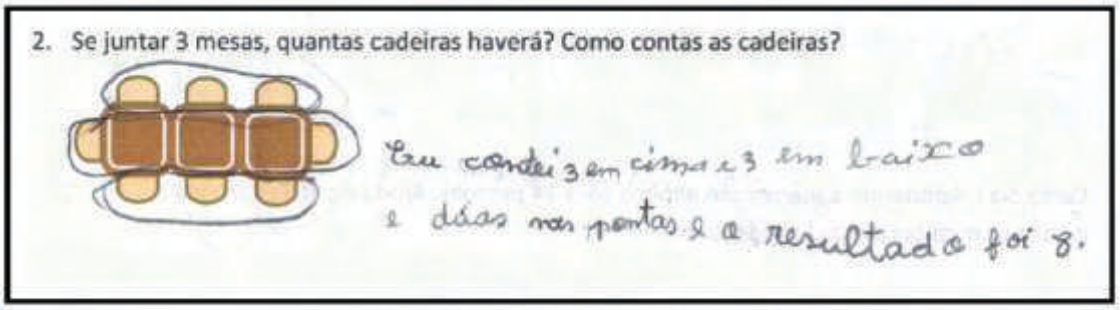


Fig. 5 – Resolução da questão 2 (RR)

3. Um utiliza um processo semelhante ao anterior, mas sem agrupar as duas cadeiras laterais (fig. 6).

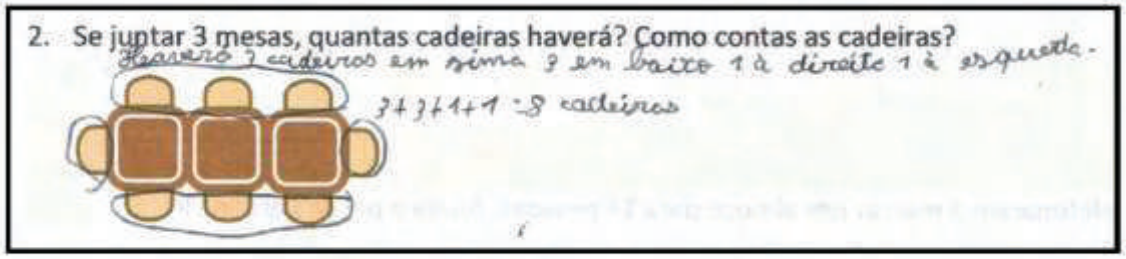


Fig. 6 – Resolução da questão 2 (MA)

4. Três consideram que cada mesa tem duas cadeiras, uma em cima e outra em baixo, a que acrescem as laterais (fig. 7).

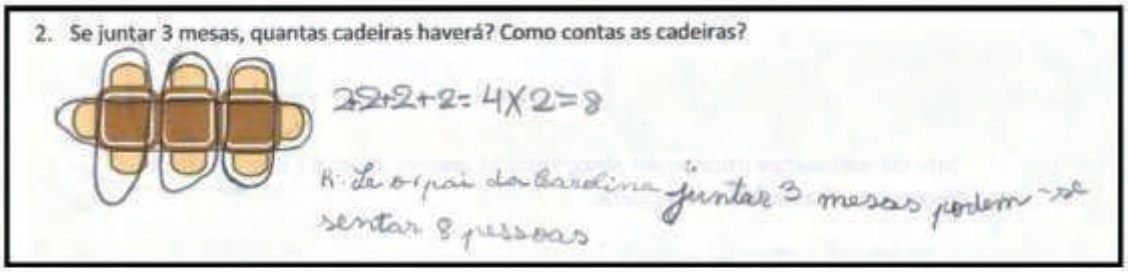


Fig. 7 – Resolução da questão 2 (CPP)

Nestas duas questões apenas um aluno apresenta uma resposta incompreensível, pelo que não foi possível classificá-la.

Questões 3 e 4. Pretendia-se que os alunos estabelecessem relações entre o número de cadeiras e o número de mesas com base nas figuras visualizadas nas questões anteriores, transferindo essas relações para as novas situações. Três respondem sem desenhar as figuras, embora refiram um processo de contagem associado a uma imagem mental, resultante da forma como visualizaram a disposição das cadeiras nas questões anteriores (figs. 8 e 9).

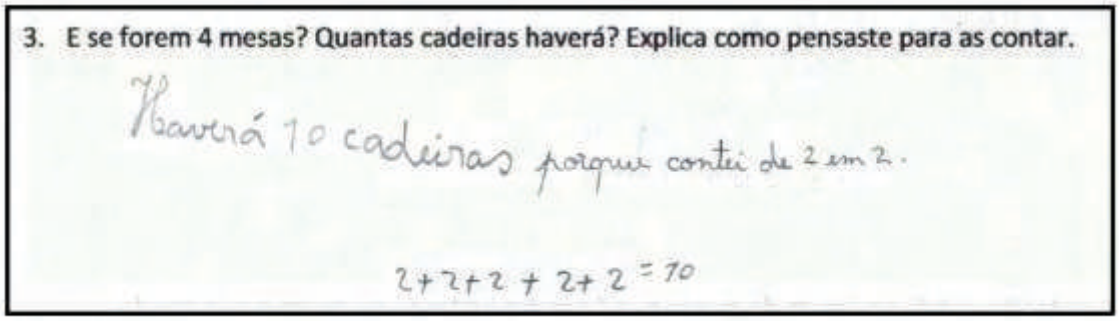


Fig. 8 – Resolução da questão 3 (G)

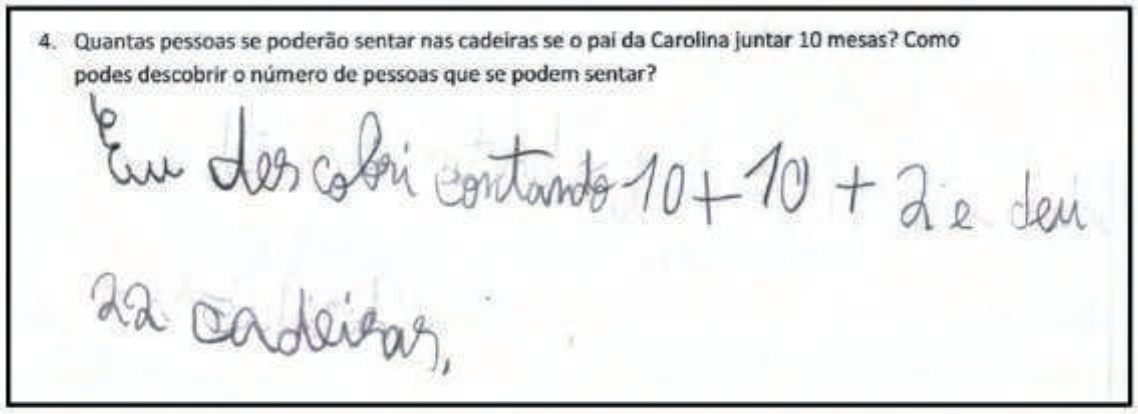


Fig. 9 – Resolução da questão 4 (LF)

Os restantes alunos recorrem a processos de representação e contagem, desenhando primeiro a figura representativa da situação. Vários mantiveram o processo usado nas duas primeiras questões, mas três substituem-no por outro mais eficaz. Entre estes estão MC e RA. Na figura 10 pode observar-se como MC, apesar de descrever o processo de contagem anterior (retirar as cadeiras na união das mesas), recorre a uma representação com simbologia matemática que traduz os pares de cadeiras existentes.

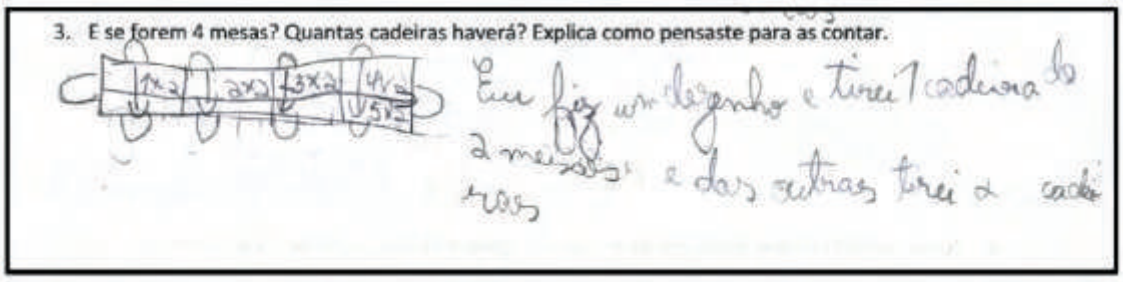


Fig. 10 – Resolução da questão 3 (MC)

Na questão 4 já só adopta o processo mais eficaz. Apesar da sua estratégia ser muito apoiada nos contornos visuais da figura, faz a ponte entre o que visualiza e conhecimentos anteriores, apercebendo-se que pode recorrer aos múltiplos de 2 e à tabuada (fig. 11).

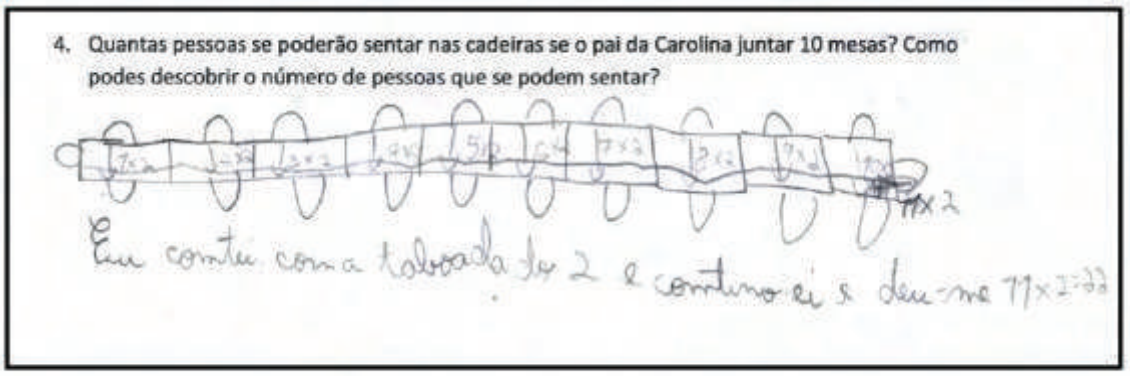


Fig. 11 – Resolução da questão 4 (MC)

RA, que na questão 3 mantém o processo de contagem usado nas primeiras questões, na 4 recorre a outro processo resultante de uma nova forma de visualizar a disposição das cadeiras, que aparenta ser mais facilitador, e agrupa-as em linhas horizontais. A figura 12 mostra a sua descrição do processo, a representação visual e os cálculos que faz.

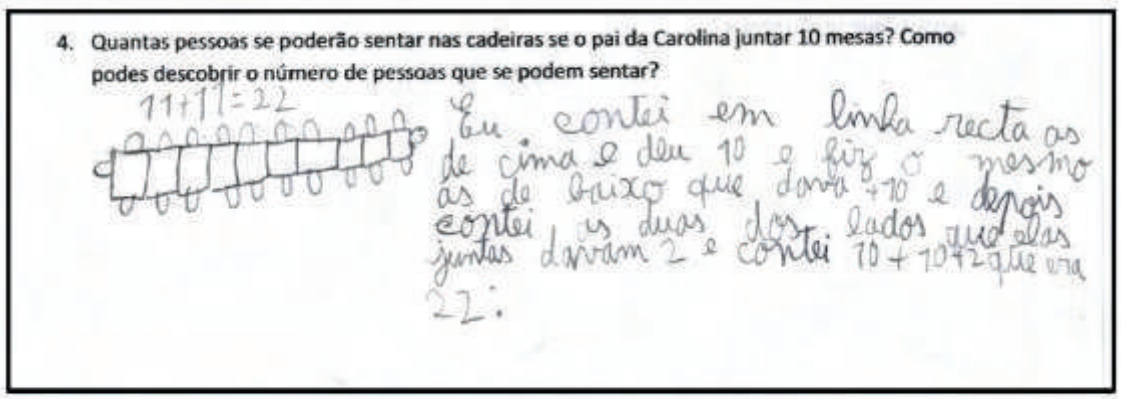


Fig. 12 – Resolução da questão 4 (RA)

Nas quatro primeiras questões, quase todos os alunos recorrem a explicações geométricas no sentido atribuído por Stacey (1989), que tem a ver com a disposição no

plano dos elementos que constituem a figura – representação visual – por vezes associadas a cálculos. Bastantes identificam um padrão de crescimento na sequência pictórica e alguns associam-lhe uma regularidade numérica, exprimindo uma relação entre o número de cadeiras e o de mesas. Na figura 13 é evidente o raciocínio proporcional efectuado por G e o reconhecimento da necessidade de acrescentar duas cadeiras, ou seja, utilizando uma estratégia linear esboça a lei de formação.

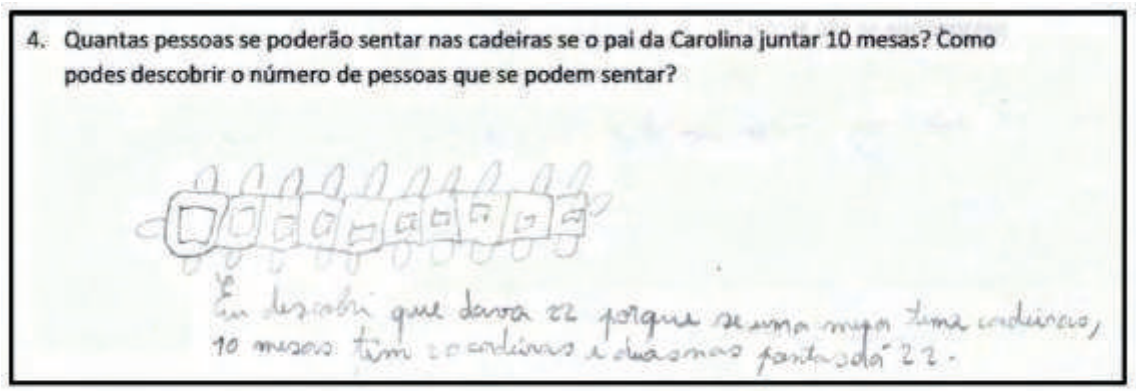
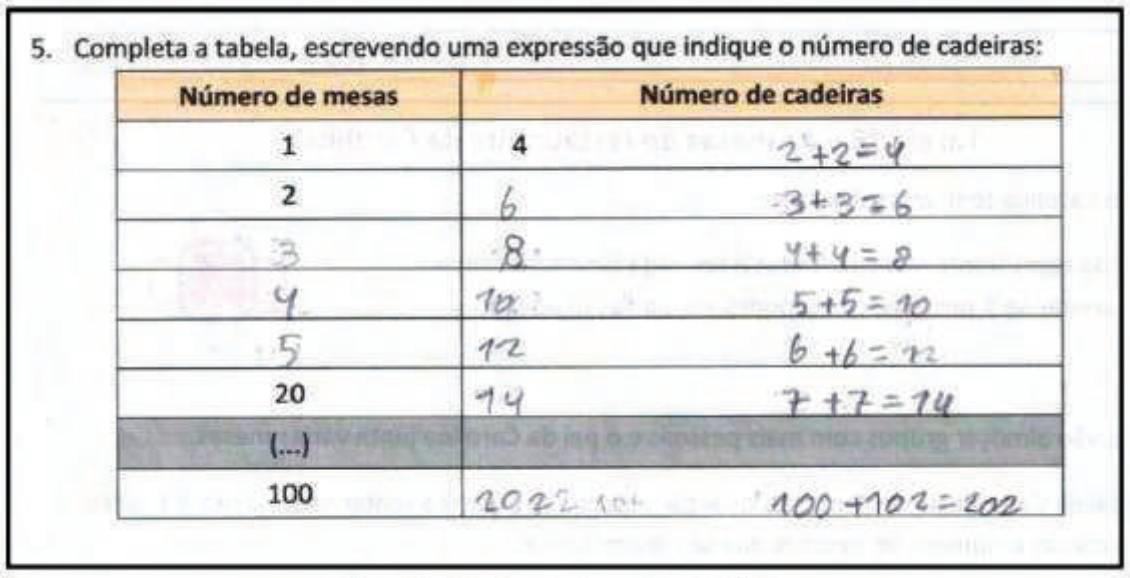


Fig. 13 – Resolução da questão 4 (G)

Questão 5. Solicitava-se o preenchimento de uma tabela, registando o nº de mesas e o de cadeiras. Pretendia-se, ainda, que os alunos escrevessem uma expressão para o número de cadeiras, visando facilitar a identificação da relação funcional entre as duas variáveis em jogo e enunciar a generalização. No entanto, a maior parte revela dificuldade em compreender o que se pretende. Com efeito, registam decomposições diversas dos números sem atender ao padrão visualizado (fig. 14). Outros limitam-se a indicar o número de cadeiras evidenciando uma estratégia da diferença, resultante de uma abordagem recursiva: "Contamos sempre de 2 em 2" (LF).

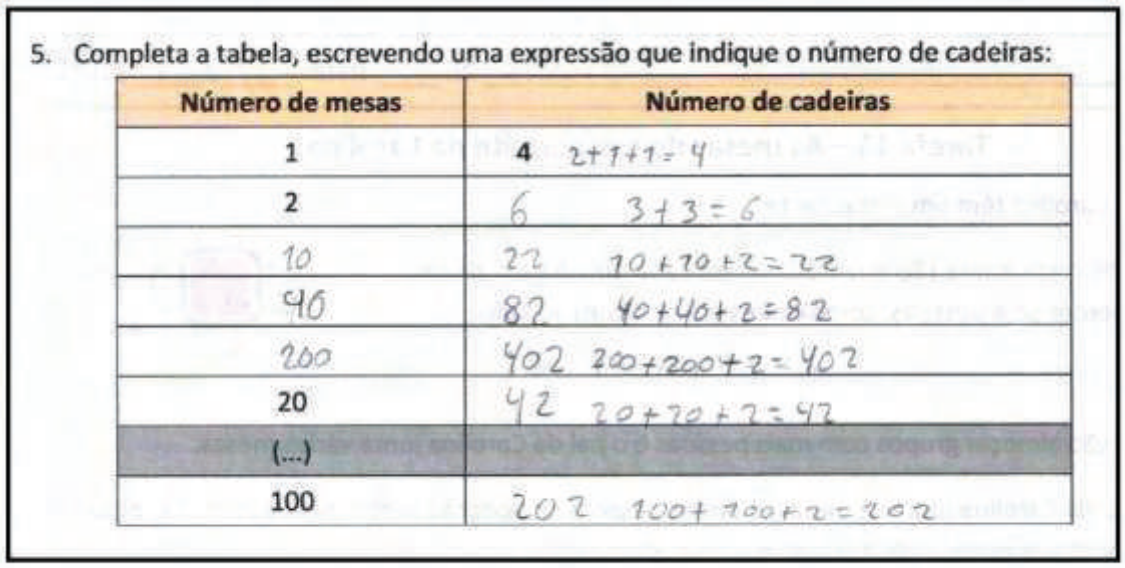


5. Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4 2+2=4
2	6 3+3=6
3	8 4+4=8
4	10 5+5=10
5	12 6+6=12
20	14 7+7=14
(...)	
100	202 100+102=202

Fig. 14 – Resolução da questão 5 (CPP)

Apenas duas alunas (G e MC) completam a tabela com expressões que traduzem a forma como contaram apoiada na representação visual das primeiras figuras da sequência. G, após alguma hesitação inicial, opta por expressões do tipo n + n + 2 (fig. 15).

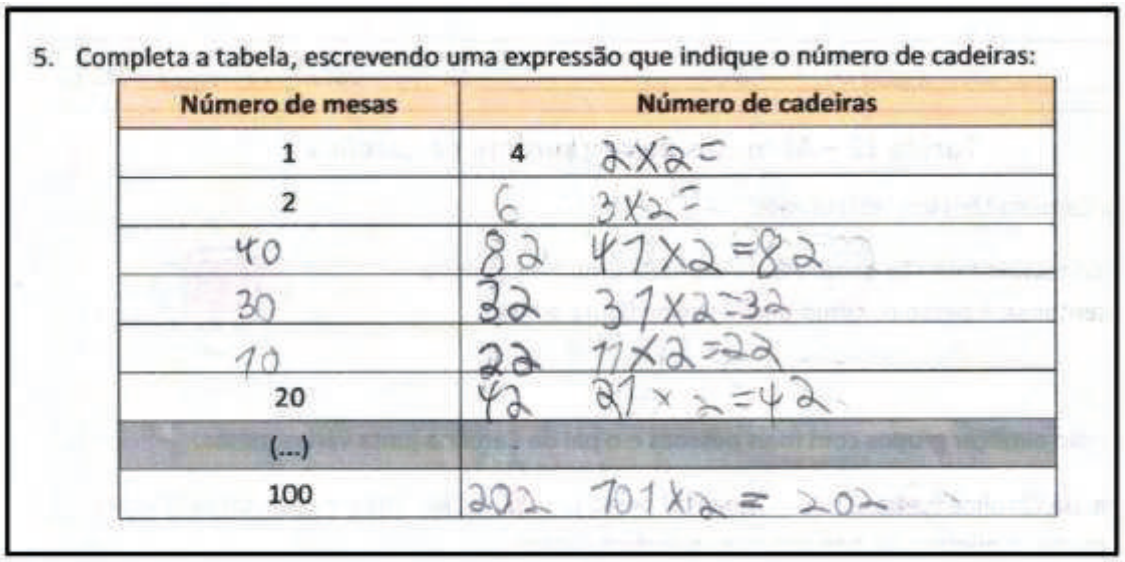


5. Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4 2+1+1=4
2	6 3+3=6
10	22 10+10+2=22
40	82 40+40+2=82
200	402 200+200+2=402
20	42 20+20+2=42
(...)	
100	202 100+100+2=202

Fig. 15 – Resolução da questão 5 (G)

As expressões de MC resultam da descoberta feita na questão 4 em que recorre à tabuada do dois. Parece compreender que há uma relação funcional em que o número de pares de cadeiras é igual ao número de mesas mais um (um par de cadeiras por mesa e um par lateral). Em seguida, multiplica esse número por dois mantendo o recurso à tabuada do dois (fig. 16).

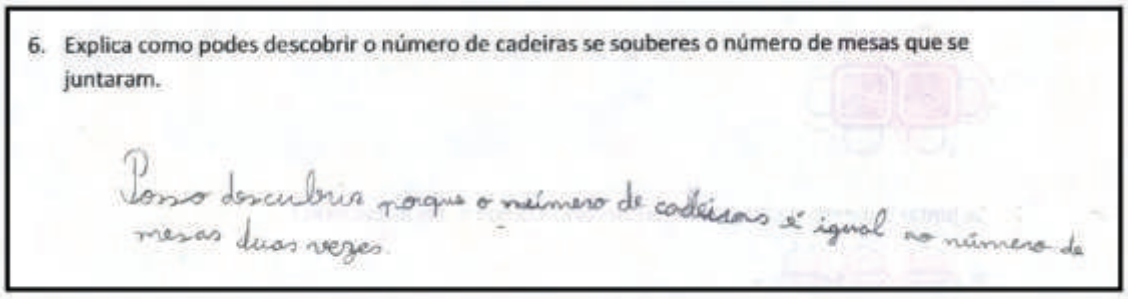


5. Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4 2X2=
2	6 3X2=
40	82 41X2=82
30	32 31X2=32
10	22 11X2=22
20	42 21 x 2=42
(...)	
100	202 101X2 = 202

Fig. 16 – Resolução da questão 5 (MC)

Questão 6. Pretendia-se que os alunos exprimissem a generalização traduzindo por palavras a regularidade encontrada. Alguns apenas conseguem identificar uma relação de dobro (fig. 17). Esta poderá ter sido evidenciada pela observação da tabela da questão 5, tendo em conta a abordagem recursiva (método da diferença).

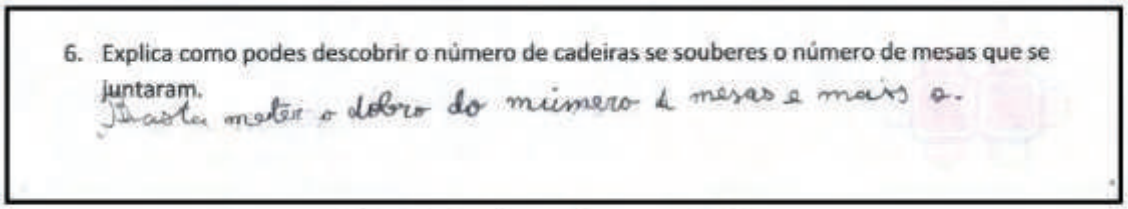


6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Posso descubrir porque o número de cadeiras é igual ao número de mesas duas vezes.

Fig. 17 – Resolução da questão 6 (CPP)

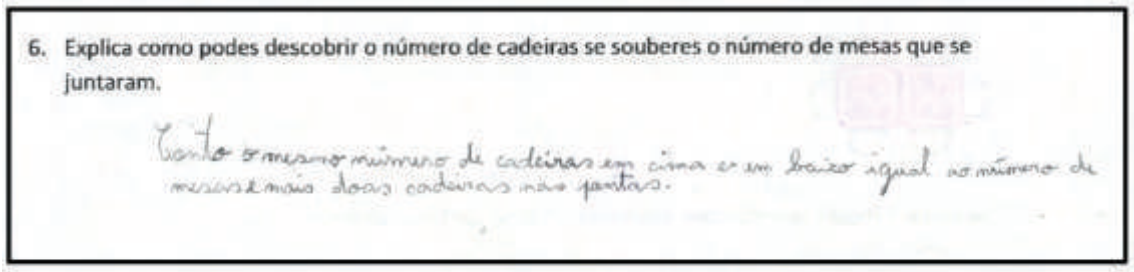
Outros exprimem uma lei geral de formação da sequência em linguagem corrente. Usam, assim, o método linear e recorrem a explicações de carácter geométrico muito simples. Nestes casos, a regularidade detectada visualmente foi transposta para a sequência numérica associada, o que lhes permite fazer uma generalização distante como se pode observar nas resoluções de MA e de G (figs. 18 e 19).



6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Basta meter o dobro do número de mesas e mais 2.

Fig. 18 – Resolução da questão 6 (MA)


6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Conto o mesmo número de cadeiras em cima e em baixo igual ao número de mesas e mais duas cadeiras nas pontas.

Fig. 19 – Resolução da questão 6 (G)

No episódio 2, durante a discussão colectiva, pode constatar-se a forma como G apreende a regra de crescimento da representação visual e a transfere para uma expressão numérica.

Episódio 2

G vai ao quadro e na 2ª. figura circunda as 2 cadeiras de cima, as 2 de baixo e as 2 dos lados. Na 3ª. figura faz o mesmo, dizendo:
G: 3 em cima, 3 em baixo e mais 2.

(…)

P: Faça lá as continhas, as expressões...
(G escreve abaixo da primeira figura 1 + 1 + 2 = 4)
P: Continua...
(G, na figura 2, escreve 2 + 2 + 2 = 6 e na figura 3 escreve 3 + 3 + 2 =8)
Inv: G, agora como é na 4ª figura, com 4 mesas?
G: Aparecia 4 em cima, 4 em baixo e 2 nas pontas.
Inv: E com 5 mesas?
G: 5 em cima e 5 em baixo e 2... e 2 no meio... nas pontas.
Inv: E com 10?
G: E com 10, 10 em cima, 10 em baixo e 2 no meio (vai indicando as posições).

(...)

Inv: G, vê lá se consegues dizer a frase: O número de cadeiras é...
G: Igual ao número de mesas... mais dois.
Inv: Quantas vezes o número de mesas?
G: Duas... (mostra os dedos e olha para a investigadora). Uma?!... Ai! Duas, duas!!
Inv: Porque é que é duas vezes?
RR: Duas, em cima e em baixo

(...)

Inv: Queres ir escrever? Então agora o RR escreve no quadro a frase "O número de cadeiras é...

(...)

LF: O número de cadeiras é igual ao número de mesas duas vezes, em cima e em baixo, e mais dois dos lados.

Como este episódio evidencia, a discussão colectiva foi importante para a compreensão da relação funcional pelos alunos. Com efeito, apesar de durante o trabalho individual só dois terem conseguido formulá-la por escrito, foram vários os que, oralmente, manifestaram tâ-la compreendido (por exemplo RR).

Questões 7 e 8. Focam-se na relação inversa e foram as que levantaram mais dificuldades. Se se indicar o número de pessoas que se irão sentar e este número não for elevado, há oito que resolvem facilmente. No entanto, voltam a privilegiar as estratégias de representação e contagem (fig. 20).

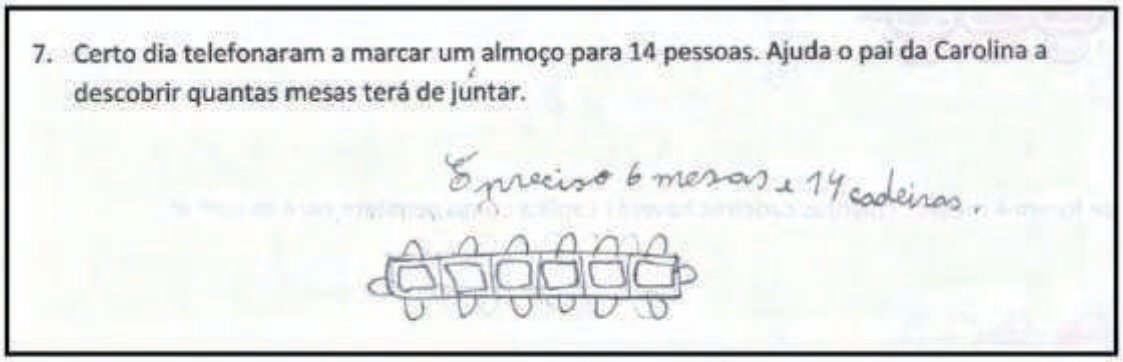


Fig. 20 – Resolução da questão 7 (CPP)

Quando se solicita que exprimam uma generalização que indique o número de mesas para qualquer número de cadeiras, há apenas três alunos que, durante o trabalho individual, conseguem enunciar correctamente a relação em linguagem natural, embora usando formulações diferentes. A figura 21 mostra uma destas formulações.

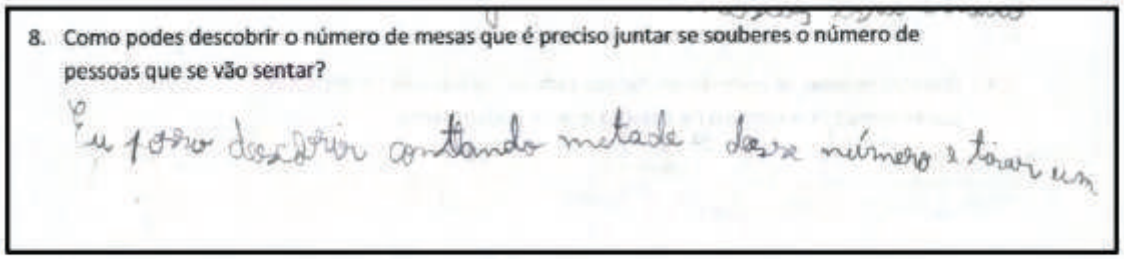


Fig. 21 – Resolução da questão 8 (MC)

A outra formulação (fig. 22) é do único aluno que, na questão 7, não recorreu apenas a uma estratégia de representação e contagem.

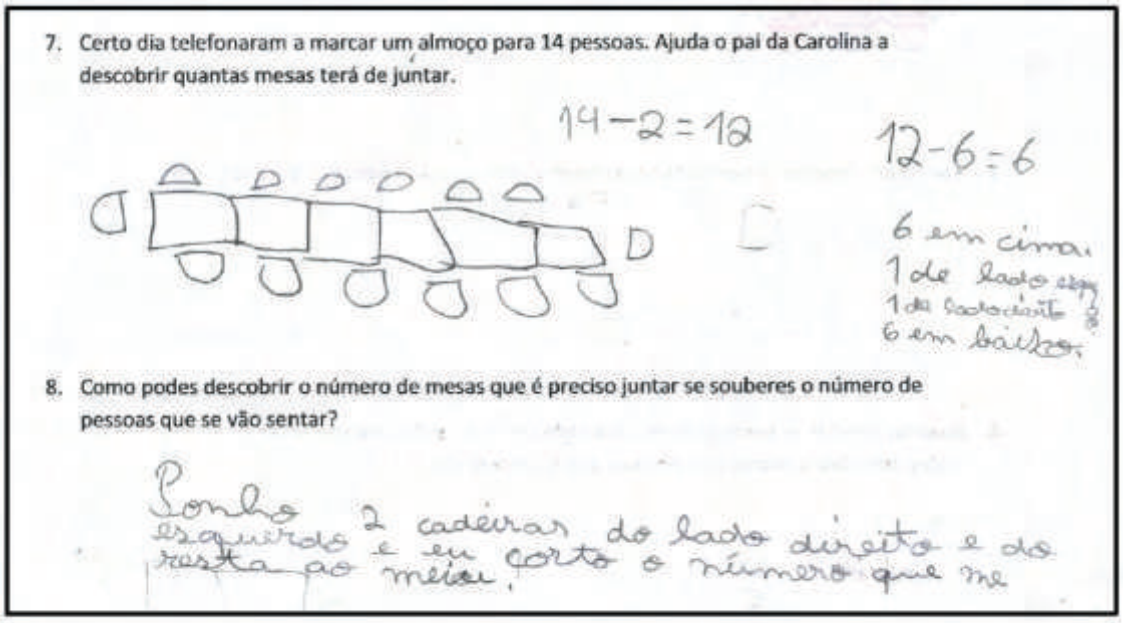


Fig. 22 – Resolução das questões 7 e 8 (JN)

Pode considerar-se que JN usa o método linear, pois há uma decomposição do número de mesas com recurso às operações inversas: primeiro uma subtracção e depois a subtracção de metade do número obtido, que tem subjacente a divisão por dois, pois estes alunos ainda não trabalharam a operação divisão. Esta ideia é reforçada quando se observa a sua resposta à questão 8: "Corto o número que resta ao meio".

Dificuldades

Podem considerar-se dificuldades de dois tipos: as inerentes à faixa etária dos alunos e as relacionadas com o desenvolvimento do pensamento algébrico e os conhecimentos matemáticos que conseguem mobilizar. No primeiro tipo pode incluir-se a compreensão do significado do vocabulário utilizado e a má interpretação do que é pedido. Esta dificuldade está patente na resposta de MC (fig. 23) quando, ao não entender o enunciado, refere uma situação concreta.

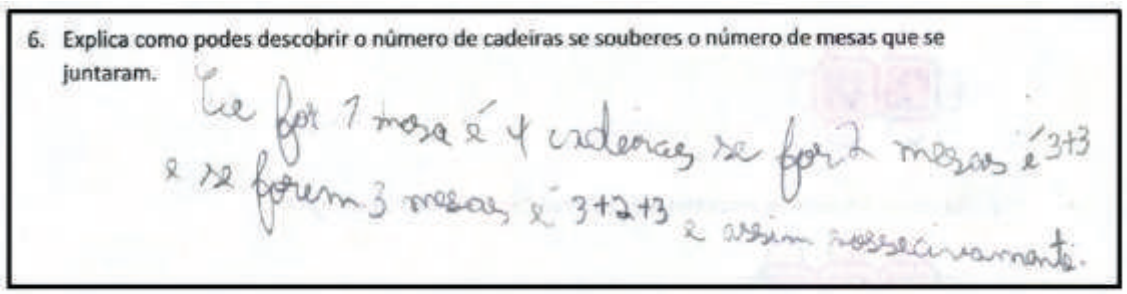


Fig. 23 – Resolução da questão 6 (MC)

As respostas são muito curtas e as justificações reduzidas, o que pode estar associado à não proficiência na escrita. Além disso, nem sempre foi fácil desenharem com rigor as figuras da sequência. Por exemplo, M e C apenas aproximam as mesas, mantendo 4 cadeiras em cada uma. Dificuldades semelhantes foram identificadas por Silvestre et al. (2010).

Um exemplo do segundo tipo de dificuldades é ilustrado pela forma como JN conta as cadeiras e escreve a sequência numérica (fig. 24), que dificulta a identificação de uma expressão representativa do número de cadeiras. O diálogo com o aluno revela que as suas expressões não estão relacionadas com a representação visual, mas sim com o conhecimento de que 22, número obtido por contagem unitária, se pode estruturar usando 10 como número de referência: "dez, depois do onze até ao vinte e depois conto mais dois [JN vai apontando para os números representados na figura 24, questão 4]".

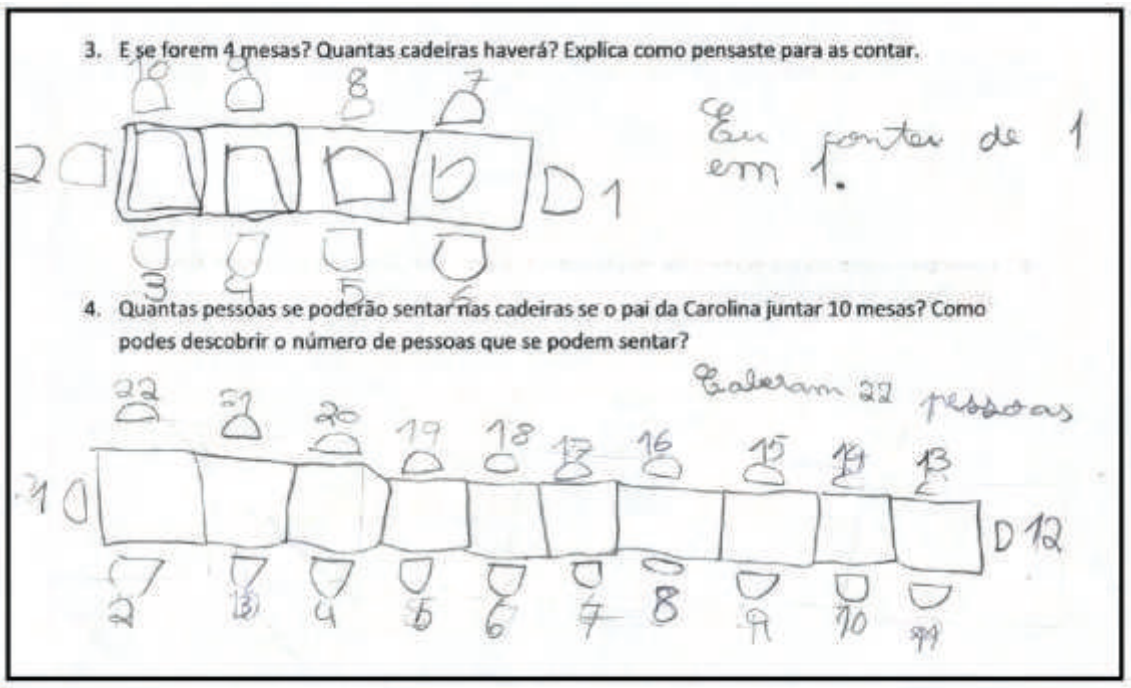


Fig. 24 – Resolução das questões 3 e 4 (JN)

JN compreende o crescimento da sequência pictórica, mas não é capaz de estabelecer conexões entre esta e a sequência numérica, ou seja, não compreende que há uma lei de crescimento comum a ambas as representações. Este tipo de dificuldade é também visível nas decomposições dos números de cadeiras que vários alunos fazem na questão 5.

A concluir

A análise do trabalho individual dos alunos revela que usam diversas estratégias de generalização, predominando as de representação e contagem na resolução de questões de generalização próxima, tal como referido por alguns autores (Barbosa, 2010; Stacey, 1989; Vale, 2006). Estas estão, na quase totalidade, associadas às quatro primeiras questões da tarefa, que a generalidade resolveu correctamente e voltam a surgir nas resoluções de oito alunos, quando está em jogo a relação inversa da identificada até aí. Nas restantes questões, direccionadas para a generalização distante, adoptam os métodos da diferença e linear (Stacey, 1989) ou estratégias de generalização aditiva e da decomposição dos termos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Estas estratégias surgem com bastante menos frequência do que a anterior. Constata-se que encontrar termos numa sequência torna-se progressivamente mais difícil, à medida que estes são mais distantes dos apresentados.

As diferentes formas como visualizam o "padrão" traduzem-se em diferentes modos de contagem e, consequentemente, são também diferentes as expressões usadas para traduzir uma lei geral de formação da sequência em linguagem natural. Em alguns casos, apenas determinam o número de cadeiras por contagem unitária, não estabelecendo ligação entre este número e a forma como se distribuem à volta das mesas. Segundo Ursini (1991), é essencial para a generalização que os alunos compreendam que há uma lei de crescimento comum às duas representações visual e numérica. Semelhantemente Barbosa (2010) refere dificuldades associadas à contagem de forma não organizada e à visualização espacial. Refere ainda que os alunos revelam mais dificuldades em descobrir valores distantes do que valores próximos, sendo as situações que implicam reversibilidade de pensamento as mais complicadas, o que acontece também no presente estudo. Nas questões 7 e 8, muitos alunos optam por não responder, por não dominarem conhecimentos matemáticos essenciais, nomeadamente a operação divisão. Segundo vários autores a tendência para a utilização de estratégias de contagem e da diferença pode tornar-se um obstáculo à formulação de relações de tipo funcional, dificultando a formulação de uma lei geral (Barbosa, 2010; Stacey, 1989).

Há evidências de que a maior parte dos alunos compreende a forma de crescimento da sequência pictórica ao representar as figuras pedidas, sendo mais difícil explicá-la do que continuá-la. A dificuldade em exprimir por escrito a forma como pensam e em utilizar uma linguagem apropriada para descrever regras é também identificada em outros estudos recentes (Barbosa, 2010; Vale, 2010).

Por último, o recurso à tabuada do dois e à estrutura do 10 evidenciam que, tal como refere Canavarro (2009), os alunos tendem a socorrer-se de todo o "repertório de ferramentas intelectuais", apresentado pelo professor, que se torna a referência em torno da qual pensam algebricamente.

Referências bibliográficas

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico* (dissertação de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16* (2), 81-118.

Darrel, E., & Balti, A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school: Findings from a research-practice collaboration. *Teaching Children Mathematics, 14* (9) 518-522.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI* (1), 5-26.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: ME.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Silvestre, A., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I., Santos, I., Molarinho, M. J., & Veladas, M. (2010). Sequências pictóricas: estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º anos. In GTI (Eds.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 89-119). Lisboa: APM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 147-164.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13* (8), 438-445.

Ursini, S. (1991). First steps in generalization processes in algebra. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 316-323). Assisi: Universita di Genova.

Vale, I., Cabrita, I., Palhares, P. & Borralho, A. (2006). Os Padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-213). Lisboa: SPCE.

Anexo I

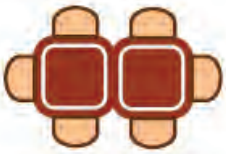
Tarefa – As mesas do restaurante da Carolina[1]

Os pais da Carolina têm um restaurante.

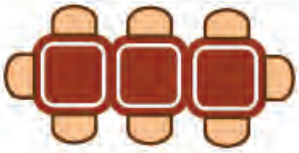
As mesas do restaurante são quadradas e em cada uma há 4 cadeiras, podendo sentar-se 4 pessoas, como podes ver na figura ao lado.

Por vezes, vão almoçar grupos com mais pessoas e o pai da Carolina junta várias mesas.

1. Se o pai da Carolina juntar 2 mesas, quantas pessoas se poderão sentar nas cadeiras? Explica como contas o número de pessoas que se podem sentar.



2. Se juntar 3 mesas, quantas cadeiras haverá? Como contas as cadeiras?



3. E se forem 4 mesas? Quantas cadeiras haverá? Explica como pensaste para as contar.

4. Quantas pessoas se poderão sentar nas cadeiras se o pai da Carolina juntar 10 mesas? Como podes descobrir o número de pessoas que se podem sentar?

[1] Tarefa adaptada de Earnest, D. e Balti, A. "Instructional Strategies for Teaching Algebra in Elementary School: Findings from a Research-Practice Collaboration" *in Teaching Children Mathematics* May, 518-522 (2008)

5. Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4
2	
20	
(...)	
100	

6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

7. Certo dia telefonaram a marcar um almoço para 14 pessoas. Ajuda o pai da Carolina a descobrir quantas mesas terá de juntar.

8. Como podes descobrir o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que se vão sentar?

Anexo II

Tarefa	Objectivos
Sol ou chuva?	*Identificar o grupo que se repete;* *Continuar sequências repetitivas;* *Relacionar cada elemento da sequência com a posição que ocupa;* *Identificar relações entre diferentes elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente.*
Estradas de números	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Identificar relações entre os elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente.*
Os cães do avô do Gonçalo	*Completar e interpretar uma tabela;* *Identificar a relação entre duas variáveis e exprimir esta relação em linguagem corrente.*
Quadrados e mais quadrados	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Identificar relações entre elementos de uma sequência crescente;* *Relacionar cada elemento da sequência com a posição que ocupa;* *Generalizar sequências crescentes.*
Uma viagem especial: a migração dos gansos!	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Escrever expressões que representem o número de pontos que compõem cada figura da sequência;* *Organizar os dados em tabela e por análise desta descobrir regularidades relativas ao número de pontos das figuras;* *Relacionar o número de pontos da figura com a sua posição, generalizando.*
Os desenhos do Pedro	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Identificar relações entre elementos de uma sequência crescente;* *Generalizar sequências crescentes.*

Quadro I – Sequência de tarefas

O TRABALHO COM SEQUÊNCIAS NUMA TURMA DO 1.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana Morais
Agrupamento de Escolas da Ericeira
analeandromorais@gmail.com

Célia Cascais
Agrupamento de Escolas da Ericeira
celia.cascais@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este trabalho exploratório tem por objectivo analisar as representações e estratégias dos alunos do 1.º ano de escolaridade, bem como as suas eventuais dificuldades, no trabalho com sequências repetitivas e crescentes. A metodologia é qualitativa, com recolha de dados por observação na sala de aula, registo áudio e fotos. Os resultados mostram que os alunos compreendem a representação em sequência e, desde que apoiados, conseguem associá-la explicitamente à sequência dos números naturais. Os alunos usam diversas representações. Além disso, conseguem formular generalizações usando estratégias como representação e contagem, adição, objecto inteiro e decomposição dos termos. No entanto, alguns deles mostram dificuldade no conhecimento dos numerais ordinais e na formulação de generalizações relativas a termos distantes.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Sequências, Representações, Estratégias.

Introdução

A importância dada ao ensino da Álgebra, desde os primeiros anos, constitui uma inovação em Portugal, e visa possibilitar um maior sucesso dos alunos na aprendizagem posterior deste domínio da Matemática (ME, 2007). Este estudo exploratório pretende contribuir para um melhor conhecimento sobre o modo como o professor pode levar os alunos a desenvolver o pensamento algébrico no início da escolaridade. O seu objetivo é analisar as representações e estratégias utilizadas pelos alunos do 1.º ano de escolaridade, bem como as suas eventuais dificuldades, procurando evidências de pensamento algébrico, em tarefas que envolvam sequências repetitivas e sequências crescentes. O estudo orienta-se pelas seguintes questões de investigação:

- Que representações usam os alunos nas tarefas propostas?

- Que estratégias usam os alunos nessas tarefas?
- Que dificuldades os alunos do 1.º ano encontram ao realizar tarefas que envolvam a generalização?

Começamos por fazer uma revisão da literatura tendo em vista discutir aspetos que caraterizam o pensamento algébrico, as representações matemáticas e as estratégias de generalização. Posteriormente, referimos a metodologia seguida no estudo e analisamos a prestação dos alunos. Por fim, refletimos sobre o trabalho realizado e tecemos algumas conclusões.

As sequências e o desenvolvimento do pensamento algébrico

Segundo Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011), a Álgebra pode ser vista como uma linguagem simbólica que permite expressar relações e generalizações, nomeadamente envolvendo números, e usá-la para resolver problemas sem necessitar de realizar cálculos numéricos extensos. Por sua vez, Kaput (1999) considera que o pensamento algébrico se manifesta quando, através de conjeturas e argumentos, se fazem generalizações sobre dados e relações matemáticas. Estas generalizações expressam-se através de uma linguagem cada vez mais formal e podem ocorrer em qualquer conceito matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade.

A generalização envolve a extensão deliberada do raciocínio para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre eles, ou elevando-o a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e relações entre eles (Kaput, 1999). Os alunos podem ser encorajados a observar regularidades e a estabelecer generalizações usando os seus próprios recursos, mas podem, igualmente, ser incentivados e ensinados a usar formas de representação convencionais, pois estas permitem não só exprimir, mas também enriquecer e aprofundar os seus raciocínios algébricos.

No 1.º ciclo, um dos tópicos do *Programa de Matemática* (ME, 2007) que pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, envolve sequências e regularidades. O programa sugere a exploração de regularidades numéricas em sequências e em tabelas de números, levando os alunos a identificar a lei de formação de uma dada sequência e, nos primeiros anos, a expressá-la a partir da sua linguagem natural, o que contribui para o desenvolvimento da sua capacidade de generalização (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

As sequências podem ser pictóricas e numéricas (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Numa sequência pictórica, a análise incide na identificação de regularidades e na descrição das características locais e globais das figuras que a compõem e também da sequência numérica que lhe está directamente associada. A exploração de sequências pictóricas e numéricas inclui a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações. Além disso, as sequências podem ser repetitivas ou crescentes. Nas primeiras existe uma unidade (formada por um ou mais elementos ou termos) que se repete ciclicamente. Nas sequências crescentes, cada termo depende do termo anterior e da sua posição na sequência (designada por ordem).

Quanto às representações, Bruner (1999) refere que estas podem ser (i) ativas, que são caraterizadas por um conjunto de ações apropriadas para alcançar determinado resultado; (ii) icónicas, que dizem respeito a um conjunto de imagens ou gráficos simples que representam um conceito sem o definir por completo; e (iii) simbólicas, que descreve como um "conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições" (p. 66). Para o autor, estas representações variam em dificuldade e utilidade consoante as idades e as experiências dos alunos.

No que diz respeito às estratégias, Ponte, Branco e Matos (2009) apontam algumas que surgem com frequência no trabalho com sequências, nomeadamente: (i) representação e contagem, em que o aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente; (ii) aditiva, tendo por base uma abordagem recursiva, em que o aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre de um termo para o seguinte; (iii) objecto inteiro, onde o aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse termo determinar o termo de uma ordem múltipla desta; e (iv) decomposição dos termos, onde o aluno estabelece uma relação entre um termo e a sua ordem (o que pode ser indicado por uma expressão algébrica ou não).

Vários investigadores portugueses têm apontado as potencialidades do desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º ciclo (Canavarro, 2009; Alvarenga e Vale, 2007; Branco, 2008; Ponte e Velez, 2010). Por exemplo, Canavarro (2009) apresenta não só o seu carácter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área

do saber" (p. 13). Pelo seu lado, Alvarenga e Vale (2007) defendem que "os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, podem e devem ser encorajados a observar padrões e a representar tanto geométrica como numericamente, iniciando o estudo da Álgebra de um modo fortemente intuitivo e informal" (p. 2).

Metodologia

Aspectos gerais

O presente estudo consiste numa investigação exploratória, envolvendo a realização de três tarefas numa turma do 1.º ano. Tendo em conta o objectivo principal e as questões da investigação, usamos uma metodologia qualitativa de cariz interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). A preparação e realização das aulas é concretizada pelas duas primeiras autoras no 2.º-3.º período de 2010/11. Uma delas é a professora titular da turma do 1.º ano participante no estudo e a outra desempenha o papel de observadora-participante durante as aulas. O trabalho com sequências para descrever, identificar a parte que se repete e encontrar termos distantes é realizado pela primeira vez, nestes moldes, tanto pelas professoras como pelos alunos.

O processo de recolha de dados é observação participante. Os dados são recolhidos, a partir do registo áudio e vídeo e das notas de campo escritas na observação da participação dos alunos na fase de questionamento e discussão. Posteriormente estes registos são transcritos e é feita uma análise categorial, usando as categorias de Ponte, Branco e Matos (2009), procurando responder às questões do estudo.

Inicialmente foi prevista a realização de duas tarefas, sendo posteriormente acrescentada uma terceira. Para cada tarefa foi elaborada uma sequência de questões a colocar oralmente aos alunos. Embora apoiado nas questões escritas, o questionamento que dirige a realização da tarefa assume a espontaneidade própria da comunicação oral.

Apresentação das tarefas e discussão dos resultados

Tarefa 1: Sequência com figuras

A primeira tarefa proposta aos alunos no âmbito deste trabalho é uma sequência repetitiva, baseada numa situação apresentada em Carvalho et al. (s.d.). Este tipo de sequência é considerado o mais simples e, como tal, pode ser usado para um trabalho inicial da procura de regularidades e da generalização (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

Nesta sequência existe uma unidade que se repete, formada por três elementos (quadrados) com cores diferentes.

Estratégia de exploração. A professora apresenta oralmente a tarefa colocando no quadro seis quadrados em cartolina, na sequência apresentada na figura 1:

Figura 1: Sequência com figuras

A professora coloca oralmente cada uma das perguntas do questionamento que se segue, os alunos respondem individualmente, seguindo-se uma discussão em coletivo para cada uma das questões.

Os alunos respondem usando o material que possuem (folha branca A3, quadrados em cartolina com as mesmas cores dos quadrados da sequência). Na realização da tarefa procura-se respeitar os ritmos de trabalho de cada aluno e introduzir progressivamente representações formais, uma vez que facilitam a compreensão e orientam o raciocínio.

Questionamento.

1. Reproduz a sequência usando o material.
2. Descreve a sequência.
3. Qual será o próximo elemento?
4. Qual é a parte que se repete?
5. Continua a sequência.
6. Escrevendo os números por baixo de cada figura, indica o lugar em que aparece o quadrado azul.
7. E o amarelo? E o laranja?
8. Qual será o 15.º elemento?
9. E o 16.º?
10. Em 20 elementos, quantas vezes aparecerá o quadrado azul?

Discussão dos resultados. Os alunos reproduzem, uns desenhando (representações icónicas), outros com recurso aos materiais manipuláveis (representações ativas), e descrevem oralmente os primeiros termos da sequência (questões 1 e 2). Depois, a professora avança com o questionamento. Nas questões 6 e 7:

Prof: Em que lugar aparece o quadrado azul?

Madalena: Em 1.º.

Bianca: Em 1.º… em 4.º… em 7.º.

Prof: Madalena, vai ao quadro escrever os números por ordem na sequência.

Prof: Então e em que lugar aparece o quadrado amarelo?

Maria: O amarelo aparece no 2.º, no 5… no 8… e no 11.

Prof: E volta a aparecer em que lugar, Maria?

Maria: No 14.

Prof: Em 14.º lugar. E em que lugar aparece o quadrado laranja?

Bianca: No 3, no n.º 6, no n.º 9… No n.º 12.

Foi possível observar que os alunos, para responderem às questões da professora, contavam todos os elementos da sequência até ao pretendido, sendo visível uma estratégia de representação e contagem. A partir do momento que a professora sugeriu associar a sequência numérica à sequência pictórica, usando uma representação simbólica, verificou-se que os alunos rapidamente respondiam às questões seguintes. Parece-nos que esta associação sugerida por Ponte e Velez (2010) facilita a identificação dos vários elementos, tendo sido uma novidade introduzida na nossa prática, na exploração de sequências.

Continuamos com a questão 8:

Prof: Consegues dizer qual será o elemento que aparece em 15.º lugar, no lugar n.º 15?

Madalena: É o azul.

Os alunos hesitam. Continuam a experimentar e tentam verificar qual o elemento que aparece em 15.º lugar. Passado algum tempo:

Marco: O José tinha dito que o 15.º elemento seria o laranja. A Bianca tinha dito que seria o azul.

Prof; Afinal qual é?

Bianca: Acaba no 12, depois o 13 vai ser azul, depois o 14 vai ser o amarelo e o 15 é o laranja.

Tiago: Acho que só salto de 3 em 3, para saber qual vai calhar. É o azul, o amarelo e o laranja.

Professora: Quando queres descobrir um elemento da sequência o que é que tu fazes?

Tiago: Saltinhos de 3 em 3.

Para alguns alunos, a faceta ordinal do número não é ainda bem conhecida, como se verifica na fala da Bianca, e mesmo os numerais a partir do 13 ainda não estão adquiridos ou não estão suficientemente interiorizados, de modo a permitir-lhes abstrair e compreender sem continuar a representar os elementos seguintes. O foco dado por alguns alunos na regularidade encontrada em números de 3 em 3, recorrendo à estratégia aditiva, contribui para o desenvolvimento do sentido de número e serve de base para a capacidade de generalização.

Concluímos, assim, que reproduzir, descrever e continuar uma sequência pictórica repetitiva são capacidades já adquiridas pela generalidade dos alunos. Por outro lado, a identificação de termos distantes e formulação de uma generalização têm um grau de dificuldade elevado para a maior parte dos alunos. Nesta sequência, a unidade é formada por 3 elementos e a regularidade presente nos múltiplos de 3 não é evidente para crianças deste ano de escolaridade. Como tal, consideramos útil perceber o raciocínio desenvolvido em sequências pictóricas repetitivas com 2 elementos, razão pela qual decidimos introduzir a tarefa 2.

Tarefa 2: Sequência com círculos

A segunda tarefa é inventada pelas professoras investigadoras, sendo a unidade que se repete composta por dois elementos (círculos) com cores diferentes.

Estratégia de exploração. A estratégia utilizada para desenvolver esta tarefa é idêntica à da tarefa anterior. A professora distribui uma ficha com as perguntas que vai colocando oralmente e desenha no quadro a seguinte sequência:

Figura 2: Sequência com círculos

Cada aluno utiliza os seus lápis de cor ou marcadores, bem como a sua ficha à medida que responde às solicitações da professora. O questionamento é semelhante ao da tarefa anterior.

Discussão dos resultados. Para reproduzir a sequência, um dos alunos recorre ao colar de contas, usando uma representação ativa. Os alunos descrevem a sequência, identificando a parte que se repete, e continuam-na (questões 2-5). Verifica-se, mais uma vez, que a associação da sequência numérica à pictórica (Ponte & Velez, 2010) facilita a identificação da posição de cada termo:

Prof: Marco, já numeraste a tua sequência? Dá uma ajuda ou não?
Marco: Sim.
Prof: Porquê Marco?
Marco: Porque senão tivermos podemo-nos enganar nos números.

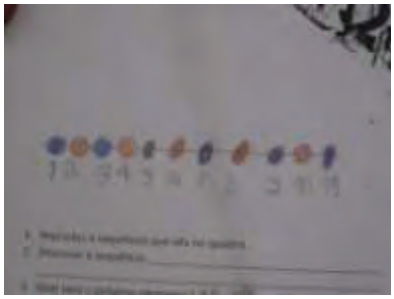


Figura 3: Associação da sequência numérica à pictórica

Depois de todos os alunos numerarem os termos da sua sequência, usando uma representação simbólica, respondem com facilidade às restantes questões.

Prof: Diz lá por que achas que (o trinta) é vermelho.
Tomás: Porque se o dez é vermelho, o vinte é vermelho, então mais dez é vermelho, o trinta também é.
Marco: O trinta é vermelho e o quarenta também é.

Tomás usa a estratégia aditiva para responder à professora. Nesta altura, na interação entre os alunos, verifica-se que, por exemplo, Tomás e Marco encontram uma regularidade e a partir daí são capazes de generalizar. Os alunos continuam, usando a estratégia do objeto inteiro, como Dinis na fala que se segue:

Dinis: O dez, o vinte, o trinta, o quarenta, o cinquenta, o sessenta, o setenta, o oitenta, o noventa e o cem, o duzentos, o trezentos, o quatrocentos, o quinhentos, o seiscentos.

Prof: Seriam todos o quê?

Dinis: Vermelhos.

(…)

Dinis: Todos os que terminam em zero são vermelhos.

Prof: Quais é que terminam em zero?

Alguns alunos: O dez, o vinte, o trinta, o quarenta.

Prof: Esses são vermelhos, muito bem. O que podemos dizer mais, José? Vamos todos pensar. E os que terminam em cinco?

Marco: São azuis.

(…)

Dinis: Eu concordo com o José e com o Marco, e não é só isso que eu queria dizer. O que eu acho é que como o vinte e um é azul, porque tem o um; e eu acho que o vinte e dois é vermelho porque também tem um dois; e o vinte e três é azul porque também tem um três.

(…)

Elsa: Porque o vinte e cinco é azul, o vinte e seis é vermelho.

Prof: Então, se o vinte e cinco é azul, o quarenta e cinco é azul. Então, e o quarenta e seis?

Elsa: É vermelho.

Alguns alunos mostram facilidade em identificar as regularidades: se os números da sequência terminam em zero, os círculos que lhe correspondem são vermelhos e se terminam em cinco são azuis; além disso vê-se que um aluno (Dinis) faz uma associação entre a terminação de certos números (21, 22 e 23) e determinadas cores. A necessidade de expressar a generalização através da sua linguagem natural põe à prova a capacidade de abstração e desenvolve a comunicação e o raciocínio matemáticos. Ao refletir sobre a realização desta tarefa, concluímos ainda que é importante trabalhar sequências pictóricas repetitivas diversas e com diferente número de elementos, sendo uma sequência com dois elementos a que induz maior facilidade na generalização do padrão. Verifica-se, mais uma vez, alguma dificuldade com a nomenclatura dos números ordinais. Os alunos usaram representações ativas, recorrendo ao fio de contas e as estratégias evidenciadas são a aditiva e a do objeto inteiro.

Tarefa 3: Sequência crescente

A terceira tarefa proposta é uma sequência crescente com círculos, adaptada de Letra e Freire (2010). Com este tipo de sequências também se pretende generalizar usando a linguagem natural, numa fase inicial.

Estratégia de exploração. Os alunos trabalham em grupo. A professora apresenta oralmente a tarefa e distribui o material pelos grupos: materiais circulares, uma folha A3 com os três primeiros termos da sequência e uma folha com o enunciado da tarefa. Após a realização da tarefa, é proporcionado um tempo para apresentação e discussão dos processos e resultados obtidos por cada grupo de alunos.

Questionamento

1. Observa a sequência.
2. Constrói a figura seguinte, com o material à disposição.
3. Quantos círculos tem?
4. Completa a tabela.
5. Consegues descobrir o número de círculos da 10.ª figura?
6. Como podemos saber o número de círculos de qualquer figura?

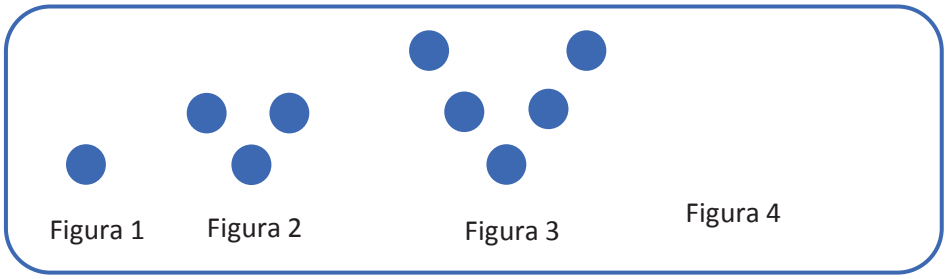


Figura 3: Sequência crescente

Nº da figura	Nº de círculos
1	
2	
3	
4	
5	

Tabela 1: Sequência crescente

Discussão dos resultados. Na terceira tarefa, perante uma sequência pictórica crescente todos os grupos conseguem facilmente representar o termo seguinte e identificar o número de elementos de cada termo (questões 2 e 3).

Figura 4: Exemplo de uma representação ativa

Figura 5: Associação da sequência numérica à pictórica

A proposta para organização dos dados em tabela (pergunta 4), facilita a identificação e compreensão da regularidade da sequência. Passando à pergunta 5 Dinis começa a contar de 2 em 2, usando uma estratégia aditiva:

> Dinis: A 5.ª tem 9, a 6.ª 11, a 7.ª 13, a 8.ª 15, a 9.ª 17 e a 10.ª 19. (Olha para a tabela enquanto responde)

Apenas um dos grupos não consegue descobrir a 10.ª figura. Precisa de orientação para definir uma estratégia e o tempo não é suficiente para representar todas as figuras. Os restantes grupos envolvem-se na tarefa e conseguem chegar ao resultado, usando diferentes estratégias. Por exemplo, num dos grupos, a partir da 4.ª figura, Bianca usa a estratégia de representação e contagem quando começa por apontar com o seu lápis como se estivesse a visualizar os círculos que faltam:

Bianca: 10, 11, 12, 13 (Pára e conta pelos seus dedos) 14, 15, 16, 17, 18, 19. Tem 19?

Prof: Como descobriste?

(Bianca desenha círculos mais pequenos que os desenhados na figura 4, fazendo-a crescer, através de uma estratégia de representação e contagem, usando uma representação icónica.)

Noutro grupo, os alunos conversam entre si e associam o número das figuras ao número de pintas que tem cada lado, recorrendo à estratégia do objecto inteiro:

José: Vai ter que ter 10 de um lado e 10 do outro. (José e o colega começam a dispor os círculos de forma a fazer a 10.ª figura, usando uma representação ativa, eles sabem, pois repetem-no na contagem, que há um círculo comum aos dois lados. Depois contam todos os círculos)

José: 19, tem 19. (E escreve o número abaixo da questão.)

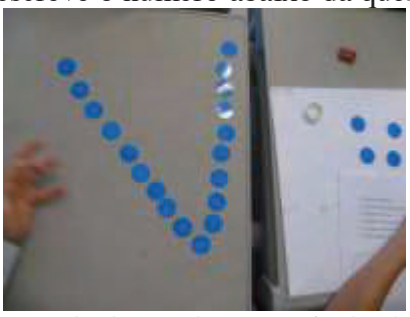
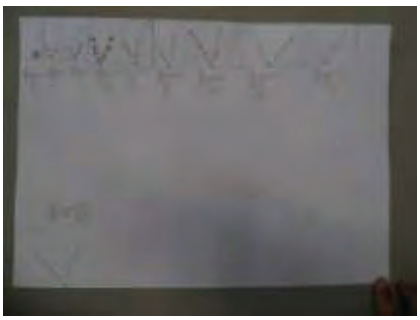


Figura 6: Exemplo do uso da estratégia do objeto inteiro

Noutro grupo ainda, os alunos desenham todas as figuras até chegar à 10.ª, usando uma representação icónica através da estratégia de representação e contagem, para então descobrirem quantos círculos a compõe.

Figura 7: Exemplo do uso de representação e contagem



Num dos grupos verifica-se a estratégia de decomposição dos termos, que transparece no seguinte diálogo:

Marta: Assim é 4+3 na figura do 4, dá assim a do 10. Se é 4 de um lado, na figura do 4 e 3 do outro, assim dá 19.

(…)

Marta: É 10. Metemos 10 no fio de contas, metemos mais 10 (e desenha a figura com a própria mão).

Prof: Sim…

Marta: E tiramos 1, ficam 19.

Finalmente, quanto à descoberta de um termo distante (questão 6), apenas um grupo lhe consegue responder, evidenciando um processo de generalização:

Prof: Então, se eu perguntasse a figura do 8, por exemplo, sabiam dizer quantos tinha?

(Marta pega no fio de contas e começa a contar.)

Marta: 15

Prof: Porquê?

Marta: Contei 8+8, é igual a este (e mostra o fio de contas), tirei 1.

A aluna recorre a uma representação ativa, através da estratégia da decomposição dos termos, usando material disponível na sua mesa, apesar de este não estar previsto.

Outros grupos revelam uma aproximação, mas não conseguem expressar a generalização:

Prof: E se fosse a figura número 15?

José: Tinha 29?

Prof: Como sabes?

José: Contei de 2 em 2 até essa figura.

Os alunos conseguem facilmente identificar o número de elementos de cada termo e representar os termos mais próximos de uma sequência pictórica crescente, representando as suas ideias de diversas formas. Além disso, o trabalho em grupo proporciona momentos de debate e discussão em que os alunos têm de comunicar e argumentar as suas ideias usando diversas representações (incluindo gestos, desenhos, símbolos matemáticos e a própria linguagem oral) de modo a fazer-se entender pelos seus pares. Nesta tarefa é possível identificar as estratégias que, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), surgem com mais frequência no trabalho com sequências pictóricas crescentes.

Conclusão

Comecemos por analisar as representações usadas pelos alunos. Os resultados mostram que os alunos são capazes de compreender os aspectos essenciais do sistema de representação de sequências repetitivas e crescentes e usam-no para responder a questões simples. A associação da sequência numérica à sequência pictórica, permite-lhes responder a questões mais complexas. Verificamos que os alunos usam diferentes representações atribuindo-lhes significado, o que coloca ao professor a necessidade de orientar o seu trabalho, encaminhando-os e incentivando-os no sentido de usarem representações cada vez mais formais.

Quanto às estratégias, por exemplo, na terceira tarefa, registamos a representação e contagem quando os alunos do grupo 3 representam todos os termos da sequência até ao termo solicitado e contam os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente. Também nessa tarefa, identificamos a estratégia aditiva nas respostas (de José e Dinis) que comparam termos consecutivos e identificam a alteração que ocorre de um termo para o seguinte. A estratégia do objecto inteiro surge quando alguns alunos consideram um termo de uma dada ordem e com base nesse termo determinam o termo de uma ordem múltipla desta (Tomás e Miguel na segunda tarefa). A estratégia da decomposição dos termos é utilizada por uma aluna (Marta), na terceira tarefa, na medida em que a aluna estabelece uma relação entre um termo e a sua ordem. Assim, esta investigação permite-nos verificar que estes alunos do 1.º ano usam estratégias muito semelhantes às que são referidas por Ponte, Branco e Matos (2009) como sendo utilizadas por alunos do 3.º ciclo numa fase inicial do trabalho com sequências. Na realização de tarefas que envolvem generalização, os alunos compreendem com facilidade o que lhes é pedido no enunciado. O facto de muitos deles ainda não dominarem a terminologia dos ordinais não causa dificuldades, pois, apesar de não conhecerem muitos dos termos, recorrem à terminologia dos cardinais. Identificar o padrão pictórico, bem como o padrão numérico revela-se acessível à maioria dos alunos. No entanto, para responderem às questões envolvendo termos distantes, algumas crianças revelam dificuldade e necessitam de completar a sequência, desenhando todos os elementos. Outras conseguem generalizar o padrão contando

oralmente e/ou gestualmente. Apenas uma aluna consegue expressar a generalização e formular o seu raciocínio através de uma expressão numérica.

Estes resultados sugerem que as tarefas selecionadas estão adequadas aos alunos do 1.º ano, embora fosse vantajoso serem apresentadas noutra ordem: primeiro a tarefa 2, depois a tarefa 1 e, finalmente, a 3. Resta-nos acrescentar que, aprendizagens relacionadas com o desenvolvimento do pensamento algébrico, as generalizações e as representações no 1.º ciclo do ensino básico merecem um estudo mais aprofundado por parte dos investigadores portugueses, que poderá ser bastante enriquecido através do trabalho colaborativo entre professores deste nível de ensino.

Referências

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante* , *16*(1), 27-55.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (tese de mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16(2)*, 81-118.

Carvalho, A., Gaio, A., Ribeiro, D., Nunes, F., Veloso, G., Valério, N., et al. (s.d.). *Pensamento Algébrico nos primeiros anos: Programa de Formação Contínua para professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: IPL/ESE.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebric reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Erlbaum .

Letra, C., & Freire, F. G. (2010). *O mundo da Carochinha: Caderno de Problemas, 1.º ano*. Vila Nova de Gaia: Gailivro.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42(*3), 237-2.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2010). *Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade*. Obtido do Moodle do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ano. *Quadrante , 14(1)*, 37-66.

GENERALIZAR ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO: UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO RELACIONAL DE ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE[1]

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto da Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Nesta comunicação apresenta-se um estudo que integra uma investigação mais ampla em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade, através da realização de uma experiência de ensino. O objectivo desta comunicação é analisar como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização e para a sua expressão em linguagem natural, e ainda para a iniciação de um percurso em direcção à simbolização. A análise de dados incide sobre a realização de duas tarefas em aula. Os resultados preliminares indicam que os alunos conseguem reconhecer as relações numéricas e as propriedades das operações envolvidas em expressões numéricas particulares e que conseguem descrever a generalização em linguagem natural, iniciando ainda um percurso em direcção à linguagem simbólica.

Palavras-Chave: early algebra, pensamento algébrico, generalização, simbolização, pensamento quase-variável

Introdução

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), considera como um dos quatro eixos fundamentais do ensino-aprendizagem o

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008)

desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Diversas investigações internacionais mostram como, desde cedo, pode ser construída uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas e também na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função. Neste sentido, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) considera a Álgebra como um *fio condutor curricular* desde os primeiros anos de escolaridade e que esta pode contribuir para unificar o currículo da Matemática.

O trabalho de investigação em curso, no qual se integra esta comunicação, tem como objectivo geral compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Em particular, esta comunicação tem como objectivo analisar como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização e para a sua expressão em linguagem natural, possibilitando ainda uma iniciação à linguagem simbólica.

O pensamento algébrico e a aritmética

O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005). Também Ponte, Branco & Matos (2009) assinalam a generalização como um elemento central do pensamento algébrico e salientam que as tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstracção, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático. Para Mason (1996) uma das formas de desenvolver essa capacidade de generalização é sensibilizar para a distinção entre olhar para e olhar através, conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular. A generalização pode ser expressa de diversas formas. Inicialmente, as crianças podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

Uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada. Isso implica a construção da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades e inclui ainda a noção de equivalência associada ao sinal de igual (=). Carpenter *et al*. (2003) reconhecem essas ideias como o pensamento relacional, isto é, a capacidade de olhar para expressões ou equações na sua concepção mais ampla, revelando as relações existentes nessas expressões ou equações. Para ilustrar o que pretendem dizer com pensamento relacional, Carpenter *et al*. (2005) usam a igualdade numérica seguinte: 8+4=__+5. Para resolvê-la, os alunos podem adicionar 8 e 4 e depois pensar em quanto têm de adicionar a 5 para obter 12. No entanto, o processo usado, ainda que válido, não tem em conta a relação entre os números envolvidos. O aluno que apreenda a expressão no seu todo pode considerar que 5 é mais um do que 4 e, por isso, o número a colocar no espaço em branco será menos um do que 8, usando a seguinte relação: 8+4 = (7+1)+4 = 7+(1+4).

A aritmética tem sido, ao longo dos tempos, o tema com maior incidência no currículo da escola elementar, no entanto, torna-se necessário reconsiderar o modo como, habitualmente, tem sido ensinada e o seu papel na formação matemática das crianças. Numa perspectiva tradicional do ensino da Matemática tem existido uma preocupação quase exclusiva com o cálculo, e, nesta perspectiva, o propósito é operacionalizar um conjunto de números a partir de um conjunto de passos para gerar um único número, que é a resposta pretendida. Numa perspectiva mais algébrica, por outro lado, o foco desloca-se para as relações numéricas. Carpenter *et al*. (2003), por exemplo, referem que a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a Matemática, nos primeiros anos, e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados.

De acordo com Fujii e Stephens (2008), a utilização de expressões numéricas generalizáveis pode providenciar uma ponte importante entre a aritmética e o pensamento algébrico. De acordo com estes autores, as explicações gerais dos estudantes sobre o porquê da veracidade da expressão numérica 78 - 49 + 49 = 78 e a sua capacidade de usar exemplos específicos daquilo que mais tarde será uma relação geral (a - b + b = a) podem ser descritas como o pensamento quase – variável. A expressão quase-variável significa um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Desta forma, os alunos

podem usar expressões numéricas generalizáveis, centrando a atenção na estrutura dessas expressões, e identificar e discutir a generalização algébrica antes da introdução da simbologia algébrica formal.

Metodologia do estudo

Os resultados apresentados nesta comunicação inserem-se num estudo mais amplo, de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), ainda em fase inicial. O design do estudo segue de perto o que Gravemeijer e Cobb (2006) denominam como experiência de ensino em sala de aula, em que se propõem tarefas que pretendem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade.

Esta comunicação foca-se na análise de duas tarefas específicas, envolvendo estratégias de cálculo a partir da exploração de expressões numéricas particulares. Para recolha dos dados foram gravadas em formato vídeo as duas aulas em que os alunos realizaram as tarefas e analisados os momentos de discussão colectiva. Também foram usadas para análise as fichas de trabalho dos alunos. As aulas da experiência de ensino foram dinamizadas pela investigadora deste estudo (primeira autora desta comunicação) e a professora titular de turma assumiu um papel de coadjuvante. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto directo com a professora e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projectos.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorre durante o presente ano lectivo e as tarefas exploradas têm como base os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspectiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, foram propostas, até ao momento, catorze tarefas, inseridas nos tópicos "múltiplos e divisores" e "operações

com números naturais", de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007).

As tarefas realizadas na experiência de ensino centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. A exploração destas tarefas tinha como objectivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direcção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. As tarefas que servem de base a esta comunicação (12.ª e 14.ª) apresentam o contexto de estratégias de cálculo com relações numéricas particulares (dobro e metade) onde se explora a expressão da generalização em linguagem natural e a sua tradução para a linguagem simbólica.

Apresentação dos resultados

As duas tarefas apresentadas e discutidas nesta comunicação têm como títulos: "Calcular usando o dobro" e "A estratégia do Afonso". As duas tarefas foram resolvidas pelos alunos em pares e tiveram momentos de discussão colectiva na turma. Para análise da exploração das tarefas apresentam-se algumas resoluções dos alunos e excertos que consideramos significativos das discussões colectivas.

Tarefa "Calcular usando o dobro"

Esta tarefa explora a relação de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8. As expressões numéricas apresentadas são as seguintes: 6x8=2x24=48, 12x8=2x48=96 e 25x8=2x100=200, como se pode ver na figura seguinte:

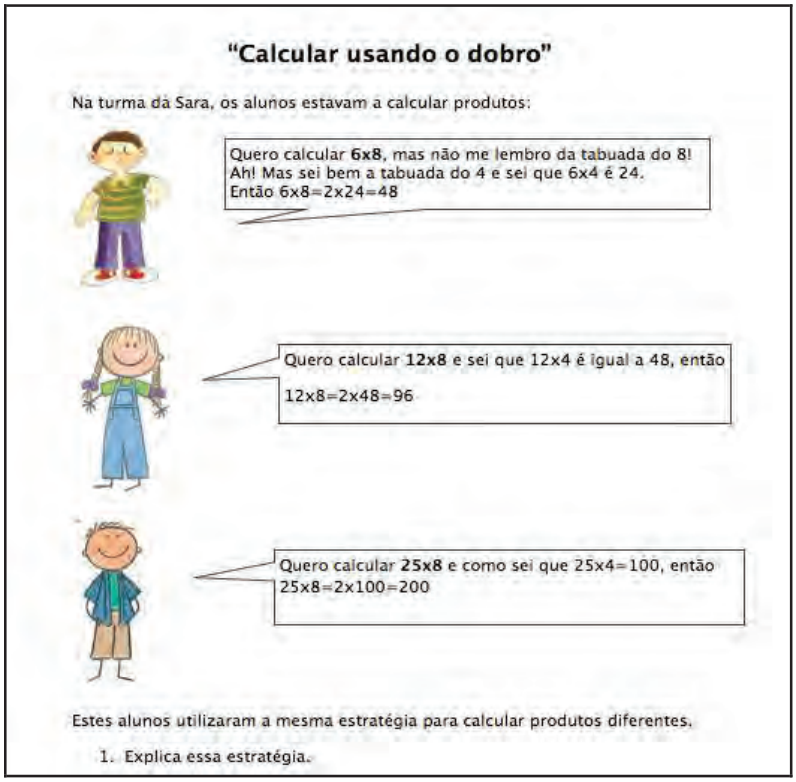


Figura 1 - Enunciado da tarefa "Calcular usando o dobro".

Na explicação da estratégia, os diferentes pares conseguiram reconhecer as relações de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8. A figura seguinte mostra a resposta de um par de alunos que revela como identificaram a relação de dobro entre os produtos da tabuada do 8 e os produtos da tabuada do 4, usando um dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa para explicar a estratégia de cálculo.

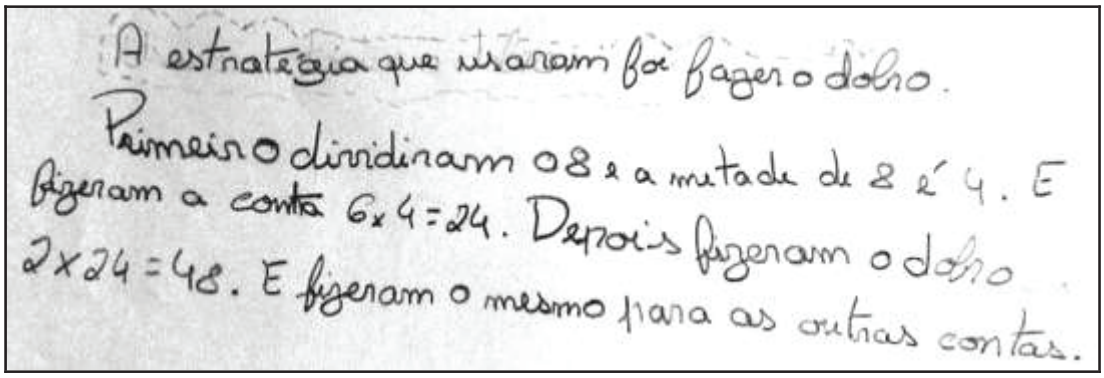


Figura 2 - Resposta do par Fábio e Henrique.

A figura seguinte mostra como um par de alunos utiliza uma representação mais elaborada da relação de dobro e metade, para cada um dos exemplos apresentados no

enunciado da tarefa. Estes alunos identificam claramente os produtos da tabuada do 8 como o dobro dos produtos da tabuada do 4, utilizando a propriedade associativa da multiplicação.

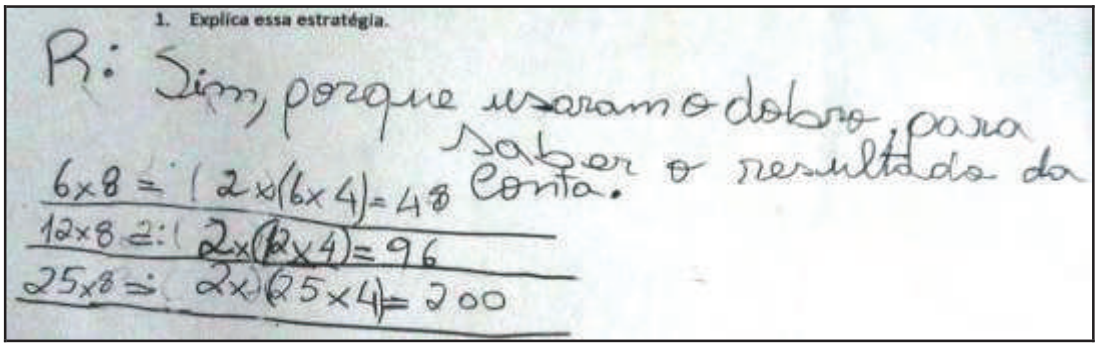


Figura 3 - Resposta do par António e Carolina.

A resposta do par seguinte mostra como os alunos recorreram a outros exemplos, estendendo a estratégia de cálculo para além das expressões apresentadas no enunciado da tarefa. Ilustram o procedimento efectuado representando esquematicamente a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

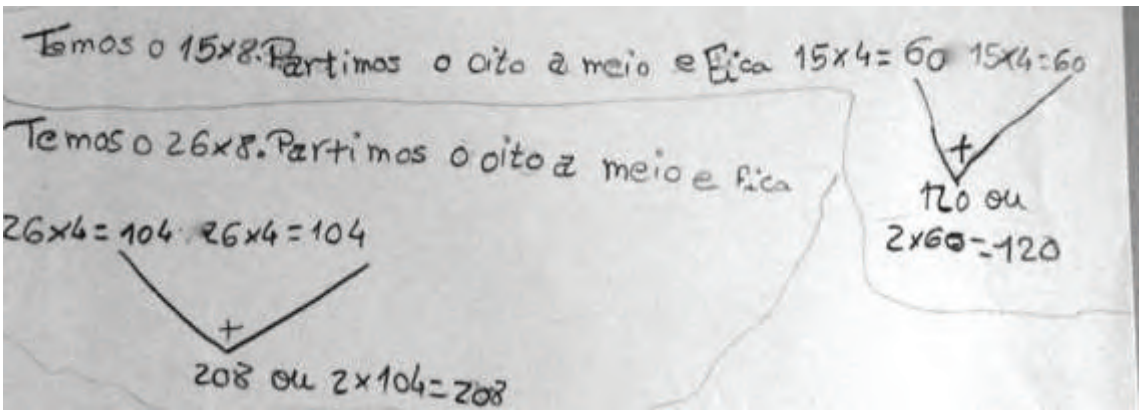


Figura 4 - Resposta do par Joana e Gonçalo.

O último exemplo mostra como os alunos também conseguem generalizar a estratégia de cálculo, apresentando evidências que apreenderam a estratégia para além dos casos particulares usados como exemplos. Quando referem que para saber o resultado da multiplicação de um factor por oito, fazem duas vezes "a metade de oito" por esse factor, estes alunos usam a propriedade associativa da multiplicação e mostram como apreenderam a generalização dessa estratégia.

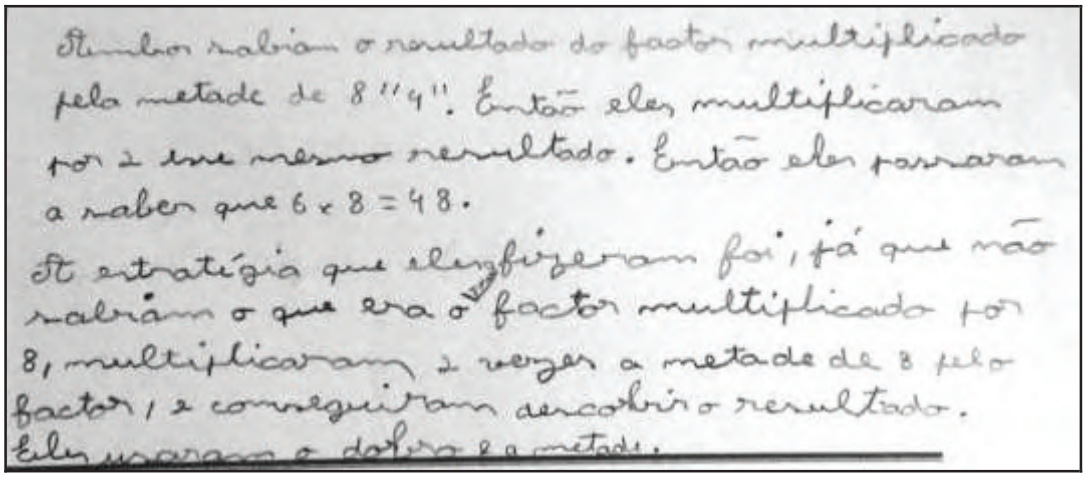


Figura 5 - Resposta do par Matilde e André.

Na exploração colectiva desta tarefa, um dos pares descreveu a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural da seguinte forma: "Para descobrirmos a tabuada do oito, fazemos o dobro da tabuada do quatro". Depois, com o propósito de traduzir essa generalização para a linguagem matemática, a professora[2] conduziu o seguinte diálogo:

> Professora – (...) agora quero que pensem nesta frase que o João escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?
> Vários alunos – Com contas.
> Professora – Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6x8, o 12x8 ou o 25x8, eu quero para todos os números da tabuada do 8 e do 4. (...)
> Rita – Como assim?
> Professora – Para todos os casos da tabuada do 8. O que é que acontece na tabuada do 8?
> Aluno? – É sempre mais oito.
> Professora - Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?
> Alunos – Sempre a multiplicar por oito.
> Professora – Como é que eu posso escrever isso?
> Rita – Usamos um ponto de interrogação.
> Fábio – Vezes oito.

[2] Nesta comunicação, a referência "professora" diz respeito à professora/investigadora.

Desta forma, a professora procura que os alunos expressem a estratégia de cálculo para além dos casos particulares referidos no enunciado da tarefa. Rita sugere a utilização do "ponto de interrogação" e, em colectivo, os alunos conseguiram traduzir para a linguagem matemática o que haviam feito em linguagem natural, do seguinte modo:

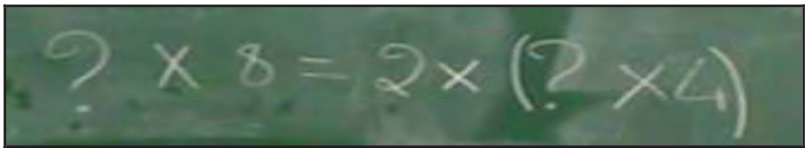


Figura 6 - Expressão final da generalização em linguagem matemática.

Tarefa "A estratégia do Afonso"

Nesta tarefa também foi trabalhada a relação de dobro e metade, desta vez entre as tabuadas do cinco e do dez. Para tal, foi explorado o exemplo particular de 36x5, como mostra o enunciado da tarefa:

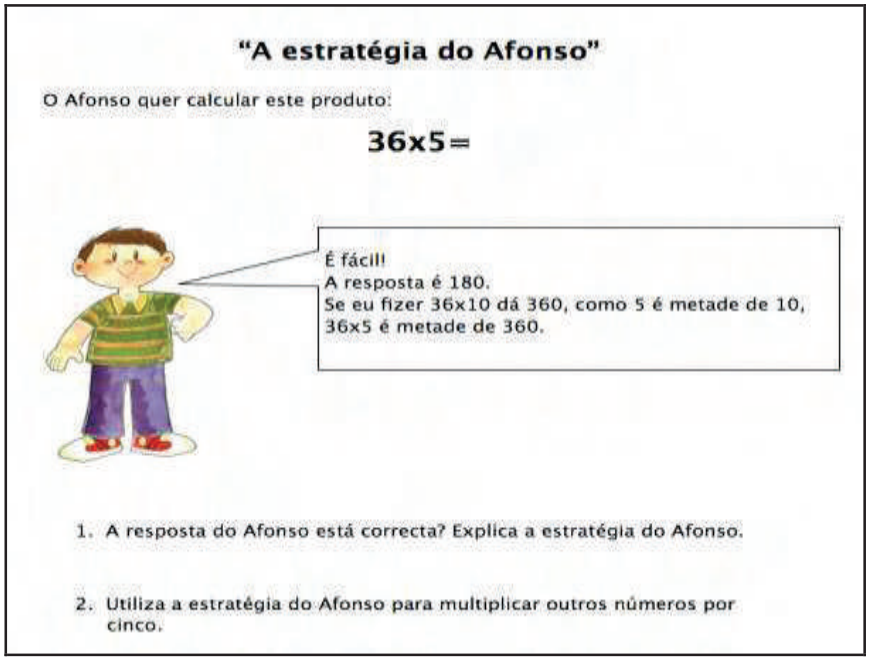


Figura 7 - Enunciado da tarefa "A estratégia do Afonso"

Na resposta à primeira questão, todos os alunos conseguiram verificar que a resposta do Afonso estava correcta e explicaram de diferentes formas a estratégia usada. A resposta que se apresenta, em seguida, mostra como o par de alunos conseguiu reconhecer que a resposta do Afonso estava correcta e que foi usada a estratégia do dobro e da metade para determinar o produto de 36x5. Esses alunos utilizaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para determinar o produto de 36x5.

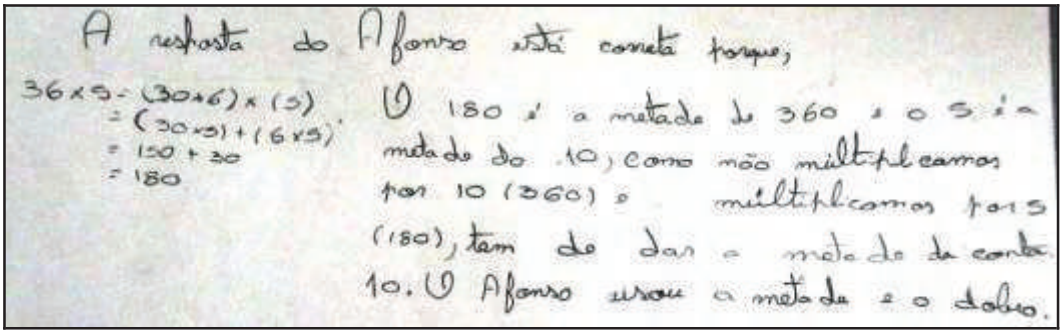


Figura 8 - Resposta do par Rita e Miguel.

No exemplo seguinte os alunos também conseguiram reconhecer que a resposta do Afonso estava correcta. Estes alunos salientam ainda as relações numéricas de dobro e metade envolvidas na estratégia de cálculo representando-as esquematicamente:

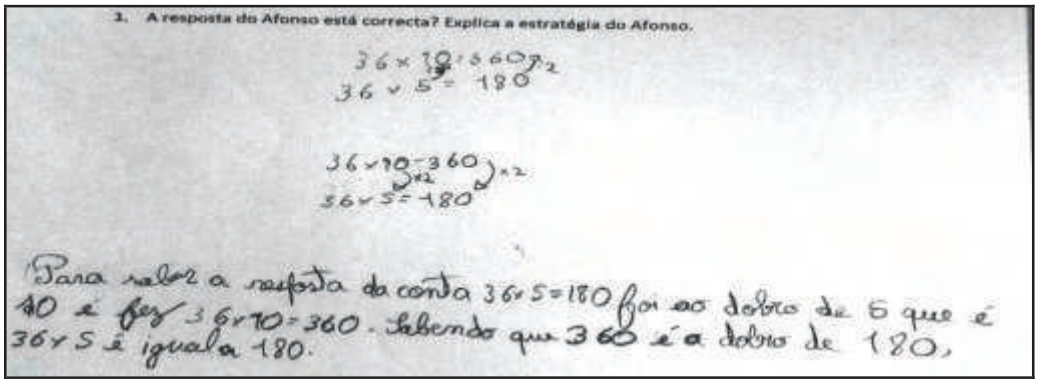


Figura 9 - Resposta do par João V. e Lawry.

Na discussão colectiva, a professora procurou que os alunos generalizassem a estratégia do Afonso através da linguagem natural. O excerto seguinte mostra como diversos alunos conseguiram fazê-lo, sem dificuldade:

Professora. – Quem é que é capaz de explicar por palavras a estratégia do Afonso?
Fábio – Ele para saber a tabuada do cinco fez metade da tabuada do dez.
Rita – Ele fazendo a tabuada do dez, se a dividir vai conseguir a tabuada do cinco. (...) A dividir por dois.

Assim, os alunos expressaram em linguagem natural a generalização da estratégia de cálculo: "Para descobrirmos a tabuada do cinco fazemos metade da tabuada do dez". Quando lhes foi solicitado para traduzirem essa frase para linguagem matemática, alguns alunos continuaram a usar exemplos particulares da estratégia de cálculo. A professora volta a insistir que pretende que a expressão seja válida para todos os casos e não só para alguns, referindo que deve ser usada "para qualquer número". Nessa altura, diversos alunos sugeriram a utilização de um símbolo não numérico. Inicialmente, sugeriram a utilização do "ponto de interrogação" que já tinham usado na tarefa descrita anteriormente, mas também apresentaram outras representações pictóricas. No entanto, tiveram dificuldade em representar a metade de "qualquer número" como mostra a representação sugerida pelo Henrique:

Figura 10 - Tentativa de expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Henrique.

Quando a professora solicita ao Henrique para explicar a sua representação, ele refere que "é um número inteiro a dividir por metade". Neste momento, a professora questiona a turma sobre se aquela representação permite mostrar o que eles já tinham descoberto sobre as tabuadas do cinco e do dez. Então, Rita sugere que se usem as seguintes expressões:

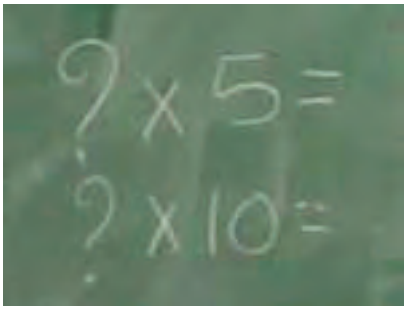


Figura 11 - Tentativa de expressão da generalização em linguagem matemática, feita pela Rita.

Perante essa forma de representação, a professora sugere que pensem sobre a estratégia que usaram para multiplicar qualquer número por cinco, relembrando o que haviam expressado em linguagem natural. Para tal, a professora retomou a exploração do produto 36x5, conduzindo a discussão para a exploração daquilo que tinham feito com a resolução desse produto. O excerto seguinte é ilustrativo desse momento da aula:

> Professora: Nós ali tínhamos 36x5. Fizemos trinta e seis vezes...
> Rita: Trinta e seis vezes dez.
> Professora: Trinta e seis vezes dez e depois fizemos o quê?
> Rita: Dividimos por dois.
> Professora: Então, como é que a gente pode pôr? Qualquer número vezes cinco é igual...
> Fábio: É igual a metade.
> Professora: O que é que a gente fez primeiro?
> Gonçalo C.: Multiplicou por dez.
> Professora: Multiplicou por dez. Ele fez trinta e seis vezes dez. Mas isto (apontando para 36x5=36x10) não é igual?
> Alunos: Não.
> Gonçalo C.: Pois não. Depois fez a metade.
> Professora: Fez a metade. E isso quer dizer o quê? Fez a metade disto (apontado para 36x10). Como é que se representa metade disto?
> Rita: A dividir por dois.

Nesse momento, é escrita no quadro a seguinte expressão numérica: 36x5=(36x10):2. Depois, a professora questiona "E como é que eu posso fazer isso sem ser para o 36?". Neste momento, Fábio sugere que é "qualquer número vezes dez a dividir por dois" e Rita escreve no quadro:

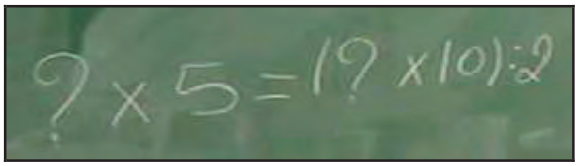


Figura 12 - Expressão da generalização em linguagem matemática.

Fábio propõe ainda a escrita daquela expressão usando outros símbolos. Assim, apresentou o seguinte exemplo no quadro:

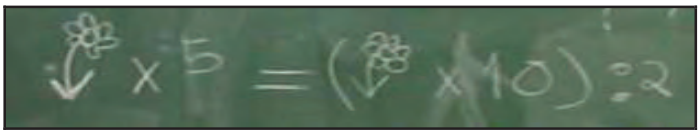


Figura 13 - Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Fábio.

Fábio refere ainda que aquela estratégia de cálculo podia ser usada para outras tabuadas. E exemplifica:

> Fábio: Também dá para outros números. Se for flor vezes três igual a flor vezes seis a dividir por dois. E depois também dá para o quatro e para o oito. E com o um e o dois.

Considerações finais e conclusões

Através da análise das duas tarefas apresentadas nesta comunicação, que exploravam estratégias de cálculo através de expressões numéricas particulares, procurar-se-á, agora, explicitar como a exploração dessas tarefas contribuiu para a mobilização da capacidade de generalização expressa em linguagem natural e em linguagem matemática.

Primeiramente, importa referir que os diferentes pares de alunos conseguiram reconhecer a estrutura subjacente às estratégias de cálculo de cada uma das tarefas, identificando as relações numéricas de dobro e metade e as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição envolvidas nas expressões numéricas apresentadas. Usaram ainda essas relações numéricas e as propriedades das operações para justificar as estratégias de cálculo representando-as de diferentes formas, com esquemas e diagramas de setas, como mostram os exemplos apresentados.

Por outro lado, diferentes pares de alunos conseguiram ainda, com relativa facilidade, construir generalizações que expressaram em linguagem natural. De forma clara, esses alunos referiram que podiam construir a tabuada do 8 a partir do dobro da tabuada do 4, na primeira tarefa, e a tabuada do 5 fazendo metade da tabuada do 10, na segunda tarefa. Em ambos os casos, os alunos exploraram expressões numéricas particulares para a construção da generalização. Salienta-se assim a importância de levar os alunos a focarem-se nas relações numéricas, trabalhando as expressões numéricas numa perspectiva mais numérica (Carpenter *et al.*, 2003).

No entanto, a expressão da generalização em linguagem matemática não foi tão imediata. Não é, de facto, o nosso interesse primário a introdução precoce à linguagem simbólica. Ainda assim, parece ser possível a iniciação nesse percurso como forma de tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, como mostram diversos estudos (Barbosa, 2010; Blanton, 2008; Santos, 2008). Neste sentido, importa salientar a importância da utilização de expressões numéricas particulares para o desenvolvimento da capacidade de generalização e, mais concretamente, para a introdução da linguagem simbólica. Esse facto pode ser reconhecido na segunda tarefa analisada, onde não estando explícita no enunciado a expressão numérica os alunos demonstraram maiores dificuldades em traduzir para linguagem matemática o que tinham referido em linguagem natural. Quando, na discussão colectiva, a expressão numérica foi retomada, os alunos mostraram já uma maior facilidade em traduzir a generalização para a linguagem matemática. Esse facto é coerente com a perspectiva de Fujii (2003) ao assinalar a importância de explorar a generalização a partir de expressões numéricas particulares passíveis de ser generalizadas, enquadrando-se no conceito de pensamento quase-variável defendido por este autor.

Concluindo, pode referir-se que a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares, como as apresentadas nestas tarefas, pode ser utilizada para a expressão da generalização em linguagem natural e sua tradução em linguagem matemática, permitindo a iniciação de um percurso em direcção à simbolização.

Referências

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Doutoramento, Universidade do Minho).

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom. Transforming Thinking, Transforming Pratice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos números*. Porto: Porto Editora.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 53-59.

Fujii, T. (2003). Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. ME: DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME - DGIDC.

Santos, M. (2008) *A generalização nos padrões: Um estudo no 5.º Ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado em Educação, FCUL).

DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO DO ENSINO DA ÁLGEBRA: CONTRIBUTO DE UMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO[1]

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação analisa de que forma a abordagem que orienta uma experiência de formação em Álgebra e no seu ensino, num curso de formação inicial de educadores e professores dos primeiros anos, contribui para a aprendizagem de uma formanda, Alice, de conceitos algébricos e relativamente ao ensino-aprendizagem deste tema. O presente trabalho segue uma metodologia qualitativa, recorrendo a estudos de caso. Os dados são recolhidos por dois questionários com tarefas matemáticas, um no início e outro no final da experiência e três entrevistas. A evolução de Alice é significativa em diversos tópicos algébricos bem como no conhecimento sobre as situações que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico e o modo como a abordagem em sala de aula pode potenciar o trabalho dos alunos em questões algébricas. A experiência de formação, ao promover a partilha de estratégias entre os formandos, a ênfase nos seus raciocínios e na justificação, teve um papel importante na sua aprendizagem.

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Álgebra; Experiência de formação.

Introdução

A formação inicial de futuros professores dos primeiros anos do ensino básico e de educadores de infância constitui um suporte importante para o modo como mais tarde desempenham a sua atividade profissional, sendo fundamental que os formandos assumam uma perspetiva ampla do ensino e a aprendizagem dos diversos temas matemáticos. Esta comunicação analisa o contributo de uma experiência de formação em Álgebra, na formação inicial de professores dos primeiros anos e educadores, que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico e o conhecimento dos aspectos fundamentais respeitantes ao ensino deste tema, para que, futuramente, os possam mobilizar na sua prática.

Na experiência de formação são propostas tarefas de carácter exploratório relativas a tópicos como relações, sequências, regularidades, sucessões, funções e modelação matemática e a articulação entre si e com outros temas, tendo em vista promover o

desenvolvimento do conhecimento matemático dos formandos. A natureza exploratória das tarefas pretende levá-los a desenvolver o seu conhecimento, aliando o conhecimento algébrico ao conhecimento para ensinar Álgebra. Diversas propostas partem de situações de ensino-aprendizagem, de modo que os formandos tenham oportunidade de: (i) analisar estratégias usadas por alunos; (ii) observar, explorar e relacionar diferentes representações; (iii) compreender que conhecimento os alunos revelam; (iv) identificar as dificuldades dos alunos; e (v) refletir sobre hipóteses de trabalho com os alunos, visando fomentar o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Esta comunicação discute de que forma a abordagem que orienta a experiência de formação contribui para a aprendizagem de uma formanda, Alice, de conceitos algébricos e relativamente ao ensino-aprendizagem da Álgebra.

A formação inicial de professores em Álgebra

Nos últimos anos, tem ganho cada vez mais força a ideia que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve iniciar-se nos primeiros anos de escolaridade (Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Schliemann, 2007). Para Canavarro (2007), esta perspetiva promove o "aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber" (p. 92). Kaput (2008) considera que o pensamento algébrico integra três vertentes: (i) o estudo de estruturas e sistemas abstractos a partir de cálculos e relações, decorrentes da Aritmética e de raciocínio quantitativo; (ii) o estudo de funções, relações e variação; e (iii) a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, dentro e fora da Matemática. A formação inicial, no que respeita à Álgebra, deve atender a esta perspetiva de modo a proporcionar aos futuros professores experiências de aprendizagem que lhes sustentem as suas decisões para promover a aprendizagem dos seus alunos. Como referem Ponte e Chapman (2008), os futuros professores devem desenvolver a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos e o conhecimento dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade e as orientações curriculares. Segundo estes autores, as estratégias a usar na formação inicial devem procurar promover o desenvolvimento desse conhecimento, "integrando conteúdos e pedagogia e ensinando os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos" (p. 256).

A formação inicial em Álgebra deve ter em conta que os formandos, quando forem leccionar, serão colocados perante desafios e exigências relativamente ao pensamento algébrico que, na sua maioria, não experimentaram enquanto alunos. Deste modo, como refere Doerr (2004), é necessário, simultaneamente, construir a partir da sua experiência e quebrar o modelo que acompanha essa mesma experiência. Segundo a autora, é na formação inicial que os formandos devem ser chamados a compreender as suas próprias experiências e observações de ensino e a "compreender caminhos alternativos de ação que poderiam ser mais eficazes no desenvolvimento de uma compreensão conceptual da Matemática, para um maior número de alunos" (p. 269).

Kaput e Blanton (2001) reconhecem que os professores dos primeiros anos estão inseridos num processo de mudança no ensino-aprendizagem da Álgebra, por terem tido poucas experiências com atividades de generalização e formalização, aspectos que, na sua perspetiva, devem constituir a base do trabalho com os alunos na escola. Neste contexto de mudança, são muitos os desafios que se colocam aos professores a contemplar na sua formação inicial. Canavarro (2007), por exemplo, indica a necessidade de o professor valorizar o raciocínio dos alunos e a importância de selecionar tarefas e promover uma dinâmica de sala de aula conducentes ao desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Metodologia de investigação

O presente trabalho segue uma metodologia qualitativa, de cunho interpretativo, recorrendo a estudos de caso. O seu propósito é compreender a perspetiva dos participantes, num contexto de formação, assumindo a complexidade deste processo. A investigação é realizada pela primeira autora que é simultaneamente a docente da experiência de formação. Esta opção metodológica vincula a investigação de um modo estreito ao contexto real de sala de aula, permitindo que os resultados informem a sua própria prática profissional.

Este artigo foca o estudo de caso de Alice, uma formando que antes da entrada no ensino superior frequentou a disciplina de Matemática apenas até ao 9.º ano e, presentemente, pretende ingressar no Curso de Mestrado em Educação Pré-escolar. A recolha de dados tem lugar entre Junho de 2009 e Março de 2010. Os dados são recolhidos por dois questionários com tarefas matemáticas e questões didáticas, um

proposto no início e outro no final da experiência de formação e duas entrevistas com base nesses questionários, bem como uma terceira entrevista realizada durante a experiência de formação. As entrevistas incidem igualmente sobre questões matemáticas e didáticas e permitem ainda conhecer a perspetiva da formanda em relação ao trabalho efectuado na experiência de formação. É ainda realizada observação participante pela docente na experiência de formação, registando notas de campo e recolhendo documentos produzidos pela formanda durante a realização das tarefas da experiência de formação e na elaboração de um portefólio, sobre essas tarefas. A análise dos dados assume um cunho essencialmente interpretativo, procurando evidenciar o contributo da experiência de formação para a realização de tarefas algébricas e para o desenvolvimento da sua perspetiva sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra.

Exploração de situações matemáticas

Antes da experiência. No questionário inicial, Alice não responde a algumas questões, nomeadamente as que envolvem generalização e representação de propriedades das operações e que envolvem linguagens de modelação. Interpreta adequadamente situações que envolvem expressões numéricas mas não revela de modo claro o seu pensamento relacional. Em sequências pictóricas, como a da figura 1, determina corretamente termos próximos, adicionando sucessivamente 2 ao termo anterior:

Figura 1 – Sequência pictórica do questionário inicial

Na determinação de termos distantes e na generalização da sequência numérica Alice mantém a abordagem recursiva o que conduz a respostas incorretas. No questionário indica ter 62 pintas no termo de ordem 60, fazendo $60+2=62$. Revela não ter estabelecido uma relação entre a ordem do termo e o número de pintas que o constitui. Na entrevista verifica que o raciocínio que está a indicar para o termo de ordem 60 não é válido para os primeiros termos, testando o caso do 2.º termo em que o seu número de pintas não se obtém fazendo a adição de 2 à sua ordem. Contudo, desiste de determinar o termo de ordem 60. Como termo geral da sequência numérica indica a expressão

algébrica $n+2$. A generalização que estabelece tem por base um raciocínio recursivo e a letra *n* refere-se a um número que desconhece mas que representa o número de pintas da ordem anterior e não a ordem do termo que se pretende determinar.

Na interpretação de um gráfico de uma função não responde corretamente a algumas questões que envolvem a leitura de valores do eixo das ordenadas dada a indicação em relação a valores da variável independente. Em problemas que envolvem quantidades desconhecidas indica os valores corretos mas não explica como os calcula. Na entrevista diz ter chegado à solução por tentativas de modo a satisfazer as condições.

Durante a experiência. Alice envolve-se na resolução de situações matemáticas que promovem o pensamento algébrico. No seu trabalho individual, em pequeno grupo e em grande grupo, estabelece relações e representa generalizações em diversos tópicos. Considera significativo o trabalho de análise de expressões numéricas por dar significado à equivalência do sinal de igual e por promover o pensamento relacional, dando ênfase às propriedades das operações e não à realização do cálculo. O seu trabalho com regularidades e sequências (repetitivas e crescentes) é diversificado e resolve situações que envolvem sequências repetitivas, como a que se segue:

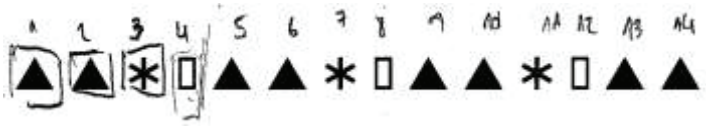


Figura 2 – Sequência repetitiva da entrevista 2

Alice generaliza com base na análise da unidade que se repete. Identifica que o termo das ordens múltiplas de quatro é o retângulo, que um triângulo surge nas ordens pares e outro nas ordens ímpares e que ordens ímpares têm também uma estrela como termo. Indica, ainda, que se dividir o número da ordem por quatro, por se tratar do número de elementos da unidade que se repete, e considerar o resto, consegue dizer qual dos elementos da unidade que se repete é termo dessa ordem.

O trabalho sequências numéricas associadas a sequências pictóricas contribui também para a sua aprendizagem. Este tópico torna-se muito significativo para Alice por nunca ter explorado as sequências a partir na estrutura dos termos pictóricos para identificar relações com a ordem dos termos e assim determinar o termo geral da sequência numérica, como na sequência seguinte:

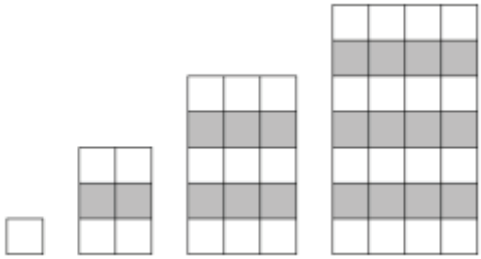


Figura 3 – Sequência pictórica da entrevista 2

> [referindo-se ao 3.º termo] Aqui é a mesma coisa. Três [aponta para as primeiras três linhas] é *n*, porque depois se tivesse mais *n* era mais três, menos um vai dar esse [o número restante de linhas. Escreve $n+n-1$] (…) Fica *n* vezes isto [refere-se à expressão $n+n-1$]. (E2)

As situações com funções afins, lineares e não lineares, envolvem diversas representações, que Alice realiza adequadamente relacionado tabelas e gráficos. Nas situações que envolvem quantidades desconhecidas, revela algumas dificuldades que ultrapassa ao estabelecer relações entre os dados. Realiza operações elementares que revelam um raciocínio relativo a quantidades que expressa em linguagem algébrica.

Após a experiência. Alice revela o seu pensamento relacional na análise de expressões numéricas, tendo por base as propriedades das operações. Contudo, manifesta ainda dificuldades na compreensão de situações que envolvem a subtração ao não decompor corretamente o subtrativo. No trabalho com sequências pictóricas identifica o termo geral da sequência numérica e com base nele determina termos próximos e distantes. Na análise de funções afins, interpreta corretamente os gráficos, identificando situações lineares e não lineares. Relaciona corretamente o gráfico com a expressão algébrica no que respeita à ordenada na origem mas não em relação ao seu declive. Nas questões com quantidades desconhecidas estabelece relações mas não as expressa em linguagem algébrica. Realiza diversas operações de acordo com as relações que estabelece entre os dados do problema, indicando o significado dos valores que vai obtendo. Alice mostra ainda algumas fragilidades na utilização da linguagem algébrica que se revelam na interpretação de expressões algébricas relativas a funções.

Durante e após a experiência de formação, em diversas situações, manifesta o seu pensamento algébrico, evidenciando um desenvolvimento significativo nas capacidades de estabelecer relações e de analisar e resolver situações que envolvem sequências e modelação matemática.

Perspetiva sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra

Antes da experiência. Alice dá breves indicações quando analisa respostas de alunos, conseguindo identificar que o aluno não analisa corretamente a expressão numérica. Na análise da sequência pictórica atende apenas à construção do aluno sem verificar se respeita a lei de formação. Na entrevista analisa estes dois aspectos de modo adequado.

Perante a conjetura formulada por um aluno (figura 4), que pode ser modelada de modo a ser validada, Alice impõe restrições desnecessárias:

Um aluno formulou a conjetura seguinte: "Multiplico dois números naturais. Se multiplicar metade do primeiro pelo dobro do segundo o produto é igual ao obtido na primeira situação"

Figura 4 – Conjetura do questionário inicial

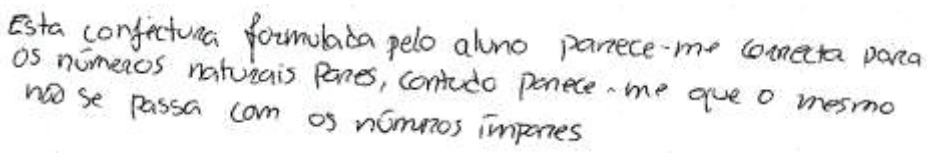


Figura 5 – Resposta de Alice no questionário inicial

A sua estratégia envolve a realização de tentativas para verificar a validade da conjetura para um conjunto de números e não consegue estabelecer uma generalização.

Durante a experiência. A análise de respostas de alunos em expressões numéricas abertas desperta Alice para as dificuldades na compreensão do sinal de igual que muitos alunos revelam nos primeiros anos. Explora e generaliza sequências pictóricas, vê como alunos de 2.º ano determinam diversos termos da sequência, evidenciando diferentes análises da sua estrutura, e verifica que estes conseguem expressar generalizações em linguagem natural. O trabalho com funções evidencia uma abordagem ao estudo deste conceito nos primeiros anos e Alice propõe questões para discutir com os alunos que evidenciam a relação entre as variáveis. Analisa situações de modelação onde os alunos usam diferentes estratégias e representações, nomeadamente, letras para representar quantidades desconhecidas. Com este trabalho percebe o contributo para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos da partilha de estratégias e da comunicação desses raciocínios.

Após a experiência. Alice identifica o pensamento relacional que o aluno evidencia e valida a sua resposta. Valida respostas de um aluno no âmbito de sequências pictóricas mas não analisa pormenorizadamente a sua resolução de modo a evidenciar o seu raciocínio. Na validação da conjetura de um aluno identifica regularidades e tira conclusões adequadas, embora usando um processo por tentativas.

Alice valoriza as aprendizagens que realiza na experiência de formação, identificando o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e do seu conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Destaca, ainda, a importância de ser capaz de usar diferentes estratégias e da capacidade que o professor deve ter para analisar as resoluções dos alunos e para conduzir as situações de ensino-aprendizagem de modo a fomentar a discussão e partilha de ideias.

Balanço do percurso na experiência de formação

Desenvolvimento do conhecimento algébrico e didático. Durante a experiência de formação, Alice faz um balanço sobre o trabalho que está a desenvolver, revelando sentir algumas dificuldades por estar a tratar assuntos muito distantes dos que conhece:

> Eu sinto que há partes da disciplina em que tenho muito mais dificuldades, não quer dizer que não goste ou que não concorde com o método ou outra coisa qualquer, é uma dificuldade que eu tenho, porque é uma coisa que eu não dou há… Desde o 9.º ano. E há coisas que nem nunca abordei, nem ouvi falar e depois é mais complicado. (E2)

A dificuldade que Alice identifica não está relacionada com o modo de trabalho nas aulas mas com o facto de se tratar de tópicos que desconhece, o que reforça a importância de tratar tópicos de Álgebra que suportam o desenvolvimento do pensamento algébrico dado que estes formandos não têm uma experiência prévia neste âmbito. Tal como refere em relação a outras unidades curriculares, Alice diz sentir dificuldades em compreender as situações no início de qualquer tema, o que ultrapassa com a continuação do trabalho.

A análise de respostas de alunos a questões envolvendo expressões numéricas abertas, na experiência de formação, possibilita a Alice uma reflexão sobre o trabalho com cunho algébrico que se pode desenvolver em diversos temas matemáticos. Refere que, com essa tarefa, tomou "consciência das dificuldades que muitos alunos apresentam, inicialmente, ao interpretarem o significado do sinal de igual" (Portefólio-T1). Esta

situação alerta-a para as interpretações que um trabalho sistemático com ênfase no cálculo pode promover nos alunos: "eu não tinha bem a noção que os alunos do 1.º ciclo ignorassem tanto o significado de equivalência, porque eu pensei que fosse mais trabalhado e que eles tivessem mais essa noção" (E2). Com esta experiência de formação percebe a importância de promover nos alunos uma interpretação adequada do sinal de igual, contribuindo para a compreensão da linguagem algébrica.

Antes desta experiência, Alice desconhecia o trabalho com sequências pictóricas. Na segunda entrevista, que ocorre após ter trabalhado algumas sequências, identifica esse trabalho como sendo o que lhe proporcionou uma maior aprendizagem e o que mais gostou: "Eu gostei muito, eu gostei muito da generalização (…) é engraçado ver como a partir de uma imagem conseguimos descobrir a imagem número não sei quantos" (E2). Para obter um termo geral de uma sequência numérica associada a uma sequência pictórica, indica: "tento encontrar alguma regularidade, normalmente começo sempre pelo número de ordem. Tem de haver alguma relação com o número de ordem" (E2). Na análise de um termo procura regularidades na sua estrutura que têm por base a sua ordem.

Tendo como horizonte a educação pré-escolar, indica as sequências como tópico que pode tratar neste nível. Na sua perspetiva, o professor deve:

> Levar a que eles consigam pensar, ainda que numa coisa simples, porque não pode ser uma coisa complicada... Eles já têm que pensar, já têm que experimentar, então já os leva a raciocinar. E eu acho que as sequências, essas eu já sei que podem ser trabalhadas no pré-escolar, mais que isso, ainda não sei muito, mas pronto as sequências sim, estou a ver-me a trabalhar as sequências com os miúdos. (E3)

O bom desempenho que revela neste tipo de situações e a segurança nos seus conhecimentos neste âmbito permitem-lhe assegurar que pode adequá-las e ao ensino pré-escolar.

Modo de trabalho na experiência. Alice indica o que considera mais significativo em relação a este aspecto:

> Eu gosto do método, principalmente quando nós trabalhamos muito em grupo e conseguimos comunicar com as nossas colegas, saber opiniões e às vezes até elas me explicam a mim, trocamos ideias e eu gosto muito desse método. O método mais teórico também é necessário, também não tenho nada contra. Só que eu às vezes sinto-me assim um bocadinho "à nora". (E2)

Refere gostar particularmente dos momentos de trabalho em grupo por estes

envolverem a partilha de ideias e de conhecimentos matemáticos com os colegas. Valoriza a possibilidade de poder colocar questões às colegas e serem estas a esclarecê-las. Mostra-se muito insegura em relação aos seus conhecimentos e diz desconhecer muitos dos conteúdos abordados. A discussão com as colegas possibilita o esclarecimento de interpretações e de pequenas questões que não colocaria perante o grande grupo. Na terceira entrevista diz ter gostado da abordagem seguida porque, como diz "foi também muito à base de trabalho na sala de aula. Não quer dizer que nós não aprendamos com a teoria, mas acho que aprendemos muito também em grupo, a discutir ideias e a tirar conclusões" (E3). Refere não querer menosprezar a aprendizagem que pode advir de aulas de carácter teórico mas reconhece que a sua aprendizagem se desenvolve, essencialmente, nos momentos de trabalho em grupo, da partilha e discussão de ideias e dos momentos de síntese em grande grupo preconizados nesta experiência de formação.

Alice valoriza as tarefas realizadas na experiência de formação: "Gosto [das tarefas], apesar de muitas delas serem para mim difíceis, mas gosto e depois com o contacto com as colegas dá para ir percebendo aqui e ali" (E2). Considera a maioria das tarefas difícil para realizar individualmente mas o trabalho em interação com as colegas faz com que não tenha receio e aprecie a sua realização. Muitas das dificuldades que sente nas aulas devem-se a dificuldades em alguns conhecimentos elementares: "às vezes é mesmo muito difícil porque eu não tenho bases, mas depois com as minhas colegas lá fui conseguindo" (E3). O modo de trabalho na experiência de formação possibilita-lhe envolver-se nas situações propostas, como refere: "já estou à vontade, já troco ideias, já dou opiniões, o contrário também, e tudo o que seja trabalhos de grupo eu gosto, na aula ou mesmo sem ser na aula" (E3).

Conclusão

Alice reconhece ter tido muitas dificuldades ao longo do seu percurso escolar e manifesta-as em relação a conhecimentos matemáticos elementares. Durante a experiência de formação, contacta pela primeira vez com diversos tópicos. Manifesta uma evolução bastante positiva no que respeita à análise de expressões numéricas, revelando o seu pensamento relacional, na generalização de sequências pictóricas e numéricas e na sua representação em linguagem algébrica. Mostra um melhor

desempenho na resolução de problemas envolvendo quantidades desconhecidas em que usa, essencialmente, estratégias aritméticas que se revelam eficientes para determinar valores desconhecidos e validar conjeturas por dedução. Com a experiência de formação, valoriza aspectos transversais para a sua prática letiva futura como a importância dos momentos de partilha e de discussão, que se revelam também fundamentais para a sua própria aprendizagem em Álgebra durante a experiência.

Alice assume de um modo claro o seu desejo em frequentar o Mestrado em Educação Pré-escolar. Ao perspetivar o trabalho em Álgebra na sala de aula, centra-se no nível pré-escolar, o que reduz a diversidade de aspectos do pensamento algébrico que sugere. Ainda assim, aponta aspectos fundamentais relativos ao papel do professor na promoção de situações que envolvem o pensamento algébrico e na dinâmica da sala de aula, com ênfase para a discussão em grande grupo como situação promotora da partilha e análise de raciocínios, que advêm da dinâmica e dos aspectos abordados na experiência de formação.

A evolução de Alice é significativa em diversos tópicos de Álgebra e no seu conhecimento sobre as situações que visam o pensamento algébrico e o modo como a abordagem em sala de aula pode potenciar o trabalho dos alunos em questões algébricas. Indica que a dinâmica da experiência de formação, promovendo a partilha de estratégias entre os formandos com ênfase nos seus raciocínios e na justificação com base em definições e propriedades matemáticas, teve um papel importante na sua aprendizagem, evidenciando a importância deles contactarem com o modo como podem ensinar os seus alunos (Ponte & Chapman, 2008). A análise de situações de ensino-aprendizagem nos primeiros anos contribui também para que compreenda o ensino da Álgebra e perspetive situações conducentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, um aspecto importante do papel do professor (Canavarro, 2007). A realização de tarefas de natureza exploratória, que envolvem a análise de situações de ensino-aprendizagem e promovem a discussão e partilha de ideias e conclusões entre os formandos, contribui para a aprendizagem de Alice no âmbito de tópicos que em muitos casos desconhecia, bem como para a aprendizagem de aspectos transversais sobre a dinâmica das aulas, perspetivando a natureza do trabalho a desenvolver com os alunos para promover o seu pensamento algébrico.

Referências

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412- 446.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, USA: NCTM e IAP.

Doerr, H. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 265-290). Norwell: Klumer.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grade*s (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 1, pp. 344–351). Melbourne: The University of Melbourne.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

UMA UNIDADE DE ENSINO DE CUNHO EXPLORATÓRIO PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL[1]

Ana Isabel Silvestre
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
anaisabelsilvestre@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação apresenta uma unidade de ensino sobre a proporcionalidade directa e descreve a sua realização em duas turmas do 6.º ano de escolaridade. A unidade de ensino está de acordo com as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico. O modo como a unidade de ensino decorreu na sala de aula e as aprendizagens dos alunos nos vários aspectos que envolvem o raciocínio proporcional suportam a conjectura de ensino-aprendizagem que sugere um desenvolvimento desta capacidade matemática quando os alunos (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade directa (de valor omisso e de comparação), problemas pseudoproporcionais e outros em que se averigua a existência de proporcionalidade directa; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fracção; razão na forma de divisão).

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, Unidade de ensino, Abordagem exploratória.

Introdução

A introdução do tema Álgebra no 2.º ciclo, onde se integra o tópico da proporcionalidade directa, é uma das mudanças apresentada pelo Programa de Matemática (ME, 2007) em relação ao programa anterior. Esta mudança, entre outras, pretende ter impacto na prática lectiva do professor.

O desenvolvimento e aperfeiçoamento de unidades de ensino, por investigadores, podem gerar artefactos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática lectiva. Ao mesmo tempo, estas unidades permitem testar teorias sobre o modo como os alunos aprendem em condições diferentes das que usualmente lhes são proporcionadas. Assim, esta comunicação apresenta uma unidade de ensino sobre a noção de proporcionalidade directa, de cunho exploratório, de acordo com as

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

orientações do novo programa, descreve os seus fundamentos e a sua realização em duas turmas do 6.º ano de escolaridade. Além disso, analisa de que forma a unidade serviu de base à evolução dos alunos nos vários aspectos da sua capacidade de raciocínio proporcional.

A construção de unidades de ensino

Wittmann (1984, 1998) diz que a Educação Matemática tem como cerne a construção de artefactos e a investigação dos seus efeitos em diferentes ecologias educativas. Estes artefactos incluem unidades de ensino, conjuntos coerentes de unidades de ensino e o próprio currículo. Uma unidade de ensino tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem (uma conjectura de ensino-aprendizagem), sendo constituída por uma sequência de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didácticos. A conjectura de ensino-aprendizagem tem uma natureza eminentemente teórica, baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar (Sandoval, 2004). Além disso, é refinada ao longo do tempo, através de investigação empírica. A construção de uma unidade de ensino procura estabelecer um caminho de aprendizagem, orientado por esta conjectura. Este é um trabalho complexo que obriga à mobilização do conhecimento sobre o tópico, das orientações curriculares e à tomada de decisões relativas ao que os alunos têm de aprender e sobre o modo de os ensinar.

Os recursos didácticos que desempenham um papel saliente nesta unidade de ensino são as tarefas matemáticas e as tecnologias de informação de comunicação. Na literatura encontramos várias formas para classificar as tarefas matemáticas. Por exemplo, Ponte (2005) classifica as tarefas em função do grau de desafio matemático e de estrutura. O desafio matemático está relacionado com a percepção da dificuldade de uma questão que se coloca ao aluno, na sala de aula ou em momentos de avaliação, e a estrutura com a natureza e precisão do enunciado. Para o autor, as tarefas rotineiras orientadas para a aquisição de conhecimentos e técnicas de cálculo não garantem o desenvolvimento das capacidades matemáticas, pelo que devem ser propostas outras tarefas como problemas e as explorações e investigações.

São vários os tipos de tecnologias de informação e comunicação que podem ser usadas como recursos no ensino-aprendizagem da Matemática, incluindo a calculadora e o computador com software genérico (como a folha de cálculo) e específico (como o *Geometer's Sketchpad*). As calculadoras são ferramentas de aprendizagem eficazes

quando usadas em cálculos rotineiros e em tarefas que exigem investigação e exploração por parte dos alunos. Por seu lado, a folha de cálculo permite que os alunos não se preocupem com os cálculos e se centrem sobretudo nos aspectos relevantes das questões (Moreira, 1989). Outra particularidade é o facto de permitir o estudo de dados numa perspectiva aritmética, algébrica e gráfica.

Raciocínio proporcional

Silvestre e Ponte (2009) consideram que a capacidade de raciocínio proporcional envolve três aspectos: (i) distinguir relações de proporcionalidade directa daquelas que não o são; (ii) compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa; e (iii) resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afectado pelos dados numéricos, contexto e representação. Estes aspectos pretendem operacionalizar a noção de raciocínio proporcional, indicando as diferentes vertentes a ter em consideração no seu desenvolvimento.

Nas estruturas multiplicativas, isto é, nas situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou ambas as operações, Vergnaud (1983) identifica três classes, sendo uma delas o isomorfismo de medidas, que se refere a uma proporção directa simples. Neste caso, as transformações que se operam dentro ou entre variáveis mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos, como mostram a figura:

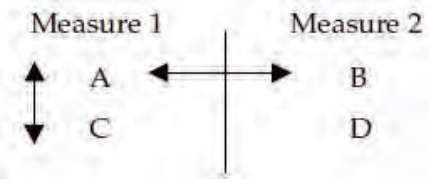


Figura 1– Isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983)

Tendo em conta estas transformações, Stanley, McGowan e Hull (2003) argumentam que a abordagem em que os alunos "resolvem proporções" (sic) está ultrapassada e deve ser substituída por outra abordagem em que estes se envolvem em actividades que os ajudam a descobrir que a proporcionalidade é a variação mútua de duas grandezas.

Neste trabalho, usamos problemas de valor omisso, de comparação e pseudoproporcionais. Os primeiros apresentam três valores numéricos e pedem o quarto valor, o valor omisso. Os problemas de comparação apresentam dois ou mais pares de valores numéricos e pedem a sua comparação. Nalguns casos, o contexto destes

problemas exige um julgamento qualitativo. Os problemas pseudoproporcionais são aqueles em que não existe uma relação de proporcionalidade directa, mas levam frequentemente, os alunos a assumir que ela existe.

Vários estudos analisam as estratégias usadas pelos alunos para resolver estes problemas. Uma outra estratégia de cunho mais informal é a *composição/decomposição* (Hart, 1984), que envolve tanto raciocínios multiplicativos como aditivos. Pelo seu lado, Lamon (1994) classifica as estratégias como sendo "dentro" e "entre" variáveis, distinguindo entre assim raciocínios de natureza escalar (respeitantes a transformações dentro da mesma variável) e de natureza funcional (estabelecendo relações entre variáveis).

A construção de uma unidade de ensino da proporcionalidade directa

A unidade de ensino tem um cunho exploratório, procurando envolver os alunos em tarefas não rotineiras, em cuja resolução mobilizem os seus conhecimentos intuitivos. A conjectura de ensino-aprendizagem que lhe está subjacente assume que os alunos desenvolvem o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade directa (de valor omisso e de comparação), problemas pseudoproporcionais e outros em que se averigua a existência de proporcionalidade directa; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fracção; razão na forma de divisão). A unidade de ensino, como mostra a tabela 1, é constituída por 5 fichas de trabalho e por dois testes. A ficha de trabalho inicial apresenta aos alunos uma investigação, a segunda ficha uma exploração e as restantes três fichas são constituídas por problemas.

Com o teste diagnóstico pretende-se conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, antes do desenvolvimento da unidade de ensino, em particular os vários aspectos considerados neste estudo, e decidir-se sobre a sua exequibilidade. O teste final pretende dar a conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos após o desenvolvimento da unidade de ensino.

A tabela 1 apresenta o planeamento da unidade de ensino.

Fichas de Trabalho e Testes	Descrição	Modo de trabalho	Tempo (bloco 90 minutos)
Teste diagnóstico	- Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre os aspectos que envolvem o raciocínio proporcional.	Individual	1
Ficha 1 O coelho e a tartaruga	**- Natureza da tarefa:** Investigação **- Objectivos da tarefa:** • Distinguir uma relação de proporcionalidade directa de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade directa, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Representar a informação em tabelas e gráficos. **- Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	2,5
Ficha 2 O segredo da tartaruga	**- Natureza da tarefa:** Exploração **- Objectivos da tarefa:** • Distinguir as relações de proporcionalidade directa daquelas que o não são. • Experimentar vários valores invariantes (constante de proporcionalidade) e verificar que a relação de covariação se mantem. • Explicar o significado da constante de proporcionalidade. • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado de forma decimal ou na forma de razão (representação como fracção ou com dois pontos). **- Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	1,5
Ficha 3 No país das tartarugas	**- Natureza das tarefas:** Problemas **- Objectivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso e de comparação). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fracção; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **- Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 4 Maratona dos coelhos e mais problemas	**- Natureza das tarefas:** Problemas **- Objectivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de percentagem). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fracção; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **- Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 5 Pista interdita a coelhos e outras histórias	**Natureza das tarefas:** Problemas **Objectivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de escala). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fracção; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Teste final	- Avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos durante a unidade de ensino, relacionadas com os aspectos que envolvem raciocínio proporcional.	Individual	1

Metodologia

O estudo é uma experiência de ensino, uma das formas de *design research*, que pretende conhecer a influência da unidade de ensino descrita na secção anterior na capacidade de raciocínio proporcional dos alunos (Confrey, 2006).

A unidade de ensino foi desenvolvida em duas turmas de uma escola da periferia de Lisboa, cujos alunos apresentam um desempenho escolar heterogéneo na disciplina de Matemática. Estiveram envolvidas duas professoras que desenvolveram um trabalho colaborativo com a primeira autora desta comunicação.

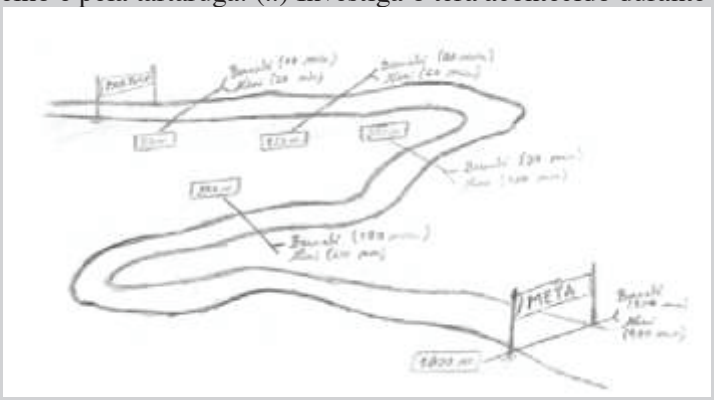
Todas as aulas da unidade de ensino foram gravadas em vídeo. Foram também recolhidos e posteriormente analisados os registos escritos dos alunos nas diversas tarefas. Foram aplicados às turmas dois testes, um teste de diagnóstico e um teste final. Tendo em consideração a natureza do estudo, a análise de dados é essencialmente descritiva. Os dados recolhidos nos testes foram também alvo de uma análise quantitativa.

Desenvolvimento da unidade de ensino

Nesta secção apresentamos com detalhe duas das tarefas propostas aos alunos.

Ficha de trabalho 1. Na primeira aula as professoras apresentam a tarefa, dizendo que se trata de uma investigação, chamam a atenção os alunos para a necessidade de realização de registos durante o trabalho para poderem fazer um relatório detalhado e dão indicações sobre a constituição dos grupos e a gestão do trabalho em grupo.

Tabela 2 – Ficha de trabalho 1 (aspecto parcial)

Todos os anos se realiza a corrida mais famosa do mundo. (...) O esquema mostra a prova realizada pelo coelho e pela tartaruga. (..) Investiga o terá acontecido durante a corrida.


Após receberem a ficha, os alunos levam algum tempo a formular conjecturas que reúnam o consenso da maioria dos elementos dos respectivos grupos. Este processo é demorado mas implica-os na realização de um trabalho cognitivamente exigente que requer a mobilização do seu conhecimento e que vai além da Matemática, exigindo ainda a organização das ideias para as comunicar com clareza aos outros elementos do grupo, como mostra o diálogo de um grupo da turma A.

> Manuel: Foi depois dos 500 metros que ele dormiu e perdeu tempo para a tartaruga. (Segue-se uma discussão sobre este argumento.)
>
> Rita: Mas se ele dormiu não saiu do lugar! Eu acho que ele se cansou e depois foi a correr mais lento e perdeu.
>
> Carolina: (...) É mesmo isso! Olha aqui, [o coelho] aos 150 metros deveria ter feito 300 [minutos] e fez 200 [minutos]. (Os colegas não percebem e Carolina explica.) Aqui (aponta para os150 metros) é 50 mais 50 e mais 50 então aqui (aponta para o tempo realizado pelo coelho aos 150 metros) deveria ser 300 [minutos], 100 mais 100 e mais 100. Mas é 200 [minutos], foi muito mais rápido.

Os alunos deste grupo começam por analisar os valores numéricos e a conjecturar sobre o que teria acontecido na corrida, acabando por considerar que o coelho se cansou e, por isso, perdeu. É interessante verificar que Carolina recorre a uma relação de proporcionalidade directa utilizando um procedimento aditivo para explicar aos colegas porque pensa que o coelho tinha realizado até ali uma corrida rápida. É provável que esta aluna, dada a sua facilidade em realizar cálculos mentalmente, tenha verificado a existência da relação que explica na corrida a tartaruga, mas não a comunicou. Na segunda aula, os alunos continuaram o trabalho, tendo por foco a redacção do relatório. As figuras seguintes apresentam parte dos relatórios de dois grupos da turma A, que descrevem o modo como os alunos representam os dados e as conclusões da sua investigação. A qualidade do trabalho de alguns grupos é surpreendente como é o caso do grupo de Tomás (ver tabela 3).

Os relatórios dos alunos constituem a base do trabalho realizado na terceira aula. Esta começou por uma discussão alargada na turma sobre o facto de, perante uma mesma situação, os personagens (coelho e tartaruga) terem tido um comportamento diferente na corrida. É particularmente interessante a forma como os alunos explicam que, no caso da Nini, os valores numéricos da distância e do tempo variam mantendo a mesma velocidade – a maioria dos alunos designa a velocidade por "ritmo" – reconhecendo a existência de variação dos pares numéricos das duas variáveis que mantêm velocidade

constante (invariante). Esta discussão é também importante para os alunos compreenderem que, utilizando estratégias diferentes, podem encontrar uma resposta coerente. Foi durante a discussão que a professora disse aos alunos que a constante que tinham identificado se designa por constante de proporcionalidade.

Tabela 3 – Respostas dos grupos da turma A à ficha de trabalho 1

Resposta do grupo do Carolina:

Nini

Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/Metros
50	20	0,4
150	60	0,4
300	120	0,4
500	200	0,4
1000	400	0,4

Barnabé

Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/metros
50	10	0,2
150	20	0,133333
300	30	0,1
500	180	0,36
1000	404	0,404

[Pela observação do esquema.] "O Bamabé até 500 metros esteve á frente. Mas dos 500 metros até á meta a Nini conseguiu vantagem de 4 minutos acabando em 1º lugar."

[A professora oralmente insistiu na investigação sobre o que teria acontecido durante a corrida.] A Rita e a Carolina propuseram uma tabela com os metros percorridos e o tempo demorado do coelho e da tartaruga. Mas o Manuel disse que assim não ficava muito bem e sugeriu que ficava melhor uma tabela para cada animal." (...) "... Fizemos a conta entre os números e concluímos que a Nini andou sempre ao mesmo ritmo e o Bamabé não, ou seja, acelerou depois andou mais devagar."

Resposta do grupo do Tomás

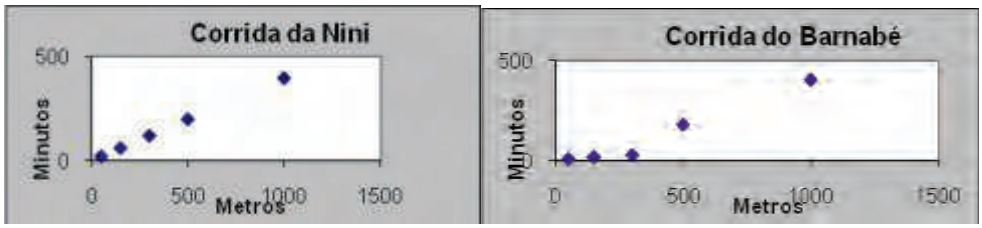
Barnabé

Metros	Minutos	Divisões
50	10	5
150	20	7,5
300	30	10
500	180	2,78
1000	404	2,475

Nini

Metros	Minutos	Divisões
50	20	2,5
150	60	2,5
300	120	2,5
500	200	2,5
1000	400	2,5
2000	800	2,5

"Começámos por fazer uma tabela como nos outros trabalhos [já realizados com recurso à folha de cálculo]. Depois colocámos todos os dados dos metros que percorreram e os minutos demoraram a percorrê-los. Observámos os números com atenção e percebemos que não podemos comparar os minutos do Bamabé com os da Nini." (...) "Fizemos a divisão dos metros com os minutos e vimos que o Bamabé foi alterando a velocidade e a Nini foi sempre na mesma velocidade." (...) "Pensámos que para podermos chegar a um resultado prolongando a pista até ter 2000 metros como o Bamabé foi alterando a sua velocidade não podia continuar a manter o ritmo mas a Nini como tinha estado sempre à mesma velocidade se a pista de prolongasse conseguiria acabar ao mesmo ritmo." (...) Fizemos os gráficos como nos outros trabalhos e a professora ajudou-nos a escolher um e vimos que na Nina os pontos estão em linha."



Ficha de trabalho 3. Esta ficha contém vários problemas, cada um com duas ou três alíneas (Tabela 4). Espera-se que os alunos mobilizem o conhecimento sobre a relação multiplicativa de covariação entre variáveis e de invariância da relação entre variáveis, resolvendo problemas de valor omisso e de comparação. Paralelamente, procura-se que os alunos utilizem várias representações para desenvolverem flexibilidade na sua

utilização. Apresentamos como exemplo as respostas de dois grupos da turma B a duas alíneas de um problema da ficha de trabalho.

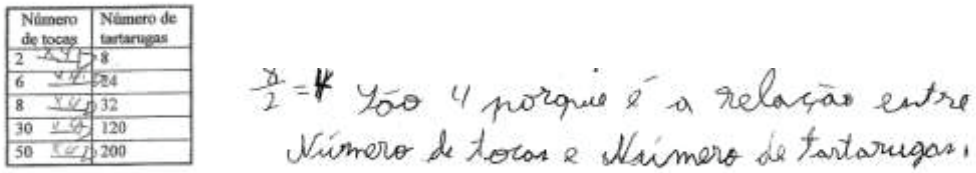
Tabela 4 – Problema da ficha de trabalho 3 e respostas de dois grupos da turma B

Por causa do tamanho das carapaças existem uma regra na atribuição de tocas. Na tabela estão representados alguns dados recolhidos em cinco veredas.

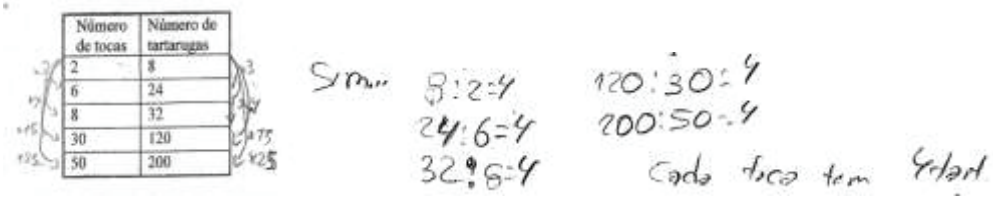
Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

a) Será possível saber o número de tartarugas que existe em cada toca? Explica como pensaste.

Resposta do grupo do Dário:

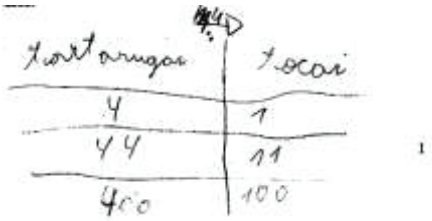


Resposta do grupo do Joel:

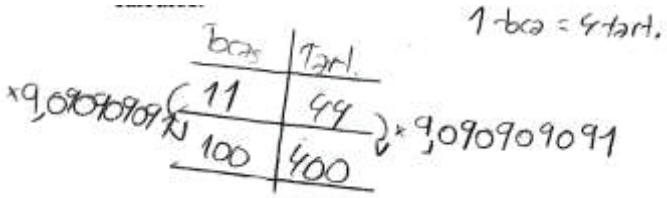


c) Quantas tocas serão necessárias para colocar 44 tartarugas? E 400 tartarugas?

Resposta do grupo do Dário:



Resposta do grupo do Joel:



O grupo de Dário estabelece uma relação entre variáveis e identifica 4 como constante de proporcionalidade. Utiliza esta relação para determinar o valor omisso pedido na

questão *c*. Por sua vez, o grupo de Joel começa por explorar a relação de covariação entre as variáveis. Só depois explora a relação entre variáveis para identificar a constante de proporcionalidade. Este grupo para responder à questão *c* recorre à relação escalar, representando o factor na forma de dízima. Durante a discussão do problema, a professora promove uma análise das estratégias dos grupos sobre a eficiência do processo de resolução, em particular, no que respeita à escolha de uma estratégia que envolva representações mais simples e fáceis de usar nos cálculos.

Avaliação da unidade de ensino

Da unidade de ensino fazem parte dois testes, um de diagnóstico e outro para avaliação das aprendizagens dos alunos. Note-se que as questões dos dois testes não são totalmente comparáveis na medida que as do teste diagnóstico não envolvem termos específicos introduzidos durante a unidade de ensino. As tabelas 5 e 6 mostram o desempenho dos alunos das turmas A e B no teste diagnóstico e no teste final.

Tabela 5 – Resultados dos testes inicial e final da turma A

	Teste inicial			Teste final		
Tipo de Questão	N.º de questões	N.º de respostas correctas (25 alunos)	% de respostas correctas	N.º de questões	N.º de respostas correctas (25 alunos)	% de respostas correctas
Valor omisso	5	36	29	5	77	61
Comparação	5	46	37	7	123	70
Pseudoproporcionais	3	23	30	3	44	59
Comunicação/ Representação	-	-	-	5	84	67

Tabela 6 – Resultados dos testes inicial e final da turma B

	Teste inicial			Teste final		
Tipo de Questão	N.º de questões	N.º de respostas correctas na turma (26 alunos)	% de respostas correctas	N.º de questões	N.º de respostas correctas na turma (26 alunos)	% de respostas correctas
Valor omisso	5	57	44	5	94	72
Comparação	5	79	61	7	156	85
Pseudoproporcionais	3	18	23	3	43	55
Comunicação/ Representação	-	-	-	5	75	58

Observando os resultados dos testes, nas duas turmas, os alunos têm melhor desempenho no teste final do que no teste diagnóstico nas três categorias de problemas o que evidencia que houve aprendizagem. Nos problemas de valor omisso e de comparação, os alunos da turma B revelam em ambos os testes um melhor desempenho que os da turma A, sendo o aumento da qualidade do seu desempenho semelhante em ambas as turmas.

Em ambos os testes, os alunos revelam mais facilidade em responder correctamente a problemas de comparação do que a problemas de valor omisso. Esta situação pode ser explicada pelo facto de terem trabalhado num passado próximo com problemas que envolvem a comparação de fracções.

No teste diagnóstico, os alunos que respondem correctamente aos problemas de valor omisso usam a estratégia de composição/decomposição, utilizando preferencialmente a adição sucessiva ou ao cálculo de metades e dobros. No teste final, para resolver estes problemas, os alunos usam as estratégias escalar e funcional, mostrando flexibilidade no uso de diferentes representações.

No que diz respeito aos problemas de comparação, a estratégia preferencialmente usada pelos alunos, nos dois testes, é a funcional. O aumento das respostas correctas, no teste final, está associado a uma melhor interpretação das relações entre variáveis e consequente influência na capacidade de julgamento qualitativo.

No que respeita aos problemas pseudoproporcionais e de comunicação/representação, os alunos da turma A têm um desempenho ligeiramente superior aos da turma B em ambos os testes, sendo o aumento de respostas correctas do teste inicial para o final semelhante nas duas turmas. O melhor desempenho dos alunos da turma A nestas questões pode estar associado à sua experiência escolar, que tem valorizado a explicação do modo como se pensa na resolução de um problema. Ao contrário, os alunos da turma B parecem não valorizar ainda este tipo de questões ou a parte das questões em que se pede para explicar como se pensa. Globalmente, existem vários alunos que não respondem a estes problemas.

Conclusão

A unidade de ensino desenvolveu o raciocínio proporcional dos alunos. Estes revelam mais facilidade em distinguir as relações proporcionais daquelas que o não são. Na resolução de problemas, em particular, nos de valor omisso, os alunos passam a usar estratégias multiplicativas o que revela uma melhor compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade Por fim, pode dizer-se que os alunos ampliaram o seu conhecimento sobre representações utilizando-as de forma flexível. A tabela é a representação que mostram preferir na resolução de problemas de valor omisso, enquanto na resolução de problemas de comparação mostram preferência pela tabela e pela razão (com dois pontos), esta última representação, já por eles usada antes da unidade de ensino.

A conjectura de ensino-aprendizagem presente na unidade de ensino revelou-se propiciadora de aprendizagem significativa, permitindo mobilizar o conhecimento que os alunos já têm, aprofundando-o do ponto de vista matemático, envolvendo-os na generalização de regularidades e relações. Consideramos que as tarefas da unidade de ensino proporcionaram o desenvolvimento dos vários aspectos da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, como se pode ver na descrição da sua realização nas duas turmas.

Referências bibliográficas

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER Nelson.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany NY: SUNY Press.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Moreira, L. (1989). *A folha de cálculo na educação matemática: Uma experiência com alunos do ensino preparatório* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist*, *39*(4), 213-223.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2009). Ser ou não ser uma relação proporcional: Uma experiência de ensino com alunos do 6.º ano. In *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (CDROM). Viana do Castelo: APM.

Stanley, D., McGowan, D., & Hull, S. H. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, *11*, 9-11.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-124). New York: Academic Press.

Wittmann, E. C. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics eduction. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 25-36.

Wittmann, E. C. (1998) Mathematics Education as a 'Design Science'. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer.

UTILIZAÇÃO E CONCILIAÇÃO DE DIVERSAS REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES EM SALA DE AULA[1]

Ana Patrícia Gafanhoto
Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Resumo

Este artigo foca-se na utilização de representações múltiplas das funções por alunos de 9.º ano, na resolução de tarefas com recurso ao Geogebra. Decorre de uma investigação realizada no âmbito de um mestrado (Gafanhoto, 2011), onde se desenvolveu um estudo de caso descritivo e analítico de uma turma que foi alvo de uma intervenção didáctica com tarefas diversificadas sobre funções, em ambiente de sala de aula com recurso ao Geogebra, no qual a investigadora assumiu o papel de observadora participante em colaboração com a professora titular da turma. As conclusões deste estudo apontam para o uso das diversas formas de representação por parte dos alunos. Apesar de se registar uma tendência para a representação gráfica, as representações numérica, tabular e algébrica também foram recorrente e eficazmente usadas pela maioria dos grupos da turma e, alguns grupos estabeleceram ainda relações entre diferentes tipos de representações. O estudo permitiu identificar situações em que os alunos recorrem tipicamente a uma dada representação. A representação numérica e a algébrica foram usadas essencialmente para determinar a imagem dado o objecto, a primeira foi usada também para determinar os objectos dadas as imagens. A representação gráfica foi utilizada no estudo comparativo de funções e no estudo da monotonia ou, de modo mais geral, sempre que os alunos pretendiam uma imagem global sobre o comportamento da função. Os alunos recorreram à representação tabular essencialmente nas questões em que era pedido para analisarem a relação entre as variáveis o que teve mais-valias na identificação e escrita de funções implícitas nas tabelas.

Palavras-Chave: Representações múltiplas de funções; representação numérica, tabular, gráfica, e algébrica; Geogebra.

Introdução

Os alunos ao longo do seu percurso escolar devem ter oportunidade de contactarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, adquirindo assim a capacidade

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática,* com apoio da FCT, contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008

de passar informação de uma forma de representação para outra, estabelecendo relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema (NCTM, 2007), em particular nas Funções, onde existem múltiplas representações acessíveis aos alunos.

Este artigo foca-se na utilização de representações múltiplas das funções por alunos de 9º ano e visa compreender como estes as usam e, em particular, como as conciliam, tirando partido das suas potencialidades específicas, ao responder a tarefas diversificadas envolvendo funções, em ambiente de sala de aula com recurso ao Geogebra. Decorre de uma investigação mais ampla realizada no âmbito da tese de mestrado da primeira autora (Gafanhoto, 2011).

Representações múltiplas das Funções

As representações surgem como um objectivo geral do ensino e aprendizagem da Matemática tendo um grande destaque nas orientações curriculares, nacionais e internacionais. O NCTM (2007) apresenta como objectivos para os alunos, desde o pré-escolar até ao 12º ano, no âmbito das representações, (NCTM, 2007, p. 160):

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Neste documento é referida a necessidade de estimular os alunos para a representação das suas ideias, primeiramente recorrendo a formas não convencionais para que depois aprendam as formas de representação convencionais, as quais facilitam quer a aprendizagem da Matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.,* 2007, p.5) as representações matemáticas são também bastante valorizadas. Destaca-se a referência feita ao trabalho com múltiplas representações, sempre que possível, proporcionando a aquisição da capacidade de passar de uma forma de representação para outra, que é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. O uso de diferentes representações torna o processo de aprendizagem da Álgebra, em particular das

Funções, significativo e efectivo. Estes autores apresentam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação.

A *representação verbal* está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorrectas.

A *representação numérica* é uma representação natural no início do estudo da álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, apresenta como limitação, em alguns casos, o facto de não ser generalizável.

A *representação gráfica* proporciona uma imagem clara de uma função de variável real, sendo intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, é muito influenciada por factores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema.

A *representação algébrica* é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações. Contudo, esta forma de representação, que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objecto e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Brown e Mehilos (2010) chamam a atenção para outra representação, a tabular. Sublinham que as tabelas estabelecem a ponte entre a aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, e a álgebra, onde as quantidades variam e são abstractas. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado. No estudo desenvolvido por Brown e Mehilos (2010), alguns alunos desenvolveram rapidamente a facilidade em manipular os símbolos e perceberam o seu potencial. Outros continuaram a mostrar preferência pelo uso de tabelas, sendo esta forma de representação um suporte para usar enquanto procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas.

A importância de trabalhar com várias representações resulta das vantagens e desvantagens apresentadas anteriormente para cada uma das formas de representação, sendo as desvantagens de umas colmatadas pela combinação com outras e, também da necessidade de corresponder a estilos individuais de raciocínio dos alunos. São considerados como factores que influenciam a utilização de determinado tipo de representação: a natureza da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema ou dificuldades em determinados tipos de representação (Kaput, 1992).

Metodologia

Este estudo desenvolve-se a partir de uma turma experiência de ensino realizada numa turma de 9º ano de escolaridade, em 2009/2010. A escolha deste ano de escolaridade prende-se com o facto de os alunos já conhecerem um leque de funções suficientemente amplo e o dominarem com relativo à-vontade. A experiência de ensino foi desenvolvida em contexto natural, conduzida pela professora titular da turma, que funcionou em cumplicidade com a investigadora. A intervenção didáctica consistiu na realização de seis tarefas diversificadas, envolvendo modelação matemática e estudo de famílias de funções (afim e quadráticas). As tarefas de modelação tinham como base situações não matemáticas; escolha de tarifários de telemóvel; análise do crescimento do cabelo; relação entre o comprimento e a largura das folhas de papel A4; o espaço visualizado através de canudos de diferentes comprimentos.

Cada uma das tarefas estava estruturada em duas partes: na primeira parte os alunos criavam, por pedido expresso, as diferentes formas de representação (tabular, gráfica e algébrica); na segunda parte, respondiam a questões de interpretação, usando as representações que considerassem mais adequadas para produzir as respectivas respostas, uma vez que já todas estavam imediatamente acessíveis. Durante a intervenção didáctica os alunos trabalharam em pequenos grupos. Estes alunos já tinham tido contacto com o *Geogebra* na resolução de outras tarefas matemáticas.

Na recolha de dados, a investigadora, assumiu uma postura de observadora participante. Foram recolhidos, para além dos descritivos das aulas, os documentos produzidos pelos alunos - as resoluções escritas das tarefas e os ficheiros de *Geogebra* respectivos.

A análise dos dados foi faseada. Primeiro organizaram-se as respostas dos grupos de alunos, realizando uma primeira análise do seu conteúdo. Na fase, averiguou-se quais as

formas de representação a que os grupos recorreram em cada resposta, optando-se por considerar as representações numérica, tabular, gráfica e algébrica das funções. Por último, efectuou-se uma análise cruzada de forma a encontrar semelhanças e diferenças entre as representações usadas pelos grupos, formulando-se, por fim, conclusões.

Apresentação de resultados

De uma forma global, os grupos aderiram bem à realização destas tarefas, não só ao nível do empenho e responsabilidade mas também da qualidade das respostas matemáticas que produziram. Seguidamente apresentam-se algumas das respostas dos grupos que procuram ilustrar um modo típico de usar cada uma das representações. Além disso, ilustra-se também os casos em que a conciliação de mais do que uma representação foi adoptada pelos alunos.

Representação numérica

A representação numérica foi usada por todos os grupos na tarefa 1, que se iniciava com o preenchimento de tabelas referentes a 3 tarifários telefónicos. Como instrumento auxiliar, os grupos, utilizaram a folha de cálculo do *Geogebra*, tal como era sugerido. Recorreram não só às potencialidades de cálculo oferecidas pelo *Geogebra,* como também utilizaram para esses cálculos as referências das células, como se pode ver na figura 1.

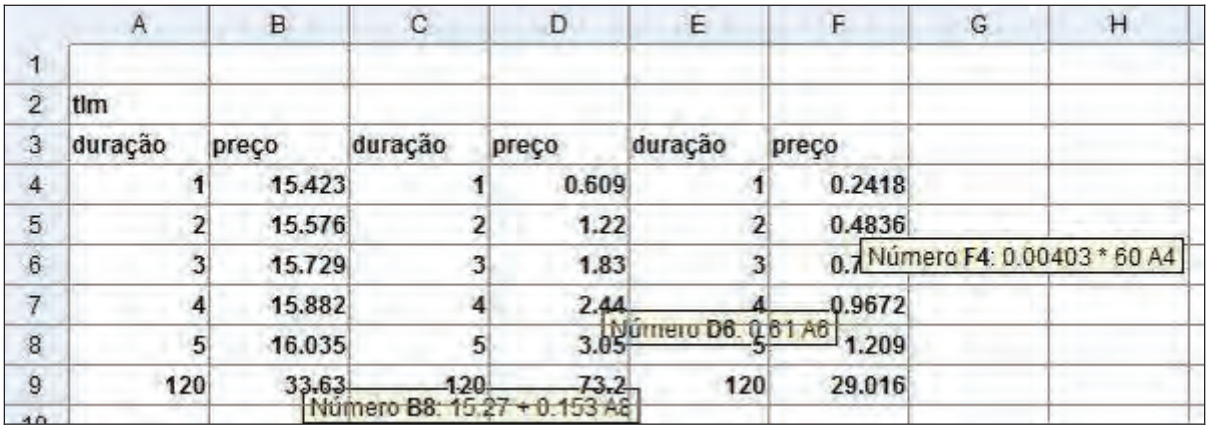


Figura 1- Procedimento utilizado pelo grupo 2, para preenchimento das tabelas.

Este procedimento foi uma mais-valia para a generalização e posterior determinação da expressão algébrica das funções procuradas, pois esta estratégia revela, mesmo que de forma implícita, as relações entre as variáveis e os parâmetros.

Outra situação interessante passou-se na tarefa 6, em que era pedido aos alunos que determinassem qual seria o comprimento do seu cabelo, tendo em conta a sua idade. Os diferentes grupos apresentaram respostas como a que se segue:

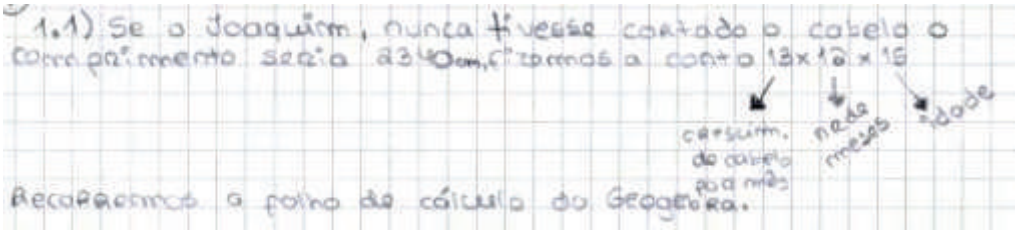


Figura 2- Resposta do grupo 1.

Para responderem à questão, todos os grupos usaram a representação numérica e usaram como ferramenta a folha de cálculo do *Geogebra*, que utilizaram como uma calculadora.

O mesmo se verificou para a questão em que era dado o comprimento do cabelo e se pedia que determinassem a idade mínima:

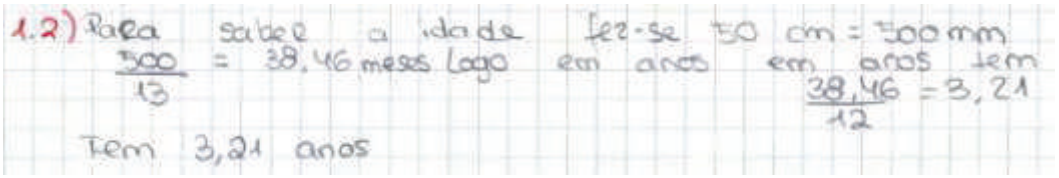


Figura 3- Resposta do grupo 4.

Os elementos do grupo 5 apresentaram opiniões e estratégias de resolução divergentes, tendo um elemento do grupo usado a regra de três simples com os dados da alínea anterior. Esta situação levou a que discutissem as resoluções apresentadas, tendo chegado a um consenso quanto à relação que se estabelece entre as variáveis, daí escreverem a expressão algébrica da função que modela o problema.

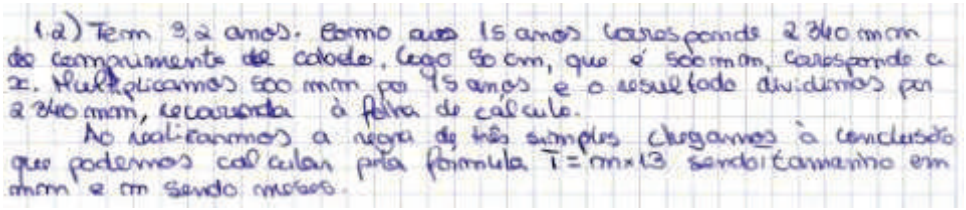


Figura 4- Resposta do grupo 5.

Representação tabular

A representação tabular foi outra forma de representação a que os alunos recorreram. Por exemplo, na tarefa 4, em que era solicitado que explicassem o que acontece ao tamanho da fita visualizada à medida que o tamanho do tubo se aproxima de 1 m.

Alguns grupos, baseando-se na análise dos dados incluídos na folha de cálculo (Fig. 6), concluíram:

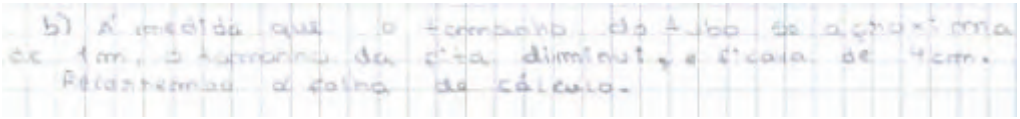


Figura 5- Resposta do grupo 1.

	A	B	C	D
1	Tam. Tubo	Comp. Fita		
2	80	5	400	
3	70	6	420	
4	50	8	400	
5	44	9	396	
6	40	10	400	
7	30	12	360	
8	23	17	391	
9	20	19	380	
10	10	26	260	
11	60	6.67		
12	90	4.44		
13	100			

Número **B11**: 400 / A11

Figura 6- Tabela que os alunos analisaram para responder à questão referida.

A representação tabular foi tendencialmente usada noutras situações em que os alunos já dispunham de uma tabela e em que a complementaram para obter valores procurados em falta.

Representação gráfica

A representação gráfica foi usada pelos alunos em diversas as situações, das quais se apresentam exemplos mais significativos. Na tarefa 1 pretendia-se que os alunos indicassem qual o tarifário mais vantajoso sabendo que Pedro só quer gastar 25 euros. Os alunos apresentaram as seguintes propostas para obter a resposta, todas diferentes mas com forte recurso ao gráfico:

- Procurámos os 25 euros no eixo dos yy. (Jorge, grupo 2)
- Traçava uma recta horizontal. (Marta grupo 5)
- Nós mexemos a zona gráfica até encontrarmos os 25 euros e depois a recta que ficava mais abaixo era o melhor tarifário, que neste caso era o da Optimus. (Mafalda grupo 3)

Ainda na tarefa 1 questionava-se se haveria algum momento em que o tarifário da Vodafone seria mais vantajoso. Os grupos procederam à análise comparativa dos

gráficos que representam cada um dos três tarifários, tendo os grupos 3 e 5 completado essa análise com a determinação do ponto de intersecção entre os gráficos.

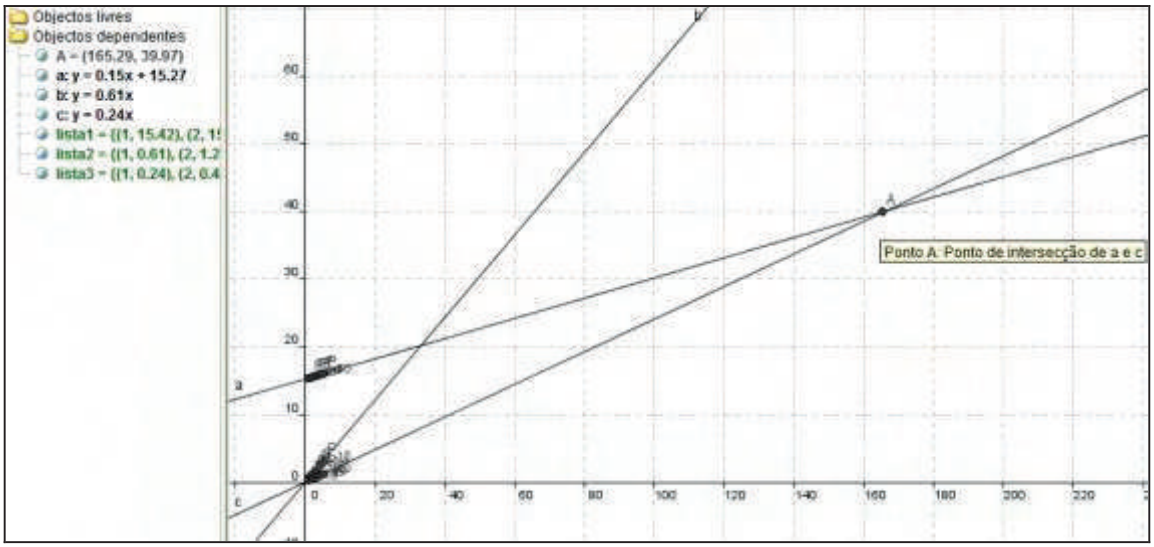


Figura 7- Resolução dos grupos 3 e 5.

Na tarefa 2 destinada ao estudo das funções afim do tipo ax + b, foi pedido aos alunos a identificação da influência do parâmetro *b*, tendo estes respondido:

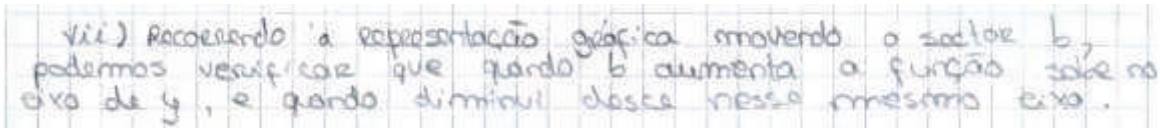

vii) Recorrendo à representação gráfica movendo o cursor b, podemos verificar que quando b aumenta a função sobe no eixo de y, e quando diminui desce nesse mesmo eixo.

Figura 8 - Resposta do grupo 5.

Outro uso interessante e eficaz da representação gráfica surgiu na tarefa 4, em que era pedido aos alunos que determinassem o comprimento de fita visualizado se utilizassem um tubo de 60 cm e outro de 90 cm. A maioria dos grupos recorreu à representação gráfica, mas com diferentes procedimentos:

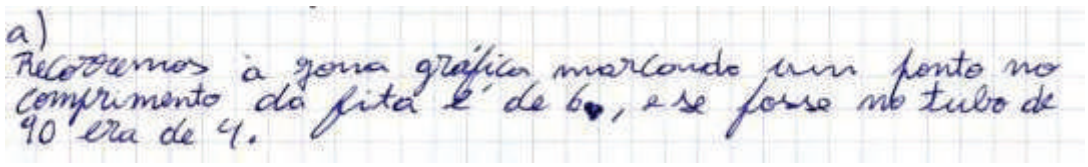

a)
Recorremos à zona gráfica marcando um ponto no comprimento da fita é de 60, e se fosse no tubo de 90 era de 4.

Figura 9- Resposta do grupo 2.

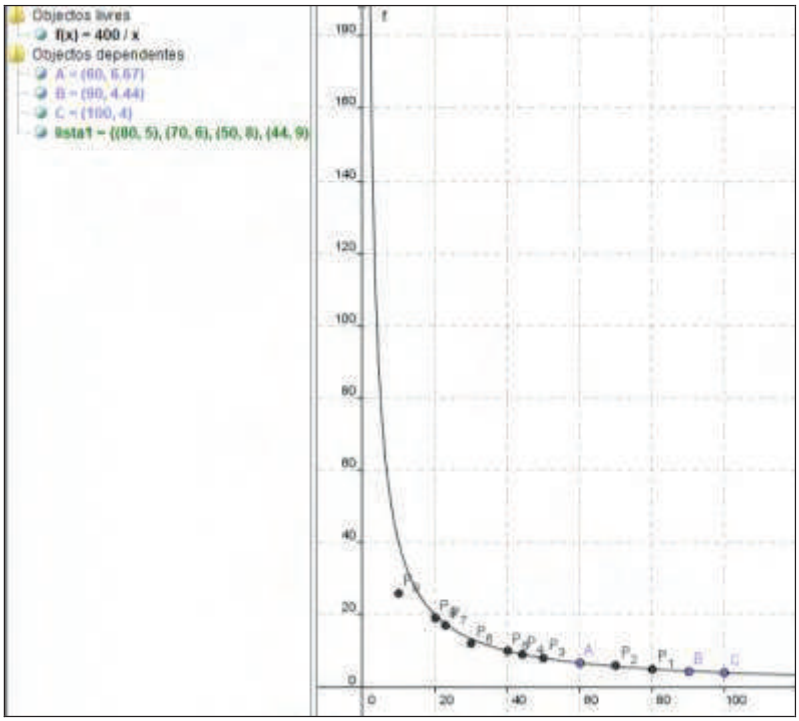


Figura 10- Procedimento utilizado pelo grupo 2.

O grupo 3 optou por traçar rectas verticais de equação igual ao objecto para o qual se pretendia determinar a respectiva imagem bem como o ponto de intersecção entre essas rectas e o gráfico da função, como se pode ver em seguida:

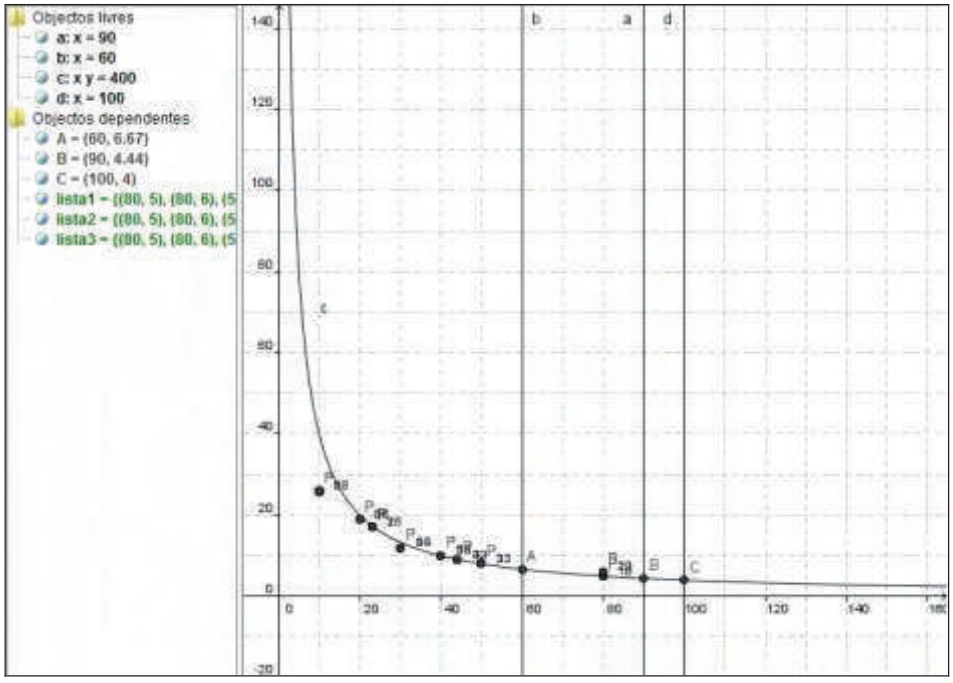


Figura 11- Procedimento utilizado pelo grupo 3.

Representação algébrica

Para além das formas de representação já referidas anteriormente, os alunos fizeram uso também da representação algébrica. Por exemplo, na tarefa 1, era pedido para determinar qual o melhor tarifário sabendo que o Pedro falou 120 minutos. Todos os grupos recorreram à folha de cálculo usando para isso a expressão algébrica que modela a situação, sendo considerado pelos alunos a estratégia mais adequada:

> Foi mais fácil recorrer à folha de cálculo, porque já tínhamos a fórmula foi só substituir o valor. (Bárbara, grupo 3)

Esta afirmação foi apoiada por todos os alunos. Note-se que apesar de se visualizar uma tabela, os alunos estão nesta situação a fazer uso da expressão algébrica.

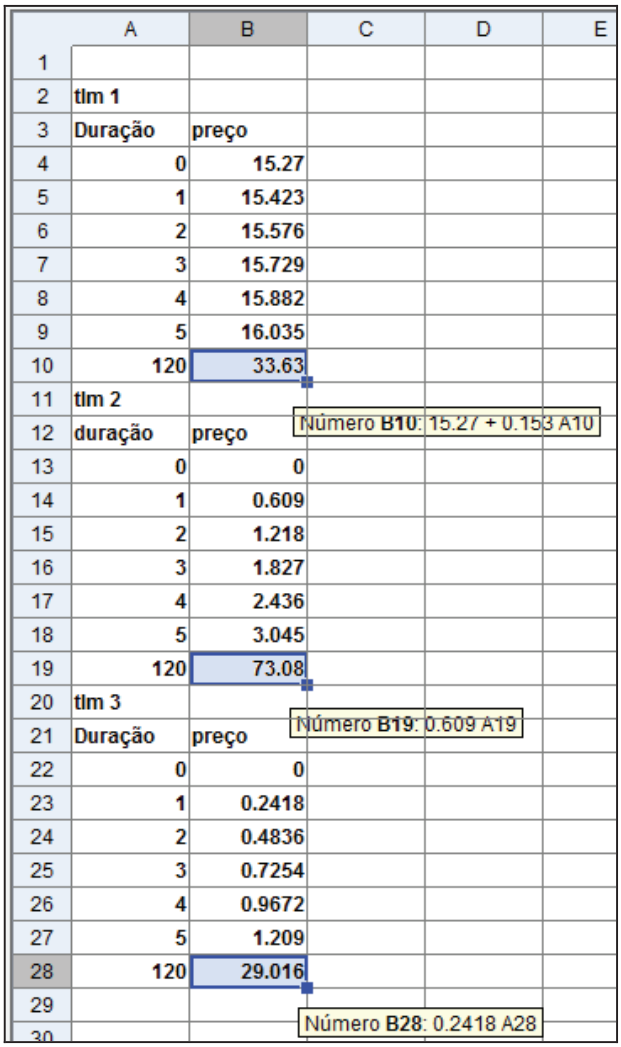


Figura 12- Procedimento utilizados por todos os grupos para determinar quanto pagaria o Pedro tendo este registado 120 minutos em chamadas.

O procedimento descrito anteriormente foi adoptado também noutras situações, nomeadamente na tarefa 4, em que era pedido que determinassem o comprimento de fita

visualizado, se se utilizasse um tubo de 60 cm e outro de 90 cm. Apesar de já terem sido apresentadas duas respostas baseadas em gráficos para esta questão, outros três grupos apresentaram a seguinte resposta:

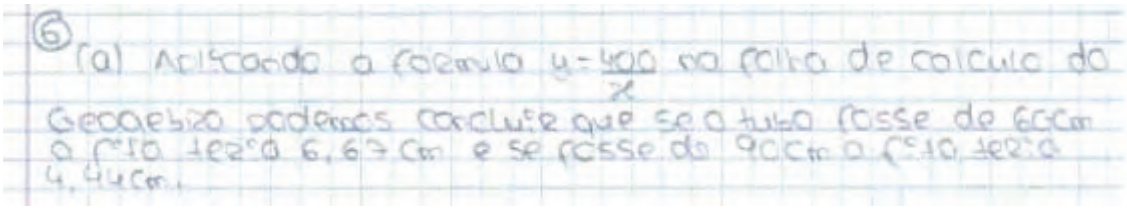


Figura 13- Resposta do grupo 5.

	A	B	C	D
1	Tam. Tubo	Comp. Fita		
2	80	5	400	
3	70	6	420	
4	50	8	400	
5	44	9	396	
6	40	10	400	
7	30	12	360	
8	23	17	391	
9	20	19	380	
10	10	26	260	
11	60	6.67		
12	90	4.44		
13	100			

Número **B11**: 400 / A11

Figura 14- Procedimento utilizado pelos grupos 1, 4 e 5.

Conciliação das representações algébrica e gráfica

Os alunos em determinadas questões sentiram necessidade de usar mais do que uma forma de representação para poderem apresentar uma resposta. Por exemplo, na tarefa 5, tal como noutras questões das tarefas apresentadas, pedia-se que os alunos determinassem as imagens dos objectos indicados. Nestas situações os grupos recorriam à representação gráfica ou algébrica, dependendo dos valores dos objectos/imagens e da exactidão dos resultados obtidos por cada uma das formas de representação. A resposta que segue é exemplo desta situação:

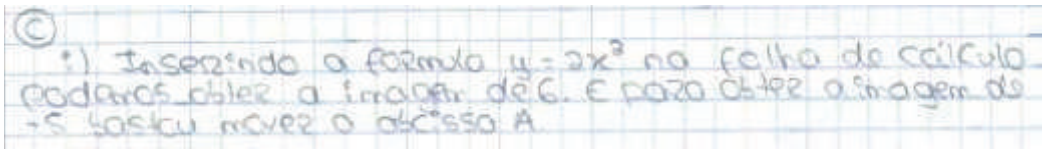


Figura 15- Resposta do grupo 5.

Houve outras situações em que os alunos, por sua iniciativa, usaram a representação algébrica para obterem a gráfica, para obterem a resposta à pergunta que lhes foi colocada. Considera-se como exemplo a resposta dada na tarefa 6, em que se pedia para compararem duas situações de crescimento de cabelo, modeladas por funções afim e, em particular, que determinassem se em algum momento as duas funções representavam o mesmo comprimento de cabelo:

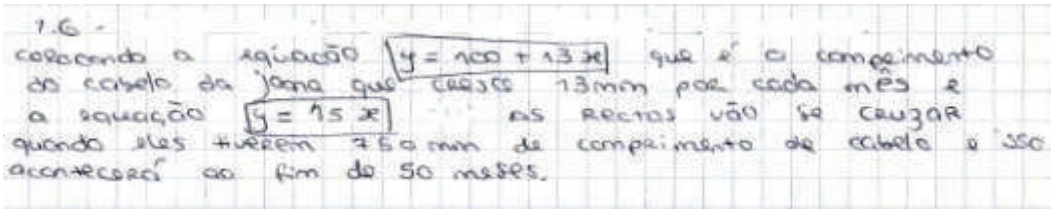


Figura 16- Resposta do grupo 3.

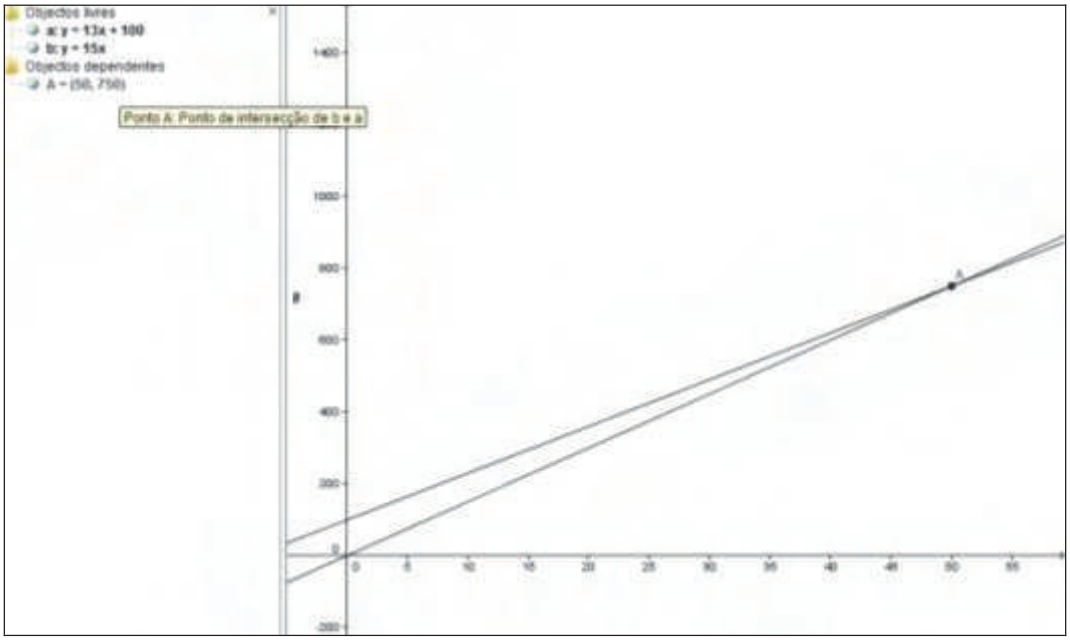


Figura 17- Procedimento utilizado pelos grupo 1, 3 e 4.

Conciliação das representações gráfica e tabular

Em algumas situações, os alunos recorreram às duas representações gráfica e tabular, como no exemplo que se descreve em seguida. Os grupos parecem ter beneficiado da análise simultânea da representação gráfica e tabular dos dados recolhidos para descrever o comportamento das variáveis e identificar o tipo de relação em estudo, como se ilustra com a resposta do grupo 5:

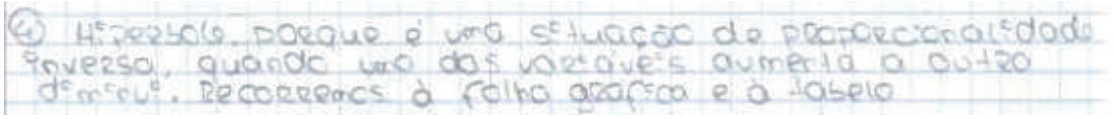


Figura 18- Resposta do grupo 5.

Identificou-se ainda outras situações em que os grupos utilizaram a representação gráfica para construir a tabular, nomeadamente nas situações em que pretendiam obter o valor da imagem dado o objecto ou vice-versa, usufruindo das potencialidades do *Geogebra*, como se pode ver em seguida, em que os alunos leram no gráfico as coordenadas dos pontos a incluir na tabela:

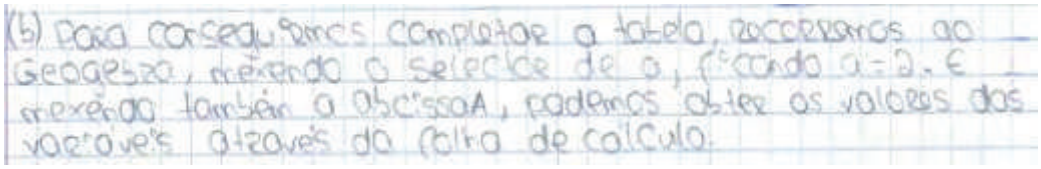


Figura 19- Resposta do grupo 5 (tarefa 5).

Conclusões

De seguida sistematizam-se as principais ideias sobre as formas de representação das funções que os alunos adoptaram na resolução das tarefas propostas com recurso ao Geogebra, procurando desta forma caracterizar-se as situações em que optam por uma ou outra representação e aquelas em que utilizam de forma interligada mais do que uma representação.

Para além das preferências que os grupos parecem revelar, a escolha das representações parece ser orientada pelo tipo de conhecimento matemático que as questões evocam. Assim, o uso da *representação numérica* surge essencialmente nas questões em que é pedido para se identificar a imagem dado o objecto e vice-versa, nomeadamente quando é solicitado aos alunos que completem tabelas ou ainda, tal como é referido por Friedland e Tabach (2001), quando a questão é considerada pelos alunos como requerendo uma resposta isolada, e não como um questão do problema inicial. Esta última situação é evidenciada nas resoluções de todos grupos, na tarefa 6.

A *representação tabular* foi essencialmente utilizada pelos alunos para analisar a relação entre as variáveis e para estudarem as funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas. No entanto, a sua construção também se revelou inspiradora na definição da expressão algébrica de uma função, nomeadamente por forçar o estabelecimento de relações entre as variáveis tabuladas, resultado que veio de encontro com os resultados do trabalho desenvolvido por Brown e Mehilos (2010).

Os alunos recorreram à *representação gráfica* para dar resposta às questões em que era solicitado o estudo comparativo de duas ou mais funções ou o estudo da monotonia da função. Esta forma de representação dá uma imagem clara global das funções, sendo esta uma mais-valia quando se pede aos alunos que estabeleçam comparações entre funções ou que identifiquem momentos em as funções assumem o mesmo valor ou que analisem a sua monotonia. A representação gráfica foi também a forma de representação utilizada por todos os grupos de alunos quando era solicitado que efectuassem o estudo da influência dos parâmetros das funções (funções afim e quadráticas), situação em que se procurava obter uma visualização global e rápida e não pormenorizada.

A *representação algébrica* surgiu muito associada às questões em que é solicitado aos alunos para determinarem a imagem dado o objecto, mas quando estes já dispõem da expressão algébrica (criada pelos próprios alunos ou não). É interessante sublinhar que a obtenção da expressão algébrica foi, em muitos casos, auxiliada pela construção da tabela.

Os alunos conciliaram sobretudo a representação gráfica com a algébrica e a representação tabular com a gráfica. A representação gráfica é conciliada com a algébrica nas seguintes situações: quando o domínio representado na forma gráfica não abrange os valores em estudo ou então quando, por limitações do *software*, o aluno não consegue seleccionar no gráfico o valor em pedido. Os alunos também recorreram frequentemente à representação algébrica para construírem a representação gráfica das funções, revelando uma conciliação adequada e eficiente destas diversas representações.

A representação gráfica foi muitas vezes a base da construção da representação tabular das funções, uma vez que a partir da definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo, o *Geogebra* constrói automaticamente a tabela. O grupo 5, destacou-se por recorrer em grande parte a este procedimento para depois usar a representação tabular para dar resposta às questões. Portanto, pode-se afirmar que este grupo conciliou de forma expedita estes dois tipos de representação, a gráfica e tabular. Em geral, os grupos foram adoptando representações adequadas para resolver as questões e demonstraram conseguir colmatar as desvantagens de cada uma das representações com as vantagens das outras.

Por fim queremos sublinhar a importância do ambiente de trabalho em que este estudo se desenvolveu. Note-se que o que distinguiu esta proposta de trabalho foi, por um lado,

a possibilidade de os alunos poderem responder, sem qualquer constrangimento, usando a representação que considerassem para si mais apropriada e, por outro lado, o uso do Geogebra que disponibiliza de forma eficiente as representações múltiplas das funções e permite transitar de umas para as outras com um click. Acautelar condições para que os alunos possam usar de forma eficaz representações múltiplas constituiu um desafio que não pode ser descurado, dada a sua importância no ensino e aprendizagem da matemática, em geral, referenciada nos documentos de orientação curricular nacionais e internacionais e como resultados de investigações, para o qual os actuais recursos informáticos disponíveis muito podem contribuir.

Referências

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promothing multiple representation in álgebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diferentes representações das Funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra)*. Tese de mestrado, Universidade de Évora. Lisboa: APM.

Kaput, J. (1992). Techonology and Mathematics Education. In Douglas Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

DIAGNÓSTICO SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO: ESTRATÉGIAS DE GENERALIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Elsa Oliveira
Instituto Politécnico de Leiria
elsaoliveira27@gmail.com

Inês Campos
Escola Secundária da Ramada
inesspc@gmail.com

Joana Mata Pereira
Escola Básica 2,3 Francisco de Arruda
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@gmail.com

Resumo
Esta comunicação relata um estudo realizado com três alunos do 7.º ano que procura compreender e analisar as estratégias de generalização utilizadas na exploração de sequências. É realizada uma análise qualitativa e interpretativa das resoluções dos alunos de uma tarefa referente a sequências pictóricas lineares. Para a recolha de dados são utilizadas três entrevistas videogravadas e as respetivas produções escritas da resolução da tarefa. Da análise das resoluções observa-se que os alunos utilizam diversas estratégias consoante o desenvolvimento da capacidade de generalização. Em particular, alunos que trabalharam anteriormente com sequências revelam maior facilidade no uso de linguagem algébrica e apresentam estratégias de generalização mais eficazes.

Palavras-chave: Sequências, Pensamento algébrico, Raciocínio, Generalização

Introdução

O pensamento algébrico, de acordo com Blanton e Kaput (2005), é o processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à idade. Por outro lado, a exploração de sequências e de regularidades desempenha um papel importante no ensino da Matemática, sendo apontado por alguns autores como a base do pensamento algébrico (Steen, 1988).

Neste contexto, damos principal atenção à mobilização e ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e, em particular, às estratégias utilizadas pelos alunos para a exploração de sequências. Esta comunicação tem por objetivo principal analisar as estratégias de generalização, de alunos de 7.º ano, na resolução de problemas que

envolvam a determinação do termo geral da sequência. Neste sentido procura-se responder à seguinte questão: Quais as estratégias utilizadas pelos alunos para obter generalizações próximas e distantes em sequências pictóricas lineares?

Pensamento algébrico e estratégias de generalização

Diversos estudos têm mostrado que a exploração de sequências ajuda a desenvolver nos alunos capacidades relacionadas com o pensamento algébrico, favorecendo o estabelecimento de relações e apelando à generalização (Branco, 2008).

Em particular, a generalização tem sido um tema de investigação em Didáctica da Matemática e uma das vertentes associadas a este tema relaciona-se com a identificação de diferentes tipos ou níveis de generalização. Segundo Stacey (1989) a generalização de sequências pode ser entendida a dois níveis: generalização próxima e generalização distante, tendo por base a grandeza do termo da sequência e as estratégias que estão implicadas na sua descoberta.

A generalização distante requer uma maior capacidade de abstração, exigindo o desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático. Neste sentido, autoras como Vale e Pimentel (2009) sugerem actividades com sequências de repetição e de crescimento. Nas sequências de repetição existe um "motivo identificável que se repete de forma ciclíca" (idem, p. 14). Nas sequências de crescimento "cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior" (idem, p. 16). As sequências crescentes podem ser constituídas por números ou por objectos que assumem uma configuração pictórica. Na análise de uma sequência pictórica identificam-se regularidades e descrevem-se características locais e globais das figuras que a compõem e também da sequência numérica que lhe está diretamente associada (Ponte, Branco, & Matos, 2009). As sequências de crescimento constituem, assim, uma oportunidade única de generalização com conexão às sequências numéricas, às progressões aritméticas e geométricas, às sucessões e às séries, constituindo uma temática transversal a todos os níveis de ensino.

Stacey (1989) focou a sua investigação na generalização de sequências lineares e organizou as estratégias aplicadas pelos alunos em quatro categorias: contagem, diferença, termo unidade e linear. Esta categorização de Stacey serviu de base a outras investigações como a de Lannin, Barker e Townsend (2006) que centraram o seu estudo nas estratégias aplicadas por alunos do 5.º ano na generalização de problemas

contextualizados e também identificaram quatro categorias de estratégias: recursiva, partição, termo unidade e explícita. A *estratégia recursiva* consiste na descrição de uma relação que ocorre entre valores consecutivos da variável independente. Na *estratégia partição* os alunos utilizam um termo conhecido da sequência e acrescentam múltiplos da diferença entre termos consecutivos até obter o elemento pretendido. À semelhança da categorização de Stacey, estes autores também identificaram a *estratégia termo unidade*. Os alunos utilizam um termo da sequência como unidade de forma a calcular um determinado elemento, considerando múltiplos dessa unidade. Estes autores acrescentaram que, quando não se trata de uma situação de proporcionalidade direta, os alunos devem proceder a um ajuste do resultado. A *estratégia explícita* implica a construção de uma regra que permite efetuar o cálculo imediato de qualquer valor da variável dependente, conhecida a variável independente.

Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam estratégias dos alunos na exploração de sequências subdivididas em quatro categorias: estratégias de representação e contagem, estratégia aditiva, estratégia do objeto inteiro e estratégia da decomposição dos termos. Na e*stratégia de representação e contagem*, o aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente. A e*stratégia aditiva* tem por base uma abordagem recursiva, onde o aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre entre esses termos. Na e*stratégia do objeto inteiro* o aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta. A e*stratégia da decomposição dos termos* consiste na decomposição de um termo de uma sequência pictórica, o que permite identificar o seu processo de construção, possibilitando a determinação de termos de ordem distante.

As categorizações apresentadas, apesar de pequenas variações, evidenciam a utilização de uma multiplicidade de estratégias na resolução de problemas que envolvam a generalização de sequências.

Metodologia

Este estudo tem como objetivo principal analisar as estratégias de generalização, de alunos do 7.º ano, na resolução de problemas que envolvam a determinação do termo geral da sequência. Atendendo à natureza do estudo e à questão que o orienta, esta investigação insere-se no paradigma interpretativo, sendo de natureza qualitativa

(Bogdan & Biklen, 1994) e recorrendo a três estudos de caso (Stake, 2009). Os três alunos, António, Carla e Daniel (nomes fictícios) trabalham pela primeira vez com o atual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). Os alunos foram selecionados de acordo com a sua disponibilidade e com requisito único terem aproveitamento satisfatório na disciplina. Estes três alunos têm algumas características distintas. António não apresenta conhecimento sobre linguagem algébrica, nem desenvolveu anteriormente atividades com sequências. Carla e Daniel trabalharam previamente o tópico sequências e regularidades, tendo realizado várias tarefas com sequências. Estes últimos alunos revelam, em sala de aula, destreza no uso da linguagem algébrica, em particular na apresentação do termo geral de uma sequência.

Para a recolha de dados foram utilizadas três entrevistas videogravadas, uma a cada aluno, com a duração de cerca de 15 minutos e realizadas na escola, fora da sala de aula. Em cada entrevista foi proposta uma tarefa – adaptada de Saraiva, Pereira e Berrincha (2010) – subdividida em duas partes. A entrevistadora questionou os alunos apenas para clarificar os seus processos de raciocínio. Além dos vídeos, também foram recolhidas as produções escritas dos alunos.

Atendendo ao objetivo do estudo, a análise dos dados recolhidos é realizada de acordo com as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Tendo por base as classificações de Lannin, Barker e Townsend (2006) e de Ponte, Branco e Matos (2009), utilizam-se as seguintes categorias: (a) representação e contagem; (b) recursiva; (c) termo unidade; (d) decomposição dos termos; (e) explícita.

Tarefa – Sequências com quadrados

Na tarefa proposta a cada um dos alunos são apresentadas duas sequências de crescimento, constituídas por termos diferentes.

Na *Parte 1* é apresentada a sequência pictórica da Figura 1:

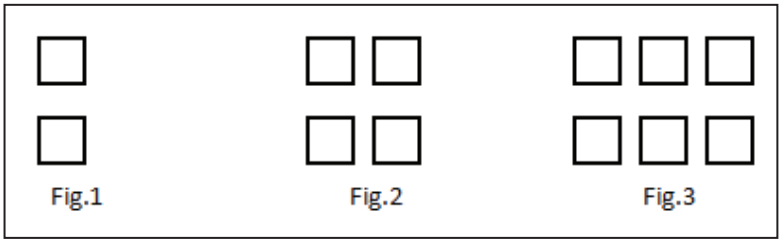


Fig. 1 – Sequência da *Parte 1*

Parte 1 a) Quantos quadrados terá a figura 4? Porquê?

Em resposta à primeira alínea da Parte 1, os alunos comparam termos consecutivos e identificam a alteração que ocorre.

> Carla: Eu reparei que a diferença de cada figura eram dois quadrados, ou seja, então se a terceira figura tinha seis, acrescentei mais dois e ficou oito.

Nesta situação, tal como Carla, os restantes alunos utilizam uma estratégia recursiva, dado que para determinar o número de quadrados da figura quatro partem do número de quadrados das figuras anteriores.

Parte 1 b) Quantos quadrados terá a figura 10? E a figura 50? Explica o teu raciocínio.

Na resolução desta alínea os alunos estabelecem uma relação entre o número da figura e o total de quadrados. Constatam que o número total de quadrados é o dobro da ordem da figura (Figura 2).

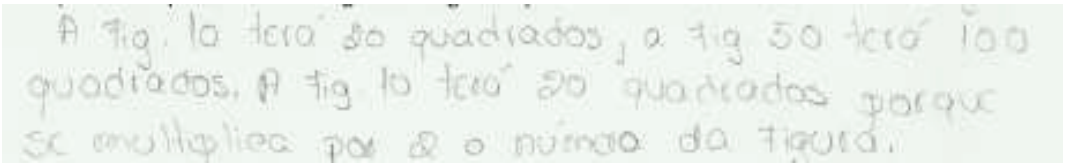


Fig. 2 – 1 b) de António

Nesta situação, os alunos utilizam uma estratégia explícita, visto relacionarem diretamente o termo (número de quadrados) com a ordem (número da figura).

Parte 1 c) Nesta sequência existirá alguma figura com 157 quadrados? Se existir, indica o número da figura. Explica o teu raciocínio.

Nesta alínea, António escreve apenas sucintamente a sua resposta (Figura 3) e tem alguma dificuldade em justificá-la.

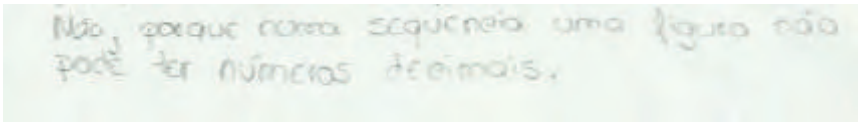


Fig. 3 – 1 c) António

António: Disse que não, porque numa sequência uma figura não pode ter números decimais.

Entrevistadora: E porque disseste isso?

A: Porque nestas figuras até agora nenhuma deu igual… com números decimais.

E: Sim, o número da figura vai ser sempre um número natural, 1,2,3… O número da figura. Mas porque que me dizes que essa vai dar um número decimal?

A: Porque 257 a dividir por 2… Posso fazer a conta?

(…)

E: E porque é que dividiste por 2?

A: Porque era o número da figura… o número de quadrados da 1.ª figura.

E: O número de quadrados da 1.ª figura divide por 2, é isso?

A: Para saber se o número é decimal.

António tenta contornar o questionamento, pelo que, a entrevistadora opta por indicar ao aluno para seguir na resolução da tarefa.

Os alunos Carla e Daniel verificam que a sequência numérica associada à sequência pictórica é constituída por números pares, pelo que concluem que 157 não é termo da sequência.

Carla: Não é possível (…) porque as figuras são constituídas por números pares… e se nós formos juntando números pares o resultado final vai ser sempre par…

Nesta alínea, as estratégias de resolução dos alunos parecem ser idênticas, ainda que António tenha dificuldade em justificar o seu raciocínio. Os alunos adicionam ao número de quadrados de uma figura o invariante, observando que a soma é sempre um número par. A utilização deste invariante remete para uma estratégia recursiva.

Parte 1 d) Nesta sequência existirá alguma figura com 324 quadrados? Se existir, indica ao número da figura. Explica o teu raciocínio.

Nesta alínea António utiliza o mesmo processo que na alínea c) (Figura 4).

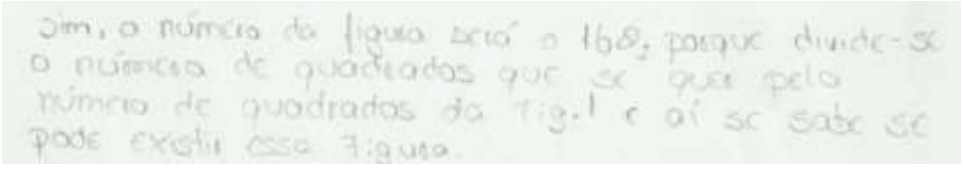


Fig. 4 – 1 d) António

E: E agora é que eu percebi aquilo que tu fizeste na alínea c). Aquilo que tu me estás a dizer é que estás a dividir o número de quadrados pela figura 1, é isso? Porque a figura 2 é…?

A: É a junção de duas figuras 1.

Com a resolução desta alínea foi possível compreender o raciocínio do aluno na alínea anterior.

Os restantes alunos, tendo verificado na alínea b) que o número total de quadrados é o dobro do número da figura, determinaram a respetiva ordem efetuando a operação inversa, ou seja, dividindo o termo por 2.

Daniel: Eu fiz 324 a dividir por 2 que é igual 162. Porque no exercício aqui pede a figura. A figura é x, vezes dois para saber o número de quadrados. Se a gente tem aqui o número de quadrados para saber o número da figura temos de dividir.

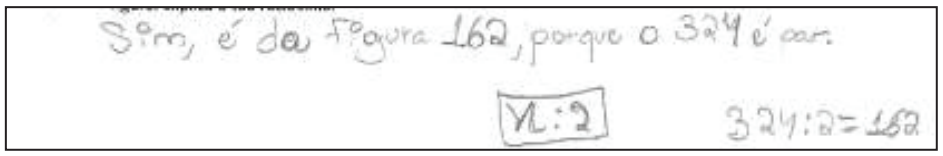


Fig. 5 – 1 d) Daniel

António utiliza a estratégia do termo unidade, pois recorre ao primeiro termo da sequência para encontrar os restantes. Por outro lado, Carla e Daniel, utilizam uma estratégia explícita, ao relacionarem o número da figura com o respetivo número de quadrados.

Parte 1 e) Consegues encontrar um processo que permita determinar o número de quadrados da figura, dependendo do número da figura? Explica-o.

Na resolução desta alínea, António mostra alguma dificuldade na generalização formal e as questões orientadoras não são suficientes para que consiga formalizar o termo geral da sequência.

A: Basta ter o número de quadrados da 1.ª figura e o número da figura que se pretende formar… basta multiplicar o n.º de quadrados da 1.ª figura pelo n.º da figura que se pretende.

E: Então se eu quiser saber o n.º de quadrados da figura x ou da figura n, como é que eu encontro?

A: Basta descobrir o x ou o n.

E: Não, eu digo-te só assim: A figura que eu quero saber é a figura n. Qual é o número de quadrados da figura n?

A: É x.

E: E quanto é que vale esse x?

A: Basta descobrir o n.º da figura.

E: Então, mas eu estou a dizer-te que esse número é n, que se chama n.

A: Mas eu não conheço nenhum número que se chama n.

O aluno está pouco familiarizado com a linguagem algébrica, ainda que consiga encontrar o processo para determinar o número de quadrados de uma qualquer figura utilizando a linguagem corrente.

Carla apresenta apenas a expressão algébrica correspondente ao termo geral (n2), não sentindo necessidade de recorrer à linguagem natural para explicitar o processo que permite determinar o número de quadrados de qualquer figura.

No caso de Daniel, a generalização foi expressa em linguagem natural e com uma representação algébrica.

> Daniel: … é primeiro o x, que é o que nós sabemos, ou seja termo, melhor o número da figura. Depois é vezes 2 porque aumenta sempre 2, e como os quadrados é o dobro das figuras, eu fiz x vezes 2

António, tal como na alínea anterior, recorre à figura 1 para determinar qualquer termo da sequência, utilizando assim a estratégia do termo unidade. Quanto a Carla e Daniel, pode assumir-se uma estratégia explícita.

Parte 2 – Descreve um processo que permita determinar o número de quadrados de cada figura, dependendo do número da figura.

Na *Parte 2* é apresentada a sequência pictórica da Figura 6:

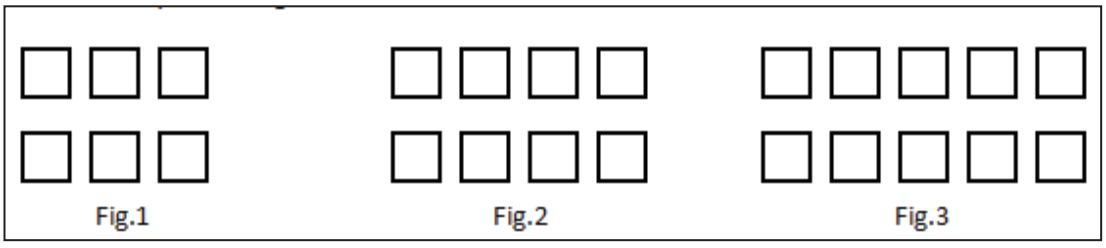


Fig. 6 – Sequência da *Parte 2*

António demora um tempo significativo a encontrar um processo que permitisse determinar o número de quadrados da figura. Encontrado esse processo, em que usa a recursão (Figura 7), volta a não conseguir formalizá-lo em linguagem algébrica, mas

descobre quase de imediato uma nova estratégia para determinar o número de quadrados de uma qualquer figura, sem usar um processo recursivo.

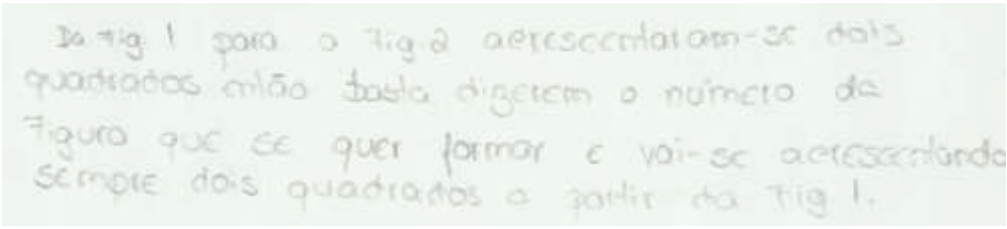


Fig. 7 – Resolução de António

E: E se eu quiser a figura 1000?

A: Também se pode fazer a figura 1, um quadrado acrescentam-se 2 e multiplica-se por 2.

E: Parece-me uma boa estratégia. Funciona? Para todas?

A: Com a figura 3, 3 quadrados acrescentam-se 2 daqueles dois que se acrescentam sempre e multiplica-se por 2.

E: Então a figura 50 quantos quadrados tem?

A: Deve ter… 104.

E: Muito bem. Já agora explica-me essa tua nova forma de conseguires o número da figura, pode ser? (Figura 8)

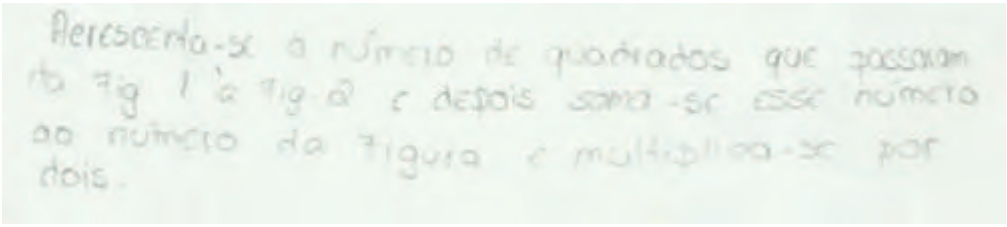


Fig. 8 – Continuação da resolução de António

E: Vou tentar outra vez: se eu tiver a figura n?

A: Não sei qual é o número da figura.

Neste último processo, tal como já evidenciado anteriormente, António utiliza sempre a figura 1 para encontrar o número de quadrados da figura. António usa, mais uma vez, a estratégia do termo unidade.

Carla utiliza uma estratégia de decomposição dos termos. Começa por observar a existência de quatro quadrados comuns a todos os termos e constata que os restantes quadrados correspondem ao dobro do número da figura.

Carla: Neste utilizei uma expressão algébrica e vi que o número da figura a multiplicar por 2 mais 4 ia ser o número de quadrados... Na figura um,

> se nós multiplicarmos… 1 a multiplicar por 2 dá 2 mais 4 dá 6, na figura 2, 2 a multiplicar 2 dá 4 mais 4 dá 8 que é o número de quadrados da figura.

Também Daniel utiliza uma estratégia de decomposição dos termos da sequência partindo da sequência da Parte 1 e estabelece uma relação entre os termos com a mesma ordem das duas sequências. Verifica que a expressão do termo geral da primeira sequência é 2n e que a diferença entre os termos (com a mesma ordem) das duas sequências é constante, pelo que conclui que o termo geral é 2n + 4.

> Daniel: O processo seria x que é o número da figura vezes 2 mais 4…fiz com a ajuda deste padrão (sequência da Parte 1) porque isto é x vezes 2… e depois fui tentando…aqui 3 vezes 2 mais 4 dá 10…depois fiz a sequência, 1 vezes 2 dá 2 mais 4 dá 6 e 2 vezes 2 dá 4 mais 4 dá 8.

Atendendo à diversidade de estratégias analisadas, apresenta-se na tabela seguinte uma breve síntese das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos, de acordo com os níveis de generalização das questões (Tabela 1). Na Parte 1, a questão a) e a primeira questão de b) correspondem, pela sua natureza, a generalizações próximas e as restantes questões a generalizações distantes.

Tabela 1 – Síntese de estratégias

	António	Carla	Daniel
Questão			
Parte 1 a)	Recursiva	Recursiva	Recursiva
Parte 1 b)	Explícita	Explícita	Explícita
Parte 1 c)	Recursiva	Recursiva	Recursiva
Parte 1 d)	Termo unidade	Explícita	Explícita
Parte 1 e)	Termo unidade	Explícita	Explícita
Parte 2	Termo unidade	Decomposição	Decomposição

Conclusões

Da análise das resoluções da tarefa, que contempla questões de generalização próxima e distante, é possível observar a utilização, por parte dos alunos, de diversos tipos de estratégias de generalização. No entanto, ainda que as sequências apresentadas na tarefa sejam pictóricas e que as primeiras questões se refiram a generalizações próximas, a estratégia de representação e contagem parece não ser uma opção para os alunos, ao contrário da tendência natural defendida por Lannin (2005).

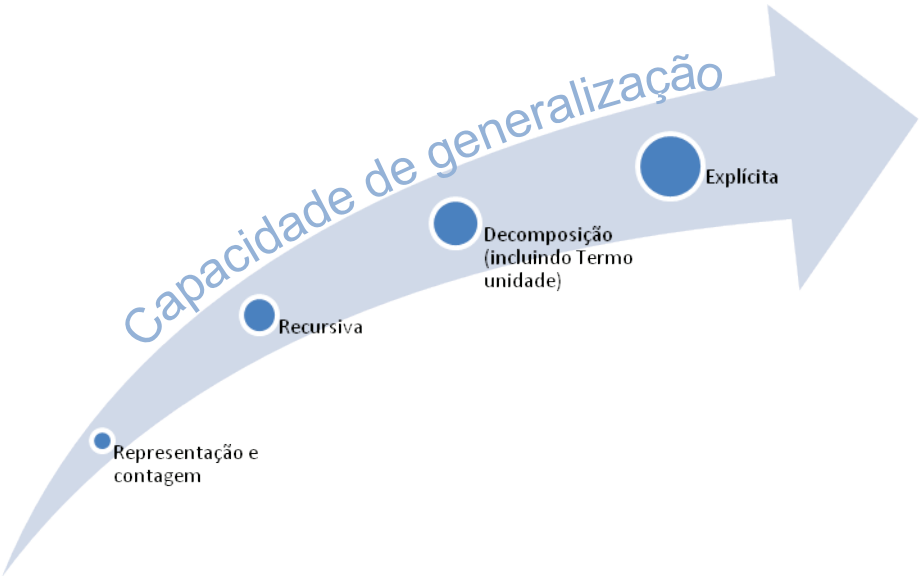
Analisando as estratégias utilizadas de acordo com os níveis de generalização, conclui-se que no primeiro caso os alunos deram preferência a estratégias recursivas e explícitas e na descoberta de valores distantes reconhecem-se as estratégias: recursiva, explícita, termo unidade e decomposição de termos. Segundo Lannin (2005), no cálculo de termos distantes é comum que os alunos utilizem a estratégia explícita, através da construção de uma regra imediata que estabeleça a relação entre as variáveis dependente e independente. Contudo, ainda que Carla e Daniel recorram por vezes a uma estratégia explícita, destaca-se que não a utilizam em todas as situações e nota-se ainda que António não utiliza esta estratégia em qualquer das questões de generalização distante.

Lannin, Barker e Townsend (2006) referem que os alunos revelam uma clara tendência para generalizar recursivamente, em detrimento da formulação de uma regra que relacione as variáveis dependente e independente. Os resultados deste estudo evidenciam esta tendência por António. Contudo, Carla e Daniel não refletem a predominância da estratégia recursiva no trabalho desenvolvido. As tarefas utilizadas neste estudo, sendo de natureza pictórica, conduzem à utilização de múltiplas estratégias dependendo do modo como os alunos olham as regularidades presentes nas figuras.

A facilidade com que Carla e Daniel chegam à expressão algébrica que representa o termo geral de cada sequência contrapõe as dificuldades que António apresenta em expressar as suas respostas em linguagem algébrica, não conseguindo fazê-lo para qualquer das questões. Assim, a utilização da estratégia do termo unidade para generalizações distantes utilizada sistematicamente por António parece surgir associada ao primeiro contacto com tarefas de sequências e às dificuldades de utilização da linguagem algébrica.

A análise continuada da resolução de António, que na questão d) utiliza claramente a estratégia do termo unidade, leva a concluir que já na questão c) António utiliza esta estratégia e não a estratégia recursiva. Contudo, António tem dificuldades em expressar a sua estratégia e o questionamento que é feito não é eficaz. Esta situação reflete a importância de questionar os alunos sobre os processos por eles utilizados para a análise da sequência, pois uma informação clara sobre esta análise permite ao professor "conhecer o perfil geral do desempenho dos alunos e dá uma indicação sobre os objetivos específicos que o trabalho futuro deve conter" (Silvestre et al., 2010, p. 113).

Com o trabalho com sequências pretende-se que os alunos compreendam a necessidade de generalizar e desenvolvam estratégias cada vez mais eficazes para essas generalizações. Estratégias como a representação e contagem ou a estratégia recursiva, nem sempre permitem uma generalização da sequência. Neste sentido, é importante que os alunos evoluam para estratégias mais eficientes como a decomposição ou a estratégia explícita. A relação entre as estratégias utilizadas e o desenvolvimento da capacidade de generalização promoveu uma reflexão quanto à categorização utilizada, propondo-se o seguinte esquema para categorizações futuras.



Este esquema traduz a evolução das estratégias de generalização que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico. A estratégia termo unidade, atendendo às suas características e em sequências pictóricas, pode ser considerada um caso particular da estratégia de decomposição. Na estratégia explícita podem estar subjacentes outras estratégias, por exemplo, uma estratégia de decomposição. Contudo, a estratégia explícita pode traduzir um reconhecimento imediato da relação entre a ordem e o termo da sequência que permita identificar o termo geral, resultado de uma apropriação efetiva de conhecimentos sobre relações numéricas e algébricas.

Neste estudo, para uma mesma sequência, identificam-se diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. Se não houver uma partilha destas estratégias, os alunos perdem oportunidades de aprendizagem essenciais. É fundamental que compreendam as vantagens e as limitações de cada estratégia utilizada. Cabe, por isso, ao professor proporcionar espaços de discussão em sala de aula que permitam aos alunos a apresentação e comparação das suas diferentes estratégias. Estes momentos de

discussão poderão contribuir para estabelecer conexões entre diferentes tipos de representações – pictóricas, numéricas e algébricas - o que leva a um desenvolvimento da capacidade de generalização e, consequentemente, do pensamento algébrico.

Referências

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterising a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-443.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Dissertação de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematics Thinking and Learning,* 7(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006), Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Obtido em 16 Jan 2008, de DGIDC-ME: http://sitio.dgidc.min-edu.pt

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Saraiva, M., Pereira, M., & Berrincha, R. (2010). *Sequências e expressões algébricas - Aprendizagem da resolução de equações a partir de igualdades numéricas*. Obtido de http://www.apm.pt

Silvestre, A., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I., Santos, I., Molarinho, M. J., & Veladas, M. (2010). Sequências pictóricas: Estratégias de generalização de alunos do 2.º, 3.º e 5.º anos. In GTI (Eds.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 89-119). Lisboa: APM.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Stake, R. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Steen, L. A. (1988) The Science of Patterns. *Science*, *240*, 611-616.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática: propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEIPVC.

OS PROBLEMAS HISTÓRICOS COMO ARTEFACTOS MEDIADORES DA APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES

Ida Gonçalves
Escola EB 2,3 Nicolau Nasoni
idalira@gmail.com

Elsa Fernandes
Universidade da Madeira
elsa@uma.pt

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

Resumo
O estudo relatado nesta comunicação insere-se num trabalho de investigação[1] que teve como objectivo caracterizar a aprendizagem da Matemática quando mediada por problemas históricos da Matemática. Nesta investigação, de natureza qualitativa, foi adoptado o paradigma interpretativo e os dados foram recolhidos através de uma observação participante completa. Estes foram recolhidos em algumas aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado de Matemática de uma turma do 8º ano, entre Setembro de 2006 e Maio de 2007. Os dados foram analisados à luz da Teoria da Actividade, na perspectiva de Engeström (1987).
Esta comunicação tem como objectivo analisar uma das questões que nortearam esta investigação: "De que forma os problemas históricos da Matemática ajudam os alunos a compreenderem os conteúdos matemáticos?".
Da análise dos dados podemos inferir que os problemas históricos ajudaram os alunos a ultrapassar as dificuldades sentidas na resolução de equações com denominadores, uma vez que lhes proporcionaram um método alternativo para as resolver. Constatou-se ainda que estes problemas desempenharam um duplo papel pois, além de ajudarem os alunos a compreenderem os conteúdos leccionados, também desempenharam um papel fundamental de motivação.

Palavras-chave: Aprendizagem, Matemática, Resolução de equações, Problemas históricos.

Introdução

O insucesso escolar na disciplina de Matemática tem incentivado os professores a diversificarem as abordagens metodológicas e a utilizarem diversos recursos para ensinar esta disciplina.

[1] Realizado no âmbito da tese de Doutoramento da primeira autora, em fase de conclusão.

Geralmente, quando pensamos em recursos no ensino da Matemática, surge-nos logo a ideia das calculadoras gráficas ou materiais didácticos, ou a panóplia de softwares existentes para ensinar Matemática ou, ainda, os cada vez mais disseminados quadros interactivos. No entanto, há outros recursos que também podem desempenhar, eficientemente, o papel de artefacto mediador no ensino da Matemática, como é o caso da História da Matemática.

Uma das formas apontadas na literatura para integrar a História da Matemática na sala de aula é através de problemas históricos (Swetz, 1995; Tzanakis & Arcavi, 2000; Liu, 2003), tendo sido esta também a forma adoptada neste estudo. Assim, nesta investigação foram utilizadas fichas de trabalho com problemas históricos, elaboradas pela investigadora após recurso a pesquisa bibliográfica.

Esta comunicação tem como propósito contribuir para a compreensão do papel dos problemas históricos da Matemática na aprendizagem da resolução de equações por alunos do 8.º ano. Situa-se no âmbito de uma investigação cujo objectivo é caracterizar a actividade matemática dos alunos quando mediada por problemas da História da Matemática.

Enquadramento teórico

A Teoria da Actividade

O quadro teórico da Teoria da Actividade usa o sistema de actividade como a unidade básica de análise e destaca a ideia de que a relação entre o sujeito e o objecto não é directa, sendo mediada pela utilização de artefactos.

Um sistema de actividade, na perspectiva de Engeström (1987), é composto por componentes que interagem, nomeadamente, o *sujeito*, o *objecto*, a *comunidade*, a *divisão do trabalho*, as *regras* e os *artefactos*. De forma sucinta, o *sujeito* refere-se ao indivíduo ou grupo cujo ponto de vista é considerado na análise. O *objecto* é parte integrante da actividade e representa a intenção que motiva (quer seja material, física ou mental) o objectivo para o qual a actividade está direccionada. A *comunidade* refere-se a todos os participantes de um sistema de actividade que compartilham o mesmo *objecto*. A *divisão do trabalho* envolve a divisão de tarefas entre os membros da *comunidade*, bem como as divisões de poder e de estatuto. As *regras* ou procedimentos

incluem normas explícitas e implícitas (por exemplo, práticas estabelecidas e aceites) que estabelecem acções e interacções dentro do sistema de actividade. As *ferramentas* ou *artefactos* (materiais ou conceptuais) são os recursos usados para transformar o *objecto* e para se chegar a um *resultado*. Estas alteram a actividade e são, por sua vez, alteradas pela actividade, uma vez que medeiam as relações entre o *sujeito* e o *objecto*. A Figura 1 representa uma visão contemporânea de um sistema de actividade.

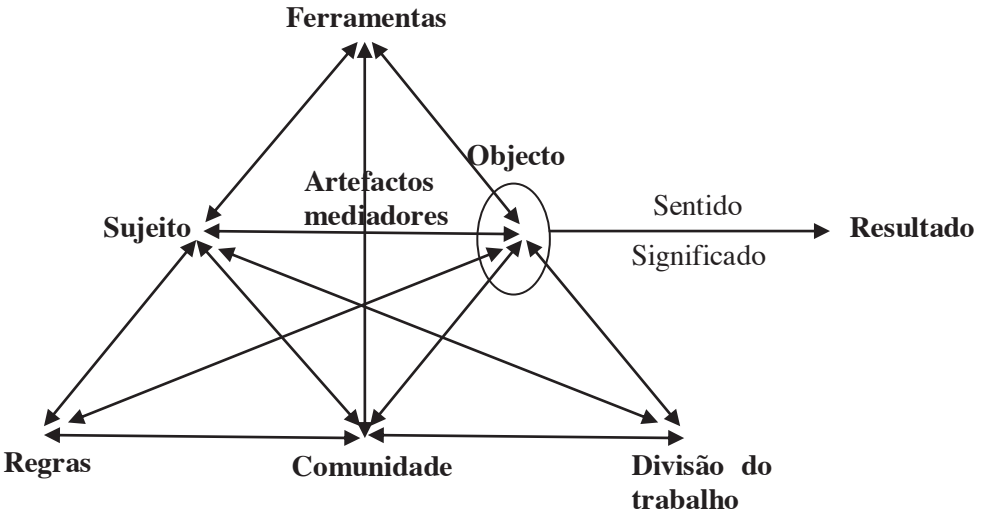


Fig. 1 - A estrutura de um sistema de actividade humano
(Engeström, 1987, p. 78 apud Engeström, 2001, p. 135)

O que podemos ver neste modelo triangular é que o *sujeito* actua no *objecto* para transformá-lo, usando os *artefactos* mediadores para chegar a um *resultado*. Por sua vez, o envolvimento do *sujeito* com a actividade é influenciado pelas *regras*, a *comunidade* em que se insere e a *divisão do trabalho*.

Os artefactos mediadores e o conceito de mediação

A Teoria da Actividade atribui importância central ao conceito de mediação. Este conceito esteve na origem da Teoria da Actividade e a noção de acção mediada por artefactos foi formalizada, pela primeira vez, por Vygotsky (1978). Segundo Vygotsky, a relação do indivíduo com o mundo não ocorre de forma directa, mas através da mediação. No processo de mediação, a relação entre os indivíduos e entre estes e o mundo que os cerca ocorre pelo contacto com os denominados artefactos mediadores, ferramentas auxiliares da actividade humana, que funcionam como um elemento

intermediário numa relação. Esses artefactos permitem ao indivíduo agir sobre os factores sociais, culturais e históricos, ao mesmo tempo em que sofre as suas acções.

No contexto desta investigação, podemos considerar que os problemas históricos desempenharam o papel de artefactos mediadores na aprendizagem da Matemática, como será analisado posteriormente.

A História da Matemática no ensino da Matemática

Embora a discussão sobre os "prós" e "contras" da integração da História da Matemática no ensino da Matemática seja de longa data, a tendência nos últimos anos é a procura de uma base teórica e de uma metodologia que alicercem essa integração.

Da revisão da literatura realizada nesta investigação, tornou-se evidente que, apesar das objecções e dificuldades encontradas, a maioria dos autores analisados defende amplamente a integração da História da Matemática no ensino desta disciplina.

Mas, de que forma essa integração pode ser feita? Tzanakis e Arcavi (2000, p. 214) apresentam uma lista de sugestões para fazer essa integração. Para estes autores, a História da Matemática pode ser integrada no ensino da Matemática de diversas formas, sendo uma delas através da utilização de problemas históricos.

Problemas históricos

A procura de estratégias motivadoras para as aulas de Matemática recorrendo à História tem-se deslocado, nas últimas duas décadas, de um plano meramente externo ao conteúdo do ensino, para outro em que essa motivação aparece vinculada e produzida no acto cognitivo da solução de um problema.

A concepção de que a Matemática pode ser desenvolvida pelo aluno mediante a resolução de problemas históricos, e através da apreciação e análise das soluções apresentadas a esses problemas no passado, começou a difundir-se mais expressivamente a partir do 5º ICME (em Adelaide, 1984). Essa proposta baseia-se no pressuposto de que se a resolução de um problema representa, por si só, uma actividade altamente motivadora e o facto de esse problema estar relacionado com a História aumentaria, quase que automaticamente, o seu potencial motivador.

Swetz é um grande apologista da "utilização" de problemas históricos no ensino da Matemática e defende que "problemas históricos e resolução de problemas, como um tópico por si só, podem ser o foco de uma aula" (1995, p. 33).

São as razões aqui apresentadas que justificam a escolha da utilização dos problemas históricos nesta investigação.

Metodologia

A investigação aqui descrita, de carácter qualitativo, foi conduzida sobre a égide de um paradigma interpretativo. Os dados foram recolhidos através de uma observação participante completa uma vez que a investigadora era, também, professora da turma analisada.

Participantes

Os participantes deste estudo foram os 23 alunos de uma turma do 8º ano da Escola EB 2-3 Nicolau Nasoni, no Porto. A turma foi escolhida pelo facto de a investigadora ser professora de Matemática desta turma pelo segundo ano consecutivo, além de também ser a Directora de Turma. No entanto, desempenhar o duplo papel de professora/investigadora tem os seus prós e contras.

Por um lado, o facto de haver uma grande proximidade na relação entre o investigador e os participantes no estudo pode ser considerado como uma vantagem, uma vez que existe um maior e diversificado conhecimento mútuo dos intervenientes na investigação. Além disso, o investigador não é considerado um elemento perturbador ou estranho no ambiente.

Por outro lado, há dificuldades que surgem. Uma investigação qualitativa já encerra, em si, um certo grau de subjectividade. Nos casos em que o professor desempenha também o papel de investigador, o aspecto subjectivo pode ser aumentado, pelo que é necessário muito rigor e imparcialidade na recolha dos dados.

Recolha dos dados

Os dados foram recolhidos em 10 aulas (de 90 minutos) de Matemática e 2 (de 45 minutos) de Estudo Acompanhado de Matemática, entre Setembro de 2006 e Maio de 2007.

Nesta escola, o Estudo Acompanhado é atribuído, separadamente, aos professores de Matemática e Língua Portuguesa (45 minutos a cada um). Estas aulas são

de frequência obrigatória e o objectivo é que sejam usadas para aprofundar os conteúdos leccionados, assim como para colmatar lacunas manifestadas por alguns alunos.

Os alunos trabalhavam, geralmente, aos pares ou em grupos de três. No início da aula, era entregue uma ficha de trabalho e, após algumas explicações introdutórias, os alunos tentavam resolver os problemas propostos, enquanto a professora circulava pela sala a tirar dúvidas e a ajudar os alunos que revelavam mais dificuldades. Passado algum tempo, era feita a correcção no quadro, para o que era solicitado um aluno em particular ou a professora seleccionava um entre os voluntários. Depois, era feita a discussão do método utilizado e dos resultados obtidos.

Para proceder à recolha dos dados foi utilizada uma câmara de vídeo e, depois, a investigadora visionou as filmagens e procedeu à transcrição integral da aula filmada. Além das aulas filmadas, também serviram de dados as notas que a investigadora apontava no diário de campo. No entanto, devido ao duplo papel de professora/investigadora não era possível tirar apontamentos durante as aulas. Todavia, essa limitação era minimizada pelo conhecimento que a investigadora tinha dos alunos. Assim, essas notas eram tiradas no final da aula ou, geralmente, quando chegava a casa.

Nesta investigação os dados foram analisados numa fase posterior à sua recolha. Assim, finda a recolha dos dados, seguiu-se a sua análise, quer através do visionamento dos vídeos e respectivas transcrições, quer através das notas de campo.

Resolução de equações com denominadores – Análise de um episódio

Os episódios a seguir analisados ocorreram em duas aulas de Matemática em que se pretendia que os alunos aprendessem a resolver problemas que podem ser traduzidos por equações com denominadores, sendo este um dos temas que faz parte dos conteúdos programáticos do 8º ano.

Analisando a História da Matemática encontramos uma diversidade de interessantes problemas que podem ser traduzidos por equações. Foi recorrendo a esses problemas que a professora elaborou fichas de trabalho com o intuito de integrar a História da Matemática nas suas aulas. A ficha utilizada na aula em análise era composta por vários problemas retirados de obras da História da Matemática, como por exemplo, o *Papiro de Rhind* (séc. XVII a. C.) e a *Antologia Grega* (séc. V d. C.).

Nalguns manuais escolares encontramos problemas deste tipo, no fim do capítulo, como actividades complementares. No entanto, o que geralmente acontece é que o professor "passa à frente" porque "não tem tempo" e os alunos nem os tentam resolver porque estes problemas são catalogados de "muito difíceis". Um problema histórico que aparece muito frequentemente nos manuais escolares é o problema sobre a idade de Diofanto. Este problema é original da Antologia Grega (Panton, 1918) e é o problema 3 da ficha de trabalho utilizada nesta aula.

"Neste túmulo repousa Diofanto.
Ah, que grande prodígio!
O túmulo diz cientificamente a exacta medida de sua vida.
- Deus concedeu-lhe ser menino pela sexta parte da sua vida, e somando uma duodécima parte a isto, cobriu-lhe as faces de pêlos;
Ele acendeu-lhe a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho.
Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o destino frio o levou.
Depois de se consolar da sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, terminou com a sua vida.
Quantos anos viveu Diofanto?"

A interpretação deste problema suscitou muitas dúvidas. Ao circular pela sala, a professora apercebeu-se que a maioria dos alunos (a trabalhar aos pares) estava com problemas em encontrar o que colocar no segundo membro da equação. Alguns deles só indicavam o primeiro membro, ignorando o segundo. Num dos grupos, a professora presenciou um aluno a dizer para o colega:

M: Mas para ser equação tem que ter igual a qualquer coisa!
N: Ah! Pois é. Mas é igual a quê?

Passando por outro grupo, ao ver a resolução de uma aluna, a professora perguntou:

Prof: Isto é uma equação?
V: É.
Prof: Para ser equação o que é que tem que ter?
V: x e igual.

Prof: Onde está o igual?

Como este erro estava a ser muito frequente, a professora alertou para toda a turma:

Prof: Não se esqueçam que para ser uma equação tem que ter igual a qualquer coisa!

Depois de esclarecidas as diversas dúvidas que foram surgindo, os alunos conseguiram, na sua maioria, traduzir este problema para a equação $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, e, a seguir, resolveram-na.

Após resolver este problema, um dos alunos com melhor desempenho na aula de Matemática constatou que:

J: 84 é o valor do denominador!
Prof: Por acaso! Não quer dizer que seja sempre assim.

O que o aluno queria dizer era que a solução, 84, era igual ao m. m. c. dos denominadores, o que representa uma falta de rigor na utilização de conceitos matemáticos.

Os problemas/exercícios[2] seguintes não suscitaram tantas dúvidas uma vez que eram análogos ao problema 3, acima analisado. À medida que a professora se apercebia que a maioria dos alunos já tinha resolvido um determinado exercício, solicitava que alguém o fosse corrigir no quadro e, muitas vezes, eram os próprios alunos que se voluntariavam para ir ao quadro.

Di: Professora, posso ir ao quadro corrigir o problema 6?

A professora ficou agradavelmente surpreendida pois não se lembrava de este aluno, que costumava revelar desinteresse e desmotivação, se ter oferecido para ir ao quadro desde que era seu aluno (ou seja, desde o 7º ano). E é de salientar que conseguiu resolver o exercício correctamente.

Na verdade, a mãe deste aluno, em conversas com a professora (no papel de Directora de Turma), costumava dizer que ele precisava de algo que lhe despertasse o interesse, como de facto foi constatado.

De facto, os problemas colocados desta maneira, com enunciados curiosos e, por vezes, engraçados, despertam o interesse dos alunos. Depois de ultrapassadas as dificuldades de interpretação sentidas na resolução dos primeiros problemas, constatou-se que os alunos se sentiram mais motivados para os resolver do que se fosse pedida a

[2] Uma vez que os problemas propostos na ficha utilizada eram muito idênticos, à medida que os alunos foram resolvendo a ficha, os problemas propostos deixaram de ser considerados problemas (porque os alunos já conheciam uma estratégia para os resolver) e passaram a representar exercícios de aplicação das regras da resolução de equações com denominadores.

resolução automática e repetitiva de equações, colocadas de uma forma abstracta, com letras, números e sinais, que não significam nada para os alunos.

Depois de resolver mais alguns problemas desta ficha, o J. manifestou-se, novamente, dizendo que:

> **J:** Professora, há muitas coincidências; a maioria dos denominadores vai dar o resultado!
> **Prof:** É curioso que isso aconteça!
> **D:** Mas não é uma regra porque há outros exercícios onde não acontece!
> **M:** Por isso, temos que resolver na mesma.

Pouco depois, terminou a aula e a professora foi para casa a pensar naquelas coincidências. Seria mesmo por acaso ou haveria uma razão para acontecerem?

Entretanto, a professora debruçou-se sobre o assunto e, depois de pesquisar em alguns livros sobre História da Matemática, descobriu uma justificação para o que tinha pensado ser uma coincidência.

Na aula seguinte, a professora retomou o comentário que o aluno tinha feito na aula anterior e aproveitou para ensinar aos alunos de que forma as equações eram resolvidas antigamente.

> **Prof:** Quero chamar à atenção para uma coisa: lembram-se de terem dito na última aula que em, muitos casos, o resultado era igual ao denominador e eu disse que era coincidência?
> **Da:** A professora inventou uma nova regra?
> **Prof:** Isso tem a ver com a maneira como resolviam as equações antigamente. Não as resolviam como as resolvemos agora. Em vez de resolverem a equação como fazemos actualmente, resolviam-na por tentativas, ou seja, substituíam o x por valores, e se não desse certo, faziam uma regra de três simples.

De seguida, a professora exemplificou no quadro através da resolução do seguinte problema, proposto por Mahavira[3] (problema 5 da ficha de trabalho):

"Um oitavo de uma coluna está enterrada no lodo, a terça parte na água, a quarta no musgo e 7 hastas são visíveis no ar. Qual é o comprimento desta coluna?"

Note-se que os alunos já tinham resolvido este problema, usando o método actual de resolver equações.

[3] Matemático indiano do séc. IX. A sua obra mais importante intitula-se Ganita-Sâra-Sangraha (Compêndio do Cálculo Essencial).

Depois de escrever no quadro a equação $\frac{x}{8}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+7=x$, que traduz este problema, a professora perguntou:

> **Prof:** Que número acham que, antigamente, escolhiam para o x?
>
> **T:** O 1.
> **Prof:** Às vezes escolhiam o 1, mas, neste caso, o 1 não dá jeito porque não é divisível por 8, 3 ou 4. Então, escolhiam um número que fosse divisível por 8, 3 e 4. Qual é o número que é divisível por 8, 3 e 4?
> **A:** 24.
> **Prof:** Que relação existe entre o 24 e os denominadores?
> **A:** É o m. m. c. (8, 3, 4).

De seguida, a professora fez, em interacção com os alunos, a verificação no quadro, substituindo o x por 24 e todos concluíram que o 24 era, de facto, a solução da equação.

Depois de verem esta maneira de resolver as equações, alguns alunos manifestaram-se, dizendo: "Assim é mais fácil!". De facto, os alunos que não entendem a resolução de equações pelo método algébrico, acharam este método o "máximo", pois era uma alternativa a um método que lhes parecia muito difícil.

> **Prof:** Mas, se repararem, nem sempre o resultado é igual ao m. m. c. entre os denominadores. Por exemplo, no problema 1[4] isso não acontece. Quando isso não acontece, é necessário fazer mais contas: faz-se uma regra de três simples. Como viram, no problema 1, o denominador (ou melhor, o m. m. c. dos denominadores) é 4 e o resultado é 12.

Note-se que os alunos já tinham resolvido o primeiro problema da ficha através da resolução da equação: $x+\frac{x}{4}=15$. Para resolver esta equação pelo método antigo, a professora orientou o seguinte questionamento:

> **Prof:** Qual seria o número a colocar no lugar do x?
>
> **N:** O 4.

Depois de fazer, em interacção com os alunos, os cálculos no quadro, a professora disse:

> **Professora:** Como dá 5 e devia dar 15, então (os egípcios) faziam uma regra de três simples.

[4] "A quantidade e a sua $\frac{1}{4}$ adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?"(Chace, 1979)

T: 5 está para 15, …

Depois de fazerem os cálculos, os alunos concluíram que a solução era 12. Constataram que, de facto, a solução obtida resolvendo a equação desta maneira era igual à solução que tinham obtido quando resolveram a equação da maneira como lhes foi ensinada.

É interessante notar que este método permitiu aplicar outros conceitos matemáticos como a regra de três simples. E, de um modo geral, os alunos não costumam revelar dificuldades na aplicação da mesma.

Mas, alguns alunos ainda tinham dúvidas sobre o número que deviam escolher para fazer a substituição.

> **T:** E se, em vez do 4, pusesse 3?!
> **Prof:** Não convém porque os valores do denominador não são divisores de 3; assim tinhas que trabalhar com fracções. Se no denominador só aparecer um número, substituis por esse número; se aparecerem vários números, substituis pelo m. m. c. desses números.
> **Prof:** Era esta a maneira que usavam antigamente para resolver as equações. Chama-se a **regra da falsa posição**[5]. O que acham desta maneira de resolver as equações?

Surgiram várias respostas, umas favoráveis à utilização desta nova regra, outras não. Foi interessante notar a divergência de opiniões, sendo de salientar que os alunos que costumavam revelar mais dificuldades na resolução algébrica das equações foram os que opinaram mais favoravelmente. Este facto é compreensível uma vez que os alunos que já sabiam resolver pelo método actual acharam que esta nova regra só vinha complicar e, como já tinham compreendido a resolução das equações, não se mostraram tão receptivos para a aprendizagem desta nova regra. Por outro lado, os alunos que revelavam mais dificuldades para resolver uma equação pelo método ensinado actualmente acharam que este método vinha resolver o seu problema pois representava uma alternativa a um método que lhes parecia muito complicado. Além disso, para resolver uma equação por este método é necessário utilizar a regra de três simples e, geralmente, a maioria dos alunos, mesmo os que têm mais dificuldades a Matemática, consegue aplicá-la sem dificuldades.

[5] A regra da falsa posição aplica-se na resolução de equações do tipo $ax = b$. Esta regra já não é válida para resolver equações que não estejam nesta forma (ou seja, que não traduzam situações de proporcionalidade directa).

Muito provavelmente, se não tivesse sido ensinado este método, os alunos com mais dificuldades na resolução das equações nem sequer teriam tentado resolver estes problemas porque, depois de os traduzir para uma equação, "empatavam" e não conseguiam concluir a resolução do problema, o que é deveras desmotivante.

Reflexões finais

De acordo com Engeström (1987), na estrutura de uma actividade podem ser identificados *sujeitos* que agem sobre *objectos*, num processo de transformações recíprocas até atingirem certos *resultados*.

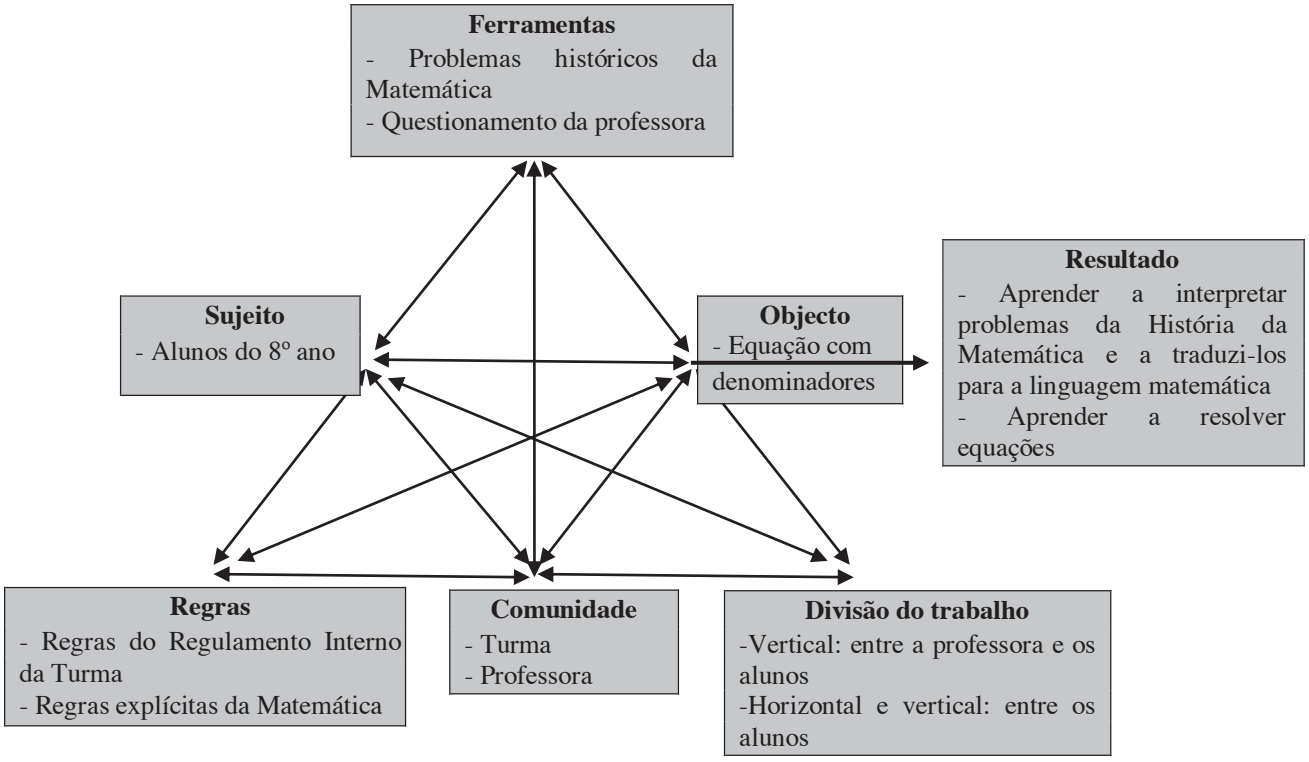


Fig. 2 – Sistema de Actividade de Engeström aplicado ao sistema de actividade de uma sala de aula

Neste sistema de actividade, podemos ver que os alunos (*sujeitos*), através da resolução dos problemas históricos da Matemática e do questionamento da professora, agem sobre as equações com denominadores, de modo a conseguirem interpretar problemas da História da Matemática e a traduzi-los para a linguagem matemática e, depois, aprenderam a resolver as equações obtidas (*resultado*).

Um dos benefícios que advém da integração da História da Matemática na sala de aula, apontado na literatura analisada, é que, "usando problemas antigos, os alunos podem comparar as suas estratégias com as originais" (Grugnetti, 2000, p. 30). De facto, os episódios aqui analisados ilustram bem essa situação, uma vez que os alunos tiveram a oportunidade de conhecer a maneira como as equações eram resolvidas antigamente (através da regra da falsa posição), e puderam comparar esse método com o que lhes foi ensinado. Isto conduziu a opiniões divergentes pois alguns alunos acharam a regra da falsa posição mais fácil, outros, nem por isso, e permitiu que os alunos reflectissem sobre as vantagens ou desvantagens da Álgebra, a que alguns alunos têm aversão.

Além de permitir a comparação entre os métodos (antigo e actual), a apreciação e análise das soluções apresentadas, no passado, aos problemas históricos ajudaram os alunos que tinham muitas dificuldades na resolução de equações a contornarem essas dificuldades. Agora tinham a oportunidade de resolver uma equação pelo método usado antigamente (a regra da falsa posição), que para estes alunos era mais fácil do que o método algébrico. Esta situação é ilustrativa do contributo dos problemas históricos para ajudarem os alunos a compreenderem os conteúdos leccionados.

Nos episódios analisados, encontramos situações em que foi evidente o papel motivador destes problemas, como por exemplo, quando um aluno outrora desinteressado se mostrou mais participativo na resolução dos exercícios e até se ofereceu para ir ao quadro. "A História proporcionou uma óptima maneira de conseguir que os alunos se interessassem pela Matemática" (Rickey, 1995, p. 123).

Pelo exposto podemos inferir que os problemas históricos desempenharam um duplo papel pois, além de ajudarem os alunos a compreenderem os conteúdos leccionados, também desempenharam um papel fundamental de motivação. Podemos afirmar que "o uso de problemas históricos na aula teve a vantagem de melhorar as atitudes destes alunos relativamente à Matemática, bem como melhorar a sua compreensão da Matemática" (Liu, 2003, p. 417).

Referências bibliográficas

Chace, A. B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit. Acedido em 24 de Agosto, 2010, de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engeström/expanding/toc.htm

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133-156.

Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 29-35). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Liu, P-H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher, 96*(6), 416–421.

Paton, W. R. (1918). *The Greek Anthology* (Vol. 5, pp. 25-107). London: William Heinemann. Acedido em 2 de Julho, 2006, de http://www.scribd.com/doc/31403686/Greek-Anthology-V

Rickey, V. F. (1995). My favorite ways of using history in teaching calculus. In F. Swetz et al (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 123-134). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Swetz, F. J. (1995). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. In F. Swetz et al (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 25-38). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In M. Cole, V. John-Steiner & E. Souberman (Eds.), *Mind in society - the development of higher psychological processes* (pp. 79-91). Cambridge: Harvard University. Acedido em 5 de Setembro, 2010, de http://www.psy.cmu.edu/~siegler/vygotsky78.pdf

PROPUESTA DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN TORNO A LA MODELIZACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO

Catarina Lucas
Escola Superior de Tecnologia da Saúde do Instituto Politécnico do Porto
col@estsp.ipp.pt

Cecilio Fonseca Bon
Departamento Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo (España)
cfonseca@uvigo.es

Josep Gascón Pérez
Dep. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universitat Autònoma de Barcelona
gascon@mat.uab.cat

Resumen
El trabajo que se presenta está en fase de experimentación y se está desarrollando en un taller de matemáticas. Nuestro objetivo es, a partir de una teoría didáctica y de una propuesta abierta del concepto de *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) -propuesto por Chevallard- articular y experimentar un modelo particular de REI que permita diseñar secuencias de enseñanza y aprendizaje en el tránsito de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria. En este trabajo se presenta una secuencia de enseñanza que se mueve en el entorno de la derivada.

Palabras clave: derivada, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Recorrido de Estudio e Investigación

1. Introducción

Uno de los problemas más preocupantes de la educación matemática actual consiste en la pérdida de sentido de las matemáticas escolares. Así, por ejemplo, en el caso de la derivada los alumnos tienden a memorizar las reglas de derivación y para resolver cuestiones que envuelven este concepto recurren a procedimientos estandarizados. Se produce así un "acuerdo implícito" profesor-alumno en que el primero sugiere pistas (consciente o inconscientemente) al segundo para que éste utilice la técnica adecuada para resolver una determinada tarea. Este hecho es una manifestación de un fenómeno didáctico que Guy Brousseau denominó "fenómeno Topaze" (Brousseau 1997). Muchos enfoques en educación matemática, avalados por informes internacionales como PISA propugnan la necesidad de enseñar las matemáticas como una herramienta de modelización, especialmente de cuestiones o situaciones que surgen fuera del ámbito de las matemáticas. Aparece también como una exigencia del Espacio Europeo de Educación Superior, al tiempo que se considera que la modelización puede aportar resultados

positivos al problema docente. Nuestro objetivo en este trabajo es el de proponer un nuevo dispositivo didáctico que puede convertirse en una herramienta para la modelización matemática.

2. Antecedentes

Nos situamos dentro de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997). En esta teoría se considera que la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos abarca lo que se denomina una Organización Matemática (OM) al menos local, formada por tipos de *tareas, técnicas* (una forma de hacer sistemática y compartida dentro de la institución de referencia), *tecnología* (discurso racional sobre la técnica) y *teoría* (justificación de la tecnología). Siguiendo este modelo teórico, en Fonseca (2004) para estudiar la rigidez de la actividad matemática de Secundaria se formularon cinco *conjeturas específicas*:

C1. Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica
C2. Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado
C3. No existen dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea
C4. Ausencia de técnicas para realizar una tarea "inversa"
C5. Ausencia de situaciones abiertas de modelización

El mismo estudio permitió contrastar experimentalmente las conjeturas utilizando dos tipos de datos como indicadores de las características de las OM que se construyen en la enseñanza secundaria española: un cuestionario en el que participaron varias universidades y el análisis de una muestra de manuales oficiales para la enseñanza secundaria. Un estudio similar fue llevado a cabo con una muestra de estudiantes portugueses y analizando los libros de texto más frecuentes en la enseñanza secundaria de Portugal (Lucas, 2010). Comparando los datos se concluyó que, en ambos países, los alumnos tienen problemas con la nomenclatura, manejan una sola técnica, no responden a la tarea inversa de las tareas escolares habituales, no interpretan las técnicas y tienen una extraordinaria dificultad para trabajar con tareas abiertas, lo que provoca una incompletitud y desarticulación de la actividad matemática desarrollada. Los resultados ponen de manifiesto que en Secundaria el contrato didáctico institucional comporta una actividad matemática puntual, rígida y aislada, que dificulta e incluso impide llevar a cabo una verdadera actividad matemática, flexible y funcional. La respuesta a esta incompletitud fue la creación en (Fonseca, 2004; Bosch, Fonseca & Gascón, 2004) de una herramienta didáctica, la *Organización Matemática Local Relativamente Completa* (OMLRC). Para su diseño es necesario en primer lugar que la OM en cuestión contenga un

cuestionamiento tecnológico pertinente, esto es, un conjunto de tareas matemáticas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas y, además, que produzca una actividad matemática de complejidad creciente, que provoque la ampliación del tipo de problemas que puedan abordarse.

3. Marco Teórico

Yves Chevallard (2006) propuso un dispositivo didáctico denominado *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI). En esa propuesta inicial un REI viene generado por el estudio de una cuestión viva Q_0 con fuerte poder generador, capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas. Los trabajos de Javier García (2005), Berta Barquero (2009) y Noemi Ruiz (2010), nos permitió comenzar a elaborar y experimentar un modelo de REI (Fonseca, 2007; Fonseca, Pereira & Casas, 2008) caracterizado por:

I. Un *problema didáctico-matemático* al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta.
II. Una *Institución* concreta en la cual se plantea el problema en cuestión.
III. La *razón de ser* del ámbito matemático que está en juego en dicho problema didáctico-matemático. Si pretende efectuar una reflexión y procurar una justificación para las cuestiones: Por qué derivan los estudiantes? Para qué sirve la derivada? Es una herramienta útil? Cuáles son las razones históricas que motivaron su estudio? Qué situaciones problemáticas emergen que antes no era posible formular? En la TAD se postula que para que una cuestión matemática pueda estudiarse con "sentido" es necesario:

(a) Que provenga de cuestiones que la Sociedad propone que se estudien en la Escuela (*legitimidad cultural o social*).
(b) Que aparezca en ciertas situaciones "umbilicales" de las matemáticas, esto es, situadas en la *raíz central* de las matemáticas (*legitimidad matemática*).
(c) Que conduzca a alguna parte y que esté relacionada con otras cuestiones, sean estas intramatemáticas (integración, ecuaciones diferenciales) o extramatemáticas (sistemas físicos, biológicos, sociales, etc.)(*legitimidad funcional*).
(d) Estudiar las dificultades, restricciones que impiden su estudio y las condiciones que permiten mejorar el proceso de estudio de cuestiones matemáticas relacionadas con la primera (*legitimidad didáctica),* propuesta en Gascón (2003).

IV. Una *cuestión generatriz* (Q) asociada a la OM que pretendemos construir como respuesta inicial al problema didáctico-matemático planteado. Elegiremos dicha cuestión Q, de acuerdo

con los alumnos. Debe tratarse de una cuestión que tenga sentido en la institución en la que nos situamos y que, además, sea suficientemente rica y fecunda para generar una actividad matemática de complejidad creciente que obligue al alumno a un cierto compromiso personal en su resolución. Llamaremos cuestión generatriz porque es la que impulsa y provoca todo el proceso de estudio.

V. Una *organización matemática local relativamente completa* (OMLRC) que pretendemos construir. Aparecerán cuestiones derivadas para las que la comunidad de estudio no dispone de una técnica conocida que permita encararlas. Este posible conflicto desencadenará la creación de una OM al menos local y pondrá en marcha un proceso de ingeniería didáctica (cuya dinámica podrá describirse en términos de los Momentos Didácticos) y, por otro lado, un proceso de ingeniería matemática (Fonseca, 2004) cuyo grado de completitud relativa puede medirse mediante los indicadores de presencia de:

OML1. Tareas con referencia a la interpretación, justificación, fiabilidad, economía y alcance de las técnicas, así como a la comparación de las mismas.

OML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas.

OML 3. Diferentes representaciones de la actividad matemática.

OML 4. Tareas y de técnicas "inversas" de las habituales.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.

OML 6. Tareas matemáticas "abiertas".

OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

OML 8. Posibilidad de perturbar la situación inicial.

Un REI, como prototipo de modelo didáctico funcional, contrasta vivamente con el modelo institucional imperante, en el que primero se da la teoría y después se buscan aplicaciones a esa teoría. En un REI partiremos de una cuestión problemática inicial Q y, mediante sucesivos procesos de la actividad matemática, la iremos completando y ampliando hasta obtener una OMLRC.

4. La Teoría Antropológica de lo Didáctico y la modelización: los REI en la creación de secuencias de enseñanza-aprendizaje

Uno de los trabajos de investigación en el ámbito de la TAD que establece la relación entre los dispositivos que proponen esta teoría y la modelización es el propuesto por García (2005). Se trata de un proceso de modelización (algebraica), que provoca una ampliación praxeológica sucesiva, cuyo motor es el cuestionamiento tecnológico y la posibilidad de generar nuevas

técnicas mejor adaptadas, así como de plantear nuevos tipos de problemas. Siguiendo en esta línea de investigación, que ha sido desarrollada recientemente en los trabajos de Barquero (2009), Pereira (2010) y Ruiz-Munzón (2010), pretendemos trabajar en la creación de un dispositivo didáctico para la enseñanza del Calculo Diferencial en el tránsito de Secundaria a la Universidad. Partiendo de un modelo algebraico que requiera transformar parámetros en variables mediante el cambio progresivo del contexto del modelo. Así, si pretende que los estudiantes:

– elaboren modelos para situaciones reales utilizando diversos tipos de funciones;
– representen y analicen relaciones utilizando simultáneamente el estudio grafico, numérico y analítico;
– reconozcan que un mismo tipo de funciones pueden ser modelos de diferentes situaciones;
– analicen los efectos de los cambios de parámetros en los gráficos de funciones;
– estudien el comportamiento de las funciones racionales en los puntos frontera del dominio;
– interpreten la "rapidez" de crecimiento (o decrecimiento) de una función cuando ésta hace el papel de modelo de una situación matemática o extramatemática.

Explicitaremos a continuación el esbozo de un ejemplo concreto de un *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) que gira alrededor de la concentración de un medicamento, que forma parte de un campo de problemas más amplio relativo a la OM en torno a la derivada. Pretendemos retomar los contenidos de Secundaria con el objetivo de cuestionarlos, mostrar sus limitaciones, y reestructurarlos o integrarlos en organizaciones cada vez más complejas a estudiar en la etapa universitaria. Lo que aquí figura es una versión muy resumida de un posible REI en una secuencia de enseñanza-aprendizaje que puede servir para estudiar la actividad matemática ligada a la optimización de funciones:

Problema docente: "¿Qué tengo que enseñar a mis alumnos a propósito de los problemas de optimización y cómo tengo que enseñarlo?"

Institución: Escuelas Secundarias portuguesas, bachillerato español y primeros cursos universitarios.

Razón de ser de la problemática de la optimización: Los alumnos tienen que completar en su cuaderno cuales son las legitimidades: funcional (plantearemos diversas cuestiones problemáticas intramatemáticas y extramatemáticas), social (programa, manuales,…), matemática (cuándo y por qué de los extremos relativos) y didáctica de la optimización de funciones. La importancia de este proceso de estudio viene dada porque la derivada es una

herramienta de gran utilidad para resolver situaciones problemáticas que envuelvan una variación con aplicabilidad a numerosas áreas científicas o disciplinares.

Cuestión Generatriz: De todas las posibles cuestiones con sentido relativas a la legitimidad funcional, y dada la importancia de recientes investigaciones de modelos matemáticos en epidemiologia, optamos por situar nuestra cuestión generatriz en el ámbito de esta temática:

> **Q:** "Con la finalidad de erradicar una epidemia se inyectó una determinada cantidad de medicamento en los individuos infectados. Se pretende estudiar la variación de la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo de estos individuos."

Intencionadamente se plantean enunciados muy abiertos, sin datos numéricos, rompiendo el contrato didáctico habitual, en el que el profesor siempre da todos los datos necesarios para que el alumno resuelva el problema. Estamos pues ante una tarea matemática "abierta" (OML6).

4.1. Desarrollo de una OMLRC

La construcción de la OM relativa a la derivada la comenzaremos a partir de tareas propuestas en 11º año. Estudiaremos sus limitaciones que nos servirán para ampliar la actividad matemática de la derivada a 12º año. Después les propondremos tareas que no tienen respuesta con las técnicas disponibles por el alumno y que constituyen una posible *Razón de Ser* para la actividad matemática desarrollada en la Universidad. En un *Momento Praxeológico Inicial* se pretende verificar los conocimientos previos del alumnado relativamente al estudio algebraico, gráfico y de propiedades de funciones polinómicas. En el *Momento del Primer Encuentro* debería darse la oportunidad a los alumnos de crear un modelo matemático que represente la situación problemática. Una posible propuesta de modelo seria, por ejemplo:

> **Q_1:** "La concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de ingerido está dado por $C(t) = \frac{t}{2t^2+1}$ miligramos por litro. Al fin de cuantas horas se inicia la eliminación del medicamento del torrente sanguíneo? O cuánto tiempo después de la ingestión es la concentración en lo sangre más elevada? De cuantos mg/l es esa concentración?"

Esta adaptación de la cuestión generatriz tiene como objetivo el estudio de la derivada de una función racional. Podríamos abordar el problema con una primera técnica (utilizar lápiz y papel) pero es una técnica muy rudimentaria con un coste enorme. La necesidad de buscar una técnica que disminuya el coste nos introduce en el *Momento Exploratorio*, momento en el que podemos empezar a explorar Q1 con, por ejemplo, un programa de Geometría Dinámica (Artigue, 2006). Así, para estudiar la variación de la concentración del medicamento con el tiempo podemos utilizar como instrumento informático el GeoGebra, que nos permite

intuitivamente ver que la concentración crece, alcanza un valor máximo y después decrece. Podemos también comparar los gráficos y valores de la concentración y de su variación:

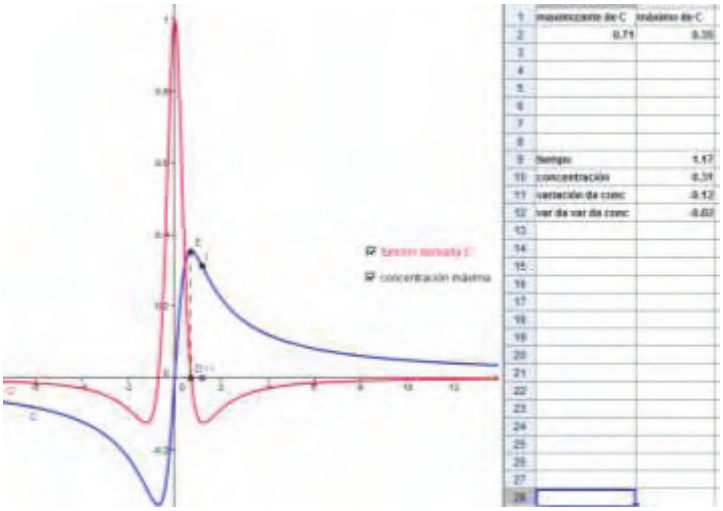


Figura 1. Gráficos y valores de la concentración y de la función primera derivada

La necesidad de ser rigurosos en la respuesta nos conduce al *Momento del Trabajo de la Técnica*, que consiste en procurar una técnica más eficaz para determinar el máximo de la concentración del medicamento. Las debilidades de las técnicas nos introduce en el *Momento Tecnológico–Teórico*, en donde, justificaremos el estudio teórico de la derivada. Volveremos a retomar el Momento del Trabajo de la Técnica: estableceremos tablas numéricas de la función y de sus derivadas, pediremos que interpreten (OML5) numéricamente la primera y segunda derivada en puntos concretos. Debatiremos que el modelo da una buena respuesta al problema, pero está incompleto. Aquí es donde se pone de manifiesto (OML1) el proceso de modelización en el sentido que propone la TAD: partir de una cuestión Q y generar una actividad matemática de complejidad creciente. Dicha complejidad aumenta de una forma considerable cuando se introducen parámetros, es decir cuando pasamos de un caso particular a un caso general. En el taller se le plantean al alumnado nuevas tareas de perturbación (OML8) de la cuestión Q1 que permiten generalizar el estudio de nuestro proyecto, algunas de las cuales figuran a continuación:

4.2. Primera Modificación de la cuestión generatriz

Q_2: "Una función de la forma $C(t) = ate^{-kt}$ donde a y k son constantes positivas, se denomina función de incremento y algunas veces se emplea para modelar la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de que se administra el medicamento."

Esta modificación permite establecer la relación entre el estudio de la función derivada de la exponencial, el comportamiento de la concentración y su valor máximo. Con el objetivo de estudiar la influencia del parámetro a en la variación de la concentración se sugiere una ampliación de la cuestión anterior:

4.2.1. Primera perturbación de las condiciones iniciales

Fijando el valor de k y haciendo variar el a: Q'₂

Es relevante que el alumno al manipular las medidas y hacer variar los parámetros conjeture que el valor de a influye la forma de la función concentración, una vez que, cuanto mayor es el valor del parámetro a, mayor es el máximo de la concentración.

4.2.2. Segunda perturbación de las condiciones iniciales

Fijando el parámetro a y haciendo variar el valor de k: Q''2

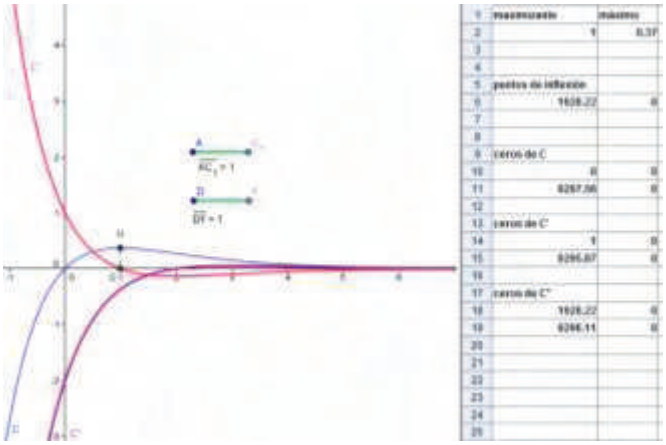


Figura 2. Gráficos y valores de la concentración, de la función primera y segunda derivada

Observando los gráficos y tablas de valores, los alumnos deben concluir que, al contrario de lo que ocurre con el parámetro a, cuanto mayor es el valor del parámetro$k$, menor es el máximo de la concentración, porque hay un achatamiento del grafico de la función.

4.2.3. Tercera perturbación de las condiciones iniciales

Se varían ambos parámetros simultáneamente:Q'''2

Esta cuestión problemática permite completar y ampliar la actividad matemática y puede servir como una posible *Razón de Ser* para el estudio de funciones de varias variables en la Universidad.

4.3. Segunda Modificación de la Situación Inicial

Plantearemos el *problema inverso* (OML4):

> **Q_3:** "Suponga que t horas después de haber administrado oralmente un antibiótico, su concentración en el torrente sanguíneo del paciente está dado por una función de la forma $C(t) = ate^{-kt}$ dónde a y k son constantes positivas y C se mide en microgramos por mililitro. Las muestras de sangre se toman periódicamente, y se ha determinado que la concentración máxima del medicamento se ha alcanzado 2 horas después de administrada la droga y es de 10 microgramos por mililitro. Use esa información para determinar a y k."

Manipulando ahora los parámetros de forma a que el valor del máximo de la concentración sea aproximadamente 10 microgramos por mililitro y su abscisa sea próxima de 2 horas (observando la variación de los valores de la tabla), los estudiantes pueden simplemente estimar $a = 13{,}64$ y $k = 0{,}5$. Para contestar al apartado siguiente basta que el estudiante determine gráficamente el punto de intersección de la recta $y = 1$ con el grafico de la función concentración. En el *Momento de las TIC*, si sugiere la manipulación gráfica de la función en el *GeoGebra*. El *Momento Institucional* tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada distinguiendo los elementos que entrarán en su construcción y los que no le hayan sido integrados. Con este último momento se articula el *Momento de la Evaluación* en el que se debe "hacer balance" y donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina lo que *vale* lo que se ha aprendido.

5. Condiciones requeridas y dificultades previsibles

La puesta en marcha efectiva, la experimentación, de un REI tal como el que hemos esbozado requiere que se cumpla un conjunto de condiciones que no se dan de manera espontánea en los actuales sistemas de enseñanza. En consecuencia, es previsible que aparezcan dificultades en la gestión de este tipo de dispositivos. Citaremos a continuación algunos las más importantes.

- Dificultades para que los estudiantes asuman compartir algunas de las responsabilidades asignadas habitualmente en exclusiva al profesor.
- Dificultades para mantener vivas las cuestiones generatrices del REI a lo largo de un proceso de estudio dilatado en el tiempo y, aparentemente, repetitivo (rompiendo así el contrato didáctico habitual).
- Dificultades para que los estudiantes prioricen en cierta forma el trabajo técnico y sientan la necesidad de utilizar (y hasta de desarrollar) elementos tecnológicos y teóricos.

Para afrontar dichas dificultades el dispositivo de los REI posee grandes potencialidades para posibilitar una actividad matemática funcional:

- Las cuestiones generatrices del REI forman parte del futuro mundo profesional de los alumnos y la respuesta a dichas cuestiones constituye un proyecto realista.
- La realización del proyecto por parte de los alumnos combinará el trabajo en aula con clases no presenciales.

El REI muestra toda su potencialidad cuando se aplica a la elaboración de proyectos que surgen en diferentes áreas científicas y que requieren de un trabajo abiertamente multidisciplinar. En esta dirección, y dentro del proyecto del que aquí se esboza únicamente una pequeña parte, pretendemos estudiar en el futuro la correspondencia entre la concentración de un medicamento que combata el desarrollo de una epidemia y los efectos del mismo sobre el desarrollo de la epidemia.

6. Referencias

Artigue, M. (2006). La inteligencia del cálculo. *Revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 2*, N.º 5.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Barcelona: Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2006). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: estudio de la dinámica de poblaciones. In Ruiz Higueras, L., Estepa, A., García, F. J. (eds.) *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24* (2-3), 205-250.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. *In Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* San Feliu de Guixols, 17-21 Febrero (en prensa).

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral). Vigo: Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis Doctoral). Jaén: Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2003). La Pedagogía y la Didáctica frente a la problemática del profesorado de Matemáticas*", Comunicación presentada en el XVI Congreso de ENCIGA*, Cangas de Morrazo, Pontevedra.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas*. Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados. Universidad de Vigo.

Pereira, A. (2010). *Recorridos de Estudio e Investigación centrados en la modelización matemática*. Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados. Universidad de Vigo.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. In L. Ruiz Higueras, A. Estepa, & F. J. García (eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 635-660). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2006). ¿Mejora la compresión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?, *Educación Matemática, 18*(3), 5-38.

O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ESTUDO DAS FUNÇÕES NO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Adélia Prates
Escola Secundária Moita
profmatdelinha@gmail.com

Celina Tavares
Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich
Escola Secundária Stuart Carvalhais
celina.m.tavares@sapo.pt

Rosa Pedro Dias
Escola EB 2/3 Ruy Belo
rosa.p.dias@gmail.com

Cláudia Canha Nunes
Agrupamento de Escolas Fernando Pessoa, Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
cjohnent@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta um diagnóstico sobre pensamento algébrico no estudo das funções, em particular as estratégias utilizadas e as dificuldades apresentadas pelos alunos de uma turma do 10.º ano na resolução de uma tarefa que envolve as funções afim e quadrática. A metodologia adoptada é de natureza mista, qualitativa e quantitativa e a análise de dados incide nas produções escritas dos alunos numa tarefa realizada em sala de aula no final da unidade de ensino. Os resultados mostram que os alunos conjugam as diferentes estratégias de cunho formal e informal na resolução da tarefa, demonstrando compreensão e entendimento do símbolo. Contudo, há alunos que demonstram dificuldades em lidar com a simbologia e em usar e interpretar a informação dada para resolver os problemas. Verifica-se também que em algumas situações, os alunos não mostram preocupação em verificar as soluções obtidas e não reflectem sobre o seu significado no contexto da tarefa.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, conceito de função, estratégias, dificuldades.

Introdução

No nosso país o tema das funções é central no programa de Matemática A do ensino secundário (ME-DES, 2001). Do conhecimento que temos dos nossos alunos do 10.º ano de escolaridade e da experiência em leccionar este tema, percebemos que eles apresentam diferentes tipos de dificuldades no estudo das funções afim e quadrática. Ponte, Branco e Matos (2009) detectam dificuldades em utilizar a terminologia própria das funções (domínio, contradomínio, objecto e imagem), principalmente quando aparecem em contextos exclusivamente matemáticos. Igualmente salientam que são reveladas

dificuldades em lidar eficazmente com a simbologia *x, y e f (x)*, em passar a informação de uma representação para outra, em usar a informação dada para a resolução de problemas, em traduzir condições verbais numa equação do 2.º grau e em interpretar as soluções, de acordo com as condições dadas. Tendo em conta as dificuldades referidas, os autores concluem que uma das estratégias para ajudar os alunos deverá ser a contextualização dos problemas numa situação real de forma a permitir uma apropriação progressiva da simbologia matemática. O professor pode organizar o estudo das funções recorrendo a diferentes representações, nomeadamente à linguagem natural, gráfica, tabelar e por meio de uma expressão algébrica (resolução da equação), bem como à interpretação das situações de modo que tenham significado e sejam compreendidas pelo aluno.

A presente comunicação decorre de uma investigação cujo objectivo principal é procurar conhecer as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas pelos alunos no estudo das funções afim e quadrática, e procura responder à seguinte questão: Que estratégias utilizam os alunos do 10.º ano de escolaridade no estudo das funções e que dificuldades manifestam na sua resolução? Para dar resposta à questão procuramos identificar as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas pelos alunos na compreensão da linguagem algébrica no estudo das funções.

Pensamento algébrico no estudo das funções

Lins e Giménez (1997) caracterizam o pensamento algébrico como uma forma de "produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas" (p. 151). Consideram como objectivos fundamentais do ensino da Álgebra: (i) a produção de significado para os símbolos algébricos; e (ii) o desenvolvimento da capacidade de pensar algebricamente. Estes autores realçam o papel da natureza das tarefas a propor aos alunos para atingir estes objectivos e reconhecem a importância das actividades de natureza investigativa.

O programa do 10.º ano de Matemática A (ME-DES, 2001) aponta para o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento científicos, descobrindo relações entre conceitos, justificando processos de resolução, encadeando raciocínios, validando conjecturas e formulando generalizações. Refere, ainda, que "no estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações" (p. 29) e que as actividades de

investigação facilitam a aprendizagem, reforçando a capacidade de raciocinar logicamente "pelas oportunidades de formular e testar conjecturas e analisar contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações" (p. 22). Neste sentido,

> Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico devendo privilegiar o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas" (ME – DES, 2001, p. 26).

O mesmo documento aponta como objectivos o estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, pontos notáveis - intersecção com os eixos coordenados, monotonia, continuidade e extremos - relativos e absolutos) tanto a partir de um gráfico como usando a calculadora gráfica. A utilização da calculadora gráfica é também referida como um recurso que permite aos alunos um estudo mais integrado através das diferentes representações (gráfico, tabela, expressão algébrica) e um acesso mais facilitado e rápido na resolução das questões.

Ursini e Trigueros (2001) propõem três categorias principais de estratégias, utilizadas na resolução de problemas, que designam por "Modelo 3UV": incógnita, número generalizado e variável numa relação funcional. Para cada uma destas categorias, as autoras identificam aspectos específicos relativos a diferentes níveis de abstracção com que estas interpretações se podem manifestar no aluno (quadro 1).

Quadro 1 – Estratégias apresentadas pelos alunos (Ursini & Trigueros, 2001)

Categorias	**Subcategorias**
A – Entendimento do símbolo como incógnita **(EA)**	**EA1 -** Reconhecimento, numa situação problemática, da presença de uma quantidade desconhecida que pode ser determinada atendendo aos dados fornecidos
	EA2 - Interpretação dos símbolos que surgem numa equação como entidades que podem tomar valores específicos
	EA3 - Capacidade de substituição do símbolo por um ou mais valores que transformem uma equação numa proposição verdadeira
	EA4 - Determinação do valor da incógnita que surge numa equação ou problema, por aplicação das operações algébricas e/ou aritméticas adequadas
	EA5 - Representação das quantidades desconhecidas identificadas numa situação específica e a sua utilização na formulação de equações

B – Interpretação dos símbolos enquanto variáveis numa relação funcional **(EB)**	**EB1 -** Reconhecer a correspondência entre quantidades, independentemente do tipo de representação que é usado
	EB2 - Determinar o valor da variável independente dado o valor da variável dependente
	EB3 - Determinar o valor da variável dependente dado o valor da variável independente
	EB4 - Reconhecer a variação conjunta das variáveis que intervêm numa relação, qualquer que seja a sua forma de representação
	EB5 - Expressar uma relação funcional de forma tabular, gráfica e/ou analítica, com base nos dados de um problema

De acordo com Saraiva e Teixeira (2009), algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos. Estes autores consideram que a resolução de tarefas matemáticas de natureza diversa pode ajudar a promover nos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico, da capacidade de interpretar e de manipular os símbolos matemáticos, e as relações existentes entre eles, bem como desenvolver a capacidade em lidar com as estruturas algébricas, representando e raciocinando de uma forma progressivamente mais abstracta. Sajka (2003) acrescenta, ainda, que estas dificuldades estão relacionadas com os contextos em que os símbolos são trabalhados nas aulas de Matemática, nomeadamente quando o conceito de função se reduz ao trabalho com uma expressão algébrica e, às vezes, ao processo gráfico, onde a expressão é necessária para representá-lo. Considera também que a capacidade dos alunos para manipular os símbolos, e operar com eles, não é suficiente para a compreensão estrutural de uma função.

Metodologia

O presente trabalho segue uma metodologia mista, qualitativa e quantitativa (Bodgan & Biklen, 1994). Esta problemática incide nas estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos relativamente ao estudo das funções, na disciplina de Matemática A, numa turma do 10.º ano de escolaridade. Assim, a recolha de dados foi realizada pela professora da turma que também é uma das autoras, no dia 5 de Abril de 2011, numa Escola Secundária da região de Setúbal, numa turma de 22 alunos e envolveu a realização de uma tarefa em sala de aula durante 45 minutos.

Após uma primeira análise das produções escritas dos alunos, efectuámos uma tipificação das respostas obtidas em: *Correctas*, *Incorrectas*, *Incompletas* e *Não Responde*, de acordo com os objectivos definidos para cada uma das questões da tarefa (quadro 2).

Quadro 2 – Objectivos das questões

Questões	**Objectivos**
Q1	Converter o valor do tempo nas unidades indicadas e substituir o valor correspondente do tempo nas duas funções apresentadas.
Q2	Determinar o valor da variável independente dado o valor da variável dependente e inferir que um dos irmãos (Pedro) não regressa a casa.
Q3	Calcular o vértice da função e determinar o valor da variável dependente dado o valor da variável independente.
Q4	Determinar as coordenadas do ponto P e indicar o seu significado no contexto do problema.

Numa segunda fase de análise foram categorizadas as estratégias (quadro 1) de acordo com as categorias (EA) - entendimento do símbolo como incógnita e (EB) – interpretação dos símbolos enquanto variáveis numa relação funcional (Ursini & Trigueros, 2001) e (D) - dificuldades (quadro 3) apresentadas pelos alunos na compreensão do conceito de função (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Quadro 3 – Dificuldades apresentadas pelos alunos

Categorias	**Subcategorias**
Dificuldades apresentadas pelos alunos (D)	**D1 -** Dificuldade em lidar com a simbologia (uso incorrecto das variáveis, identificação do domínio e contradomínio)
	D2 - Dificuldade em usar a informação dada para a resolução de problemas
	D3 - Dificuldade em interpretar soluções, de acordo com as condições dadas

A tarefa

A tarefa foi adaptada e proposta aos alunos com o objectivo de conhecer as estratégias que utilizam e as dificuldades que manifestam na compreensão da linguagem algébrica no estudo das funções. Por outro lado, procuramos perceber as aprendizagens que os alunos fizeram após a leccionação da unidade 2 – Funções. Durante a unidade de ensino a professora propôs aos alunos diferentes tipos de tarefas tais como resolução de pro-

blemas, exercícios propostos no manual escolar, várias questões saídas em testes intermédios e problemas do GAVE. Esta diversidade de propostas teve como objectivo ajudar os alunos a compreender e desenvolver o conceito de função mas também familiarizá-los com tarefas desta natureza. Embora os alunos já tivessem tido algum contacto com representações gráficas de funções no ano lectivo anterior, apenas no 10.º ano a aprendizagem de Funções se realizou com recurso à calculadora gráfica e ao computador. A calculadora gráfica e o programa didáctico *Graphmática* foram utilizados na maioria das aulas. Acrescenta-se que a professora recorreu também a várias discussões com toda a turma para levar os alunos a reflectir, a analisar os erros, a clarificar raciocínios e a promover a clareza e o rigor, na apresentação das respostas às questões.

Tarefa – A Joana e o irmão Pedro saíram de casa às 14 horas, mas seguiram trajectos diferentes. Passadas **t horas após a saída**, as distâncias, em quilómetros, a que cada um deles se encontra de casa são dadas pelas funções f e g, respectivamente, para a Joana e para o Pedro.

No referencial da figura, encontram-se representadas as funções f e g e sabe-se que:

$f(t) = -2t^2 + 6t$ e $g(t) = 1{,}8t$

Questão 1 - Determine a que distância se encontrava de casa, cada um dos irmãos, às 14 horas e trinta minutos. Explique o modo como obteve o resultado.

Figura 1 – Enunciado da tarefa e da Questão 1 (Q1).

Da análise do quadro 4, referente à Q1 da tarefa, verificamos que 63,6% dos alunos consegue identificar correctamente a variável independente (t), converter para a unidade referida na tarefa (hora) e calcular o valor da variável dependente por substituição da variável independente.

Quadro 4 – Resultados da resposta à Q1

Resposta correcta	**63,6 %**
Resposta incorrecta	**22,7%**
Resposta incompleta	**13,7%**
Não responde	**0 %**

Como se pode observar, por exemplo, pela resposta do Miguel (figura 2) e da Mafalda (figura 3).

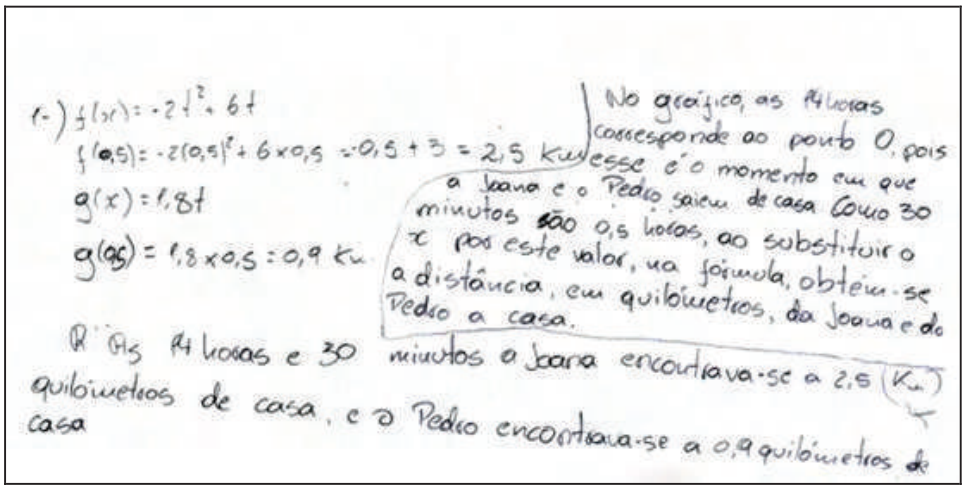


Figura 2 – Resposta do Miguel à Q1

O Miguel não apresenta dificuldades (D) na sua resolução e utiliza todas as estratégias de entendimento do símbolo como incógnita quando substitui o valor de t por 0,5 h e calcula o valor da distância a que os dois irmãos se encontram de casa (EA). Pela descrição dada na sua resposta, Miguel mostra que utiliza as estratégias de interpretação do símbolo pois determina o valor da variável dependente dado o valor da variável independente (EB1 e EB3). Utiliza, também o processo analítico e a análise gráfica para dar a resposta (EB5), evidenciando reconhecer a relação conjunta entre as variáveis (EB4). Igualmente se percebe que inicia o seu raciocínio com a análise do gráfico da tarefa antes de fazer a substituição da variável independente nas duas funções, pois refere que a origem do gráfico corresponde às catorze horas.

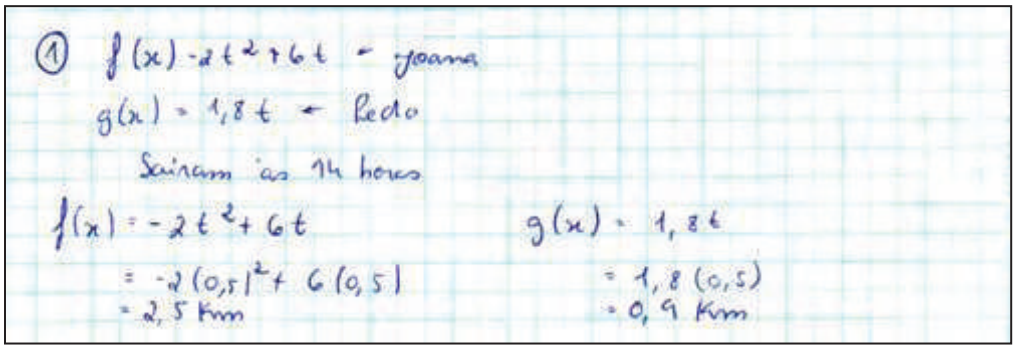


Figura 3 – Resposta da Mafalda à Q1

Mafalda, tal como Miguel, responde correctamente à Q1, utilizando o mesmo tipo de estratégias. No entanto, a aluna ainda não faz a manipulação correcta da variável independente em toda a expressão, uma vez que calcula o valor de *f(0,5)* sem o escrever.

As respostas consideradas incompletas devem-se à falta de unidades após o cálculo ou à conversão incorrecta da variável tempo, como se pode observar pela resposta da Ana Patrícia (figura 4).

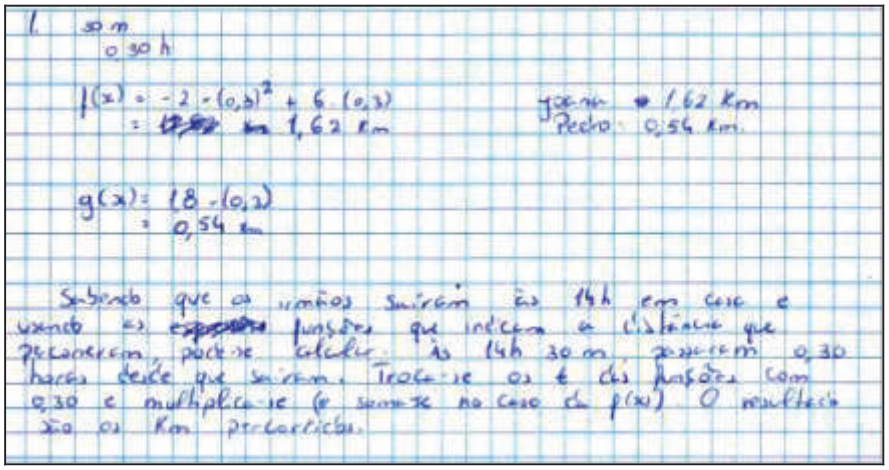


Figura 4 – Resposta da Ana Patrícia à Q1.

Na resposta da aluna verifica-se que ela tem noção das operações a efectuar (EA, EB1, EB3 e EB4), porque na sua resolução indica os procedimentos utilizados. No entanto, erra na conversão do tempo e, tal como a Mafalda, revela dificuldade na manipulação correcta da variável independente.

As respostas consideradas incorrectas aplicam-se a resoluções onde não há conversão da variável independente (tempo) ou há uma interpretação incorrecta do enunciado da tarefa, por ignorarem as instruções dadas, e não terem em atenção que o instante inicial do percurso dos dois irmãos corresponde às 14 horas.

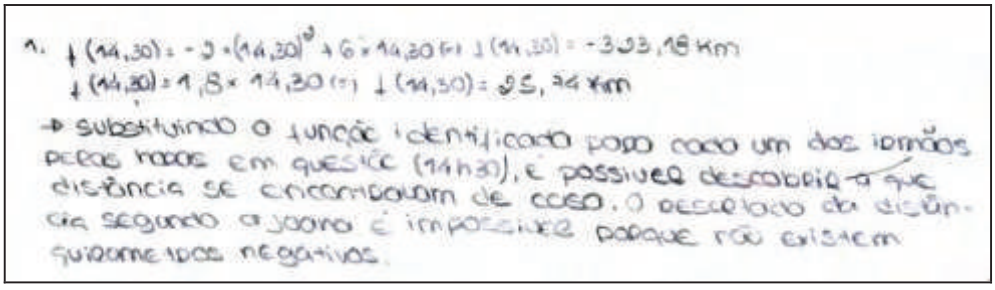


Figura 5 – Resposta da Joana à Q1.

Por exemplo, a Joana (figura 5) percebe que tem de substituir o valor da variável independente nas duas funções para poder calcular o valor da distância a que os dois irmãos se encontravam de casa (EA, EB3 e EB4). No entanto, não compreende qual o valor correspondente ao início da contagem do tempo, pois substitui o valor da variável *t* por 14,30 h (D2) e, por isso, determina a distância percorrida pelos dois irmãos através das expressões *f (14,30)* e *g (14,30)*.

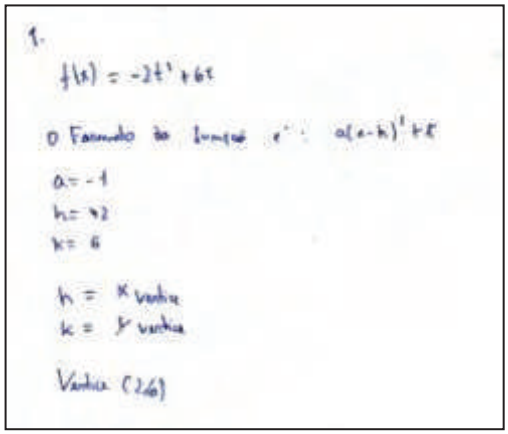


Figura 6 – Resposta de Rui à Q1.

O Rui indicia dificuldades (D1, D2) na resolução da questão 1. Não reconhecendo a correspondência entre as quantidades identificadas no problema (figura 6). Assim, a partir da expressão $a\ (x-h)^2+k$, procura determinar as coordenadas do vértice da função para em seguida calcular o valor da distância percorrida pelos dois irmãos confundindo com o valor da distância máxima percorrida.

Questão 2 - Qual dos dois irmãos regressou primeiro a casa? Determina a hora a que chegou. Descreva o processo que usou para resolver a questão.

Figura 7 – Enunciado da Q2.

Relativamente à Q2 (figura 7) verifica-se que 50% dos alunos da turma não conseguiu resolver integralmente esta questão pois tiveram dificuldades em calcular a hora de chegada a casa. E ao contrário da questão anterior apenas 22,7% dos alunos acertaram nesta pergunta.

Quadro 5 – Resposta à Q2.

Resposta correcta	**22,7 %**

Resposta incorrecta	**22,7 %**
Resposta incompleta	**50,0 %**
Não responde	**4,6 %**

As respostas correctas correspondem a alunos que calculam os zeros da função quadrática e concluem que a Joana será a primeira a chegar a casa.

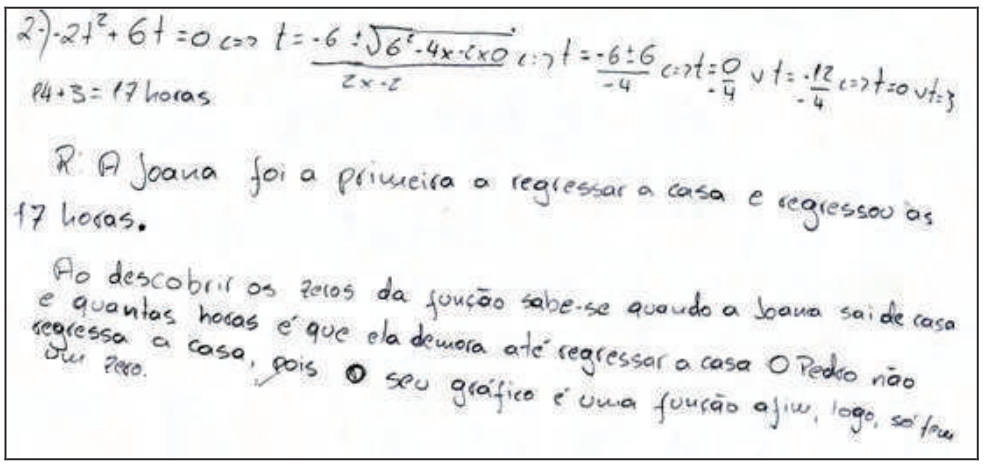


Figura 8 – Resposta do Miguel à Q2.

Miguel identifica correctamente que a Joana é a única a chegar a casa, pois reconhece grafica e analiticamente o zero da função (figura 8). Determina o valor da variável independente e infere que o Pedro nunca regressa a casa pois a sua representação gráfica é de uma função afim (EB4). Calcula os zeros da função *f(t)* (EB1 e EB2) e conclui que ao fim de três horas a Joana regressa a casa. Neste sentido, ele não revela dificuldade na resolução e utiliza as estratégias recorrendo a processos analíticos, gráficos e descritivos (EB5).

Nas respostas incompletas (50%) verifica-se que os alunos determinam os zeros da função, analiticamente ou utilizando tabelas, mas não encontram a hora de chegada da Joana e/ou não referem a situação relativa ao Pedro. Por exemplo, a resposta de Inês (figura 9) permite-nos perceber como ela faz uma correcta manipulação dos símbolos.

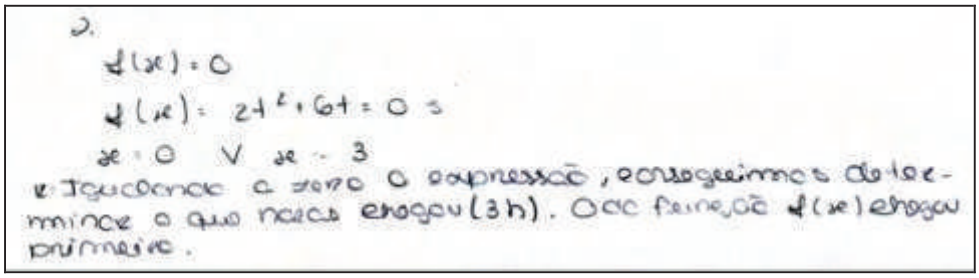


Figura 9 – Resposta de Inês à Q2.

No entanto, parece ter dificuldade em interpretar o resultado obtido (D3), porque calcula os zeros da função (EB1 e EB2) mas não utiliza os valores encontrados para responder à questão.

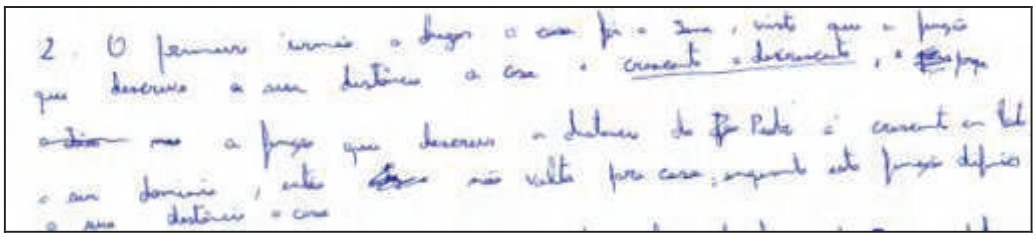


Figura 10 – Resposta de Sérgio à Q2.

No caso da resposta do Sérgio (figura 10) percebe-se que ao analisar os gráficos das funções relativos ao Pedro e à Joana, o aluno identifica a resposta correcta, reconhecendo que a função referente a Joana é crescente e depois decrescente (EB1, EB4 e EB5). Porém, demonstra dificuldade em lidar com a simbologia no cálculo da solução pedida (D1) e não determina a hora de chegada da Joana a casa.

As respostas consideradas incorrectas devem-se à má interpretação do enunciado da tarefa que conduziram a resultados descontextualizados, tal como se mostra na resposta da Carolina (figura 11).

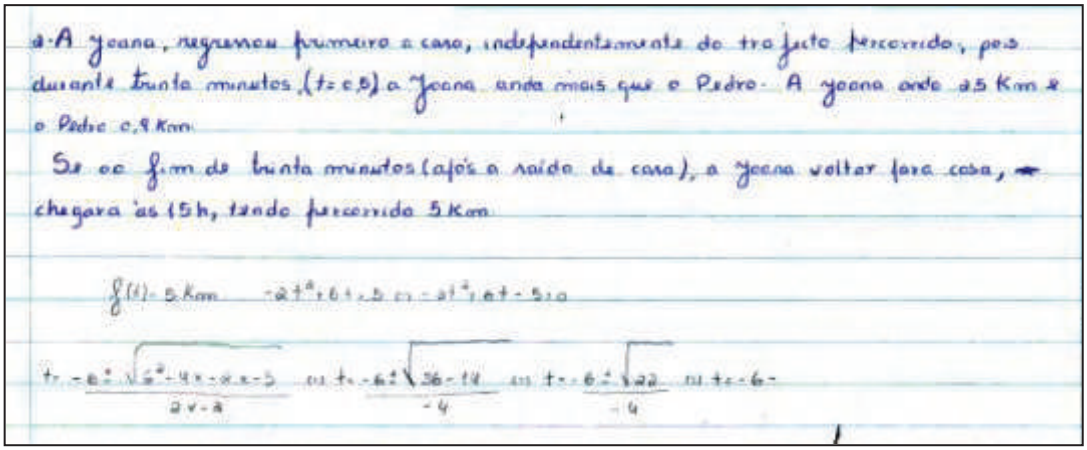


Figura 11 – Resposta da Carolina à Q2.

A Carolina tem dificuldade em utilizar a informação dada na resolução do problema (D2) pois utiliza de uma forma incorrecta os resultados obtidos na Q1 para resolver a Q2. Reconhece a quantidade desconhecida (EA1) e interpreta correctamente os símbolos (EB2), e infere que se a Joana demora 30 minutos para percorrer 2,5 km se voltar logo para casa demorará o dobro do tempo e percorrerá o dobro da distância.

Questão 3 - Qual foi a distância máxima a que a Joana esteve de casa e a que horas aconteceu? Apresente o modo como chegou ao resultado.

Figura 11 – Resposta da Carolina à Q2.

No que diz respeito à Q3 (figura 11) constatou-se que 54,5% dos alunos responderam correctamente associando a resposta ao vértice da função e determinaram o valor da variável dependente dado o valor da variável independente.

Quadro 6 – Resposta à Q3

Resposta correcta	**54,5 %**
Resposta incorrecta	**22,7 %**
Resposta incompleta	**9,1 %**
Não responde	**13,7 %**

As respostas correctas correspondem a uma identificação correcta do vértice da função e da inferência da variável independente com a variável dependente (distância máxima a que a Joana se encontra de casa).

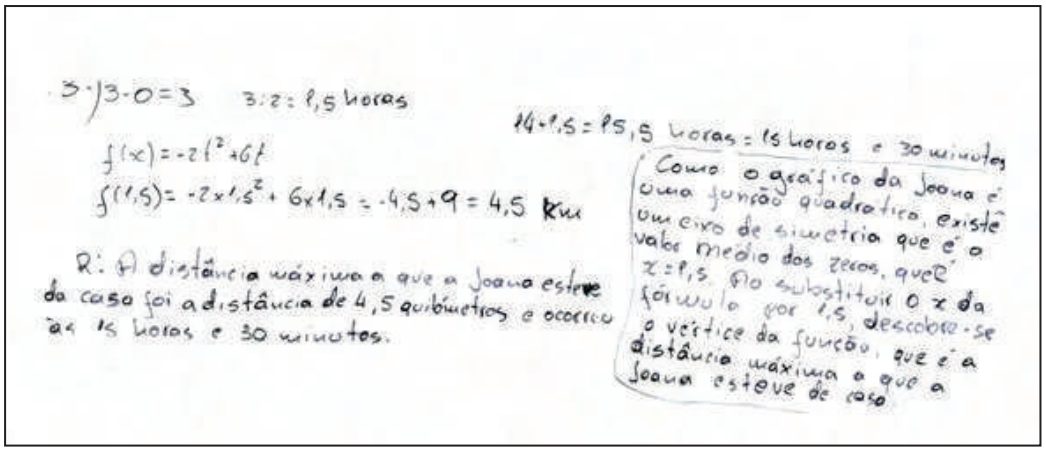


Figura 12 – Resposta de Miguel à Q3.

Por exemplo, Miguel calcula o valor de tempo correspondente à distância máxima a que a Joana se afasta de casa (figura 12), reconhecendo que a função quadrática possui um eixo de simetria (EA) e que pode obter o valor da distância máxima calculando as coordenadas correspondentes ao vértice dessa função. Igualmente se percebe que o aluno utiliza na sua resolução processos analíticos, análise dos gráficos das funções e processos descritivos (EB).

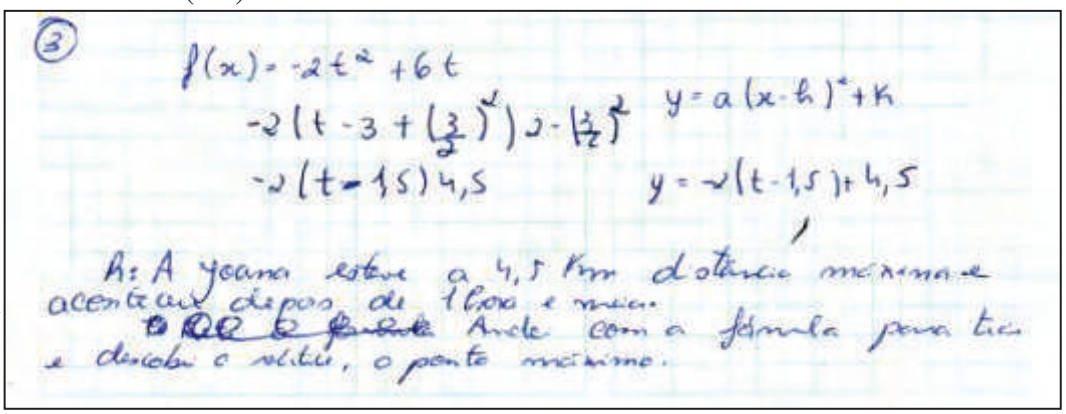


Figura 13 – Resposta de Mafalda à Q3.

Já Mafalda utiliza um processo diferente para obter os mesmos resultados que o Miguel (figura 13). Reconhece a correspondência entre as quantidades identificadas no problema e, a partir da expressão $a\,(x-h)^2+k$, determina as coordenadas do vértice (EB). Porém, na sua resolução observam-se algumas falhas na manipulação simbólica e dificuldades na capacidade de comunicação matemática, *"(...) andei com a fórmula para trás"*.

Nas respostas incompletas incluem-se os alunos que interpretam de forma incorrecta o valor da variável dependente e da variável independente (troca de variáveis) ou determinam erradamente o valor da variável dependente, não conseguindo utilizar as estratégias EA2 e EB3. As respostas incorrectas devem-se à incorrecta interpretação do enunciado da tarefa que conduziram a resultados descontextualizados.

Questão 4 - Determine as coordenadas do ponto P assinalado no referencial e indique o significado das mesmas, no contexto do problema. Descreva o processo que usou para resolver esta questão.

Figura 14 – Resposta da Carolina à Q2.

Da análise da Q4 (quadro 7) verifica-se que 40,9% dos alunos responde correctamente ao determinar as coordenadas do ponto P e ao indicar o seu significado no contexto do problema. Contudo, 45,6 % não resolveu esta questão fazendo com que a situação seja objecto de reflexão na discussão de resultados.

Quadro 7 – Resposta à Q4

Resposta correcta	**40,9 %**
Resposta incorrecta	**0 %**
Resposta incompleta	**13, 6%**
Não responde	**45,5 %**

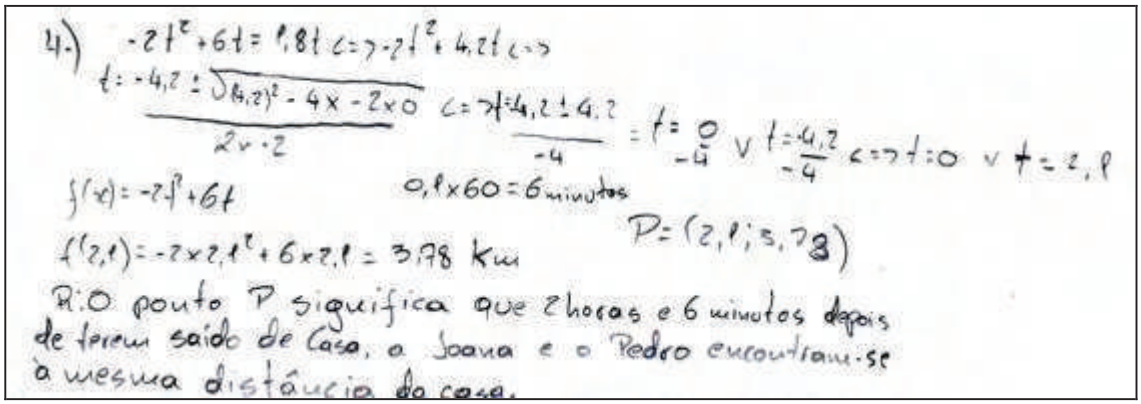


Figura 15 – Resposta de Miguel à Q4.

O Miguel utiliza as estratégias EA e EB para identificar o ponto em que os dois irmãos estarão à mesma distância de casa, ponto P, (figura 15) pois refere que: *"(...) significa que duas horas e seis minutos depois de terem saído de casa, a Joana e o Pedro encontram-se à mesma distância de casa"* contextualizando os valores encontrados com o problema dado.

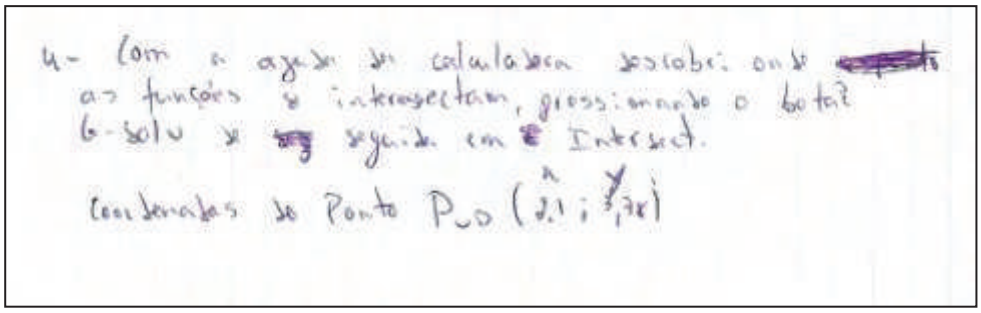


Figura 16 – Resposta de Henrique à Q4.

Henrique, à semelhança de outros alunos, utiliza a calculadora gráfica (EB5) para dar resposta à questão, conforme referido na descrição efectuada pelo aluno (figura 16).

As respostas incompletas correspondem a situações em que os alunos apenas contextualizam o significado do ponto P, mas não determinam as suas coordenadas.

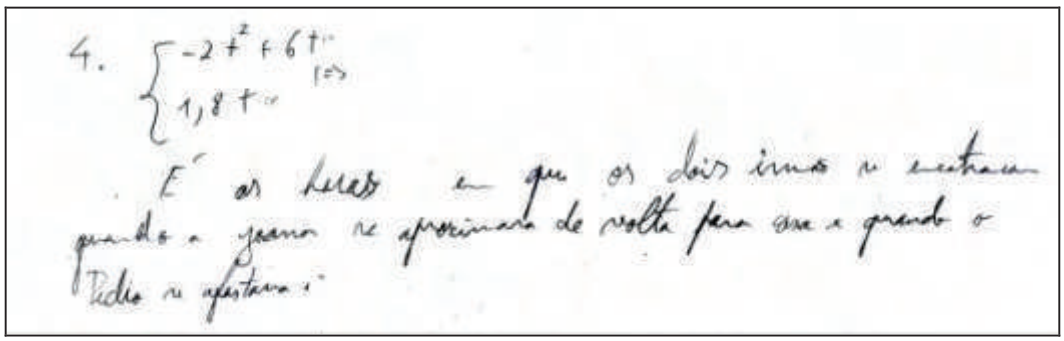


Figura 17 – Resposta de João à Q4.

João apresenta dificuldades em passar a informação da linguagem natural para a linguagem matemática (figura 17). A sua resposta revela que não consegue expressar analiticamente a igualdade das funções na determinação do ponto P. Entende o significado do ponto P como ponto de intersecção das duas funções, mas não consegue dar resposta à questão formulada (EB1 e EB4).

Discussão e Conclusão

De um modo geral podemos afirmar que todos os alunos, nas suas resoluções, reconhecem nesta situação problemática, a presença de uma quantidade desconhecida, fazem uma interpretação dos símbolos que surgem numa equação, substituem o símbolo por um ou mais valores, determinam o valor da incógnita que surge numa equação ou problema e representam quantidades desconhecidas identificadas numa situação específica (Ursini & Trigueros, 2001). Contudo, continuam a apresentar dificuldades em lidar com a simbologia, em usar a informação dada e em interpretar soluções (Ponte, Branco & Matos, 2009) como se constata em todas as questões.

Os dados obtidos mostram que os alunos têm ainda dificuldades em manipular correctamente as expressões algébricas e em passar da linguagem natural para a linguagem matemática, dificuldades estas que não tinham sido categorizadas e estão evidenciadas nas questões 1 e 4. Constatámos também que também surgem dificuldades no reconhecimento da variação conjunta das variáveis e em expressar uma relação funcional de forma tabular, gráfica e/ou analítica, como se observa nas questões 2 e 4.

Tudo indica que todos os alunos, mesmo o Miguel, escrevem $f(x) = -2t^2 + 6t$, o que não pode ser interpretado como uma falta de atenção dos alunos. Há, para eles, uma grande confusão entre o que é, e como é representada, a variável independente e como ela é representada numa relação funcional. Os alunos não dão sentido ao símbolo $f(x)$.

Os alunos evidenciam não compreender bem que uma mesma função pode ser representada de maneiras diferentes (algébrica, gráfica, tabelar, …). De facto, ao afirmarem que "*identificam o ponto pela intersecção das duas funções*", recorrendo à igualdade das expressões analíticas (algébricas) que as definem, estão a confundir a representação analítica com a representação gráfica uma vez que não há intersecções de expressões algébricas mas sim intersecções de representações gráficas.

Consideramos que este estudo irá contribuir para uma melhoria da nossa prática lectiva pois identificámos algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos, nomeadamente, ao nível da compreensão de alguma notação simbólica e da utilização da linguagem algébrica na resolução de problemas. Assim sendo, está aberto o caminho para um trabalho posterior envolvendo funções e o uso da linguagem algébrica de modo a colmatar as dificuldades diagnosticadas. Neste sentido, pensamos que os alunos devem ser incentivados desde cedo a explorar as expressões algébricas e conceitos relacionados com o estudo das funções, com o intuito de desenvolverem o seu pensamento algébrico e de forma a lidarem com as diferentes formas de representação das funções. Este estudo deu-nos a oportunidade de perceber que é necessário trabalhar com os alunos tarefas que propiciem momentos de aprendizagem significativos, que conduzam à utilização de estratégias de entendimento do símbolo como incógnita e enquanto variável numa relação funcional e colmatem as suas dificuldades em lidar com a simbologia e com a informação dada (ME-DES, 2001). Contudo, consideramos que alguns alunos já apresentam de forma estruturada o seu raciocínio, aspecto que tem vindo a ser trabalhado ao longo do ano em sala de aula.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Lins & Giménez (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.

Ministério da Educação (2001). *Matemática A – 10.º ano*. Cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas. Lisboa: ME-DES.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME - DGIDC.

Sajka, M. (2003). A secondary school students' understanding of the concept of function: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Saraiva, M. J., & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *Supplemento nº 4 al Nº 19*, pp. 74-83. Itália: Palermo. (ISSN online 1592-4424).

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 327-334). Utrecht: Utrecht University.

REPRESENTAÇÕES NO ESTUDO DAS FUNÇÕES RACIONAIS[1]

Lígia Isabel Carvalho
Bolseira da FCT
ligiaimcarvalho@gmail.com

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP
rferreir@fc.up.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este trabalho analisa as representações usadas por uma aluna do 11.º ano na resolução de tarefas de natureza diversificada envolvendo funções racionais. O seu objetivo é compreender o modo como esta entende e analisa algumas propriedades das funções racionais, como relaciona diferentes representações de funções racionais e como relaciona transformações de uma função racional numa mesma representação. Os dados foram recolhidos em duas entrevistas com tarefas, numa abordagem de caráter interpretativo. Verificou-se que a aluna se baseia na representação gráfica para exprimir a sua compreensão sobre os conceitos, embora na resolução das tarefas recorra principalmente à representação algébrica. Além disso, revela dificuldades em transformar e em relacionar representações algébricas e gráficas de uma função racional. Os resultados reforçam a importância de trabalhar de modo fluente com tratamentos e conversões entre várias representações para desenvolver a compreensão das funções racionais.

Palavras-chave: representações, aprendizagem, funções racionais.

Introdução

As representações assumem um papel importante no ensino-aprendizagem da Matemática. Este papel é salientado em documentos curriculares como, por exemplo, os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) que refere que "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p.75). Também em Portugal tem sido realçada a importância das representações e do desenvolvimento da capacidade de relacionar múltiplas representações dos conceitos matemáticos. Em particular, no ensino

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008) e L. I. Carvalho recebeu uma bolsa de doutoramento (ref. SFRH/BD /28594/2006) financiada por fundos nacionais do MCTES e cofinanciada pelo FSE, sob a orientação de R. A. Ferreira e J. P. Ponte, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

secundário, no estudo das funções e no cálculo diferencial é muito valorizada a combinação das resoluções algébrica (também referida como analítica), numérica e gráfica de problemas (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2001).

O conceito de função é central em Matemática mas tem-se revelado difícil de entender e de ensinar (Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). Um dos problemas apontados para as dificuldades envolvidas no ensino e aprendizagem da noção de função é precisamente a existência de várias formas de representar uma função (entre as quais, algébrica ou simbólica, numérica ou tabular, gráfica) e as dificuldades em estabelecer ligações entre essas diferentes representações (Artigue, 1992; Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007). Nesta comunicação analisamos a compreensão que uma aluna do 11.º ano revela das propriedades das funções racionais e o modo como usa, relaciona e transforma as diferentes representações quando resolve tarefas de natureza diversificada envolvendo funções racionais.

Representações e Funções

Uma representação é uma configuração (de carateres, imagens, objetos concretos…) que denota, simboliza, ou seja, *representa* algo (Goldin, 2008). As representações individuais (por exemplo, palavras, números, gráficos ou equações algébricas) raramente podem ser entendidas isoladamente. Estas representações fazem sentido se vistas como parte de um *sistema* mais amplo, com significados e convenções estabelecidos e com uma estrutura que permita relacionar de forma significativa diferentes representações pertencentes ao mesmo sistema (Goldin & Shteingold, 2001).

Pode distinguir-se sistemas de representação externa de sistemas de representação interna. Os sistemas de *representação externa* referem-se a configurações observáveis, incluindo, entre outros, os sistemas simbólicos convencionais da Matemática (como a numeração em base dez, a notação algébrica formal ou a representação em coordenadas cartesianas). Os sistemas de *representação interna* referem-se a configurações mentais dos indivíduos, incluindo, entre outros, o processamento individual da linguagem natural, configurações pessoais de sistemas simbólicos convencionais da Matemática, imagética visual e espacial (Goldin, 2008).

A respeito da imagética visual, Presmeg (1986) classifica em cinco grupos as imagens visuais usadas pelos alunos: (i) *imagens concretas, pictóricas,* ou seja, imagens do tipo

imagem-na-mente; (ii) *imagens de padrões,* ou seja, imagens que representam relações matemáticas abstratas de uma forma visual; (iii) *imagens memorizadas de fórmulas*, isto é, "ver", na sua mente, uma fórmula como se estivesse escrita no quadro ou num livro de texto; (iv) *imagens cinestésicas*, ou seja, imagens que são criadas, transformadas ou comunicadas com a ajuda de movimentos físicos, e (v) *imagens dinâmicas*, isto é, imagens com movimento na mente (pp. 43-44). Devemos estar conscientes que não é possível *observar* as representações internas de um indivíduo, sendo o nosso interesse inferir sobre tais representações através do seu comportamento observável, quando interage com representações externas.

Reforçando esta ideia, Duval (2006) afirma que os objetos matemáticos apenas são acessíveis através de representações, em registos adequados: "A única forma de aceder e lidar com eles é através do uso de signos e representações semióticas" (p.107), podendo um mesmo objeto matemático ser denotado através de diferentes representações. Para este autor, qualquer atividade matemática requer, então, o uso de representações semióticas.

Na perspetiva de Duval (2006), existem dois tipos de transformação de representações semióticas em que os alunos devem ser fluentes: tratamentos e conversões. Os *tratamentos* são transformações dentro do mesmo sistema de representação (por exemplo, manipulação algébrica), dependendo das possibilidades de transformação específicas do sistema utilizado. As *conversões* são transformações de representações que consistem numa mudança de sistema, conservando os objetos denotados (por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica). O autor refere que as conversões são mais complexas do que os tratamentos, dado que requerem "em primeiro lugar, o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum" (p. 112). Além disso, a mudança de um sistema de representação para outro, muda "não apenas os meios de tratamento, mas também as propriedades que podem ser explicitadas" (p. 114). Assim, considera essencial para a compreensão matemática que o aluno reconheça o mesmo objeto em diferentes sistemas de representação e consiga distinguir, em cada representação, o que é matematicamente relevante.

O ensino do conceito de função deve recorrer a diferentes representações, de modo a promover a compreensão por parte dos alunos. Diversos estudos têm revelado que aqueles que são capazes de coordenar e relacionar diferentes modos de representação de

um conceito, escolhendo os mais adequados para cada situação, mostram um conhecimento matemático mais profundo desse conceito (Ainsworth, 2006; Arcavi, 2003). No entanto, os alunos têm evidenciado dificuldades em interligar as diferentes formas de representar uma função, nomeadamente as representações algébrica, gráfica e tabular (Artigue, 1992; Elia et al., 2007; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). No domínio das funções racionais, a interligação das várias representações pode assumir um importante papel para uma compreensão profunda das suas propriedades, dado que este parece ser um terreno fértil para a criação de concepções erróneas (Dotson, 2009), como por exemplo a ideia de que o gráfico de uma função racional possui sempre uma assíntota vertical nos valores em que a função não está definida.

Metodologia

Esta comunicação tem por base um estudo exploratório, realizado durante o 2.º período de 2010/11, cujo principal objetivo é informar a construção de uma experiência de ensino no 11.º ano de Matemática A, no domínio das funções racionais. A investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e tem um *design* de estudo de caso (Yin, 1994).

O caso, Vera, é uma aluna do 11.º ano de escolaridade, de uma escola da área urbana do distrito do Porto. É uma aluna média (classificação de 14 valores no 1.º período de 2010/11) com uma preferência clara pela utilização de métodos visuais na resolução de problemas, segundo os resultados obtidos no *Instrumento de Processamento Matemático* de Presmeg (1985, consultado em Galindo-Morales, 1994) e aplicado à turma no âmbito de um estudo mais vasto.

A primeira autora desta comunicação assistiu a aproximadamente metade das aulas lecionadas sobre o tópico das funções racionais. Após a lecionação deste tópico, realizou duas entrevistas semiestruturadas com tarefas a Vera, cada uma com duração aproximada de 50 minutos. Durante as entrevistas, procurámos acompanhar detalhadamente o raciocínio da aluna enquanto resolvia tarefas de natureza diversificada que apelavam ao conhecimento das propriedades das funções racionais e à utilização de tratamentos e conversões em representações várias de funções racionais. No total, Vera resolveu sete tarefas. Abordamos nesta comunicação as resoluções de três dessas tarefas. Nas duas entrevistas a aluna teve disponível a calculadora gráfica, que podia utilizar sempre que quisesse, exceto numa das tarefas. As entrevistas foram

videogravadas e posteriormente transcritas. Foram também recolhidas as produções escritas da aluna durante as entrevistas. A análise de dados é estruturada segundo os seguintes pontos: abordagem às propriedades de uma função racional, tratamentos entre representações de funções racionais e conversões entre representações de funções racionais.

Abordagem às Propriedades de uma Função Racional

Na resolução da tarefa 1 da primeira entrevista (Figura 1), Vera evidencia alguns conhecimentos sobre funções racionais e suas propriedades.

Tarefa 1

Considera a função real de variável real definida por $f(x)=\frac{3}{x-20}$.

Indica o domínio, as assimptotas, os pontos de intersecção com os eixos coordenados, o contradomínio e os intervalos de monotonia. Vai explicando o teu raciocínio.

Figura 1: Tarefa 1 da primeira entrevista

Vera define domínio de uma função como o "conjunto dos objetos" e contradomínio como o "conjunto das imagens". Ao resolver em voz alta a tarefa, mostra ter uma ideia de domínio e contradomínio associada à representação gráfica da função. No entanto, quando determina o domínio recorre à expressão algébrica da função:

> *Entrevistadora:* E como é que vês o domínio de uma função?
>
> *Vera:* Quando por exemplo temos um gráfico e a professora pede para vermos o domínio. É até onde a função… Relativamente ao eixo dos *xx*, não é? [Faz o gesto de uma reta horizontal.] Começa... E acaba…
>
> (…)
>
> *E*: Contradomínio… Pensas em quê?
>
> *Vera:* Vejo o gráfico e penso assim… [Faz o gesto de uma reta vertical.]
>
> (…)
>
> *E:* E neste caso? Tens aqui uma expressão, $f(x)=\frac{3}{x-20}$. Como é que está a pensar para ver o domínio?
>
> *Vera:* O domínio é *IR* exceto 20.
>
> *E:* Porquê?
>
> *Vera*: Porque esta [aponta para 20] é a assíntota vertical.
>
> *E:* Como é que tu chegaste lá? À assíntota vertical?
>
> *Vera:* Por causa da expressão…

Para Vera, o gráfico de uma função racional possui uma assíntota vertical nos valores onde a função não está definida. Na determinação das assíntotas verticais, faz de imediato esta associação, embora a sua ideia de assíntota seja apoiada na representação gráfica:

> *Vera:* [Uma assíntota] é onde o gráfico não toca. É uma exceção do gráfico. Ali o gráfico não toca, tanto na vertical como na horizontal. [Faz gestos a tentar ilustrar a assíntota]
>
> *Entrevistadora:* E tu vês pelo gráfico, então.
>
> *Vera:* Vejo pelo gráfico.
>
> *E:* Mas tu agora não foste à máquina…
>
> *Vera:* Tanto pelo gráfico como pela expressão. Porque a expressão aqui… Eu aqui [aponta para o denominador $x-20$] vejo que é assíntota vertical.
>
> *E:* Porquê?
>
> *Vera:* Porque me indica aqui $x-20$. Se fosse + era -20, como é – é 20. Porque aqui neste sítio da expressão, a professora ensinou que era aí que nós víamos…

Vera mostra dificuldades na averiguação da existência de assíntotas horizontais. Recorrendo à expressão algébrica, é levada a dizer que o gráfico de $f(x)=\frac{3}{x-20}$ não tem assíntotas horizontais. Procura relacionar os parâmetros da expressão algébrica de uma função racional, quando escrita na forma $a+\frac{b}{cx+d}$, com as assíntotas mas, na expressão algébrica da função *f,* não consegue identificar o parâmetro *a*. Quando recorre à representação gráfica da função, a aluna procura uma reta horizontal da qual o gráfico se aproxime cada vez mais, sem chegar a intersetar, mas não consegue identificar a equação dessa reta.

Com os gestos que faz para explicar os conceitos, a aluna parece ter *imagens cinestésicas* de domínio, contradomínio e assíntotas. Além disso, o modo como se refere oralmente a estes conceitos levaria a pensar que a sua resolução seria fundamentalmente apoiada na representação gráfica. No entanto, recorre à expressão algébrica, tentando repetir procedimentos que parecem memorizados, mostrando pouca compreensão.

Na determinação dos pontos de interseção do gráfico de *f* com os eixos coordenados, Vera visualiza a representação gráfica da função na calculadora, constatando que o gráfico não interseta o eixo dos *xx*. Para determinar o ponto de interseção com o eixo

dos *yy*, recorre à expressão algébrica, substituindo *x* por zero. Reconhece que poderia ter recorrido à calculadora gráfica mas parece pouco confortável com os comandos a usar:

> Também dava para ver [recorrendo à calculadora]. Eu ainda tentei interseção mas depois pensei que também dava para calcular como valor. Sabia que o *x* era zero e então deu-me o *y*. Tinha feito analiticamente. E depois fui à máquina porque lembrei-me que também dava para calcular pela máquina e confirmei…

Relativamente ao estudo da monotonia da função, Vera começa por dizer que "a função é sempre decrescente". No entanto, enquanto aponta para a representação gráfica na calculadora, refere que "quanto mais o objeto vai aumentando mais a imagem vai diminuindo…", considerando cada ramo da hipérbole separadamente. Ao tentar escrever os intervalos de monotonia revela insegurança e dúvidas:

> É decrescente de $+\infty$ a $-\infty$… Não, não estou a dizer bem porque eu tenho que dizer um número… (…) É decrescente de zero… Não… de 20…. Eu sabia isto mas esqueci-me…

Embora este assunto tenha sido discutido nas aulas, Vera revela dificuldades em reconhecer que a função não é sempre decrescente e em indicar os intervalos de monotonia. Na resolução da tarefa, a aluna parece ter um conhecimento muito baseado na memorização de conceitos e procedimentos.

Tratamentos entre Representações de Funções Racionais

Na resolução das tarefas propostas, Vera utiliza as representações algébrica e gráfica e mostra dificuldades em efetuar tratamentos nestes dois sistemas de representação. As transformações das representações gráficas observadas no seu trabalho referem-se ao ajustamento da janela de visualização na calculadora, de modo a encontrar uma representação gráfica representativa do gráfico da função.

A aluna mostra dificuldades em encontrar uma janela de visualização adequada para a representação gráfica da função $f(x)=\frac{3}{x-20}$. Começa por usar a janela de visualização *standard* da calculadora gráfica, $[-10,10]\times[-10,10]$, não conseguindo obter uma imagem representativa do gráfico (Figura 2).

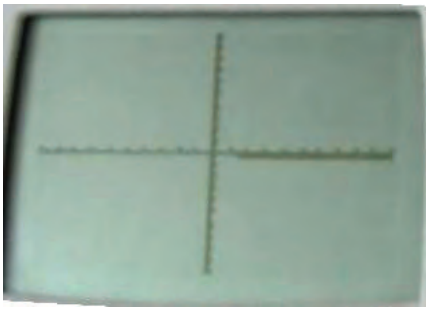


Figura 2: Representação gráfica obtida por Vera na janela $[-10,10]\times[-10,10]$.

Vera altera a janela para $[0,10]\times[-10,0]$, continuando sem conseguir visualizar o gráfico e mostrando-se confusa: "Isto continua a dar uma coisa assim estranha…" Mesmo depois de uma chamada de atenção para o facto de a assíntota vertical do gráfico ser $x=20$, a aluna mostra dificuldades em escolher uma janela adequada e, por tentativa erro, escolhe sucessivamente as janelas de visualização $[0,20]\times[-20,0]$ (Figura 3) e $[0,25]\times[-20,0]$.

Figura 3: Representação gráfica obtida por Vera na janela $[0,20]\times[-20,0]$.

Embora Vera pareça reconhecer que uma janela de visualização adequada deveria permitir-lhe visualizar as assíntotas e os dois ramos que compõem o gráfico da função, não mobiliza o seu conhecimento sobre as assíntotas do gráfico para procurar uma janela razoável. Vai escolhendo janelas de visualização que denotam pouca reflexão e interligação entre os conceitos, parecendo não compreender os efeitos da escolha da janela na representação gráfica da função.

Vera evidencia também dificuldades em efetuar transformações dentro das representações algébricas, nomeadamente na factorização e na divisão de polinómios, e na simplificação de frações racionais. Por exemplo, ao simplificar a expressão algébrica $e(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ (Figura 5), demonstra dificuldades em identificar e utilizar o caso notável

da diferença de quadrados e em identificar o domínio onde é válida a simplificação. Começa por escrever o denominador como $x(x-4)$. Depois de lhe ser sugerido que efetue a multiplicação de *x* por (*x*-4), vê que a transformação que fez não está correta e escreve o denominador como $(x-4)(x+4)$. Apenas com alguma ajuda fatoriza o polinómio do denominador escrevendo $(x-2)(x+2)$. Na simplificação da fração, não refere que, para a simplificação ser válida, *x* tem que ser diferente de -2, mostrando não reconhecer o domínio de validade da simplificação:

> *Vera*: Agora estes dois são iguais [$x+2$ aparece no numerador e o denominador, e a aluna risca-os]. Fica 1 sobre $x-2$.
>
> *Entrevistadora*: Tens que ter cuidado com alguma coisa quando fazes esta simplificação? Quando simplificas o $x+2$ com o $x+2$…
>
> *Vera*: Cuidado? Como assim?
>
> *E*: Isto [indica $\frac{x+2}{x^2-4}$] é igual a isto [indica $\frac{1}{x-2}$]?
>
> *Vera*: Não é igual…
>
> *E*: Então?
>
> *Vera*: Eu é que posso… É como dividir…

Na tarefa 1 da segunda entrevista (Figura 4), Vera sente necessidade de efetuar a divisão de x^2+2 por $x+1$, para transformar a expressão algébrica da função *g*.

Tarefa 1

Considera a função real de variável real definida por $g(x)=\frac{x^2+2}{x+1}$.

1.1. Estuda a existência de assíntotas do gráfico da função *g*. Explica o teu raciocínio.

1.2. Indica o contradomínio da função *g*. Se procederes a arredondamentos, usa duas casas decimais.

1.3. Caracteriza a função $g+h$, sendo h a função real de variável real definida por $h(x)=\frac{3}{x^2+x}$.

Figura 4: Tarefa 1 da segunda entrevista.

A aluna realiza a divisão dos polinómios recorrendo ao algoritmo da divisão e comete vários erros que vai corrigindo, por vezes sozinha e outras vezes com ajuda. Depois de concluir a divisão dos polinómios escreve, de modo aparentemente automático, a expressão transformada de $g(x)$ como $x-1+\frac{3}{x+1}$:

> *Entrevistadora*: E como é que sabes que fica assim?

> *Vera*: Porque… Porque eu quando estudei isto decorei uma fórmula para entender. Fazia assim, [chamava] A [ao resto], B [ao quociente] e C [ao divisor]. Sabia que o C ficava aqui [apontou para o denominador na expressão transformada] até porque costumava ser a letra onde nós víamos o domínio. (…) E isto, aqui ficava o B [apontou para $x-1$, na expressão transformada] e aqui ficava o A [apontou para o numerador na expressão transformada].

Ao expressar-se assim, Vera parece ter uma *imagem memorizada de fórmula* que lhe permite usar o divisor, o resto e quociente da divisão de polinómios para transformar a expressão algébrica sem, no entanto, entender a relação entre estes conceitos. Deste modo, Vera apresenta dificuldades na manipulação algébrica, que lhe dificultam o reconhecimento de diferentes formas de representar algebricamente uma mesma função racional.

Conversões entre Representações de Funções Racionais

Na resolução da tarefa 2 da primeira entrevista (Figura 5), Vera evidencia algumas dificuldades na conversão entre as representações algébrica e gráfica. Para estabelecer a correspondência entre as expressões algébricas e as representações gráficas, a aluna baseia-se essencialmente nas assíntotas verticais, que relaciona com os zeros do denominador:

> Nestes aqui [gráficos 1 e 2] eu posso ver pelo gráfico que a assíntota vertical vai ser negativa. Logo, na expressão, tem que estar *x* mais… Por isso [indica o gráfico 1] talvez seja esta $a(x)=\frac{1}{x+3}$, por exemplo. Aqui troca [indica a expressão $b(x)$]… Estas duas [$a(x)$ e $b(x)$] vão corresponder a estes dois [gráfico 1 e gráfico 2].

Tarefa 2

Considera as seguintes funções reais de variável real:

$a(x)=\frac{1}{x+3}$ $\quad b(x)=-\frac{1}{x+3}$ $\quad c(x)=\frac{2x^3-1}{3}$

$d(x)=\frac{x-2}{x-2}$ $\quad e(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$ $\quad f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

Observa cada um dos gráficos seguintes e, sem recorreres à calculadora gráfica, identifica, justificando, o gráfico correspondente a cada uma das expressões analíticas anteriores.

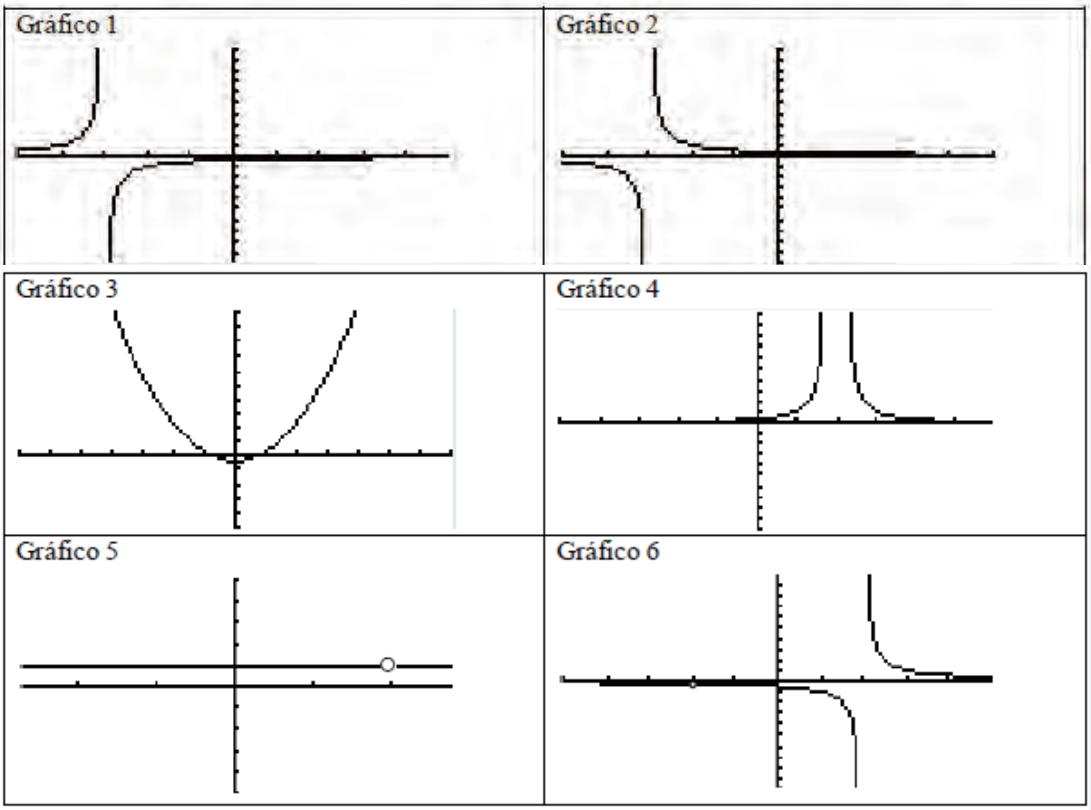


Figura 5: Tarefa 2 da primeira entrevista

Inicialmente, Vera faz uma correspondência incorreta. No entanto, resolve mudar e, quando questionada sobre como pensou, reconhece que recorreu à imagem de *gráfico normal* que se lembra das aulas:

> Porque me lembro das aulas… Que a função o normal, o normal vá… Costumava ser positiva e a função era sempre assim [gesticula querendo representar o gráfico como uma hipérbole semelhante ao gráfico de $y=\frac{1}{x}$]. Enquanto que esta aqui [aponta para $b(x)$ e para o gráfico 1] já está, vá… ao contrário…

Vera parece não pensar explicitamente em transformações de funções, fazendo antes uma associação com imagens de gráficos que memorizou. Também não utiliza as

expressões algébricas para determinar coordenadas de pontos dos gráficos das funções que lhe permitiriam, em alguns casos, dissipar dúvidas quanto às correspondências a fazer. Poderia também recorrer à tabela de valores da função mas não o faz, apesar de isso ter sido abordado nas aulas. O recurso à memória, sem interligar os conceitos e os dados que tem disponíveis, limita-a quando colocada perante situações novas como no caso do gráfico 4. A aluna reconhece que não tinha ainda sido confrontada com um gráfico assim e não consegue atribuir-lhe uma das expressões algébricas. Manifesta dificuldades em discriminar propriedades das expressões algébricas que lhe permitam reconhecer o gráfico correspondente.

Quando determina o domínio da função *e*, Vera demonstra, mais uma vez, a concepção errónea de que os pontos que não pertencem ao domínio correspondem a assíntotas verticais. Conclui que 2 e -2 não pertencem ao domínio e isso confunde-a porque nenhum dos gráficos disponíveis tem duas assíntotas. No entanto, depois de simplificar a expressão $e(x)$, para o que necessitou de alguma ajuda, consegue fazer-lhe corresponder o respetivo gráfico.

Vera corresponde com facilidade o gráfico 5 à expressão $d(x)$. Ao olhar para a expressão, não espera encontrar uma assímptota no gráfico, reconhecendo a razão de existência de um *ponto aberto*:

> *Entrevistadora*: E porque é que está aqui esta bola aberta? [indica o gráfico 5]
>
> *Vera*: Porque acaba por ser uma falha. (…) Porque neste ponto [indica o ponto aberto] … Não tem imagem… Aqui nesta zona…
>
> *E*: Qual será a abcissa desse ponto?
>
> *Vera*: 2.
>
> *E*: Porquê?
>
> *Vera*: Porque se aqui [expressão $d(x)$] fizer *x* menos 2 diferente de 0 dá *x* diferente de 2.

Expressões como $d(x)$ foram discutidas durante as aulas, o que terá contribuído para o desempenho de Vera nesta correspondência. No entanto, não manifesta fluência no estabelecimento de relações entre as representações algébrica e gráfica de uma função racional.

Conclusão

O modo como Vera resolve as tarefas propostas mostra um forte apoio na memorização de procedimentos. A aluna tende a repetir modos de resolução sem grande reflexão, mostrando dificuldades em mobilizar os seus conhecimentos para novas situações. A utilização de *imagens memorizadas de fórmulas* reforça este apoio na memorização. É interessante notar que, embora tenha revelado preferências por métodos visuais quando resolve problemas (de acordo com o teste de Presmeg) e utilize *imagens cinestésicas* para exprimir a sua compreensão dos conceitos, não revela preferência pela utilização da representação gráfica na resolução das tarefas. Parece entender os conceitos de modo gráfico mas operacionalizá-los de modo algébrico.

Este estudo reforça a importância da interligação das várias representações para o desenvolvimento da compreensão matemática, como defendido por Duval (2006) e Goldin e Shteingold (2001). Os obstáculos que Vera encontrou na resolução das tarefas devem-se essencialmente às suas dificuldades em relacionar as representações gráfica e algébrica e em reconhecer diferentes modos de representar algebricamente uma função. Mesmo a concepção errónea de que os pontos que não pertencem ao domínio de uma função racional correspondem a assíntotas verticais parece advir destas dificuldades e gerar ainda mais dificuldades. O seu aproveitamento das potencialidades da calculadora gráfica poderia beneficiar com uma maior destreza na interligação das várias representações, incluindo a numérica, a que a aluna não recorre apesar de ter sido utilizada nas aulas. Por exemplo, a procura de uma janela de visualização adequada para a representação gráfica de uma função racional beneficiaria de uma melhor inter-relação entre as várias representações.

Duval (2006) refere que as conversões são mais complexas do que os tratamentos. No entanto, para Vera, a complexidade dos dois processos parece semelhante. A conversão entre as representações algébrica e gráfica de funções racionais pode beneficiar especialmente com a fluência na manipulação algébrica, isto é, tratamentos dentro do sistema de representação algébrica, domínio em que revela bastantes dificuldades.

Embora uma maior fluência na manipulação algébrica seja importante, o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda no domínio das funções racionais não se restringe a isso. Desenvolver momentos de reflexão sobre os procedimentos utilizados e explorar tarefas que promovam a manipulação gráfica de funções racionais,

como transformações de funções, pode ser uma via para uma compreensão mais profunda deste tema. A exploração de transformações de funções racionais, relacionando as representações algébrica e gráfica, pode promover a construção de *imagens dinâmicas* dos gráficos, contribuindo para uma maior flexibilidade no trabalho com essas funções. A utilização da calculadora gráfica ou de software gráfico pode ser uma mais-valia na construção deste tipo de imagens, que deve ser aproveitada.

Referências

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109-132). Washington, DC: MAA.

Dotson, G. T. (2009). *Collegiate mathematics students' misconceptions of domain and zeros of rational functions* (Tese de doutoramento, University of Kansas).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, (Vol. 2, pp. 351-358); Bergen, Norway.

Galindo-Morales, E. (1994). *Visualization in the calculus class: Relationship between cognitive style, gender, and use of technology* (Tese de doutoramento, Ohio State University).

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 178-203): New Yor, NY:Routledge.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271-288): Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Silva, J., Fonseca, G., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *Matemática A: Programa 10.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Yin, R. (1994). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: SAGE.

O CÁLCULO MENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS – UM ESTUDO NO 1.º ANO DE ESCOLARIDADE

Cristina Morais
Externato da Luz
morais.cristina@gmail.com

Resumo

Nesta comunicação será apresentado parte de um estudo que tem como objectivo compreender que tipo de estratégias de cálculo mental são utilizadas, por alunos do 1.º ano do 1.º ciclo do ensino básico, na resolução de problemas de adição e subtracção, procurando compreender de que modo o significado da operação envolvida no problema influencia ou não a estratégia de cálculo utilizada.

Este estudo foi realizado seguindo uma metodologia de natureza qualitativa de carácter interpretativo, tendo sido realizados três estudos de caso. Foram aplicadas, na turma da investigadora, três cadeias de problemas, tendo sido seleccionados três alunos do 1.º ano de escolaridade.

Nesta comunicação, serão apresentadas as resoluções de um dos alunos do estudo, na primeira cadeia de problemas, onde se procurou evidenciar aspectos mais significativos relativamente ao tipo de estratégias de cálculo utilizadas e o modo como estas foram ou não influenciadas pelo contexto dos problemas.

Palavras-chave: sentido de número, cálculo mental, resolução de problemas, estratégias de cálculo

Introdução

Numa sociedade cada vez mais dependente da tecnologia onde os computadores e calculadoras parecem estar à disposição de qualquer um, estamos constantemente rodeados de informação sob diferentes formas: gráficos, tabelas, percentagens, números decimais, números representados sob a forma de fracção, entre muitos outros. Para lidar com todas estas representações, sendo capazes de as compreender, analisar e até mesmo para agir na sociedade actual, é essencial que tenhamos desenvolvido um bom sentido de número (Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh, Reys & Reys,1992; Albergaria & Ponte, 2008).

O sentido de número, embora de difícil definição, uma vez que inclui vários domínios, é caracterizado por McIntosh *et al.* (1992) como:

> a compreensão geral dos números e das operações, em paralelo com a capacidade e inclinação para utilizar este conhecimento de forma flexível

> de forma a fazer julgamentos matemáticos e a desenvolver estratégias eficazes para lidar com os números e as operações. (p.3)

Esta operacionalização flexível do conhecimento dos números e suas relações, reflecte-se no desenvolvimento de estratégias úteis e eficazes, que caracterizam o cálculo mental, utilizado no nosso dia-a-dia, quer na nossa vida profissional quer enquanto cidadãos. (Buys, 2008; Castro & Rodrigues, 2008; Thompson, 2009).

Efectivamente, o cálculo mental é fundamental para o desenvolvimento de um bom sentido de número, uma vez que se caracteriza como um "movimento rápido e flexível no mundo dos números" (Buys, 2008, p.122). Assim, o ensino de estratégias de cálculo mental constitui-se como um dos objectivos de aprendizagem da Matemática (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira, 2007).

Nesta comunicação será apresentada parte de um estudo mais amplo, realizado no âmbito de uma tese de mestrado, que tem como objectivo a compreensão do tipo de estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 1.º ciclo do ensino básico, aquando da resolução de problemas de adição e subtracção, bem como a compreensão da influência dos significados das operações na estratégia de cálculo mental utilizada.

Cálculo mental

Noteboom, Bokhove & Nelissen (2008), definem cálculo mental como "um cálculo pensado (não mecânico) sobre representações mentais dos números. Envolve o uso de factos, de propriedades dos números e das operações e o modo como estes se relacionam" (p.90).

Buys (2008) caracteriza cálculo mental como: a) o trabalho com números e não com dígitos, uma vez que os números são vistos como um todo, mantendo o seu valor; b) a utilização de propriedades de cálculo elementares e de relações numéricas; c) apoiado num bom conhecimento dos números e num profundo conhecimento de factos numéricos básicos com números até 20 e até 100; e d) podendo ser utilizadas notas intermédias de acordo com a situação, mas, principalmente, calculando mentalmente.

Relativamente à utilização de registos intermédios no cálculo mental, também Noteboom, Bokhove e Nelissen (2001) acrescentam que calcular mentalmente "Não é o mesmo que fazer os cálculos na cabeça mas sim com a cabeça e registar determinados

passos, se necessário. Neste sentido, não deve ser visto como o oposto ao cálculo escrito." (p.90)

Thompson (2009) reforça que, entre outros motivos, o cálculo mental não só desenvolve um bom sentido de número, como também promove o desenvolvimento de competências da resolução de problemas.

Existe assim uma profunda relação entre o desenvolvimento do sentido de número, cálculo mental e resolução de problemas.

Estratégias de cálculo

As estratégias de cálculo utilizadas pelas crianças para a adição e subtracção, dependem e evoluem a partir das estratégias utilizadas nestas operações com números menores que 20 (Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter e Fennema, 1997).

Existem diferentes estratégias de cálculo para a adição e subtracção já identificadas (ver por exemplo, Thompson, 1999). Uma síntese dessas estratégias encontra-se no Quadro 1.

Quadro 1 – Estratégias de cálculo para a adição e subtracção (adaptado de Thompson, 2009; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007)

Estratégias de cálculo com números até 20	
Adição	Subtracção
Contar todos (*count all*)[1]	contagem dos que sobram (*count out*)
Contagem a partir do primeiro número (*count on from the first number*)	contagem para trás a partir de um número (*count back from*)
Contagem a partir do número maior (*count on from the larger number*)	contagem para trás até (*count back to)*
Utilização de factos numéricos de adição	contagem a partir de (*count up*)
Cálculo com base em factos numéricos	utilização de factos numéricos de subtracção e cálculo com base em factos numéricos

Ainda no domínio dos números menores que 20, Treffers (2008) destaca a importância de dois tipos de estratégias utilizadas na adição e subtracção: saltos através do 10 (*jumping via ten*)[2] e saltos de 10 (*jumps of ten*).

[1] Em itálico de Thompson (2009)
[2] Em itálico de Treffers (2008)

Na estratégia de saltos através do 10, ao efectuar uma adição ou subtração, à primeira parcela é adicionada ou subtraída uma parte da segunda parcela, de modo a obter 10, sendo depois adicionada ou subtraída a parte restante. Na estratégia de saltos de 10 a dezena é adicionada ou subtraída à primeira parcela, num único passo.

No cálculo com números superiores a 20, são apresentadas por Beishuizen (1993, 2009) duas categorias de estratégias, que denomina por N10 e 1010. Na categoria das estratégias N10, à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número múltiplo de 10 (Beishuizen, 1993, 1999). Nesta categoria, distingue-se um nível mais complexo, a estratégia N10C, onde à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número aproximado da segunda parcela, correspondente a um múltiplo de 10, de modo a facilitar o cálculo. Obtido o resultado, este é depois compensado (Beishuizen, 1993; Beishuizen & Anghileri, 1998).

Noutro tipo de estratégia, ainda do tipo N10, identificada como A10 (*adding on*)[3], à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número correspondente a uma parte da segunda parcela, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10, sendo depois adicionada ou subtraída a outra parte (Beishuizen, 2001).

Na categoria das estratégias 1010, os números são decompostos nas suas ordens e estas são adicionadas ou subtraídas, sendo o resultado obtido através da recomposição do número. Uma variante desta estratégia é a denominada por 10S, onde os números são inicialmente divididos nas suas ordens para a adição ou subtracção, que são adicionadas ou subtraídas sequencialmente (Beishuizen, 1993, 2001, 2009).

No quadro seguinte, são apresentadas as diferentes categorias das estratégias de cálculo mental referidas, complementadas com exemplos para a adição e subtracção.

Quadro 2 – Estratégias de cálculo mental para a adição e subtracção, com números superiores a 20 (adaptado de Beishuizen, 1993, 2009; Beishuizen & Anghileri, 1998)

Estratégias		**65 + 27 =**	**74 – 38 =**
N10	N10	65 + 20 = 85, 85 + 7 = 92	74 – 30 = 44, 44 – 8 = 36
	N10C	65 + 30 = 95 95 – 3 = 92	74 – 40 = 34 34 + 2 = 36
	A10	65 + 5 = 70, 70 + 22 = 92	74 – 4 = 70, 70 – 34 = 36

[3] Em itálico de Beishuizen (2001)

1010	1010	60 + 20 = 80, 5 + 7 = 12 80 + 12 = 92	70 – 30 = 40 , 4 – 8 = – 4 40 – 4 = 36
	10S	60 + 20 = 80, 80 + 5 = 85 , 85 + 7 = 92	70 – 30 = 40 40 + 4 = 44 , 44 – 8 = 36

Resolução de problemas de adição e subtracção

A resolução de problemas poderá ser o ponto de partida para a abordagem de novos conceitos e ideias matemáticas ou, por outro lado, pode ser uma actividade para ajudar a aplicar, desenvolver e consolidar ideias matemáticas já trabalhadas (Fosnot & Dolk, 2001; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al*., 2007).

A importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática está presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007), onde se constituiu como uma das três capacidades transversais a todo o programa. Os problemas de adição e subtracção assumem assim um papel central nos primeiros anos de escolaridade.

Quando se referem problemas de adição e subtracção não se trata apenas de problemas de adicionar ou subtrair quantidades. Cada uma destas operações pode ter diferentes significados, isto é, existem diferentes situações em que as operações estão presentes, aspecto que o professor deverá considerar ao planificar o trabalho a desenvolver com os seus alunos (Ponte & Serrazina, 2000).

O contexto dos problemas assume grande importância, particularmente para os alunos dos primeiros anos, uma vez que irá suportar o seu pensamento matemático (Fosnot & Dolk, 2001; Ponte *et al*., 2007).

Quadro 3 – Diferentes significados das operações de adição e subtracção (adaptado de Ponte & Serrazina, 2000; Ponte *et al.,* 2007)

Adição	**Combinar:** duas ou mais quantidades são transformadas noutra quantidade.
	Acrescentar: uma quantidade é aumentada.
Subtracção	**Retirar:** a uma quantidade é retirada outra.
	Comparação: são comparadas duas quantidades, pretendendo-se encontrar a diferença entre as quantidades ou ver quanto é que uma é maior ou menor que outra.
	Completar: é calculado quanto se deverá juntar a uma quantidade para se obter um determinado valor.

Tal como Fosnot e Dolk (2001) referem, é importante salientar que apesar do professor planear um determinado contexto, com um significado da adição ou subtracção presente, não significa que os alunos o irão interpretar desse modo. Os autores dizem mesmo que "é provável que um determinado contexto afecte os modelos e estratégias utilizados pelas crianças" (p.90).

Opções metodológicas

Como já foi referido, neste estudo procurou compreender-se que tipo de estratégias de cálculo mental são utilizadas na resolução de problemas de adição e subtracção e compreender de que modo é que a natureza do problema influencia a estratégia de cálculo mental utilizada, ou seja, qual a influência do significado da operação presente no problema na resolução do mesmo.

Tendo em conta o objectivo do estudo, seguiu-se uma metodologia de natureza qualitativa com carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), com o *design* de estudo de caso.

O trabalho de campo deste estudo foi realizado no ano lectivo de 2009/2010, com a minha turma, no 1.º ano de escolaridade, tendo sido concluído no início do ano lectivo de 2010/2011.

Foram planificadas e realizadas três cadeias de problemas de adição e subtracção, contemplando os diferentes significados que estas operações podem assumir. Utiliza-se o termo cadeia uma vez que em cada um dos conjuntos de problemas, os números foram criteriosamente escolhidos para que fossem progressivamente maiores, aumentando o grau de dificuldade dos cálculos a efectuar.

As cadeias foram resolvidas pelos três alunos seleccionados para este estudo em três momentos distintos. Os problemas da primeira cadeia foram resolvidos a pares por toda a turma, na sala de aula, entre Janeiro e Março de 2010, no 1.º ano de escolaridade. A segunda cadeia, também resolvida a pares por todos os alunos da turma, foi aplicada nos meses de Maio e Junho de 2010, no final do 1.º ano.

Na organização habitual do trabalho da turma os pares não são fixos, o mesmo aconteceu aquando da recolha de dados.

Todas as aulas de resolução de problemas seguiram as seguintes etapas: i) apresentação do problema, em que este era lido por um aluno da turma e eram esclarecidas possíveis dúvidas; ii) resolução do problema a pares; iii) apresentação das estratégias de resolução mais significativas para a discussão em grande grupo e iv) síntese e identificação das estratégias de cálculo mais eficientes.

A última cadeia de problemas foi resolvida apenas pelos três alunos seleccionados, fora da sala de aula e de modo individual, em Outubro do ano lectivo seguinte (2010/2011), quando os alunos frequentavam o 2.º ano de escolaridade.

Para a recolha de dados recorreu-se ao registo áudio e vídeo, à observação participante e aos registos realizados pelos alunos.

Nesta comunicação, será apresentado o caso de uma aluna e as estratégias utilizadas aquando da resolução da primeira cadeia de problemas, que foram identificadas de acordo com a categorização das estratégias de cálculo com números menores que 20 e com números superiores a 20, já referidas.

Cátia e a resolução dos problemas da primeira cadeia

A Cátia, de 6 anos, é uma menina que revela bastante auto-confiança. É muito tranquila e demonstra um enorme gosto por aprender. Tem grande sucesso no seu desempenho escolar, não só a nível da Matemática, como das restantes áreas curriculares.

Gosta de realizar tarefas de carácter lúdico, normalmente designadas por quebra-cabeças, o que revela o seu gosto por desafios. Tem grande facilidade em exprimir-se oralmente e, da maneira segura e calma que a caracteriza, procura sempre partilhar o seu ponto de vista no trabalho em pequenos grupos ou perante a turma, sendo muitas vezes vista como líder pelos colegas.

O primeiro problema da primeira cadeia era de adição, com o significado de combinar "O Guilherme tem 5 cromos dos *Gormitis* e o André tem 14. Quantos cromos têm os dois juntos?".

A aluna reconhece que o problema pode ser resolvido efectuando a adição 14 + 5. Para Cátia, este cálculo constitui já um facto numérico básico, no entanto, preocupa-se em registar no seu caderno como sabe que 14+5=19.

> Cátia – Olha, eu já tive uma ideia! Vou-te dizer qual é: quatro mais…

Miguel – 14 mais 5 eu sei que é 19, é só pôr…

Cátia – Eu também sabia…

Miguel – É só pôr…

Cátia – Mas nós temos que pôr a nossa maneira…

Miguel – 14 mais 5... igual …

Cátia – Se 4 mais 5 igual a 9… 14 mais 5 igual a 19…

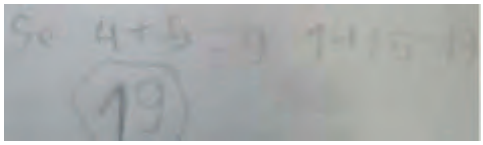


Figura 1 – Resolução do problema "Gormitis"

O segundo problema da cadeia era também de adição, mas com o significado de acrescentar "O Dinis tem 7 anos. Que idade terá daqui a 9 anos?".

Talvez devido à noção de tempo presente neste problema, Cátia efectuou uma contagem da idade do Dinis, à medida que ia celebrando o seu aniversário, ou seja, fez uma contagem de um em um, a partir de oito, registando a par da idade do Dinis, o número de anos que se tinham passado.

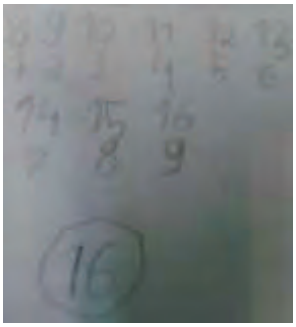


Figura 2 – Resolução do problema "A idade do Dinis"

O terceiro problema era de subtracção com o significado de comparar "A irmã da Leonor e da Rita [com 6 anos de idade] tem 20 anos. Quantos anos a mais tem a irmã?".

O colega de Cátia identificou de imediato que para resolver o problema teria que calcular "6 mais … mais qualquer coisa…". Cátia pediu-lhe que não dissesse a solução do problema, que não pareceu imediata para a aluna:

Cátia – Como é que vamos fazer?

Miguel – Espera, deixa-me pensar!

Cátia – Temos de pensar numa ideia!

Miguel – Eu sei…

Cátia – Porque é que não era quanto era 20 mais 6? Era muito mais fácil…

Miguel – É 14!

Cátia – Como é que sabes?

Miguel – Porque sei.

Cátia olhou em redor, até que confirmou ao colega que o resultado era 14, contudo, sentiu dificuldade em registar o modo como pensou.

A aluna decidiu recorrer à recta numérica que utilizou seguindo uma estratégia de saltos através do 10 (por exemplo: 8+5=8+2+3), explorada numa tarefa de cálculo mental, realizada anteriormente na sala de aula.

> Cátia – Eu fiz assim…Fiz como aquela estratégia da Ana de ir para o 10. Sei que 6 mais 4 é 10. Depois dei um salto de 3, que era até ao 13.
>
> Prof. – Porque é que deste um salto de 3? E não um de 4 ou de 2…?
>
> Cátia – Porque… eu resolvi dar um de 3 porque pensei que era uma conta boa também para fazer este cálculo. Fiz 4 mais 3 que é 7. Depois dei outro salto de 3, que é como se não houvesse este 1 e não houvesse este 1, que era… 3 e 6, que era como aquela contagem de 3 em 3. E depois fiz o 7 mais 3 que era 10, e depois só era mais 4, e 10 mais 4 é 14.

A aluna recorre assim a uma estratégia de aproximação ao 10, adiciona 3 que, como a aluna diz, julgou que "era uma conta boa", talvez por este cálculo já se constituir como um facto numérico. Continua a recorrer a factos numéricos ao dar o próximo salto de +3, pois em 13 pensa em 3, e 3 + 3 = 6. É importante referir que a aluna recorre a também a outra actividade já realizada na turma, quando foram descobertas regularidades numa contagem de 3 em 3 (iniciada em 0). Por fim, a aluna sabia que do 16 para o 20, faltavam apenas 4. Cátia recorre a uma estratégia que me parece poder identificar-se como A10.

Figura 3 – Resolução do problema "A mana das gémeas"

Contudo, os dados disponíveis não permitem afirmar se este registo corresponde ao seu raciocínio inicial.

O problema seguinte era de subtracção, com o significado de retirar "A Mafalda foi ao teatro. Sentou-se numa fila que tinha 15 lugares e contou que havia 7 lugares ocupados. Quantos lugares estavam vazios?".

Cátia resolve o problema desenhando o número total de cadeiras, marcando o número de cadeiras ocupadas e contando as cadeiras livres. A aluna tentou explicar ao colega como estava a resolver o problema:

> Cátia – Eu estou a fazer assim. Fiz 15 lugares depois pus 7 bolinhas que eram as pessoas. Depois contei 2… e aqui mais 2 que eram 4. Depois mais 2, que eram 6 e depois mais 2 que eram 8.

A aluna desenha 15 cadeiras e preenche 7 das cadeiras com uma marca que as identifica como ocupadas. Para contar as restantes cadeiras (vazias) efectua uma contagem de 2 em 2. De seguida, Cátia verifica o seu resultado recorrendo a um facto numérico: se 7+7=14, então 7+8=15.

> Prof. – Tu fizeste de duas maneiras.
>
> Cátia – Sim, esta é para confirmar. Porque… 7 mais 7 são 14 e tem que dar 15, por isso é só mais 1. E se este é mais 1 [apontando para um 7], este também é mais 1 [apontando para o 14].

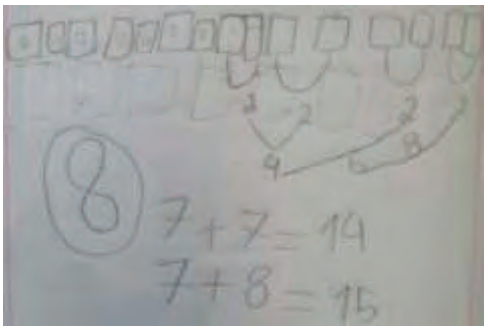


Figura 4 – Resolução do problema "Uma ida ao teatro"

O problema seguinte era de adição com o significado de acrescentar "O Vasco fez uma lista com 13 palavras e já conseguiu acrescentar 16 palavras novas. Quantas palavras tem agora a sua lista?".

Cátia e o seu colega reconheceram que poderiam resolvê-lo calculando 16 + 13.

Cátia diz de imediato que tem uma estratégia para resolver o cálculo. Refere que já a tinha utilizado num tipo de tarefa de carácter lúdico, a que chama de "Pirâmides numéricas" (figura 5).

> Cátia – Eu já fiz isto quando fiz pirâmides numéricas.
>
> André – O que é pirâmides numeréticas [*sic*]?

Cátia – Pirâmides numéricas! É uma pirâmide que tem muitos números…

(…)

Cátia – E tem quadrados e nesses quadrados… alguns quadrados têm números. E nós temos que… Por exemplo: está 2 mais 1, temos que pôr lá o 3, para onde vais, que são os mais fáceis. Depois, por exemplo está um 4 em cima e um 1 em baixo, nós temos que pensar o que é que temos de acrescentar ao 1 para dar 4, que é 3.

Figura 5 – Exemplo de uma pirâmide numérica resolvido pela aluna

Cátia começa assim a explicar a estratégia que utiliza quando resolve este tipo de jogo, surgindo pela primeira, uma estratégia do tipo 1010.

Cátia – Quando fiz pirâmides numéricas fiz assim: peguei neste um do 16 e fui juntar aqui ao 13, que é 20.

André – O quê?

Cátia – Este aqui são 20.

André – O que é que são 20?

Cátia – Pomos já um 2 do 20. Não, espera, vamos apagar. Ponho o 16, e aqui o 13. Este com este, são 2. E agora, este com este [6+3] são… 9.

A seguir, a aluna decide verificar se o resultado estava correcto recorrendo à recta numérica.

No momento de discussão, ainda antes de partilhar a sua estratégia de resolução inicial, a aluna explicou como confirmou o resultado:

Cátia – Eu fiz daquela maneira… De um número até ao 10, mas em vez de ser até ao 10 foi até ao 20. Porque esse número era mais do que 10. Faz de conta que esse 20 era o 10, e tirava o 1 ao 13. Eu já sabia que 3 mais 7 era 10. E dei outro salto de 7, até ao 27.

Repare-se que a aluna refere de novo à tarefa de cálculo mental realizada com a turma, mencionada no problema "*A mana das gémeas*", recorrendo à aproximação ao 20.

A aluna termina explicando que efectuou saltos até atingir o número 29 porque era este o número que considerava correcto. Assim, deu dois saltos de 7 e um de 2.

De seguida, Cátia explicou a primeira estratégia (1010), momento em que os restantes alunos da turma reagiram com surpresa, ficando igualmente admirados com a aparente simplicidade da estratégia.

Figura 6 – Resolução do problema
"A lista de palavras do Vasco"

O último problema era de subtracção com o significado de completar: "O Fernando quer trazer chupa-chupas para partilhar com todos os amigos da turma [25] mas só tem 18 chupa-chupas. Quantos é que ainda lhe faltam para poder dar um a cada amigo?".

A aluna registou na recta apenas os números necessários aos cálculos a efectuar, deste modo, a utilização da recta numérica tornou-se mais rápida.

Resolveu o problema recorrendo a uma estratégia que parece ser do tipo A10, começando por dar um salto através de um múltiplo de 10, o 20. Os cálculos envolvidos no seu raciocínio constituem-se como factos numéricos para a aluna.

Figura 7 – Resolução do problema
"Chupa-chupas para todos!"

Para confirmar, Cátia utilizou a estratégia do tipo 1010, calculando 18 + 7, de modo a verificar se o resultado era 25. Contudo, a aluna sentiu dificuldade em efectuar o cálculo, pois um dos números é de dois algarismos e o outro é apenas de um, enquanto que no cálculo já resolvido deste modo no problema "*A lista de palavras do Vasco"*, os

números tinham dois algarismos. A aluna ultrapassou esta dificuldade, colocando um zero à esquerda do 7.

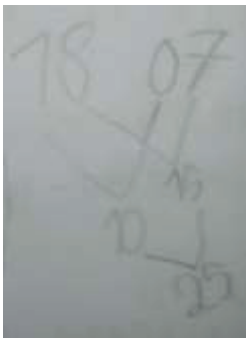


Figura 8 – Estratégia para verificação do resultado
do problema "Chupa-chupas para todos!"

No momento de discussão, pedi que Cátia explicasse qual o motivo para colocar o zero à esquerda do 7.

> Prof. – Porquê um zero e um 7?
>
> Cátia – É que quando… Eu quando faço… eu gosto de fazer o zero porque assim… se eu não puser o zero posso-me enganar e fazer, por exemplo, o 1 mais o 7.

Para calcular 8 + 7, a aluna recorre a um facto numérico básico (8+8=16) e para efectuar 10 + 15, faz uma contagem de 5 em 5, a partir do 10, levantando um dedo por cada grupo de 5 que vai adicionando.

Relativamente à verificação do resultado, quando questionada pelo colega, Cátia mostra, novamente, que compreende as relações numéricas envolvidas no problema.

> Guilherme – Mas porque é que apareceu aqui o 25? Não devia aparecer o 7?
>
> Cátia – Não Guilherme, porque o 7 é o que se tem que juntar ao 18.
>
> Guilherme – Ah!
>
> Cátia – Mas ele tem que provar que 18 mais 7 é 25!
>
> Guilherme – Ok, já percebi.
>
> Cátia – Eu tenho que provar para saber que é! Eu quando é de juntar… por exemplo, 2 mais qualquer coisa que é 7, eu faço esta maneira [estratégia A10, na recta numérica] e depois esta [estratégia do tipo 1010]. Quando é 7 mais 18, por exemplo, faço desta [estratégia do tipo 1010] e depois desta [estratégia A10, na recta numérica].

Perante este último excerto, parece evidente que a aluna possui duas estratégias diferentes às quais recorre mediante o tipo de problema que lhe é apresentado. A aluna refere que utiliza a estratégia do tipo 1010 quando tem que adicionar dois valores,

descobrindo um terceiro, recorrendo depois à estratégia A10, na recta numérica para verificar o resultado.

Se, por outro lado, o valor desconhecido não é o resultado, mas sim que parcela deverá ser adicionada ao primeiro número para obter um resultado conhecido, a aluna utiliza uma estratégia A10, confirmando o resultado obtido com uma estratégia do tipo 1010.

Considerações finais

Assumindo que os dados apresentados são insuficientes para se poder concluir relativamente à evolução do tipo de estratégias utilizadas pela aluna e qual a influência do significado da operação presente no problema na resolução do mesmo, conseguem ser estabelecidas algumas relações entre os dados analisados e o quadro teórico que orienta este estudo.

O quadro seguinte apresenta as estratégias utilizadas por Cátia, nos problemas da primeira cadeia.

Quadro 4 – Estratégias utilizadas por Cátia, ao longo da primeira cadeia de problemas

	Significado da operação	Problema	Estratégia de resolução
Adição	Combinar	*"Gormitis"*	Utilização de factos numéricos de adição
	Acrescentar	*"Idade do Dinis"*	Contagem a partir do primeiro número
Subtracção	Comparar	*"A mana das gémeas"*	Saltos através do 10
	Retirar	*"Uma ida ao teatro"*	Representação icónica Verificação: Utilização de factos numéricos
Adição	Acrescentar	*"A lista de palavras do Vasco"*	Estratégia aditiva do tipo 1010 Verificação: Estratégia aditiva A10
Subtracção	Completar	*"Chupa-chupas para todos!"*	Estratégia aditiva A10 Verificação: estratégia aditiva 1010

Na resolução dos diferentes problemas da primeira cadeia, Cátia recorre a estratégias aditivas. O que reforça que, tal como já foi referido, o contexto dos problemas, pensado

pelo professor, nem sempre é interpretado do mesmo modo pelos alunos (ver, por exemplo, Fosnot & Dolk, 2001).

Nos problemas "*Idade do Dinis*" e "*Uma ida ao teatro*", a aluna recorre a estratégias mais elementares do que as utilizadas nos restantes problemas. Em "*Idade do Dinis*", problema de adição com o significado acrescentar, Cátia efectua uma contagem de um em um a partir de oito, facto que, como já referi, pode estar relacionado com a noção temporal presente no problema.

O problema "*Uma ida ao teatro*" era o único desta cadeia com o significado de retirar. O significado da subtracção presente neste problema poderá ter influenciado a estratégia de resolução utilizada por Cátia. Por isso, será interessante analisar a que estratégias recorrerá a aluna na resolução nos próximos problemas deste tipo.

No problema de subtracção com o significado de comparar, "*A mana das gémeas*", Cátia recorre a uma estratégia de saltos através do 10, e no problema de subtracção com o significado de completar, "*Chupa-chupas para todos!*", utiliza uma estratégia pertencente à categoria N10, que me parece poder designar-se por A10, porque realiza primeiro uma aproximação à dezena exacta e conclui quanto falta para chegar ao número pretendido. Este tipo de estratégias, pertencentes à categoria N10, são identificadas por Beishuizen (2001) como as mais utilizadas na subtracção.

Um dos aspectos que merece especial atenção é a utilização da estratégia do tipo 1010, que surge pela primeira vez na turma. É importante referir que surgiu naturalmente na resolução do problema "*A lista de palavras do Vasco*", o que está de acordo com Beishuizen (2009) quando refere que a utilização deste tipo de estratégia pelos alunos é mais natural do que as estratégias do tipo N10. Após ter sido utilizada neste problema, a aluna recorre a esta estratégia no problema seguinte como estratégia de verificação do resultado, parecendo mostrar alguma preferência por este tipo de estratégia no cálculo de adições. De acordo com os resultados obtidos num estudo realizado por Thompson e Smith, com alunos britânicos do 4.º e 5.º ano de escolaridade, este é o tipo de estratégia mais utilizado na resolução de adições (Beishuizen, 2001).

Será interessante analisar se Cátia irá continuar a utilizar estratégias do tipo 1010 nas cadeias seguintes, não só em problemas de adição, mas também de subtracção, uma vez que as dificuldades na utilização deste tipo de estratégia em subtracções com

empréstimo[4] estão já identificadas em diferentes estudos (ver, por exemplo, Beishuizen, 1993).

Os dados disponíveis permitem afirmar que Cátia utiliza estratégias do tipo 1010 e do tipo A10 de modo flexível, demonstrando uma elevada compreensão das relações numéricas envolvidas.

Referências bibliográficas

Albergaria, I. S., & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 294-323.

Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching – Innovative Approaches for the Primary Classroom*, pp. 119–130. Buckingham: Open University Press.

Beishuizen, M. (2009). The empty number line as a new model. In I. Thompson (ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 157–168. Open University Press.(Reimpressão de 1999)

Beishuizen, M. & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519-538.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Org.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. pp. 97–115. Lisboa: Escolar Editora.

Buys, K. (2008) Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121-146) Netherlands: Sense Publishers. (Obra original publicada em 2001)

Castro, J.P. & Rodrigues, M. (2008) O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Org.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. pp. 117-133. Lisboa: Escolar Editora.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work – Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Portsmouth NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers

[4] Neste estudo, designo subtracção com empréstimo quando, como descrito por Ponte e Serrazina (2000), o número de unidades de uma ordem no subtractivo é maior que o correspondente do aditivo.

and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(*2*), 130-162.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8. British Columbia: Canada.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.(Trabalho original publicado em inglês em 2000)

Noteboom, A., Bokhove, J. & Nelissen, J. (2008). Glossary Part I. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 89-91) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.

Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 145–156. Open University Press. (Reimpressão de 1999)

Treffers, A. (2008). Grade 1 (and 2) – Calculation up to 20. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 43-60) Netherlands: Sense Publishers.(Obra original publicada em 2001)

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557–628). Reston, VA: NCTM.

O RACIOCÍNIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO EM CRIANÇAS DO PRÉ-ESCOLAR

Florbela Soutinho
JI Jugueiros, Viseu
florbelasoutinho@gmail.com

Ema Mamede
CIEC, Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Resumo

Este artigo analisa o modo como as crianças pequenas resolvem problemas de raciocínio aditivo e multiplicativo. Conduziram-se entrevistas individuais a crianças do pré-escolar (quatro aos seis anos) durante a resolução dos problemas. Analisaram-se as suas resoluções, estratégias e argumentos. Os problemas de raciocínio aditivo apresentados às crianças foram de três tipos distintos: simples, inversos e comparativos. Os problemas de raciocínio multiplicativo foram simples, inversos e de representação em tabela. Os resultados sugerem que as crianças em idade pré-escolar possuem já um conhecimento informal que lhes permite resolver com sucesso alguns dos problemas propostos. Os argumentos apresentados pelas crianças garantem que as suas resoluções acertadas dos problemas são acompanhadas por uma compreensão das estruturas dos problemas. Apresentam-se ainda algumas considerações sobre a investigação a realizar neste âmbito.

Palavras-chave: Raciocínio aditivo e multiplicativo, crianças do pré-escolar.

Sobre o raciocínio aditivo

As crianças conseguem usar o seu conhecimento informal para analisar e resolver problemas simples de adição e subtracção antes de receberem qualquer ensino formal sobre essas operações (Nunes & Bryant, 1996). Assim como podem, também, saber muito sobre raciocínio multiplicativo quando iniciam a escola do 1.º ciclo (Nunes & Bryant, 2010). Ter oportunidade para resolver problemas de adição e de subtracção poderá ajudar as crianças a construir uma compreensão mais completa sobre estas operações aritméticas. De acordo com Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005), a capacidade da criança resolver problemas que envolvem uma estrutura aditiva desenvolve-se em três fases: primeiro, as crianças conseguem resolver problemas simples; em seguida, conseguem resolver problemas inversos; e finalmente conseguem solucionar problemas estáticos.

Os problemas simples de adição e subtracção são aqueles em que as crianças são convidadas a transformar uma quantidade juntando-lhe ou retirando-lhe uma outra quantidade, (por exemplo, o João tinha cinco berlindes. Em seguida deu três ao Tomás. Quantos berlindes tem o João agora?). Estes tipos de problemas envolvem as relações entre o todo e suas partes. Os problemas inversos são aqueles em que a situação apresentada no problema se refere a um esquema, mas a resolução correcta exige o esquema inverso. Por exemplo, no problema "O João tinha alguns berlindes, de seguida ele recebeu mais dois berlindes num jogo. O João tem agora seis berlindes. Quantos berlindes tinha o João no início?" (Nunes & Bryant, 2010), a subtracção aparece como o inverso da adição; a quantidade acrescentada e a quantidade final são dadas mas a quantidade inicial é desconhecida. Os problemas estáticos de adição e subtracção são aqueles em que as crianças são convidadas a quantificar comparações. Por exemplo, "O João tem oito berlindes e o Tomás tem cinco. Quem tem mais berlindes? (uma pergunta fácil) Quantos berlindes tem o João a mais do que o Tomás?" (uma pergunta difícil) (Nunes & Bryant, 1996; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2005).

Para Nunes e Bryant (1996) a dificuldade do problema é determinada não só pela situação, mas também pelos invariantes da adição e subtracção que têm que ser percebidos pelas crianças de forma a resolver um problema específico, e esses invariantes mudam de acordo com as partes desconhecidas do problema. Nunes e Bryant (1996) referem ainda que o sucesso obtido pelas crianças pequenas em tarefas de adição e subtracção também é determinado pelos recursos de que dispõem para implementar procedimentos de cálculo, bem como o sistema de sinais que usam. Para os autores, os problemas que envolvem as relações são mais difíceis de resolver do que aqueles que envolvem quantidades.

A literatura mostra que as crianças do Jardim-de-Infância são capazes de resolver alguns problemas de adição e subtracção (ver Fuson, 1992; Nunes & Bryant, 1996. Nunes et al., 2005), mas isso não significa que elas compreendem todas as relações no contexto dos problemas de raciocínio aditivo. A compreensão da adição e da subtracção por parte das crianças é progressiva e desenvolve-se durante um longo período de tempo.

Sobre o raciocínio multiplicativo

O raciocínio multiplicativo envolve duas (ou mais) variáveis numa relação constante. Assim, problemas tais como: "O João comprou cinco bombons. Cada bombom custou três euros. Quanto gastou ele?" ou "O João comprou alguns bombons. Cada bombom custou três euros. Ele pagou trinta euros. Quantos bombons comprou?" são exemplos de problemas que envolvem raciocínio multiplicativo. O primeiro pode ser resolvido por uma multiplicação para determinar o custo total que é desconhecido; mais tarde poderia ser resolvido através de uma divisão para determinar uma quantidade desconhecida, neste caso, o número de bombons (Nunes & Bryant, 2010). A investigação tem mostrado que as crianças conseguem resolver problemas de multiplicação e divisão deste tipo, mesmo antes do ensino formal, na escola, sobre a multiplicação e a divisão, usando, para tal, o esquema de correspondência um-para-muitos. Carpenter, Ansell, Franke, Fennema e Weisbeck (1993) referem que as crianças do Jardim de Infância revelam desempenhos com percentagens elevadas de sucesso quando resolvem problemas de raciocínio multiplicativo envolvendo correspondência de 2:1, 3:1 e 4:1. Nunes et al. (2005) analisaram o desempenho de crianças brasileiras que frequentavam a escola primária na resolução de problemas de raciocínio multiplicativo. Quando foi mostrada às crianças uma imagem com quatro casas e, em seguida, foram convidadas a resolver o problema: "em cada casa vivem quatro cachorros. Quantos cachorros vivem nas quatro casas ao todo? ", verificou-se 60% de sucesso nas crianças do 1.º ano e cerca de 80% de sucesso nas crianças dos níveis seguintes. Quando as crianças foram convidadas a resolver um problema de divisão, como: "Há vinte e sete doces para partilhar por três meninos. Estes devem receber a mesma quantidade de doces. Quantos doces receberá cada um?", os níveis de sucesso foram, para as crianças do 1.º ano, de 80% e acima desta percentagem para as crianças de outros níveis (do 2.º ao 4.º ano). Kornilaki, citada por Nunes et al. (2005) analisou o desempenho de crianças dos cinco aos oito anos de idade quando resolvem problemas de raciocínio multiplicativo, sendo-lhes apresentado apenas figuras. A autora apresentou problemas de multiplicação e divisão de dois tipos, problemas directos e inversos. Nos problemas directos, as crianças podem chegar à solução usando directamente a correspondência e distribuição para resolver problemas de

multiplicação e divisão, respectivamente. Nos problemas inversos, tal não pode ser feito imediatamente. Num problema de multiplicação inversa como por exemplo "É o aniversário do Carlos. Cada amigo que for à festa receberá três balões. Ele comprou dezoito balões. Quantos amigos irão à festa?", os resultados de Kornilaki mostraram que 30% das crianças de cinco anos e 50% das crianças de seis anos conseguiram resolver este problema. No problema de divisão inversa "É o aniversário de Ana e ela vai partilhar biscoitos entre os seus amigos. Preparou pequenos sacos com três biscoitos cada. Ela usou dezoito biscoitos para preparar os sacos. Quantos sacos irá fazer?", 40% das crianças de cinco anos e quase 68% das crianças de seis anos foram bem sucedidas. De novo, a investigação mostra que as crianças podem resolver os problemas de raciocínio multiplicativo antes de tais operações serem ensinadas formalmente na escola, bem como antes de estar completamente desenvolvido o raciocínio aditivo.

Neste cenário, torna-se relevante saber como reagem as crianças portuguesas, que frequentam a educação pré-escolar, perante diferentes tipos de problemas que envolvem o raciocínio aditivo e multiplicativo.

Procurando saber um pouco mais sobre o raciocínio aditivo e multiplicativo de crianças em idade pré-escolar, conduziu-se uma pequena investigação que aqui se documenta.

Metodologia

Conduziram-se entrevistas individuais a seis crianças (dos quatro aos seis anos) a frequentar a educação pré-escolar em Viseu. Estas entrevistas decorreram em duas sessões distintas, com intervalo de dez dias. Cada sessão demorou, aproximadamente, 25 minutos.

Na primeira sessão de entrevistas, as crianças foram convidadas a resolver nove problemas de raciocínio aditivo (três simples, três inversos, três comparativos). Na segunda, as crianças forma desafiadas a resolver nove problemas de raciocínio multiplicativo (quatro simples, dois inversos, três de representação em tabela). Todos os problemas foram apresentados através de histórias, tendo sido disponibilizado material representativo para a contextualização de cada problema. A Tabela 1 apresenta exemplos de problemas de raciocínio aditivo.

Tabela 1 – Exemplos de tipos problemas de raciocínio aditivo

Tipo de problema	Exemplo
Simples	A mãe da Francisca deu-lhe quatro coelhinhos de chocolate. Mais tarde deu-lhe mais dois. Quantos coelhinhos tem agora a Francisca?
	Maria tinha seis flores, deu duas à sua mãe. Quantas flores ela tem agora?
Inverso	O bibe da Maria tinha quatro botões. A mãe coseu mais alguns. Agora o bibe tem seis botões. Quantos botões coseu a mãe?
	A Ana tinha amêndoas, deu três à mãe. A Ana ficou com duas Quantas amêndoas tinha a Ana no início?
Comparativo	Numa sala há seis alunos e quatro cadeiras. Há mais cadeiras ou alunos? Quantos alunos há a mais?

Os problemas de raciocínio multiplicativo envolveram problemas simples e inversos, sendo que alguns problemas simples foram apresentados recorrendo ao uso de tabelas. A Tabela 2 apresenta exemplos destes problemas.

Tabela 2 – Exemplos de tipos problemas de raciocínio multiplicativo

Tipo de problema	Exemplo
Simples	Esta rua tem três casinhas. Em cada casinha moram dois coelhos. Quantos coelhos moram, ao todo, nas três casinhas?
	No galinheiro da Maria há três pintainhos. Ela tem estes grãos de milho (mostra-se taça com 12 unidades) para distribuir pelos pintainhos. Quantos grãos de milho vai dar a cada pintainho, para cada um comer a mesma quantidade?
Inverso	A professora Ana fez anos. Quatro meninos vieram à sua festa e cada um trouxe o mesmo número de flores. A professora Ana

<table>
<tr><td></td><td>recebeu estas flores (12). Quantas flores trouxe cada menino?</td></tr>
<tr><td></td><td>O Miguel vai fazer anos. Cada amigo que vem à festa vai receber três balões. Ele comprou estes balões para dar. Quantos amigos convidou o Miguel?</td></tr>
<tr><td>Representação em tabela</td><td>Cada uma destas casinhas foi feita para dois ursinhos. Se tivermos quatro ursinhos vamos precisar de duas casinhas. Quantos ursinhos podem morar em três casinhas?

2 | 1
4 | 2
3</td></tr>
</table>

Todas as crianças foram entrevistadas pela mesma investigadora. Em nenhum momento a entrevistadora emitiu sinais de ajuizamento sobre as resoluções das crianças. A todas as crianças, após a resolução, foi perguntado "Porquê?", procurando obter as justificações das crianças, acedendo assim um pouco mais à sua forma de pensar. Os dados foram recolhidos através de gravações em vídeo e de notas de campo da entrevistadora.

Resultados

A análise conduzida recaiu sobre a resolução de cada problema efectuada por cada criança, RES, (certa/errada). Procurando saber mais sobre a forma como os alunos lidaram com estes problemas, analisaram-se ainda os níveis de desempenho, DES, (com facilidade, com ajuda); as estratégias utilizadas, EST; e os argumentos por elas apresentados, ARG.

Os problemas de estrutura aditiva

Contabilizaram-se as resoluções correctas dos alunos nos problemas de raciocínio aditivo. A Tabela 3 resume a informação dos resultados obtidos.

Tabela 3 – Número de respostas certas e erradas das crianças nos problemas aditivos

		Tipo de problema		
Resposta		Simples (18 resoluções)	Inverso (18 resoluções)	Comparativos (18 resoluções)
RES	Certa	17	14	10
	Errada	1	4	8

Para analisar os níveis de desempenho durante a resolução de cada problema, consideraram-se as seguintes categorias: com facilidade, sempre que a tarefa foi realizada sem necessitar de qualquer explicação acrescida; e com pequena ajuda, que consiste na formulação de uma segunda questão no mesmo problema que auxilia a sua interpretação, transformando uma questão estática em dinâmica (por exemplo, "quantos carrinhos há a mais do que aviões?" - uma questão estática -, formulada de outra forma "quantos aviões temos que dar ao Rui para que ele fique com a mesma quantidade de brinquedos que o Tiago?" - questão dinâmica).

Para analisar as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução dos problemas propostos, consideraram-se as categorias juntar, retirar, correspondência um-a-um, já previamente apresentadas na literatura (ver Nunes et al., 2005; Nunes & Bryant, 2010) e ainda a categoria inconclusivo. A categoria juntar contempla todos os casos em que a criança acrescenta uma quantidade a outra para obter o resultado (por exemplo, "quatro mais dois, seis"); a categoria retirar contempla os casos em que a criança retira uma quantidade a outra para obter o resultado (por exemplo, "seis, tirei dois ficaram quatro"). A categoria inconclusivo diz respeito aos casos em que as estratégias usadas não conseguem definir uma forma de actuar revelando confusão no raciocínio da criança.

Os argumentos das crianças foram analisados considerando as categorias de argumentos válidos e parcialmente válidos. Os argumentos válidos considera os casos

em que a explicação atende a todas as quantidades envolvidas no problema, (por exemplo, quando a criança depois de ter dado a resposta "6", mostra contando pelos dedos "quatro, 1, 2, 3, 4, mais dois, 5, 6").

A Tabela 4 resume a informação dos resultados obtidos na resolução correcta de problemas de raciocínio aditivo pelas crianças.

Tabela 4 – Resultados registados nos problemas de raciocínio aditivo

Categorias		Tipo de problema		
		Simples	Inverso	Comparativo
DES	Com facilidade	17	7	7
	Com ajuda	0	7	3
EST	Juntar	12	12	3
	Retirar	5	2	5
	Correspondência um-a-um	0	0	2
ARG	Válido	17	14	8
	Parcialmente válido	0	0	1
	Inválido	0	0	1

A estratégia observada para resolver os problemas de adição foi juntar as quantidades envolvidas nos dois conjuntos e para os problemas de subtracção a estratégia consistiu em retirar quantidades ao conjunto maior. Os problemas comparativos foram mais difíceis para as crianças, tendo sido as estratégias de "juntar o que falta a" e "retirar o que excede a", seguidas de contagem, as que mais conduziram as crianças ao sucesso. Todas as resoluções correctas de problemas simples foram acompanhadas de argumentos válidos e o mesmo sucedeu nas resoluções de problemas inversos. Os problemas comparativos foram mais difíceis para as crianças do estudo do que os problemas simples e inversos. Nos problemas comparativos encontraram-se crianças com resoluções acertadas mas com dificuldade em explicar porquê, o que não surpreende dado tratar-se de crianças tão pequenas. A existência de um argumento

parcialmente válido pode ser interpretada como uma dificuldade da criança em articular verbalmente uma explicação lógica que envolva todas as quantidades do problema. A utilização de argumentos válidos na resolução da maior parte dos problemas simples e inversos permitem-nos concluir que as crianças não aplicaram estas estratégias sem critério, mas sim compreendendo o que estavam a fazer.

Os problemas de estrutura multiplicativa

Analisaram-se as resoluções das crianças nos problemas de raciocínio multiplicativo. A Tabela 5 resume o número de respostas correctas e erradas das crianças na resolução destes problemas.

Tabela 5 – Número de respostas certas e erradas das crianças nos problemas multiplicativos

	Tipo de problema		
Resposta	Simples (24 resoluções)	Inverso (12 resoluções)	Representação com tabela (18 resoluções)
RES Certa	18	9	9
Errada	6	3	9

Os problemas multiplicativos simples e inversos registaram resoluções acertadas na ordem dos 75%; os de representação em tabela parecem ter sido mais difíceis para as crianças. Além da assertividade na resolução dos problemas, analisaram-se também os níveis de desempenho, estratégias e argumentos apresentados pelas crianças nos problemas de resolução correcta.

No que respeita aos níveis de desempenho durante a resolução de cada problema de raciocínio multiplicativo, consideraram-se as mesmas categorias da análise dos problemas aditivos. Para analisar as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução dos problemas propostos, consideraram-se as categorias correspondência um-para-muitos, partilha equitativa, já previamente apresentadas na literatura (ver Nunes et al., 2005; Nunes & Bryant, 2010), e ainda as categorias tentativa e aproximação e ainda inconclusivo. A categoria correspondência um-para-muitos contempla todos os casos em que a criança faz corresponder a um elemento de um conjunto um outro conjunto com mais do que uma unidade (por exemplo, a uma casa correspondem três coelhos); a

categoria partilha equitativa consiste em distribuir igualmente objectos por recipientes. A categoria tentativa e aproximação inclui os casos em que a criança vai experimentando várias hipóteses conjecturando e refinando-as até que se aproxima da solução; na categoria inconclusiva encontram-se os casos em que as estratégias usadas não conseguem definir uma forma de actuar revelando confusão no raciocínio da criança.

A argumentação foi analisada considerando as categorias de argumentos válidos, parcialmente válidos, tal como na análise dos problemas de raciocínio aditivo, e ainda sem argumento onde foram inseridas manifestações das crianças como "Não sei explicar!". A Tabela 6 resume a informação observada nos problemas de raciocínio multiplicativo correctamente resolvidos pelas crianças.

Tabela 6 – Resultados registados nos problemas de raciocínio multiplicativo.

Categorias		Tipo de problema		
		Simples (18)	Inverso (9)	Representação com tabela (9)
DES	Com facilidade	14	8	8
	Com ajuda	4	1	1
EST	Correspondência um-p/-muitos	14	0	9
	Partilha equitativa	1	6	0
	Tentativa e aproximação	3	3	0
ARG	Válido	17	19	7
	Parcialmente válido	1	0	0
	Sem argumento	0	0	2

Nas resoluções correctas das crianças, a estratégia mais observada para resolver os problemas simples foi a correspondência de um-para-muitos. Nos problemas inversos, as crianças utilizaram estratégias assentes maioritariamente na partilha equitativa e a tentativa e aproximação. Nos problemas inversos foram ainda observadas estratégias

inconclusivas que resultaram em respostas erradas. Nos problemas de multiplicação apresentados com representação em tabela, a correspondência um-para-muitos foi a utilizada por todos os que resolveram com sucesso este tipo de problemas. A utilização de argumentos válidos na resolução da maior parte dos problemas simples e inversos permitem-nos concluir, mais uma vez, que as crianças não aplicaram estas estratégias sem critério, mas sim compreendendo o que estavam a fazer. O número de argumentos válidos reduziu consideravelmente na resolução de problemas apresentados em tabela, tendo-se registados argumentos válidos em sete das nove resoluções correctas (77.7%) e ainda duas resoluções que conduziram à resposta certa mas sem apresentação de argumentos o que, mais uma vez parece ser indicador de que as crianças tiveram dificuldade em justificar as suas respostas, apesar de terem raciocinado correctamente.

Discussão e conclusões

Os resultados deste estudo permitem perceber que as crianças do pré-escolar possuem um conhecimento informal que lhes possibilita resolver com sucesso alguns problemas de raciocínio aditivo e multiplicativo. Exemplos de desempenhos bem sucedidos foram registados em crianças dos quatro aos seis anos. Contudo, e dado o estudo ter incidido sobre uma amostra muita pequena, os dados deste estudo estão longe de poderem permitir qualquer tipo de generalização.

Esta análise sugere-nos que os problemas aditivos simples e inversos parecem ser acessíveis para as crianças do pré-escolar. Estudos conduzidos noutras realidades que não a portuguesa e documentados na literatura apresentam resultados no mesmo sentido (ver Nunes et al., 2005), apesar de terem na sua amostra apenas crianças de cinco e seis anos. Os resultados aqui apresentados sugerem que, mesmo as crianças de quatro anos parecem conseguir algum sucesso na resolução destes problemas, em determinadas condições. Uma análise dos níveis de desempenho, estratégias e argumentos permitiu-nos saber um pouco mais sobre os processos de resolução das crianças nos problemas propostos. A facilidade apresentada pelas crianças na resolução de problemas simples e inversos de raciocínio aditivo, bem como os argumentos por elas apresentados garantiram que os sucessos nas suas resoluções não foram ao acaso. Também os problemas de raciocínio multiplicativo simples e inversos parecem ser acessíveis a algumas crianças, embora os problemas de raciocínio aditivo tenham sido mais fáceis para as crianças. Estas conseguiram ter sucesso na resolução de problemas

simples e inversos nos problemas de raciocínio multiplicativo. Estes resultados convergem com a ideia de Nunes et al. (2005) e de Nunes & Bryant (2010) quando referem que as crianças possuem um conhecimento informal que lhes permite resolver problemas de multiplicação e divisão antes de estas operações lhes terem sido ensinadas formalmente na escola.

Os problemas propostos às crianças deste estudo utilizaram, nuns casos, ilustrações e noutros, concretizações, como forma de apelar à resolução prática das tarefas. Os problemas de representação, apesar de terem sido resolvidos por estratégias confortáveis para as crianças, como é o caso da correspondência um-para-muitos, revelaram-se bem mais difíceis para as crianças em geral e, talvez, isto tenha ocorrido pela sua apresentação em tabela.

Este pequeno estudo constituiu apenas o levantar de um véu sobre as possibilidades de investigação a desenvolver com as nossas crianças a frequentar o pré-escolar. Fará sentido considerar-se um estudo de investigação mais representativo sobre estes assuntos para percebermos como podemos estimular o raciocínio aditivo e multiplicativo das crianças antes de frequentarem o ensino formal.

Referências bibliográficas

Carpenter, T.P., Ansell, E., Franke, M.L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24(3)*, 428-441.

Fuson, K. (1992). Research on while number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp.243-275). New York: Macmilla Publishing Company.

Nunes, T. & Bryant, P. (2010). *Understanding relations and their graphical representation*. In T. Nunes, P. Bryant & A. Watson (Eds), Key understanding in mathematics learning. (Acedido em 20 de Abril, 2011, de http://www.nuffieldfoundation.org/sites/defaukt/files/P4.pdf.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Nunes, T.; Campos, T; Magina, S. & Bryant, P. (2005). *Educação matemática – Números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez Editora.

AS CONTRIBUIÇÕES DOS JOGOS PARA O DESENVOLVIMENTO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA EM CRIANÇAS DA PRÉ-ESCOLA

Rita Melissa Lepre
Universidade Estadual Paulista – Brasil
melissa@fc.unesp.br

Nelson Antonio Pirola
Universidade Estadual Paulista – Brasil
npirola@uol.com.br

Daniela Santa Rosa Fiorillo Costa
danisanro@gmail.com

Resumo
A presente pesquisa teve por finalidade verificar a contribuição dos jogos de regras no desenvolvimento e aprendizagem da matemática com crianças da pré-escola sendo realizada com 08 (oito) alunos da pré-escola de uma instituição filantrópica da cidade de Bauru (SP), Brasil. O objetivo principal foi explorar os jogos de regras como um recurso estratégico no desenvolvimento e aprendizagem da matemática. Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo, por meio do estudo de caso, com um grupo de crianças da pré-escola que tiveram contato com dois jogos matemáticos e foram analisados quanto ao aprendizado de determinados conceitos matemáticos, sobretudo os que dizem respeito à construção do número e das estruturas aditivas. Os resultados revelaram que o uso efetivo de jogos proporcionou aos participantes aprendizagem significativa relacionada a tais conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Aprendizagem Numérica; Desenvolvimento; Jogos Matemáticos; Matemática.

I – Introdução

No Brasil, a Educação infantil é composta pela creche, que atende a crianças de 4 meses a 03 anos de idade e pela pré-escola, que atende a crianças de 04 a 05 anos de idade. Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB 9394/96, a Educação Infantil deve garantir o pleno desenvolvimento do educando em suas dimensões física, cognitiva, afetiva e social. Dessa forma, a pré-escola apresenta como função, assim como todos os outros níveis da Educação Básica, a construção do conhecimento, além da análise sobre qual aprendizagem ocorre quando se apresenta para a criança alguma questão real, um problema a ser solucionado, que leve a um determinado processo de aprendizagem.

Os jogos e as brincadeiras, também chamados de movimentos ou atividades lúdicas, representam uma parte importante da aula, devendo ser desenvolvidos nas práticas educacionais. Eles ajudam no desenvolvimento da personalidade e na construção do organismo cognitivo da criança. A utilização dos jogos no desenvolvimento e aprendizagem da criança é capaz de estimular seu intelecto, levando-a a adquirir raciocínio mais elaborado. Nessa perspectiva é de suma importância o contexto em que a criança está inserida para o desenvolvimento do seu pensamento e construção do seu conhecimento.

Pelo estudo da abordagem construtivista de Jean Piaget, observou-se a importância dada aos jogos para o desenvolvimento e a aprendizagem da matemática na pré-escola. Esta pesquisa tem como objeto de estudo analisar a importância da utilização dos jogos no desenvolvimento e aprendizagem da matemática com crianças da pré-escola, atribuindo ao ensino um caráter lúdico, intencional e permanente.

A principal meta educacional de uma pré-escola pautada nos conceitos piagetianos deve ser o desenvolvimento de toda a personalidade, dando ênfase à autonomia intelectual e moral da criança. Piaget não adere às concepções racionalistas que consideram as estruturas lógico-matemáticas inatas e postula que a própria atividade mental da criança é que constrói essas estruturas.

Pesquisas mostram que, em relação à representação das quantidades, por exemplo, as crianças evoluem para compreensão do signo numérico. A compreensão dos números e do signo numérico são conceitos importantes (noções conceituais) a serem desenvolvidos no currículo da pré-escola. O desenvolvimento cognitivo e a aquisição de conceitos científicos devem ser considerados objetos básicos da educação matemática.

Neste estudo, buscamos analisar a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos em crianças da pré-escola de um Centro de Educação Infantil de uma instituição filantrópica, da cidade de Bauru (SP), Brasil, por meio da aplicação de dois jogos. A experiência será relatada e analisada após a apresentação de nosso embasamento teórico.

II – A matemática na Pré-escola segundo a concepção construtivista

A matemática é uma maneira de pensar. Quanto mais cedo a matemática for trabalhada com as crianças, mais efetivamente ocorrerão os alicerces de sua aprendizagem

significativa. A construção dos conceitos matemáticos deve ser alicerçada durante a pré-escola.

Conforme enfatiza Dante (1991, p. 18), há duas razões para colocar a matemática nas atividades da pré-escola:

> 1ª) Ela desenvolve na criança o raciocínio lógico, a sua capacidade de pensar logicamente e resolver situações-problema, estimulando sua criatividade.
> 2ª) É útil para a vida diária da criança, pois mesmo inconscientemente, ela está em contato permanente com formas, grandezas, números, medidas, contagens, etc.

Além da capacidade de pensar e de resolver problemas, existem outros objetivos mais específicos em relação à pré-escola, sendo necessário encontrar estratégias e oferecer condições para que a criança possa assimilar e compreender: grandeza, posição, direção e sentido, tempo, capacidade, massa, sequência, símbolos, correspondências, idéia de quantidade (juntar, tirar, repartir), sistema de numeração decimal, gráficos e situações-problema.

Kamii (2003, p. 45) especifica que "as relações são criadas pelas crianças a partir de seu interior e não lhe são ensinadas por outrem. No entanto, o professor tem um papel crucial na formação de um ambiente material e social que encoraje a autonomia e o pensamento".

Dessa forma, para que a criança pré-escolar apresente uma aprendizagem significativa da matemática o professor deve levar em consideração alguns aspectos levantados por Kamii (2003), tais como:

- Encorajar a criança a estar alerta e colocar todos os tipos de objetos, eventos e ações em todas as espécies de relações;
- Encorajar a criança a pensar sobre o número e quantidades de objetos quanto estes sejam significativos para elas;
- Encorajar a criança a quantificar objetos logicamente e a comparar conjuntos;
- Encorajar a criança a fazer conjuntos com objetos móveis;
- Encorajar a criança a trocar idéias com seus colegas e;
- Imaginar como é que a criança está pensando e intervir de acordo com o que parece que está acontecendo em seu pensamento.

Para que a criança aprenda, assimile e compreenda, é essencial descobrir estratégias para um ensino efetivo, pois a estrutura do pensamento e da ação da criança é uma conseqüência de seu relacionamento ativo com os objetos de conhecimento.

Nunca se deve deixar de levar em consideração, como especificado por Dante (1991), que a matemática é algo que deve ser ensinado sem pressa, através do desenvolvimento de objetivos e de idéias essenciais para o alcance desses objetivos. Quando o ensino da matemática ocorre de maneira apressada transforma-se em algo mecânico, sem significado algum, sendo muito importante trabalhar atentando para o ritmo da criança na compreensão de suas ideias.

Ainda, segundo o autor, com o passar do tempo, as atividades tornam-se mais complexas, sendo necessária a realização de atividades que levem em consideração as experiências prévias da criança, para que ocorra uma sistematização e ampliação dessas experiências.

Piaget acredita que as ações físicas e mentais da criança se encontram estritamente relacionadas com o desenvolvimento de seu pensamento lógico. Wadsworth (1981, p.17) relata que "Piaget afirma que as *ações* levam ao desenvolvimento das *operações*, e as operações por sua vez levam ao desenvolvimento das estruturas."

Piaget considera que a maneira tradicional de se ensinar a matemática não é efetiva para o desenvolvimento e aprendizagem da criança. Ele enfatiza que a matemática deve ser construída a partir das ações e experiências da criança sobre o objeto, de maneira a propiciar a construção de conceitos.

Levando em consideração que as estruturas da lógica são parecidas com as estruturas do raciocínio matemático pode-se dizer que não é possível distinguir o desenvolvimento do raciocínio matemático e da lógica com desenvolvimento da inteligência ou do raciocínio lógico, ou seja, conforme o desenvolvimento cognitivo também ocorre o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Muitas vezes observa-se que a criança não desenvolve conceitos adequados de matemática. Esse fato pode ocorrer tendo em vista a forma pela qual a matemática é apresentada para a criança através da utilização de métodos "não-ativos", de forma abstrata, não permitindo a construção de conceito e significado para a criança.

Segundo o pensamento de Piaget, o entendimento dos símbolos e signos matemáticos, pela criança, nunca deve ser construído partindo da manipulação dos símbolos e signos. Para que aconteça a aprendizagem significativa da matemática para a criança é essencial a utilização de materiais concretos e a experiência com a ação real, pois somente é possível construir conceitos por meio da ação sobre objetos.

Kamii (2003) observa que, na teoria de Piaget os símbolos são diferentes dos signos, pois os símbolos são criados pelas crianças e apresentam uma semelhança figurativa com os objetos representados, já os signos não apresentam semelhança alguma com os objetos que representam e são criados por convenções.

Após a criança compreender o que são signos, torna-se possível ocorrer de maneira significativa à representação dos conceitos e operações matemáticas. Assim, a criança será capaz de realizar abstrações.

Frente ao exposto, podemos inferir que o jogo constitui-se como uma importante estratégia para o desenvolvimento e aprendizagem da matemática na pré-escola.

III – Procedimentos Metodológicos

O estudo ora apresentado é de cunho qualitativo. A pesquisa qualitativa pode-se diferenciar quanto ao método, à forma e aos objetivos. Godoy (1995) enfatiza a variedade dos trabalhos qualitativos e apresenta um conjunto de características capazes de reconhecer esse tipo de pesquisa:

> (1) o ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador como instrumento fundamental;
> (2) o caráter descritivo;
> (3) o significado que as pessoas dão às coisas e a sua vida como preocupação do investigador;
> (4) enfoque indutivo. (GODOY, 1995, p.62)

Utilizamos o estudo de caso, uma das formas da pesquisa qualitativa, que apresenta um forte cunho descritivo, porém não necessita ser meramente descritivo, podendo ter um alcance analítico interrogando a situação, além de confrontá-las com outras e com teorias já existentes.

O estudo de caso foi realizado com 08 (oito) crianças de uma pré-escola da cidade de Bauru, São Paulo, Brasil, divididas em dois grupos de quatro crianças cada um. Foram propostas atividades com jogos em grupo visando o ensino-aprendizado da matemática, além da observação e análise do desempenho e da aprendizagem da matemática. As atividades foram registradas por gravação em vídeo.

O estudo de caso contou com a utilização de dois jogos de regras criados e confeccionados pela empresa "Serem Brinquedos Educativos Ltda/Bauru". O jogo utilizado no primeiro dia da pesquisa é denominado "Laranja na Cesta" e o utilizado no segundo dia, "Ao Pé do Fogo".

O jogo "Laranja na Cesta" apresenta como objetivos o estímulo à construção dos números de 0 a 10 e a contagem feita um a um, utilizando as faces do dado. Visa desenvolver na criança o conceito de esvaziamento relacionado à idéia de "tirar" e promove a interação no grupo.

Os objetivos do jogo "Ao Pé do Fogo" são a construção do número e a construção de antecipações de valor de quantidades, ou seja, estimativas, promovendo ainda a interação grupal.

Para a escolha dos jogos foram utilizados requisitos como: conteúdo a ser abordado, objetivos do jogo e faixa etária adequada, no caso da presente pesquisa para crianças com cinco anos de idade.

A escolha dos alunos participantes da pesquisa ocorreu com o auxílio da professora da sala. Foram escolhidos os alunos que já apresentavam o processo de construção do número bastante avançado, que conseguiam identificar e estabelecer a conservação dos números.

IV - Apresentação e análise do estudo de caso

a) Aplicação do Jogo Laranja na Cesta

O jogo "Laranja na Cesta" apresenta os seguintes materiais: 01 Tabuleiro de E.V.A laminado com PVC de 50 cm por 38 cm; 04 Cestinhas; 40 Fichas em E.V.A (laranjinhas); 01 Dado e 01 Copo para jogar dados.

O jogo tem como objetivos estimular a construção dos números de 0 a 10 e a contagem feita um a um utilizando as faces do dado. Visa proporcionar o conceito de esvaziamento relacionado à idéia de "tirar". Promove a interação no grupo. É indicado para crianças de quatro anos de idade.

O desenvolvimento do jogo apresenta-se a seguir:

- Todos colocam as "laranjas" na sua árvore.
- Um dos participantes, escolhido pelo grupo, inicia a partida.
- De acordo com o número apontado pelo dado, o jogador retira as laranjas de sua laranjeira e as coloca dentro da cestinha.
- O jogo continua até que um dos jogadores consiga colher todas as laranjas (fichas) da sua árvore.
- Vence o jogador que conseguir colher primeiro todas as sua dez laranjas.
- No final, a retirada das últimas laranjas só poderá ser feita com o número exato apontado pelo dado.

Os alunos foram levados ao quiosque para a realização da atividade com o jogo "Laranja na Cesta". O pesquisador dividiu às oito crianças em dois grupos, aleatoriamente. Feita a divisão foi pedido para que os dois grupos se sentassem em círculo, um ao lado do outro.

Organizados os grupos, o pesquisador entregou o tabuleiro e as peças do jogo, um para cada grupo, e explicou-lhes as regras do jogo. Os alunos se interessaram bastante pela atividade e prestaram muita atenção quando o pesquisador explicou as regras. Juntamente com as crianças o pesquisador escolheu uma criança, de cada grupo, para iniciar o jogo, seguindo na seqüência horária.

Durante a distribuição das peças foi perguntado às crianças quantas "laranjinhas" elas haviam recebido. Todas realizaram a contagem, com as "laranjinhas" já colocadas nas árvores, e disseram que haviam recebido dez. Abaixo ilustramos algumas falas das crianças:

P1. "*Aqui na árvore tem dez laranjinhas*".

P2. "*Um, dois, três...*" (contando uma a uma até confirmar que havia dez).

Em um primeiro momento o pesquisador deixou que as crianças brincassem sem interferência alguma de sua parte. Ficou apenas observando o desenvolvimento do jogo.

Verificou-se que as crianças dos dois grupos compreenderam as regras do jogo e a seqüência de cada jogador. Quando uma criança jogava, as outras ficavam prestando muita atenção e verificavam se o jogador estava realizando a jogada de maneira correta. As crianças dos dois grupos contavam o número que havia saído no dado, na sua vez de jogar e na vez do colega, e prestavam atenção se o colega retirava a quantidade correta de "laranjas" da árvore, realizando a contagem junto com ele.

Observou-se, nos dois grupos, que, quando a criança retirava as "laranjinhas" da árvore, elas as contavam uma a uma enquanto colocavam-nas na cesta.

Quando a primeira criança terminou o jogo foi possível observar que ela tirou no dado o número exato de "laranjinhas" que faltava para terminar. Quando acontecia de alguma criança dizer que havia terminado, sem retirar o número exato de "laranjinhas no dado", notava-se que outras crianças do grupo a corrigiam dizendo que não havia saído o número correto e que ela deveria esperar a próxima jogada para tentar novamente. Vejamos algumas falas:

P6. "*Você tirou quatro e não dá pra ganhar ainda*".

P2. "*Tem que esperar pra sair mais laranjinhas*".

Em um segundo momento, após o término de uma das partidas, foi pedido para os alunos recomeçarem a jogar, mas agora com algumas intervenções do pesquisador que foi realizando algumas perguntas para os alunos no decorrer do jogo como:

- Quantas "laranjinhas" existem agora na sua árvore?
- Quantas "laranjinhas" há na cesta?
- Quantas "laranjinhas" você já tirou da sua árvore?
- Quantas "laranjinhas" ainda faltam para você retirar da sua árvore"?

Enquanto as crianças jogavam elas iam respondendo às perguntas, realizando a contagem um a um.

Percebeu-se que algumas vezes as crianças comparavam a quantidade de "laranjinhas" que ainda faltavam para ser retiradas da árvore. Segundo Kamii (2003) quando uma criança de quatro ou cinco anos diz que ela tem uma quantidade de objetos e o colega tem outra quantidade, não significa que ela está, necessariamente, comparando os conjuntos, pois, freqüentemente, essa declaração é apenas o resultado de uma contagem.

O jogo “Laranja na Cesta” utiliza o método de retirar o número de objetos que sair no dado, levando os alunos a construírem a noção de “tirar”, subtrair. Verificou-se que os alunos, com idade de cinco anos, não encontraram dificuldade de realizar a contagem, pois já sabem contar até dez.

Os objetivos do jogo foram atingidos sem dificuldades, verificando que durante todo o tempo ocorreu a troca de idéias entre os alunos, uns ajudando os outros em suas jogadas. Também foi possível perceber a grande interação social propiciada pela situação de jogo.

b) A aplicação do Jogo “Ao Pé do Fogo”

O jogo “Ao pé do Fogo” apresenta os seguintes materiais: 01 Tabuleiro de E.V.A. laminado cm PVC de 50 cm por 38 cm; 04 Marcadores; 02 Dados e 01 Copo para jogar dados.

O jogo tem como objetivos a construção do número, construção de antecipações de valor de quantidades e estimativas. Promove a interação do grupo. É um jogo indicado para crianças a partir de cinco anos de idade. Jogam até quatro crianças.

O desenvolvimento do jogo encontra-se a seguir:

- Depois de decidido quem iniciará o jogo, cada criança lança os dois dados, cada uma na sua vez. Somam os pontos das faces sorteadas e avançam nas casas.
- Se o jogador parar sobre a casa imediatamente anterior a uma das fogueiras, “Ao Pé do Fogo” ele terá que tirar, nos dados, na sua próxima vez de jogar, o número que corresponde a quantidade de lenhas desenhadas sob as chamas da fogueira e assim poder saltá-la.
- Quando o jogador cair dentro da fogueira ele terá que recuar tantas casas quantas forem às lenhas desenhadas sob o fogo.
- Será permitido ao jogador durante a partida, decidir se joga com 1 ou 2 dados para obter o número de pontos necessários para saltar a fogueira, sempre que achar mais conveniente.
- Para ganhar o jogo é preciso alcançar a CHEGADA no final da pista em caracol, mas isso só será possível se o jogador tirar nos dados, o número exato de pontos.

- Não conseguindo o número exato de pontos, ele passará sua vez para outro jogador. Para esta última jogada valerá também o item 4.
- Vence o jogo o jogador que alcançar primeiro a CHEGADA.

É importante ressaltar que o motivo de fazer a criança escolher se joga com um ou dois dados é proposital e possui o objetivo de incentivá-la a tomar iniciativas intelectuais, pois faz com que a criança pense, reflita e estabeleça algum tipo de critério para poder fazer a escolha.

A atividade ocorreu no quiosque e os grupos de crianças continuaram com a formação anterior, inclusive à ordem dos jogadores.

Após a entrega dos tabuleiros e dos materiais cada criança escolheu a cor do pino com o qual desejava jogar. Algumas crianças quiseram a mesma cor, mas elas próprias resolveram a questão, sem desentendimentos. A pesquisadora explicou as regras do jogo e em um primeiro momento deixou com que as crianças brincassem livremente.

Observou-se que as crianças respeitaram a ordem para jogar, esperando, cada uma, a sua vez. Os pinos foram colocados na casa da saída e a primeira criança, de cada grupo, iniciou a jogada.

Notou-se que todas as crianças reconheceram o número que saía no dado, porém ao percorrer as casas do tabuleiro elas pulavam casas ao contar ou contavam casas repetidamente, não parando nas casas certas. Quanto a esse fato, Kamii (2003) observa que é comum crianças pequenas contarem objetos saltando alguns ou contar o mesmo objeto mais de uma vez.

Às crianças se confundiam sobre como jogar quando paravam sobre, ou antes, da fogueira. Elas contavam às lenhas que havia na fogueira, mas não conseguiam se lembrar ao certo das regras. Nesse momento umas ajudavam às outras e o jogo ia prosseguindo, nem sempre de maneira correta. Esse fato ocorreu nos dois grupos e os alunos agiram da mesma forma.

Terminado o jogo a pesquisadora pediu para que eles iniciassem a jogada, auxiliando as crianças em suas duvidas. Novamente explicou as regras do jogo às crianças.

Quando um aluno realizava a contagem das casas de forma incorreta, a pesquisadora pedia para que ele contasse novamente, devagar. A maioria das crianças, ao contar novamente,

avançava o número correto de casas. Quando ocorria de uma criança, mesmo contando novamente, errar, os colegas a ajudavam a contar.

Foi pedido que as crianças prestassem atenção ao parar em cima da fogueira ou antes dela. Quando ocorria essa jogada as crianças pediam o auxílio da pesquisadora para saber se estavam jogando corretamente. Se elas não estivessem realizando a jogada corretamente a pesquisadora fazia com elas pensassem sobre a situação e as relembrava as regras do jogo. Os colegas também ajudavam. Para Piaget, é importante fazer com que a criança reflita sobre as situações-problema que enfrenta para poder raciocinar ativamente e construir o conhecimento. Nesse sentido, o professor deve assumir o papel de mediador ativo, criando situações desequilibradoras e incentivando as crianças a pensarem em possíveis soluções.

Quanto aos objetivos do jogo verificou-se que eles estavam sendo alcançados, mas com dificuldades, por ser a primeira vez que as crianças o jogavam. Acredita-se que com mais jogadas as crianças assimilem melhor as regras e se torne mais fácil o alcance dos objetivos.

Por meio dessa metodologia, foi possível constatar que as crianças desenvolveram, muito bem, alguns conceitos matemáticos alcançando os objetivos dos jogos de regras que foram trabalhados, como a contagem, o "colocar" e "tirar" (adição e subtração) e as possibilidades de realizar estimativas e antecipar-se.

Verificou-se que durante as dificuldades ocorridas no jogo "Ao Pé do Fogo", as crianças foram motivadas a pensar e a trocar idéias com os colegas e com a pesquisadora para saberem como iriam solucionar determinada situação, o que as levou a uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos em questão. Essa troca de idéias ressalta o pensamento de Piaget que estabelece que os jogos de regra apresentam a função de fazer com que o grupo interaja entre si, levando a uma cooperação e ao respeito mútuo.

Durante o desenvolvimento dos jogos foi possível observar que, por todo o tempo, as crianças se encontraram bastante motivadas e que ela estavam sempre atentas em suas jogadas e durante as jogadas dos colegas, participando ativamente de cada jogada.

Constatou-se, mais uma vez, que os jogos trazem grandes contribuições para o desenvolvimento e aprendizagem da matemática em crianças da pré-escola. Kamii e DeVries (1994) enfatizam que pelo divertimento as crianças são levadas a cooperar

voluntariamente umas com as outras e Brenelli (2008) ressalta a importância dos jogos de regras para a construção do conhecimento lógico-matemático.

V – Considerações Finais

Os jogos de regras são importantes recursos para se trabalhar as primeiras aprendizagens numéricas com crianças da pré-escola. Segundo Piaget os jogos de regras são caracterizados por um conjunto de "leis" impostas pelo grupo ou por um adulto, sendo o seu descumprimento avaliado como "trapaça". Tem um forte componente social e auxilia na interação entre os jogadores.

O jogo de regras pode e deve ser utilizado pelos professores da pré-escola como meios para o incentivo de determinadas aprendizagens. No caso da pesquisa que ora apresentamos os jogos tiveram o objetivo de desenvolver conhecimentos matemáticos como a construção do conceito de número, a contagem, operações aditivas e subtrativas, estimativa, antecipação, entre outros.

O estudo de caso reforçou o reconhecimento da importância da utilização dos jogos de regras para o desenvolvimento e aprendizagem da matemática em crianças da pré-escola, mostrando, mais uma vez, o interesse das crianças pelo jogo, levando-as à construção desses conceitos matemáticos e destacando o importante papel que o jogo desempenha na educação pré-escolar.

Em decorrência dessa análise, torna-se necessário levantar uma sugestão que contribua para a melhoria nas atividades com jogos no desenvolvimento e aprendizagem da matemática na pré-escola, propondo a utilização de jogos de tabuleiro, pois conforme verificado no estudo de caso, pode-se observar que as crianças se envolvem com esse tipo de jogo, interagindo com seus pares, trocando idéias e conhecimentos prévios e desenvolvendo conceitos matemáticos, aprendendo com seus erros e durante as jogadas dos colegas, observando que quanto mais jogavam mais se interessavam, por meio das descobertas realizadas em cada jogada.

Por fim, concordamos com Kamii (1991) de que a crescente capacidade de jogar em grupo é uma conquista cognitiva e social de grande importância que deve ser encorajada antes dos cinco anos e estimulada depois dessa idade.

Referências

Brasil. Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br>. Acesso em 23 jul. 2010.

Brenelli, R. P. *O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas*. 8.ª ed. Campinas: Papirus, 2008.

Dante. L. R. *Didática da Matemática na Pré-Escola*. São Paulo: Ática, 1991.

Godoy, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. In: *Revista de Administração de Empresas*. mar/abr. 1995, p.57-63.

Kamii, C. (2003). *A Criança e o Número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos*. Tradução de Regina A. de Assis. 30. ed. Campinas: Papirus.

Kamii, C. & Daclark G. (1985) *Reinventando a Aritmética: implicações da teoria de Piaget*. 2. ed. Campinas: Papirus.

Kamii, C. & Devries, R. (1991*) Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget*. Porto Alegre, Artmed.

Kamii. C. & Devries, R. (1992). *Piaget para a educação pré-escolar*. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J**.** (1990). *A formação do símbolo na criança*. 3. ed. Tradução de Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro: LTC.

Piaget, J. & Inheldeber, B.A. (1973) *A Psicologia da Criança*. 2.ed. São Paulo: Difusão Européia do Livro.

Wadsworth, B. J. (1989). *Piaget para o professor da pré-escola e 1ª grau***.** Tradução de Marília Zanela Sanvicente. 3. ed. São Paulo: Pioneira.

AS POTENCIALIDADES DE SEQUÊNCIAS DE TAREFAS NA APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO

Fátima Mendes[1]
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
fatima.mendes@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joana.brocardo@ese.ips.pt

Resumo

Apresentamos e discutimos alguns resultados preliminares sobre o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação de alunos de uma turma do 3.º ano, particularizando para uma das sequências. Estes resultados incluem-se num estudo que procura compreender como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajectória de aprendizagem. A análise das produções dos alunos e de episódios relativos às discussões colectivas revela que as características das tarefas – os seus contextos e os números utilizados, contribuem para a evolução de procedimentos multiplicativos, apoiados em relações numéricas e propriedades da operação. A análise evidencia, ainda, que o modo como as tarefas se articulam e sequenciam entre si sugere, a alguns alunos, o recurso a procedimentos potentes apoiados nas relações numéricas construídas.

Palavras-chave: Aprendizagem da multiplicação; Sentido de número, Tarefas matemáticas; Procedimentos dos alunos.

Introdução

As tarefas matemáticas assumem especial relevância quando se pensa a aprendizagem dos alunos na sala de aula (NCTM, 1991; ME, 2007; Stein, Remillard & Smith, 2007; Walls, 2005). A sua importância é justificada por Stein *et al*. (2007) dado que o tipo de tarefas propostas na aula influencia o modo como os alunos aprendem a pensar

[1] Projecto apoiado pelo Instituto Politécnico de Setúbal e pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (SFRH/BD/39016/2007).

matematicamente. Assim sendo, a selecção/construção de tarefas e a sua exploração na sala são actividades a que é necessário dar grande atenção.

As tarefas matemáticas, as suas características e potencialidades, são, entre outros, um aspecto central da investigação que efectuámos. Esta pretende compreender o modo como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajectória de aprendizagem.

A presente comunicação discute alguns resultados relativos ao contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. Foca-se numa sequência de tarefas, analisa os procedimentos dos alunos na sua resolução e inter-relaciona-os com os contextos, os números usados e a articulação e sequenciação das tarefas.

As tarefas matemáticas

A tomada de consciência sobre a importância das tarefas matemáticas no processo de ensino e aprendizagem tem suportado, nas últimas décadas, o desenvolvimento de estudos sobre a temática (Stein et al. 2007; Walls, 2005). De facto, segundo Stein *et al*. (2007) "as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em Matemática e como o aprendem" (p. 346). Além disso, considerando que a aprendizagem se deve focar nos processos de raciocínio e de pensar matematicamente, os currículos reflectem esta preocupação ao preconizarem abordagens pedagógicas baseadas, sobretudo, em tarefas matemáticas abertas e de resolução de problemas (Walls, 2005).

O entendimento de tarefa matemática é diversificado. Stein *et al*. (2007) assumem tarefa como "a actividade matemática na sala de aula cujo propósito é focar a atenção dos alunos numa ideia matemática particular" (p. 346). Associadas à ideia de tarefa surgem a sua construção e selecção, de acordo com a sua intenção. Alguns autores sugerem princípios para a sua selecção, uma vez que a tarefa "precisa de ser o veículo" pelo qual o professor explora a matemática com os alunos, num ambiente de inquirição (Watson & Mason, 2007).

Considerando-as um "contexto" para a aprendizagem (Doyle, 1988) as tarefas podem ter exigências cognitivas diferentes, de acordo com o tipo e nível de pensamento que suscitam: memorização, procedimentos sem e com conexões, e fazer matemática (Stein *et al.,* 2007). Os procedimentos com conexões focam-se na aprendizagem de processos

e de representações e pretendem promover a compreensão de ideias e conceitos matemáticos. As tarefas de fazer matemática não sugerem qualquer caminho e exigem a compreensão de conceitos matemáticos, de processos e de relações. No estudo realizado as tarefas inseriram-se nestes dois níveis.

As tarefas matemáticas na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número

Numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, Reys (1994) refere que as tarefas, sendo centradas nos processos, devem caracterizar-se por: (i) encorajar os alunos a pensar sobre o que vão fazer e a partilhá-lo com os colegas; (ii) promover a criatividade, a investigação e o uso de estratégias diversificadas; (iii) auxiliá-los a decidir o tipo de cálculo apropriado a cada situação; (iv) ajudá-los a compreender as regularidades da Matemática e as relações entre esta e o mundo real e (v) contribuir para uma visão dinâmica e desafiante da Matemática através da descoberta de relações.

Subjacente a esta perspectiva, há autores que veiculam a importância da exploração de contextos adequados (Fraivillig, 2001; Reys, 1994). Esta ideia-chave é retomada no caso particular da multiplicação, reforçando que a exploração de contextos apropriados faz emergir aspectos cruciais desta operação e do cálculo multiplicativo. O papel decisivo dos contextos e dos modelos subjacentes na aprendizagem da multiplicação justifica-se porque: (i) aqueles revelam aspectos basilares das estruturas multiplicativas associadas e (ii) permitem fazer uma primeira abordagem às propriedades da multiplicação, facilitando o cálculo associado (Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & Buys, 2008).

A selecção de contextos reveste-se, assim, de uma grande importância. Segundo Fosnot e Dolk (2001) estes devem integrar três componentes: (i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer "sentido" para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões. A primeira significa que as tarefas propostas devem incluir imagens ou situações que suscitem o uso de um determinado modelo. A segunda inclui dois aspectos: (1) as propostas devem ser situações reais ou imaginárias com as quais os alunos consigam lidar, analisar a razoabilidade do que fazem e dos resultados e (2) devem fazer "sentido" para a construção de estruturas e relações, que podem emergir do contexto. A última significa

serem interessantes e desafiantes, estimulando a vontade de explicar e de encontrar respostas a questões como *Porque é assim? Será que é? O que acontece se…?*

No estudo realizado propusemos tarefas cujos contextos têm as características enunciadas e, também, cadeias numéricas. Estas últimas, com contexto matemático, pretendem desenvolver um cálculo mental eficiente, realçando procedimentos associados a propriedades dos números e da multiplicação. A estrutura da cadeia, com propostas sequenciais e encadeadas, influencia os procedimentos dos alunos, uma vez que um certo cálculo se baseia noutro realizado na(s) linha(s) anterior(es) (Fosnot & Dolk, 2001).

Nesta comunicação analisam-se contextos associados ao modelo rectangular, uma das representações mais potentes que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo (Barmby *et al.*, 2009). São, também, usados números de referência (Fosnot & Dolk, 2001; McIntosh, Reys & Reys, 1992) de modo a suscitar o uso de determinados procedimentos de cálculo baseados nas suas propriedades e nas da multiplicação. Procedimentos são, neste estudo, o modo como os alunos manipulam os números, cuja estrutura matemática é determinada pela estratégia.

Metodologia

Este estudo baseou-se no desenvolvimento de uma experiência de ensino orientada por uma conjectura (Confrey & Lachance, 2000) numa turma do 3.º ano, com 23 alunos, durante um ano lectivo.

Os dados foram recolhidos na aula e o principal instrumento de recolha foi a investigadora[2] através da observação do ambiente natural, complementada por videogravações. Os dados são descritivos e incluem notas de campo, transcrições de episódios de aulas e produções dos alunos. A sua análise, de cariz interpretativo, realizou-se indutivamente.

No âmbito da trajectória de aprendizagem subjacente à experiência de ensino foram construídas e exploradas onze sequências de tarefas de multiplicação, considerando os objectivos de aprendizagem, as conjecturas sobre a aprendizagem dos alunos e a cultura da aula criada (Simon, 1995). As tarefas propostas são de dois tipos – problemas (ver exemplo em Anexo, subtarefas 1, 2 e 3 da tarefa 10) e cadeias numéricas (ver exemplo

[2] A primeira autora deste artigo.

em Anexo, tarefa 12), com propósitos distintos. A sua alternância foi pensada de modo a suportar uma compreensão aprofundada da multiplicação e das relações que lhes estão associadas. Pretendemos, assim, evidenciar procedimentos matemáticos poderosos mas, simultaneamente, estabelecer conexões com os mesmos procedimentos, que podem ter sido usados ou não, no contexto de um problema, já resolvido anteriormente. A diversidade de tipos de tarefas exploradas na aula implicou modos de organização da aula com algumas diferenças. As aulas de resolução de problemas foram organizadas considerando três fases distintas: introdução, exploração e discussão. Na fase de introdução a professora informava os alunos, de modo breve, sobre o que se ia passar nessa aula e explicava a organização do trabalho. Na fase de exploração os alunos resolviam os problemas propostos, individualmente ou a pares, de forma autónoma. Na fase de discussão, os alunos apresentavam os seus raciocínios sobre o problema em causa de acordo com uma ordenação sugerida pela professora. Apesar de serem seleccionados apenas alguns procedimentos para serem apresentados, todos os alunos eram convidados a intervir, solicitando esclarecimentos, colocando dúvidas ou comparando o seu procedimento com o do colega. Após cada discussão, a professora, conjuntamente com os alunos, fazia uma síntese do que considerava importante realçar depois do trabalho realizado. Alguns problemas originaram congressos matemáticos, na acepção de Fosnot e Dolk (2001). As aulas de exploração de cadeias numéricas seguiam de perto o preconizado pelos mesmos autores.

Para proceder à análise dos dados recolhidos, dado o seu grande volume, as tarefas foram organizadas segundo características comuns: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal. Cada um destes grupos inclui sequências de tarefas interligadas, dos dois tipos referidos anteriormente – problemas e cadeias numéricas.

A inventariação e caracterização dos procedimentos dos alunos na resolução das tarefas foram realizadas analisando as suas produções escritas. A evolução dos procedimentos e os aspectos do sentido de número manifestados nas suas resoluções foram analisados considerando, para além das produções escritas, as transcrições de episódios da aula associados a momentos de discussão colectiva da sua exploração.

O confronto entre as características das tarefas, a sua sequenciação e articulação e os procedimentos usados pelos alunos permitiu analisar o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. Para esta análise foi seleccionada a última sequência de tarefas de cada um dos grupos organizados. Esta selecção é justificada pois, apesar de nos centrarmos na última sequência, a sua análise permitir perceber, também, a evolução dos procedimentos dos alunos até esse momento da trajectória de aprendizagem.

Neste artigo focamo-nos no grupo de tarefas de multiplicação com números naturais. De forma a analisar e discutir o contributo das tarefas e sequências de tarefas, caracterizamos prévia e resumidamente, a última sequência de tarefas do grupo, relativamente ao contexto, aos números e ao modo como se articulam e sequenciam entre si.

Uma sequência de tarefas de multiplicação com números naturais: a sequência 4

A sequência 4 (ver anexo) é constituída pelas subtarefas 1, 2 e 3, incluídas na tarefa 10 – Pilhas de caixas e a tarefa 12 – Cadeias numéricas IV (três cadeias). O seu propósito é consolidar o uso de procedimentos multiplicativos, baseados nas propriedades da multiplicação e apoiados no modelo rectangular sugerido pelos contextos da tarefa 10.

Os contextos e os números

As subtarefas 1 e 2 da tarefa 10 envolvem um contexto de multiplicação baseado na disposição rectangular, veiculada através das figuras que as acompanham. Na primeira, a figura representa um conjunto de caixas empilhadas com um certo número de caixas em linha e em coluna, sugerindo uma disposição rectangular (em rigor, paralelepipédica) "perfeita". Na segunda, a figura apresenta, também, um conjunto de caixas empilhadas mas o número de caixas em cada linha ou coluna não é sempre igual. Em qualquer dos casos, cada caixa ("célula") representa um grupo (de 24 ou 48 maçãs) e não uma unidade simples. As situações apresentadas são familiares dos alunos uma vez que já tinham resolvido, anteriormente, tarefas em que era necessário calcular um determinado número de produtos de uma mercearia. Os números da primeira subtarefa – 25 e 24 e da segunda – 25 e 48, são de referência no cálculo mental com números naturais e já foram usados pelos alunos em cálculos anteriores.

A subtarefa 3 parte de uma situação próxima das anteriores mas tem um contexto de divisão no sentido de medida[3] e não inclui qualquer figura. Para a resolver os alunos têm de recorrer à solução da subtarefa 2, usando os números 1200 (solução anterior) e 24. A tarefa 12 é constituída por três cadeias numéricas, cujos cálculos multiplicativos incluem alguns factores anteriores, tais como 25, 24 e 48 e/ou produtos iguais a 600 e a 1200.

A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números

A tabela seguinte resume a articulação e a sequenciação entre os contextos e os números da tarefa 10 e os números da tarefa 12, que constituem a sequência 4.

Tabela 1 – A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números da sequência

Tarefas	Articulação e sequenciação entre os contextos e os números	
Tarefa 10 Subtarefa 1	Situação semelhante à das tarefas 1 e 2.	Números 25 (caixas) e 24 (maçãs de cada caixa). Obtém-se um produto igual a 600.
Tarefa 10 Subtarefa 2	Situação análoga à da subtarefa 1.	Números 25 (caixas) e 48 (maçãs de cada caixa). 48 é o dobro de 24. O produto obtido é igual a 1200, o dobro do anterior.
Tarefa 10 Subtarefa 3	Situação análoga à da subtarefa 1, em termos da situação mas apela à divisão (por medida).	Números 24 e 1200. 24 é usado na subtarefa 1 e é metade de 48. 1200 é a solução da subtarefa 2 e é o dobro de 600, o produto obtido na subtarefa 1.
Tarefa 12	Situação análoga à de outras cadeias numéricas anteriores.	Números 25, 50, 24, 48, das tarefas anteriores e outros cujo produto é igual a 600 ou 1200 (soluções das subtarefas anteriores).

A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da tarefa 10, pensada na construção da sequência 4, incluem dois aspectos: os associados à situação inicial e os relacionados com os valores numéricos. As situações iniciais são análogas entre si – referem-se a mercearias ou supermercados e solicitam o cálculo do número total de maçãs ou do número de caixas de maçãs sendo, também, semelhantes a outras anteriores. No que respeita aos números envolvidos nas várias subtarefas, estes estão relacionados entre si, por relações de dobro ou relações de metade.

[3] Neste estudo foram incluídas tarefas de divisão, privilegiando a sua relação com a multiplicação.

A tarefa 12, resolvida após a tarefa 10, relaciona-se com esta através dos cálculos propostos que incluem, por vezes, os mesmos números e/ou relações numéricas.
Apresentamos, em seguida, os procedimentos usados pelos alunos nas tarefas anteriores confrontando-os com os contextos e os números das tarefas e a sua articulação e sequenciação.

Resultados – Os procedimentos dos alunos nas tarefas da sequência 4

A tabela seguinte resume os procedimentos usados pelos alunos na resolução das subtarefas da tarefa 10, inter-relacionando-os com os contextos, os números e as articulações a vários níveis entre as subtarefas.

Tabela 2 – Os procedimentos dos alunos na tarefa 10 e a sua articulação e sequenciação

Tarefa 10	Procedimentos dos alunos		N.º alunos	Os procedimentos e a articulação e sequenciação das tarefas
Subtarefa 1	Com recurso à figura	Uso de múltiplos de 5	2	Todos os alunos reconhecem os contextos e os números de tarefas anteriores e calculam facilmente, recorrendo ou não à figura.
		Uso da compensação	2	
	Sem recurso à figura	Uso da decomposição decimal	18	
Subtarefa 2	Com recurso à figura	Uso da decomposição não decimal	4	Todos os alunos identificam o contexto análogo ao anterior e usam procedimentos multiplicativos, embora não potenciem a relação de dobro entre o 48 e o 24.
		Uso de múltiplos de 5	2	
	Sem recurso à figura	Uso da decomposição decimal	16	
Subtarefa 3	Uso da relação de dobro		12	Recorrem à subtarefa 1. Reconhecem a relação de dobro entre 1200 e 600 e calculam o dobro de um dos factores.
	Uso da relação dobro/metade		2	Recorrem à subtarefa 2. Reconhecem a relação de metade entre 24 e 48 e calculam o dobro do outro factor, visto que o produto se mantém.
	Multiplicar sucessivamente		2	Calculam a partir do seu conhecimento sobre os números envolvidos, embora não recorram às subtarefas anteriores.
	Incorrectos ou inexistentes		6	Não efectuam qualquer relação entre as subtarefas.

Na resolução das subtarefas 1 e 2, cujo contexto se baseia no modelo rectangular sugerido pelas figuras, todos os alunos usam procedimentos multiplicativos. Na resolução da subtarefa 3, cujo contexto é de divisão no sentido de medida, os alunos

utilizam, também, procedimentos multiplicativos, excepto seis que não a conseguem realizar.

Subtarefa 1. Nesta tarefa há dois pares de alunos que se apoiam na figura para calcular o número total de maçãs. Um dos pares recorre ao uso dos múltiplos de cinco – contam o número de caixas de uma coluna que representam e representam o número de maçãs respectivo por 5×24. Como têm cinco colunas, os alunos multiplicam a expressão anterior por cinco, registando este factor à sua direita (figura 1).

Figura 1 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 1 - tarefa 10

O outro par de alunos que recorre, também, à figura para calcular, pensa em grupos de dez caixas (duas colunas de cinco). Como a pilha de caixas tem dois grupos de dez e um grupo de cinco caixas, acrescentam, mentalmente, mais uma coluna de cinco e usam um procedimento de compensação, calculando 30×24 e subtraindo depois 5×24 (figura 2).

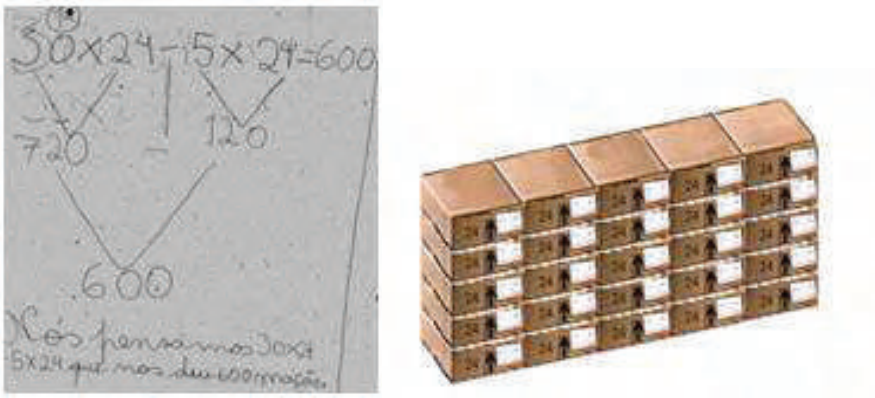


Figura 2 – Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 1 - tarefa 10

Os restantes 18 alunos usam procedimentos de decomposição do factor 24 e, aparentemente, não recorrem à figura para calcular 25×24. O facto de terem decomposto o 24 reforça a plausibilidade de terem calculado sem atender ao significado dos números, pois 24 representa o número de maçãs de cada caixa e, neste contexto, não é natural a sua decomposição. Estes alunos parecem ter usado a disposição rectangular

apenas para identificar os factores 25 e 24 do produto, decompondo depois o factor à direita, independentemente do seu significado.

Salientamos que, nesta altura da trajectória, estes 18 alunos estão já numa fase em que não precisam de se apoiar no modelo rectangular para calcular. Contudo, em tarefas anteriores a esta sequência 4, o recurso a este modelo foi fundamental para facilitar o uso e a evolução dos procedimentos multiplicativos da maioria dos alunos.

Subtarefa 2. Nesta tarefa três pares de alunos recorrem à figura para calcular. Um deles calcula o total de maçãs adicionando três produtos parciais (agrupamentos de caixas que visualiza na figura) – 12 caixas nas duas camadas inferiores, 10 caixas nas camadas intermédias e 3 caixas na camada superior – usando uma decomposição não decimal do factor 25 (figura 3).

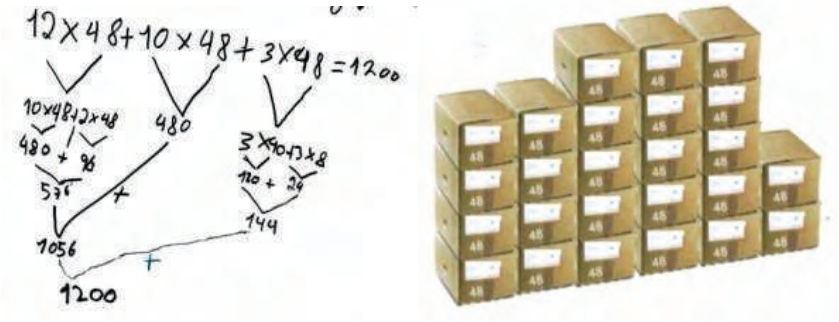


Figura 3 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 - tarefa 10

Um segundo par de alunos usa, também, uma decomposição não decimal, recorrendo a dois produtos parciais, visualizados a partir de um esquema que constrói, alterando a organização das caixas de modo a parecer um "rectângulo" (figura 4).

Figura 4 – Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 2 - tarefa 10

Finalmente, o terceiro par que se apoia na figura, recorre aos múltiplos de cinco, tal como anteriormente. Mentalmente, os alunos transformam a pilha de caixas de modo a

ter uma disposição rectangular, calculam o número total de maçãs de uma coluna e multiplicam por cinco.

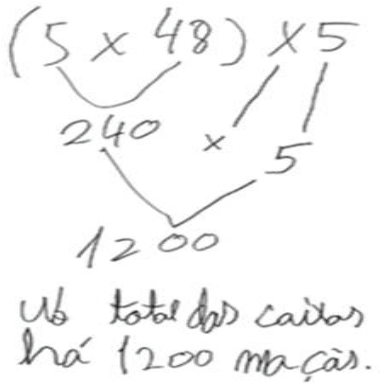


Figura 5 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 2 - tarefa 10

Os 16 alunos que não recorrem explicitamente à figura da subtarefa 2, usam procedimentos de decomposição decimal. Identificam o produto a calcular, provavelmente, "retirando" os números 25 e 48 do enunciado escrito. Dois pares calculam a partir de 48×25 (afastando-se do significado dos números no contexto) e decompõem o 25. Os restantes seis pares calculam a partir de 25×48, decompondo o 48 (exemplo na figura 6).

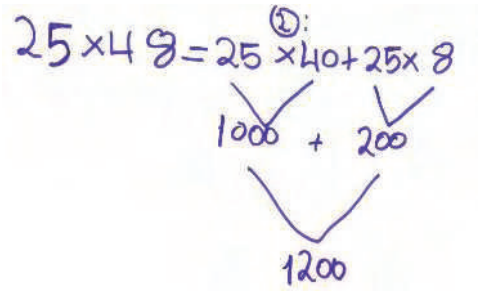


Figura 6 – Resolução de Rita e Patrícia da subtarefa 2 - tarefa 10

Estes 16 alunos, apesar de não recorrerem à figura, utilizam, contudo, procedimentos multiplicativos adequados baseados na decomposição decimal de um dos factores. Para a sua consolidação, contribuíram significativamente os contextos (baseados em disposições rectangulares) das tarefas anteriores e o conhecimento sobre os números de referência envolvidos, uma vez que esta sequência 4, em análise, é a última do seu grupo.

Na subtarefa 2, todos os alunos a resolvem através de procedimentos multiplicativos e relacionam o seu contexto com o anterior, mas não potenciam a articulação entre os seus números e os da subtarefa anterior, encarando-a individualmente. Por isso, nos seus

procedimentos, não usam a relação de dobro entre 48 e 24 (número de maçãs de cada caixa). Há dois tipos de justificação que podem estar na base desta não articulação: (i) as figuras incluídas em cada uma das subtarefas e (ii) o ter duplicado o número de maçãs por caixa e não o número de caixas.

Em primeiro lugar, a figura da subtarefa 2, diferente da anterior, pode ter dificultado o relacionar dos números das duas subtarefas, sobretudo para os alunos que se apoiaram na figura. Em segundo lugar, numa fase inicial, parece ser mais complicado identificar uma relação de dobro quando o que duplica é o número de maçãs em cada caixa e não o número de caixas, visto que alguns alunos ainda estão muito ligados ao significado dos números em contexto. Provavelmente, se se duplicasse o número de caixas e não o número de maçãs em cada caixa, seria mais fácil a identificação da relação, tal como aconteceu em tarefas anteriores do mesmo grupo ou em cadeias numéricas.

Subtarefa 3. Com um contexto de divisão por medida, há 12 alunos que a resolvem, ligando-a à subtarefa 1, usando a relação de dobro entre os números das duas tarefas. Apenas um par associa esta subtarefa à subtarefa 2, recorrendo à relação de dobro/metade entre os números envolvidos, como explicitam na discussão colectiva:

> Duarte: Nós fomos buscar o 25 ao segundo problema, pois nesse eram 25 caixas.
> Professora: E quantas maçãs tinha cada caixa nesse problema?
> Duarte: 48. E nós fizemos o dobro de 25.
> Professora: Porquê?
> Duarte: Porque 48 é o dobro de 24 e no super Girassol as caixas têm 24 maçãs. E fizemos 25 vezes 2 porque 25 eram as caixas do outro problema.
> Professora: Agora, era necessário o dobro das caixas?
> Duarte: Porque eram metade das maçãs em cada caixa.

Um outro par usa, sem efectuar registos de cálculos auxiliares mas explicitando-os na discussão colectiva, um procedimento de multiplicação sucessiva, até encontrar o número que, multiplicado por 24, é igual a 1200. Este procedimento relaciona-se com a sua facilidade em calcular com o factor 24, proveniente da sua experiência em tarefas prévias.

Ao contrário das subtarefas 1 e 2, que todos resolvem, na subtarefa 3 há seis alunos que não o conseguem fazer. Não estabelecem qualquer ligação com as outras subtarefas e esta dificuldade parece dever-se à complexidade do contexto de divisão e não aos números, que são os mesmos dos anteriores.

Tarefa 12. Nas cadeias numéricas, dadas as suas características particulares, os alunos recorrem facilmente a cálculos anteriores, inter-relacionando-nos. Reconhecem, ainda, alguns produtos das subtarefas anteriores, identificando procedimentos que poderiam ter usado. O episódio seguinte apresenta uma parte do diálogo que surgiu durante a exploração da segunda cadeia (ver anexo, tarefa 12).

A professora começou por registar no quadro 10×60, esperou que vários alunos levantassem o dedo no ar e solicitou a um deles a sua resposta.

> Leandra – É 10×60 ou 60×10, é 600.
> Professora – E agora? (regista o resultado e escreve por baixo 20×30).
> Duarte – 20×30 são 600. Porque são 20 vezes 10 vezes 3. E 20 vezes 10 são 200 e vezes 3 são 600.
> Bernardo – E também pode ser 10 vezes 30 mais 10 vezes 30 que são 300 mais 300.
> Raquel – É 600, porque é igual ao anterior! 40 é o dobro de 20 e 15 é metade de 30.
> Gustavo – Pode fazer-se também 40×10 mais 40×5. Dá 400+200 que são 600.
> Professora – E agora? (Escreve 20×60 e muitos braços se erguem no ar)
> Guilherme – É 1200 porque 60×10 é 600 e mais 60×10 é 600, por isso dá 1200.
> David – Eu pensei em 20×30 duas vezes.
> José – Dá 1200 porque é o mesmo que 40×30.
> Duarte – Pode fazer-se também 60×2 e depois vezes 10.

Considerações finais

Os contextos das subtarefas 1 e 2 da tarefa 10 (suportados pela disposição rectangular) e outros anteriores com as mesmas características parecem ter contribuído para que os alunos optem, neste momento da trajectória de aprendizagem (4.ª sequência de tarefas), por procedimentos multiplicativos de acordo com o referido por Barmby *et al*. (2009). Esta opção é diferente da tomada pelos alunos nas tarefas iniciais, em que usaram procedimentos de tipo aditivo. A diversidade de procedimentos usados na tarefa 10 é veiculada, também, pelos contextos. Todos os alunos que não recorrem às figuras das tarefas usam a decomposição decimal, um dos procedimentos mais potentes ao nível da multiplicação formal.

A facilidade com que os alunos calculam, independentemente dos procedimentos que usam, parece dever-se, também, aos números incluídos – de referência e com os quais já lidaram anteriormente (Fosnot & Dolk, 2001).

A escolha cuidadosa de contextos e a articulação e sequenciação das tarefas parecem ser ideias base fundamentais para que os alunos desenvolvam o seu conhecimento sobre a multiplicação. Como ilustramos no caso da sequência apresentada, quando os alunos não relacionam as tarefas com as anteriores (como na subtarefa 3, que envolvia a divisão), revelam mais dificuldade na sua resolução. Pelo contrário, quando vêem relações com as tarefas anteriores e quando conseguem usar modelos sugeridos pelos contextos, recorrem, de modo eficiente, a procedimentos multiplicativos revelando um conhecimento bastante sólido das propriedades da multiplicação.

Referências

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70(3),* 217-241.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*, 167-180.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fraivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics, 7*, 454-459.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12(3)*, 2-8 & 44.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 6 de Outubro de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.

Reys, B. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 1(2)*, 114-120.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(2)*, 114-145.

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics* (pp. 61-88). Rotterdam: Sense Publishers.

Walls, F. (2005). Challenging task-driven pedagogies of mathematics. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Eds.),

Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research (pp. 751-758).

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10(3-4)*, 205-215.

Anexo

Sequência 4

Tarefa 10 – Pilhas de caixas
Subtarefa 1

PILHAS DE CAIXAS

1. À Mercearia da Piedade chegaram caixas de 24 maçãs cada, embaladas como mostra a imagem.

As 25 caixas que chegaram foram arrumadas em pilhas como é indicado na figura.

No total das caixas, quantas maçãs há?

Tarefa 10 – Pilhas de caixas
Subtarefa 2

PILHAS DE CAIXAS

2. No supermercado do Bairro também há uma pilha de 25 caixas de maçãs. Estas caixas são maiores, cada uma tem 48 maçãs.

Neste supermercado, quantas maçãs estão guardadas nas caixas?

Tarefa 10 – Pilhas de caixas
Subtarefa 3

PILHAS DE CAIXAS

3. No supermercado Girassol há, no total, o mesmo número de maçãs que no supermercado do Bairro, mas em cada caixa estão embaladas apenas 24 maçãs.

No total, quantas caixas de 24 maçãs há no supermercado Girassol?

Tarefa 12 – Cadeias numéricas IV

CALCULAR EM CADEIA

50 × 10 =	10 × 60 =	12 × 50 =
25 × 20 =	20 × 30 =	24 × 50 =
25 × 4 =	40 × 15 =	50 × 24 =
25 × 24 =	40 × 30 =	25 × 48 =
50 × 12 =	20 × 60 =	50 × 48 =

A CONSTRUÇÃO DAS PARTES E A RECONSTRUÇÃO DA UNIDADE NA COMPREENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Marisa Quaresma
Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
marisa-quaresma@hotmail.com

Resumo

A construção das partes e a reconstrução da unidade são aspectos fundamentais da aprendizagem dos números racionais. Esta comunicação analisa o modo como uma unidade de ensino de natureza exploratória, coordenando o uso de diversas representações, proporciona a compreensão destas noções em alunos do 5.º ano. A metodologia é uma experiência de ensino, com base no estudo de caso qualitativo da aluna Leonor e também da turma. Os dados foram recolhidos em duas entrevistas e observação das aulas com registo áudio e vídeo e recolha documental. Antes e durante a unidade de ensino a aluna mostra assinalável dificuldade na reconstrução do todo no caso das grandezas discretas, nomeadamente quando estão envolvidas fracções impróprias. No final da unidade, mostra facilidade na construção das partes e na construção do todo tanto em grandezas contínuas como discretas, em situações envolvendo fracções próprias ou impróprias. Para isso parece ter contribuído sobretudo a articulação entre a representação pictórica e a representação em fracção, trabalhada em detalhe na discussão colectiva das tarefas. A abordagem exploratória usada na unidade de ensino e a comunicação desenvolvida na sala de aula parecem ter contribuído de forma positiva para a aprendizagem da aluna.

Palavras-chave: Números racionais, Parte-todo, Reconstrução da unidade, Representações.

Introdução

A construção das partes e a reconstrução da unidade pelos alunos são aspectos fundamentais da aprendizagem dos números racionais a que nem sempre se dá a necessária atenção. Monteiro e Pinto (2007) consideram mesmo que a conceptualização da unidade é um tema fulcral na compreensão das fracções, já que uma fracção tem sempre subjacente uma unidade. Contudo, para os alunos, esta conceptualização

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

representa uma grande dificuldade na aprendizagem dos números racionais, cuja origem se relaciona com o facto que um mesmo problema pode envolver diversas unidades.

Behr, Khoury, Harel, Post e Lesh (1997) referem que os currículos dão geralmente mais ênfase às tarefas de construção de partes de um todo do que às que requerem a reconstrução da unidade a partir das suas partes. Consideram que a inversão do processo de fraccionamento da unidade é importante porque a compreensão de um processo é maior quando os alunos são capazes de o reverter para voltar ao ponto de partida. Monteiro e Pinto (2005) também sublinham a importância da reconstrução da unidade a partir de partes, considerando que é da relação com uma grande diversidade de unidades que se desenvolve o sentido do número e dos símbolos que o representam.

Nesta comunicação mostramos como o trabalho de natureza exploratória realizado ao longo de uma unidade de ensino, utilizando tarefas de construção das partes e reconstrução da unidade, valorizando momentos de discussão colectiva, pode proporcionar maior compreensão dos números racionais em alunos do 5.º ano de escolaridade.

A construção das partes e a reconstrução da unidade

Ao descrever e modelar o conceito de número racional e as suas operações, Behr et al. (1997) consideram que a natureza da unidade que se transforma no processo de fraccionamento é de importância central. Estes autores referem que as unidades podem referir-se a grandezas contínuas (comprimentos, áreas, volumes, etc.) ou discretas (por exemplo, uma dúzia de ovos, 15 berlindes, etc.). Numa grandeza contínua, um objecto é composto por várias partes, sendo cada parte uma entidade única contínua ligada às restantes. Esta unicidade, continuidade e conectividade são conceptualmente bem evidentes para os alunos. Por outro lado, num conjunto discreto, cada uma das partes iguais pode ser composta por conjuntos de objetos não conexos.

Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) referem que inicialmente os alunos têm mais dificuldade em grandezas contínuas do que em discretas, porque nas discretas usam as estratégias de contagem que já conhecem, enquanto nas contínuas têm de usar estratégias de partição que ainda estão a desenvolver. Por exemplo, os alunos mostram mais facilidade em encontrar $\frac{1}{3}$ de seis berlindes divididos por 2 sacos do que em

encontrar $\frac{1}{3}$ de um círculo dividido ao meio. Em contrapartida, Behr et al. (1997) sugerem que o ensino das fracções deve começar pelas grandezas contínuas e ir gradualmente passando para as grandezas discretas. Mostram como na determinação de $\frac{2}{3}$ de 12 maçãs, os alunos precisam de pensar conceptualmente em 12 maçãs como uma unidade. Ou seja, os 12 objetos devem tornar-se uma entidade conceptual. Assim, é difícil para os alunos pensarem que cada terço corresponde a 4 maçãs e que dois terços são 8 maçãs.

Lamon (2002) considera diferentes tipos de unidades, nomeadamente simples e compostas. As primeiras são indivisíveis enquanto as segundas são agregados de objetos que têm existência em si mesmos – por exemplo, um *pack* com 6 garrafas de água mineral. Pelo seu lado, Post et al. (1993) afirmam que para serem flexíveis com o conceito de unidade, os alunos devem ser capazes de aplicar a composição, decomposição e os princípios da conversão das representações na resolução de problemas aritméticos, tanto aditivos como multiplicativos.

McCloskey e Norton (2009) descrevem diversos esquemas que os alunos usam na construção das partes e reconstrução da unidade, entre os quais: (i) parte-todo – identificar a unidade e considerar uma parte; (ii) partilha equitativa – construir a unidade, dividir e iterar qualquer parte para determinar ou identificar outra parte; (iii) fraccionamento partitivo da unidade – iterar uma dada fracção unitária para construir um todo; (iv) fracionamento iterativo – dividir o todo e iterar uma parte menor que a unidade para reconstruir o todo e (v) fracionamento reversível partitivo – conjugar a divisão e a iteração de um agregado de partes, para recriar o todo. Este quadro conceptual, elaborado originalmente por Les Steffe, constitui uma poderosa ferramenta de análise dos processos de pensamento dos alunos.

Metodologia

Experiência de ensino. Este trabalho tem por base uma unidade de ensino concebida a partir da conjectura geral de ensino-aprendizagem (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schaube, 2003) segundo a qual os alunos desenvolvem a sua compreensão da noção de número racional e da sua comparação e ordenação, bem como das operações com racionais e da resolução de problemas com racionais ao trabalharem simultaneamente as

várias representações, nos diferentes significados, com diferentes contextos e tipos de grandezas e em tarefas de natureza diversificada, como é esquematizado na figura 1. Neste trabalho damos especial atenção à construção das partes e reconstrução da unidade, aspectos importantes da compreensão da noção de número racional.

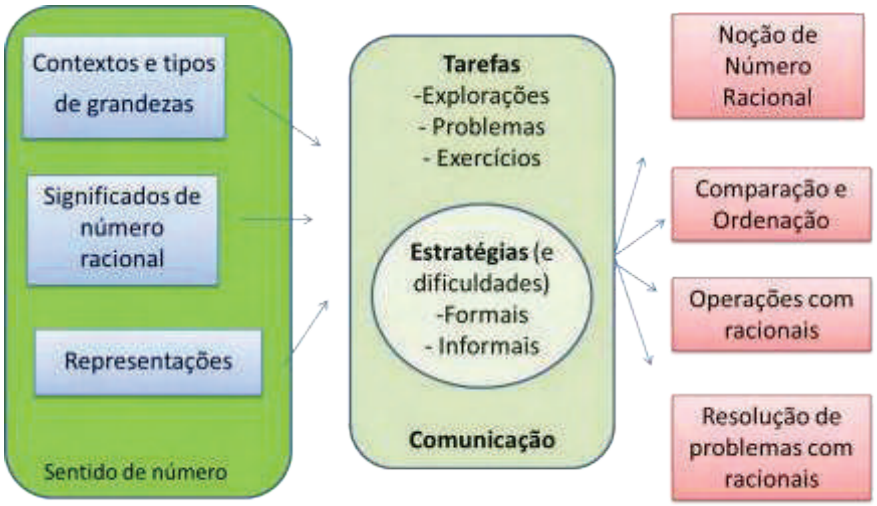


Figura 1 – Elementos para a construção de uma unidade de ensino para o ensino-aprendizagem dos números racionais

A elaboração da unidade de ensino tem por base as orientações curriculares do novo programa de Matemática (ME, 2007) e a literatura de investigação sobre os números racionais. Deste modo, procuramos: (i) enfatizar as relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, medida, quociente, operador e razão); (ii) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional (decimal, fracção, pictórica, percentagem e verbal); (iii) contemplar diferentes tipos de unidades e a respectiva construção; e (iv) reforçar as relações entre conceitos e procedimentos. Antes da planificação da unidade realizámos uma aula para diagnosticar os conhecimentos dos alunos sobre números racionais. Estes mostraram dificuldade na linguagem própria das fracções, dizendo por exemplo "segunda parte" para se referirem a um meio e evidenciaram algumas dificuldades na compreensão dos numerais decimais. Contudo, apoiando-se na ideia de divisão, mostraram bom desempenho na utilização de fracções unitárias como operadores. Assim, considerámos necessário trabalhar aspectos do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, como base para uma compreensão mais profunda das noções a estudar. A unidade tem subjacente um percurso de ensino-aprendizagem constituído por 7 fichas de trabalho (para uma descrição detalhada, ver Quaresma, 2010). Todas as tarefas

propostas têm uma característica comum – usar representações e significados diferentes, para que os alunos adquiram flexibilidade nas conversões e para trabalharem de forma integrada os diversos significados de número racional. Além disso, propomos tarefas de natureza diversa, incluindo explorações, problemas e exercícios. O trabalho com a construção das partes e do todo é realizado, em todas as fichas de trabalho, nos significados parte-todo, operador e medida. Inicialmente é dada maior ênfase à representação pictórica. Simultaneamente são propostas tarefas envolvendo fracções, para que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos e os formalizem. Trabalha-se com fracções impróprias, numerais mistos fraccionários e percentagens, como novas formas de representação, utilizando representações pictóricas como apoio para que os alunos visualizem as transformações realizadas.

Valorizamos as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, partimos das representações de número racional que eles já conhecem, nomeadamente a representação pictórica e em numeral decimal, para a partir daí introduzir, gradualmente, o trabalho com a representação mais formal em forma de fração. A introdução de novas representações não implica deixar de usar as anteriores, mas sim adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Além disso, procuramos que os problemas propostos envolvam, tanto quanto possível, contextos significativos para os alunos (Gravemeijer, 2005).

A realização das tarefas na sala de aula envolve sempre três fases: (i) apresentação e interpretação da tarefa; (ii) exploração pelos alunos; e (iii) a discussão colectiva e a síntese final (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). Na exploração das tarefas predomina o trabalho em pares. Os momentos de apresentação e interpretação e de discussão colectiva constituíram oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005).

Metodologia de investigação. Esta investigação tem uma natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), decorrendo no contexto da prática profissional da segunda autora, que assumiu simultaneamente os papéis de professora e investigadora. Apresentamos o caso de Leonor, uma aluna com bom desempenho em Matemática, que evidencia facilidade de raciocínio, usa diversas estratégias na resolução de problemas e tem boa capacidade de comunicação oral e escrita. Revela também bom desempenho no cálculo mental, usando com destreza as propriedades das

operações e relações entre números, sendo uma aluna muito participativa na aula, que gosta de novos desafios e que se mostrou entusiasmada com o estudo dos números racionais, constituindo, por isso, um caso de estudo potencialmente interessante.

Foram realizadas duas entrevistas a Leonor envolvendo tarefas matemáticas, uma antes e outra depois da unidade de ensino, tendo em vista conhecer a sua capacidade para lidar com o conceito de número racional, trabalhar com números racionais nas suas diversas representações, construir a parte, reconstruir a unidade e usar diferentes tipos de unidade. As entrevistas foram registadas em vídeo e áudio, sendo recolhidos e analisados os trabalhos escritos que realizou nas diversas tarefas.

Para além disso, fizemos também o estudo de caso da turma, no que respeita ao trabalho durante a unidade de ensino. Para isso, observámos as aulas realizadas durante a unidade, fazendo o respectivo registo vídeo. Procedemos à transcrição integral das discussões colectivas das aulas e das gravações das entrevistas. Nesta comunicação, para evidenciar o modo de trabalho nas aulas da unidade de ensino, usamos dados do estudo de caso da turma.

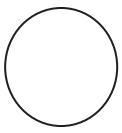
A análise de dados é descritiva e interpretativa. Todas as questões trabalhadas nas entrevistas e nas aulas foram analisadas procurando identificar situações relevantes do ponto de vista das estratégias e dificuldades de Leonor (bem como dos restantes alunos no decorrer das aulas) nos processos de construção das partes e reconstrução da unidade nas diversas representações de número racional. Nesta comunicação discutimos apenas aspectos relacionados com a construção das partes e reconstrução da unidade.

Compreensão da construção de partes e da reconstrução da unidade antes da unidade de ensino

Vejamos o desempenho de Leonor na primeira entrevista, em duas tarefas relativas à construção de partes e reconstrução da unidade.

Tarefa A1

Se a figura seguinte representar $\frac{1}{3}$ da unidade, desenha a figura completa.



Nesta questão, dada a parte, pede-se para construir a unidade, o todo. O contexto é puramente matemático, no significado parte-todo. A informação é dada simultaneamente na representação pictórica e em fracção. Nesta primeira tarefa da entrevista, a professora achou útil verificar como é que a aluna fazia a leitura da fracção:

> **Professora:** Lê em voz alta.
> **Leonor:** Se a figura seguinte representar um de três da unidade, desenha a figura completa. Está um pintado… São três e está um pintado.

Leonor faz a leitura da fracção de acordo com os termos que conhece para designar numerador e denominador. Para resolver a questão, a aluna começa por considerar a figura como a unidade. Tem lugar o seguinte diálogo:

> **Professora:** Quer dizer então que tens de dividir a figura em 3?
> **Leonor:** Sim.
> **Professora:** É assim que tu representas a figura toda?
> **Leonor:** Sim.
> **Professora:** Este círculo é um terço da figura, como é que fica a figura completa?
> **Leonor:** A figura toda são mais 3 bolas.
> **Professora:** São mais 3 bolas?
> **Leonor:** 3… Não 4… Não 3, tenho de acrescentar mais 2.
> **Professora:** Então temos de acrescentar mais 2 ou mais 3?
> **Leonor:** Não mais 2.
> **Professora:** Porquê?
> **Leonor:** Porque é um terço.
> **Professora:** E o que é que quer dizer um terço?
> **Leonor:** É uma figura e são 3… E está pintada 1

Perante a interpretação da aluna da figura como o todo, a professora pergunta-lhe se é assim que pode obter a "figura toda", e nesse momento a aluna percebe que, se se pede no enunciado para representar a "figura completa", a figura indicada tem de corresponder apenas a uma parte da unidade e altera o seu raciocínio.

Depois de perceber que a figura apresentada é apenas uma parte do todo, Leonor ainda mostra alguma confusão em relação àquilo que tem de acrescentar à figura. Começa por dizer que tem de acrescentar 3 bolas parecendo não estar a contar com a parte que já lá está. Depois, percebe que se juntar 3 bolas fica com um total de 4, o que não corresponde ao denominador da fracção. Por fim, reformula a resposta e conclui que apenas tem de acrescentar 2 bolas para ficar com um total de 3 e, dessas, 1 está pintada. A partir daí aplica os seus conhecimentos sobre fracções, em que o todo é o denominador e a parte é o numerador. Nesta situação a aluna aplica o esquema fraccionamento partitivo da unidade (McCloskey & Norton, 2009) e, apesar das dificuldades demonstradas, consegue fazer a iteração da fracção unitária para construir a unidade. No entanto, mostra bastante dificuldade em perceber a tarefa de reconstrução do todo no caso discreto, a partir de $\frac{1}{3}$. Note-se, porém, que noutra questão, consegue construir, com facilidade, $\frac{2}{6}$ de um todo contínuo.

Compreensão da construção de partes e da reconstrução da unidade durante a unidade de ensino

Apresentamos agora o trabalho realizado na turma, durante a unidade de ensino.

Tarefa B1

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

Nesta tarefa é pedido aos alunos que, a partir de uma parte de uma tira de papel, representem pictoricamente partes menores que a unidade e agregados de partes maiores que a unidade. Trata-se de uma situação contextualizada envolvendo grandezas contínuas nos significados parte-todo e operador. A informação é dada na representação pictórica e em fracção e a resposta é pedida na representação pictórica.

Como habitualmente, os alunos resolveram esta tarefa aos pares. Na discussão colectiva realizada na aula começam por intervir sobretudo André e Luís. Os alunos tentam explicar como seria a tira de papel completa:

André: Falta só um bocadinho …

Professora: Falta?

André: Dividia-se em 3, eu acho…

Professora: Isso quer dizer que ao todo temos quantas partes?

Luís: Tem 3 partes e depois divide-se esses 3 em 4.

André: Não! Este aqui divide-se em 3… E depois temos de acrescentar mais $\frac{1}{4}$.

Professora: Um todo quantos quartos tem?

André: 4.

Luís, inicialmente, mostra alguma confusão, acha que o todo tem 12 partes, porque multiplica o numerador e o denominador. Já André parece compreender que a tira não está completa, pois desde o início afirma que "falta uma parte", revelando entender que se trata de uma fracção própria. Percebe também que o numerador representa as 3 partes que estão na figura e que a figura completa tem de ter um total de 4 partes. De seguida, para representar $\frac{1}{2}$ da tira, os alunos optam por usar a tira já dividida em 4 partes, revelando compreender a equivalência entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

No que diz respeito à representação de $\frac{2}{3}$, alguns alunos mostram dificuldade em abstrair-se da divisão em 4 partes. Já para Leonor e Amélia, que trabalham em conjunto tendo produzido a resolução apresentada na figura 2, isso não é um problema, pois percebem que apenas têm de manter a tira completa e depois fazer as divisões de acordo com aquilo que é pedido. Estas alunas revelam ainda compreender a fracção no significado parte-todo e à vontade na conversão entre a fracção e a representação pictórica.

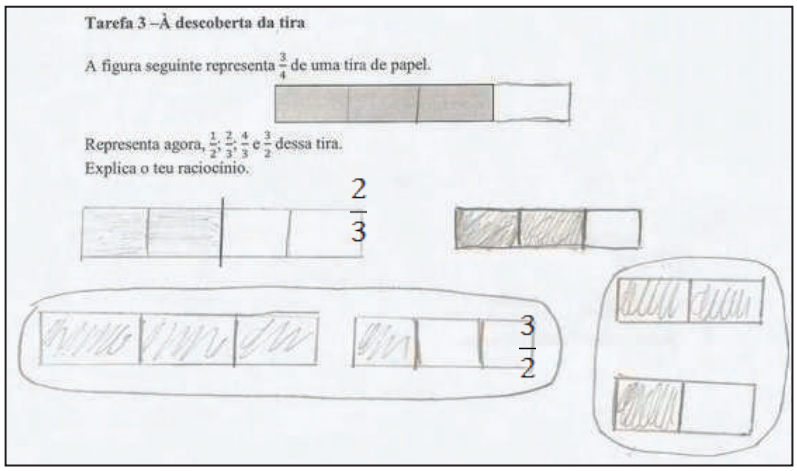


Figura 2 – Resolução da tarefa A1 por Leonor e Amélia

No que se refere às fracções impróprias, os alunos têm alguma dificuldade inicial em compreender como é que pintam mais partes do que as contidas numa unidade:

> **André:** Ó professora, $\frac{4}{3}$ é pintar a tira toda não é?
>
> **Professora:** Aqui pintámos $\frac{2}{3}$ e agora vamos pintar $\frac{4}{3}$. Quantas tiras são?
>
> **Luís e Francisco:** 5
>
> **André:** Não, são 2. Uma pintamos toda, e a outra pintamos só um bocadinho.
>
> **Marta:** Não estou a perceber.
>
> **Professora:** Então explica lá outra vez André.
>
> **André:** Então temos de fazer uma tira dividida em 3 e pintamos toda e depois ainda temos de fazer outra tira, dividimos também em 3 mas só pintamos mais um bocadinho.

André é um aluno muito empenhado e participativo e, nesta questão, mostra grande compreensão da fracção como parte de um todo, explicando ainda com clareza a noção que tem do todo. Depois desta primeira discussão envolvendo uma fracção imprópria, transfere com facilidade este conhecimento para a questão seguinte:

> **André:** Então professora um todo são 2 metades. Temos de fazer mais uma tira e pintar mais uma metade.

Nesta tarefa os alunos utilizam alguns do esquemas indicados por McCloskey e Norton (2009), para construir a unidade. Usando o esquema fraccionamento iterativo, primeiro dividem a parte apresentada $\left(\frac{3}{4}\right)$, que é menor do que a unidade, para encontrarem a fracção unitária e, depois, iteram essa fracção unitária para construírem o todo. Para construírem $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ da unidade e para representarem $\frac{4}{3}$ da unidade, recorrem aos esquemas parte-todo e partilha equitativa.

Tarefa B2

Se a figura representar $\frac{4}{3}$ da unidade, desenha o todo.

Nesta tarefa é pedido aos alunos que, a partir da figura apresentada, representem pictoricamente a unidade. Esta tarefa apresenta um contexto puramente matemático envolvendo grandezas contínuas nos significados parte-todo e operador. A informação é dada na representação pictórica e em fracção e a resposta é pedida na representação pictórica.

Apesar de, anteriormente, alguns alunos terem conseguido representar fracções impróprias, ainda aqui se registam dificuldades em representar a unidade a partir de uma fracção imprópria. É o caso de Leonor e Amélia que, em vez de retirarem $\frac{1}{3}$, acrescentam $\frac{1}{3}$, como se vê na figura 3.

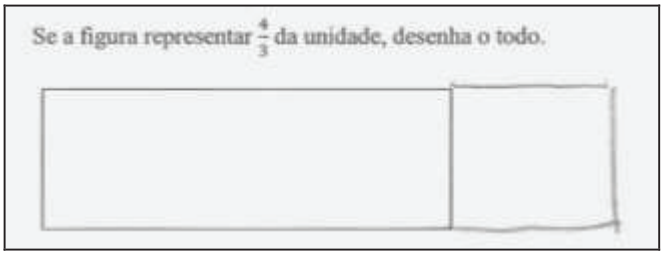


Figura 3 – Resolução da tarefa B2 por Leonor e Amélia

As alunas parecem ter transferido a estratégia usada na tarefa B1 para esta nova situação. No entanto, talvez por se tratar de uma fracção imprópria, não compreendem que o todo está contido dentro do agregado das partes. Não percebem que, neste caso, têm $\frac{1}{3}$ para além da unidade e que teriam de dividir a figura apresentada em 4 partes e pintar apenas 3. Mostram, assim, alguma dificuldade na utilização do esquema fraccionamento reversível partitivo (McCloskey & Norton, 2009).

Compreensão da construção de partes e da reconstrução da unidade depois da unidade de ensino

Por fim, apresentamos o desempenho de Leonor na resolução de tarefas relativas à construção de partes e reconstrução da unidade na entrevista realizada depois de terminada a unidade de ensino e no teste final.

Tarefa C1

1. Se a figura seguinte representar a unidade, pinta:

a) Um quarto

b) Dois terços

c) Cinco terços

Nesta questão é dado o todo e pedida a parte, surgindo nas alíneas a) e b) fracções próprias e na alínea c) uma fracção imprópria. O contexto é puramente matemático, no significado parte-todo, sendo a informação dada na representação pictórica e em linguagem verbal e a resposta pedida na representação pictórica.

A aluna não mostra qualquer dificuldade, tanto na representação de fracções próprias como no caso da fracção imprópria. Efetua a resolução indicada na figura 4 e explica:

> **Leonor:** Este são cinco terços, temos que acrescentar mas temos que dividir também em 3. Mas não chega, faltam mais. Vamos acrescentar podemos fazer outra barra com 3, dividimos também em 3. Aqui pintamos 3 (1.ª barra) e aqui (2.ª barra) pintamos mais 2.
>
> **Professora:** Porquê?
>
> **Leonor:** Porque aqui são 3 terços e aqui ($\frac{5}{3}$) já passa da unidade, temos que fazer outra barra igual e acrescentar mais 2 para chegar aos 5.

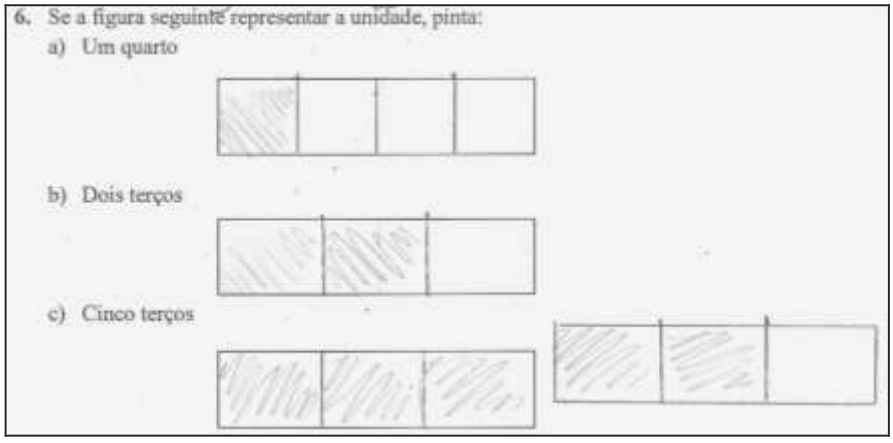
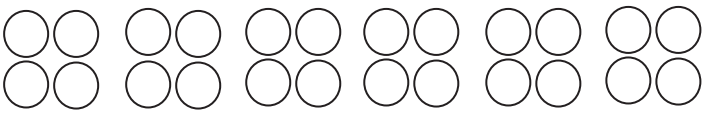


Figura 4 – Resolução da tarefa C1 por Leonor

Na alínea c), a aluna começa por desenhar uma segunda barra e, quando lhe é perguntado porquê, mostra prontamente que percebe o que está a fazer, pois refere que $\frac{5}{3}$ é maior do que a unidade e, por isso, tem de representar outra unidade igualmente dividida em 3 partes. Mostra perceber que, dada uma certa unidade, o denominador define o "tamanho" das diversas partes. Por fim, explica que tem uma unidade inteira que são $\frac{3}{3}$ e na outra unidade que desenhou devem estar os restantes $\frac{2}{3}$. Nas alíneas a) e b), a aluna utiliza o esquema parte-todo e na alínea c) usa o esquema fraccionamento reversível partitivo (McCloskey & Norton, 2009).

Tarefa C2

1. Se a figura seguinte representar 80% da colecção de berlindes do Luís, desenha ao lado a colecção completa dos berlindes do Luís.



Esta questão pede à aluna que, dada a parte, construa a unidade, o "todo". Trata-se de uma situação contextualizada, com grandezas discretas no significado parte-todo. A informação é dada simultaneamente na representação pictórica e em percentagem, a resposta é pedida na representação pictórica.

A aluna resolve esta questão com sucesso e, pelos registos apresentados (figura 5), começa por perceber que faltam 20% para o final e decide dividir 80% primeiro em

duas partes (e assinala 50%) e, depois, outra vez em duas partes iguais que representam os 20% em falta.

Figura 5 – Resolução da tarefa C2 por Leonor

Finalmente, acrescenta uma parte igual à encontrada (20%) e completa a unidade. Mostra assim à vontade na construção da unidade não só na representação em fracção, mas também na representação pictórica tendo por base a representação em percentagem, mostrando destreza na utilização do esquema partilha equitativa na construção da unidade (McCloskey & Norton, 2009).

Conclusão

Antes da unidade de ensino, em situações envolvendo fracções próprias, Leonor constrói com relativa facilidade partes de um todo em grandezas contínuas e discretas, e o mesmo continua a acontecer no final da unidade. No que respeita à construção do todo, no início da unidade, não mostra dificuldade no caso das grandezas contínuas, mas mostra no caso das discretas. Durante a unidade de ensino, a aluna continua a mostrar alguma dificuldade em tarefas de reconstrução do todo, nomeadamente envolvendo fracções impróprias (como na tarefa B2), tal como se verifica em muitas investigações (Berh e tal., 1997; Post et al., 1993). No final da unidade, mostra facilidade na construção das partes e na construção do todo tanto em grandezas contínuas como discretas, em situações envolvendo fracções próprias ou impróprias, utilizando com segurança os esquemas mentais descritos por McCoskey e Norton (2009).

Os principais elementos que parecem ter contribuído para a evolução da aluna são a articulação entre a representação pictórica e a representação em fracção, trabalhada em detalhe na discussão das tarefas, o que lhe permitiu aprofundar o conceito de unidade, nomeadamente no trabalho com fracções impróprias. A realização de tarefas envolvendo grandezas contínuas seguida de tarefas utilizando grandezas discretas revelou-se apropriada para o desenvolvimento da capacidade de reconstrução do todo a

partir da parte. Em termos gerais, a abordagem exploratória usada na unidade de ensino e o modo como se desenvolveu a comunicação na sala de aula, parecem ter contribuído de forma positiva para a aprendizagem.

Referências

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal of Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.*http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf*

Lamon, S. (2002). Part-whole comparisions with unitizing. In B. Litwiller & G. Bright (Eds): *Making sense of fractions, Ratios, and proportions* (pp. 79-86), Reston VA.

McCoskey, A., & Norton, A. (2009). Using Steffe's fraction: Recognizing schemes, which are different from strategies, can help teachers understand their student's thinking about fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(1), 44-50.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1992). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, L. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Learning, teaching, and assessing rational number concepts: Multiple research perspectives* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). (Disponível em http://repositorio.ul.pt/)

OS RACIOCÍNIOS DOS ALUNOS NA DESCOBERTA DE DÍZIMAS FINITAS*

UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DE UMA TURMA DE 9.º ANO

Cláudia Domingues
Escola Secundária de Caldas das Taipas
cmadom@gmail.com
Maria Helena Martinho
CIEd – Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo: O desafio de o actual programa de matemática do ensino básico, de desenvolver o raciocínio matemático como capacidade transversal, exige uma percepção aprofundada dos processos que ocorrem quando os alunos raciocinam. Assim, no âmbito da dissertação de mestrado, a professora investigadora, primeira autora do artigo, aplicou três tarefas de investigação numa turma de nono ano com o objectivo de melhor compreender como raciocinam os alunos e de promover o desenvolvimento desse mesmo raciocínio. Este artigo centra-se numa dessas tarefas, a tarefa *À procura de dízimas finitas*, que se inseriu no tema "Números reais. Inequações." Os registos dos alunos assim como as gravações de áudio e de vídeo foram analisados conjuntamente com todos os registos escritos da professora para proceder a uma análise interpretativa do caso dentro de uma metodologia qualitativa. Partindo da análise do processo de conjecturar verificou-se que a experiência de reformular as conjecturas, a partir dos contra-exemplos que surgiram, permitiu que aplicassem raciocínios mais complexos e que os raciocínios realizados se enquadraram nos padrões de raciocínio categorizados com base na investigação em educação matemática.

Palavras-chave: padrões de raciocínio matemático, tarefa de investigação, processo de conjecturar.

Introdução

A escolha do tema Raciocínio Matemático resulta de duas motivações profissionais: compreender melhor os raciocínios dos alunos e responder ao desafio de os desenvolver. O facto de o actual programa de Matemática do ensino básico enfatizar a promoção do desenvolvimento do raciocínio matemático como capacidade transversal e ser, ao mesmo tempo, um possível agente de mudança nas práticas de ensino-aprendizagem na sala de aula através da implementação de tarefas, ou de sequências de tarefas, justificam a pertinência deste tema (Brocardo, Serrazina, & Rocha, 2008; Ponte & Sousa, 2010).

* Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Com o objectivo de responder à questão "Como raciocinam os alunos quando descobrem a Matemática?" foram realizadas três tarefas de investigação numa turma de 9.º ano durante o ano lectivo 2009/2010.

Este artigo centra-se na análise e discussão dos raciocínios dos alunos na realização da tarefa "À procura de dízimas finitas" no que diz respeito ao processo de conjecturar.

Raciocínio matemático na descoberta:

Várias designações têm sido dadas, por diferentes autores, ao processo de descoberta tais como: *processo indutivo* por Polya (1968), *processo de experimentação* por De Villiers (2003), *processo de investigação* por Ponte, Brocardo, e Oliveira (2003) e *pensar matematicamente* por Mason, Burton, e Stacey (1985). Todas estas designações têm em comum o facto de descreverem um processo que permite uma envolvência activa, promovendo a descoberta aliada a uma compreensão da Matemática (Ponte et al., 2003; Mason et al., 1985; Polya, 1968).

Como refere Dreyfus (1991), a descoberta, apesar de demorar mais tempo, é uma forma eficiente de aprender matemática devido aos aspectos psicológicos envolvidos (o envolvimento pessoal, a intensidade da atenção, o sentimento de realização e de sucesso) e pelos processos de raciocínio desenvolvidos a longo prazo.

Uma conjectura, segundo Polya (1968), é uma afirmação geral que se pensa ser verdade, sendo a *generalização* o processo matemático fundamental na formulação de conjecturas. Generalizar é o acto de passar da consideração de um dado conjunto de objectos para um conjunto maior contendo os primeiros, o que envolve a percepção de regularidades e/ou fazer analogias com outra situação (Mason et al., 1985; Polya, 1968). A conjectura pode surgir por *analogia* quando se tenta resumir o aspecto em que há semelhança total ou parcial com outras situações ou questões já exploradas dependendo, assim, da experiência matemática que a pessoa tem (Polya, 1968).

Harel (2008) diferencia dois processos de generalização, em que o primeiro é empírico e o segundo é dedutivo: *generalização de padrão de resultados* (GPR) e *generalização de padrão do processo* (GPP). Exemplifica que, por GPR, provar que na sequência dos números pares a generalização da sequência 2, 4, 8,… é 2^n faz-se pela consistência dos resultados com a fórmula e por GPP prova-se que é 2^n demonstrando que o processo que gera esta sequência é a multiplicação repetida por 2.

O diagrama cíclico de Mason et al. (1985), na fig.1, é representativo do processo de conjecturar: formular conjecturas, testá-las com diferentes exemplos, tentar refutá-las com casos especiais (contra-exemplos), começar a ganhar um sentido do porquê de a conjectura estar certa ou como modificá-la reformulando-a ou formulando uma nova conjectura.

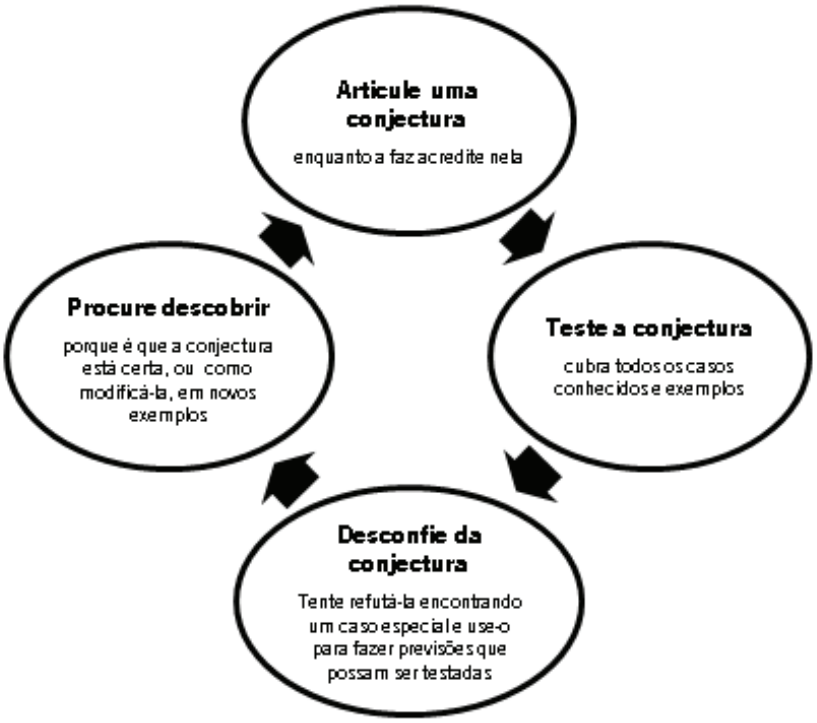


Fig. 1 – Processo de conjecturar de Mason, Burton, e Stacey (1985)

Ao longo do processo de conjecturar é importante a particularização que assume diferentes formas: escolher exemplos ao acaso para reunir evidências para a generalização e ajudar a interpretar a questão, escolher exemplos de forma sistemática aumentando a probabilidade de sucesso de encontrar padrões, e escolher casos especiais para testar a generalização (Mason et al., 1985; Polya, 1968). Segundo Reid e Knipping (2010) esta última forma de particularização é um raciocínio dedutivo pois geram-se casos específicos para testar uma generalização.

Lakatos (1999) apresenta, na discussão da conjectura de Euler, o uso de contra-exemplos, a que chamou de locais e de globais, durante o processo de prova de uma conjectura. Segundo De Villiers (2003), o contra-exemplo global verifica a premissa inicial mas não a conclusão, colocando em causa a validade da afirmação, enquanto o contra-exemplo local não é inconsistente com a conjectura desafiando um passo do raciocínio lógico ou apenas aspectos do domínio de validade da proposição. Em suma, a

apresentação de contra-exemplos pode ter várias implicações: a redefinição do conceito, a restrição do âmbito de aplicação da conjectura ou, ainda, a identificação de uma falha num passo do raciocínio do processo de prova (Watson & Mason, 2008).

O esquema apresentado por Davis e Hersh (1981), fig.2, do modelo simplificado de Lakatos, da heurística da descoberta matemática mostra o efeito do tipo de contra-exemplo no processo de conjecturar.

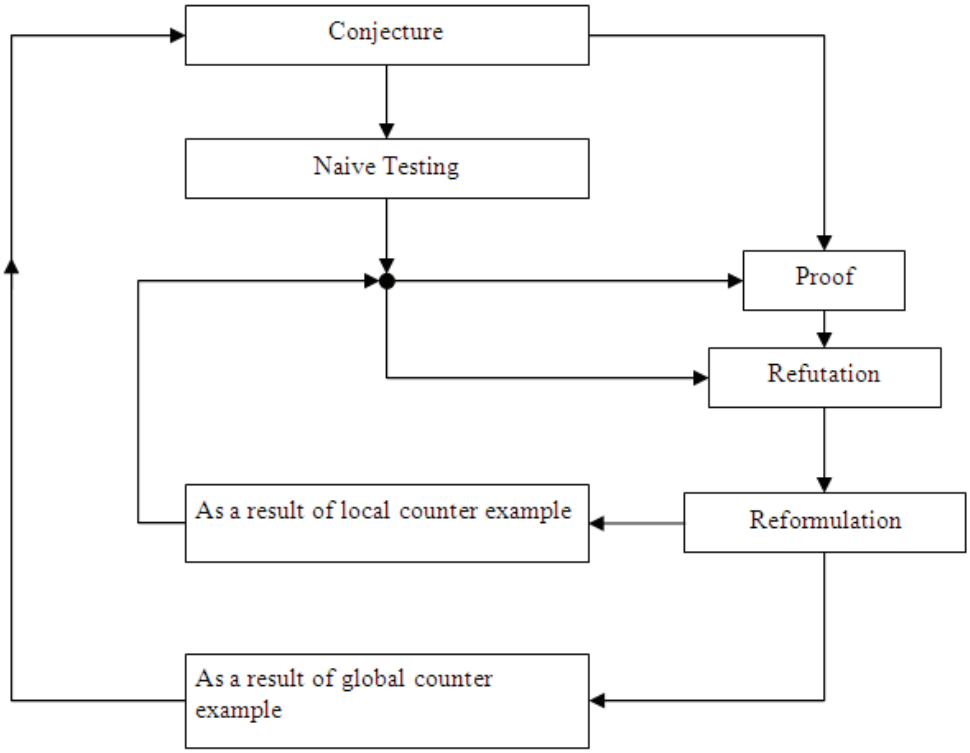


Fig. 2– Modelo da descoberta de Lakatos de Davis e Hersh (1981)

Em Lakatos (1999) a conjectura de Euler sobre os poliedros foi sendo reformulada barrando as excepções, restringindo o domínio das conjecturas e/ou o conceito de poliedro. Face a uma conjectura, declarar apenas que ela é falsa fecha o caminho da descoberta não permitindo progredir (Molina, 2001).

Goldenberg (1999) refere a importância de que o investigador desenvolva a capacidade de ver para além das aparências à procura de conexões lógicas.

No processo de descoberta podem estar envolvidos diferentes tipos de raciocínios e identificaram-se, através da investigação em educação matemática, três tipos de raciocínios como os mais importantes para ensinar e aprender a prova: o dedutivo, o indutivo, e a analogia. Reid e Knipping (2010) salientam ser por vezes difícil, ao

analisar o raciocínio, saber se foi feita uma analogia ao encontrar semelhança com outro caso ou se foi feita uma dedução. Com base nas investigações realizadas na educação matemática, Reid e Knipping (2010) sintetizaram os racíocinios que ocorrem durante a actividade matemática em cinco padrões de raciocínio, definidos como combinações de actos de raciocínio realizados individualmente ou em pequeno grupo: Dedução-conjectura-teste cíclico; Análise da Prova; Verificação científica; Rendição; *Exception* e *Monster Barring*.

O padrão de raciocínio que Reid e Knipping (2010) denominam de *verificação científica* segue a sequência de observar um padrão, conjecturar, testar, generalizar, deduzir e distingue-se do padrão de raciocínio *dedução-conjectura-teste cíclico* por iniciar com a observação de um padrão e não por uma dedução.

No padrão de raciocínio de *verificação científica* surgem outros dois, *Rendição e Exception e Monster Barring*, quando ao testar uma conjectura surge um contra-exemplo. A *Rendição* dá-se no caso de o contra-exemplo resultar na negação da conjectura: observação de padrão, conjecturar, testar, contra-exemplo, negação. No caso de se rejeitar o contra-exemplo duas situações podem ocorrer: o contra-exemplo é rejeitado por ser considerado um caso especial (*Monster barring*) ou a conjectura é reformulada de forma a excluir esses contra-exemplos (*Exception Barring*). O outro padrão de raciocínio é o de A*nálise da prova*, em que há uma falha no raciocínio e, para a localizar, se faz a revisão da conclusão. Lakatos (1999) chamou de "proof-analysis" ao processo de provas e refutações que ocorre na actividade matemática.

Objectivos do estudo e metodologia:

O objectivo do estudo é o de saber como raciocinam os alunos durante o processo de descoberta matemática. Através da análise do processo de conjecturar procuraram-se os padrões de raciocínio emergentes.

Esta investigação segue uma metodologia de estudo de caso interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). A investigadora e, simultaneamente, professora destes alunos foi observadora participante no estudo.

A recolha de dados realizou-se durante um ano lectivo numa turma de 9.º ano composta por 4 rapazes e 15 raparigas. A actividade dos alunos foi gravada em áudio, com um gravador por grupo, e a actividade de toda a turma foi gravada em vídeo através de uma

câmara fixa. Todas as tarefas foram realizadas em pequeno grupo e procuraram ser de investigação devido ao seu carácter mais aberto e de maior desafio.

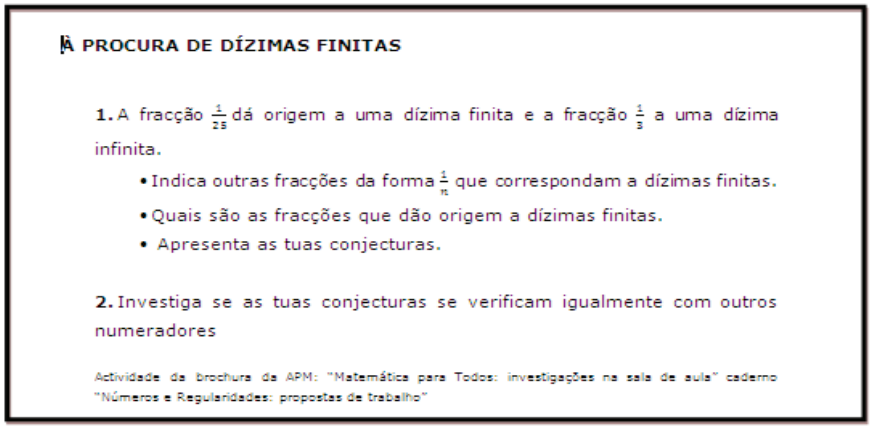
A análise do raciocínio dos alunos no processo de descoberta foi feita segundo as seguintes categorias: (i) Formulação e teste de conjecturas – análise da forma como os alunos conjecturam e como testam a conjectura. (ii) Reformulação de conjecturas – análise da forma como reformulam a conjectura. Foi considerada como categoria transversal o conhecimento matemático dos alunos por estar sempre presente e condicionar os raciocínios realizados.

Com base em episódios que ocorreram durante a actividade matemática dos alunos, organizados em pequeno grupo em duas aulas, serão aqui apresentados os diferentes tipos de raciocínio que emergiram.

Discussão de resultados:

O enunciado da tarefa (fig.3) remete para a particularização como forma de os alunos se envolverem e compreenderem a tarefa. Depois a questão "Quais são as fracções que dão origem a dízima finita?" orienta para a descrição das fracções de numerador 1 naquelas condições. Deparando-se com a impossibilidade de as escrever todas, iniciaram, então, a busca das propriedades que caracterizam estas fracções.

Os alunos esperavam encontrar rapidamente uma propriedade que caracterizasse os denominadores que originavam dízima finita (DF). Para seu desespero isso não aconteceu.



À PROCURA DE DÍZIMAS FINITAS

1. A fracção $\frac{1}{25}$ dá origem a uma dízima finita e a fracção $\frac{1}{3}$ a uma dízima infinita.

- Indica outras fracções da forma $\frac{1}{n}$ que correspondam a dízimas finitas.
- Quais são as fracções que dão origem a dízimas finitas.
- Apresenta as tuas conjecturas.

2. Investiga se as tuas conjecturas se verificam igualmente com outros numeradores

Actividade da brochura da APM: "Matemática para Todos: investigações na sala de aula" caderno "Números e Regularidades: propostas de trabalho"

Fig. 3 – Enunciado da tarefa

As primeiras conjecturas foram as mais triviais e a sua refutação ocorreu por facilmente encontrarem contra-exemplos. Foi o que sucedeu com a conjectura "O denominador será número primo?" refutada com o contra-exemplo da fracção com denominador 3.

Verificou-se que, inicialmente, os alunos usavam muito este padrão de raciocínio de rendição de Lakatos (1999), em que após a observação de um padrão, formulavam uma conjectura, testavam-na e face a um contra-exemplo negavam-na. O raciocínio a seguir descrito mostra como a rendição pode ser improdutiva no processo de descoberta.

O grupo da Maria conjectura sobre os denominadores serem múltiplos de 5 ou serem pares, enquanto observam a sua lista de particularizações na fig. 4 que originam DF:

> **M**: Em alguns [dos casos que são DF] o denominador é múltiplo de 5 e nos outros os denominadores são pares.
> **B**: Múltiplos de 5: 5, 10, …
> **M**: 1 sobre 15 também dá dízima infinita.

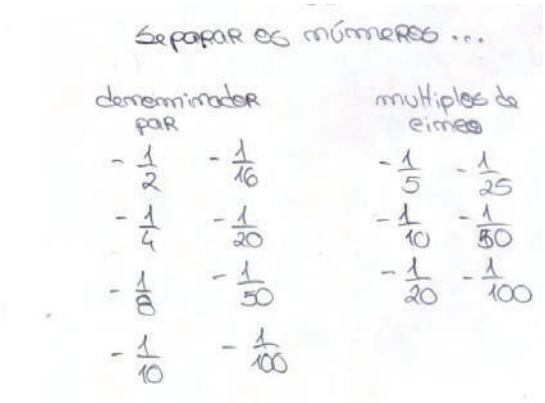


Fig. 4 – Denominadores pares ou múltiplos de 5

A conjectura foi registada por escrito como relativa apenas aos múltiplos de 5 e foi refutada com o número 15 como se pode observar na fig.5. No entanto, o contra-exemplo da fracção com denominador 15 alerta para a reformulação da conjectura através de um estudo mais aprofundado sobre as características dos denominadores múltiplos de 5 que originam DF. Este exemplo mostra que estes alunos não estão despertos para os efeitos de um contra-exemplo, o que é natural sendo a primeira vez que investigam.

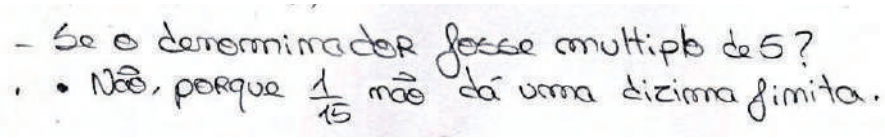


Fig. 5 – Conjectura múltiplos de 5

Num outro grupo, os alunos queriam testar potências de 10 mas consideraram os múltiplos de 10:

R: Podemos ver se os números terminados em zero são dízimas finitas. (…) Um a dividir por dez dá… Um a dividir por cem dá…, um a dividir por um também dá. Terminam em zero!
M: Alguns dão mas outros não, por exemplo a dividir por trinta não dá.

Esta conjectura nem chegou a ser registada pois foi refutada com o contra-exemplo da fracção de denominador 30. Este raciocínio de rendição não permitiu a reformulação da conjectura.

O grupo da Isa foi o primeiro a não se render face a um contra-exemplo revelando a capacidade de se questionarem e de aceitarem diferentes hipóteses. No entanto, ao procurarem outros denominadores que não originavam DF acabaram por conjecturar sobre os que originavam dízima infinita (DI). Testaram muitos denominadores, com ajuda da máquina de calcular, e encontraram semelhanças nos denominadores cujo algarismo das unidades era 9 ou 7, formulando as respectivas conjecturas:

G: Todos os [denominadores] 9,19,29,39 dão DI.
J: Podemos pôr isso.
I: Todos os números cujo denominador… Todas as fracções cujo denominador tenha o algarismo 9.

A conjectura formulada, fig.6, foi enunciada como restrita ao caso de o denominador ter algarismo das unidades 9, deixando em aberto a possibilidade de haver outros casos.

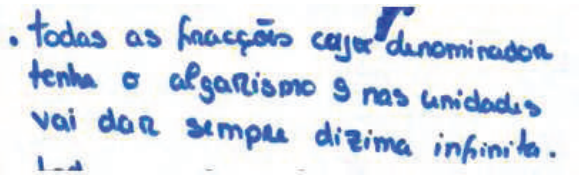


Fig. 6 – Conjectura do denominador terminar em 9

Chegaram a esta conjectura por, ao testar diferentes números, descobrirem um padrão que lhes permitiu generalizar. As alunas continuaram a investigação e descobriram a mesma propriedade para o algarismo das unidades 7.

I: É como no 7.
J: Faz 107 Um sobre 7,17,27,37,47,57,67,77 Também é.
No outro foste até quanto?
I: Até 100.

Registaram outra conjectura similar à primeira, agora para o algarismo das unidades 7, como se pode ver na fig.7.

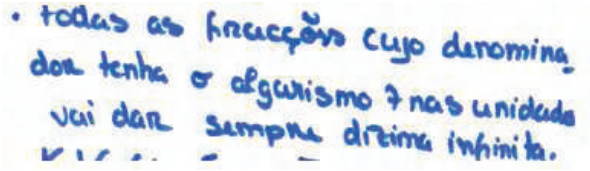


Fig. 7 – Conjectura denominador terminar em 7

O processo de conjecturar seguido por estas alunas está esquematizado na fig.8, onde se mostra a reformulação da conjectura 1 na conjectura 2 e a formulação das conjecturas 3 e 4.

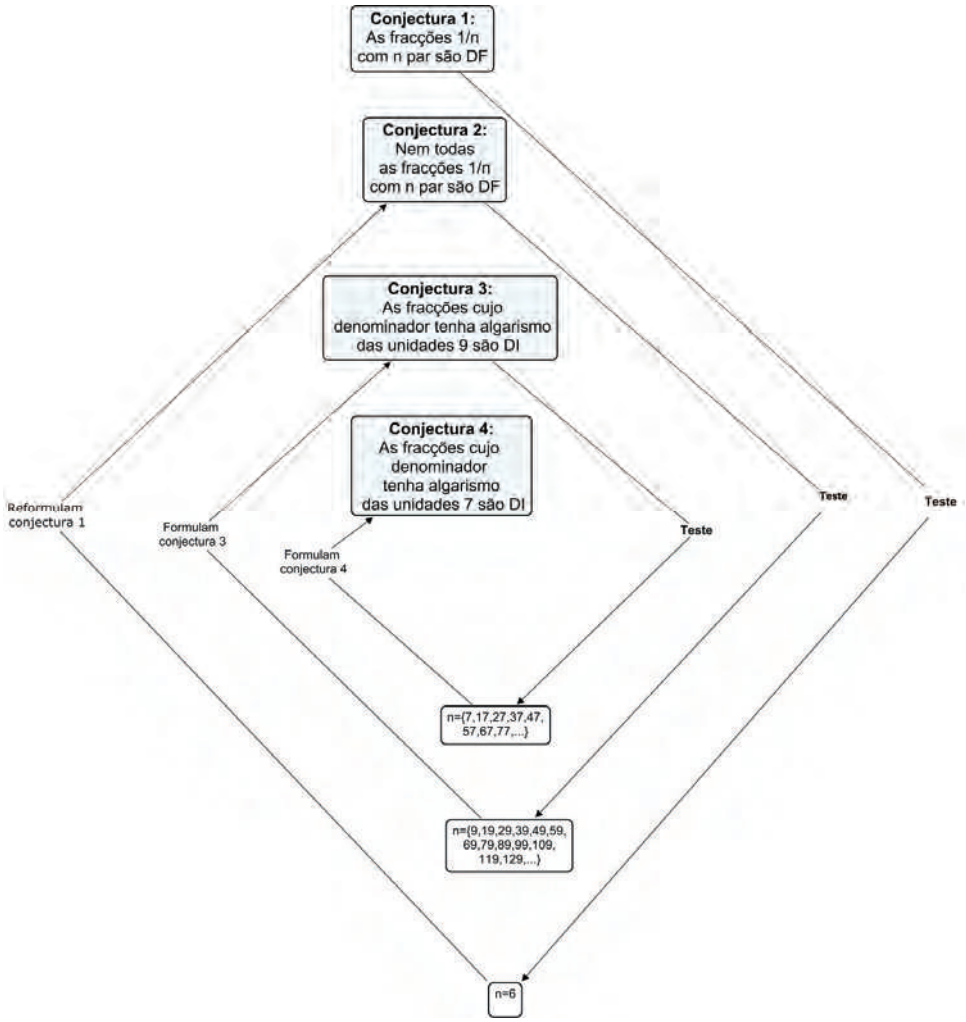


Fig. 8 – Esquema do processo de descoberta

Este grupo de alunos fez novas descobertas e a forma como o fizeram enquadra-se no padrão de raciocínio de *Verificação Científica*, pois foi pela observação de um padrão que formularam a conjecturas 3 e 4 generalizando para todos os casos naquelas condições.

A professora tentou ajudar os grupos a reformular as conjecturas tornando-as válidas num domínio mais restrito, como se exemplifica a seguir.

Vários grupos conjecturaram sobre a relação de dobro entre os denominadores. António dialoga com a professora sobre a relação de dobro que encontrou.

A: Mmm… Por exemplo aqui, stora: 5,10 dobro.
Prof: Já estás a procurar uma relação.
A: 4,8 dobro.

Outros elementos do grupo começam a observar casos em que se verifica essa relação:

> **S**: Olha esta: 10,20.
> (…)
> **A**: Já sei, já sei, já sei… um meio, dobro, um quarto; dobro, um oitavo. Depois um quinto, o dobro de um quinto, um décimo, o dobro um décimo um vinte [avos].

A professora tenta focar a atenção dos alunos para o facto da relação de dobro estar a ser estabelecida entre duas sequências diferentes.

> **D**: Fizemos este conjunto.
> **A**: Um meio, um quarto, um oitavo.
> **Prof**: Muito bem e agora para fazer uma regra que explique isso?
> **Todos** : Ei!
> **Prof**: O que é que estes números têm de especial? 2, 4, 8 e estavam a dizer que não passa pelo seis.
> **A**: São pares.
> **Prof**: Ele [o 6] não está aqui.
> **A**: Porque são potências: 2 elevado a 2, …

O aluno António explica ao grupo que aquelas fracções têm um denominador que pode ser escrito como potência de 2.

> **A**: As dízimas finitas são aquelas em que a base da potência é dois.
> **R**: O denominador.
> **A**: A base do expoente, a base da potência. Por exemplo, 2 elevado a 10 é 1024; um sobre 1024 vai dar uma dízima finita; não há nenhum período aqui.

Esta reformulação da conjectura, formulada como uma equivalência, barrou todos os denominadores que não são potências de 2 – *Exception Barring*. Os colegas questionaram-se sobre outros denominadores que originam DF.

> **A**: São aquelas em que a base é 2.
> **D**: E tem 5, tem 8, tem 10.
> **A**: Um sobre 5 dá 0,2.
>
> (…)
>
> **A**: Que era: as dízimas finitas são aquelas cuja potência a sua base é 2 e para um quinto não dá.

Nesta última frase o António constatou a existência de um contra-exemplo que põe em causa a sua conjectura. O processo de conjectura pode ser resumido pelo esquema apresentado na fig.9 em que a reformulação foi feita com ajuda da professora incentivando-os a observar o processo gerado pela multiplicação sucessiva pelo factor 2, ou seja, a generalizar por GPP.

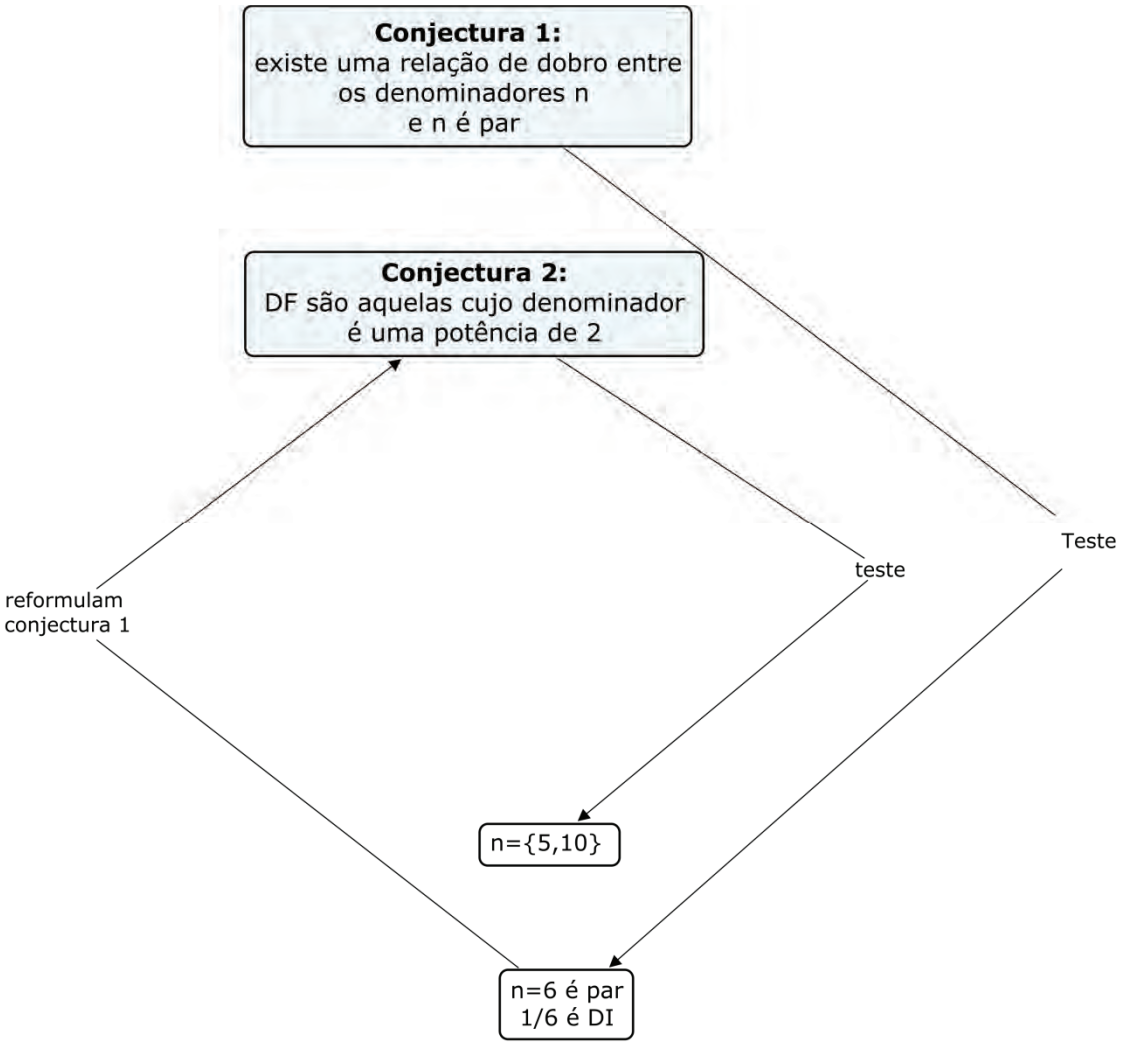


Fig. 9 – Reformulação da conjectura barrando excepções

Para continuar a descoberta era necessário resolver a questão dos contra-exemplos e a professora incentivou-os a procurarem outros denominadores relacionados com o 5. Ou tratavam os contra-exemplos como casos especiais – *Monster Barring* – ou os excluíam reformulando a conjectura – *Exception Barring*.

Prof: E porque não testam mais algumas?
A: Já testamos dois elevado a 10, um sobre 1024. Mas um quinto não dá.
Prof: Tentem encontrar outras relacionadas com as de um quinto.

Continuaram a procurar múltiplos de 5 iniciando um novo processo de conjecturar a partir da conjectura 1. Quando lhes surgiu o denominador 25 notaram, com surpresa, que origina DF e que não é o dobro de outro denominador.

S: Porque olha 25 não é o dobro.
A: Não é o dobro?
D: Mas 1 sobre 25 é uma DF.
S: Podemos é esquecermo-nos deste e passamos para este.
D: Não nos podemos esquecer porque tem que ser uma regra geral.

A Sofia propôs ignorar o contra-exemplo 25 por ser especial, tal como descrito no padrão de raciocínio *Monster Barring*, mas a Daniela não concordou por querer uma regra que inclua todos os casos.

Para que a investigação avançasse discutiu-se no grupo turma as conjecturas a que chegaram, permitindo que todos vissem um exemplo de reformulação de conjectura. Recorreu-se à decomposição dos denominadores em factores primos para identificarem as regularidades e progredir na investigação.

O grupo da Liliana continuou a investigação listando os denominadores múltiplos de 5, fig.10, e, ao procurar alguma relação entre os denominadores que eram DF, a aluna Liliana estabeleceu outra conjectura: "Aqui dá 0, 2… oh, espera e se nós puséssemos como nas potências de dois: $5^1 = 5;\ 5^2 = 25;\ 5^3 = 125, \ldots$ "

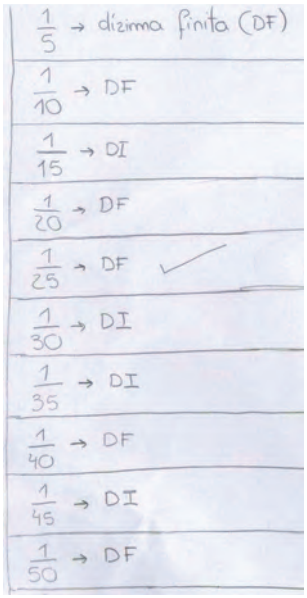


Fig. 10- Lista de múltiplos de 5

Esta conjectura parece ter sido formulada por analogia baseada no facto de, no outro caso, ter resultado. O grupo prossegue a exploração tentando ganhar convicção na conjectura (ver fig. 11).

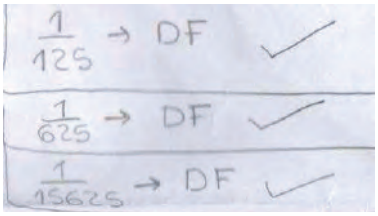


Fig. 11- Teste à conjectura potências de 5

Prosseguiram com a exploração da sequência 25, 50, 100 … a partir da decomposição em factores primos, fig.12, procurando regularidades.

L: Agora aqui…só falta o 25 e o 50 para descobrirmos todas.
P: 50 dá 2×5^2.

Continuam a particularizar observando a decomposição respectiva em factores primos.

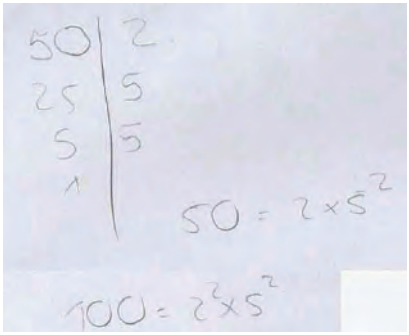


Fig. 12- Decomposição de denominadores

P: E o 100? Até pode ser que dê esta regra e a potência se altere.
L: Já reparaste Paula que à medida que o número fica maior vai aumentando a potência de 2?
P: Mas a de 5 mantém-se.
L: Mas a de 2 vai aumentando 1.

Os alunos estão no caminho de formular uma outra conjectura quando experimentam o denominador 250 que, note-se, não faz parte da sequência que estão a estudar, chegando à expressão 2×5^3. Observem-se os registos da fig.13.

L: Foi a potência de 5 que aumentou não foi a de 2.

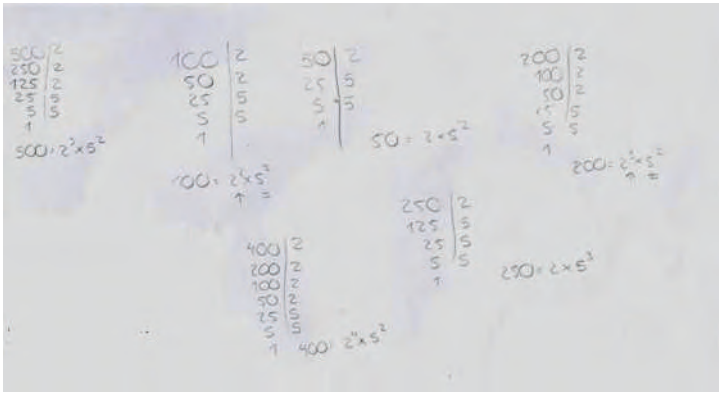


Fig. 13– Mais denominadores

Com base neste exemplo os alunos consideraram que a sua conjectura foi refutada. Iam render-se, negando a conjectura com base no contra-exemplo 250.

L: Então a nossa regra foi com o caneco.
M: Foi pelo cano abaixo.

Paula e Liliana em vez de se renderem reanalisam a situação:

P: Mas o 5 aumentou.
L: Mas nós estávamos a ver que o 2 aumentava e o 5 mantinha.

Liliana tem uma ideia:

L: Paula! E se for todos os números que têm 50 aumenta o 5 e o 2 mantém?
P: E se com 2 zeros o 5 mantém e o 2 aumenta 1.
L: 50. Se repararmos o 5 é que vai aumentar e o 2 mantém-se, mas se for com 2 zeros isto aumenta e o 5 mantém-se.

Decompuseram em factores primos outros denominadores da sequência que estavam a considerar, incluindo agora o 500 que se insere na sequência 125, 250, 500, … Acabaram por formular uma conjectura mais geral, representada na fig.14. Este processo denota uma revisão dos dados e reanálise da situação em que não chegam a encontrar a falha no raciocínio efectuado e descobrem um padrão mais abrangente. Esta reanálise que a Liliana faz é uma espécie de *análise de prova* pois faz uma revisão do processo que lhe permitiu reformular o raciocínio para todos aqueles casos.

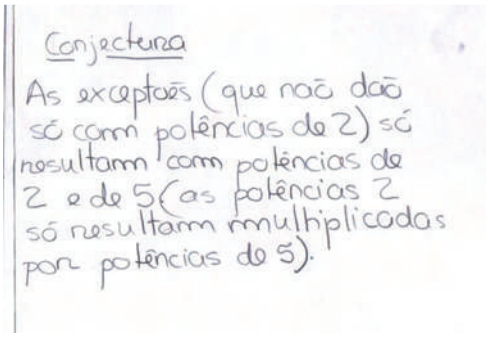


Fig. 14 – Conjectura final

Esta conjectura refere-se aos denominadores potências de 5 ou ao produto de potências de 2 por potências de 5.

Outro grupo, ao observarem as suas tabelas, fig. 15, 16 e 17, encontram regularidades nos expoentes dos números 2 e 5.

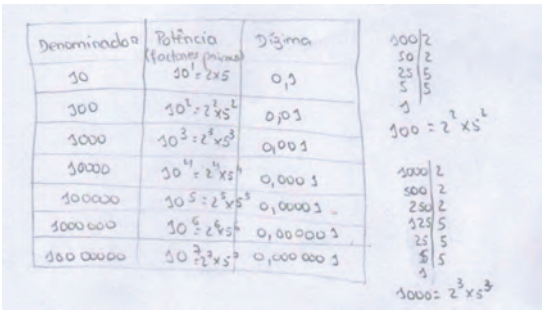


Fig. 15– Denominadores potências de 10

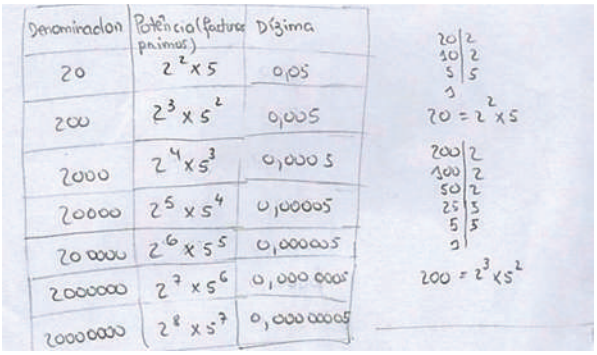


Fig. 16 – Denominadores dobro de potências de 10

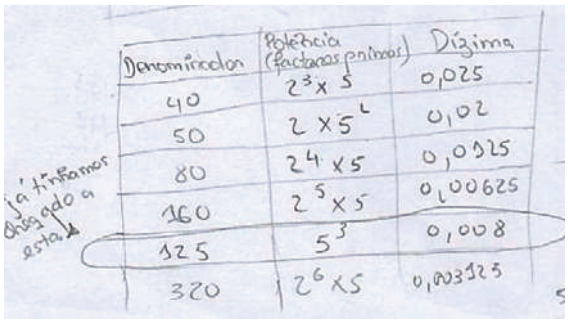


Fig. 17 – Organização de outros denominadores

Estabeleceram, a partir destes dados, a conjectura registada na fig. 18.

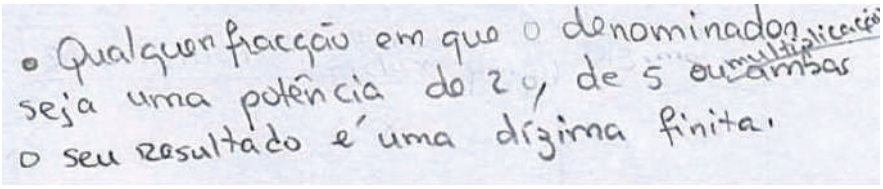


Fig. 18 – Conjectura final

Ao lado da conjectura final escreveram várias expressões gerais, fig. 19, para traduzir os denominadores que originam DF de acordo com as diferentes relações que os alunos identificaram.

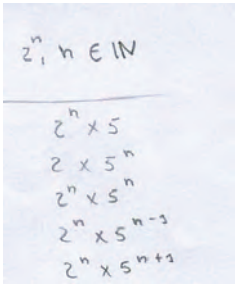


Fig. 19- Expressões gerais conjecturas

Faltou escrever a expressão do produto de qualquer potência de dois por qualquer potência de cinco necessitando usar duas variáveis: $2^a \times 5^b, a\ e\ b\ \in \mathbb{N}$.

O grupo da Liliana fez a interessante descoberta de regularidades nas potências, enquanto espera que os outros grupos concluam:

> **L**: Já reparaste que as potências de 5 dão sempre 5 e as com 2 dá "coiso". Juntamente com a outra regra as excepções dão os números pares multiplicam-se sempre por 5 e os números impares só dão com potências de 5.
> **P:** Olha este é ímpar mas este que multiplicado por 2 dá par.

A descoberta destas alunas é importante para o desenvolvimento do seu sentido do número. Revelaram a capacidade de encontrar uma regularidade e generalizaram-na.

Conclusões

O processo de conjecturar, vivenciado pela primeira vez por estes alunos, foi uma experiência de descoberta matemática importante que exigiu persistência ao longo do processo de conjecturar para reformularem as suas conjecturas através da aplicação de raciocínios mais complexos (Dreyfus, 1991) tais como, por exemplo: generalizar por GPP promovendo, assim, o raciocínio dedutivo (Harel, 2008); e fazer analogias apoiadas no enriquecimento da sua experiência matemática (Polya, 1968). A descoberta sobre a razão da paridade das potências, por um dos grupos, é reveladora do desenvolvimento da capacidade de notar e de generalizar (Mason et al., 1985) facto que revela como a oportunidade de descobrir lhes pode proporcionar "ver" para além das aparências e fazer conexões importantes (Goldenberg, 1999).

Em resposta à questão "Como raciocinam os alunos quando descobrem a Matemática?" pode afirmar-se que raciocinaram de acordo com os seguintes padrões de raciocínio: de rendição, de verificação científica, E*xception e Monster Barring*, de análise da prova e de analogia-conjectura-teste cíclico (Reid & Knipping, 2010). Salienta-se o facto de este último padrão de raciocínio iniciar por uma analogia, raciocínio que, tal como foi referido, pode ser confundido com uma dedução.

Relativamente ao conhecimento matemático esta tarefa permitiu aos alunos fazerem conexões sobre os números e as suas regularidades, melhorando o seu sentido do número.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática.* Lisboa: Escolar Editora.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Boston: Houghton Mifflin Company Boston.

De Villiers, M. (2003). The Value of Experimentation in Mathematics. *9th National Congress of AMESA* (pp. 174-185). Cape Town: In Proceedings.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-39). Dordrecht: Kluwer.

Goldenberg, P. (1999). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. In P. Abrantes, J. Pnte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part I: focus on proving. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* (40(3)), 487-500.

Lakatos, I. (1999). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* United States of America: Bembo.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* London: Addison-Wesley Publishing Company.

Molina, J. A. (2001). Lakatos como Filósofo da Matemática. *Episteme , 13*, 129-153.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. I). Princeton: University Press.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico. In G. G. Investigação (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do ensino Básico* (pp. 11-42). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching.* Netherlands: Sense Publishers.

Watson, A., & Mason, J. (2008). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples.* New York: Routledge.

ESTABELECENDO CONEXÕES ENTRE NÚMEROS RACIONAIS: O CASO DA PERCENTAGEM[1]

Hélia Ventura
Escola EB 2,3 Prof. João Fernandes Pratas – Samora Correia
Unidade de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
helialopes@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação decorre de um trabalho de investigação, centrado uma experiência de ensino no tema Números Racionais, com uma turma do 5.º ano de escolaridade, em que se procurou criar um contexto favorável ao estabelecimento de conexões entre as várias representações dos racionais, através de problemas e tarefas de natureza exploratória e do uso de modelos, principalmente a barra numérica.

Na presente comunicação procuramos analisar que conhecimentos sobre percentagem os alunos de um grupo possuíam inicialmente e como usam, posteriormente, no decurso da experiência de ensino, a percentagem para comparar números racionais numa situação de partilha equitativa, evidenciando já alguma flexibilidade para considerarem a representação que lhes é mais conveniente.

Palavras-chave: Racionais, Percentagem, Representações e Conexões.

1. Introdução

Este estudo surge num contexto de mudança, uma vez que o novo Programa de Matemática preconiza uma abordagem paralela às várias representações dos números racionais, e recomenda um ensino que abranja os vários significados das fracções ao longo dos primeiros anos de escolaridade (ME, 2007). As orientações curriculares do NCTM (2007) referem que é importante encorajar os alunos a trabalhar as diversas representações dos números racionais, e que devem ser-lhes dadas oportunidades para estabelecerem ligações entre elas. Procurando ir ao encontro destas orientações, foi delineada uma experiência de ensino com uma turma do 5.º ano, em relação à qual se procura analisar, na presente comunicação, a evolução de um grupo de alunos no que

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

diz respeito à sua compreensão da percentagem enquanto uma das representações de um número racional.

2. A Aprendizagem dos Números Racionais

A aprendizagem dos números racionais é um tema complexo, pelo facto de estes, sob a forma de fracção, contemplarem uma multiplicidade de significados (Lamon, 2006) e também devido às inúmeras áreas que o aluno tem de dominar para ter uma boa compreensão do sentido do número racional. Entre elas encontram-se: reconhecer a sua grandeza absoluta e relativa, trabalhar com valores de referência, compor/decompor números, a flexibilidade no cálculo mental e a capacidade de utilizar as várias representações dos números (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998).

2.1. As Representações

As representações são uma realidade da matemática e do ensino uma vez que ajudam a dar sentido à mesma, pois complementam o conceito que lhe está subjacente e ajudam na interpretação de outras representações (Ainsworth, 2006). No entanto, a utilização, por parte de um aluno, das diferentes representações de um mesmo conceito, não é comum. Ao invés, os alunos centram-se na que lhes é mais familiar ou concreta (Cox & Brna, 1995; Ainsworth, 2006). Dado que a representação não pode descrever plenamente uma construção matemática e que cada representação tem as suas vantagens, combinar as múltiplas representações para o mesmo conceito, além de estar no cerne da compreensão matemática (Duval, 2006), pode ter efeitos significativos na construção de um conhecimento coerente que permite aos alunos trabalhar perspectivas diferentes e com diferentes estratégias (Seufert, 2003). Deste modo, é importante que no ensino se explorem as várias representações dos racionais, para que o conhecimento dos alunos não seja redutor e compartimentado, conduzindo-os a uma série de dificuldades. O novo Programa de Matemática do Ensino Básico aponta justamente nesse sentido:

> Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações (…), e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. (ME, 2007, p. 9).

Muitas vezes, as conexões entre as várias representações dos racionais que recorrem a imagens ou símbolos favorecem a compreensão dos alunos (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). Deste modo, a utilização de material concreto "como tiras de papel que representem partes fraccionárias (…) fornecem aos alunos representações concretas de ideias abstractas, facilitando a utilização das representações com compreensão e a flexibilidade na conversão [entre elas]" (NCTM, 2007, p. 54). Torna-se assim importante que os conceitos matemáticos sejam, sempre que possível, introduzidos através de modelos.

2.1.1. A percentagem

O uso do modelo da barra, que pode ser uma extensão das tiras de papel, é uma estratégia de ensino que Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) preconiza para a aprendizagem das percentagens. Este modelo, sendo uma extensão de materiais que os alunos já utilizam (tiras e réguas), pode ser desenvolvido de forma a abranger situações mais complexas (Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen & Shew, 1998), facilitando a abordagem dos números racionais. Ao ser utilizado de forma flexível, permite estabelecer relações entre números racionais e como conexões entre as suas várias representações (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijer, 2008), uma vez que possibilita a utilização das diferentes representações em simultâneo.

No contexto sala de aula, as percentagens podem surgir em diferentes tipos de tarefas: a) conversões – alternar entre percentagens, fracções e decimais; b) exercícios: encontrar um dos três valores desconhecidos (15% de 120 = ___; __% de 120 = 18; 15% de __ = 18); c) sombreamento – sombrear uma porção de uma região contínua ou sombrear um número de objectos que representam uma determinada percentagem de um conjunto discreto de objectos; d) problemas – associado a descontos (Parker & Leinhardt, 1995).

De acordo com os autores, as percentagens são difíceis de ensinar e de aprender por, normalmente, se fixarem na relação parte todo e em percentagens de referência, entre outras razões. Uma vez que a percentagem está associada a uma relação, ela torna-se de difícil compreensão para os alunos porque eles tendem a compará-las sem ter em conta uma referência (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ou seja, quando digo que 20% da turma A e 25% da turma B são raparigas, não posso afirmar que na turma B existem

mais raparigas só porque 25 > 20, tenho de saber primeiro o número total de alunos por turma.

De acordo com Parker e Leinhardt (1995) os alunos revelam dificuldades em trabalhar com percentagens, sendo comuns três tipos de erros: a) ignorar o símbolo da percentagem – o aluno não distingue 10 de 10%; b) regra do numerador – o aluno substitui o símbolo "%" por uma vírgula à esquerda do número, o que o faz admitir que 50% = 0,5 e que 120% = 0,120 e o c) algoritmo aleatório – os alunos referem que 8 = 4% de 32, determinando o 4 através da divisão de 32 por 8.

Perante tais dificuldades com as percentagens, Lembke e Reys (1994) referem que os alunos só podem ter uma boa compreensão desta representação, se o ensino preconizar: "a) a existência da representação pictórica da percentagem; b) a flexibilidade em converter fracções, decimais e percentagens; c) a habilidade em utilizar percentagens de referência (…); d) a aptidão de efectuar cálculo mental (…) com percentagens e e) a capacidade de verificar a razoabilidade das respostas" (p. 241).

3. Metodologia

A metodologia adoptada neste estudo é de natureza interpretativa, uma vez que se pretende realizar uma análise qualitativa das estratégias seguidas pelos alunos, recorrendo à análise dos seus registos escritos como principal estratégia de recolha de dados. O *design* escolhido para esta investigação foi uma experiência de ensino, no contexto da qual se recorreu à construção de um estudo de caso colectivo. Este estudo de caso é constituído por quatro alunos (Aida, Cristiano, Dinorah, Mariana) cuja sua selecção teve em conta a diversidade relativamente: a) aos níveis obtidos num teste inicial; b) ao género; c) aos níveis obtidos no final do 1.º período. Além disso, pretendíamos que no grupo existisse boa comunicação, partilha de ideias e que não se antevisse a existência conflitos entre os seus elementos.

O teste inicial foi aplicado à totalidade da turma (16 alunos), individualmente, com duração máxima de 90 minutos, antes de se iniciar o estudo dos Números Racionais. Incidiu sobre as várias representações e na resolução de problemas simples com números racionais, para averiguar os conhecimentos dos alunos neste tema.

A partir dos resultados obtidos neste teste foi delineada uma experiência de ensino, alicerçada num conjunto de tarefas de natureza exploratória que promovem as conexões

entre as várias representações dos racionais (fracção, decimal e percentagem) e que favorecem o uso de modelos, principalmente a barra numérica. Estas tarefas baseiam-se em situações do dia-a-dia, para que os alunos pudessem estabelecer uma ponte com os seus conhecimentos informais e, desse modo, atribuírem significado aos números racionais nas suas várias representações (Van Galen et al., 2008). As tarefas eram realizadas em grupo, após o que a professora dinamizava uma discussão com toda a turma, onde eram apresentadas as estratégias seguidas, seguindo-se uma síntese com orientação da professora. A experiência de ensino iniciou-se com uma tarefa sobre partilha equitativa de chocolates, onde foram facultadas tiras de papel, para simular as tabletes, que os alunos interiorizam como uma barra numérica. Posteriormente as tarefas percorreram todos os outros significados das fracções e, tal como na 1.ª tarefa, promoviam a utilização das suas várias representações em simultâneo, estabelecendo-se relações de equivalência entre elas.

No decurso da experiência de ensino, o grupo estudo de caso (tal como outros grupos) recorreu à barra numérica em diversas tarefas, usando diferentes representações dos números racionais. Por exemplo, na tarefa 5, que envolve uma situação de medida, os alunos tinham de marcar na barra numérica determinadas distâncias percorridas por alunos numa pista de atletismo com 100m, conforme se pode ver na Figura 1.

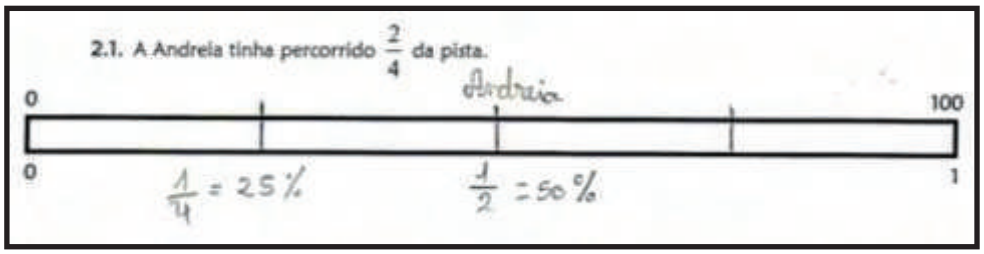


Figura 1 – Resolução do grupo à questão 2 da tarefa 5.

Este é um dos casos, ao longo da experiência de ensino, em que os alunos assinalam na barra não só as fracções mas também as percentagens correspondentes, expressando a equivalência entre os dois tipos de representação.

Na presente comunicação iremos analisar a tarefa 6, para ilustrar como os alunos recorrem à percentagem para comparar números racionais numa situação de partilha equitativa, evidenciando já alguma flexibilidade para usar a representação que lhes é mais conveniente. Procuramos também dar conta do ponto de partida dos alunos no que

diz respeito aos conhecimentos que tinham da percentagem, antes da experiência de ensino, através da análise de duas questões do teste inicial.

4. Compreensão da Percentagem Antes da Experiência de Ensino

As questões do teste inicial que envolviam percentagens, são basicamente conversões e sombreamentos (Parker & Leinhardt, 1995).

A questão 8 é uma tarefa do tipo "sombreamento", onde três dos alunos do grupo não revelaram dificuldades. Era solicitado que pintassem 20% de uma figura, o que correspondia à pintura de 2 luas, resposta que foi dada por Cristiano, Aida e Mariana, mas não por Dinorah (Figura 2).

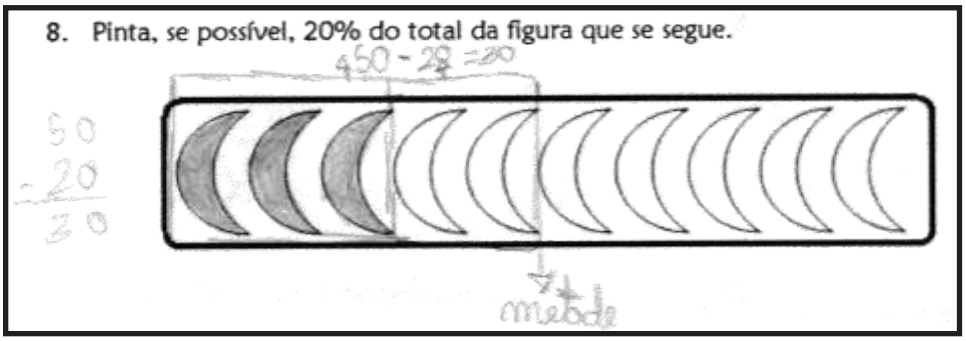


Figura 2 – Resolução da Dinorah à questão 8 do teste inicial.

Nesta questão Dinorah tenta encontrar 20% da figura, identificando primeiro a metade da mesma (50% = 5 luas) e, posteriormente, assume que cada uma das luas vale 10%. Contudo, apesar de ter pintado três luas (representam o resultado da subtracção entre 50% e 20%), indica com uma seta que 20% são duas luas.

Na questão 9 do teste inicial, que contemplava conversões entre as várias representações, conseguimos verificar, por parte de Cristiano, alguns erros referidos por Parker e Leinhardt (1995) – Figura 3.

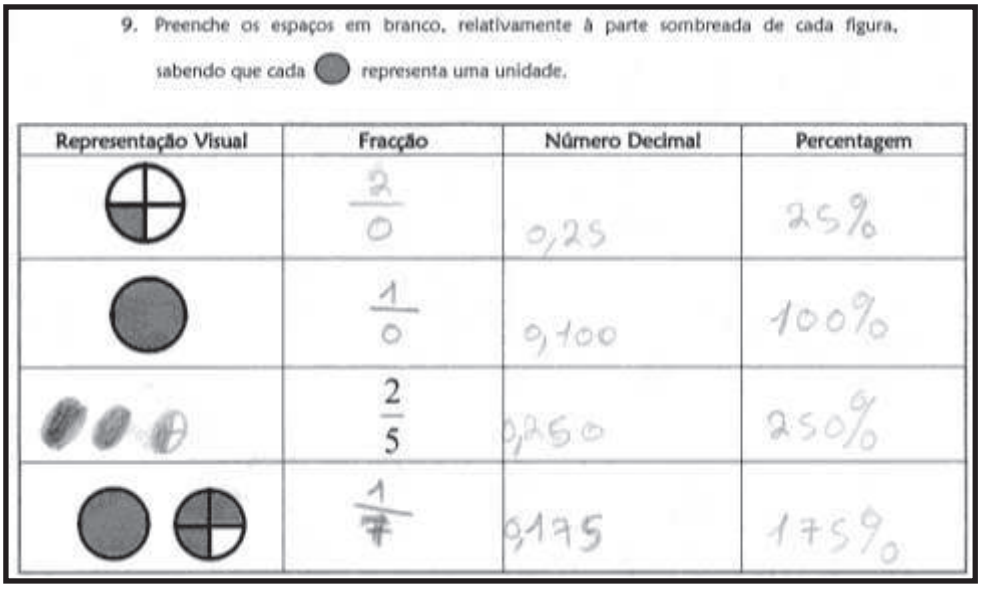


Figura 3 – Resolução do Cristiano à questão 9 do teste inicial.

Apesar de o aluno ser bem sucedido nas conversões para valores inferiores à unidade (100%), o mesmo não acontece perante percentagens iguais ou superiores a 100%. Nestas situações, comete o erro da "regra do numerador" (Parker & Leinhardt, 1995), uma vez que admite que o símbolo % pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número, o que nas situações iguais ou superiores a uma unidade o conduziu a representações erradas. Relativamente aos outros alunos, perante a mesma questão, é de salientar que a Mariana respondeu correctamente a todas, excepto à terceira linha que deixou em branco. Por sua vez, a Dinorah deixou tudo em branco e a Aida só acertou na percentagem da segunda linha (100%), e na fracção da primeira linha, tendo deixado a última linha em branco (Quadro 1).

Alunos	Representação Visual	Fracção	Decimal	Percentagem
Cristiano	×	×	Só acerta nas situações inferiores à unidade	✓
Mariana	----------	✓	✓	✓
Dinorah	----------	----------	----------	----------
Aida	×	Só acerta nas situações inferiores à unidade	×	Só acerta nas situações iguais à unidade

✓ - Responde correctamente × - Erra a resposta

Quadro 1 – Respostas dos alunos à questão 9 do teste inicial.

Nas questões analisadas os alunos evidenciam que reconhecem valores de referência tais como 100% e 50% e também, embora menos frequentemente, 25% e 75%. No

entanto, na conversão entre as várias representações, exceptuando no caso da Mariana, não são bem sucedidos.

5. O Recurso à Percentagem Numa Tarefa Durante a Experiência de Ensino

Na tarefa 6 da experiência de ensino era solicitado aos alunos que ajuizassem sobre a equidade de distribuição de um certo número de sanduíches por três diferentes grupos de crianças.

> Mesa da Luana - 7 sanduíches para 8 pessoas.
>
> Mesa do Nicolau- 4 sanduíches para 5 pessoas.
>
> Mesa do João - 3 sanduíches para 4 pessoas.

O intuito desta tarefa era levá-los a comparar as fracções $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$, socorrendo-se do desenho de cada uma das situações que era apresentado numa folha em anexo. Contudo, não foi solicitada nenhuma representação em particular, ficando esta ao critério dos alunos a partir da interpretação do enunciado.

Os alunos revelaram, de início, alguma dificuldade na interpretação da situação, nomeadamente, na distinção entre o dividendo e o divisor e na própria noção de partilha equitativa. Por este motivo, a professora sente necessidade de clarificar que, nesta situação, todas as crianças comem a mesma porção de sanduíche.

> **Cristiano:** Duas para cada um (referindo-se às metades de sanduíches da mesa da Luana)!
>
> **Aida:** Assim fica uma de fora (uma pessoa)!
>
> **Mariana:** Ai é?! Então uns comiam mais que outros!
>
> **Professora (H):** Não! Todos têm de comer a mesma quantidade!
>
> **Dinorah:** Pode sobrar?
>
> **Professora (H):** Não! O que eu quero saber é se o bocadinho que este menino comeu (um dos meninos da mesa da Luana) é igual ao bocadinho que este comeu (um dos meninos da mesa do Nicolau) e igual ao bocadinho que este comeu (um dos meninos da mesa do João)!

Perante alguma dificuldade em decidirem como dividir cada sanduíche, a Aida sugere aos colegas que se centrem na situação que corresponde ao número de elementos do seu

grupo, que é também a que envolve os valores mais pequenos. Os alunos conseguem, agora, encontrar uma estratégia que lhes permite determinar a porção de sanduíche que cada criança come.

> **Aida:** Vamos começar pela mesa que tem menos pessoas! Nós somos 4, estavam aqui 3 sandes. Como é que fazíamos? Vamos imaginar!
>
> **Mariana:** Dividimos 2 sandes ao meio e ficamos com 4 pedaços que distribuímos por cada um!
>
> **Dinorah:** E a última?
>
> **Aida:** E agora dividíamos assim (divide a última sandes em partes iguais)! Portanto, 25% mais 25%, mais 25%, mais 25%, vai dar tudo uma unidade! 25% é equivalente a quanto?
>
> **Mariana:** Acho que é ¼!
>
> **Aida:** Sim!

Ao verificarem que a terceira sanduíche teria que ser dividida de forma diferente das duas primeiras (uma metade para cada aluno), Aida sugere a divisão em quatro partes iguais, representando cada uma delas por 25%, enquanto Mariana sugere que se trata de ¼. Esta forma diferenciada de representar a parte da unidade, levanta a questão da equivalência entre as duas representações, no entanto, Aida reconhece que se trata de uma outra forma de representar a mesma quantidade, concordando com a colega.

Levanta-se, de seguida, a questão de como adicionar ½ a ¼, surgindo novamente no grupo duas representações: fracção e percentagem.

> **Aida:** Escrevemos aqui que cada um come um meio mais um quarto! Quanto é que dá? 50% mais 25% … cada um come 75%!
>
> **Dinorah:** Então se juntarmos, vai dar … já sei, vai dar ¾!
>
> **Aida:** É?!
>
> **Dinorah:** É o quê?! Então imaginemos que as sandes estão divididas em quatro (apontando para as duas sandes que dividiram em duas partes), daqui cada um come duas partes, mais a parte da terceira sandes, dá três partes!
>
> **Aida:** Pois é! Cada um come ¾ de cada sandes!

Figura 4 – Resposta aluna Dinorah.

Figura 5 – Resposta da aluna Aida.

A divergência relativamente à representação a utilizar rapidamente é resolvida, quando os alunos fazem um paralelo entre as fracções e as respectivas percentagens, para depois conseguirem concretizar a adição entre ½ e ¼ (50% e 25%). No fim voltam à fracção equivalente a 75%, evidenciando um conhecimento da equivalência entre as duas representações e uma flexibilidade na sua conversão.

De seguida, o grupo decide considerar a mesa do Nicolau. Todos os alunos desenham quatro sandes e fazem a divisão das mesmas. Uma das alunas tenta aplicar directamente a estratégia utilizada na situação anterior, sendo corrigida pelos colegas.

> **Mariana:** Eu já sei!
>
> **Dinorah:** Então diz!
>
> **Mariana:** Vou dividir 3 sandes ao meio (ficando com 6 bocados) e cada um recebe um bocado. Depois divido a última em 5 partes e diz que cada um come também um bocado desta última sandes!
>
> **Aida:** Fizeste mal! E este bocado (apontando para a metade da sandes que faltava distribuir)?
>
> **Mariana:** A Aida tem razão! Este aqui não fica igual (apontando para o tal bocado)!
>
> **Professora (H):** Então como podem resolver o assunto?
>
> **Mariana:** Podemos dividir cada sandes em 5?!
>
> **Professora (H):** Sim! E quanto é isso?
>
> **Aida:** 20%!

Os alunos decidem, neste caso, que todas as sanduíches são divididas no mesmo número de partes. É novamente a Aida que sugere a representação sobre a forma de percentagem, fazendo uma associação rápida entre a quinta parte da unidade e 20%. Os colegas aceitam com facilidade esta sugestão e rapidamente concluem que têm de multiplicar esse valor por quatro para obter o valor pretendido (Figura 6).

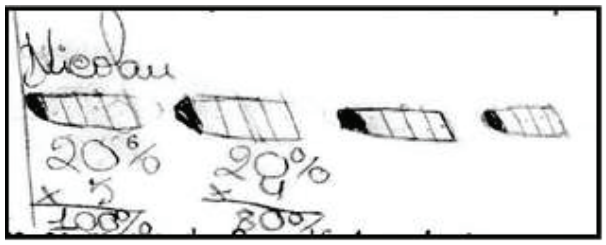


Figura 6 – Resposta do grupo estudo de caso.

Finalmente, na situação da mesa da Luana, o grupo opta também por dividir todas as sanduíches no mesmo número de partes e usa o algoritmo da divisão para saber que percentagem correspondia a cada bocado. Em seguida, recorre ao algoritmo da multiplicação para determinar que percentagem de sanduíche comeu cada pessoa (Figura 7).

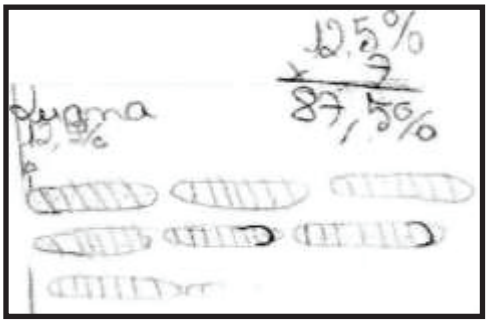


Figura 7 – Resposta do grupo estudo de caso.

Embora tendo surgido a representação sob a forma de fracção na primeira situação, os alunos optam posteriormente de modo consistente pelo uso da percentagem, escrevendo à frente de cada frase do enunciado a percentagem correspondente à porção de sanduíche que cada pessoa come em cada mesa (Figura 8). Desta forma, conseguem comparar, directamente, os diferentes valores obtidos e responder à questão colocada na tarefa.

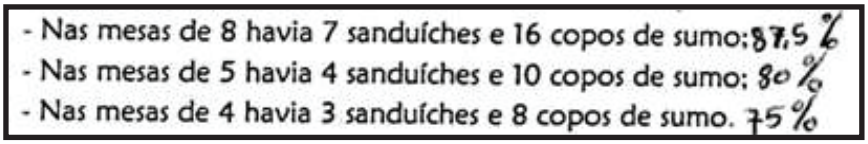


Figura 8 – Resposta do grupo estudo de caso.

O grupo denota, deste modo, que aceita que um número racional tenha diferentes representações, e que umas podem ser mais úteis em determinadas situações, que outras.

6. Considerações Finais

A análise das respostas às questões do teste inicial revela que o conhecimento das percentagens é variado entre os quatro alunos. O Cristiano evidencia uma preferência pela percentagem, uma vez que os decimais que escreve resultam da conversão que faz da percentagem, apesar de cometer o erro da "regra do numerador" (Parker & Leinhardt, 1995). A Mariana já consegue estabelecer correspondência entre fracções, decimais e percentagens, desde que lhe seja dada a representação visual. Por sua vez a Aida e a Dinorah só identificam algumas percentagens de referência, tais como 100% e 50%, respectivamente.

Na tarefa analisada da experiência de ensino, pretendia-se levar os alunos a comparar quantidades numa situação de partilha equitativa, havendo a expectativa inicial que usassem fracções. No entanto, a partir de certo momento, os alunos optaram por recorrer à percentagem não revelando dificuldades em lidar com esta representação, nesta situação. Evidenciam que conseguem utilizar as representações de forma flexível, optando pela representação que lhes é mais favorável (em particular, a percentagem) num determinado contexto, neste caso a comparação de quantidades. Manifestam, assim, uma boa compreensão dos números racionais (NCTM, 2007), aceitando que uma fracção, um decimal e uma percentagem são formas equivalentes de representar o mesmo número.

Os alunos evidenciam lidar com a percentagem como sendo um número que representa uma quantidade (na relação com a unidade), o que vem ao encontro do que outros autores consideram como representando uma potencialidade do uso da barra numérica como estratégia de ensino no caso dos números racionais (van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; van Galen et al., 2008). De facto, como referimos, os alunos usaram em diversas tarefas a barra numérica, a que associaram diferentes representações, sendo para eles natural expressar uma parte de um todo (numa quantidade) na forma de percentagem.

Tendo em conta o tipo de tarefas da experiência de ensino, estes resultados, embora preliminares, reforçam as ideias de Lembke e Reys (1994), que afirmam que uma boa compreensão da percentagem só é possível se os alunos tiverem oportunidade de trabalhar situações com as várias representações dos números racionais, sendo incentivados a fazer conversões entre elas. Além disso, é necessário que os alunos

tenham uma experiência prolongada no tempo com este tipo de tarefas e que lhes sejam dadas oportunidades de escolher uma representação para trabalhar.

Estes resultados decorrem do modo com os alunos trabalharam, em sala de aula, o conceito de número racional: usando vários contextos, envolvendo as suas várias representações, os diversos significados das fracções e apoiando-se fortemente no modelo da barra. Uma análise mais aprofundada dos dados referentes ao percurso de aprendizagem destes alunos, ao longo da experiência de ensino, poderá ajudar a compreender algumas das dificuldades que persistiram ao longo do tempo.

7. Referências

Ainsworth, S. (2006). DeFT: a conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16(3)*, 183–198.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 296-333. New York: Macmillan.

Cox, R., & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education, 6(2/3)*, 239-302.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103- 131.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2.ª ed.)*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lembke, L. O. & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(3)*, 237-259.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.

Middleton, J. A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)*, 302–311.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Principios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65(4)*, 421-482.

Reys, R. E., & Yang, Der-Ching (1998). Relathionship between computational performance and number sense among sixth and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(2)*, 225-237.

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*, 227–237.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54(1)*, 9-35.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions.* Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, Sense Publishers.

A MEDIDA NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

Marisa da Silva Dias
Faculdade de Ciências – UNESP
Fundunesp
marisadias@fc.unesp.br

Resumo

Este texto tem como referência uma pesquisa realizada em relação à formação de conceitos matemáticos sob princípios metodológicos da pesquisa-ação cujo problema social se configurou no campo do ensino e da aprendizagem da matemática. O objetivo nesse texto é apresentar a investigação do movimento dialético entre apropriação e objetivação do conceito de medida e suas relações com o campo numérico. Para isso, foi desenvolvida uma atividade orientadora de ensino com professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio do Estado de São Paulo (Brasil), em um curso de formação contínua. As soluções construídas a partir da proposição de uma situação-problema caracterizaram uma atividade matemática focalizada no movimento lógico-histórico da produção de instrumentos de medida, particularmente da régua, organizada por meio das questões *porque*, *o que* e *como* medir. Os aportes teóricos do materialismo histórico e dialético e da psicologia histórico-cultural, fundamentalmente da teoria da atividade, contribuíram para análise do desenvolvimento do conceito de número pelos sujeitos referentes à quantificação de grandezas. A síntese por meio das questões por que, o que e como medir pôde auxiliar na organização do pensamento teórico que reuniu o lógico do histórico no desenvolvimento do conceito; a necessidade humana, a grandeza contínua e o processo de numeralização.

Palavras-chave: educação matemática, atividade, instrumento, pensamento teórico, medida.

Aspectos teórico-metodológicos na formação de conceito

Este texto refere-se a parte de uma investigação mais ampla sobre a formação de conceitos matemáticos no sistema de escolar, sobretudo da apropriação e objetivação na formação do pensamento numérico, abordando a formação do sistema numérico, números naturais, racionais, reais e complexos. Os procedimentos metodológicos fundamentaram-se nas contribuições da pesquisa-ação (Thiollent, 2003) cujo problema social se configurou no campo do ensino e da aprendizagem da matemática. Os sujeitos constituíram-se em aproximadamente oitenta professores que lecionavam matemática e os dados foram obtidos em um curso de formação contínua de professores (Dias, 2007).

Dentre as atividades desenvolvidas nessa investigação, uma delas tratou do pensamento numérico envolvendo o processo de medição na relação com o número fracionário a qual se refere este texto.

A organização do referido curso baseou-se na atividade orientadora de ensino (Moura, 1996) cujo papel na investigação articulou princípios metodológicos, para organização do ensino, e teóricos, como a teoria da atividade, a psicologia histórico-cultural e o materialismo histórico e dialético. A teoria da Atividade desenvolvida, sobretudo, por Leontiev (1983) considera a necessidade humana como origem da atividade, o ponto de partida, geradora do motivo que impulsiona ações direcionadas à apropriação do objeto.

A atividade orientadora de ensino propõe, para o ensino escolar, orientações para a organização do ensino com a finalidade de apropriação do conhecimento e de desenvolver as funções psíquicas superiores. Moura (2001) nomeia a atividade como orientadora "porque define os elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor" (p. 155). Por esse motivo, o professor avalia as ações sintetizando em motivos para novos planos de ação. As ações a serem realizadas na e para interação entre os sujeitos são planejadas e objetivadas no plano de ação. Este é baseado em intenções de aprendizagem e considera as condições objetivas, a fim de que se desenvolvam as atividades de estudo e de aprendizagem (Dias, 2007). No caso do ensino e da aprendizagem escolar, a atividade de estudo do professor não é a mesma do estudante, por se tratar de motivos e objetos distintos. O professor estuda para organizar seu ensino visando a aprendizagem do estudante, o estudante, por sua vez, estuda para se apropriar do conhecimento ensinado pelo professor.

Considera-se que na educação escolar, um dos objetivos é promover, por meio do ensino sistematizado, a apropriação do conhecimento desenvolvido pelas gerações precedentes. Neste trabalho trata-se da relação entre objetos materiais elaborados pela humanidade para medir, os instrumentos de medida, e o conhecimento neles incorporado. O objeto da apropriação, material ou ideal, possui a atividade humana acumulada nele, o trabalho. Trabalho entendido aqui sob os pressupostos do materialismo histórico e dialético (Kopnin, 1978, Cheptulin, 1982), ou seja, como processo de ação do homem na natureza que, ao mesmo tempo em que cria instrumentos, modifica-se, cria e desenvolve capacidades cognitivas.

Na base de todo o conhecimento humano, o homem leva em consideração não somente as propriedades externas dos objetos como também as conexões internas, sua essência. São essas conexões que permitem ao ser humano a transformação dos objetos, produzindo seus instrumentos. O instrumento não é um objeto material simplesmente, é um objeto social que cristaliza a atividade humana, ou seja, a necessidade, a intencionalidade, as ações intelectual e física, nas condições objetivas para atender a uma finalidade. É na atividade produtiva de instrumentos, materiais ou ideais, que o homem desenvolve o pensamento teórico (Davidov, 1988), como o científico, que se diferencia do pensamento empírico.

A divisão em empírico e teórico é para evidenciar os níveis de pensamento. Isso não quer dizer que devamos abandonar as relações sensitivas que permitem desenvolver o pensamento empírico, pois são elas que possibilitam a forma primeira do pensamento. Mas é no pensamento teórico que aparecem as inter-relações, nas mediações, no sistema de sua formação; que reúne o diverso, os multifacetados essenciais para a formação do conceito (Davidov, 1988).

As contribuições da atividade orientadora de ensino e do pensamento teórico orientaram a elaboração da situação-problema e as discussões das soluções dos sujeitos com o objetivo de desenvolver o pensamento teórico, por meio da reprodução dos traços essenciais da produção de instrumentos de medida. A reprodução de que se trata nessa perspectiva não é mecânica. Como nos orienta Rubinstein (1976), no processo de reprodução do reproduzido, o reproduzido se forma na mente, "O pensar está contido na reprodução, capta o conteúdo de uma forma mais exata, generaliza-o, sistematiza-o, aperfeiçoa-o e reconstrói-o" (p. 47).

Outro aspecto considerado na elaboração da situação-problema foi o movimento lógico-histórico do conceito (Kopnin, 1978). O histórico do lógico-histórico caracteriza-se pelas etapas de surgimento e desenvolvimento do objeto de conhecimento e, o lógico, como o meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico. Não no sentido de guiar o pensamento, impondo-lhe a história do objeto, mas permitindo que a formação das idéias componha a lógica do pensamento na busca da essência do movimento do objeto, sua criação e seu desenvolvimento (Kopnin, 1978, Dias, 2007).

O aspecto histórico considerado foi a necessidade humana de controlar a variação quantitativa de grandezas contínuas e, o lógico, a correlação do pensamento numérico,

na articulação entre contagem de grandezas discretas, com um conhecimento novo, a quantificação de grandezas contínuas.

Com isso, a atividade focalizou os nexos conceituais (movimento lógico-histórico) acumulados na elaboração de instrumentos de medida, envolvendo o conceito de grandeza, a criação da unidade e seu fracionamento, objetivado na fração numérica.

A atividade de apropriação e objetivação

Objetivação e apropriação são processos que expressam a dinâmica de autoconstrução do ser humano ao longo da história. O homem apropria-se da natureza objetivando-se nela para inseri-la em sua atividade social. Sem apropriação da natureza não haveria a criação da realidade humana, não haveria a objetivação do homem (Duarte, 1993).

A análise das objetivações dos sujeitos em relação ao conceito de medida e o campo numérico, bem como as inferências a respeito da apropriação deles, realizou-se a partir de uma situação-problema. Inserida na perspectiva da atividade orientadora de ensino, a situação-problema apresentada aos professores foi chamada de *Laboratório de Medida* cuja intenção foi mobilizar o pensamento no sentido dos nexos conceituais do conceito de medida. Tais nexos compreendem a resposta às questões do *porque*, *o que* e *como* medimos. O *porquê* está relacionado ao aspecto constituído historicamente na necessidade humana. O *o que* vai ao encontro das qualidades dos objetos ou fenômenos, na grandeza, e o *como* no procedimento que articula o método com a numeralização.

O nome laboratório de medidas foi escolhido por ser uma representação social que elabora métodos de medição e busca precisão, como o INMETRO (Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial). Para isso, um kit contendo os mesmos objetos, previamente selecionados (um retalho de tecido, um pedaço de fio de barbante, um dado, um copo com água, uma tesoura, dois tubos de guardar filme de máquina fotográfica – um contendo areia e outro pedras), foram entregues a cada grupo (no total de sete grupos) de professores. A escolha dos objetos buscou uma variabilidade nas qualidades como rigidez, espessura, cor, tamanho, forma, etc. algumas quantificáveis nas condições objetivas e outras não.

Uma parte da situação-problema solicitava o relato de todas as grandezas naqueles objetos que pudessem ser mensuradas e, outra parte, a realização de medições, àquelas possíveis nas condições objetivas, sem utilização de instrumentos convencionais de

medida. As respostas foram entregues por escrito e posteriormente discutidas em plenária (Dias, 2007).

O fato de *medir sem régua* (sem balança, paquímetro, termômetro, etc.), ou seja, sem instrumentos de medida convencionais, possibilitou uma situação criadora. Para um dos grupos tudo poderia ser medido desde que se estabelecesse uma unidade padrão de medida, para outro, tal padrão deveria ser dado previamente, pois sem ele seria impossível a medida. As discussões indicaram uma contradição dialética na forma de pensamento dos sujeitos, possibilidade-impossibilidade, pois ao mesmo tempo em que seu conteúdo evidencia um conhecimento, a necessidade de um padrão de medida ou uma unidade de medida, a impossibilidade é caracterizada pela falta do instrumento socialmente conhecido que possui a unidade de medida. A partir do dilema entre o conhecido – medir com instrumentos convencionais – e o desconhecido – medir sem eles, estabeleceu-se a problematização.

Caraça (1989) diz da passagem pelo dilema que orienta a formulação de caminhos no desenvolvimento do conceito diante de uma dificuldade. No dilema, o que está em jogo é o ponto nevrálgico ou ponto fraco no qual reside uma negação de tal estágio do conceito. A negação a que Caraça se refere está fundamentada no materialismo histórico e dialético, a negação como indicativa da necessidade de superação. A negação não-dialética é destruição de um determinismo qualitativo, enquanto a negação dialética desempenha o papel de elo de ligação entre o inferior e o superior (Cheptulin, 1982, p. 315).

Na investigação o ponto fraco se caracterizou em *como medir sem régua*. Nesse movimento do pensamento, surgiu a necessidade de negar o conhecido. Negar o processo de medir com instrumento não significa ignorar, abandonar tal conhecimento, mas sim mobilizar, na atividade mental, uma ligação possível entre o processo conhecido e a nova situação. A negação dessa negação, ou seja, negar a impossibilidade de se medir na ausência da régua, descortinou um campo de possibilidades para o pensamento, a superação, o desenvolvimento de um conhecimento novo para si. Exigiu que o indivíduo entrasse em atividade interna e externa (Leontiev, 1983) cujo motivo direcionou suas ações externas e internas para o desenvolvimento de uma solução ao problema.

A situação particular de medir os objetos exigiu dos participantes a mobilização de conceitos, procedimentos e relações que transformaram aquele problema particular num

problema geral, ou seja, como criar um instrumento de medida, como *recriar a régua*, ou ainda, como se criam os instrumentos de medida.

A organização da proposta permitiu a passagem das singularidades do processo de quantificar grandezas, por meio particular dos objetos expostos, a um grau de generalidade. O retorno ao particular a partir daí foi objetivar as elaborações internas, a criação da *régua* no pensamento. Com isso, a relação dos sujeitos com os instrumentos, apresentados socialmente, apresentou outra qualidade no pensamento. A apropriação, elaborada no pensamento, permitiu desenvolver o conceito, que não é só lógico, mas histórico, relacionados à produção e à necessidade humana. O processo de criação da unidade artificial de medida não ocorreu de forma tranquila e imediata, ao contrário, foi turbulenta e mediada. A unidade artificial foi assim denominada a fim de diferenciá-la da unidade natural, de contagem, que se encontra naturalmente separada uma da outra (Lima & Moisés, 1998).

Entre as elaborações sobre a medida de grandezas, como a de comprimento, de superfície, de volume e de massa, destacaremos neste trabalho a medida de comprimento. Na criação da unidade artificial de comprimento foram utilizados, pelos sujeitos, principalmente, o fio e a mão. Em relação ao fio houve dois tipos de procedimentos para caracterização da unidade de medida. Um deles considerando o comprimento total do fio e outro uma subdivisão dele. O grupo de sujeitos que utilizou o comprimento total do fio estabeleceu-o como padrão para todas as medidas lineares dos objetos. Com isso, os sujeitos puderam articular, na relação entre medida e número, a unidade de medida e o número 1, a quantidade de vezes que a unidade de medida se reproduz na grandeza a ser medida com o número inteiro, o fracionamento da unidade de medida com o número fracionário.

Já o grupo que primeiramente estabeleceu como unidade a oitava parte do comprimento total do fio não a manteve como padrão. A cada objeto diferente era estabelecida uma nova unidade para medir suas grandezas lineares. Porém, o procedimento era o mesmo, dividir o comprimento total do fio em partes iguais, convenientemente escolhidas, para que a medida resultasse em um número inteiro. Observa-se, nesse procedimento, a correlação entre a fração proveniente da relação parte-todo, subjacente no procedimento da escolha de cada unidade particular, com a regularidade do processo de partição do fio.

Dentre as elaborações com a mão, para criação da unidade de medida de comprimento, foram usados o dedo polegar, tanto seu comprimento como sua largura, a união dos dedos (dedos juntos uns nos outros), o palmo (distância ente a ponta do dedo polegar e o mínimo com a mão aberta) e a polegada. A história dos nossos antepassados evidencia o poderoso instrumento que foi nosso corpo, em particular mãos e dedos. Na história da matemática observa-se a utilização dos dedos e do corpo para contagem e cálculos, o braço para medida, etc. (Ifrah, 1998). A recuperação desses procedimentos no ensino e na aprendizagem da matemática permitiu discutir a articulação da produção de processos de medição, apresentados pelas histórias, e a apropriação das formas de produção de conhecimento.

Outra forma de medida de comprimento utilizada pelos sujeitos foi com pedras, associando o enfileiramento delas com um segmento, estabelecendo assim o comprimento total como unidade, porém sua subdivisão foi questionada a fim de observar a não equivalência com uma das dimensões da pedra. Embora a natureza das pedras seja discreta, observou-se indícios de um movimento do pensamento na busca da continuidade. Essa idéia está dialeticamente ligada ao contrário da criação da medida. na qual está presente o pensamento de *discretização* da grandeza contínua ao efetuar o processo de *contagem*, ou seja, quantas vezes a unidade *cabe* no tamanho do que se quer medir.

Outro encaminhamento de solução foi por meio de estimativas. O conceito de estimativa tem sido incentivado atualmente tanto pelos livros didáticos como pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ministério da Educação e Cultura do Brasil [MEC] (1998, 2000). Concluiu-se que o uso da estimativa nessa atividade impediu a elaboração dos nexos conceituais sintetizados nos instrumentos de medida.

Ao utilizar um objeto para servir de instrumento de medida, observou-se a ausência da medida das grandezas desse objeto. Para medir suas grandezas foi utilizado outro objeto como instrumento, com outra elaboração de unidade de medida. Tais procedimentos refletiram a não criação de uma unidade padrão como também a não reflexividade da operação. A retomada da discussão da necessidade de um padrão de medida, apontada pelos sujeitos no início do dilema, permitiu uma nova compreensão no desenvolvimento do pensamento devido a atividade desenvolvida. Além do aspecto social relacionado à padronização de medidas, para a comunicação, cálculo de impostos na propriedade privada, embalar os diversos objetos que compramos, marcar o horário

um encontro, etc. Houve a discussão que permitiu esclarecer a diferença do significado de unidade de medida e de sua padronização.

A relação da medida com a fração ocorreu inicialmente de forma diferenciada. Houve a utilização de estimativa, como também o uso dos materiais mais flexíveis para dobrar em partes iguais. Mas, o fato de medir a sobra pelo fracionamento da unidade não anulou outro, o de evitar a subunidade. Quando a unidade não cabia um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido, alterava-se a unidade, substituindo-a pela própria subunidade, evitando a fração, ou mesmo por outra unidade conveniente. Esse fato foi discutido juntamente com o anterior, pois envolve a questão social da padronização, ou seja, se o ser humano fizesse sempre esse processo não conseguiria padronizar uma unidade de medida. Quanto ao aspecto lógico, no processo de pensamento, a discussão foi encaminhada para a idéia de quantas unidades de medida teríamos se a cada medição estabelecêssemos novas unidades para a mesma grandeza.

O final da atividade contemplou uma síntese articulando as três questões, *por que, o que* e *como* medir, com as soluções apresentadas e discutidas, com base no lógico-histórico do conceito e nas pesquisas na área a fim de orientá-los na organização didática.

Conhecer as qualidades dos objetos, saber quais possuem variação quantitativa não é suficiente para criação da unidade, pois a unidade de medida não está dada, é um processo do pensamento que entre outros momentos requer apreender qualidades para além da imagem sensível. A comparação de grandezas de mesma natureza foi realizada na prática, mas a necessidade de sintetizar esse conhecimento como nexo conceitual da medida**,** no processo dedutivo do pensamento teórico, não havia sido explicitado até o momento da discussão final, no compartilhamento das soluções desenvolvidas pelos grupos.

Considerações

As primeiras manifestações direcionadas à solução da situação-problema eram provenientes do como fazer, medir com instrumentos pré-definidos, que compõe a prática dentro e fora da escola e mobilizam o pensamento empírico. O dilema entre conhecimento-desconhecimento, desencadeado pela ausência do instrumento de medida, proporcionou a mobilização do pensamento teórico. A negação (dialética) do conhecimento existente, sintetizada na problemática: *como construir uma régua*, revelou o movimento do pensamento no sentido dos nexos conceituais dos instrumentos

de medida. Este reúne um modo de numeralizar grandezas contínuas. O conceito numérico relacionado à contagem de grandezas discretas pôde ser reformulado, agregando outra função social aos mesmos números já conhecidos, a numeralização de grandezas contínuas. E, com isso, perceberam outro movimento numérico necessário para quantificar essas grandezas, a fração. Com isso, buscou-se permitir a apropriação do conceito de fração, para que os sujeitos pudessem diferenciá-lo, posteriormente, das do conceito de razão e número racional. Pois embora tenham a mesma representação numérica, historicamente surgiram de necessidades diferenciadas.

Tomar o problema para si é sempre uma escolha que depende da esfera motivacional (Leontiev, 1983; Martins, 2004) individual e coletiva. Aqueles que o fizeram puderam entrar por meio do processo criativo no pensamento teórico constituinte do significado da medição e da numeralização de grandezas na dinâmica dialética entre apropriação e objetivação do pensamento.

A mobilização do pensamento teórico, no processo dialético de apropriação e objetivação, foi possível por meio de ligações realizadas, constituintes de um sistema que reuniu o diverso: criação de unidade e seu fracionamento, grandezas discretas e contínuas, um processo específico de comparação, o número inteiro e o fracionário. Aliado ao lógico, encontrou-se o histórico que propiciou a apropriação cultural relacionada às necessidades do ser humano e ao desenvolvimento das aptidões acumuladas no instrumento de medida.

Referências bibliográficas

Ministério da Educação e Cultura do Brasil. (1998). *PCN de 5ª a 8ª série*. Acesso em 23 de março, 2006, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.

Ministério da Educação e Cultura do Brasil. (2000). *PCNEM*. Acesso em 23 de março, 2006, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda.

Cheptulin, A. (1982). *A dialética materialista: categorias e leis da dialética*. São Paulo: Alfa-omega.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el– desarrollo psiquico*. Havana: Editorial Progresso.

Dias, M. S. (2007). *Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Duarte, N. (1993). *A individualidade para si – Contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo* (Coleção educação contemporânea). Campinas, SP: Autores Associados.

Ifrah, G. (1998). *Os números: a história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo.

Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Leontiev, A. (1983). *Atividad, conciencia, personalidad*. Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Lima, L. & Moisés, R. P. (1998). *Número real: à procura do infinitamente pequeno*. São Paulo: CEVEC.

Martins, L. M. (2004). A natureza histórico-social da personalidade. *Cadernos Cedes*,- 62 (24), 82-99.

Moura, M. O. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema*, 12, 29-43.

Moura, M. O. (2001). A atividade de ensino como ação formadora. In: A. D. Castro & A. M. P. de Carvalho (orgs.) *Ensinar a ensinar* (pp. 143-162). São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda.

Rubinstein, S. L. (1976). *Princípios de psicologia geral*. Lisboa: Estampa Ltda.

Thiollent, M. (2003). *Metodologia da pesquisa-ação*. Cortez: São Paulo.

A COMPLEMENTARIDADE NA CONCEITUAÇÃO DE NÚMERO REAL

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP
sigliori@pucsp.br

Rogério Ferreira da Fonseca
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP
rffonseca@pucsp.br

Resumo

Este artigo tem por alvo o estudo de um dos conceitos fundamentais da Análise Matemática, o conceito de número real. A abordagem é de ordem filosófica e epistemológica e abrange, além do conceito de número real, o conceito de número de um modo geral. As reflexões estão fundamentadas no conceito de *complementaridade* no que concerne à análise de aspectos cognitivos e epistemológicos de conceitos matemáticos. O foco do artigo está nos aspectos da conceituação de número do matemático John Horton Conway, diante de questionamentos filosóficos e epistemológicos sobre a conceituação de número. Como conclusão são indicadas potencialidades teóricas da formulação de Conway em face da *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número. E, além disso, são destacadas vantagens dessa conceituação ao utilizar uma classe de jogos como um modelo de interpretação ou aplicação, conceituando número como um jogo. Este estudo possibilita avaliar as potencialidades da Teoria de Conway, de forma complementar às demais abordagens dos números reais, evidenciando a importância de reflexões e questionamentos epistemológicos para a evolução do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Número, Número real, Teoria de Conway, Jogos, Complementaridade.

1. Introdução

Matemáticos e filósofos incomodaram-se com a ausência de uma conceitualização de número que respondesse de forma única a questão: o que é número?, e que além disso pudesse satisfazer de maneira complementar as condições de *intensionalidade* e de *extensionalidade* desse conceito.

Muitas críticas foram feitas às concepções de número cujo fundamento eram a experiência e a intuição, por exemplo, as críticas apresentadas por Frege (1992) colocando em xeque as visões empiristas em relação ao conceito de número. Frege propôs uma teoria que buscava agregar elementos lógicos a certo tipo de

conceitualismo, no qual os números eram vistos como entidades lógico-ideais, objetos do pensamento.

Em uma outra perspectiva, a do método axiomático, ressaltamos que Russell (2007) julgava-o incompleto, considerando os axiomas como termos não específicos. Para ele, esses termos não interpretados precisavam ser especificados de uma maneira que permitissem estabelecer uma conexão com a aplicação desejada.

É nesse contexto que a teoria de Conway (2001) se insere e as análises são focadas nas potencialidades dessa teoria perante as demais abordagens do conceito de número relativamente aos questionamentos filosóficos.

A teoria de Conway possibilita a construção dos números de forma única, dos naturais aos transfinitos, e pode ser realizada por meio de conjuntos (garantindo seu caráter *intensional*) e de algumas classes de jogos (assegurando o caráter *extensional*). Ela é constituída por um par: de um lado, por uma caracterização axiomática, e de outro, pelos modelos (os jogos) que fornecem uma aplicabilidade da teoria e explicitam propriedades dos números.

Neste artigo, aspectos dessa teoria são analisados tomando-se por base referências epistemológicas e o princípio da *complementaridade* (KUYK, 1977; OTTE, 2003). Segundo esse princípio, os objetos matemáticos têm natureza dual, isto é, por um lado, podem ser caracterizados axiomaticamente e, por outro, devem ser complementados por possíveis aplicações, ou seja, modelos que traduzam suas propriedades. Assim, analisar um objeto matemático na perspectiva da *complementaridade* significa buscar identificar sua capacidade de não dissociar os aspectos que compõem essa dualidade.

2. Uma breve introdução às ideias de Conway

A conceituação de Conway pode ser considerada nova pelo tempo em que foi proposta, e também porque traz novidades de ordem epistemológica ao conceito de número.

Ela foi elaborada na década de 70 do século passado, e oferece resposta à questão epistemológica, "o que é número?", buscada incessantemente por filósofos e matemáticos de todos os tempos. E, ainda, por abranger os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número, evita, no caso particular dos números reais, os inconvenientes da construção passo a passo das abordagens clássicas.

O conceito de número na Teoria de Conway é apresentado a partir de cortes que generalizam os cortes de Dedekind. E, diferentemente de Dedekind, prescinde do conjunto dos racionais como ponto de partida. A definição de número de Conway abrange todos os números dos "infinitamente pequenos" aos "infinitamente grandes", os reais, transfinitos como ω (o primeiro ordinal infinito); os números infinitesimais, como $1/\omega$, e também os números complexos. Os números de Conway são denominados Números Surreais.

Na Teoria de Conway (2001, p. 4), um número x é um corte, ou seja, x = $\{E \mid D\}$, de modo que *E* (classe da esquerda) e *D* (classe da direita) são classes de números, tais que nenhum elemento da classe *E* seja maior ou igual que algum elemento da classe *D*. Além disso, são apresentadas definições que permitem comparar os números. A construção dos números é feita por recorrência.

O primeiro número de Conway é o número 0 = $\{\varnothing \mid \varnothing\}$. A partir dele, podem-se construir o número 1 = $\{\{0 \mid \varnothing\}$; o número 2 = $\{\{0,1\} \mid \varnothing\}$, o número 3 = $\{\{0,1,2\} \mid \varnothing\}$, e assim se procede para os demais números. Uma abordagem detalhada da construção pode ser encontrada em Fonseca (2010).

A partir dessa caracterização pelo corte generalizado, Conway utiliza uma classe especial de jogos para conseguir uma ordem. Nessa classe estão jogos que: a) há dois jogadores A e B; b) não há empate; c) há um número finito de jogadas.

Apenas para ilustrar são apresentados alguns exemplos do jogo Hackenbush derivado do jogo NIM, um jogo da classe especial de Conway. Ele é constituído de peças de cores cinza e branca. O jogador A retira peças cinzas e o B, brancas. As peças devem estar conectadas a uma linha horizontal. Os jogadores jogam alternadamente. Cada jogador deve retirar somente uma peça da cor que lhe é atribuída. Se uma peça for retirada, serão apagadas automaticamente as peças que estiverem sobrepostas a ela. Perderá o jogo aquele jogador que primeiro ficar sem peças de sua cor para retirar. Na Figura 1 estão indicados quatro exemplos de jogos Hackenbush.

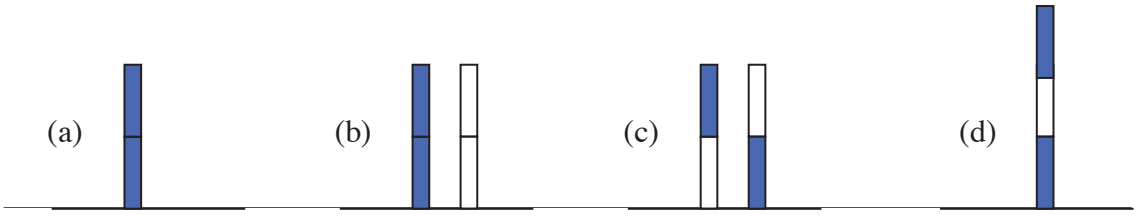


Figura 1. Exemplos de jogos Hackenbush.

Por exemplo, no jogo (a) da Figura 1 somente o jogador *A* tem possibilidades de jogada; sendo assim, ele ganha, independentemente de quem inicie o jogo.

No jogo (b), como podemos ver, a situação é diferente da anterior, pois os dois jogadores têm possibilidades de jogadas, como segue: se o jogador *A* iniciar a partida retirando a peça cinza mais distante da linha, *B* poderá retirar uma peça branca também mais distante da linha. Então *A* terá uma única peça para retirar e *B* ganhará o jogo. Se o jogador *B* iniciar a partida, poderá utilizar uma estratégia análoga à anterior, e nessas condições o jogador *A* vencerá, independentemente das jogadas de *B*. Nesse caso, quem começa perde.

No jogo (c), ocorrerá a mesma situação descrita logo acima, ou seja, quem começa perde. No exemplo (d) acontece o seguinte: se o jogador *A* iniciar a partida, ele retira a peça cinza que está conectada à linha, apagando automaticamente as peças que estão sobrepostas a ela. Nesse caso, o jogador *A* ganhará imediatamente o jogo, visto que *B* não terá possibilidade de retirar nenhuma peça. Se o jogador *B* iniciar o jogo, ele irá retirar a única peça branca e consequentemente apagará a peça cinza sobreposta a ela. E o jogador *A* também vencerá, pois ainda terá uma possibilidade de jogada. Ou seja, o jogador *A* ganha sempre. A seguir, indicaremos alguns jogos específicos e os números a eles associados.

Jogo zero/número zero

Um jogo zero é aquele em que o jogador que inicia a partida perde. Na figura 2 estão indicados alguns jogos zero.

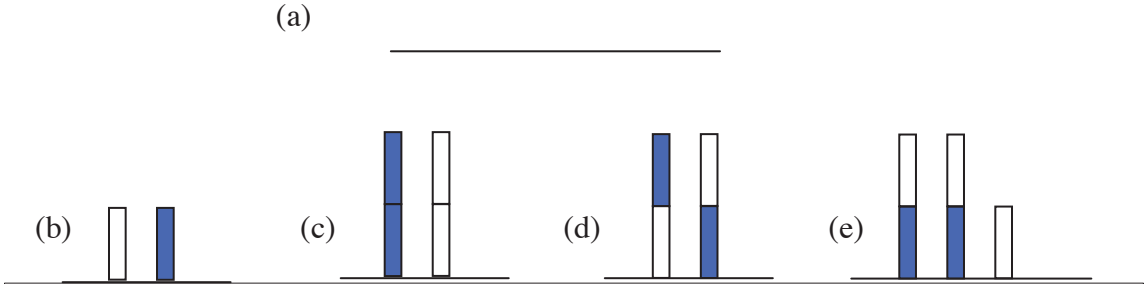


Figura 2. Jogos Hackenbush de valor zero.

Conway associa o jogo zero ao número zero. O jogo zero de acordo com a configuração (a) indicada na Figura 2 é associado ao número zero representado por $\{\varnothing|\varnothing\}$. Esse é o

primeiro número construído por Conway e uma das representações do número zero. O conjunto vazio do lado esquerdo da barra indica a ausência de jogadas para o jogador *A*, enquanto o vazio do lado direito representa a ausência de jogadas para o jogador *B*.

Para construir novos números é necessário definir uma relação de ordem no conjunto dos jogos: um jogo é positivo (ou maior que zero) se o jogador *A* ganha independentemente de quem comece a partida. De modo análogo, quando a vantagem for do jogador *B*, isto é, quando *B* ganha, independentemente de quem inicia a partida, o jogo é negativo (ou menor que zero). Inicialmente vamos indicar como um determinado jogo J é associado a um número inteiro x, apontando como se obtêm os elementos das classes *E* e *D* que definem o número x a ele associado. Isso é feito por recorrência, assim: cada vez que um jogador retira uma das peças, o jogo J se reduz a outro jogo J', cujo número associado é x'. Esse número x' será um elemento da classe *E* ou *D* de x, dependendo se o jogador que retirou a peça for o jogador *A* ou o *B*, respectivamente.

Os números 0, 1 e **-**1 dispostos ao lado de cada peça (na vertical) são os números associados aos jogos a que se reduzem quando a respectiva peça é retirada. Os números 0, 1 e -1 são, como dito anteriormente, em cada caso, elementos das classes *E* e *D* dos números 1, 2, -1 e -2.

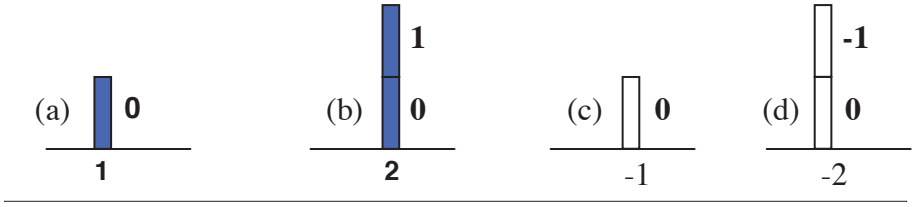


Figura 3. Jogos/números 1, 2, -1 e -2.

3. A noção de complementaridade

No artigo Complementary, Sets and Numbers, Michael Otte (2003) utiliza a noção de *complementaridade* para analisar e explicar o desenvolvimento epistemológico e cognitivo de conceitos matemáticos, em especial as noções de conjuntos e números. Para ele, a *complementaridade* relacionada à noção de número é concebida segundo os aspectos *intensional* e *extensional*, que não devem ser vistos apenas como uma dualidade, mas, sim, *complementares* no desenvolvimento do conceito de número. De

acordo com Abbagnano (1982, p. 144), são "*complementares* dois conceitos opostos que porém se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno".

As ideias de Otte (2003) fundamentam a relação epistemologia e cognição, admitidas neste artigo, como duas faces da mesma moeda nos estudos que envolvem fundamentos da Educação Matemática.

A noção de *intensão* de termos matemáticos explicita as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais. No entanto, tal noção não esgota a conceituação do objeto matemático em si, por exemplo, sistemas axiomáticos no sentido de Peano e Hilbert ou uma abordagem axiomática dos números reais. A compreensão comum de uma abordagem axiomática expressa que a aritmética não trata de coisas que existem concretamente, e sim de relações gerais ou objetos ideais.

A noção de *extensão* de termos matemáticos concerne à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria. Uma abordagem *complementarista* torna-se relevante em razão da impossibilidade de definir a realidade matemática, independentemente de suas possíveis representações e da própria atividade cognitiva.

Objetos matemáticos possuem uma natureza dual, eles podem ser dados *intensionalmente* por um sistema axiomático, mas devem ser complementados com "referências" e "atributos". Além das características relacionais dadas pela axiomática, teremos também possíveis interpretações de seus termos.

Conforme afirma Otte (2003), uma abordagem *complementar* entre o caráter *intensional* e *extensional* de conceitos matemáticos é induzida pela impossibilidade de definir a realidade matemática independente da própria atividade cognitiva.

4. Números reais e a noção de complementaridade

No que se segue são feitas algumas considerações acerca das abordagens clássicas dos números reais (axiomática, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e corte de Dedekind) tendo como pressuposto teórico a noção de *complementaridade*, além de se ressaltarem algumas potencialidades teóricas em relação à proposta de conceituação de número elaborada por Conway.

A abordagem axiomática

Em um sentido filosófico, a abordagem axiomática dos números reais não considera a natureza do conceito de número, assim como não leva em conta possíveis aplicações à nossa realidade sensível, pois uma axiomática geralmente não fornece, em seu bojo, possíveis interpretações, nem mesmo há sugestão de alguma maneira de descobrir como podem ser aplicados. Apenas as relações entre os objetos são enfatizadas, caracterizando de forma unilateral o aspecto *intensional* dos números. Pressupondo uma abordagem *complementar*, espera-se que tais números possuam alguma interpretação, além de conterem certas propriedades formais.

Como mencionamos no início deste artigo, o método axiomático foi criticado por Russell (2007, p. 27), com o argumento de que os números deveriam ter um significado definido, e não que meramente possuíssem certas propriedades formais; para ele esse significado deveria ser definido pela teoria lógica da aritmética.

Uma abordagem axiomática dos números reais estará sempre incompleta, pois apenas evidenciará o aspecto *intensional* dos números.

Números reais: cortes de Dedekind e classes de equivalências de sequências de Cauchy

A construção dos números reais, proposta por Dedekind (1901), pressupõe os números racionais e suas propriedades. Ele desenvolve o conceito de número apenas como um objeto do nosso pensamento, ou seja, de forma puramente abstrata, cuja essência encontra-se na ordinalidade.

Tradicionalmente, para se obterem os números, dos naturais aos reais, pode-se utilizar a seguinte abordagem, apresentada aqui resumidamente, há outros procedimentos matemáticos omitidos aqui devido a limitação do artigo: os números naturais podem ser caracterizados pelos axiomas de Peano; em seguida, constrói-se o conjunto dos números inteiros por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números naturais; o próximo passo é construir os números racionais mediante classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, e por fim os números reais por intermédio dos cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy (de números racionais).

As abordagens clássicas podem tornar-se insuficientes do ponto de vista da *complementaridade*, de modo que apenas uma cadeia de deduções deverá ser aplicada; nesse caso, evidencia-se apenas o aspecto *intensional* dos números. Nessas construções

não haverá nenhuma interpretação para os números, nenhum modelo ou aplicação, os aspectos *extensionais* não são contemplados, e em uma análise *complementarista* há falha, pois os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número não ocorrem.

Além disso, há um certo tipo de ruptura na passagem dos números racionais para os reais. Essa ruptura se caracteriza pela mudança de método, abandonam-se as operações com pares ordenados (de números naturais ou inteiros) para utilizar "novos" objetos, os cortes de Dedekind ou as classes de equivalência de sequências de Cauchy.

É relevante considerar novas formas para abordar os números, novas referências e modelos, mundos artificiais para interpretá-los. Na construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy, apenas os aspectos lógicos dedutivos são explorados. Em geral, não há uma interpretação ou modelo intrínseco a essas teorias, e esse fato decorre da teoria formalista.

Para propor uma abordagem de acordo com a *complementaridade* seriam necessários modelos que propiciassem a interpretação dos números reais, de suas operações e propriedades, o que permitiria explorar os aspectos *extensionais* do conceito de número.

A conceituação de número proposta por J. H. Conway e complementaridade

Algumas considerações a respeito da teoria de Conway diante da noção de *complementaridade* são feitas a seguir.

A abordagem proposta por Conway fornece em seu bojo alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, o que possibilita explorar o aspecto *intensional* do conceito de número. Além disso, há também a interpretação de tais números por uma classe específica de jogos, ou seja, há um modelo que permite a interpretação dos números, favorecendo o aspecto *extensional* do conceito de número.

Os jogos nessa teoria não têm um simples papel de aplicação para a axiomática; eles fornecem uma interpretação e um modelo intrínseco à própria teoria, visto que a ordenação para os números encontra-se inspirada nos jogos.

Quando se afirma que se trata de uma *complementaridade* que ocorre de forma natural, quer se dizer que não há uma hierarquia entre os aspectos *intensional* e *extensional*, de acordo com o exposto por Kuik (1977).

Assim, uma abordagem para o ensino dos números, dos naturais aos reais, por meio da teoria de Conway, pode ser realizada de várias maneiras. Por exemplo, os números podem ser construídos concomitantemente por meio de conjuntos e por meio dos jogos; nesse caso, os jogos poderiam ser vistos como um modelo empírico que certamente favoreceria a criatividade, as conjecturas e suas respectivas verificações, a motivação e a experimentação. Esse processo servirá de base para a compreensão do aparato lógico e das deduções que envolvem as definições, os teoremas e suas respectivas demonstrações.

Outra possibilidade de abordagem poderia basear-se na construção informal dos números por meio de jogos, e em um segundo momento o desenvolvimento da parte formal da teoria mediante conjuntos. Novamente os jogos forneceriam um modelo empírico que serviria de suporte para a abordagem formal, motivando as principais ideias desenvolvidas na teoria e propiciando as experiências e verificações.

Pode-se considerar ainda a possibilidade de inicialmente construir os números por meio de conjuntos (a partir dos axiomas de Conway), explorando o aspecto *intensional* do conceito de número, e posteriormente abordar os jogos; estes seriam vistos como uma interpretação, aplicação e modelo da teoria. É interessante fazer alusão ao livro *Números surreais*, do matemático Donald. E. Knuth (2002). Nesse livro ele mostra como Conway construiu os números a partir de dois axiomas.

As possibilidades aqui descritas buscam apenas mostrar como a *complementaridade* surge de forma natural na conceituação de número proposta por Conway. Evidentemente, existirá a necessidade de uma organização didática da teoria de Conway antes de qualquer tipo de abordagem, o que possivelmente exigirá algum tipo de transposição didática e com certeza o desenvolvimento de outras pesquisas.

O objetivo deste artigo não é propor a utilização do método de Conway no ensino em substituição das abordagens clássicas, pois isso requer o desenvolvimento de outros estudos visando o desenvolvimento e a experimentação de uma sequência didática. Procuramos apenas acrescentar argumentos que possam subsidiar as discussões acerca da conceituação de número, quando se busca explorar os aspectos *intensional* e *extensional* desse conceito.

A abordagem de Conway pode possibilitar um trajeto original que permite construir, por meio de um único processo, todos esses números, dos naturais aos reais e dos infinitésimos aos transfinitos.

Assim sendo, o método de Conway permite construir os números de forma única, dos naturais aos reais, além de poder ser fundamentado axiomaticamente e interpretado por uma classe de jogos, que constituem as aplicações ou modelos da teoria. Ou seja, o método de Conway possibilita a *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número.

Considerações Finais

A essência do conceito de número é a multiplicidade dotada de certas propriedades correspondentes à ordem interna, ou seja, sua aplicabilidade a todas as coisas e suas características estruturais. A conceituação de número deve ser concebida por meio da *complementaridade* entre seus aspectos *intensional* e *extensional*.

À luz da *complementaridade*, a perspectiva logicista deve ser abandonada por razões de consistência conforme demonstrou Gödel; não pode satisfazer as exigências do pensamento, especialmente do pensamento filosófico.

As perspectivas axiomáticas têm a tendência de socializar a tese de que os números circunscrevem apenas um projeto técnico, fornecendo para esse conceito somente uma característica operacional ou estrutural, de modo que são exploradas exclusivamente as relações entre os objetos matemáticos, com ênfase no aspecto *intensional* do conceito de número.

A tese conjunto-teórica (cortes de Dedekind e classes de equivalência de sequências de Cauchy) não favorece a exploração do aspecto *extensional* do conceito de número, pois não fornece um modelo ou uma interpretação intrínseca às suas teorias.

Nenhuma dessas perspectivas oferece uma unificação do conceito de número. Neste artigo defende-se que uma abordagem que apresente um conceito unificado para tais objetos matemáticos deve ser considerada dentro de uma conjuntura que envolva a Filosofia e a Matemática.

Diante desse contexto está a possibilidade de uma "nova" abordagem: a proposta de J. H. Conway. Tal proposta proporciona a construção dos números naturais aos reais por um processo único, sem rupturas, permite uma abordagem *complementar* entre os

aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número e ainda fornece uma possibilidade de resposta à questão "O que é número?". Nesse caso, a resposta é: "número é um jogo". Em Fonseca (2010), encontra-se uma discussão detalhada acerca das respostas apresentadas por diversas correntes filosóficas a essa questão.

As potencialidades da teoria de Conway descritas neste artigo mostram como a *complementaridade* surge de forma natural na conceituação de número proposta por Conway. De um lado, há alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, caracterizando o aspecto *intensional* do conceito de número. Por outro lado, uma classe de jogos, que fornece um modelo para interpretação de tais números, caracterizando o aspecto *extensional*.

O fato de poder conceituar número a partir de uma classe de jogos pode ser considerado particularmente interessante, pois, o ato de jogar é uma atividade que desde muito cedo esteve presente na civilização. A história da Matemática mostra que matemáticos ao longo do tempo se ocuparam de alguns tipos de jogos, e assim nasceram alguns ramos da Matemática.

Para a Educação Matemática o estabelecimento desse elo também pode ser vantajoso na medida em que associa um conceito matemático, que é abstrato, a uma atividade humana bastante concreta e cultivada desde sempre.

A essas ideias acrescenta-se o fato de que os jogos possibilitam a ação dos sujeitos e a interação deles na atividade matemática, e que, nesse caso, o jogo, sendo um modelo concreto, poderá favorecer o levantamento de conjecturas a respeito da construção dos números.

No processo de construção dos números serão fundamentais as comparações e as análises das configurações dos jogos. Assim, o interesse não se fundamenta no jogo em si próprio, pelo simples prazer de jogar, mas sim nas descobertas das relações envolvidas na construção dos números por meio dos jogos.

Finalmente, vale destacar a fertilidade do conceito de número que ainda abre novas fronteiras para a Matemática. Foram apresentados neste artigo argumentos que podem subsidiar as reflexões em relação às problemáticas que envolvem também o conceito de número real, como a constituição epistemológica de tal conceito.

Referências bibliográficas

Abbagnano, N. (1982). *Dicionário de filosofia*. Tradução de Alfredo Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou.

Conway, J. H. (2001). *On Numbers and Games*. 2. ed. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Dedekind, R. *Essays on the Theory of Numbers*. Tradução de Woostre Woodruff Beman. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1901. Disponível em: <http://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf>. Acesso em: 4 abr. 2010.

Fonseca, R. F. (2010). *A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo.

Frege, G. (1992). *Os fundamentos da aritmética*: *uma investigação lógico-matemática do conceito de número*. Tradução, prefácio e notas de Antônio Zilhão. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

Knuth, D. E. (2002). *Números surreais*. Tradução de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Gradiva.

Kuyk, W. (1977). *Complementarity in Mathematics*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Otte, M. (2003). Complementarity, Sets and Numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203-228.

Russell, B. (2007). *Introdução à filosofia matemática*. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Revisão técnica de Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

O CONHECIMENTO DOS SIGNIFICADOS DE FRACÇÃO DE PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Paula Cardoso
CIEC-Universidade do Minho
p.cardoso.sousa@netcabo.pt

Ema Mamede
CIEC-Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Resumo

O novo Programa de Matemática prolonga o contacto com as fracções no 1.º ciclo do ensino básico e prevê a exploração dos significados de fracção: quociente, parte-todo e operador. Assim, perante um novo programa que exige conhecimentos matemáticos e didácticos inovadores, torna-se fundamental conhecer mais sobre as concepções dos professores sobre o conceito de fracção e seu ensino.

Este artigo descreve um estudo com oito professores do 1.º ciclo que pretende conhecer que conceito de fracção e seus significados possuem estes professores. Procurou-se então responder às seguintes questões: 1) Que conhecimento têm os professores dos diferentes significados de fracção? 2) Que conhecimento didáctico têm sobre estes significados? Conduziram-se entrevistas semi-estruturadas a oito professores do 1.º ciclo de escolas em que o novo Programa está em funcionamento experimental. Os resultados revelaram que os professores possuem uma deficiente concepção de fracção e um limitado conhecimento do novo Programa. A maioria dos professores afirma que no 1.º ciclo só são abordados os significado parte-todo e operador, sendo o significado quociente desconhecido pela maioria dos entrevistados. A selecção das tarefas para a sala de aula é feita tendo em conta, não o grau de dificuldade do significado em que a fracção é utilizada, mas apenas a magnitude dos números envolvidos no problema.

Palavras-chave: significados de fracção, conhecimento do professor

O ensino de fracções no 1.º ciclo

A formação Matemática que, desejavelmente, todos os alunos deverão ter oportunidade de adquirir, contempla o desenvolvimento do sentido de número em geral e o domínio do conceito de número racional em particular. No âmbito deste último, o conceito de fracção constitui-se como um aspecto fundamental para o sucesso da aprendizagem matemática futura das crianças. Porém, este é um conceito reconhecidamente complexo (ver Behr *et al.*,

1983; Kerslake, 1986; Kieren, 1993; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005; Nunes *et al.*, 2004) e, consequentemente, considerado difícil por parte dos alunos.

Constituindo o 1.º ciclo o primeiro contacto formal com o conceito de número racional, importa perceber como este é abordado pelos professores nas suas práticas de ensino. Neste artigo o número racional é entendido como todo o número $\frac{a}{b}$ em que a e b são números inteiros, sendo $b \neq 0$, dado que as orientações curriculares oficiais para o 1.º ciclo contemplam somente o trabalho com números racionais não negativos. Contudo, esta abordagem deve contemplar estes números nas suas representações decimal e fraccionária. A análise aqui conduzida centrar-se-á apenas na representação fraccionária.

Conhecimento matemático e didáctico do professor

Para proporcionar uma aprendizagem matemática significativa, o professor necessita de um sólido conhecimento matemático (Ball, Hill & Bass, 2005; Connell, 2009). Todavia, segundo Ball, Lubienski e Mewborn (2001), o conhecimento matemático por si só não garante boas práticas de ensino, pois é também relevante o modo como os professores utilizam o conhecimento no decurso do seu trabalho. Este último aspecto remete para uma outra dimensão de conhecimento como determinante das práticas de ensino – o conhecimento didáctico.

Sobre o conhecimento do professor Shulman (1986) distingue três dimensões: conhecimento dos conteúdos, conhecimento dos conteúdos pedagógicos e conhecimento do currículo. Estas dimensões afectam a qualidade das práticas de ensino dos professores.

Estudos centrados no conhecimento dos professores sobre os números racionais sugerem que estes têm pouco sucesso e são menos confiantes no domínio dos números racionais do que no domínio dos números naturais (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Na literatura existem referências a um deficiente conhecimento do professor no âmbito dos números racionais. Ball, Lubienski e Mewborn (2001) destacam a dificuldade dos professores em apresentar explicações pedagógicas adequadas para cálculos efectuados no âmbito dos números racionais. Em Portugal, Alves e Gomes (2009) entrevistaram quatro professores do 1.º ciclo do ensino básico com o objectivo de perceber que conhecimento têm os professores da propriedade de densidade do conjunto dos números decimais. Estas

investigadoras identificaram dificuldades dos professores em reconhecer o conjunto dos números decimais como um conjunto denso. Contudo, pouco se sabe ainda sobre as concepções dos professores do 1.º ciclo sobre o conceito de fracção.

As fracções no novo Programa de Matemática

O novo Programa de Matemática destaca como propósito principal desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, entre outros aspectos (DGIDC, 2007).

As mudanças na abordagem de ensino dos números racionais preconizadas pelo novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (DGIDC, 2007), em particular para o 1.º ciclo, exigem do professor um conhecimento matemático e um conhecimento didáctico que podem ser entendidos como inovadores quando comparados com os conhecimentos necessários para a implementação das orientações curriculares oficiais até então em vigor. Desejavelmente, e à luz do novo Programa de Matemática, o professor do 1.º ciclo deve dominar os aspectos essenciais como ordenação, equivalência e representação de fracções, bem como os diferentes significados do conceito de fracção. Vários autores sustentam esta ideia quando sublinham a importância de representar e operar com fracções em todas os significados, com vista a desenvolver um completo conceito de número racional (Behr *et al.*, 1983; Kieren, 1993; Marshall, 1993; Nunes *et al.*, 2004; Streefland, 1991).

O novo Programa de Matemática para o 1.º CEB (DGIDC, 2007) prevê que o conceito de fracção seja abordado nos significados quociente, parte-todo, operador, razão e medida. Contudo, este documento não apresenta ao professor qualquer orientação no que respeita à sequência a ser adoptada aquando da sua implementação, apesar de apresentar exemplos de concretização em cada uma das interpretações, ainda que de forma parca. Neste contexto, o professor facilmente fica com informação insuficiente sobre como explorar a diversidade de significados, apesar daquele documento facultar um exemplo de aplicação para cada significado.

Assim, torna-se fundamental poder conhecer um pouco mais sobre as concepções dos professores do 1.º ciclo no que respeita ao conceito de fracção e seu ensino. Neste sentido, tendo em conta as novas orientações curriculares, importa perceber: 1) Que conhecimento

têm os professores dos diferentes significados de fracção? 2) Que conhecimento didáctico têm sobre estes significados?

Método

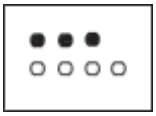
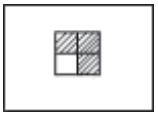
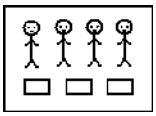
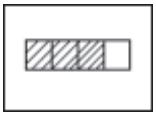
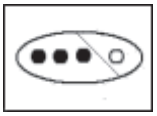
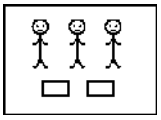
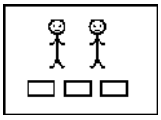
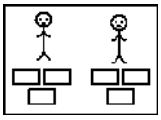
Para conhecer melhor as concepções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico no que respeita ao conceito de fracção e seu ensino conduziram-se entrevistas semi-estruturadas a oito professores do 1.º ciclo, do distrito de Braga, em que o novo Programa de Matemática está em funcionamento experimental. Seleccionaram-se professores com diferentes números de anos de tempo de serviço, diferente situação profissional, diversidade na frequência de formação contínua, e ainda diversidade nos anos de escolaridade que leccionam. As entrevistas individuais tiveram a duração aproximada de 35 minutos.

Para perceber que conhecimentos têm os professores sobre os significados de fracção, foi considerado um grupo de dez questões para análise, centradas nos significados de fracção. Os significados explorados nas entrevistas foram, maioritariamente, quociente, parte-todo e operador, tendo sido utilizados diferentes modos de representação. Para caracterizar o conhecimento didáctico dos professores sobre os significados de fracção, foi solicitado a cada professor que seleccionasse problemas de um grupo de três previamente sugeridos, e propusesse uma sequência a partir da sua selecção, selecção e sequência estas destinadas à abordagem do conceito de fracção, com diferentes significados, na sala de aula.

Assim, o guião das entrevistas era constituído por 11 questões, que foram agrupadas em duas categorias: significados de fracção e conhecimento didáctico sobre esses significados.

A Tabela 1 apresenta exemplos de algumas questões da entrevista por categoria.

Tabela 1 – Exemplos de algumas questões das entrevistas sobre o significado de fracção e seu conhecimento didáctico.

Categorias	**Exemplo de questão**
Significados de fracção	Que figura(s) representa(m) a fracção $\frac{3}{4}$? a) b)  c)  d)  e)  f) 
	Que significados de fracção conhece?
	Que figura(s) pode(m) representar a fracção $\frac{2}{3}$? a)  b)  c)  d) Outra:___
Conhecimento didáctico sobre significados de fracção	Do novo Programa de Matemática constam três tipos de problemas relativamente às fracções: **A** Dois chocolates foram divididos igualmente por 5 crianças. Quanto recebeu cada uma? **B** Uma barra de chocolate foi dividida em 4 partes iguais. O João comeu 3 dessas partes. Que parte de chocolate comeu o João? **C** A Ana tem uma caixa com 48 lápis de cor. O Rui tem $\frac{1}{4}$ dessa quantidade de lápis. Quantos lápis tem ele? 1) Qual ou quais destas situações escolheria para abordar o conceito de fracção? 2) Que sequência daria?

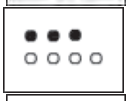
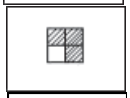
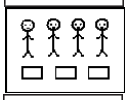
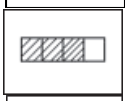
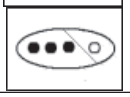
Foi feita uma gravação digital em formato áudio e a entrevistadora preencheu grelhas de notas individuais. Cada entrevistado tinha uma folha de papel para utilizar, se necessário.

Resultados

Quando questionados sobre que significados de fracção conheciam, três professores associaram o conceito de fracção à ideia de partilha, sublinhando que uma fracção é uma divisão. Dois definiram fracção como sendo parte de um todo. Um professor associou os significados de fracção ao conceito de número decimal começando por falar em décima, centésima e milésima. O mesmo professor afirmou que os significados de fracção não fazem parte do programa do 1.º ciclo, salientando que os manuais apenas incluíam situações em que se partia um bolo, por exemplo, em duas partes iguais para introduzir a noção de metade. Um outro professor descreveu como introduziria o conceito de fracção na sala de aula recorrendo à divisão de um bolo em partes. Estes resultados sugerem que os professores têm um fraco domínio dos diferentes significados de fracção, apesar de estes integrarem o novo Programa de Matemática para a educação básica.

A Tabela 2 apresenta a percentagem de respostas correctas a uma questão que envolvia representação pictórica com diferentes significados da fracção 3/4.

Tabela 2 – Percentagem de respostas correctas a uma questão envolvendo representação pictórica com diferentes significados da fracção 3/4 (N=8).

Questão: Que figura(s) representa(m) a fracção 3/4?	
Respostas	**Percentagem de respostas correctas**
	87.5%
	25%
	100%
	0%
	100%
	50%

Na Tabela 2 está bem patente o desconhecimento dos professores relativamente ao significado quociente de fracção, pelo menos no que diz respeito à sua representação

pictórica. Nenhum professor seleccionou a representação pictórica de 3/4 com significado quociente em que se consideram três itens a serem repartidos entre quatro crianças. Contrastando com este resultado, é possível observar os elevados níveis de sucesso quando está envolvida a fracção 3/4 com significado parte-todo. A percentagem de professores que seleccionou a representação pictórica da fracção 3/4 com significado operador é baixa. Segundo os professores, a sua escolha recaiu maioritariamente na representação parte-todo por esta ser a mais utilizada na sala de aula e aquela que consta do Programa de Matemática. Mais uma vez estes resultados sustentam a ideia de que estes professores apresentam falhas no âmbito do conhecimento curricular.

A Tabela 3 apresenta a percentagem de respostas correctas de acordo com o significado de fracção (no significado quociente analisaram-se 24 respostas; no significado parte-todo analisaram-se 16 respostas; no significado operador analisaram-se 24 respostas):

Tabela 3 – Percentagem de respostas correctas em questões sobre o conhecimento dos significados quociente, parte-todo e operador.

Significado	**Percentagem de respostas correctas**
Quociente	37.5%
Parte-todo	62.5%
Operador	29%

A percentagem de respostas correctas é superior a questões com significado parte-todo, o que não é surpreendente já que os professores afirmaram ser esta a situação mais explorada na sala de aula. Menos de metade das questões envolvendo o significado quociente foram respondidas correctamente. A percentagem de respostas correctas mais baixa foi obtida em problemas com significado operador.

Relativamente às questões com significado parte-todo, um professor seleccionou, não só a representação pictórica da fracção 2/3 com significado parte-todo, mas também a representação pictórica com significado de razão. Este professor parecia compreender não só o significado do denominador (número de partes iguais em que o todo é dividido) e do numerador (número de partes retiradas) quando a fracção tem um significado parte-todo,

mas também foi capaz de reconhecer a razão entre as partes sombreadas e as partes não sombreadas.

Nas questões com significado quociente foi comum observar a estranheza dos professores em considerar duas variáveis de natureza diferente. Os professores argumentavam que nas suas aulas utilizavam sempre variáveis da mesma natureza. Por exemplo, um professor afirmou: "O problema destas figuras é que o numerador são os bonecos e o denominador são rectângulos. Quando se retira a parte de um bolo, as fatias não deixam de ser bolo". Outro professor afirmou: "Nas aulas o todo são sempre, pizas ou chocolates. Não aparece esta situação com chocolates e meninos". Não está claro que na fracção com significado quociente, o denominador representa o número de recipientes e o numerador representa o número de itens a dividir pelos recipientes (por exemplo, 2/3 significa que 3 amigos vão repartir de forma justa 2 bolos). Neste tipo de significado 2/3 representa ainda a parte de bolo que cada criança come.

Observou-se também uma tentativa de redução da situação quociente à situação parte-todo por parte de um professor. Na resposta à questão sobre a partilha de três chocolates por quatro meninos, o professor esquematizou um rectângulo dividido em quatro partes iguais das quais três foram sombreadas. Ainda relativamente a este problema, três professores recorreram ao algoritmo da divisão para encontrarem uma resposta. Um destes, após aplicação do algoritmo da divisão, escreveu 0.75 na forma de fracção como 75/100, não considerando a fracção 3/4 como resposta imediata à questão.

Numa das questões com significado quociente solicitava-se ao professor que seleccionasse a(s) resposta(s) correcta(s): "A fracção 3/4 pode significar: a) 3 chocolates que são partilhados por 4 pessoas; b) A parte de chocolate que come cada menino na partilha de 3 chocolates por 4 meninos; c) A parte de chocolate que come cada menino na partilha de 4 chocolates por 3 meninos; d) 4 chocolates que são partilhados por 3 meninos; e) Outro". Cinco professores responderam correctamente a esta questão. Um professor só seleccionou a alínea b), revelando não identificar, neste caso, o denominador da fracção como o número de recipientes e o numerador da fracção como o número de itens a dividir pelos recipientes. Um outro professor seleccionou apenas a alínea d). Este professor procurou representar pictoricamente a fracção 3/4 desenhando quatro chocolates e sombreando três deles. O

mesmo professor afirmou: “Estou confuso... O todo não é o mesmo. Nas aulas utilizo só chocolates, por exemplo.” Um outro professor seleccionou as alíneas c) e d), afirmando “O todo são os chocolates… aquilo que seleccionamos como um todo é quatro, portanto tem de ser a d). A alínea c) corresponde à alínea d)”. Mais uma vez assistimos a uma tentativa de reduzir a situação quociente a uma situação mais familiar como a situação parte-todo ou operador.

Outro resultado surpreendente ocorreu na resposta a uma questão com significado operador. Dada uma representação pictórica com 12 contas e 4 taças pretendia-se saber que parte das contas teria cada taça, sabendo que cada taça tem o mesmo número de contas. Apenas dois professores responderam correctamente. Seis professores responderam que cada taça teria 3 contas, depois de fazerem a divisão de 12 por 4, ignorando a que parte do conjunto inicial correspondem as três contas obtidas.

Com o intuito de saber mais sobre o conhecimento didáctico dos professores acerca dos significados quociente, parte-todo e operador, foram-lhes apresentados três tipos de problemas que constam do Programa de Matemática (ver Tabela 1, questão sobre o conhecimento didáctico dos significados de fracções). Posteriormente, foi-lhes perguntado qual os problemas que seleccionariam e que sequência utilizariam para abordar o conceito de fracção.

A Tabela 4 apresenta a percentagem de respostas correctas de acordo com o significado de fracção (no significado quociente analisaram-se 24 respostas; no significado parte-todo analisaram-se 16 respostas; no significado operador analisaram-se 24 respostas):

Tabela 4 – Frequência de respostas à questão sobre o conhecimento didáctico dos significados de fracção (N=8)

Tipo de resposta	**Frequência de resposta**
A; B; C	2
B; A; C	1
C; A	1
B; C	3
C; B	1

Metade dos professores excluiu o problema com significado quociente. Os argumentos apresentados para esta exclusão recaíram sobre o tipo de números envolvidos no problema e não no grau de dificuldade do significado da fracção envolvida no problema. No problema com significado quociente, os números envolvidos (2 e 5) tornavam o problema naturalmente mais difícil do que os números presentes nos outros dois problemas (3 e 4; 1 e 4). De acordo com os professores, seria mais intuitivo resolver os problemas que envolviam quartos. Os argumentos apresentados pareciam basear-se no pressuposto de que a resolução da tarefa com significado quociente passava por aplicar o algoritmo da divisão, pois referiram que "fazer a divisão de 2 por 5 é mais difícil para os alunos". Um professor disse mesmo que a referida tarefa era mais abstracta e que os alunos teriam de aplicar estratégias que não dominam na sua resolução. Um outro professor referiu que o facto de as unidades serem duas (dois chocolates) dificulta a resolução da tarefa com significado quociente.

Apenas dois professores consideraram ser melhor começar com a tarefa com significado quociente, referindo que esta permitia explorar o conceito de divisão. Um destes professores afirmou que, numa primeira abordagem, levaria dois chocolates que dividiria por cinco meninos de maneira a que todos ficassem com partes iguais.

Atendendo a que a fracção (1/4) envolvida na tarefa apresentada na situação operador seria mais intuitiva para os alunos, dois professores afirmaram que começariam por explorar esta situação. Um deles sublinhou que os alunos estariam mais familiarizados com a fracção um quarto, por exemplo, por causa dos quartos de hora. Mais uma vez fica claro que o critério para a selecção dos problemas, não era o significado da fracção, mas a possível dificuldade que advinha dos números envolvidos no problema. Nenhum dos professores estabeleceu qualquer consideração sobre a aplicação de um problema deste tipo envolver outros números.

Apenas um professor não seleccionou a tarefa com significado parte-todo. Neste caso a justificação apresentada para a exclusão foi: "Existe uma parte incógnita e por isso é mais difícil para os alunos".

Discussão e conclusões

Os resultados sugerem que estes professores parecem ter um deficiente conceito de fracção sendo notória a dificuldade em indicar diferentes significados do conceito de fracção. Uma análise ao conhecimento dos professores sobre os diferentes significados de fracção revela que o significado parte-todo é aquele com que se sentem mais familiarizados, revelando dificuldades com os significados operador e quociente. A sobrevalorização do significado parte-todo está patente em afirmações dos professores quando referem a situação parte-todo como a única a ser explorada nas salas de aula do 1.º ciclo. Ora, o novo Programa apresenta diferentes significados do conceito de fracção a serem explorados na aula e que o professor deveria dominar. Esta situação levanta questões sobre o sucesso das práticas lectivas, já que, de acordo com Ball, Hill e Bass (2005) e Connell, (2009), para proporcionar aos alunos uma aprendizagem matemática significativa, o professor necessita possuir um sólido conhecimento matemático. Mais ainda, vários autores sublinham a importância de representar e operar com fracções em todos os significados, com vista a desenvolver um completo conceito de número racional (Behr *et al*., 1983; Kieren, 1993; Marshall, 1993; Nunes *et al*., 2004; Streefland, 1991).

Uma outra perspectiva da análise aqui conduzida, prende-se com a postura didáctica dos professores quando confrontados com problemas envolvendo diferentes significados de fracção, nomeadamente os significados quociente, parte-todo e operador. Apenas três professores consideraram que todos os problemas deveriam ser explorados na sala de aula. Surpreendentemente, metade optou por não incluir o significado quociente na sua selecção. Daqueles que escolheram este significado, metade não o escolheu para fazer uma primeira abordagem ao conceito de fracção. Dois professores, propuseram o problema com significado operador para iniciar o trabalho com fracções. Seis professores justificaram as suas opções com base nos valores envolvidos no problema que tornariam a sua interpretação mais ou menos intuitiva, e não com base no grau de dificuldade que o significado da fracção assume. Estas opções didácticas e os critérios que as orientam levantam sérias questões sobre o sucesso das práticas lectivas como promoção de uma aprendizagem significativa.

Estes resultados perspectivam, pois, um cenário de desconhecimento por parte dos professores das orientações curriculares preconizadas no novo Programa. Shulman (1986) salienta a importância do conhecimento dos conteúdos pedagógicos, que inclui o conhecimento de conteúdos numa perspectiva de ensino, isto é, inclui formas de abordar determinados conteúdos bem como a consciência daquilo que poderá provocar mais ou menos dificuldades na aprendizagem desses conteúdos. Os professores aqui entrevistados parecem desconhecer alguns destes aspectos.

O conhecimento sobre as práticas de ensino do conceito de fracção dos professores requer ainda muita atenção por parte dos investigadores. Mais trabalhos de investigação serão necessários para compreendermos claramente como exploram os professores do 1.ºciclo o conceito de fracção, em sala de aula. Porém, podemos desde já questionarmo-nos sobre o que pode ser feito para ultrapassar dificuldades conceptuais e pedagógicas no ensino das fracções.

Referências bibliográficas

Alves, B. & Gomes, A. (2009). O conhecimento de professores do 1º ciclo do Ensino Básico sobre a densidade do conjunto dos números decimais. In Gomes, A. (Ed.), *Elementary Mathematics Education. Proceedings of the 3rd International Meeting* (pp. 73-85). Braga: AEME-Universidade do Minho.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (Fall 2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-46.

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical Knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*, 4th ed., (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92-127). New York: Academic Press.

Connell, M. (2009). Teaching Mathematics. In L. J. Saha & A. G. Dworkin (Eds), *International Handbook of Research on Teachers* and *Teaching* (pp. 967-974). New York: Springer Science + Business Media LLC.

DGIDC - Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC

Acedido em 4 de Janeiro, 2008, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/PressReleases/Paginas/ProgramadeMatematicadoEnsinoBasico.aspx

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors – A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1993). Fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter & E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Marshall, S. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers – An Integration of Research* (pp. 261-288). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-104.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Shulman, L. S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

SIMPÓSIO 2

ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Marisa Bernardo
Escola Básica 2.º e 3.º Ciclo António Sérgio
marisaisabelbernardo@hotmail.com

Introdução

Este simpósio tem como objectivo apresentar e discutir estudos incidentes no ensino e na aprendizagem da Geometria. Começamos por clarificar alguns dos conceitos essenciais a propósito das orientações curriculares actuais e, em seguida, enquadramos as comunicações deste simpósio nas questões de investigação que presentemente se colocam neste domínio.

O ensino e a aprendizagem da Geometria

O ensino e a aprendizagem da Geometria constituem-se como um campo que tem vindo a ser estudado, tanto a nível internacional como nacional, embora não de forma tão extensiva como tem sucedido noutros campos de investigação. Dada a importância deste ramo da matemática, bem como a relevância que a sua aprendizagem assume no contexto da educação matemática, a Geometria continua a ser uma área carente de investigação, e onde os resultados de estudos empíricos podem, e devem, imperiosamente, ser acolhidos, no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, desde os níveis mais básicos de escolaridade aos mais avançados, assim como das implicações didácticas emergentes. Esta é uma área onde os alunos revelam dificuldades de diversa ordem (Battista, 2007), o que, por si só, justifica a pertinência da investigação incidente na mesma.

Após um período marcado pela reforma da Matemática Moderna dos anos 60 do século passado, em que existiu uma tentativa de algebrização da Geometria, levando ao seu quase desaparecimento no currículo de Matemática, a Geometria ganhou espaço e visibilidade, no nosso país, na reforma curricular de Matemática dos anos 90, embora tenha mantido pouca expressão no nível curricular em acção (Sacristán, 2000), dadas as

experiências escolares dos professores da altura, pautadas pela recessão da Geometria. Actualmente, as orientações curriculares (DGIDC, 2007; Heuvel-Panhuizen, 2005; NCTM, 2008), quer em Portugal, quer noutros países, conferem um lugar de destaque à Geometria, apontando para a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial, enquanto propósito principal do ensino da Geometria. A visualização é entendida como construção e manipulação de representações mentais de objectos bi e tri-dimensionais, bem como percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas (NCTM, 2008). Subjacente à maior parte do pensamento geométrico, que consiste na invenção e no uso de sistemas conceptuais formais para investigar a forma e o espaço, encontra-se o raciocínio espacial (Battista, 2007). Segundo Battista (2007, p. 843), este tipo de raciocínio prende-se com "a capacidade de 'ver', examinar e reflectir sobre objectos espaciais, imagens, relações e transformações", envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais. Está, pois, associado à visualização espacial, à compreensão de formas e figuras geométricas, suas propriedades e relações, bem como à orientação espacial (Nes e de Lange, 2007).

Por outro lado, os vários documentos curriculares actuais, internacionais e nacionais, são convergentes no que respeita à forma de encarar a Geometria como um campo de excelência para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, centrado nas relações entre os objectos geométricos e na articulação de argumentos acerca das suas propriedades, os quais poderão vir a constituir-se como demonstrações. São vários os autores que destacam a ideia de a Geometria ser o domínio da matemática que mais se presta para a utilização de demonstrações explicativas, uma vez que a maior parte das mesmas assumem esta função (Hanna, 2000; Rodrigues, 2008). Assim, a relação entre a experimentação e a dedução, em Geometria, é um dos aspectos em que se regista convergência, seja nas orientações curriculares, seja na literatura da educação matemática (Alsina, 1999; Hanna, 2000).

Contributos da investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria

De acordo com vários autores (Clements e Battista, 2001; Lehrer, Kenkins e Osana, 1998), o desenvolvimento do pensamento geométrico das crianças depende tanto da maturação como da instrução. Por outro lado, o aprendente de Geometria desenvolve experiências de natureza geométrica como fazendo parte de si próprio, enquanto vai

evoluindo nesse processo. Nesta perspectiva, a aprendizagem é também uma forma de identidade, de vir a ser, e de se tornar sendo (Brown, 2011; Wenger, 1998). Assumindo a importância das experiências geométricas vividas pelas crianças no desenvolvimento do pensamento geométrico, o trabalho de Cristina Alves e Alexandra Gomes apresenta alguns dos resultados da avaliação diagnóstica feita no âmbito de uma investigação mais ampla, que tem como objectivo estudar de que forma as competências de visualização são trabalhadas no pré-escolar e 1.º ano e de que forma as crianças exibem essas competências de visualização. Enquadrando-se na teoria de Van Hiele (1999) do desenvolvimento do pensamento geométrico e adoptando a categorização das capacidades associadas ao desenvolvimento do sentido espacial proposta por Del Grande (1990), esta comunicação apresenta e discute os resultados relativos à avaliação diagnóstica de algumas dessas capacidades, em crianças dos três aos seis anos.

A representação constitui um conceito importante no domínio da aprendizagem da Geometria pois, tal como é sublinhado por Battista (2007), no pensamento geométrico, raciocina-se acerca de objectos e raciocina-se com representações. Quando pensamos em figuras geométricas, elas são simultaneamente conceitos e representações espaciais. Ou seja, elas terão a natureza de objectos quando for possível inferir relações a serem usadas no pensamento geométrico, mas, se pelo contrário, as representações externas tiverem simplesmente a natureza de ilustrações, sem que se extraia das mesmas relações geométricas, a sua percepção visual pode entrar em contradição com as próprias afirmações verbais (Mesquita, 1998). A comunicação apresentada por Tiago Tempera centra-se nas representações de planificações do cubo, e enquadra-se numa investigação que teve como objectivo caracterizar o conhecimento em geometria de estudantes em formação inicial de professores. O estudo apresentado suscita, por um lado, a relevância de um trabalho focado em representações 2D de objectos 3D, enquanto componente importante do desenvolvimento do raciocínio espacial, e por outro, a reflexão sobre as razões que poderão fundamentar o facto de futuros professores evidenciarem as mesmas dificuldades conceptuais de alunos dos 1.º ou 2.º Ciclos do Ensino Básico, bem como sobre a importância de um conhecimento aprofundado da matemática elementar que ensinam, por parte dos professores, como factor a considerar no nível de aprendizagem dos alunos (Ball, Hill e Bass, 2005; Ma, 2009; Zazkis e Zazkis, 2011).

A comunicação de Joana Latas e Darlinda Moreira insere-se numa investigação mais ampla onde se desenvolveu um projecto curricular, numa turma de 7.º ano de escolaridade, que seguiu uma abordagem etnomatemática, segundo a qual o conhecimento matemático resulta de uma produção cultural humana, e discute as potencialidades dessa abordagem para o desenvolvimento da comunicação matemática e para tornar visível a matemática implícita nas experiências culturais dos alunos. Numa fase posterior do projecto, os conceitos geométricos foram formalizados depois de terem sido trabalhados de forma implícita e intensivamente. Assim, este trabalho levanta questões sobre a forma de estabelecer a conexão entre o conhecimento geométrico e as práticas culturais dos alunos e como podem estas ser enriquecidas com um ponto de vista matemático.

Embora a Medida constitua um campo que se autonomizou da Geometria com o desenvolvimento da matemática, ambos mantêm uma íntima ligação. De facto, a Medida foca-se numa abordagem numérica ao espaço e nas grandezas associadas mas muitas das questões colocadas neste âmbito são de natureza geométrica, com relação com a visualização e o raciocínio espacial. Tal como sublinhado por Battista (2007, p. 891), "a Medida desempenha um papel central no raciocínio acerca de todos os aspectos do nosso ambiente espacial". As próprias dificuldades dos alunos em tarefas de medida de grandezas, como sejam o comprimento ou a área, podem ser equacionadas de um ponto de vista geométrico. São vários os conceitos que subjazem a aprendizagem do comprimento — compreensão, conservação, transitividade, partição equitativa, iteração da unidade, acumulação da distância e aditividade, e relação entre o número e a medição — e da área — conservação, partição equitativa, iteração da unidade, e estruturação do modelo rectangular (Clements e Sarama, 2009) — e aos quais o professor deverá atender quando pensa numa trajectória de aprendizagem (Simon, 1995) destes tópicos, em particular. O trabalho que aqui apresentam Carla Lavrador e Henrique Guimarães teve como objectivo principal a caracterização das práticas dos alunos de uma turma do Curso de Educação e Formação na resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros. A sua comunicação contribui para a caracterização das dificuldades dos alunos na resolução de tarefas que envolvem esses conceitos, discutindo-as relativamente à linguagem, à visualização e à compreensão conceptual.

Por fim, a comunicação de Marisa Dias e Fumikazu Saito, situando-se no enquadramento da teoria da actividade (Leont'ev, 1978), discute as potencialidades pedagógicas de uma actividade que procurou construir e utilizar um instrumento de medida do século XVI, o báculo, assumindo que a história da matemática poderá ser um recurso a potenciar na educação matemática. Essa actividade envolveu estudantes do curso de licenciatura em matemática, professores que leccionam Matemática e mestrandos em Educação Matemática. Os conhecimentos que compõem a concepção do processo de medição são equacionados na articulação com a interpretação da leitura do tratado de medida *Del modo di misurare*, suscitando uma reflexão acerca das potencialidades pedagógicas da actividade didáctica com o instrumento para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, nomeadamente a semelhança de triângulos.

A diversidade de comunicações deste simpósio potencia a discussão do ensino e aprendizagem da Geometria por múltiplos pontos de vista, e diferentes enquadramentos teóricos. É, pois, um contributo para o confronto de perspectivas, para a clarificação de algumas questões e sobretudo para a identificação de novos problemas a agendar na investigação em educação matemática. Assim, este simpósio, focando-se em contextos educativos diversos, desde o pré-escolar à formação inicial e especializada de professores, constitui-se como um espaço de debate em torno da especificidade do pensamento geométrico e das respectivas implicações para o ensino e a aprendizagem da Geometria, bem como do papel e do lugar reservado à Geometria no currículo de Matemática.

Referências bibliográficas

Alsina, C. (1999). Intuición y deducción en geometria. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Org.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp. 33-42). Reston, VA: NCTM.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and wow can we decide? Acedido em 21 de Julho, 2011 de http://www.aft.org/pdfs/americaneducator/fall2005/BallF05.pdf.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Reston, VA: NCTM.

Brown, T. (2011). Rethinking objectivity and subjectivity: Redistributing the psychological in mathematics education. In B. Ubuz (Ed.), *Proc. 35th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME.

Clements, D, & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. New York: Routledge.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (2001). Logo and Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*. Reston, VA: NCTM.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 14-20.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. ME, Departamento da Educação Básica.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 5-23.

Heuvel-Panhuizen, M. (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry*. TAL Project, Freudhental institute, Utrecht University, National Institute for Curriculum Development.

Lehrer, R., Kenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality*. New Jersey: Prentice Hall.

Ma, L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva. (Obra original em inglês publicada em 1999)

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Obra original em inglês publicada em 2000)

Nes, F. & Lange, J. (2007). Mathematics Education and neurosciences: Relating spatial structures to the development of spacial sense and number sense. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(2), 210-229.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1991)

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), pp.115-145.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310 – 316.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zazkis, R. & Zazkis, D. (2011). The significance of mathematical knowledge in teaching elementary methods courses: Perspectives of mathematics teacher educators. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 247-263.

UMA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SOBRE A PERCEPÇÃO DE RELAÇÕES ESPACIAIS EM CRIANÇAS DOS 3 AOS 6 ANOS

Cristina da Silva Alves
Agrupamento de Escolas de Vila Cova
cristinalves8@gmail.com

Alexandra Gomes
Universidade do Minho
magomes@ie.uminho.pt

Resumo

Neste artigo apresentamos os resultados da avaliação diagnóstica efectuada no âmbito do projecto de doutoramento em Estudos da Criança que tem como objectivo estudar de que forma as competências de visualização são trabalhadas no pré-escolar e 1.º ano e de que forma as crianças exibem essas competências de visualização. Para tal, recorremos a quatro turmas (duas do pré-escolar e duas do primeiro ano) de um Agrupamento de Barcelos, e elaboramos um conjunto de tarefas de avaliação diagnóstica, algumas criadas para o efeito, outras retiradas da adaptação espanhola do "TEMA3 – Test de competencia matemática básica". Como resultado desta avaliação diagnóstica foi possível constatar alguns erros frequentes que as crianças cometem no modo como percepcionam os objectos tridimensionais e a destreza ou falta dela no uso de alguns materiais manipuláveis.

Palavras-chave: competências de visualização; avaliação diagnóstica; erros frequentes; materiais manipuláveis.

Introdução

Após uma análise aos resultados das provas de aferição de Matemática do 4.º e 6.º anos e exames nacionais de Matemática do 9.º ano de um Agrupamento, ao longo dos últimos anos, e de se ter constatado que a Geometria era um dos domínios temáticos com piores resultados, resolvemos debruçar-nos sobre o processo de aquisição de competências geométricas nos primeiros anos.

Segundo vários autores (NCTM, 1994; Abrantes, Serrazina, Oliveira, Loureiro & Nunes, 1999; Maia, 2009), tudo o que as crianças aprendem e a forma como o fazem influencia as aprendizagens futuras, e isso torna-se mais evidente numa área como a Matemática, onde o conhecimento é hierarquizado, isto é, a compreensão de um determinado saber suporta outros e a não compreensão impede o entendimento de outros. De facto, a aprendizagem de certos conceitos não se inicia no momento em que

as definições formais correspondentes são apresentadas mas, nalguns casos, muitos anos antes quando ocorre o primeiro contacto, de modo informal, com esses conceitos. As ideias matemáticas que as crianças adquirem no jardim de infância e primeiro ciclo constituem a base para todo o percurso posterior em matemática. Por isso, Maia (2009) defende que os professores de cada nível de ensino devem conhecer as crianças que recebem nas suas turmas e como estas adquiriram/adquirem os conhecimentos.

Sendo o campo da Geometria tão extenso, decidimos estudar de que forma as competências de visualização são trabalhadas no pré-escolar e 1.º ano e de que forma as crianças exibem essas competências de visualização.

Desenvolvimento do pensamento geométrico

Van Hiele (1999) refere que o ensino da geometria pode ser estimulado e enriquecido por actividades lúdicas com diferentes materiais manipulativos como mosaicos, blocos ou azulejos com padrões, puzzles tipo tangram, ou outros, mas defende que o essencial é providenciar um ensino apropriado ao nível de pensamento das crianças. Segundo ele, o pensamento geométrico das crianças desenvolve-se segundo cinco níveis: o ***nível visual***, que começa com o pensamento não verbal e onde as figuras são julgadas pela sua aparência; o ***nível descritivo ou de análise***, em que a linguagem é crucial para descrever as formas e propriedades das figuras, embora, não se verifique uma ordenação lógica das propriedades; o ***nível de dedução informal ou ordenação***, onde as propriedades são ordenadas logicamente e são deduzidas umas a partir das outras; o ***nível de dedução formal***, onde teoremas e proposições são deduzidos a partir de axiomas e definições e portanto a geometria é entendida como um sistema dedutivo; e por fim o ***nível do rigor***, onde os aspectos formais dos diferentes sistemas axiomáticos para a Geometria são comparados e analisados. Por sua vez, Clements e Battista, citados por Davis e Hyun (2005), sugerem um nível de pensamento geométrico anterior ao nível visual apresentado por van Hiele, o ***nível de pré-reconhecimento***. Eles referem que neste nível as crianças são capazes de aprender e distinguir formas geométricas, considerando apenas um aspecto das suas características visuais – distinguem o quadrado do círculo, porque o primeiro é rectilíneo e o segundo curvilíneo, no entanto não distinguem figuras da mesma classe como o quadrado e o triângulo.

Um breve olhar sobre a evolução do ensino da geometria

Para van Hiele (1999) o ensino da geometria nem sempre foi proporcionado de uma forma correcta, uma vez que, durante muito tempo, a geometria ensinada no ensino secundário e baseada na axiomática formal de Euclides, pressupunha que o nível de pensamento dos alunos era dedutivo formal. Como não foi isso que se veio a verificar, e atendendo que "o desenvolvimento [do pensamento geométrico dos alunos] é mais dependente da instrução do que da idade ou maturação biológica, e que o tipo de experiências de ensino podem promover, ou impedir, o desenvolvimento" criaram-se lacunas na compreensão de pré-requisitos sobre geometria.

Abrantes et al. (1999) relatam também a evolução do ensino da geometria em Portugal, no fim do século XX e início do século XXI:

> "Em Portugal, durante as décadas de setenta e oitenta, em consequência da reforma da Matemática Moderna, a geometria tendia a ser vista como um parente pobre da álgebra linear, sem grande interesse para o prosseguimento de estudos. O seu papel era o de ilustrar o carácter axiomático e dedutivo da matemática. Na prática, os aspectos da geometria ligados à observação, à experimentação e à construção praticamente desapareceram do ensino básico.
>
> As tendências actuais procuram romper com esta situação. A geometria é essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação. De acordo com esta perspectiva, destacam-se, como aspectos a desenvolver, as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas". (p. 67)

Assiste-se então a uma mudança no ensino da Matemática em geral, e da geometria em particular, deixando o foco de estar centrado no professor, nos conhecimentos que este detém e que por sua vez os alunos têm de memorizar, apreender e replicar, para passar a estar centrado nos alunos e no modo como estes percepcionam, experimentam, constroem o seu próprio conhecimento e o integram nos saberes já assimilados. Com estas mudanças pretende-se que as aulas expositivas, com demonstrações e construções rigorosas dêem lugar a aulas dinâmicas, interactivas, com materiais manipulativos e tecnológicos, sequenciais. Estas mudanças pressupõem reestruturações nalguns tópicos curriculares, no papel do professor e do aluno, na focalização no raciocínio em vez do resultado final, basicamente na implementação de novas práticas de ensino.

Competências de visualização

São vários os autores que defendem que as crianças pequenas revelam competências surpreendentes e especializadas em vários domínios, nomeadamente em matemática (Barros & Palhares, 1997; Gelman, 2006; Ginsburg, Cannon, Eisenband & Pappas, 2006). Gelman (2006) menciona mesmo que o modo como as crianças pequenas formam um conjunto de conceitos é semelhante ao dos adultos e que o conhecimento que elas constroem é uma mistura singular de competências precoces e reorganizações conceptuais, isto é, os conceitos formados e interiorizados são utilizados como suporte para a aquisição de conhecimento adicional.

A verdade é que, já no pré-escolar, as crianças são capazes de formar não só conceitos variados e subtis, como também raciocinar sobre conceitos que não são totalmente óbvios, e a dimensão e precisão com que o fazem revela competências precoces que não são fáceis de explicitar por si só de onde é que surgem (Gelman, 2006). Gelman e Baillargeon (citado por Gelman, 2006), defendam que "com tarefas apropriadamente sensíveis, as crianças podem mostrar habilidades que não aparecem nas suas acções quotidianas" (p. 150).

No que respeita à geometria e à visualização espacial, se por um lado a "geometria constitui um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial" (Abrantes et al., 1999, p. 67), por outro lado, a visualização espacial é "simultaneamente facilitadora de uma aprendizagem da Geometria, e desenvolvida pelas experiências geométricas na sala de aula" (Matos & Gordo, 1993, p. 13).

Os trabalhos desenvolvidos nesta área são reduzidos, destacando-se um estudo de Arriaga, Silva, & Esteves (2001) sobre os efeitos de um jogo de computador nas aptidões perceptivas e espaciais. Neste estudo, analisou-se os efeitos do jogo DxTris, um tipo de jogo Tetris, em crianças do primeiro ciclo do ensino básico, ao nível das relações espaciais, constância da forma e orientação espacial. Definindo dois grupos – experimental e de controlo – e usando uma metodologia quase experimental, os autores puderam constatar que, antes da experiência, os grupos eram bastante homogéneos, no que respeita ao tempo dedicado aos jogos electrónicos e ao desempenho inicial no jogo. Esta homogeneidade verifica-se entre géneros e em duas das aptidões perceptivas e espaciais estudadas – orientação espacial e relações espaciais – embora, curiosamente,

na prova de constância da forma as raparigas revelem melhores resultados. Após um período de três semanas de jogo, com o grupo experimental a jogar diariamente 15 minutos, os autores constataram uma melhoria significativa no desempenho das relações espaciais, o que não se verificou nas outras duas aptidões perceptivas e espaciais, orientação espacial (não se verificaram diferenças entre os dois momentos de avaliação – pré-teste e pós-teste) e constância da forma (os resultados pós-teste foram piores que os do pré-teste). Os autores concluíram que "os jogos de computador podem representar um importante meio de desenvolvimento das competências perceptivas e espaciais, principalmente das relações espaciais" (p. 22).

Matos e Gordo (1993) desenvolveram um estudo onde propõem diversas actividades a implementar com os alunos, relacionadas com as sete capacidades de visualização espacial: **coordenação visual-motora**; **memória visual**; **percepção figura-fundo**; **constância perceptual**; **percepção da posição no espaço**; **percepção de relações espaciais** e **discriminação visual**.

Atendendo à importância dada às capacidades de visualização espacial, pretendemos reflectir sobre algumas delas, tendo por base a análise das respostas dadas por crianças dos 3 aos 6 anos, em diferentes tarefas de avaliação diagnóstica.

Metodologia

Tendo por base que na "aprendizagem da matemática, como em qualquer outra área, as crianças são enormemente dependentes do ambiente e dos materiais à sua disposição" (M.E., 2004, p. 168), foram elaborados alguns materiais para efectuar uma avaliação diagnóstica às crianças que iriam participar neste estudo de caso qualitativo.

Atendendo à faixa etária dos alunos envolvidos, decidiu-se que a recolha de dados seria feita a partir de um conjunto de entrevistas semi-estruturadas (a pares e, nalguns casos, individuais), auxiliadas pela presença de um suporte vídeo e áudio e baseadas na ficha de avaliação diagnóstica.

Caracterização das turmas

Participaram neste estudo quatro turmas, duas do pré-escolar e duas do primeiro ciclo, de três estabelecimentos de ensino (uma EB1/JI, um JI e uma EBI).

A Tabela 1 apresenta a distribuição das crianças por idade e pelos diferentes estabelecimentos de ensino.

	3 anos	4 anos	5 anos	6 anos	Total
JI	4	5	13		22
EB1/JI	2	5	9	7	23
EBI				16	16
Total	6	10	22	23	61

Tabela 1

As escolas inserem-se num meio rural, de duas freguesias do concelho de Barcelos, e ficam situadas aproximadamente a 10 km do centro da cidade.

A avaliação diagnóstica

Para averiguar os conhecimentos que as crianças tinham e que poderiam ser considerados pré-requisitos essenciais para a realização de actividades futuras, foi-lhes efectuada uma avaliação diagnóstica. A título de exemplo pode-se referir que uma das tarefas pretendia averiguar até que ponto as crianças distinguiam e associavam correctamente o nome à cor primária solicitada (azul, amarelo e vermelho) e outra se as crianças sabiam contar até cinco.

Elaboramos uma ficha de avaliação diagnóstica exaustiva (com 48 tarefas), dividida por idades, em que a crianças com três anos correspondem 11 itens, a crianças com quatro anos correspondem 8 itens, a crianças com cinco anos correspondem 13 itens e a crianças com seis anos correspondem 16 itens. Alguns dos itens da ficha foram retirados da versão espanhola do "TEMA3 – Test de competencia matemática básica", enquanto outros itens foram elaborados propositadamente para integrar esta ficha de avaliação diagnóstica e pretendem averiguar algumas capacidades de visualização das crianças.

Tarefas apresentadas às crianças

As tarefas propostas na avaliação diagnóstica foram de três tipos – numéricas, geométricas e outras (sendo que neste trabalho apenas iremos focar-nos nas tarefas geométricas). As tarefas geométricas propostas visam avaliar algumas competências de visualização (memória visual, constância perceptual, percepção figura-fundo; percepção da posição no espaço e percepção de relações espaciais), bem como o conhecimento de formas e vocabulário geométrico, pelo que foram aplicadas às crianças da faixa etária à qual se destinava o teste e de idade superior, ou seja, as tarefas geométricas do teste diagnóstico da faixa etária dos três anos foram aplicadas às crianças de três, quatro, cinco e seis anos.

A distribuição das tarefas por idades foi feita atendendo à divisão apresentada pelo TEMA 3 (no que respeita às tarefas numéricas) e à observação daquilo que as crianças faziam em contexto sala de aula (no que concerne às restantes tarefas).

Desenvolvimento das entrevistas

As entrevistas foram realizadas por uma das investigadoras, tendo a ficha diagnóstica servido de guião das mesmas. Estas decorreram em período lectivo, numa sala ou gabinete próximo da sala de aula. As crianças do pré-escolar participaram maioritariamente em pares e as crianças do 1.º ano individualmente, tendo a duração de cada entrevista variado consoante a tarefa, a atitude e receptividade das crianças, nunca excedendo uma hora. Enquanto no pré-escolar as entrevistas decorreram no período da manhã após o lanche (11h – 12h) e no período da tarde (13h30 – 15h30), no 1º ano realizaram-se quase exclusivamente no horário das AEC's (15h45 – 17h30).

Alguns resultados

Desde o início foi visível o envolvimento de todas as crianças na realização das tarefas propostas e o à vontade que estas têm na presença de um gravador ou máquina de

filmar, uma vez que no agrupamento estes instrumentos são usuais no dia-a-dia das suas actividades.

A apresentação e reflexão que iremos fazer de seguida têm por base algumas tarefas geométricas. Elas foram escolhidas tendo em vista as diferentes respostas dadas pelas crianças e a frequência com que as mesmas eram apresentadas.

Uma das tarefas apresentadas, consistia em pedir às crianças que utilizando cubos coloridos fizessem uma construção igual à do cartão que estava à sua frente. A construção referente ao primeiro cartão, de prática (Figura 1) servia para clarificar o que se pretendia com a tarefa.

Figura 1

Das quatro crianças com três anos que fizeram esta tarefa, apenas uma delas a fez sem qualquer tipo de ajuda. Nas restantes amostras por idades verificou-se que: quatro das dez crianças com quatro anos fizeram a construção correctamente sem necessitar de qualquer tipo de orientação; o número de crianças com cinco anos que fez correctamente a construção foi de treze em vinte e duas e na faixa etária dos seis anos, o número aumentou para vinte e duas, num total de vinte e três.

Sendo esta a primeira construção a ser feita, é aceitável que as crianças tenham dúvidas e necessitem de alguma orientação no desenrolar da tarefa. Convém referir que a ajuda ou orientação dada às crianças foi no sentido de elas contarem e compararem o número de cubos de cada cor que viam no cartão e na sua construção. Algumas vezes as crianças apenas eram chamadas à atenção para olharem com mais atenção para a imagem do cartão.

Figura 2

O número de crianças que conseguiu fazer, correctamente e sem ajudas, a construção referente ao segundo cartão (Figura 2), aumentou significativamente. Embora tal crescimento não fosse tão visível nas crianças mais novas, de três anos, onde apenas duas conseguiram fazer a construção correcta, sem qualquer tipo de ajuda, este aumento foi significativo nas crianças com quatro, cinco e seis anos. De facto, apenas uma das dez crianças com quatro anos necessitou de alguma orientação para fazer a construção correctamente, sendo que nenhuma das crianças desta faixa etária errou a construção. No que concerne às crianças com cinco

anos, os dados recolhidos revelam que quatro crianças fizeram de forma incorrecta a construção, tendo as restantes dezoito efectuado correctamente sem ajudas. Na faixa etária dos seis anos, todos os alunos fizeram correctamente a construção referente a este cartão.

A dificuldade sentida pelas crianças, na realização desta construção, não se prende com a identificação do número de cubos de cada cor (2 amarelos, 1 azul e 2 vermelhos), mas com a posição dos cubos, uns em relação aos outros. As crianças de três anos que erraram a construção, entendem que o cubo azul está à frente dos cubos amarelos e que estes estão um em cima do outro formando uma torre, no entanto, ou posicionam os vermelhos lado a lado com o azul ou atrás da torre amarela (Figuras 3 e 4). Estas mesmas construções e outras (Figura 5) foram também realizadas por algumas crianças com cinco anos.

Figura 3

Figura 4

Figura 5

De todas as construções apresentadas às crianças, a construção referente ao terceiro cartão (Figura 6) foi aquela que gerou mais dúvidas e hesitações, sendo a construção à qual corresponde um menor número de crianças a efectuá-la correctamente. Dos dados recolhidos constata-se que nenhuma das crianças com três anos conseguiu fazer esta construção e apenas duas de quatro anos a fizeram correctamente, sendo que uma delas beneficiou de ajudas e a outra não. O cenário repete-se nas crianças com cinco e seis anos, onde apenas cinco das vinte e duas crianças de cinco anos e nove das vinte e três crianças de seis anos a construíram correctamente sem ajudas. De salientar que, quando apresentamos o cartão às crianças mais velhas, com seis anos, muitas perguntaram se estavam ali um ou dois cubos amarelos. Perante uma resposta não esclarecedora – do tipo não sei ou não te

Figura 6

posso dizer – algumas crianças começaram por fazer uma construção, alterando-a depois de modo a obter a construção correcta.

Face às construções apresentadas pelas crianças, dividimos as respostas dadas em quatro tipos, em função dos erros cometidos. Assim, algumas crianças apresentam um erro comum de apenas considerar o número de cubos que são visíveis, isto é, dois cubos azuis, dois cubos vermelhos e um cubo amarelo, sendo que os cubos utilizados estão posicionados correctamente uns em relação aos outros (Figura 7).

Figura 7

Outras crianças apenas vêem a construção num plano, isto é, os cubos estão todos ao mesmo nível (Figura 8) independentemente da posição esquerda/direita dos cubos estar ou não correcta (Figuras 9 e 10). Uma das possíveis razões para a frequência elevada desta construção (Figura 8) pode estar relacionada com o facto das arestas que delimitam as faces dos cubos, azul e vermelho, estarem alinhadas como que sendo a continuação uma da outra, e nesse sentido criam, na criança, a ideia dos cubos estarem lado a lado. Outra razão possível poderá advir do facto de, olhando apenas para as faces vermelhas e amarela, ter-se a ilusão que a face superior desta está no mesmo plano que as faces superiores daquelas.

Figura 8

Figura 9

Figura 10

Outras crianças, embora em número mais reduzido, fizeram diferentes construções, em que associaram a cada face do cubo um cubo, isto é, contaram os quadrados correspondentes às faces do cubo que eram visíveis no cartão e utilizaram esse número de cubos. Nota-se nas crianças mais pequenas, de três anos, a preocupação em utilizar o número correcto de cubos de cada cor (ou o que elas pensam ser o número correcto), no entanto, não têm igual preocupação com a disposição dos cubos, talvez por sentirem que

se utilizam o número de cubos correctos de cada cor, então a construção terá que estar correcta. Nas crianças mais velhas, de cinco anos, há a preocupação da construção respeitar alguns pormenores, como o facto do amarelo não estar ao lado do cubo vermelho.

Por fim, como que resultante de um cruzamento de diferentes aspectos já mencionados, surgem outros tipos de construções, algumas claramente erradas, enquanto outras poderão ser consideradas aceitáveis num determinado ângulo de visão (Figuras 11 e 12).

Figura 11

Figura 12

No que respeita à última construção proposta às crianças, correspondente ao quarto cartão (Figura 13) nenhuma das crianças com três anos a fez correctamente sem ajudas.

Figura 13

Relativamente às crianças com quatro anos, quatro delas fizeram correctamente e sem ajudas a construção, quatro fizeram correctamente depois de alguma orientação enquanto as duas restantes utilizaram apenas um cubo vermelho na construção, que posicionaram atrás dos dois cubos amarelos.

O número de crianças com cinco anos que acertou esta construção sem qualquer tipo de orientação aumentou em relação às crianças com quatro anos. De facto, treze das vinte e duas crianças fizeram correctamente a construção, tendo errado apenas nove crianças. As crianças mais velhas, de seis anos, tiveram mais facilidade, tendo só duas errado a construção, uma vez que usaram apenas um cubo vermelho.

Outra tarefa apresentada pretendia averiguar como as crianças representam o que vêem. Esta tarefa foi realizada pelas crianças de todas as faixas etárias, à excepção das crianças com três anos, e nela era pedido às crianças que, usando lápis de cor,

representassem a vista de frente das diferentes construções da tarefa anterior, pintando para isso as células quadrangulares de uma tabela, com quatro linhas e quatro colunas, que constava de cada folha de resposta. Começou-se por explicar a tarefa às crianças, usando uma metáfora, onde se pedia a cada uma que imaginasse uma formiga à frente da construção e que descrevesse o que a formiga via quando olhava para aquela construção, pintando na folha de resposta a representação da vista de frente de cada construção. Nos casos em que as crianças mostraram alguma relutância ou dúvida, num ou noutro ensaio, foi-lhes dada a sugestão para elas se levantarem da cadeira e posicionarem-se com os olhos ao nível da mesa, observando a construção, como a formiga. Dos quatro ensaios realizados, referentes às construções dos cartões da tarefa anterior (Figuras 1, 2, 6 e 13), o último foi sem dúvida aquele que gerou mais incertezas e respostas/representações diferentes. Das crianças com quatro anos, duas erraram a representação da vista de frente dessa construção, tendo uma delas representado o cubo vermelho em cima do cubo amarelo mais à esquerda e a outra criança separado a representação dos cubos amarelo e azul (Figuras 14 e 15).

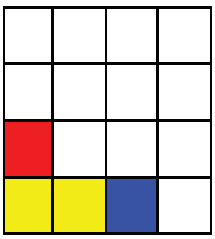


Figura 14

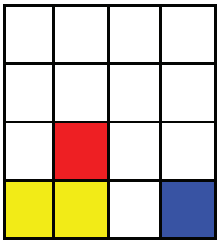


Figura 15

Do total das vinte e duas crianças, com cinco anos, que realizaram a tarefa, apenas sete erraram a representação da vista de frente dessa construção. Duas delas repetiram as representações erradas efectuadas pelas crianças de quatro anos; uma pintou duas quadrículas de azul (Figura 16); três representaram a face visível do cubo azul na linha inferior, de modo a esta ter apenas um vértice em comum com a face do cubo amarelo mais à direita (Figura 17) e outra representou a face do cubo azul na linha inferior, imediatamente abaixo da quadrícula amarela mais à direita e a face do cubo vermelho sobre a quadrícula amarela mais à esquerda (Figura 18).

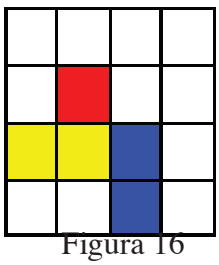


Figura 16

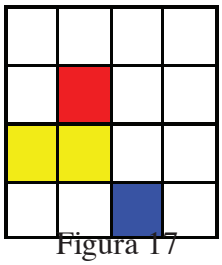


Figura 17

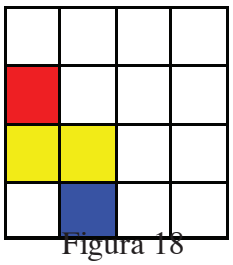


Figura 18

Nas crianças de seis anos, apenas quatro das vinte e três é que erraram a representação da vista frontal da construção, repetindo os erros efectuados pelas crianças de outras faixas etárias. A maioria das representações erradas dessa vista frontal retrata a necessidade da criança realçar uma característica que lhe é visível: a proximidade do cubo azul – profundidade da construção.

Conclusão

A avaliação diagnóstica realizada sugere que as crianças do pré-escolar exibem, ainda que de uma forma pouco clara, alguns aspectos relacionados com as competências de visualização, tais como relações de proximidade e posição relativa – ao lado de, à frente de, em cima de. Porém nem sempre estas relações são consideradas, nomeadamente quando a criança não vê um ou outro objecto de uma construção e a visão dessa imagem "trai" a imagem real. Sugere ainda que com tarefas diversificadas e específicas as crianças podem obter resultados positivos, o que corrobora a ideia defendida por van Hiele (1999) de que o desenvolvimento do pensamento geométrico depende mais do tipo de experiências educativas vivida pela criança do que a sua maturação biológica.

Deve realçar-se que este projecto se encontra ainda numa fase inicial sendo que se pretende continuar a acompanhar as crianças na resolução de outro tipo de tarefas para tentar compreender as razões e argumentos que elas utilizam.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., Loureiro, C., & Nunes, F. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação – D.E.B.

Arriaga, P., Silva, A., & Esteves, F. (2001). *Os efeitos de um jogo de computador nas aptidões perceptivas e espaciais.*

Barros, M. G., & Palhares, P. (1997). *Emergência da Matemática no jardim-de-infância.* Porto: Porto Editora.

Davis, G. A., & Hyun, E. (2005). A study of kindergarten children's spatial representation in a mapping project. *Mathematics Education Research Journal*, 17 (1), 73 – 100.

Gelman, S. A. (2006). Early conceptual development. In K. M. D. Phillips (Ed.), *Blackwell handbook of early childhood development* (pp. 149-166): WileyBlackwell.

Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J., & Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. In K. M. D. Phillips (Ed.), *Blackwell handbook of early childhood development* (First ed., pp. 208-229): WileyBlackwell.

Ginsburg, H. P. (2007). *TEMA 3: Test de competencia matemática básica*. Herbert P. Ginsburg, Arthur J. Baroody ; adaptación española, Mª Cristina Núñez del Río, Isabel Lozano Guerra**.** Madrid: TEA.

Maia, J. S. (2009). *Aprender…Matemática do jardim-de-infância à escola*. Porto: Porto Editora.

Matos, J. M., & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática nº 26*, 13 – 17.

Ministério da Educação, D. E. B. (2004). *Organização curricular e programas. Ensino básico - 1º Ciclo* (4ª ed.). Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1994). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310 – 316.

A GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES: REPRESENTAÇÕES DE PLANIFICAÇÕES DO CUBO

Tiago Tempera
Escola Superior de Educação de Lisboa
tiagot@eselx.ipl.pt

Resumo

Este estudo faz parte de uma investigação mais alargada envolvendo estudantes em formação inicial de professores, preocupando-se em medir os seus conhecimentos em geometria. Através de um enquadramento teórico, seguido de uma análise quantitativa centrada na aplicação de um teste, analisa-se as respostas dos estudantes e explora-se os seus conhecimentos acerca das representações de planificações do cubo. Os resultados do estudo demonstram que existem dificuldades na identificação de representações de planificações do cubo. As respostas dos estudantes baseiam-se sobretudo nas representações mais comuns do cubo, sendo na sua maioria incompletas revelando um desconhecimento das condições necessárias para representarem a planificação de um cubo.

Palavras-chave: formação inicial, representação 2D, planificação do cubo.

Introdução

A geometria é considerada um dos tópicos mais importantes da matemática (NCTM, 2008) e, nesse sentido, a educação em geometria necessita de começar desde cedo (Clements & Sarama, 2000). Alguns autores afirmam ser surpreendente o pouco que as crianças aprendem sobre as formas, do pré-escolar ao ensino secundário (como por exemplo, Clements & Sarama, 2000). Este facto deve ser contrariado pois a aprendizagem da geometria desenvolve diversas capacidades como a visualização, a verbalização, a construção e manipulação de objectos geométricos, a organização lógica do pensamento matemático e a aplicação dos conhecimentos geométricos a outras situações (Matos & Serrazina, 1996).

Por outro lado, não se pode ignorar o facto de que, apesar da importância da geometria, os estudantes continuam a ter dificuldades em aprendê-la com a profundidade desejada e de forma significativa (Battista, 2007). Será, então, necessário perceber os conhecimentos dos futuros professores de modo a prepará-los devidamente para promoverem nos seus alunos uma nova abordagem ao ensino da geometria.

Este artigo aborda um aspecto particular desta problemática relativo ao raciocínio espacial, mais especificamente às representações de planificações do cubo, e está

inserido num estudo mais amplo realizado no contexto de uma tese de mestrado (Tempera, 2010).

A formação inicial em geometria dos futuros professores

Dado que aprender a ensinar se constitui como um processo contínuo a desenvolver ao longo da vida de um professor, a formação inicial deverá fornecer bases sólidas para a sua aprendizagem. Gomes (2004) considera indiscutível a importância que a formação inicial assume na preparação para o ensino de ideias e conceitos matemáticos de um futuro professor e educador.

Blanco e Barrantes (2003) apelam à necessidade de se prestar mais atenção à formação inicial dos professores como elemento chave para se produzir mudanças no panorama educativo. Verifica-se frequentemente que os estudantes em formação inicial repetem as mesmas conceptualizações erradas adquiridas durante a sua escolaridade e estas ideias têm tendência a tornar-se implícitas, estáveis e resistentes à mudança.

Evidencia-se, assim, a importância da formação inicial na formação dos professores como ponto de partida para a mudança conceptual e de ideias generalizadas sobre o ensino e metodologias. Owens e Outhred (2006) referem a existência de vários estudos que revelam que os professores apresentam as mesmas dificuldades conceptuais em geometria dos alunos que ensinam. Este aspecto tem sido tomado em consideração, já que os professores com conhecimento conceptual incompleto transmitem conceitos errados e incompletos aos seus alunos (Zaslavsky, 1991).

Raciocínio Espacial

A maior parte do pensamento geométrico é baseada no raciocínio espacial: a capacidade de observar, interpretar e reflectir sobre objectos espaciais, imagens, relações e transformações (Battista, 2007). O raciocínio espacial implica, deste modo, gerar, analisar, transformar e operar sobre imagens físicas ou mentais (Clements & Battista, 1992).

Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) referem diversas razões para se investir no desenvolvimento do raciocínio espacial a partir do pré-escolar, nomeadamente, (i) a compreensão do mundo visual que nos rodeia, (ii) a compreensão dos conceitos,

processos e fenómenos em diferentes áreas da matemática e ciência, e (iii) a percepção da mutabilidade dos objectos.

Del Grande (1987) sugere que os professores do 1.º ciclo devam ter em conta as capacidades espaciais dos alunos que ensinam para adaptarem as actividades a essas capacidades; as actividades de visualização espacial só serão eficazes se forem integradas num programa que tenha em conta o desenvolvimento global da criança. E considerando as experiências informais dos alunos nesta área na chegada à escola, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) sugerem a sua continuidade através de actividades de manipulação, construção e ordenação de objectos, alargando o plano da percepção ao campo da representação.

Sobre este aspecto, Jones e Mooney (2003) consideram que a representação dos objectos tridimensionais potencia não só o desenvolvimento do sentido espacial, intuição geométrica e capacidades de visualização, como também o conhecimento e compreensão de propriedades geométricas e teoremas. É necessário tomar em consideração que um único tipo de representação dificilmente representa integralmente um objecto 3D (Pittalis, Mousoulides, & Christou, 2009) e que as dificuldades em geometria surgem, por vezes, porque os estudantes raciocinam acerca dessas representações, enquanto deveriam estar a fazê-lo sobre objectos geométricos teóricos (Laborde, 1993, como citado em Battista, 2007, p.844). Por esse motivo, Ho e Eastman (2006) consideram que as mudanças entre representações 2D e 3D são importantes no desenvolvimento do raciocínio espacial.

Ainda sobre este assunto, Pittalis *et al*. (2009) constatam que os estudantes não conseguem compreender a natureza dos objectos 3D quando representados no plano e não conseguem conceptualizar as convenções necessárias no desenho e interpretação de representações 2D de objectos 3D. Os autores recomendam, por exemplo, que se realizem actividades de leitura, interpretação e representação no plano de figuras 3D.

Será necessário, portanto, a introdução deste tipo de actividades desde o pré-escolar, dado que se tem verificado que, tanto as crianças como os professores apresentam dificuldades na passagem de um objecto 3D para uma representação em 2D (Hershkowitz, 1990).

O estudo

Este estudo procura fornecer contributos para a caracterização dos conhecimentos em geometria dos estudantes em formação inicial de professores através da concepção, implementação e análise dos resultados de um questionário (teste de resposta múltipla), estruturado com base em conceitos essenciais no ensino da geometria.

O questionário foi baseado nos testes de avaliação internacionais (*international assessments*) que, segundo Robitaille e Travers (1992), permitem uma melhoria no ensino e aprendizagem da matemática constituindo-se como uma fonte de dados e informação válida.

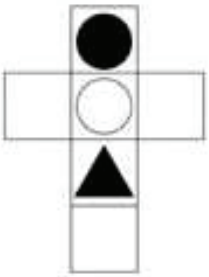
A recolha de dados foi feita através da aplicação de um teste com vinte e uma questões no início do ano lectivo de 2009-2010, contendo uma questão relacionada com a construção do cubo a partir de uma determinada planificação (ver Figura 1) e outra relacionada com representações de planificações do cubo (ver Figura 2). O teste foi aplicado numa instituição do ensino superior a 16 turmas da licenciatura em Educação Básica de todos os anos do curso.

Os dados foram analisados quantitativamente, com recurso ao software SPSS, e os resultados foram interpretados à luz da fundamentação teórica tendo sido equacionados o ponto de vista dos participantes e as limitações do próprio teste.

De uma população total de 525 estudantes, o teste foi aplicado a todos os estudantes que estavam presentes no dia da sua aplicação – 404 estudantes. Destes, 152 (37,6%) frequentam o 1.º ano da licenciatura, 132 (32,7%) frequentam o 2.º ano e 120 (29,7%) frequentam o 3.º ano. O nível de frequência dos participantes com aproveitamento nos ensinos básico e secundário da disciplina de Matemática situa-se entre os 7 e os 12 anos. Destes estudantes, 70,3% têm, pelo menos, 11 anos de frequência com aproveitamento na disciplina de Matemática. Quase metade dos participantes (45,3%) tem 12 anos de Matemática.

De todos os participantes, apenas os estudantes que frequentam o 3.º ano tiveram uma unidade curricular de geometria na licenciatura, tendo esta decorrido no semestre imediatamente anterior à data de aplicação do teste.

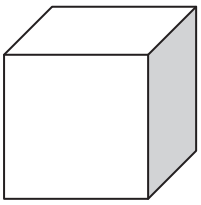
Neste artigo serão analisadas as respostas às questões seguintes do referido teste:



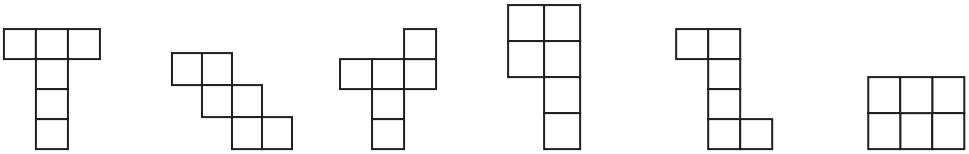
Questão 1 – Qual dos seguintes cubos poderá ser construído a partir da figura acima apresentada?

A B C D

Figura 1 – Questão acerca da construção do cubo a partir de uma planificação [i].



Questão 2 – Quais das seguintes representações correspondem à planificação do cubo?



A B C D E F

Figura 2 – Questão acerca de representações de planificações do cubo.

Resultados

Analisando a questão 1 verifica-se que os estudantes do 2.º ano são os que respondem mais acertadamente (91,7%) comparativamente com 88,3% dos estudantes do 3.º ano e 83,6% dos estudantes do 1.º ano. A questão 2 revela uma diminuição significativa de respostas correctas, sendo que apenas 17 estudantes (4,2%) de todos os anos do curso respondem correctamente à questão. Os estudantes do 3.º ano são os que respondem mais acertadamente (9,2%) comparativamente com 2,6% dos estudantes do 1.º ano e 1,5% dos estudantes do 2.º ano.

Estudantes que seleccionam apenas uma representação de planificação do cubo. Relativamente à percentagem de estudantes que selecciona apenas uma representação de planificação do cubo, verifica-se que 65,6% da amostra o faz. Os estudantes que mais respondem deste modo são os do 2.º ano (72%), seguido dos estudantes do 1.º ano (68,4%), sendo a menor percentagem a dos estudantes do 3.º ano (55%). Ao analisar este tipo de resposta à luz do nível de escolaridade em Matemática dos participantes, verifica-se que os estudantes com 12 anos de Matemática são os que menos respondem deste modo.

Representação de planificação do cubo mais seleccionada. No que diz respeito à escolha de representações de planificação do cubo, a representação mais seleccionada é a figura 2A por 82,4% dos estudantes. Inclusivamente 49,8%, quase metade da amostra, admitem-na como representação única do cubo. A maioria dos estudantes que responde deste modo é do 2.º ano (61,4%) ou do 1.º ano (51,3%). Apesar de inferior, a percentagem de estudantes do 3.º ano que também respondem deste modo é de 35%.

Representação de planificação do cubo menos seleccionada. A figura 2B é a menos escolhida (apenas 6,7% de estudantes a identificam). Apesar de não se verificarem grandes diferenças, os estudantes do 3.º ano são os que mais identificam esta figura como representação de planificação do cubo (7,5%), comparativamente com 5,9% dos estudantes do 1.º ano e 5,3% dos estudantes do 2.º ano. Ao considerar o nível de escolaridade em Matemática dos participantes, verifica-se que os estudantes com 12

anos de Matemática são os que mais identificam esta representação (10,4%), comparativamente com os estudantes com 11 anos de Matemática (4%), 10 anos de Matemática (3%) e 9 anos de Matemática (3,8%).

Representações que não correspondem a planificação do cubo seleccionadas. Existem também alguns estudantes a seleccionar representações que não correspondem à planificação do cubo: 4 estudantes seleccionam a figura 2D e 8 estudantes seleccionam a figura 2F. A totalidade dos estudantes que escolhe a figura 2D encontra-se no 1.º ano do curso. O mesmo não se passa com a outra hipótese de resposta. A maioria (2,6%) corresponde a estudantes do 1.º ano, embora ainda existam estudantes do 2.º ano (1,5%) e do 3.º ano (1,7%) a considerar aquela representação como planificação do cubo. Os estudantes que seleccionam a figura 2D possuem um nível de escolaridade em Matemática acima dos 11 anos, enquanto que nenhum estudante com uma escolaridade em Matemática de 10 anos ou inferior o faz.

Discussão

A análise dos dados revela uma elevada diferença na percentagem de respostas correctas das duas questões. Poderá considerar-se o facto de a primeira questão admitir apenas uma opção correcta e a segunda questão admitir quatro opções correctas como revelador das diferenças observadas e de um elevado grau de insucesso na última questão. Ou seja, é necessário tomar em consideração que o tipo de questões é diferente, o que poderá explicar a diferença de resultados entre as duas questões.

Apesar deste aspecto, a segunda questão relaciona-se com as representações de planificações de um cubo, conteúdo familiar e recorrente durante a escolaridade obrigatória, pelo que o elevado número de respostas incompletas e erradas poderá ser revelador das aprendizagens não realizadas por estes estudantes. São os estudantes do 3.º ano que respondem mais correctamente a esta questão, embora com um nível de sucesso muito baixo. Ainda que se considere que as crianças e professores apresentam dificuldades na passagem de um objecto 3D para a sua representação em 2D (Hershkowitz, 1990), estes conteúdos foram abordados não só na escolaridade obrigatória destes estudantes, como também durante o curso, pelo que seria de esperar

que o número de respostas correctas e completas fosse significativamente superior em todos os anos do curso.

A figura 2A, talvez por ser a mais familiar e recorrente nos manuais escolares, foi a representação mais seleccionada. A figura 2B é a menos escolhida talvez por se verificar a situação contrária. Porém, são os estudantes com 12 anos de Matemática e os estudantes do 3.º ano da licenciatura que mais identificam esta figura como representação de planificação do cubo. Poderá supor-se que estes grupos estejam mais despertos para representações menos comuns da planificação do cubo.

Verifica-se que grande parte dos participantes selecciona apenas uma representação do cubo, não colocando a hipótese de existirem outras representações igualmente possíveis. Poderá ser revelador do desconhecimento das condições necessárias para se obter uma planificação do cubo, com a ideia generalizada de que o cubo apenas se poderá construir com base em uma única planificação. Este facto demonstra que os estudantes poderão não conseguir conceptualizar e interpretar correctamente as representações 2D de objectos 3D (Pittalis *et al.*, 2009). Apesar da elevada incidência neste tipo de resposta, esta é mais reduzida nos estudantes com 12 anos de Matemática.

Apesar de ser um número reduzido, é preocupante verificar que ainda existem estudantes que admitem a construção do cubo com base nas duas representações seleccionadas. No que diz respeito a uma das figuras (2D) é surpreendente verificar que os estudantes que a seleccionaram possuem um nível de escolaridade em Matemática acima dos 11 anos, o que reforça a ideia de que continuam a existir conhecimentos errados nos estudantes que tiveram geometria no ensino secundário (Mayberry, 1983).

Considerando o número reduzido de selecção de planificações incorrectas, constata-se que a maior percentagem de respostas consideradas erradas são, de facto, incompletas devido à não consideração de todas as hipóteses de representação possível de planificação do cubo. Isto significa que, apesar de uma percentagem elevada de insucesso nesta questão, esta não se deve globalmente à escolha de opções incorrectas, mas à não selecção de todas as opções correctas.

Considerações finais

Um dos grandes objectivos da formação inicial é a preparação para o ensino de ideias e conceitos matemáticos de um futuro professor e educador (Gomes, 2004). Neste sentido, é necessário tomar em consideração os conhecimentos e as conceptualizações que os estudantes apresentam de modo a promover uma mudança conceptual significativa.

Através da análise das respostas ao teste poder-se-á levantar a hipótese das dificuldades de conceptualização das convenções necessárias no desenho e interpretação de representações 2D de objectos 3D, sugeridas por Pittalis *et al*. (2009). Os baixos resultados na questão relacionada com a identificação de representações de planificações do cubo sugerem que os estudantes possam não saber as condições necessárias para terem a representação de uma planificação do cubo. Os resultados demonstram que muitos estudantes consideram a existência de uma planificação única do cubo, dado que mais de metade dos participantes selecciona apenas uma das representações apresentadas. E, apesar de em número reduzido, ainda existem estudantes a seleccionar figuras compostas por quadrados com dois lados adjacentes a outros quadrados como possíveis representações de planificação do cubo.

Considerando que cerca de 70% destes estudantes têm um nível de escolaridade em Matemática acima dos onze anos, é preocupante verificar que representações que não correspondem a planificações do cubo são seleccionadas. Um trabalho centrado no desenvolvimento do raciocínio espacial e das capacidades de visualização espacial poderá ajudar a colmatar alguns destes erros.

Embora a percentagem seja em número inferior, muitos estudantes finalistas da licenciatura ainda possuem muitos conhecimentos errados acerca das representações de planificações do cubo, apesar deste aspecto já ter sido abordado numa unidade curricular frequentada no ano anterior à data de aplicação do teste.

É necessário reflectir sobre modos de combater os resultados dos estudos que indicam que os professores apresentam as mesmas dificuldades conceptuais em geometria dos alunos que ensinam (Owens & Outhred, 2006). E esse trabalho deve ser desencadeado a partir da formação inicial de professores.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, Cap. 19, pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.

Blanco, L., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(2), 107-132.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan Publishing Company.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 6*(8), 482–487.

Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, 1987 Yearbook* (pp.126-135). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Gomes, J. T. (2004). *A geometria na formação matemática dos futuros professores do 1.º ciclo.* Tese de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Portugal.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161 – 204). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Ho, C. H., & Eastman, C. (2006). An investigation of 2D and 3D spatial and mathematical abilities. *Design Studies, 27*(4), 505-524.

Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching and learning* (pp. 3-15). London: Open University Press.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58-69.

National Center for Education Statistics (n.d.). Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Consultado em 8 de Setembro de 2009, de http://nces.ed.gov/timss.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2009). Levels of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 4, pp. 385-392). Thessaloniki, Grécia: PME.

Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 687-709). NY: Macmillan Publishing Company.

Tempera, T. (2010). A geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes. Tese de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, IPL. Lisboa: APM.

Zaslavsky, O. (1991). In what ways are similar figures similar?. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 378-385). Assisi, Itália: PME.

---

[i] Questão retirada do TIMSS de 1999 para alunos do 8.º ano (NCES, n.d.).

HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: O BÁCULO E A GEOMETRIA

Marisa da Silva Dias
UNESP – Univ. Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
marisadias@fc.unesp.br

Fumikazu Saito
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
fsaito@pucsp.br

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo em relação às potencialidades pedagógicas que articulam história e ensino da matemática. Uma atividade didática foi elaborada a partir do tratado "Del modo di misurare", de Cosimo Bartoli, publicado em 1564, cujo problema desencadeador de aprendizagem se configurou no processo de construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI, o báculo. As atividades foram desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática, por professores que lecionam matemática e por mestrandos em Educação Matemática. A análise das atividades permitiu inferir potencialidades pedagógicas em relação à medida e à semelhança de triângulos historicamente contextualizados.

Palavras-chave: história da matemática, geometria, semelhança de triângulos, ensino da matemática

1. Introdução

Este trabalho tem por objetivo apresentar as potencialidades pedagógicas de uma atividade que procurou construir e utilizar instrumentos de medida do século XVI. A atividade foi elaborada a partir dos estudos do grupo de pesquisa HEEMa (grupo de estudo e pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática). Há algum tempo educadores matemáticos têm voltado sua atenção para as possíveis relações entre história, epistemologia e ensino-aprendizagem de matemática. Diversas propostas que procuram articular História e Educação Matemática têm sido apresentadas e apreciadas por educadores não só no Brasil, mas também no exterior (D'Ambrosio, 1993, 1996; Miguel & Brito, 1996; Miguel et. al., 2009; Mendes 2006; Mendes, Fossa & Nápoles, 2006; Fossa, 2009; Furinghetti, 2007).

A possibilidade de construção de uma interface entre essas duas áreas de conhecimento remeteu-nos a considerar questões de natureza metodológica que articule pesquisa e prática didática. Como observa Baroni e Nobre (1999), as propostas apresentam-se, em sua maior parte, como relatos e "ensaios". Isso pode ser constatado, por exemplo, no

relatório publicado pela International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) em 2000 (Fauvel & Van Maanen, 2000).

Assim, partindo do pressuposto de que a História da Matemática pode propiciar a experiência do processo de construção do conceito, promovendo a apropriação do significado dos objetos matemáticos, este trabalho compõe o início de uma proposta didática que busca articular aspectos de uma nova proposta historiográfica da História da Matemática e a Didática da Matemática.

2. Potencialidades pedagógicas da História da Matemática

Concordamos com Miguel (1997) sobre a necessidade de prudência na abordagem da história da matemática no ensino. Um aspecto fundamental para essa análise é considerar que não há uma única história da matemática da qual o educador pode fazer uso. A partir desse pressuposto, sintetizamos os estudos iniciais do grupo HEEMa, em relação às propostas e tendências do uso de história da matemática no ensino, três importantes aspectos que poderiam ser entendidos como favoráveis à integração dessas duas áreas de conhecimento. O primeiro está relacionado à própria área de referência dos educadores matemáticos, em que o papel da história tem ajudado a construir uma visão diferenciada da Matemática que passa a ser vista como atividade intelectual e humanizadora, ao invés de um corpo de conhecimento dado ou um conjunto de técnicas de resolução de problemas matemáticos. O segundo aspecto refere-se à percepção do conhecimento matemático. A inserção de alguns tópicos de história no ensino de matemática tem possibilitado a reorientação da visão do que são os objetos da Matemática, pois o estudo do processo histórico conduz a uma linha interpretativa diferenciada, propiciando a abordagem do mesmo objeto matemático por outra perspectiva e, assim, contribuindo para sua melhor compreensão. O terceiro aspecto a ser considerado é a interdisciplinaridade (Alfonso-Goldfarb, 2003), no qual o processo histórico tem se mostrado eficaz ao abordar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, na medida em que os insere num contexto particular e estabelece relações com outras áreas do conhecimento científico, tecnológico e social (Dias & Saito, 2009).

Esses três aspectos parecem convergir para a idéia de que a história é um potencial recurso para elaboração de propostas didáticas que contemplam a formação do conceito matemático. Isso, entretanto, não quer dizer que devamos ensinar matemática pela

História, nem repetir o percurso histórico na formação de um conceito matemático, mas buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto da formação deste conceito (Dias & Saito, 2009). Nesse sentido, dentre as diversas iniciativas que procuram aproximar a História da Matemática do ensino de Matemática, o uso de fontes primárias parece ter sido muito promissor (Jahnke, 2000; Furinghetti, 2007).

Seguindo de perto esta tendência, elaboramos uma atividade didática baseada em excertos retirados de uma obra publicada no século XVI. Trata-se de uma das muitas obras escritas entre os séculos XVI e XVII que versavam sobre a construção e o uso de instrumentos para medir e calcular, que designaremos aqui, tal como sugere Bennett (1998, 2003), de "instrumentos matemáticos".

A intencionalidade de termos escolhido uma fonte que tratasse de instrumentos de medida está relacionada à importância que tais instrumentos passaram a ter naquele período (Daumas, 1989; Hackmann, 1989; Turner, 1998).

Do ponto de vista de Delamain, os instrumentos eram úteis no ensino porque, por meio deles, os princípios matemáticos poderiam ser ensinados ao mesmo tempo em que o seu uso prático era explicado. Isso faria com que o ensino dos princípios fosse realizado de maneira mais eficiente, visto que os usuários de instrumentos não estavam preocupados com demonstrações, mas com as operações práticas. Por outro lado, Oughtred clamava que o verdadeiro caminho da arte matemática não era pelo instrumento, mas apenas pela demonstração. Desse modo, o ensino da matemática não deveria começar pelo instrumento, um artefato que era utilizado apenas com finalidades práticas, visto que o seu usuário não estava preocupado com os princípios matemáticos nele incorporado, mas apenas em saber o que fazer com ele (Turner, 1973).

Esse debate continuaria ao longo do século XVII e chamaria a atenção de outros estudiosos, principalmente, daqueles que estavam preocupados com a educação dos nobres (Turner, 1973). Mas o que se pode concluir do debate entre as idéias de Oughtred e Delamain é a existência de um abismo entre as necessidades dos nobres e os interesses dos estudiosos (que cada vez mais, reforçavam e reafirmavam a importância da matemática no estudo da natureza) e a perspectiva dos "educadores" e os "praticantes de matemáticas" (que envolviam pintores, arquitetos, navegadores, cartógrafos,

construtores de máquinas, entre muitos outros). E foi justamente um tratado escrito por um desses "praticantes de matemática" que nos chamou a atenção para esse trabalho.

3. A fonte: *Del modo di misurare*

O *Del modo di misurare* de Cosimo de Bartoli (1564) é, na realidade, uma compilação, como bem sugere o próprio autor no início de sua obra. Dedicado a Cosimo de Medici, essa obra teve grande repercussão naquela época não só pelo seu apelo prático, mas também para o ensino de geometria.

O que é notório nesta obra, assim como em outras do mesmo gênero publicadas na época, é a articulação existente entre a construção e o uso dos instrumentos descritos. Podemos dizer que esses dois aspectos são indissociáveis em *Del modo de misurare*, visto que a obra não era meramente um manual que ensinava a construir e usar instrumentos. Com efeito, analisando a obra, podemos notar que ela estava destinada a um público que tinha conhecimentos não só do conteúdo geométrico, mas também prático de seu ofício. Isso pode ser constatado em certas passagens da obra. Bartoli, por exemplo, não fornece informações sobre os procedimentos que deveriam ser adotados para a construção de escalas no instrumento. As ações para a construção são apenas apresentadas em forma de instrução, solicitando ao leitor que ele apenas "dividisse um segmento em doze partes iguais", "traçasse três linhas paralelas de tal modo a formar três intervalos proporcionais entre si" e assim por diante. Além disso, o conhecimento geométrico encontra-se implícito na construção do instrumento, isto é, na sua concepção, bem como no seu uso. Ou seja, o conhecimento matemático mobilizado na construção do instrumento está intimamente relacionado ao seu uso, o que aponta para indissociabilidade entre o saber e o fazer.

4. Atividade didática

A atividade didática aqui apresentada foi elaborada com base no primeiro livro de Bartoli que ensina como medir distâncias em diferentes situações, apontando para cada uma delas o modo mais adequado de obter a medida por meio de um instrumento específico. Escolhemos para esse texto o báculo.

A atividade buscou refletir o processo da produção e disseminação do conhecimento. Porém, dependendo da intencionalidade do educador, a atividade pode ser orientada para

diferentes propostas de ensino. A atividade didática a que se refere esse trabalho foi organizada em três etapas interrelacionadas: 1) o tratamento didático do documento, 2) a intencionalidade e plano de ação e 3) o desenvolvimento. Tal atividade fundamenta-se na Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996; Dias, 2007) e na teoria da Atividade (Leontiev, 1983). Na teoria da Atividade (Leontiev, 1983), a necessidade, o motivo, as ações e o produto de uma atividade humana constituem-se em ligações constituintes do desenvolvimento psíquico. A atividade orientadora de ensino tem como objeto a organização do ensino na perspectiva da teoria da Atividade. A atividade é definida como orientadora porque, no ensino escolar, o professor organiza os elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações entre os estudantes, e estes com o professor, a qual nem sempre chega a resultados esperados por ele, uma vez que compartilha com as necessidades e os motivos dos estudantes. A organização do ensino, tem, na sua estrutura, um problema desencadeador de aprendizagem e um plano de ação que são elaborações do professor com a finalidade de aproximar o estudante do objeto de estudo, da sua significação

4.1. O tratamento didático do documento

Com objetivo geral de construir uma abordagem didática capaz de oferecer uma aprendizagem interdisciplinar a partir de documentos históricos que envolvem também conceitos matemáticos, foi escolhido o tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo de Bartoli. O primeiro tratamento didático foi de caráter estrutural, com o objetivo de constituir um material que compusesse uma proposta a ser desenvolvida com os estudantes. Para tornar o conteúdo do documento acessível, foi realizada uma tradução para língua portuguesa, do toscano do século XVI, das instruções de construção do instrumento selecionado, o báculo, bem como, das orientações de cálculos a serem realizados para finalizar a medida. Além disso, foram escolhidas da obra duas imagens em que o instrumento aparece (figura 1 e figura 2) a fim de auxiliar a compreensão do leitor.

Figura 1. Báculo (Bartoli 1564, p. 10r)

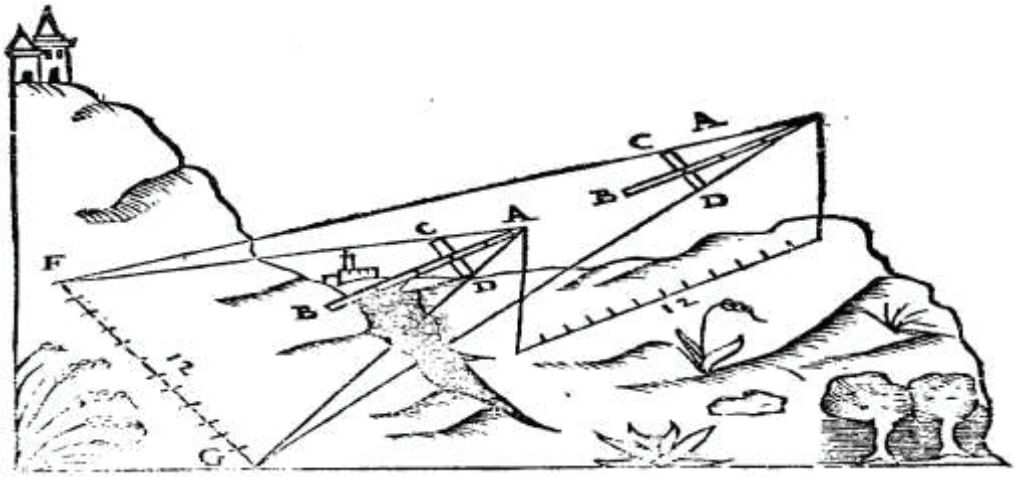


Figura 2. Como usar o báculo (Bartoli, 1564, p. 15r)

Salientamos neste tratamento o cuidado com termos, expressões ou mesmo com os nomes de objetos que poderiam impedir o leitor de compreender minimamente o documento para realização da construção e da medição. Por esse motivo, extrair parte de um documento para atividade didática não é uma tarefa de simples recorte, requer um tratamento que envolve aspectos internos do documento e aspectos didático-pedagógicos.

4.2. A intencionalidade e plano de ação

A intenção didática foi tornar a construção, a medição e a validação do báculo uma situação desencadeadora de aprendizagem, capaz de proporcionar, ao sujeito, elementos históricos integrados no desenvolvimento de conceitos matemáticos, principalmente as formas de produção e de disseminação de conhecimento de uma época, por determinados sujeitos sociais. Além disso, a mobilização de conceitos na atividade pode proporcionar a reflexão do conhecimento sintetizado no próprio instrumento, diferente de outras abordagens didáticas com instrumento que visam somente o uso.

O plano de ação considera as condições objetivas e os sujeitos envolvidos diante da intencionalidade de aprendizagem. Neste trabalho os sujeitos foram aproximadamente quarenta alunos do curso de licenciatura em matemática, quatro professores que lecionam matemática e seis mestrandos em Educação Matemática (Dias & Saito, 2010a, 2010b). Em diferentes momentos grupos distintos dos sujeitos, seja em aulas regulares, seja em minicursos, vivenciaram a atividade. Com isso, foi possível discutir as potencialidades pedagógicas que articulam história e ensino da matemática. Parte dos

sujeitos desenvolveu todas as fases da atividade: construção, medição e validação matemática do instrumento, outros desenvolveram somente parte dessas fases.

Em geral a ação dos sujeitos da atividade é iniciada pela leitura do texto, após seu tratamento didático, e análise das imagens, seguindo, então, a construção do instrumento; a coleta de dados necessários com o uso do instrumento; o cálculo da medida da distância proposta e a validação matemática do instrumento, ou seja, a generalização a partir de uma demonstração.

A utilização de régua graduada não foi permitida, pois uma das intencionalidades era aproximar o sujeito das condições de produção dos artesãos do século XVI. No báculo, a unidade de medida, além de não ser usual, não é previamente conhecida, mas é obtida na sua construção e pode ser diferente para cada instrumento construído. Esse fato permite a discussão sobre o ensino e aprendizagem de grandezas e medidas.

4.3. Desenvolvimento

As primeiras manifestações dos sujeitos ocorreram na leitura do documento, o qual revelou as expectativas quanto às instruções de construção, por serem diferentes do tipo "faça você mesmo", como também quanto aos aspectos subjacentes aos conhecimentos e materiais da época. Com isso, foi possível observar que o interesse histórico partiu dos sujeitos diferentemente de propostas que inserem várias informações históricas antes de introduzir um conceito matemático. A articulação entre os conhecimentos da época para realizar as ações propostas pelo ofício do artesão, por meio do tratado, com os mobilizados pelos professores permitiu alcançar outro nível de compreensão que compõe um conceito matemático. Compreendemos que um conceito não pode ser dado, como uma definição, ele é construído e desenvolvido pelo indivíduo. O papel do ensino é propor situações para esse desenvolvimento, capaz de articular a atividade externa com a interna, cognitiva (Leontiev, 1983). Além disso, salientamos que o conhecimento matemático, e, por sua vez, a formação conceitual, não se restringe à matemática formal.

Observou-se a articulação da interpretação da leitura com os conhecimentos que compõem a concepção do processo de medição. Uma delas refere-se a escala de medida, em virtude da não semelhança às escalas conhecidas nem tampouco quanto a forma de apresentação, nada convencional. O báculo não possui qualquer numeral anotado no

instrumento, somente algumas marcações de divisões e é um instrumento simples de se construir.

A leitura do texto e a observação das figuras não foram suficientes para que a realização da medida fosse imediata. No processo de medição, a posição do observador no espaço, a posição dos olhos em relação aos instrumentos e a posição do instrumento no espaço configuraram três ações não triviais para os sujeitos. Na imagem (figura 2) não há um personagem mostrando o posicionamento dos olhos em relação ao instrumento, nem como segurá-lo ou apoiá-lo. O texto descreve onde o observador deve colocar o olho de uma forma geral, por exemplo, "com o olho no ponto A...". Inferimos que para o produtor do texto, o artesão, essa informação não era necessária, pois seria um conhecimento tácito dos artesãos da época, bem como de outros interlocutores. A partir do posicionamento inicial o texto descreve o alinhamento necessário como a "mirada", ou seja, para onde o observador deve olhar e ajustar uma sobreposição de imagens de partes do instrumento com partes do objeto a ser medido. Os sujeitos não estavam acostumados a pensar que seu corpo faz parte de todo o processo de medição, pois os instrumentos atuais, geralmente, devido sua tecnologia, realizam várias funções automaticamente com a mínima interferência do indivíduo.

Dada uma distância para que os sujeitos calculassem a medida, correspondente à distância de F a G da figura 2, eles esticaram um barbante no comprimento, entre as duas posições ocupadas pelo observador no solo, referentes aos locais das visualizações com o instrumento da distância a ser medida. A dificuldade foi na relação entre o comprimento do barbante com o significado das marcas do instrumento. Neste caso inferimos que o hábito de usar certos instrumentos de medida, que compõem o cotidiano dos sujeitos, não foi suficiente para avançar nas relações diferenciadas necessárias para a realização da medida com aquele instrumento. Além disso, a falta de mobilização dos conhecimentos sobre os fundamentos da medida, para a comparação entre os comprimentos obtidos pelo barbante com a unidade de medida dada pelo instrumento, indicou um descompasso entre o saber e o fazer, como também a relação entre a produção do conhecimento e sua apropriação pelo sistema educacional.

A medida com o báculo não é direta e imediata, no sentido de ser semelhante à régua. Ela tem duas fases, a primeira é a coleta da distância entre as duas posições do observador e as correspondentes posições no báculo (transversal CD, da figura 2). A

segunda exige cálculos que envolvem o conhecimento de proporcionalidade e semelhança de triângulos.

A demonstração realizada pelos sujeitos focalizou a triangularização formada pelos pontos A, F e G (figura 2) nas duas posições em que é feita a mirada com báculo, bem como a distância entre essas posições. Considerando os triângulos assim formados como coplanares e isósceles e a semelhança entre o triângulo formado pelos pontos A, F e G com o formado por A, C e D, em cada posição, foi possível validar que o instrumento serve para medir distâncias nas condições apresentadas.

5. Considerações Finais

O trabalho desenvolvido a partir do tratado *Del modo di misurare* de medida permitiu iniciar uma reflexão das potencialidades pedagógicas do uso desse documento para o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Diferentemente de instrumentos atuais, cuja tecnologia oculta relações conceituais básicas, necessárias para realização de medidas; a atividade baseada na construção e medição com o báculo forneceu possibilidades, aos sujeitos, de realização de ligações conceituais necessárias à tarefa de mensurar grandezas.

Foi por meio da atividade didática que os sujeitos questionaram aspectos referentes à história, aos conceitos envolvidos, ao processo de ensino e aprendizagem e à produção humana do conhecimento matemático. A confluência entre este conhecimento e outros, de caráter técnico, cultural, etc. possibilitou compreender ligações que fazem parte da produção do conhecimento como atividade humana, historicamente situada nas condições objetivas, coerente com o primeiro aspecto apontado na introdução deste trabalho.

Outro potencial pedagógico caracterizou-se pela forma do uso de fontes primárias geradora de uma reflexão na dialética entre presente e passado cuja contribuição se configura na compreensão da própria produção humana, bem como na produção de cultura. Esses aspectos foram percebidos por meio das discussões sobre o lugar social e o conhecimento do artesão, em determinada estrutura social, e o lugar social e o conhecimento do professor na atualidade. A reflexão e discussão sobre as mudanças no modo de apreender o conhecimento e o avanço tecnológico, resultantes no processo de

complexificação cultural, contribuíram para uma compreensão sobre a formação histórica do sujeito.

Referente ao segundo e ao terceiro aspecto apontado na introdução deste trabalho, o objeto da matemática pôde ser apreendido em um contexto específico, ou seja, proveniente de uma determinada atividade didática. Esta, por sua vez, foi organizada de modo a explicitar a relação entre objetos matemáticos, e extramatemáticos. Por exemplo, tópicos históricos de uma época (como os pontos de vista de Delamain e Oughtred), habilidades de geometrização do espaço (triangularização), as condições materiais de produção do báculo, semelhança de triângulos e proporcionalidade. Com isso, a atividade didática com o instrumento pode ser vista como uma desconstrução do conhecimento humano encarnado no mesmo, para a apropriação no processo educativo.

Referências bibliográficas

Alfonso-Goldfarb, A. M. (2003). Como se daria a construção de áreas interface do saber? *Kairós*, 6(1), 55-66.

Baroni, R. L. S. & Nobre, S. (1999). A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In M. A. V. Bicudo (Eds.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas* (pp. 129-136). São Paulo: Ed. UNESP.

Bartoli, C. (1564). Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori, Venetia, Francesco Franceschi Sanese.

Bennett, J. (1998). Practical Geometry and Operative Knowledge. *Configurations*, 6, 195-222.

Bennett, J. (2003). Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? *British Journal for the History of Science*, 36(2), 129-150.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática e seu lugar na história e na pedagogia da Matemática, In R. Gama (Ed.), *Ciência e Técnica* (pp. 105-116). São Paulo: T. A Queiroz.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 14ª edição.

Daumas, M. (1989) Scientific Instruments of the Seventeenth and Eighteenth Centuries. London: Portman Books.

Dias, M. S. & Saito, F. (2009) Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, (p. G05). Brasília: SBEM.

Dias, M. S. & Saito, F. (2010a). O ensino da matemática por meio de instrumentos do século XVI. In: *Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática*, (Vol. 1. pp. 1-4). São Carlos: SBEM.

Dias, M. S. & Saito, F. (2010b). A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli. In: Proc. PBL2010 International Conference Problem-Based Learning and

Active Learning Methodologies (pp. 1-13). São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning/USP.

Fauvel, J. & Van Maanen, J. (2000) History in Mathematics Education. In *ICMI Study*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Fossa, J. A. (2009). *Matemática e medida: três momentos históricos*. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 131-143.

Hackmann, W. D. (1989). Scientific Instruments: Models of Brass and Aids to Discovery. In D. Gooding, T. Pinch & S. Schaffer (Eds.), *The Uses of Experiment: Studies in the Natural Sciences,* (pp. 31-65.). Cambridge/Nova Iorque/Sidney: Cambridge University Press.

Jahnke, H. N. (2000). The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education - ICMI Study*, (pp. 291-328). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Mendes, I. A. (2006). *Matemática e investigação na sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo.

Mendes, I. A., Fossa, J. A. & Nápoles, J. E. (2006). *A história como um agente de cognição na educação matemática*. Porto Alegre: Sulinas.

Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, 5(8), 73-105.

Miguel, A & Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Caderno Cedes*, 40, 47-61.

Miguel, A. et. al. (2009). *História da matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2ª edição.

Turner, A. J. (1973). Mathematical Instruments and the Education of Gentlemen. *Annals of Science*, 30, 51-65.

Turner, G. L'E (1998). *Scientific Instruments, 1500-1900: an Introduction*. Berkeley/Los Angeles/London: University of California Press.

PRÁTICAS CULTURAIS E COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA: O SURF NA AULA DE MATEMÁTICA

Joana Latas
EBI/JI de Aljezur, CIEP - Universidade de Évora
joanarblatas@gmail.com

Darlinda Moreira
Universidade Aberta, UIDEF - Universidade de Lisboa
darlinda.moreira@gmail.com

Resumo

A integração de aspectos culturais nos currículos é um meio de legitimar processos matemáticos implícitos em vivências dos alunos e de responder à diversidade cultural, em prol de uma aprendizagem da Matemática com significado (e.g. Bishop, 2005; Gerdes, 2007; Moreira, 2008). Neste artigo pretendemos destacar o modo como as experiências culturais dos alunos, exploradas de um ponto de vista matemático, em contexto de sala de aula, podem desenvolver capacidades de comunicação matemática.

Para isso apresentam-se dois episódios retirados de uma investigação mais ampla (Latas, 2011) onde se desenvolveu um projecto curricular, cuja conceptualização seguiu uma abordagem etnomatemática. A respectiva implementação decorreu numa turma de 7.º ano de escolaridade onde a professora desempenhou simultaneamente o papel de investigadora. Os resultados sugerem que os alunos desenvolveram a capacidade de comunicarem matematicamente e simultaneamente, valorizaram e respeitaram o conhecimento cultural envolvido nas situações em análise.

Palavras-chave: Matemática cultural, Etnomatemática, Comunicação matemática

Introdução

No seio dos educadores (etno)matemáticos e nas orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática é consensual que as experiências vivenciadas pelos alunos fora da escola são potenciadoras de aprendizagens em contexto escolar (e.g. Bishop, 2005; Boavida, Paiva, Vale & Pimentel, 2008; Gerdes, 2007; ME-DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007 Moreira, 2008; NCTM, 2007).

Considerando, de acordo com Bishop (2005), que a educação matemática é um processo de interacção cultural, o desconhecimento ou a desvalorização dos conhecimentos culturais dos alunos por parte da escola pode comprometer a aprendizagem e desenvolvimento dos jovens. Aliás, o não relacionamento entre os saberes culturais e os

conhecimentos escolares reforça o sentimento de fracasso e insucesso relativamente à disciplina de Matemática (Gerdes 2007; Moreira 2002).

Na tentativa de legitimar o conhecimento cultural e, simultaneamente, desbloquear conflitos cognitivos Gerdes (2007) aponta para a construção de um currículo que integre "(…) os *backgrounds* diversos e as experiências variadas dos alunos, e em que se criam, ao mesmo tempo, pontes para outros horizontes culturais" (p.147).

Assumindo que o conhecimento matemático resulta de uma produção cultural humana e que a actividade matemática está alicerçada na cultura, neste artigo, debruçamo-nos sobre as potencialidades de uma abordagem etnomatemática para o desenvolvimento da comunicação matemática. Nomeadamente, o modo como esta abordagem poderá constituir um caminho para tornar visível a matemática implícita nas experiências culturais dos alunos. Para isso apresentamos dois episódios que ilustram a forma como a realização de tarefas elaboradas a partir de práticas culturais familiares aos alunos reforça a construção de significados matemáticos no decorrer do processo de comunicação.

Comunicar práticas culturais matemáticas

A comunicação matemática, nas suas vertentes oral e escrita, traduz-se na capacidade dos alunos expressarem os seus pensamentos, ideias e descobertas matemáticas para si e para os outros, e ainda entenderem e interpretarem as mensagens que lhe são apresentadas. Através de um processo dinâmico, o diálogo e a interacção social na sala de aula enfatizam a negociação de significados e posteriormente o processo de partilha dos mesmos, consolidando-se, pela comunicação matemática, tanto o estabelecimento de conexões entre as ideias e os significados matemáticos prévios dos alunos como a reorganização dos mesmos (Bishop, 2005).

Além disso, a comunicação matemática em salas de aula caracterizadas pela diversidade cultural está sujeita à negociação dos diferentes valores multiculturais bem como das diferentes experiências que, tantos os alunos como o professor, vivenciaram. Com efeito, as concepções sobre o que é a comunicação matemática e sobre aquilo que se deve ou não comunicar em sala de aula estão amplamente relacionadas com experiências e aprendizagens prévias que conduziram a determinada noção de

matemática e dos processos de ensino e de aprendizagem (Ponte et al., 2007). Assim, uma concepção de Matemática assumida como uma construção cultural, entende a comunicação matemática como um processo de interacções culturais entre indivíduos oriundos de diferentes contextos sociais - conciliar a abordagem da comunicação matemática com a perspectiva da etnomatemática permite clarificar as questões culturais presentes nas práticas comunicativas na sala de aula. Aliás, D'Ambrosio e Maier, referidos por Boaler (1993), defendem que a discussão na sala de aula das etnomatemáticas próprias dos alunos reduz o problema de transferir aprendizagens da sala de aula para a realidade e vice-versa, por diminuir a distância entre a percepção dos alunos quanto à matemática formal e à matemática informal, ou seja, diminui o fosso entre a matemática descontextualizada e a matemática contextualizada, oriunda das etnomatemáticas.

Existem diversos factores envolvidos no desenvolvimento da comunicação matemática em contexto de sala de aula. A negociação de significados e as interacções estabelecidas entre alunos e entre estes e o professor são dois desses aspectos que permitem evidenciar o carácter social e cultural da comunicação matemática, pelo que, são, de seguida, aprofundados numa perspectiva etnomatemática.

A interacção e a partilha de ideias, enquanto componentes essenciais na construção de conhecimento matemático, sugerem que, tendencialmente, as crianças conferem sentido às respectivas vivências e constroem significados em interacção com os outros. Na procura de métodos que permitem ao professor explorar interacções de modo a incentivar os alunos a participarem activamente na partilha e construção de significado matemático, salienta-se que "(…) ao pedir aos alunos que discutam estratégias informais, os professores poderão ajudá-los a tomar consciência e a construir conceitos a partir do seu conhecimento informal implícito" (NCTM, 2007, p.23).

A negociação de significados em sala de aula refere-se ao modo como o conhecimento matemático é construído e envolve diferentes níveis de formalização da linguagem, em resultado da partilha de ideias entre alunos e entres estes e o professor. A atribuição de significado matemático é, segundo Bishop (2005), determinada pela possibilidade de estabelecimento de conexões entre os novos conhecimentos e os conhecimentos prévios do sujeito. Em contexto de sala de aula a partilha de várias perspectivas contribui para uma construção gradual do significado e, consequentemente, do conhecimento

matemático do aluno. Assim, a negociação actua não somente ao nível do *background* de cada um, mas influi também o *foreground*, nomeadamente, na interpretação individual de oportunidades futuras. Ou seja, a análise de práticas culturais familiares aos alunos exploradas sob o ponto de vista matemático na sala de aula promove a participação dos alunos e, consequentemente, permite o desenvolvimento de autoconfiança que se reflecte na capacidade de comunicar matematicamente.

Em síntese, a comunicação matemática pode ser entendida como um conjunto de interacções culturais entre sujeitos que negoceiam significados e formas de os partilhar entre si. Neste processo são construídos e consolidados conhecimentos matemáticos, bem como desenvolvidas competências matemáticas, que contribuem para novas aprendizagens tanto matemáticas como culturais, na medida em que o ambiente escolar contribui para auxiliar os alunos a relacionarem e utilizarem diferentes tipos de práticas. Porém, um ambiente de aprendizagem adequado ao desenvolvimento de tais práticas deve primar pelo respeito mútuo e conforto dos seus intervenientes.

Participantes no estudo

Neste estudo participaram os alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade de uma escola do sul de Portugal onde a professora desempenhou simultaneamente o papel de investigadora. Uma vez que se pretendia valorizar os saberes culturais dos alunos, optou-se por definir os seguintes critérios para a selecção da turma: i) a investigadora exercer simultaneamente as funções de professora e de directora de turma, conseguindo assim maior proximidade com os encarregados de educação e um conhecimento mais completo dos alunos individualmente e da turma como um todo e ii) para além da disciplina de Matemática a investigadora ser responsável pela docência das áreas curriculares não disciplinares, o que possibilita a observação dos alunos em ambientes de sala de aula com diferentes níveis de formalidade, conseguindo assim fontes de informação diferenciadas relativamente ao entendimento da cultura de turma.

A metodologia seguida na investigação é qualitativa, de natureza interpretativa, incidindo o processo de recolha de dados, na observação participante, na entrevista, na análise documental e no desenho de um projecto com o propósito de operacionalizar a investigação em curso. A observação participante foi um dos métodos adoptados para

compreender os significados culturais locais, para estabelecer conexões entre a cultura local e os conteúdos matemáticos trabalhados ao nível do 7.º ano de escolaridade, e para relacionar o conhecimento cultural dos alunos com outros conhecimentos culturalmente distintos. A análise documental, a entrevista e a implementação de um projecto delineado para a turma proporcionaram a triangulação de dados e o enriquecimento de informação relativa ao desenvolvimento de processos matemáticos transversais. Salienta-se o facto de outros métodos de recolha de dados terem sido implementados, integrados no desenvolvimento do projecto que decorreu entre Setembro de 2009 e Junho de 2010.

Abordagem etnomatemática em contexto de sala de aula

Existem diferentes abordagens etnomatemáticas em sala de aula, que dependem dos propósitos com que são implementadas. A abordagem utilizada neste estudo pretende "(…) integrar os conceitos e práticas matemáticas da cultura dos alunos com a matemática formal (…)". (Adam, Alangui & Barton, 2003, p.331-332).

Inspirado no modelo teórico de Adam (2004) que assenta na abordagem referida, desenhou-se um projecto integrando finalidades, objectivos, conteúdos e orientações metodológicas do ensino e da aprendizagem da Matemática, que, simultaneamente, visou ser adequado aos alunos da turma participante e orientado pelos objectivos definidos para este estudo.

O projecto foi desenvolvido em cinco fases. Na primeira fase o principal objectivo foi procurar entender e aprofundar os significados culturais locais. A segunda fase consistiu na análise de informação recolhida na fase 1 com o objectivo de construir tarefas a serem implementadas na fase 3. Esta fase culminou com a elaboração de um conjunto de 5 tarefas, contemplando conexões entre as práticas culturais identificadas e os conteúdos matemáticos trabalhados ao nível do 7.º ano de escolaridade. A 3.ª fase do projecto consistiu na implementação em sala de aula das primeiras quatro tarefas. A experiência matemática cultural proporcionou o contacto com práticas culturais familiares e não familiares aos alunos. Na 4.ª fase foram formalizados os conceitos de Geometria que tinham sido trabalhados de forma implícita e intensivamente durante a fase 3 do projecto, os quais são, igualmente, utilizados pelos alunos em diversas situações do dia-a-dia. Esta formalização baseou-se nos produtos escritos dos alunos.

Finalmente, na 5.ª fase do projecto foi proposta uma última tarefa aos alunos, com o objectivo de estabelecer a "ponte" com a primeira fase, ou seja, voltar às práticas culturais, mas agora enriquecendo-as com um ponto de vista matemático, e, portanto alargando o saber cultural dos alunos conectando-o com a matemática.

O desenvolvimento da comunicação matemática na sala de aula: a linguagem do surf

Os dois episódios que a seguir se apresentam foram extraídos da primeira tarefa proposta aos alunos durante a fase 3 do projecto e da quinta tarefa, implementada durante a quinta fase do projecto (Latas, 2011). Ambas as tarefas se centram na cultura local, contudo, enquanto que a primeira tarefa incide em práticas culturais para extrair os saberes matemáticos implícitos dos alunos, a quinta tarefa pressupõe a formalização dos mesmos. Estes dois episódios pretendem ilustrar como a comunicação matemática se foi desenvolvendo no sentido de enriquecer tanto a aprendizagem matemática como o saber cultural alicerçado em ferramentas matemáticas.

As actividades do mundo quotidiano dos alunos, bem como as suas experiências prévias foram integradas no desenvolvimento da primeira tarefa. Sendo do nosso conhecimento a familiaridade dos alunos com desportos onde a orientação do vento assume um papel preponderante, esta informação assumiu a base para o desenvolvimento da tarefa denominada "De onde sopra o vento?" (Fig. 1) tendo, entre outros, os seguintes objectivos gerais: i) proporcionar experiências matemáticas relacionadas com as necessidades dos alunos nas práticas diárias; ii) aprofundar o conhecimento cultural matemático dos alunos e iii) averiguar a predisposição dos alunos para estabelecerem conexões entre situações do dia-a-dia e conteúdos matemáticos.

Tarefa: De onde sopra o vento?

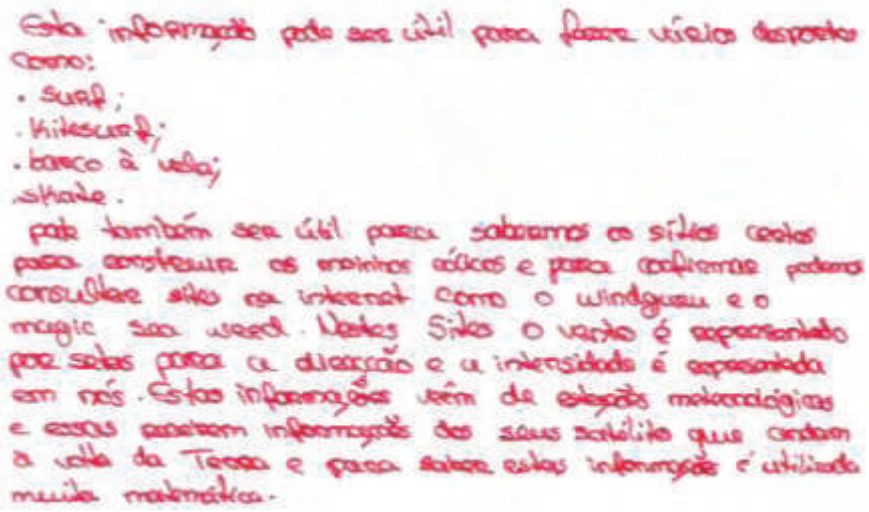
1. Como podem verificar se há vento?
2. Qual a orientação do vento no dia de hoje?
3. Para que serve saber a orientação do vento?

Estrutura do relatório

- Qual a estratégia utilizada para identificar a orientação do vento? (Utiliza palavras, esquemas, desenhos, símbolos, ...)
- Quais as características que vos permitem caracterizar o vento?
- Em que situações é que esta informação pode ser útil?
- Que conhecimentos foram utilizados para desenvolver esta actividade?
- Quais as dificuldades sentidas?

Figura 1: Tarefa "De onde sopra o vento?"

Como se pode observar no seguinte extracto de um dos relatórios, alguns alunos consultam regularmente *sites* de Internet onde consta a previsão da orientação do vento (Fig. 2). A análise e interpretação da informação matemática desses *sites* foi, mais tarde, desenvolvida e, a terminologia utilizada foi trabalhada por forma a não só ser compreensível por todos mas também a ser integrada na linguagem científica, como foi o caso das "setas" que, com o desenvolvimento da partilha de significados, passaram a "vectores".


Esta informação pode ser útil para fazer vários desportos como:
- surf;
- kitesurf;
- barco à vela;
- skate.

pode também ser útil para sabermos os sítios certos para construir os moinhos eólicos e para confirmar podemos consultar sites na internet como o windguru e o magic sea weed. Nestes Sites o vento é representado por setas para a direcção e a intensidade é representada em nós. Estas informações vêm de estações meteorológicas e essas recebem informações dos seus satélites que andam à volta da Terra e para saber estas informações é utilizada muita matemática.

Figura 2: Extracto do relatório apresentado pelo grupo A

As expectativas deste grupo de alunos [grupo A] em relação a oportunidade futuras relacionadas com estas práticas desportivas – o *foreground* cultural - levou-os a

relacionarem a Matemática com as suas práticas diárias e a reconhecerem a utilização de conhecimentos matemáticos a nível global, embora as ferramentas matemáticas disponíveis não lhes tenham permitido concretizar as conexões entre a Matemática e o funcionamento dos satélites. Neste exemplo, os restantes alunos da turma reconheceram a utilidade da Matemática, conferindo-lhe o sentido de ser útil para um futuro longínquo.

Na quinta tarefa, "Regressando às raízes", a prática do surf voltou a estar presente de uma forma mais explícita, mas desta vez prevaleceu a necessidade de transmitir aos colegas da turma conceitos acessíveis e comuns a todos os alunos.

Nas conexões estabelecidas com o mundo quotidiano do aluno, o *background* cultural foi destacado no domínio de uma linguagem própria do contexto escolhido. Associada ao surf, surgiram termos apenas dominados por alguns elementos da turma que os traduziram e explicaram contribuindo assim para a construção de significados comuns, como se pode observar pela comparação entre a situação 1 apresentada na figura 3 e o texto apresentado pelos alunos, aos colegas de turma, na figura 4:

O Tino está a iniciar-se na prática do surf. O jovem vai investir a sua poupança numa prancha de surf. Decidiu por uma 8'5 em segunda mão.

Hoje o Tino vai experimentar a prancha mas, como surfista cuidadoso, o Tino avalia sempre as condições antes de entrar na água. Verificou que o vento está *off-shore* pelos salpicos das ondas, o *sweel* está de noroeste, e os *sets* estão a entrar com um período de 12.

Pela sua análise as ondas estão *shoulder-hight*, contudo, o Roberto, que está por perto, considera que as ondas são de um metro com umas maiores.

Estarão reunidas boas condições para a prática de surf? O Roberto, surfista experiente, está com expectativa de ser um bom dia para manobras, pois as ondas estão tubulares. Pelas informações disponibilizadas concordam com o Roberto?

Justifiquem a vossa resposta utilizando palavras, esquemas, símbolos, …

Reescrevam a história com uma linguagem que seja compreendida por qualquer pessoa.

Figura 3: Extracto da tarefa "Regressando às raízes"

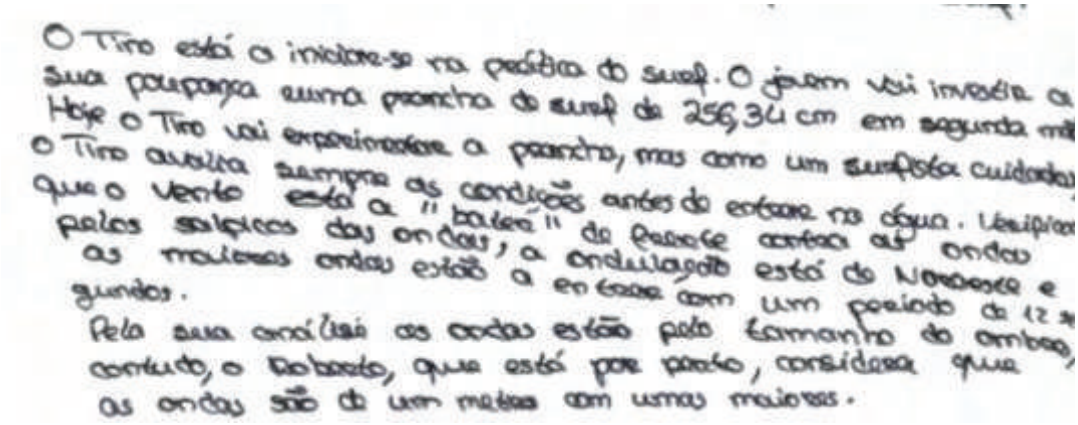


Figura 4: Extracto da apresentação do grupo A

Esta partilha desencadeou a valorização das interacções em pequeno grupo e o respeito pelo conhecimento dos outros. O diálogo fez emergir a utilização de medidas de comprimento distintas e a sua utilização em diferentes contextos, nomeadamente a utilização das polegadas na referência ao comprimento da prancha de surf que foi traduzida para o sistema métrico para que todos entendessem essa informação. Neste exemplo a utilização da capacidade de orientação foi também valorizada para caracterizar o vento pela sua direcção e sentido na análise da ondulação. Mais uma vez a linguagem própria de surfista foi tornada comum para ser compreensível para todos os alunos.

Além destes, a construção de significados matemáticos incidiu também no reconhecimento de conceitos matemáticos, nomeadamente a estimativa e a regularidade. No primeiro caso foi enfatizado a unidade de referência que, quanto mais real, menos exacta, e, consequentemente, mais subjectiva se torna e, no segundo caso, pela necessidade de não despender energia desnecessária e prever o próximo momento para "apanhar a onda". A seguinte situação retrata esse debate na sala de aula:

> Professora: (…) [dirigindo-se ao grupo A] vocês referiram que escolheram esta situação para perceber alguma relação entre a matemática e a prática do surf e depois acabaram por dizer… sei que vocês a certa altura diziam que o António quando ia surfar utilizava alguns conhecimentos matemáticos, não era?
>
> Luísa: Usas? [Ai que horror! sussurra a Luísa]
>
> Professora: Era essa questão que eu ia colocar. Vocês acham que sim ou que não?
>
> Alunos: Sim

Professora: Conseguem dar exemplos concretos?

Luísa: A intensidade do vento?

Luís: O tamanho das ondas

(…)

Professora: (…) Tamanho das ondas, como sabem?

Patrícia: A estimativa.

Professora: A estimativa. E neste caso concreto a estimativa foi feita a partir do quê?

António: Da altura do ombro.

Professora: Da altura do ombro. Portanto o ponto de referência foi mais ou menos a altura do ombro.

António: Mas também podemos dizer headheight que é a altura da cabeça e depois também temos a cintura.

Professora: Como se diz cintura em inglês?

Soraia: Waist.

(…)

António: Também utilizamos o período de ser mais fácil estimar.

Professora: O que é que o período tem de matemático?

António: Podemos contar, estar no mesmo sítio e contar até à próxima onda. (Extracto da transcrição terceira entrevista colectiva – EC3)

De facto, independentemente do surfista ser ou não um bom aluno de Matemática na escola, para praticar surf ele precisa de desenvolver capacidades muito concretas de orientação para identificar de onde sopra o vento e a ondulação, de identificação de regularidades para estimar o período dos *sets* e de estimativa para perceber se o tamanho das ondas é ou não confortável para a sua *performance* desportiva. No excerto apresentado, além de ser considerado o *background* cultural dos alunos, está igualmente patente a interacção com o respectivo *foreground* cultural, uma vez que um dos alunos se baseia nos conhecimentos culturais da prática do surf e justifica, juntamente com os colegas de grupo, a utilização de ferramentas matemáticas para aumentar o nível de eficiência nessa mesma prática. Além disso, a curiosidade que a situação despertou nos restantes colegas da turma, deu origem a um debate entre os alunos no sentido de melhor conhecerem a prática desportiva e compreenderem a matemática nela implícita. Aliás, na tarefa "Regressando às raízes" a interacção entre *backgrounds* e *foregrounds* culturais dos alunos fomentou, no grupo turma, um debate mais participado pelos

alunos na realização da mesma, bem como no investimento realizado na apresentação das mesmas aos colegas.

Por último gostaríamos de realçar um novo posicionamento dos alunos relativamente à matemática. Enquanto numa primeira fase, no relatório da primeira tarefa, a prática do surf surge associada a uma matemática avançada que não está ao alcance dos alunos participantes no estudo, na última tarefa do projecto, os alunos, com o auxílio de uma linguagem comum a todos, na exposição à turma e no debate participado onde teve lugar a justificação das ideias envolvidas, identificam noções matemáticas de estimativa e regularidade na prática do surf, integrando assim a matemática numa nova prática cultural, e conferindo um novo significado às aplicações da matemática.

Considerações finais

A inclusão de práticas culturais familiares aos alunos exploradas sob o ponto de vista matemático sugere o desenvolvimento de autoconfiança o que reforça a necessidade de legitimação deste conhecimento defendido por autores como Gerdes (2007) e Moreira (2002). Os resultados apresentados sugerem ainda que as práticas cultuais se podem tornar eficientes quando são fortalecidas com os significados matemáticos pelo estabelecimento de conexões com os conhecimentos prévios, resultado este que corrobora o que Bishop (2005) defende. Tal facto contribui para estabelecer uma comunicação mais alargada entre os alunos da turma.

A discussão de ideias promoveu a negociação dos conceitos trabalhados e a construção de significado em busca de uma linguagem comum entre todos os alunos. Deste modo, a partilha de informação como fonte de negociação de significados, começou a dar lugar à necessidade dos alunos justificarem os seus raciocínios perante os colegas.

De facto, um aluno seguro dos seus saberes empíricos tem tendência a arriscar a participação perante a turma e, deste modo, a desbloquear o caminho para evoluir no domínio da comunicação matemática. Para a referida evolução contribuiu, igualmente, a construção de um ambiente de sala de aula confortável para alunos e professora onde o erro advindo de conjecturas reflectidas dos alunos foi encarado com naturalidade e a individualidade de cada um foi reconhecida com respeito. Estes resultados confirmam o sugerido em Martinho e Ponte (2005) e NCTM (2007) no que se refere à importância de

um ambiente de aprendizagem onde os alunos se sintam livres para expressarem as suas ideias, ou seja, para comunicarem matematicamente.

Em síntese, um ambiente de sala de aula onde as actividades são desenvolvidas partindo de contextos culturais próximos das vivências dos alunos e onde as tarefas propostas requerem os significados culturais locais provenientes de práticas dominadas pelos alunos fomentam a participação activa dos alunos na apresentação, na discussão e na negociação de significados e de conceitos, sendo por isso, tendencialmente, promotoras do desenvolvimento da capacidade dos alunos comunicarem matematicamente.

Referências bibliográficas

Adam, S., Alangui, W., & Barton, B. (2003). A comment on Rowlands and Carson 'Where would formal academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review'. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 327-335.

Adam, S. (2004). Ethnomathematical Ideas in the Curriculum. Mathematics Education Research Journal 16(2), 49-68.

Alrø H., Skovsmose, O. & Valero P. (2009). Inter-viewing foreground: students' motives for learning in a multicultural setting. Em M. César & K. Kumpulainen (Eds.), Social interactions in multicultural settings (pp. 13-37). Rotterdam: Sense publishers.

Barbosa, E. (2007). A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação com alunos do 8.º ano de escolaridade. Lisboa: APM.

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Colombia: Universidad del Valle.

Boaler, J. (1993, Junho). The role of contexts in the mathematics classroom: do they make mathematics more "real"?. For the Learning of Mathematics. 13(2), 12-17.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). A experiência matemática no Ensino Básico. Lisboa: ME- DGIDC.

Gerdes, P. (2007). Etnomatemática - Reflexões sobre a diversidade cultural. Ribeirão: Edições Húmus.

Latas, J. (2011). O reconhecimento e a exploração da Matemática cultural: uma abordagem etnomatemática com alunos do 7.º ano de escolaridade. Tese de Mestrado. Universidade de Évora (no prelo).

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. Em J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 273-293). Setúbal: APM.

ME-DEB (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências essenciais. Lisboa: DEB, ME.

ME-DGIDC (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa: ME-DGIDC.

Moreira, D. (2002). Educação Matemática, comunidades e mudança social. Em D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos & L. Vicente, Matemática e Comunidades – A diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática (pp. 9-25). Lisboa: I.I.E. e S.P.C.E..

Moreira, D. (2008). Educação matemática para a sociedade multicultural. Em P. Palhares (coord.). Etnomatemática – Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem da Matemática (pp. 47 – 65). Ribeirão: Edições Húmus.

NCTM (2007). Princípios e normas para a Matemática escolar. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C. et al. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. Revista Portuguesa de Educação, 20(2), 39-74.

Rivera, F. & Becker, J. (2007). Ethnomathematics in the global episteme: quo vadis?. Em B. Atweh et al. (Eds.), Internationalisation and globalisation in Mathematics ans Science Education (pp. 209-225). Dordrecht: Springer.

Vithal, R. & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: a critique of ethnomathematics. Educational Studies in Mathematics, 34 (2), 131-157.

RESOLUÇÃO DE TAREFAS ENVOLVENDO ÁREAS E PERÍMETROS – UM ESTUDO COM ALUNOS DO CURSO DE EDUCAÇÃO E FORMAÇÃO

Carla Lavrador
EB 2, 3 Soeiro Pereira Gomes, São João dos Montes
carla.lavrador@gmail.com

Henrique Manuel Guimarães
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmguimaraes@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação tem por base uma investigação que envolveu os alunos de uma turma do Curso de Educação e Formação e que tinha como objectivo principal caracterizar as suas práticas na resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros. Uma das questões desse estudo consistia em identificar e descrever as dificuldades que os alunos do CEF manifestam na resolução daquele tipo de tarefas. Nesta comunicação apresentam-se parte dos resultados do estudo no âmbito desta questão que mostram que os alunos manifestam dificuldades que foram caracterizadas como de interpretação e de carácter conceptual.

Palavras-chave: Aprendizagem em Matemática, Áreas e Perímetros, Dificuldades de aprendizagem.

Introdução

A evolução da sociedade tem proporcionado várias mudanças em diversas áreas, nomeadamente na educação, colocando à escola novos desafios e metas, e a necessidade de se diversificar, diferenciar, contextualizar e flexibilizar. Cada vez mais a uniformidade do ensino é colocada em causa, uma vez que as diferenças sociais e culturais levam a uma maior heterogeneidade e diversidade da população escolar.

Tornou-se assim necessário reorientar as lógicas de acção organizacional e curricular, investindo em vias alternativas de formação que visassem, simultaneamente, assegurar a escolaridade obrigatória e a inserção dos jovens na vida activa. Com este objectivo foi criada a iniciativa Novas Oportunidades que se assume com o propósito de dar resposta aos baixos níveis de escolarização dos jovens e adultos através da diversificação de vias de educação e formação. Nesta iniciativa, distinguem-se dois eixos de intervenção que, embora articulados, apresentam uma estratégia e metas próprias. O primeiro eixo de actuação dirige-se à qualificação de jovens e o segundo está orientado para a qualificação dos adultos. Esta comunicação tem por base um estudo que incide sobre o

primeiro eixo de intervenção, nomeadamente os Cursos de Educação e Formação (CEF) e tinha como propósito principal compreender como os alunos destes cursos realizam tarefas geométricas envolvendo áreas e perímetros (Lavrador, 2010). O objectivo principal desse estudo era caracterizar as práticas dos alunos de uma turma do CEF neste tipo de tarefas, tendo para isso definido as seguintes questões de investigação:

- Que dificuldades apresentam os alunos do CEF na resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros?
- Que estratégias utilizam os alunos do CEF na resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros?

Considerando a natureza do objecto em estudo, e o objectivo e as questões estabelecidas, a metodologia adoptada seguiu uma abordagem qualitativa, no quadro do paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). O estudo realizou-se numa escola da zona de Vila Franca de Xira e envolveu como participantes, os onze alunos de uma turma de um CEF, tipo 2, na área de Jardinagem e Espaços Verdes, com cinco raparigas e seis rapazes, entre os catorze e dezasseis anos.

A recolha de dados foi efectuada de modo a obter informação diversificada, no quadro das questões do estudo, tendo em vista uma descrição detalhada e em profundidade, Foram utilizados os seguintes instrumentos: *(i)* questionário a todos os alunos da turma; *(ii)* observação de aulas, com registo de notas de campo; *(iii)* entrevistas de tipo clínico; e *(iv)* análise documental. Nesta comunicação apenas serão apresentados elementos relativos às entrevistas, quer provenientes dos registos da interacção oral, quer das produções dos alunos nas tarefas realizadas nas entrevistas a cada aluno individualmente.

A análise de dados constituiu essencialmente uma análise de conteúdo, tendo em conta as principais questões em estudo, visando identificar aspectos relevantes, relativamente a cada uma das questões. Foram definidas duas dimensões globais para a análise dos dados associadas a cada uma das questões do estudo — dificuldades e estratégias — e, em cada uma, os resultados foram organizados em sub-categorias que emergiram dessa análise. Esta comunicação incide apenas sobre os elementos que dizem respeito às dificuldades dos alunos de que iremos apresentar os principais resultados no que se refere às dificuldades que consideramos de interpretação e de natureza conceptual.

Enquadramento teórico e curricular do estudo

Os CEF procuram responder, simultaneamente, à preocupação de formação geral e ao desenvolvimento de competências profissionais, de modo a facilitar o desempenho de tarefas diversificadas no contexto de trabalho e a abordagem a situações e problemas do mundo real. Assim, o programa de Matemática dos CEF (ME, 2005) contempla, por um lado, a formação geral do jovem, como cidadão capaz de pensar criticamente e intervir na sociedade, e por outro fornece ferramentas conceptuais e operatórias, que permitam aos jovens responderem de forma adequada aos problemas colocados no seu dia-a-dia.

A disciplina de Matemática dos CEF, intitulada Matemática Aplicada, está inserida na componente científica do curso, e é organizada tendo em conta o programa de Matemática Aplicada (ME, 2005), com orientações curriculares definidas para cada tipo de curso, pelo Ministério da Educação.

Os alunos que ingressam nestes cursos têm um historial de insucesso na disciplina e tendem a desvalorizar a Matemática, acumulando várias retenções ao longo do seu percurso, além de serem jovens em situação de abandono escolar. O programa de Matemática Aplicada (ME, 2005) destaca que os alunos precisam de reconhecer a disciplina de Matemática no mundo que os rodeia, assumindo uma forma muito concreta e ligada à realidade.

Segundo o programa de Matemática Aplicada, um dos grandes objectivos de um currículo de Matemática é o desenvolvimento das competências Matemáticas transversais, tais como a exploração de conexões, a comunicação Matemática, a compreensão dos procedimentos, a exploração de situações que envolvam o cálculo, a estimação e a exploração de situações concretas, evidenciando todas as conexões da geometria com outros temas. Por exemplo, se o aluno está a explorar um problema de geometria poderá "estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar", mas também poderá "estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com simetria" (ME, 2005, p. 47).

As orientações metodológicas para a abordagem das áreas e dos perímetros, não são diferentes das referidas no programa do Ensino Básico (Ponte e al, 2007). Tanto a abordagem do conceito de perímetro como de área deve ser realizada com base em

problemas concretos, adequados aos alunos. Na distinção entre os dois conceitos, os alunos devem investigar relações entre figuras, como por exemplo se uma figura com a mesma área também tem o mesmo perímetro e vice-versa. O programa cita ainda que para um aluno perceber que a medida de um comprimento ou uma área depende da unidade escolhida, devem realizar experiências concretas e explicar os resultados obtidos, desenvolvendo simultaneamente a capacidade de comunicar matematicamente.

A investigação associada aos conceitos de comprimento, perímetro e área tem identificado e analisado, em todos os níveis etários, dificuldades específicas dos alunos sobre cada um dos conceitos e problemas de confusões entre eles. Vários estudos apresentam dificuldades e erros apresentados por alunos, quando trabalham com áreas e perímetros. Algumas das dificuldades que se podem identificar e que estão associadas à aprendizagem de conceitos geométricos são: a compreensão do espaço, a visualização espacial, a representação gráfica e a compreensão dos conceitos (Battista, 2006; Curry, Mitchelmore e Outhred, 2006; Parzysz, 1988).

A incompreensão dos enunciados de algumas tarefas tem muitas vezes origem em dificuldades na própria língua portuguesa. Segundo um estudo de Candeias (2006), embora determinados termos sejam habitualmente considerados simples pelo professor, por vezes não são conhecidos para a generalidade dos alunos, que apresentam dificuldade em compreender o seu significado. Battista (2006) refere que embora o conceito de comprimento seja simples para um adulto, pode ser complicado para uma criança percebê-lo. As questões de linguagem podem influenciar a compreensão do aluno sobre determinado conceito. Por exemplo, no que se refere à noção de comprimento esta é utilizada e interpretada de maneiras diferente dependendo do contexto, como no caso de perímetro, largura, altura e distância (NCTM, 2007).

Os alunos têm dificuldades na compreensão dos conceitos de perímetro e de área (Kenney & Kouba, 1997; Lindquist & Kouba, 1989), confundindo-os. Segundo estes investigadores, os alunos utilizam fórmulas sem compreenderem de que modo essas fórmulas se relacionam com a grandeza a ser medida ou com a unidade de medida utilizada.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), muitos alunos sentem-se confusos em relação ao motivo pelo qual as unidades quadradas são sempre usadas na medição de áreas, e as unidades cúbicas para medir volumes,

sobretudo quando as figuras a medir não são quadrados nem cubos. Por isso, se passarem muito depressa para a utilização de fórmulas, sem possuírem bases conceptuais, muitos alunos poderão sentir alguma confusão. A aplicação de fórmulas inválidas, para a determinação da medida da área de uma figura, é um dos erros identificados por Douady & Perrin-Glorian (1989) como muito frequente no ensino básico. Quando os alunos não entendem os conceitos básicos das fórmulas, têm dificuldade em generalizar os procedimentos que aprenderam.

Dificuldades dos alunos na resolução das tarefas

Dificuldades de interpretação

No âmbito da realização das tarefas propostas, consideraram-se como dificuldades de interpretação as dificuldades ao nível da linguagem, tanto matemática como corrente: dificuldades em interpretar expressões textuais, dificuldades em identificar o que é pedido e o que é dado num enunciado de uma tarefa, bem como dificuldades em compreender o vocabulário específico e a terminologia usada. Ainda nesta categoria estão inseridas as dificuldades em interpretar figuras, sejam elas geométricas, tabelas ou esquemas, e desenhos. Estas dificuldades estão por vezes associadas às dificuldades de visualização, ou de identificação de elementos que constituem as figuras e dificuldades na sua construção.

A tarefa 9 tinha como enunciado:

A mesa de jantar em casa da minha amiga Márcia tem a forma de um quadrado de 1,5 *m* de lado. Para que na ceia de Natal todos os familiares da Márcia se possam sentar à mesa, a mãe decidiu aproveitar o facto de a mesa se poder abrir ao meio, colocando entre as duas partes uma placa rectangular de 1,5 *m* por 0,5 *m*.

A mãe quer colocar à volta da mesa, uma fita com motivos de Natal. Quantos metros de fita necessita a mãe da Márcia?

Figura 1 - Tarefa 9, "Tampo da mesa"

Para a resolver, o Miguel calculou apenas o perímetro da placa rectangular, entreposta a meio do tampo fazendo o esboço da figura 2 e justificando como a seguir se mostra.

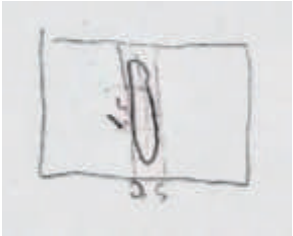


Figura 2 - Tarefa 9, Miguel

Investigadora: E onde é que se pretende que se coloque a fita?
Miguel: No meio da mesa. Neste espaço [o aluno aponta para a placa rectangular no centro da mesa].
Investigadora: A fita é para colocar aqui?
Miguel: Sim [o aluno desenha uma fita na placa no centro da mesa aberta (ver figura 2)].
Investigadora: Em cima do tampo?
Miguel: Sim, acho que é.
Investigadora: A fita é para colocar em cima do tampo?
Miguel: Do tampo da mesa aberta.
Investigadora: O que é que é o tampo da mesa aberta?
Miguel: É o meio.

(Miguel, p. 22)

Este procedimento revela dificuldades de interpretação do texto do enunciado, nomeadamente da expressão "tampo da mesa" que o aluno confunde com a "placa rectangular". No entanto, o contexto da tarefa poderá ter influenciado esta confusão, uma vez que a placa rectangular aparece no enunciado como elemento central, o que pode ter atraído a atenção do aluno. Este mesmo aluno, na tarefa 5 com o enunciado que se apresenta na figura 3, considerou que as medidas dadas no enunciado da tarefa (as di-

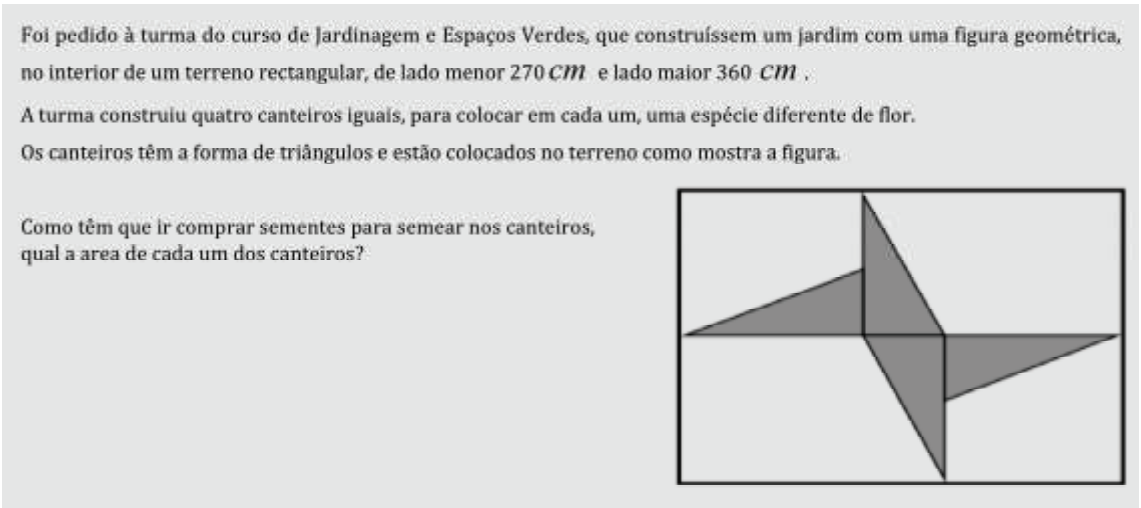


Figura 3 - Tarefa 5, "Quatro triângulos iguais"

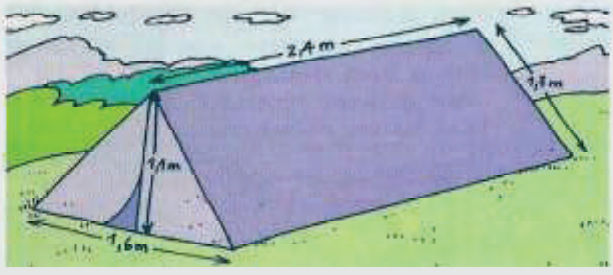
-mensões do rectângulo) são as medidas dos catetos de um dos triângulos que constituem a figura geométrica do jardim. Não identificou correctamente a que figura geométrica se refere o enunciado da tarefa quando menciona o "lado menor" e o "lado maior" e aplicou a fórmula da área do triângulo, multiplicando os dois valores dados no enunciado e de seguida divide por dois, para calcular a área de cada um dos triângulos.

> **Miguel:** Fiz o lado menor.
> **Investigadora:** O lado menor do quê?
> **Miguel:** Do triângulo (…) vezes o maior, para saber a área. Este [o aluno aponta o cateto menor de um triângulo] vezes este [o aluno aponta para o cateto maior de um triângulo] a dividir por 2.
> **Investigadora:** Então o 270 seria a base do triângulo?
> **Miguel:** Sim.
> **Investigadora**: E o 360?
> **Miguel:** É o maior.
> **Investigadora:** Então neste triângulo, este lado aqui é o maior? [a Investigadora aponta para um cateto maior do triângulo].
> (Pausa)
> **Miguel:** Sim.
>
> (Miguel, p. 7)

Numa outra tarefa, (tarefa 8, ver figura 4), em que era pedido a quantidade total de tecido para confeccionar uma tenda, a Márcia apenas calculou a área do chão da tenda.

A turma do curso de Jardinagem e Espaços Verdes está a planear uma saída de convívio no final do ano. Como gostam de estar perto da natureza, estão a pensar ir acampar. No entanto, como existe um grupo que não tem tenda de campismo, resolveram pedir à mãe de um dos colegas da turma, que é costureira, para confeccionar uma tenda com um tecido oleado.

Na figura estão representadas as medidas da tenda de campismo.



Sabendo que o "chão" da tenda também é de tecido oleado, qual será a área de tecido necessária para a confecção desta tenda?

Figura 4 - Tarefa 8, "Tenda de campismo"

A aluna explicou o seu procedimento do modo que a seguir se apresenta.

> **Investigadora:** Porque é que foste fazer assim?
> **Márcia:** Porque diz que o chão da tenda também é de tecido oleado, qual será a área de tecido necessária para a confecção desta tenda.
> Investigadora: Sim…
> **Márcia:** E eu fiz 1,6 vezes 1,1, que dá 1, 76.
> **Investigadora:** E porque é que utilizaste o 1,6 e o 1,1 e não utilizaste o 2,6 ou o 1,3. Porque é que tu utilizaste estas duas medidas?
> **Márcia:** Porque têm mais a ver com o chão, acho eu.
>
> (Márcia, p. 19)

Esta aluna, tal como os alunos anteriores, talvez se tenha "perdido" em relação ao que era pedido no enunciado da tarefa ou se tenha centrado apenas na última frase do enunciado da mesma que se refere ao "chão" da tenda.

Nestes três exemplos as dificuldades detectadas podem estar associadas à existência de um elemento "central" em cada uma das tarefas - "a placa rectangular da mesa", "o chão da tenda", "a figura geométrica do jardim" – que chama a atenção dos alunos. Estes tendem a centrar-se neste elemento e acabam por se esquecer do resto do enunciado de cada tarefa, nomeadamente do que é pedido.

As dificuldades ao nível da linguagem corrente e de linguagem Matemática foram frequentes e são bem notórias nos exemplos que a seguir se apresentam, primeiro com a tarefa 6 (figura 5) e depois com a tarefa 4 (figura 6).

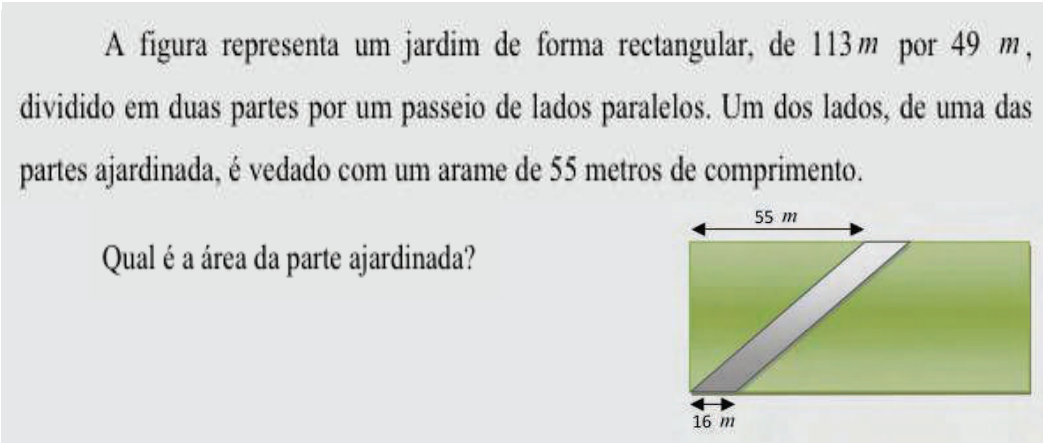
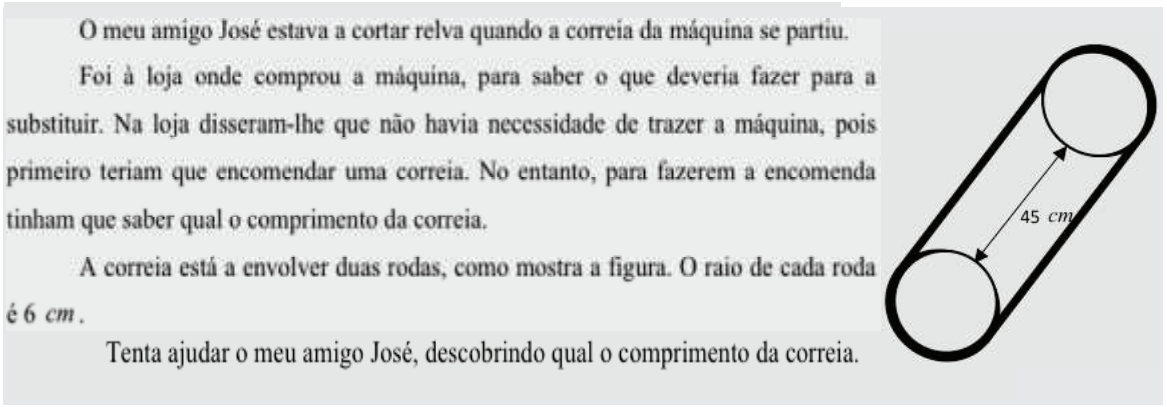


Figura 5 - Tarefa 6, "O jardim"

Na resolução desta tarefa, muitos alunos não perceberam a frase "um relvado de forma rectangular, de 113 cm por 49 cm", por não entenderem o significado de "*113 cm por 49 cm"*, como foi o caso da Dora.

> **Dora:** Então (pausa) este rectângulo [a aluna aponta para o terreno rectangular] tem 113 metros e foi dividido ao meio por 49 metros, né?! Cada um (pausa) isto aqui é o passeio?! [a aluna aponta correctamente para o passeio].
> **Investigadora:** O que é que tu achas?
> **Dora:** Aqui está a perguntar qual é a área, isto aqui é o relvado, não é? Estes dois?! [a aluna aponta para as duas partes relvadas].
> **Investigadora:** Qual é que é o relvado?
> **Dora:** Estes dois [a aluna aponta para as duas partes relvadas do terreno], e querem saber qual é a área (pausa) então é comprimento vezes largura (pausa) eu acho que é o rectângulo a dividir por, ou vezes, não sei, a dividir por 49.
>
> (Dora, p. 12)

Na tarefa 4, era pedido o seguinte:


O meu amigo José estava a cortar relva quando a correia da máquina se partiu.

Foi à loja onde comprou a máquina, para saber o que deveria fazer para a substituir. Na loja disseram-lhe que não havia necessidade de trazer a máquina, pois primeiro teriam que encomendar uma correia. No entanto, para fazerem a encomenda tinham que saber qual o comprimento da correia.

A correia está a envolver duas rodas, como mostra a figura. O raio de cada roda é 6 *cm*.

Tenta ajudar o meu amigo José, descobrindo qual o comprimento da correia.

Figura 6 - Tarefa 4, "A correia da máquina"

Na resolução desta tarefa os alunos tendencialmente interpretaram o comprimento pedido como o comprimento da maior dimensão da figura. A Dora, por exemplo, soma o comprimento do raio das duas rodas e a "distância" entre elas para calcular o comprimento da correia.

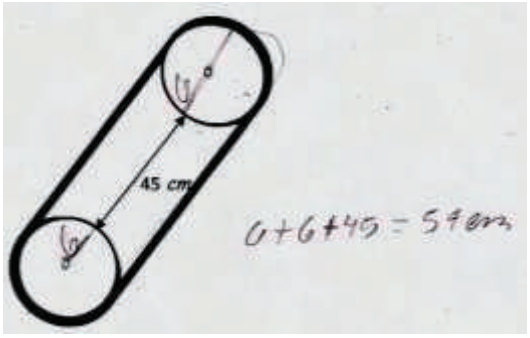


Figura 7 - Tarefa 4, Dora

Para além das dificuldades na interpretação dos enunciados ao nível da linguagem corrente e da linguagem Matemática, os alunos também revelaram dificuldades na interpretação de figuras. Por exemplo, na tarefa 8 ("Tenda de campismo"), há alunos que apresentaram dificuldades na visualização da tenda de campismo. Foi o caso da Joana que não identificou de imediato a altura do triângulo da entrada da tenda, ou seja, a altura da tenda, confundindo-a com outros elementos da figura.

> **Joana:** Isto é a área do triângulo, que é esta parte aqui da tenda [a aluna aponta para a "entrada" da tenda].
> **Investigadora:** Sim. E foste fazer 1,6 vezes 1,3 a dividir por 2, porquê?
> **Joana:** Porque é a base e a altura, que é igual a esta [a aluna aponta para o lado menor do triângulo].
> **Investigadora:** A altura do triângulo é 1,3?!
> **Joana:** Não (pausa) É 1,1.
>
> (Joana, p. 23)

A mesma aluna, na tarefa 3, em que se pedia para comparar a área de dois triângulos nas condições da figura 8, afirma que um dos triângulos tem maior área do que o outro, pois é "mais largo", aparentemente muito influenciada pela sua percepção visual da figura.

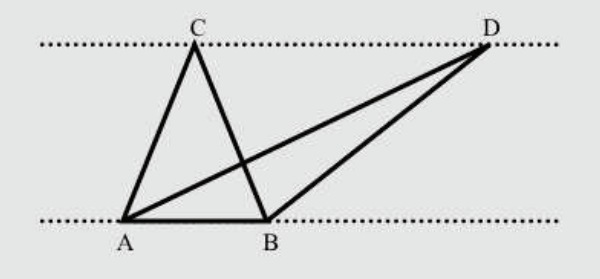


Figura 8 - Tarefa 3, "Dois triângulos"

> **Joana:** Este aqui [triângulo ABD] é mais comprido do que este [triângulo ABC], mas é mais estreito. (Pausa) Eu acho que este aqui [triângulo ABC] tem maior área do que este [triângulo ABD].
> Investigadora: Tem?
> **Joana:** Acho que sim.
> Investigadora: E porquê?
> **Joana:** Porque é mais largo e este aqui é mais estreito. É mais estreito mas é comprido. Este é mais pequeno mas é mais largo.
> (…)
> **Investigadora:** Sublinha lá a afirmação que é verdadeira.
> **Joana:** É esta [a aluna assinala a afirmação "a área do triângulo ABC é maior que a área do triângulo ABD"].
> **Investigadora:** Agora justifica a resposta. [a aluna escreve "porque o triângulo ABC é mais largo do que o triângulo ABD"].
>
> (Joana, p. 6)

Nesta tarefa, alguns alunos erram na identificação da altura do triângulo obtusângulo, sendo a base um dos lados do ângulo obtuso. Por exemplo, a Joana identificou incorrectamente a altura do triângulo ABD, no entanto, "marcou" correctamente a altura do triângulo ABC.

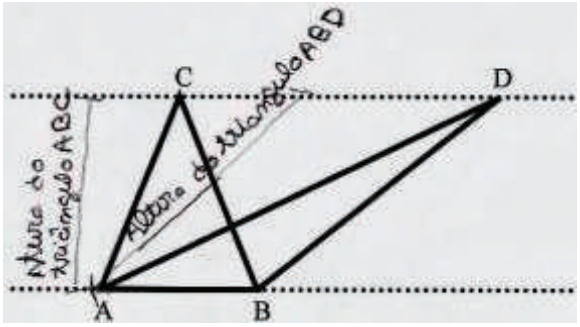


Figura 9 - Tarefa 3, Joana

A principal dificuldade que os alunos manifestaram nesta tarefa é em reconhecer que os dois triângulos têm a mesma altura, parecendo necessitar de informação numérica para isso como também aconteceu no caso do Miguel que confirma não saber se os dois triângulos têm a mesma área uma vez que "não há números" para o seu cálculo.

> **Miguel:** Aqui [o aluno aponta para a figura] não sei porque não tem números. Como é que eu vou saber se é igual a área?
> **Investigadora:** Então achas que não é possível saber se um triângulo tem maior área que o outro?
> **Miguel:** Não é possível.
>
> (Miguel, p. 4)

Dificuldades conceptuais

Como dificuldades conceptuais, foram consideradas as dificuldades manifestadas pelos alunos ao lidar com os conceitos de comprimento, perímetro e área, com as propriedades de cada um destes conceitos e as relações entre eles. Este tipo de dificuldades foram frequentes na realização das tarefas propostas, nomeadamente no que se refere às noções de perímetro e área, com uma manifesta compreensão deficiente destes dois conceitos por parte dos alunos, tendo até tendência a compará-los e a relacioná-los entre si.

O Nuno, na tarefa 8 ("Tenda de campismo"), para calcular a área de tecido necessária para a confecção da tenda, adicionou os comprimentos de todos os 'lados' da tenda, incluindo a altura do triângulo da entrada da tenda. Este é um exemplo da não compreensão da noção de área, e de confusão entre os conceitos de área e perímetro de uma figura. Repare-se ainda que o aluno apresentou também dificuldades de cálculo na adição de dois números decimais.

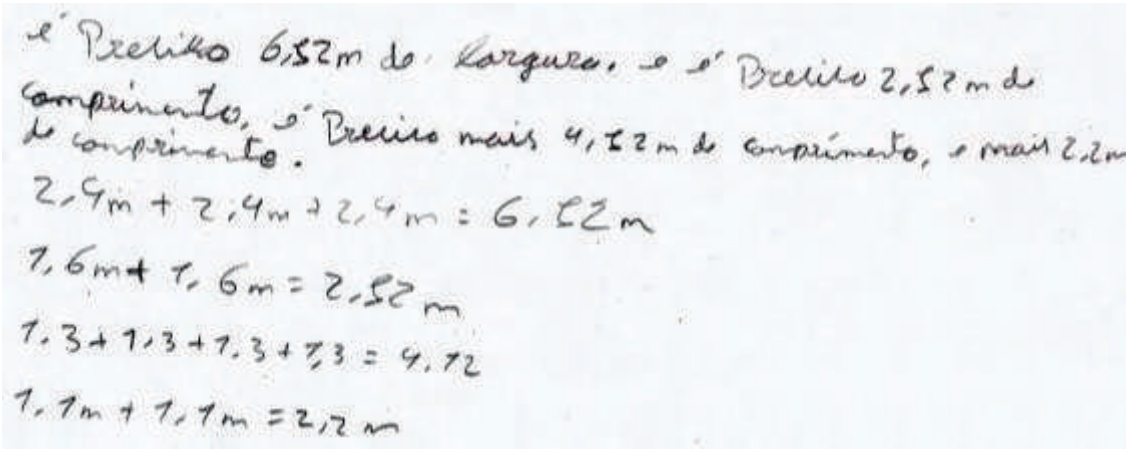


Figura 10 - Tarefa 8, Nuno

Ainda a propósito deste tipo de dificuldades, na tarefa 9 ("Tampo da mesa"), o Ivo resolveu a tarefa calculando a área da placa rectangular e não o perímetro da mesa.

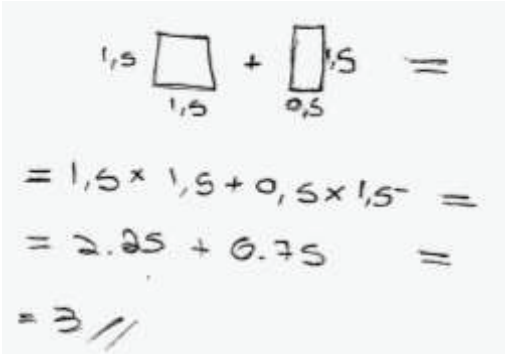


Figura 11 - Tarefa 9, Ivo

A subtracção de duas grandezas de natureza diferentes, utilizada frequentemente, revela também uma compreensão deficiente das noções de área e perímetro. Por exemplo, a Joana, na tarefa 6 ("O jardim"), calculou a área total do terreno e subtraiu-lhe o comprimento do lado menor do passeio.

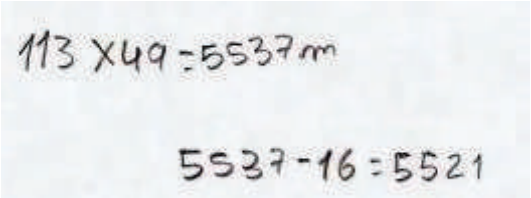


Figura 12 - Tarefa 6, Joana

Joana: Tenho que fazer 113 vezes 49.
Investigadora: Quando tu fazes 113 vezes 49 estás a calcular o quê?
Joana: A área.
Investigadora: A área do quê?
(…)
Joana: Disto tudo [a aluna aponta para o terreno rectangular].
Investigadora: Depois à área de tudo retiraste?
Joana: 16, que é do passeio.

(Joana, p. 18)

Salienta-se ainda que esta aluna não utiliza correctamente as unidades no primeiro cálculo realizado, nem coloca as unidades na resposta final à tarefa.

Um outro aspecto relevante muito patente no cálculo de áreas em algumas das tarefas realizadas, é o facto de os alunos tenderem frequentemente a aplicar a fórmula da área do rectângulo para o cálculo de outras áreas, mesmo que as figuras geométricas não sejam rectângulos. Foi, por exemplo, o caso da Dora, na tarefa 6 ("O jardim"), em que calculou a área de cada parte ajardinada como se de rectângulos se tratasse, e não um triângulo e um trapézio (figura 13).

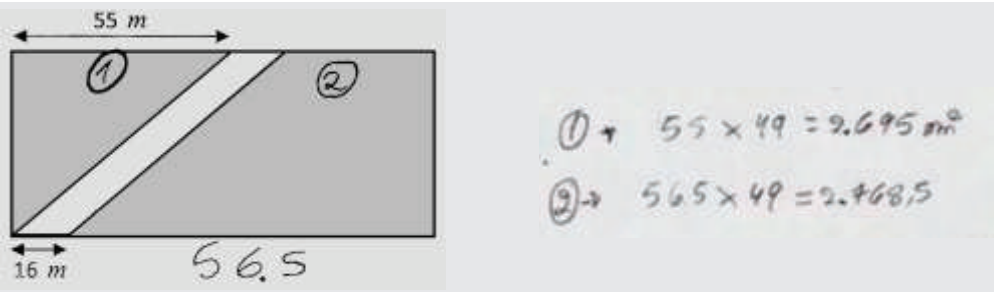


Figura 13 - Tarefa 6, Dora

Para além do uso indiscriminado da fórmula da área do rectângulo, existe também um caso, o Sérgio, que no cálculo da área de um rectângulo, calculou o produto

do comprimento pela largura, e a seguir multiplica por dois, dizendo que o rectângulo tem dois comprimentos e duas larguras.

> **Investigadora:** E para a medida da área?
> **Sérgio:** Fiz comprimento vezes largura, 3 vezes 2, e depois o resultado disso vezes 2.
> **Investigadora:** E porquê vezes 2?
> **Sérgio:** Porque são duas vezes, tem 3 vezes 2 duas vezes.
>
> (Sérgio, p. 1)

A concluir

Os conceitos de comprimento, perímetro e área, em geometria, são noções fundamentais, não só na Matemática, como em domínios não matemáticos. A investigação realizada proporciona elementos que contribuem para a caracterização das dificuldades dos alunos na resolução de tarefas que envolvem esses conceitos.

No que se refere a dificuldades de interpretação os alunos manifestaram dificuldades de linguagem, tanto matemática como corrente, nomeadamente na interpretação do texto dos enunciados das tarefas, não entendendo muitas vezes o que lhes era pedido, ou não percebendo o significado de determinadas expressões, como também outros estudos mostraram, por exemplo o de Ramalho e Correia (1994). Na resolução de algumas tarefas, esta dificuldade poderá estar associada à existência de um elemento "central" no texto do enunciado que chama a atenção dos alunos fazendo-os esquecer o resto do texto. Esta dificuldade é evidente na resolução das tarefas 5 (Quatro triângulos iguais), 8 (Tenda de campismo) e 9 (Tampo da mesa), sendo o elemento "central" de cada uma delas a "placa rectangular da mesa", "o chão da tenda" e "a figura geométrica do jardim", respectivamente. A incompreensão dos enunciados tem muitas vezes origem em dificuldades dos alunos na própria língua portuguesa. Os alunos não compreendem certos termos da linguagem corrente, habitualmente considerados simples ou familiares.

Ao nível da linguagem matemática, os alunos apresentam dificuldades na compreensão do vocabulário específico e na terminologia usada em alguns enunciados, verificando-se frequentemente que os alunos não identificam ou compreendem os dados que são fornecidos. Nos casos em que há figuras geométricas no enunciado, alguns alunos usam os dados de forma incorrecta, ao não compreenderem o significado de termos associados a essas figuras.

Na realização das várias tarefas, além das dificuldades de interpretação da linguagem corrente e da linguagem matemática, foram identificadas dificuldades na interpretação relacionadas com dificuldades na visualização de algumas figuras geométricas, nomeadamente no caso da tenda de campismo, eventualmente por se tratar de uma figura tridimensional. Estas dificuldades conduzem a que muitos alunos não consigam descobrir valores que não são fornecidos directamente no enunciado e que são necessários para a realização da tarefa.

Uma outra dificuldade que os alunos manifestaram, que pode estar associada à dificuldade de visualização, é na identificação da altura de um triângulo obtusângulo, quando consideram como base um dos lados do ângulo obtuso. Ainda relacionada com a dificuldade de visualização, está a dificuldade demonstrada pelos alunos quando numa tarefa não são dados valores numéricos. Os alunos não reconhecem que não são necessários e têm muitas dificuldades em tirar conclusões.

Em relação às dificuldades de natureza conceptual, é notória a confusão nos alunos quando estão envolvidas as noções de comprimento e perímetro, ou perímetro e área. Os alunos têm tendência a efectuar comparações e a estabelecer relações inadequadas entre os conceitos referidos, têm dificuldades em identificar as grandezas mencionadas nos enunciados das tarefas, e operam com grandezas de natureza diferente, por exemplo, subtraindo valores de medidas de áreas a valores de medidas de comprimentos, e vice-versa. Na realização das várias tarefas, os alunos com frequência não apresentam as unidades das grandezas, nem nos cálculos intermédios, nem na resposta.

Referências bibliográficas

Battista, M. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 140–147.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Candeias, N et al (2006). Estratégias de raciocínio e dificuldades dos alunos portugueses do 2.º ciclo do ensino básico em Visualização, Medida e Área. Retirado de: http://portugal.pdtr.eu/pages/Stuff/Presentations/SIEM-06-11-13/Geometry%20to%20SIEM%20Acts.pdf em 14 de Março de 2010.

Curry, M.; Mitchelmore, M. & Outhred, L. (2006). Development of children's understanding of length, area, and volume measurement principles. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 377-384). Vol. 2. Prague: PME.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d' apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 387-424.

Kenney, P. & Kouba, V. (1997). What do Students Know about Measurement? In P. A. Kenney & E. A. Silver (Eds.), *Results from the Sixth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 141-163). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Citado em NCTM (2007).

Lavrador, C. (2010). *Resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros – um estudo com alunos do Curso de Educação e Formação* (Dissertação). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Lindquist, M. & Kouba, V. (1989). Measurement. In M. M. Lindquist (Ed.), *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 35-43). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Citado em NCTM (2007).

Ministério da Educação (2005). Programa componente de formação científica Disciplina de Matemática Aplicada. Cursos de Educação e Formação. Lisboa: Direcção Geral de Formação Vocacional.

NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

Ponte et at (2007). Programa de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC.

Ramalho, G. & Correia, T. (1994). Análise de erros e estratégias utilizadas pelos alunos de 9 anos no teste de Matemática incluídas no "Second International Assessmentn of Educational Progress": Medida e geometria. In *Actas do V SIEM* (pp. 51-72). Lisboa: APM.

SIMPÓSIO 3

ENSINO E APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA E DAS PROBABILIDADES

ENSINO E APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA E DAS PROBABILIDADES

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Ana Henriques
CINAV, Escola Naval e Unidade de Investigação do Instituto de Educação,
Universidade de Lisboa
henriques.anaclaudia@gmail.com

Introdução

Face a uma cada vez maior proliferação de informação, existe hoje um amplo consenso de que o conhecimento de Estatistíca, incluindo também as Probabilidades, é fundamental para o exercício de uma cidadania participativa, esclarecida e crítica por parte de todos os cidadãos (Fernandes, Carvalho & Ribeiro, 2007). Ora, uma tal omnipresença da Estatística na vida das pessoas, quer em termos sociais quer individuais, tem-se repercutido num maior aprofundamento desta temática no currículo de Matemática.

O ensino da Estatística começa por ser introduzido no meio universitário, para aperfeiçoamento dos conhecimentos de quem trabalha nesta área (Branco, 2000). Só na década de 60, do século passado, é que os professores universitários salientam a importância de se empreender uma mudança curricular no ensino secundário de modo a incluir os temas de Estatística e Probabilidades. No nosso país, Sebastião e Silva foi o grande impulsionador da inclusão dos temas relacionados com a Estatística e com o cálculo de Probabilidades no programa de Matemática (Silva, 1975). Actualmente, em muitos países, incluindo Portugal, a Estatística e as Probabilidades fazem parte dos programas escolares de Matemática desde o início da escolaridade básica até ao final da escolaridade secundária, mantendo-se a sua importância também ao nível universitário, pois a maioria dos programas dos cursos superiores contempla disciplinas de Estatística.

Em Portugal, o último aprofundamento deste tema na escola aconteceu com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), onde, sob a designação de Organização e Tratamento de Dados, constitui um tema matemático ao longo de todos os três ciclos de escolaridade. Comparativamente com o programa

anterior, salienta-se a inclusão do tema logo no 1.º ciclo, a referência a uma maior variedade de representações gráficas, o estudo de algumas medidadas de variação simples e a dimensão didáctica, em que se destacam os projectos estatísticos, o uso de dados reais e o recurso às novas tecnologias na sua aprendizagem.

Perante a visibilidade crescente desta temática, Gal e Garfield (1997) defendem que os alunos de qualquer nível de escolaridade, depois de concluírem o estudo da Estatística, devem tornar-se cidadãos capazes de:

> ─ compreender e lidar com a incerteza, variabilidade e informação estatística no mundo à sua volta e participar efectivamente na sociedade de informação emergente;
> ─ contribuir para ou tomar parte na produção, interpretação e comunicação de dados de problemas que encontram na vida profissional. (p. 3)

Esta meta geral desdobra-se em oito submetas básicas inter-relacionadas: (1) compreender o propósito e a lógica das investigações estatísticas; (2) compreender o processo das investigações estatísticas; (3) dominar os *skills* procedimentais; (4) compreender as relações matemáticas; (5) compreender a probabilidade e o acaso; (6) desenvolver *skills* interpretativos e a literacia estatística; (7) desenvolver a capacidade para comunicar estatisticamente e (8) desenvolver disposições estatísticas úteis.

Analisando estas submetas podemos verificar que as seis primeiras se referem, sobretudo, a "fazer" Estatística e as três últimas se relacionam com *skills* de dar sentido e de comunicação, bem como de reflexão e questionamento. Estes dois grupos de submetas orientam o ensino e a aprendizagem em direcções diferentes e, frequentemente, as primeiras seis são mais enfatizadas pelos professores e livros de texto. Ora, o facto de ser mais provável que a maioria dos alunos venha a ser "consumidor de informação" e não tanto "produtor de informação" (Gal, 2002) destaca, senão mais, igualmente a relevância da interpretação, da comunicação e de uma atitude crítica face à informação com que se confrontam.

Investigações sobre o ensino e a aprendizagem da Estatística e das Probabilidades

Martins e Ponte (2010) referem que o objectivo principal do ensino da Estatística é o desenvolvimento da literacia nos alunos. E, embora a sua definição não seja consensual, muitos autores incluem no termo literacia estatística a capacidade de ler, interpretar e usar informação estatística (Gal, 2000; Martins & Ponte, 2010).

Uma das formas mais frequentes de apresentar essa informação é através de dados organizados na forma de tabelas e gráficos que surgem em numerosas situações do dia-a-dia dos alunos, quer elas sejam escolares ou não. Por isso, "as crianças precisam de aprender a ler, interpretar e saber como se constroem para se tornarem consumidores críticos e reflexivos" (Sheffield & Cruikshank, 1996, p. 271). Ajudar os alunos a tornarem-se cidadãos informados, reflexivos e críticos na análise de gráficos não é uma tarefa simples pois é necessário criar situações didácticas que propiciem uma aprendizagem significativa. Para que estas propostas curriculares sejam possíveis, é necessário disponibilizar informações sobre as possíveis dificuldades dos estudantes com os gráficos estatísticos. É nesta problemática da construção, interpretação e leitura de gráficos estatísticos que se focam duas das comunicações orais e dois posters deste Simpósio.

A comunicação *O desenvolvimento da literacia estatística no 5.º ano: uma experiência de ensino*, da autoria de Cátia Freitas, centra-se na interpretação de dados representados através de tabelas e gráficos estatísticos pelos alunos de uma turma do 5.º ano de escolaridade, após o estudo da unidade de ensino relativa ao tema. Por outro lado, no estudo, enfatizando a perspectiva de literacia estatística de "consumidor de informação", as dificuldades sentidas pelos alunos constituiriam um motivo para melhorar, no futuro, o ensino do tema.

Na comunicação *Realização de duas tarefas sobre construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano*, da co-autoria de Paula Cardeal Morais e José António Fernandes, relata-se o desempenho de alunos do 9.º ano na resolução de duas tarefas sobre gráficos estatísticos, uma relativa à construção de gráficos e a outra relativa à leitura e interpretação de gráficos.

O poster *Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 10.º ano de escolaridade*, da co-autoria de Adélia Prates, Celina Tavares e Rosa Dias, também se centra nesta problemática, mas ao nível do ensino secundário. As autoras analisam as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas pelos alunos do 10.º ano quando resolvem tarefas em que a informação é apresentada através de diferentes formas de representação gráfica.

Ainda focando as representações gráficas, mas considerando-as, em conjunto com as medidas de localização e dispersão, factores que contribuem para o desenvolvimento do

pensamento e da literacia estatística, o poster *Análise comparativa de distribuições numa turma do 7.º ano*, da co-autoria de Inês Campos, Joana Pereira e Nuno Raínho, apresenta um estudo sobre a compreensão de objectos matemáticos subjacentes ao conceito de distribuição.

Para que a tomada de decisões possa ser feita de uma forma crítica e informada, os alunos têm que ter alguns conhecimentos dos conceitos e dos processos utilizados na Estatística e envolverem-se activamente em todas as etapas do processo, desde a formulação de questões à análise de dados (NCTM, 1991). As orientações curriculares actuais também sugerem o envolvimento dos alunos em situações de natureza investigativa, pois só dessa forma têm oportunidade de desenvolver capacidades relacionadas com a recolha, organização e interpretação de dados e, finalmente, de tirar conclusões relativamente ao problema de partida.

Assumindo a importância de proporcionar aos alunos experiências significativas, na comunicação *Planeamento estatístico: uma experiência de ensino no 8º ano*, da co-autoria de Sandra Campelos e Darlinda Moreira, relata-se uma experiência de ensino (Cobb, Confrey, diSessa, Leherer & Schauble, 2003) em duas turmas do 8.º ano, extravasando o contexto da aula de Matemática e privilegiando a mobilização de conhecimentos de diferentes contextos sociais e o desenvolvimento da literacia estatística, enquanto contributo para a leccionação do tópico Planeamento estatístico.

Também a comunicação *Planeamento estatístico no 3.º ciclo do ensino básico*, da co-autoria de Cristina Roque e João Pedro da Ponte, se centra no desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico, especificamente em relação a questões de amostragem e de formulação de questões estatísticas, de um aluno do 8.º ano através de uma experiência de ensino.

Também no que respeita às Probabilidades, os actuais currículos do ensino básico e secundário reflectem um maior aprofundamento do ensino desta temática. Inicialmente, com a reforma de Sebastião e Silva, o seu ensino estava limitado ao ensino secundário, enfatizando o cálculo combinatório, enquanto actualmente este tema é introduzido já no início do ensino básico. Por outro lado, a ênfase no conceito clássico de probabilidade, recorrendo a técnicas de contagem, vai dando lugar a uma abordagem multifacetada do conceito, incluindo também os conceitos frequencista e axiomático.

Sobretudo ao nível do ensino básico, em que se destacam os conceitos clássico e frequencista, sugere-se a utilização de actividades de ensino onde o aluno primeiro faça predições sobre as possibilidades de obter diferentes resultados em experiências aleatórias simples, com recurso a moedas, dados ou roletas, depois obtenha dados empíricos sobre estas experiências e finalmente compare as probabilidades experimentais geradas com as suas predições originais (NCTM, 1991). Estas actividades permitem aos alunos estabelecerem conexões entre os dois conceitos e reconhecerem avaliações probabilísticas erradas.

Uma vez que os alunos têm ideias incorrectas sobre probabilidade e aleatoriedade, Garfield (1995) preconiza que o ensino efectivo da probabilidade deve apoiar-se no conhecimento prévio das concepções dos alunos, uma vez que quando se ensina algo de novo, essas concepções condicionam aquilo que os alunos aprendem. O conhecimento das concepções e formas de raciocínio dos alunos é, consequentemente, um ponto-chave para assegurar o êxito das novas propostas curriculares. Neste âmbito, no trabalho de co-autoria de Paulo Ferreira Correia, José António Fernandes e José Miguel Contreras, intitulado *Intuições de alunos do 9.º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada*, estudam-se as intuições de alunos do 9.º ano em probabilidade condicionada, antes do ensino do conceito, em duas tarefas com a informação apresentada na forma de tabela.

Ainda em Probabilidades, José Marcos Lopes e Inocêncio Fernandes Balieiro Filho apresentam o poster intitulado *Jogos e resolução de problemas no ensino e aprendizagem dos conceitos básicos de probabilidade*, em que, no contexto de um jogo inspirado em "Game of Kasje", são exploradas várias noções de probabilidade a partir da resolução de diferentes problemas.

Os estudos referidos e os trabalhos apresentados evidenciam bem a influência do Programa de Matemática do Ensino Básico enquanto fonte de motivação para a realização de investigação nesta área da Estatística e das Probabilidades. Infelizmente, a investigação tem sido bem menos alargada no que diz respeito à compreensão das dificuldades que os estudantes universitários enfrentam quando abordam a Inferência Estatística. A comunicação, *Dificuldades na compreensão de intervalos de confiança: um estudo com alunos universitários* da autoria de Ana Henriques, adoptando uma metodologia de questionário, apresenta um estudo exploratório sobre a avaliação da compreensão de estudantes universitários em intervalos de confiança. Pretende, assim,

contribuir para a difusão de resultados de investigação relacionados com as dificuldades conceptuais dos alunos, as quais ainda não são suficientemente conhecidas dos professores, de forma a permitir o desenho de experiências de ensino orientadas para ajudar os alunos a ultrapassá-las, também ao nível do ensino superior.

Referências bibliográficas

Branco, J. (2000). Estatística no secundário: O ensino e os seus problemas. In C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da Estatística* (pp. 11-30). Lisboa: SPM, APM, DEFCUL e DEIOFCUL.

Fernandes, J. A., Carvalho, C., & Ribeiro, S. A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7.º ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, *15*(28), 27-61.

Gal, I., & Garfield, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Gal, I. (2000). *Adult numeracy development: theory, research, practice*. Cresskill, NJ: Hampton Press.

Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. *International Statiscal Review*, *63*(1), 25-34. Amsterdan, Holanda: ISI Publications.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa; ME-DGIDC.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

NCTM, 1991. *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática* (Tradução portuguesa da APM do original de 1989).

Sheffield, L. J., & Cruikshank, D. E. (1996). *Teaching and learning elementary and middle school mathematics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Silva, J. S. (1975). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário* (Vol.1, tomo II). Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura.

O DESENVOLVIMENTO DA LITERACIA ESTATÍSTICA NO 5.º ANO UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Cátia Mónica Perdigão Freitas
Escola EB2,3 do Bairro Padre Cruz
catiaperdigao@gmail.com

Resumo

Este artigo diz respeito a uma investigação que tem como principal objectivo dar a conhecer o nível de compreensão e a capacidade de interpretação de dados representados em gráficos e tabelas dos alunos de uma turma do 5.º ano de escolaridade após a realização de uma unidade de ensino sobre o tema, assim como compreender as dificuldades apresentadas, com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem. Neste estudo, foi seguido um paradigma de carácter interpretativo utilizando o design de estudo de caso, desempenhando o papel de professora-investigadora. Os resultados indicam que a realização da unidade de ensino ajuda os alunos a desenvolver a sua leitura e interpretação crítica de dados, consolidando os seus conhecimentos sobre este tema.

Palavras-chave: Literacia estatística, interpretação de tabelas e gráficos, tarefas de exploração.

1. Introdução

Em quase todos os países desenvolvidos a Estatística já está integrada no currículo escolar, de uma forma generalizada, e Portugal não é excepção. No entanto, pela minha própria experiência, sinto que, nas nossas escolas, a Estatística continua a ser um tema sacrificado, em detrimento de outros, em especial quando os professores se preparam para terminar o ano lectivo e ainda "há muita matéria por dar".

O objectivo deste trabalho é estudar a aprendizagem de alunos do 5.º ano de escolaridade, no quadro de uma experiência de ensino que visa desenvolver a literacia estatística, que no presente estudo é centrada na leitura e interpretação de dados. Tendo como ponto de partida a capacidade de leitura e interpretação de dados em tabelas e gráficos que os alunos evidenciam antes da realização da unidade de ensino, esta investigação procura responder às seguintes questões:

a) Que aprendizagens demonstram os alunos, com a realização de uma unidade de ensino, na leitura e interpretação de tabelas de frequência absoluta e relativa?

b) Que aprendizagens evidenciam os alunos, com a realização da unidade de ensino, na leitura e interpretação de gráficos de barras, linha, caule-e-folhas e circulares?

c) Quais as principais dificuldades demonstradas pelos alunos antes, durante e no fim da unidade de ensino, nas aprendizagens sobre leitura e interpretação de tabelas e gráficos?

2. Literacia Estatística

Ainda hoje, para muitos professores, a Estatística tem por base um conjunto de fórmulas e de procedimentos que os alunos têm de memorizar e aplicar em problemas rotineiros. No entanto, o desenvolvimento da Estatística e a crescente necessidade de lidar com dados estatísticos no nosso dia-a-dia, levou ao surgimento da preocupação com a *literacia estatística*. Por exemplo, para Gal (2002) e Ben-zvi e Garfield (2004), Literacia Estatística é a capacidade que um indivíduo tem de compreender, interpretar e avaliar criticamente dados organizados em diferentes representações e a capacidade de apreciar, discutir ou comunicar as suas reacções a informações estatísticas, ou seja, as suas opiniões sobre a referida informação e a razoabilidade das suas conclusões. Para Martins e Ponte (2010), a literacia estatística inclui a capacidade de ler e interpretar dados organizados na forma de tabelas e gráficos, usando-os para responder às mais variadas questões. Acrescentam que o professor deve proporcionar o desenvolvimento da capacidade dos alunos compreenderem e utilizarem conceitos (tais como dados, variável, população, amostra, distribuição e medidas estatísticas) e representações estatísticas (como tabelas e gráficos) na resolução de questões diversas.

A habilidade dos alunos para lerem gráficos tem recebido cada vez mais importância por parte de investigadores. Curcio (1987), Pereira-Mendoza (1991, 1995), Watson (2007) e Ayoama (2006), entre outros, têm estudado a compreensão de gráficos nos alunos dos primeiros anos de escolaridade. Assim, para Curcio (1987, 1989) e Friel, Curcio e Bright (2001) o sentido de gráfico ou a compreensão de um gráfico envolve a leitura e o dar sentido ao gráfico em situações da vida real, assim como a capacidade de construção de gráficos que melhor transmitam informações e dados.

Curcio (1987, 1989) definiu três níveis de leitura e compreensão dos gráficos:

Nível 1: Ler os dados – Leitura directa de um gráfico sem qualquer interpretação, atendendo apenas a factos representados explicitamente;

Nível 2: Ler entre os dados – Requer alguma comparação, com conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas;

Nível 3: Ler além dos dados – Exige uma ampliação dos conceitos, predição, ou inferência.

Shaughnessy (2007) sugere que se deve acrescentar, ainda, um quarto nível cognitivo para estudar a compreensão gráfica: *ler por detrás dos dados*. Justifica esta introdução com o facto de estudos demonstrarem que os alunos têm fracas capacidades de interpretação de gráficos e que, muitas vezes, são incapazes de raciocinar ou argumentar além dos dados. Para este autor, ler por detrás dos dados é indispensável para fazer conexões entre os dados e o contexto, sendo todos estes aspectos importantes para o pensamento, o raciocínio e a literacia estatística (p. 991).

3. Metodologia

Esta investigação tem como principal objectivo obter informações com o intuito de conhecer o nível de compreensão e a capacidade de interpretação de dados apresentados em gráficos e tabelas de alunos de uma turma do 5.º ano após a realização de uma unidade de ensino, assim como compreender as dificuldades apresentadas, com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem. Assim, segue um paradigma de carácter interpretativo, utilizando o design de estudo de caso como forma de proporcionar uma melhor e mais enriquecedora compreensão das estratégias dos alunos na resolução de problemas e de tarefas de exploração, das suas dificuldades e da evolução ao longo da unidade de ensino.

O ensino da Estatística tem sido centrado na mecanização de procedimentos, seja na leitura directa de um gráfico, ou no cálculo de médias e outras medidas (Barros, Martins e Pires, 2009). A minha própria prática, neste tópico, tem sido um pouco semelhante. Neste sentido, e tendo como objectivo a mudança das práticas em sala de aula, decidi desempenhar o duplo papel de professora e investigadora.

Numa investigação como a conduzida neste estudo, é importante ter em conta a diversidade de instrumentos de recolha de dados que decorreu em três momentos distintos: antes, durante e após a realização da unidade de ensino. Durante a investigação foram propostas dez tarefas numa turma de 5.º ano, constituída por dezoito alunos nas aulas de Matemática. Os alunos, organizados em pares ou em grupos de 3 a 4 elementos, foram observados em sala de aula durante a realização de tarefas e, em alguns casos fora desta, por exemplo em situação de entrevista. Para proceder à recolha de dados, utilizei diferentes métodos: (i) observação participante, com registos em fotografia, áudio e/ou vídeo; (ii) recolha documental; (iii) entrevista semi-estruturada aos quatro alunos que constituíram estudos de caso; e (iv) testes inicial e final. Neste trabalho são apresentados os resultados de um aluno: o caso Daniel.

O uso da diversidade de instrumentos teve em vista realizar uma recolha de dados mais rica, de modo a fornecer uma informação alargada das aprendizagens dos alunos. Uma vez que os dados obtidos através da aplicação das tarefas foram de natureza qualitativa, procedi à sua análise tendo por base os aspectos teóricos revistos na literatura sobre o tema em estudo e os objectivos desta investigação. Foram consideradas como categorias de análise: (i) as estratégias utilizadas pelos alunos na exploração das diferentes tarefas propostas; (ii) os níveis de leitura/compreensão e interpretação de tabelas e gráficos; e (iii) as dificuldades sentidas pelos alunos em cada um dos momentos. Por fim, foi feita uma análise ao percurso do aluno, no sentido de aferir a sua evolução durante a experiência de ensino, identificando comportamentos/atitudes que evidenciassem o desenvolvimento da sua literacia estatística.

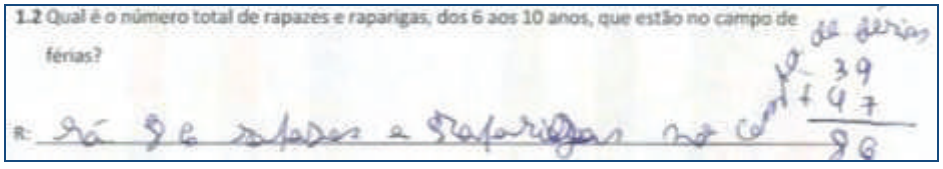
4. Daniel

Daniel tem 10 anos e é uma criança muito enérgica. Vê-se a si mesmo como um aluno inteligente, mas com dificuldades em se concentrar nas aulas e em ouvir o que os professores dizem. O aluno apresenta um bom desempenho nas aulas de Matemática, principalmente na participação oral, mostrando-se bastante activo, mas nos momentos formais de avaliação tende a precipitar-se na resolução dos exercícios e problemas propostos, não obtendo os resultados condizentes às suas capacidades. Como sua professora de Matemática, também sinto que o aluno demonstra muitas dificuldades de concentração, sendo raras as vezes em que termina as tarefas com o sucesso esperado.

4.1 Desempenho antes da unidade de ensino

Leitura e interpretação de tabelas. No que diz respeito à leitura e interpretação de tabelas, Daniel não demonstra muitas dificuldades. Foi-lhe apresentada uma tabela de dupla entrada com o número de alunos (raparigas e rapazes) que frequenta um campo de férias, de acordo com a idade. Sendo pedido para fazer uma leitura literal (nível 1), o aluno responde extraindo a informação necessária.

No que diz respeito às questões relativas ao nível 2, o aluno não apresenta dificuldade, utilizando outros conceitos matemáticos, neste caso a adição.

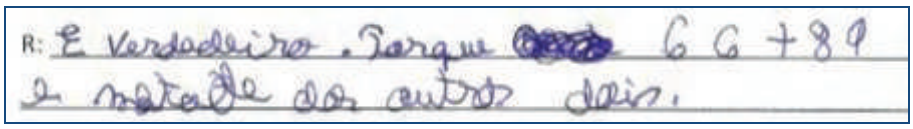

1.2 Qual é o número total de rapazes e raparigas, dos 6 aos 10 anos, que estão no campo de férias?

R: há 86 rapazes e raparigas no campo de férias

39
+ 47
86

Como se verifica, Daniel identifica os dados necessários de acordo com o enunciado e, utilizando outros conceitos matemáticos, dá a sua resposta de uma forma correcta e completa.

No que diz respeito à questão de nível 3, Daniel tinha que aferir sobre a veracidade do comentário "Mais de metade dos rapazes e raparigas que estão no campo têm idades entre os 11 e os 13 anos". A sua resposta é a seguinte:



Neste caso, a resposta de Daniel é um pouco dúbia, pois a afirmação é realmente verdadeira. No entanto, a justificação não está correcta ou completa, uma vez que em relação ao total de alunos, aqueles que têm idades entre 11 e 13 anos são mais de metade. Para melhor perceber a sua resposta, durante uma das entrevistas, mostrei-lhe a questão e pedi que me explicasse o seu raciocínio:

> Professora: Lê com atenção esta questão e explica-me como chegaste à tua resposta. (O aluno lê a resposta)
>
> Daniel: Então… Eu vi que 66 + 84 dava 150. (...) Depois fiz a conta para as outras idades, e deu 86 e 60. E somando esses dois vi que dava 146… E 146 é menos que 150.

Como se pode verificar, o aluno consegue explicar o seu raciocínio correctamente, mas por uma dificuldade de comunicação escrita a sua resposta é incorrecta.

Leitura e interpretação de gráficos. Vejamos o desempenho de Daniel na leitura e interpretação de pictogramas e gráficos de barras em questões de nível 2. Quando questionado sobre quantos rapazes não praticam alguma das actividades àquele dia da semana, Daniel responde correctamente, mas não apresenta quaisquer cálculos para a sua resposta. Mais uma vez, na entrevista, questionei o aluno sobre como tinha chegado à sua resposta:

> D: Foi fácil, primeiro fiz a conta de mais dos rapazes todos… Deu 155.
>
> P: E de onde tiraste o número de rapazes?
>
> D: Da tabela da pergunta 1 (...) Depois fiz a conta de todos deste desenho (aponta para o pictograma) deu 140. Depois fiz de cabeça: 140 para chegar a 155 são 15. Fácil…

Uma questão de nível 3 apresentava um gráfico de barras com a distribuição dos alunos por 3 das actividades noutro dia da semana e solicitava o completamento do gráfico de acordo os dados fornecidos, sabendo que todos frequentavam uma actividade. Mais uma

vez, o aluno responde correctamente, mas não apresenta qualquer justificação. Inquirido na entrevista sobre o seu raciocínio, responde assim:

> Eu sabia que havia 155 rapazes, porque já tinha feito a conta. Depois foi só ver que no gráfico já estavam 125 nas barras. Só faltavam 30…

Nesta situação, o aluno consegue manipular dados utilizando as informações dadas por representações prévias. Não só relaciona o gráfico novo com o anterior, como consegue completá-lo correctamente.

Balanço global. Em suma, no teste, Daniel não responde correctamente a apenas 2 das 11 questões apresentadas. Das questões respondidas correctamente, em 3 delas não explica o seu raciocínio. O panorama geral do seu teste inicial é dado na Tabela 1.

Tabela 1. Panorama geral do desempenho de Daniel no teste inicial.

Níveis	Respostas correctas		Respostas incorrectas	
	Frequência Absoluta	%	Frequência Absoluta	%
1	3	100%	0	0%
2	4	80%	1	20%
3	1	33,33%	2	66,67%

Daniel acerta em todas as perguntas de nível 1, não apresentando quaisquer dificuldades na leitura literal dos gráficos ou na extracção de informação elementar. Nas questões de nível 2, apenas não consegue responder a uma pergunta onde tem de interpretar um gráfico e formular uma pergunta que possa ser respondida através da leitura do gráfico. Quanto às perguntas de nível 3, responde correctamente a uma das três apresentadas, uma vez que em algumas não apresentou o seu raciocínio. Durante uma das entrevistas, questionei-o sobre algumas das suas resoluções, tendo-me explicado sempre a forma como as resolveu. Aparentemente, a sua principal dificuldade é na comunicação escrita, quando é solicitado a apresentar uma ideia própria ou a explicar um raciocínio.

4.2 Desempenho durante a unidade

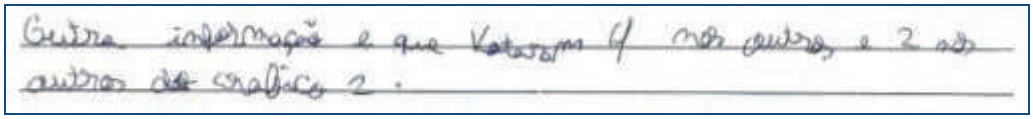
Leitura e interpretação de tabelas de frequências. Durante o estudo, o aluno não apresenta dificuldades na leitura e interpretação de tabelas de frequências absolutas e relativas. Numa das tarefas, onde é apresentada uma tabela com dados relativos à turma, constrói uma tabela de frequências indicando o meio de transporte utilizado pelos

alunos para ir para a escola. Já no que diz respeito ao texto que tem que produzir para resumir a sua tabela, o aluno não vai além de apresentar as suas características, insistindo que não tem mais nada a dizer, mesmo depois de eu lhe dar exemplos do que poderia ser dito.

Aquando da discussão da tarefa, o aluno é capaz de falar sobre estas características, no entanto, não lê o que tinha escrito, verbalizando apenas duas frases: "6 alunos vão para a escola de carro" e "7 alunos vão para a escola a pé". Notei que o aluno estava triste e desiludido pois a sua característica tinha sido muito fácil de trabalhar e sobre ela não tinha muito para contar.

Leitura e interpretação de gráficos

a) Pictogramas e gráficos de barras. Noutra tarefa (anexo 1), são apresentados 2 gráficos, um gráfico de pontos e um pictograma onde são apresentados os resultados da votação no animal preferido. Quando Daniel tem acesso à tarefa, tenta logo responder a todas as questões, de forma algo irreflectida, uma vez que esta é bastante apelativa e aparentemente muito simples de responder. No entanto, quando se debruça sobre a tarefa, rapidamente percebe que não pode deixar de tomar em atenção a legenda de ambos os gráficos. Nessa altura chama-me, explicando que no primeiro gráfico só tem de contar os quadrados, uma vez que o quadrado vale um, mas que no segundo já é necessário andar de dois em dois, de acordo com a legenda. Assim, rapidamente completa a tarefa, respondendo correctamente a todas as questões que envolvem a leitura e interpretação dos gráficos, excepto na última pergunta, onde é pedido que retire uma outra informação do gráfico. Nesta questão, Daniel responde de uma forma confusa, não conseguindo construir uma frase com sentido, conforme se pode ler:



Além da frase não estar bem construída, Daniel não consegue, também, escrever uma frase válida, o que vai ao encontro das dificuldades na comunicação escrita que o aluno apresenta.

Na resolução da tarefa "O prato favorito" (anexo 2), o aluno esteve muito entusiasmado, realizando-a muito empenho e interesse. À medida que vai completando o gráfico com as proposições mais directas, Daniel rapidamente percebe que a escala do gráfico não

poderia estar a andar de 1 em 1, uma vez que as barras ficavam mal, como se verifica pelo excerto a seguir:

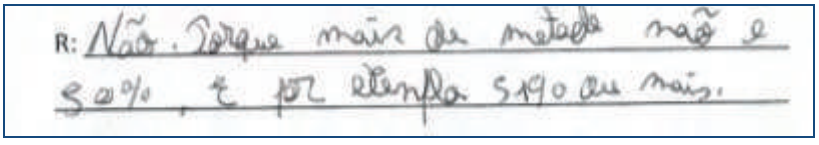
> D: Ó professora, isto não dá!!!
>
> P: Não dá?
>
> D: Porque os filetes de peixe têm menos 4 que o hambúrguer e não há barras com menos 4! (...) Então, se isto não dá para andarmos de 1 em 1, tem de ser de 2 em 2! (...) assim o filete de peixe já pode ser esta barra (aponta para a barra correcta). Tá certo, não tá?

Daniel continua a trabalhar e consegue completar a tarefa com sucesso. No momento de discussão da tarefa, o aluno explica-a a alguns alunos que não tinham realizado a tarefa correctamente. Além disso, Daniel é, igualmente, capaz de relacionar pictogramas e gráficos de barras de acordo com dados apresentados, comparando-os e explicando quais as suas relações.

Em todas as tarefas relacionadas com pictogramas e gráficos de barras, o aluno não apresenta muitas dificuldades, a não ser quando solicitada uma resposta ou justificação por escrito, que envolva mais do que uma leitura literal dos dados.

Gráficos de linhas. No que diz respeito aos gráficos de linhas, Daniel demonstra algumas dificuldades na interpretação da tarefa apresentada – a corrida (anexo 3). Quando questionado sobre o que representa o gráfico, o aluno fá-lo sem dificuldade, mas quando solicitado para completar o resumo do gráfico, o aluno não o consegue completar correctamente. No caso deste gráfico, o aluno não percebe que as diferentes inclinações/declives da linha correspondiam a mudanças de velocidade dos dois amigos.

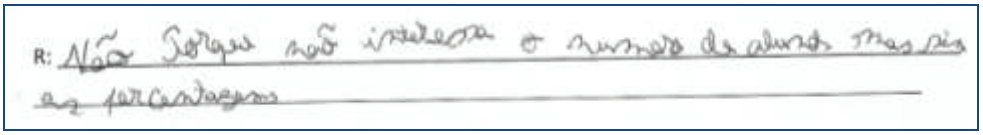
Gráficos circulares. No que diz respeito aos gráficos circulares, Daniel apresenta igualmente, algumas dificuldades. Outra tarefa apresenta dois gráficos circulares, com as pizas favoritas de duas turmas (não sendo dada a amostra), sendo que numa das turmas, a piza favorita corresponde a 50% do gráfico. Quando solicitado que comente a afirmação: "mais de metade dos alunos da turma A prefere a piza quatro queijos", a resposta de Daniel é a seguinte:



Como se pode verificar, há uma evolução em Daniel em relação a prestações anteriores, uma vez que já consegue justificar correctamente a afirmação, tendo o cuidado de explicar quanto seria mais de metade.

No entanto, mesmo não sabendo qual é a amostra para ambos os gráficos circulares, quando questionado se podíamos afirmar que o número de alunos da turma A que prefere quatro queijos é superior ao número de alunos da turma B a preferir o mesmo tipo de piza, a sua resposta é a seguinte:

Nesta pergunta, Daniel não consegue perceber que não podemos afirmar tal facto, uma vez que desconhecemos o número de alunos de cada uma das turmas. Na última pergunta da tarefa é interrogado sobre se se duplicasse o número de alunos da turma A a preferirem cada tipo de piza, o que acontece ao gráfico circular. O aluno responde:



Neste caso, Daniel pode não ter dado a resposta mais completa, mas consegue perceber bem que o mais importante neste tipo de gráfico circular são as percentagens/proporções e não a frequência absoluta.

Diagrama de caule-e-folhas. Durante a concretização de uma tarefa que envolvia a manipulação de um diagrama de caule-e-folhas, Daniel não apresenta dificuldades. A tarefa consistia na construção e interpretação de um diagrama em que eram registados os segundos que cada aluno conseguia suster a respiração. O aluno mostra-se bastante interessado em realizá-la. Após a sua construção, o aluno participa activamente na interpretação do diagrama, realizada oralmente em grupo-turma.

Balanço global. Ao longo da unidade de ensino Daniel mostra-se sempre bastante receptivo na realização das tarefas. Encara, algumas delas, como "ratoeiras" para apanhar os mais distraídos, principalmente quando estas envolvem uma comparação de representações. Tem sempre uma participação bastante activa nos diversos momentos das aulas.

4.3 Desempenho depois da unidade

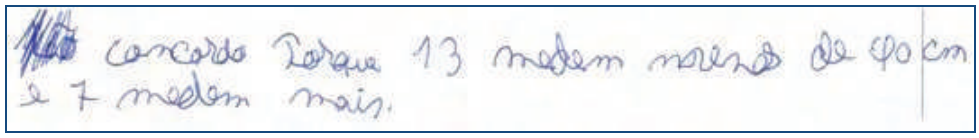
Teste final. Durante a realização do teste final, Daniel mostra-se algo distraído, mas, mesmo assim, a sua prestação é satisfatória. Uma questão referente a tabelas de frequências absolutas e relativas, apresenta um gráfico de pontos que é necessário transformar em tabela de frequências absolutas e relativas. O aluno não consegue completá-la correctamente, pois está muito impaciente e com falta de vontade para resolver o teste. Assim, apenas completa as frequências absolutas, deixando em branco as colunas correspondentes às frequências relativas.

Quanto aos gráficos de barras e pictogramas, nas questões de nível 1, Daniel não apresenta dificuldades na manipulação dos dados. Nas questões de nível 2, responde correctamente, mas, uma vez mais, não apresenta quaisquer cálculos a sustentar a sua resposta. Numa das questões de nível 3, onde se pede para emitir um juízo sobre o comentário de um colega, responde sem apresentar qualquer tipo de justificação. Penso que este facto se deve à sua postura durante a realização do teste.

Em relação aos gráficos de linhas, numa questão que apresenta dois gráficos com a mesma situação, mas com a escala vertical diferente, sendo-lhe solicitado que explique as diferenças, a resposta de Daniel é a seguinte:

Considero esta resposta errada, pois o aluno não demonstra perceber que as "linhas e os números" eram diferentes porque a escala é diferente. O aluno também não é capaz, noutra alínea da pergunta, de perceber a evolução no gráfico de linhas, que vai ao encontro da dificuldade já apresentada aquando da realização da tarefa sobre este tipo de representação.

A última questão do teste final apresenta um diagrama de caule-e-folhas com as alturas de algumas espécies plantadas em canteiros numa determinada escola. Sendo pedido para identificar o número de espécies medidas, Daniel não tem dificuldade e responde correctamente à questão. Na última pergunta pede-se, novamente, para comentar a afirmação: "a maioria das espécies mede menos de 40 cm". A sua resposta é a seguinte:



Nesta questão, além de responder correctamente, justifica a afirmação dada, com os dados retirados do diagrama, demonstrando desta forma, uma boa interpretação.

Assim, no teste final, Daniel não responde correctamente a apenas 4 das 21 questões apresentadas. O panorama geral do teste final do aluno é dado na Tabela 2 e na Figura 2.

Tabela 2. Panorama geral do desempenho de Daniel do teste final.

Níveis	Respostas correctas		Respostas incorrectas	
	FA	%	FA	%
1	6	86%	1	14%
2	9	82%	2	18%
3	2	67%	1	33%

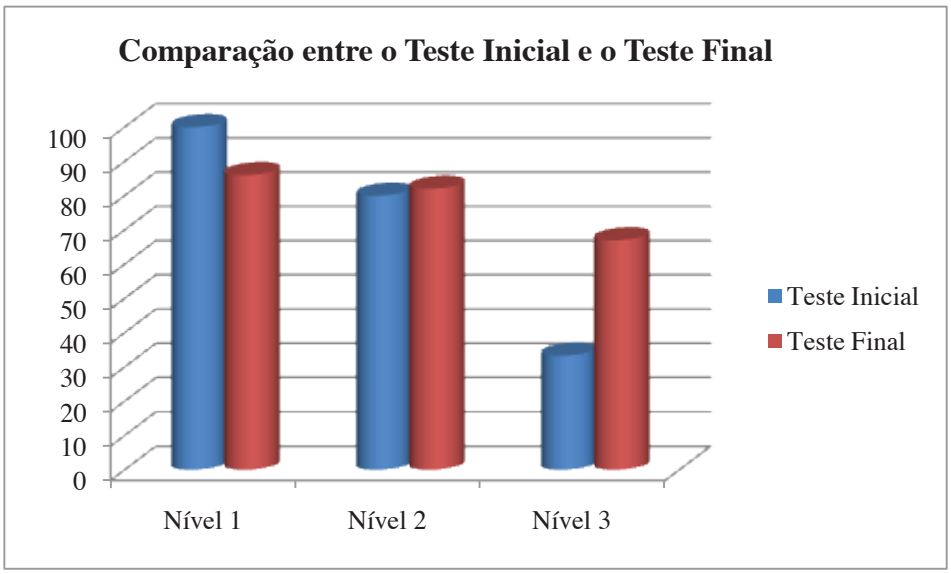


Figura 1. Comparação dos desempenhos de Daniel nos testes inicial e final

Verificamos, portanto, que, no que diz respeito às questões de nível 1, houve um decréscimo no desempenho do aluno, talvez devido à falta de atenção na leitura das questões ou ao desinteresse demonstrado pelo aluno aquando da sua realização. No entanto, há uma evolução positiva no desempenho do aluno nas questões de nível 2 e 3, embora muito ligeira no nível 2. Mesmo assim, considero que se Daniel estivesse mais concentrado na resolução do teste podia ter obtido um resultado ainda mais satisfatório.

Entrevista final. Depois da realização da unidade de ensino, peço a Daniel para realizar a tarefa que consiste na análise de 3 pictogramas de modo a escolher 1 de acordo com a informação dada no enunciado "mais de metade dos alunos que responde ao inquérito

diz que tem irmãos". O aluno está algum tempo a olhar para a tarefa e tenta perceber o que se pretende com aqueles 3 gráficos. Depois, conta o número de alunos para cada número de irmãos, contando o total para cada um dos gráficos. Quando lhe pergunto porque está a efectuar aquela conta, o aluno responde que está a verificar se em todos os gráficos o total é o mesmo. Chega à conclusão que, no 3.º gráfico, o total de alunos inquiridos é 25. De seguida lê novamente o enunciado e fica um pouco a pensar, sem avançar com nenhuma hipótese de resolução. Então peço-lhe que identifique o mais importante no enunciado. Volta a ler e diz que o importante é ter irmãos. Então volta a olhar para os gráficos e exclui o 1.º gráfico, uma vez que há muitos alunos com zero irmãos.

D: Não pode ser o 1 porque há muitos alunos com zero irmãos (...) diz aqui que mais metade tem irmãos. E no 1.º gráfico há mais alunos que não tem irmãos.

P: Há mais?

D: Sim, sem irmãos são 12, logo os outros são 8. É menos, não é mais… Por isso tem de ser o gráfico 2…

Inicialmente, Daniel tem alguma dificuldade em analisar os 3 gráficos e não percebe bem como há-de principiar a tarefa. No entanto, o aluno consegue utilizar a informação dada no enunciado e exclui um dos gráficos, apresentando, desta forma, um bom nível de interpretação dos dados.

Noutra situação são mostrados dois gráficos, um de barras e outro circular, apresentados por dois jornais diferentes, que dizem respeito ao consumo diário de água por habitante. De seguida é referido que alguém tinha descoberto que os dois jornais não utilizaram os mesmos dados para construírem os seus gráficos. A questão era saber porquê. Daniel debruça-se sobre a tarefa:

D: Mas os gráficos são da mesma cidade? Não estou a entender.

P: Sim, da mesma cidade. O que se quer é descobrir como se sabe que os dois jornais não usaram os mesmos dados.

D: Então é preciso procurar por diferenças… (...) Então, banhos é o que tem mais, depois WC, depois roupa… Ah! No gráfico de barras roupa tem mais que loiça e no circular é ao contrário… Não são iguais…

Daniel fica muito satisfeito por ver que consegue resolver a tarefa quase sozinho, e por ter descoberto as diferenças.

5. Conclusão

No que diz respeito à interpretação de dados, após a unidade de ensino, Daniel consegue fazer uma leitura literal e extrair dados explícitos em gráficos ou em tabelas, mas também os interpreta. Já é capaz de comparar representações ou utilizar outros conceitos matemáticos, como o caso das quatro operações básicas ou aplicar os seus conhecimentos prévios sobre números racionais como forma de o auxiliar na leitura e interpretação de gráficos circulares ou de tabelas de frequências relativas.

O aluno apresenta uma evolução positiva na forma como expressa o seu raciocínio. Inicialmente, e como já foi referido anteriormente, apresenta muitas dificuldades na comunicação escrita e na apresentação e justificação dos seus raciocínios, o que vai ultrapassando aos poucos, principalmente nas questões correspondentes ao nível 3, ler além dos dados. Isto torna-se perceptível em algumas das suas respostas nas últimas tarefas propostas e no teste final, onde, com frases bem construídas, elabora justificações bastante satisfatórias. Assim, podemos dizer que desenvolve a sua literacia estatística, mostrando-se capaz de ler e interpretar criticamente dados organizados em diferentes representações.

Quanto à unidade de ensino, revelou-se globalmente adequada, mas gerando alguma dificuldade na gestão do tempo na aula. Na generalidade das tarefas, os alunos precisaram de mais tempo do que o inicialmente previsto para as concluir. Após aferir as dificuldades dos alunos, que passavam em grande parte pela comunicação, é pertinente reformular algumas questões das tarefas de modo a torná-las um pouco mais claras. Em relação às tarefas propostas, considero que possibilitaram a realização de novas aprendizagens por parte dos alunos. Em algumas delas, os alunos mostraram-se mais envolvidos, mas, na globalidade, considero que a sua participação foi francamente positiva.

6. Referências

Aoyama, K. (2006). Investigating a hierarchy of students' graph interpretation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: International Statistical Institute. Acedido a 5 de Julho de 2010, em: http://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/6C2_AOYA.pdf

Barros, P., Martins, C. & Pires, M. V. (2009). Moda, média e mediana: perspectivas dos alunos vs trabalho dos professores. *Actas do Profmat 2009*. Lisboa: APM. Acedido a 5 de Julho de 2010 em: http://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/1384/1/Actas%20ProfMat2009-Moda%2c%20m%C3%A9dia%20e%20mediana_%20Perspectivas%20dos%20alunos%20vs%20trabalho%20dos%20professores.pdf

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp.3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Friel, S., Curcio, F. R., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: ME.

Pereira-Mendoza, L. (1995). Graphing in the primary school: Algorithm versus comprehension. *Teaching Statistics 17*(1), 2-6.

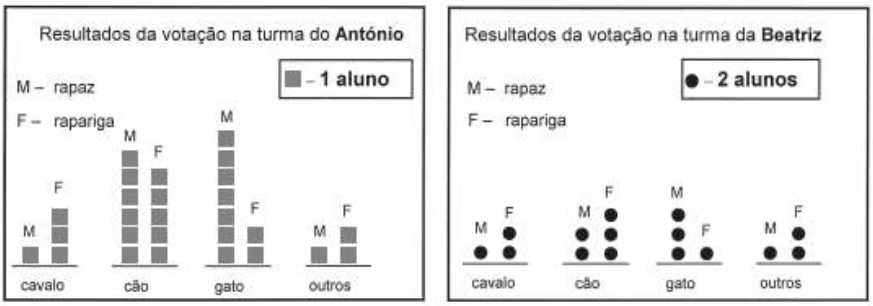
Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistic learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1049). Charlotte, NC: NCTM.

Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Anexo 1

O animal preferido

1. Cada rapariga e cada rapaz da turma do António e da turma da Beatriz votaram no seu animal preferido. Cada aluno só podia votar num animal. Abaixo apresentam-se os resultados da votação de cada uma das turmas:



1.1 Na turma do António, qual o animal que obteve mais votos?

1.2 Em qual das turmas houve mais alunos a votar no cavalo? Porquê?

1.3 Qual das turmas tem mais alunos?

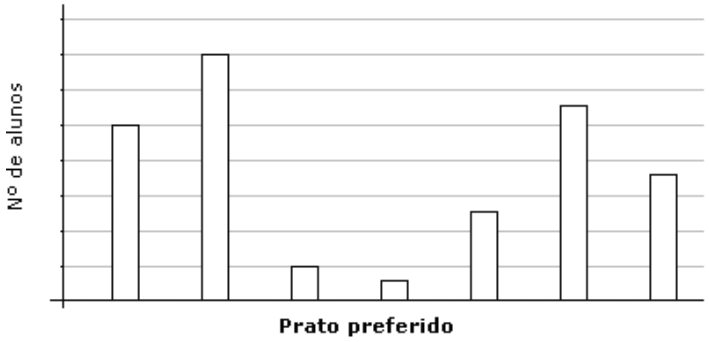
1.4 Escreve uma outra informação que possas retirar do gráfico.

Anexo 2

Prato preferido

Na escola, o Director pretende averiguar os pratos preferidos dos alunos que comem na cantina, pelo que encarrega uma comissão de fazer um inquérito a alguns alunos.

A metodologia utilizada para seleccionar estes alunos, foi a de interrogar os que se dirigiam à cantina, num dia escolhido ao acaso. A comissão encarregue do estudo apresentou ao Director um gráfico e um pequeno relatório com as conclusões:



Relatório: Os alunos interrogados apontaram 7 pratos distintos. Das respostas, pudemos tirar as seguintes conclusões:

a) O *Hambúrguer com batatas fritas* foi o prato mais votado

b) O número de alunos que escolheu *Hambúrguer com batatas fritas*, foi o dobro dos que escolheram *Frango assado*

c) Os *Filetes de peixe* receberam menos 4 votos do que o *Hambúrguer com batatas fritas*

d) O *Esparguete à Bolonhesa* foi o segundo prato mais votado

e) O *Bacalhau com natas* teve mais 4 votos do que o *Peixe assado*

f) Houve quem votasse nas *Ervilhas com ovos*

g) 5 alunos votaram no *Bacalhau com natas*

O Director recebeu este pequeno relatório e não ficou satisfeito, pois achou as conclusões muito confusas. Ajuda-o.

1. Afinal, quantos alunos votaram?
2. E quantos votaram em cada prato?
3. Ajuda-o a completar adequadamente o gráfico anterior? (Coloca as categorias e numera a escala do eixo vertical).

Retirada de Martins e Ponte (2010).

PLANEAMENTO ESTATÍSTICO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 8.º ANO[1]

Sandra Campelos
UIDEF / Universidade Aberta
scampelos@sapo.pt

Darlinda Moreira
UIDEF / Universidade Aberta
darmore@univ-ab.pt

Resumo

Esta comunicação apresenta parte de um trabalho desenvolvido no âmbito de um projecto de investigação mais vasto, de cariz qualitativo e apoiado numa metodologia de *design experiments* (Brown, 1992; Collins, 1992), onde se concebeu e implementou uma experiência de ensino (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), ao longo do 3.º ciclo do ensino básico. O exemplo apresentado consiste num planeamento estatístico desenvolvido em duas turmas do 8.º ano de uma escola de ensino básico cooperativo, da cidade do Porto, e envolveu diferentes ambientes de aprendizagem e diversas dinâmicas de sala de aula. Pretende ser um contributo para uma lecionação do tópico Planeamento Estatístico, ao nível do 8.º ano, que privilegie uma educação estatística funcional, que extravase o contexto da aula de Matemática, potenciando a mobilização de conhecimentos para diferentes ambientes de aprendizagem e contextos sociais e desenvolvendo nos alunos competências ao nível da literacia estatística, preparando-os para interpretar, analisar e produzir juízos sobre situações do quotidiano onde esta esteja presente. Uma vez que a investigação ainda decorre, apenas serão apresentados resultados preliminares que indiciam a utilização de dados reais, com recurso às novas tecnologias e numa dinâmica de trabalho de grupo, como um factor de melhoria ao nível da mobilização dos conceitos e procedimentos estatísticos.

Palavras-chave: Planeamento estatístico, Literacia estatística, Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB-ME), 8.º ano.

Introdução

Actualmente assiste-se a uma valorização social dos indivíduos pelas suas competências de tratamento de situações que envolvam informação numérica, o que tem propiciado a que a Estatística se torne parte integrante da cultura de qualquer país, sendo imprescindível na formação de cidadãos socialmente críticos. Assim, ser estatisticamente competente, tornou-se crucial aos cidadãos das sociedades actuais.

Um indivíduo estatisticamente literado é aquele que é capaz de: compreender e interpretar dados e informação estatística; tomar decisões relacionadas com informação

estatística e que requerem conhecimento estatístico; desenvolver um raciocínio estatístico que não se baseie no certo ou errado; lidar com proposições e premissas que não se sabendo à partida se são falsas ou verdadeiras obrigam o indivíduo a tomar decisões sobre situações de incerteza quantificada (Moore, 2007; Shaughnessy, 1992, 1996). Estudos realizados no âmbito da Estatística, nomeadamente os de Almeida (2000), Batanero (2001, 2002), Branco (2000), Branco e Martins (2002), Holmes (2000, 2003), Lopes e Carvalho (2005), Scheaffer (2000) e Schield (2000, 2007), apontam a utilização de dados reais e a realização de investigações estatísticas com recurso a trabalho de grupo e de pares como aspectos importantes na lecionação da Estatística, para o desenvolvimento de competências que conduzem ao indivíduo estatisticamente literado.

Tendo por base a experiência da investigadora como docente do ensino básico, as recomendações da literatura sobre o ensino da Estatística e as orientações metodológicas, preconizadas no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), foi desenhado um projecto de investigação, consistindo na conceptualização e implementação de uma experiência de ensino realizada em três fases, correspondentes aos três anos lectivos que constituem o 3.º ciclo, que acompanhou o mesmo grupo de alunos, e que pretende contribuir para um aumento da literacia estatística, desenvolver competências no âmbito da Estatística e estimular o pensamento/raciocínio estatístico dos alunos. Para além disso, pretende ser um contributo para investigadores e professores implementarem práticas de ensino que formem jovens estatisticamente literados e críticos, permitindo-lhes também, uma visão mais holística da Estatística.

Nesta comunicação apresenta-se a conceptualização do tema Planeamento Estatístico bem como a sua implementação em duas turmas do 8.º ano, enfatizando-se a etapa de classificação de variáveis, mediante dados reais, dada a sua pertinência em todas as etapas subsequentes.

Perspectivas sobre o ensino da Estatística

As diferentes perspetivas sobre a forma como a Estatística deve ser ensinada, designadamente, as ideias que valorizam os aspetos de cariz matemático da Estatística, as que privilegiam a sua faceta de ferramenta para análise e interpretação de dados e as que a interpretam como um instrumento útil para a argumentação associada à

explicação da realidade, constituíram um ponto de partida para analisar as diferentes formas como a Estatística é percecionada e que influenciam a abordagem a que esta é sujeita, aquando da sua lecionação, assim como o próprio processo de ensino e aprendizagem que, a partir daí, se desenrola. Assim, a Estatística pode ser compreendida essencialmente como análise de dados (Scheaffer, 2000; Cobb, 1999) ou com uma função de cidadania (Lopes, 1998; Ponte & Fonseca, 2001). Estes autores defendem que o seu ensino deve ir muito mais além do que lecionar métodos de recolha, organização e tratamento de dados, uma vez que a educação estatística tem também a função de formar indivíduos que consigam emitir opiniões críticas perante dados.

A utilização das tecnologias constituiu outro aspeto considerado no ensino da Estatística uma vez que esta se revela vantajosa, tanto na motivação dos alunos para a compreensão dos problemas, facilitando a compreensão dos processos de resolução que lhes estão associados, como apelando ao seu sentido crítico face às soluções encontradas (Lock, 1999). Além disso, contribui de forma positiva para a compreensão e aplicação dos procedimentos associados ao tratamento e análise de dados (Richard Deveaux in McKenzie & Rao, 1999), auxiliando na explicação de conceitos mais abstratos, na deteção de padrões e desvios nos dados (Cobb, 1997). Com o recurso às novas tecnologias, os alunos adquirem a possibilidade de se tornarem aprendizes responsáveis (Papert, 1980), realizando uma aprendizagem mais ativa, pois têm ao seu alcance a possibilidade de analisar dados, de forma numérica e gráfica, podendo experimentar, constatar e testar hipóteses que conjeturaram, comparando os resultados observados com os esperados, escrevendo, posteriormente sobre eles e sobre os procedimentos que testaram, ou apresentando-os à turma com recursos multimédia. A utilização de dados reais torna-se mais acessível, utilizando bases de dados disponíveis na Internet, assim como comparar diferentes representações dos dados. Estas novas experiências abrem horizontes quando comparadas com as aulas tradicionais de Estatística, pois o aluno lidera o processo de tratamento e organização de dados (Biehler, 1989).

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em Dezembro de 2007, trouxe alterações quer ao nível da profundidade requerida, quer na distribuição

dos conteúdos e competências a trabalhar em cada nível de ensino do Ensino Básico. O tema dedicado à Estatística surge reformulado, com a designação de "Organização e Tratamento de Dados". A Estatística é apresentada como um tema reforçado em todos os ciclos do Ensino Básico. Salienta-se o aumento da complexidade dos dados a analisar, que se repercute no tipo de medidas de tendência central e de dispersão a utilizar. A representação de dados sob a forma de tabelas de frequência ou de gráficos aparece com maior profundidade e os trabalhos que contemplam planeamento de estudos estatísticos e análise de dados fornecidos ou recolhidos são aconselhados e valorizados.

Metodologia

Atendendo a que a metodologia utilizada numa investigação em Educação é projetada tendo em conta os objetivos, a natureza, as características e o próprio contexto educacional em que ocorre a investigação (Abrantes, 2004), optou-se por seguir uma metodologia de *design experiments*. A expressão *design experiments*, que se deve a Brown (1992) e a Collins (1992), consiste numa forma de investigação educacional formativa onde se testam e aperfeiçoam projetos educacionais, recorrendo a técnicas cíclicas e iterativas, que assumem um caráter extremamente formativo, flexível e que englobam princípios de outros tipos de investigação educativa (Lesh, 1988).

Assim, a metodologia seguida na conceptualização e implementação da experiência de ensino, da qual, nesta comunicação, apenas se relata a parte relativa ao Planeamento Estatístico, inspirou-se na opinião consensual, entre investigadores de todo o mundo, segundo os quais, a Estatística tem um papel fundamental na preparação dos jovens para interpretarem e fazerem avaliações críticas das informações veiculadas através dos meios de comunicação e desenvolver, nestes, capacidades de argumentação e comunicação, munindo-os não só de técnicas e procedimentos estatísticos, como de um pensamento estatístico crítico. A utilização das tecnologias constituiu outro aspeto considerado na delineação da experiência de ensino, dadas as referências explícitas às novas tecnologias, tanto na literatura como no NPMEB (ME, 2007). Foram ainda considerados os trabalhos de Carvalho (2001) que sugerem os benefícios das interações sociais na promoção do conhecimento estatístico, nomeadamente do trabalho em díade e/ou em grupo.

Os dados foram recolhidos essencialmente no seu ambiente natural, a sala de aula. A investigadora foi o principal meio de recolha de dados, assumindo o papel de observadora e de professora. Recorreu-se à filmagem das aulas e a registos num diário de investigação que cumpriu a função de memória futura, permitindo reviver determinados momentos e apoiando a reflexão *a posteriori*. Os registos efectuados incluíram intervenções orais de alunos, ideias, reflexões, interpretações de situações ocorridas, notas para desenvolvimentos futuros ou para adequações às tarefas propostas, sensações e perceções que a investigadora foi recolhendo de forma informal, na observação de alguns alunos ou grupos ou na interação que realizou com estes.

A experiência de ensino

O exemplo a seguir apresentado, e integrado na experiência de ensino referida anteriormente, decorreu em Maio - Junho de 2010 e abrangeu, durante 13 blocos de quarenta e cinco minutos (blocos previstos na planificação anual da escola, para a lecionação deste tópico do programa), duas turmas de 8.º ano: uma turma com 27 alunos, bastante heterogénea, quer em termos de aproveitamento, como comportamentais e outra turma, com 19 alunos, com um nível de aproveitamento ligeiramente inferior, integrando uma aluna com Necessidades Educativas Especiais. A proposta pedagógica integrou-se no tópico Planeamento Estatístico previsto para o 8.º ano e contemplou os objetivos específicos do programa, nomeadamente, como "planear adequadamente a recolha de dados tendo em vista o estudo a realizar." (ME, 2007, p. 60). A planificação teve em linha de conta o conhecimento prévio dos alunos, uma vez que a investigadora, tendo sido professora das turmas desde o 5.º ano, já conhecia bem a maioria dos jovens envolvidos na investigação, tanto a nível de comportamento individual e colectivo como ao nível do desempenho matemático, e, em especial, estatístico. Assim, já no 7.º ano, os alunos tinham construído questionários, pretendendo-se, agora, valorizar as restantes fases do planeamento estatístico, nomeadamente a organização e tratamento de dados com recurso às novas tecnologias.

A implementação da experiência de ensino

A proposta pedagógica iniciou-se em contexto de sala de aula, numa dinâmica de aula expositiva participada com uma revisão de conceitos e procedimentos estatísticos

(utilização de apresentações multimédia e de uma folha de cálculo). Seguiu-se a apresentação da plataforma "CensusAtSchool" (http://www.censusatschool.org.uk/) - projecto criado por *The Royal Statistical Society Centre for Statistical Education* (RSSCSE), no Reino Unido, em 2000. Nomeadamente, foram apresentadas as funcionalidades da plataforma quer em termos de ferramentas estatísticas de apoio ao planeamento estatístico, dos questionários pré-elaborados, quer dos dados reais que esta disponibiliza. Após uma intensiva pesquisa na Internet, optou-se pela escolha desta plataforma, embora tenham sido consultadas outras, tais como: ALEA (http://www.alea.pt/) e Estatística interactiva da Universidade de Lisboa (http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm24/estint.htm), uma vez que reunia diversas potencialidades tais como bases de dados reais criadas por alunos de escolas internacionais, aplicações interactivas para classificação de variáveis e construção de gráficos e ainda alguns questionários já utilizados noutros países. A única aparente desvantagem da utilização desta plataforma seria o idioma inglês. Contudo, este aspeto não constituiu qualquer entrave, antes pelo contrário foi encarado como um fator positivo, tendo os alunos ultrapassado dificuldades pontuais com a ajuda do dicionário ou da professora.

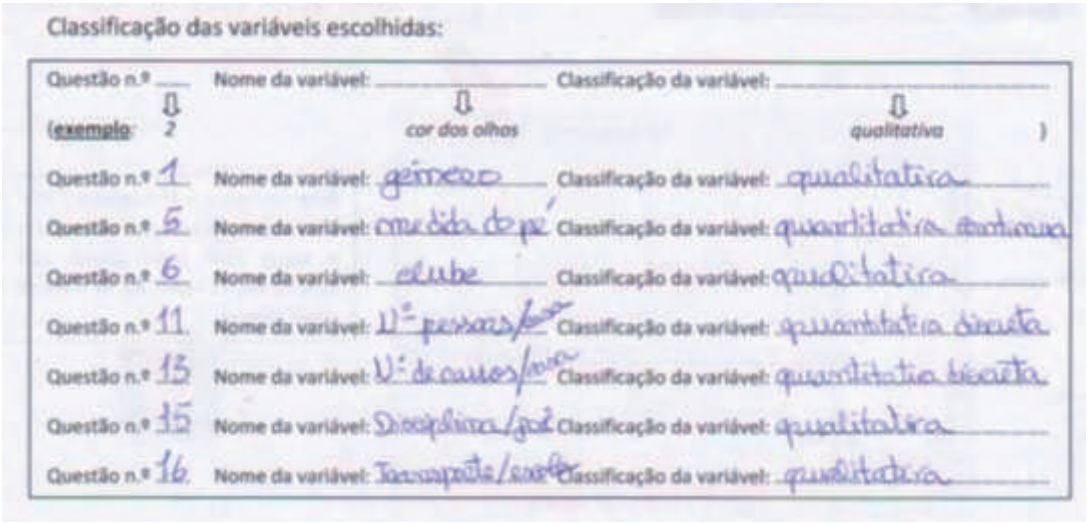
Os alunos, organizados em grupos de 3 a 5 elementos, passaram então para a biblioteca onde, com a utilização dos computadores, tiveram oportunidade de explorar a referida plataforma, treinar a classificação de diversas variáveis atendendo à sua natureza, e elaborar gráficos, de acordo com os dados a tratar. Pela observação realizada não se assinalaram dificuldades a este nível, uma vez que os grupos, de uma forma geral, evidenciaram desenvoltura na selecção do gráfico, atendendo ao tipo de variável. Posteriormente, foi-lhes solicitado que escolhessem um dos questionários disponíveis no site. Os questionários disponíveis integravam diversas variáveis desde o peso, a idade, a altura, a cor favorita, o comprimento do pé, do perímetro encefálico, ou do meio de transporte utilizado na ida para a escola. Após algumas hesitações e discussão, cada grupo seleccionou o seu questionário. Todos os questionários selecionados foram fotocopiados para serem respondidos por todos os elementos da turma, sendo esta a amostra considerada.

Após todos os alunos da turma preencheram os vários questionários a tratar, estes foram reunidos e entregues pela professora/investigadora aos respectivos grupos. Antes de

iniciarem o tratamento e organização dos dados, foi solicitado que, numa folha entregue para o efeito, cada grupo selecionasse sete variáveis do questionário, que na sua opinião permitiriam caracterizar a turma de acordo com o tema do questionário, distinguindo variável quantitativa discreta de quantitativa contínua e classificando as variáveis selecionadas, de acordo com a sua tipologia.

Atendendo a que a classificação das variáveis que integram o planeamento estatístico condicionam todo os processo que a partir daí se desenrola, destacaremos alguns aspectos que nos despertaram a atenção.

No que concerne à classificação das variáveis selecionadas para tratamento, a maioria dos grupos distinguiu corretamente as variáveis qualitativas das quantitativas e todos os grupos conseguiram selecionar sete variáveis das várias que integravam cada um dos questionários (Figura 1), de forma a obterem uma abordagem global do tema que cada um destes visava.


Classificação das variáveis escolhidas:

Questão n.º ___ Nome da variável: _____ Classificação da variável: _____

(exemplo: 2 ⇩ cor dos olhos ⇩ qualitativa)

Questão n.º 1 Nome da variável: género Classificação da variável: qualitativa

Questão n.º 5 Nome da variável: medida do pé Classificação da variável: quantitativa contínua

Questão n.º 6 Nome da variável: clube Classificação da variável: qualitativa

Questão n.º 11 Nº pessoas/casa Classificação da variável: quantitativa discreta

Questão n.º 13 Nº de carros/casa Classificação da variável: quantitativa discreta

Questão n.º 15 Disciplina/gosta Classificação da variável: qualitativa

Questão n.º 16 Transporte/casa Classificação da variável: qualitativa

Figura 1 – Variáveis seleccionadas e respectiva classificação por um dos grupos de alunos.

Contudo, detectaram-se algumas confusões na diferenciação entre variáveis quantitativas discretas e contínuas. De facto, os grupos diferenciaram-se na forma como distinguiram os dois tipos de variáveis: enquanto alguns evidenciaram conhecimento da não enumerabilidade que caracteriza as variáveis contínuas, apresentando uma resposta formal (Figura 2), outros apenas deram exemplos, evidenciando conhecimento dessa mesma distinção, mas sem a conseguirem enunciar através de uma propriedade (Figura 3) ou simplesmente apresentaram respostas sem qualquer formalismo (Figura 4).

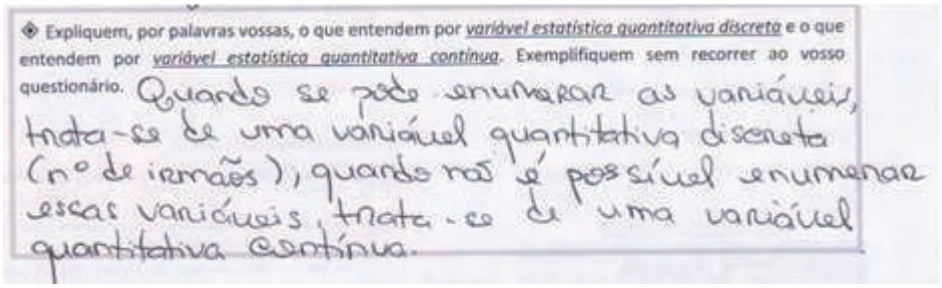

◆ Expliquem, por palavras vossas, o que entendem por *variável estatística quantitativa discreta* e o que entendem por *variável estatística quantitativa contínua*. Exemplifiquem sem recorrer ao vosso questionário. Quando se pode enumerar as variáveis, trata-se de uma variável quantitativa discreta (nº de irmãos), quando não é possível enumerar essas variáveis, trata-se de uma variável quantitativa contínua.

Figura 2 – Resposta correta apresentada por um dos grupos de alunos.

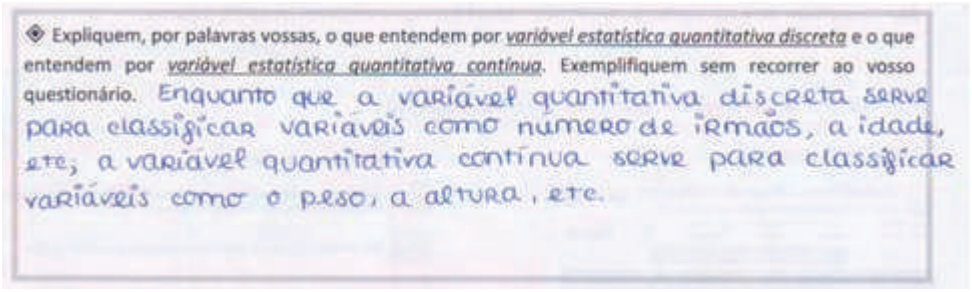

◆ Expliquem, por palavras vossas, o que entendem por *variável estatística quantitativa discreta* e o que entendem por *variável estatística quantitativa contínua*. Exemplifiquem sem recorrer ao vosso questionário. Enquanto que a variável quantitativa discreta serve para classificar variáveis como numero de irmãos, a idade, etc, a variável quantitativa contínua serve para classificar variáveis como o peso, a altura, etc.

Figura 3 – Resposta baseada em exemplos apresentada por um dos grupos de alunos.

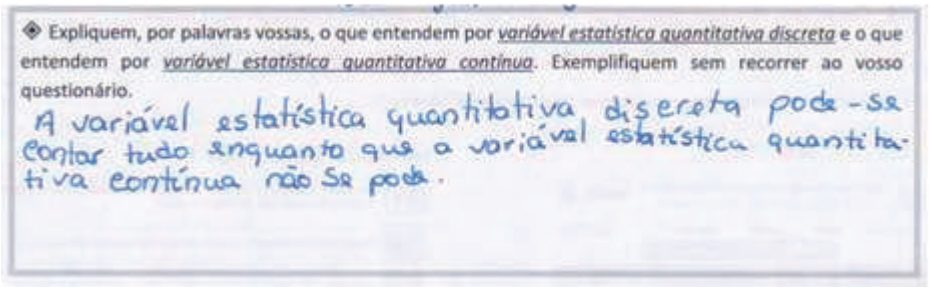

◆ Expliquem, por palavras vossas, o que entendem por *variável estatística quantitativa discreta* e o que entendem por *variável estatística quantitativa contínua*. Exemplifiquem sem recorrer ao vosso questionário.
A variável estatística quantitativa discreta pode-se contar tudo enquanto que a variável estatística quantitativa contínua não se pode.

Figura 4 – Resposta sem qualquer formalismo apresentada por um dos grupos de alunos.

Nas aulas seguintes, os alunos, trabalhando em grupo, iniciaram a organização dos dados.–Enquanto alguns dos grupos optaram pela elaboração e contagem direta numa folha de cálculo, outros preferiram fazê-lo em papel, de forma manual. Com as tabelas de frequência elaboradas e atendendo ao tipo de variável cada um dos grupos elaborou os respetivos gráficos calculando, sempre que possível, as medidas de tendência central estudadas: média, moda e mediana. Para a elaboração dos histogramas foi aconselhada uma aplicação disponível na Internet - *National Library of Virtual Manipulatives* (http://nlvm.usu.edu/), que também permite a construção do polígono de frequências.

Os gráficos e tabelas foram posteriormente transferidos para o PowerPoint, programa onde os diferentes grupos criaram pequenas apresentações multimédia para mais facilmente apresentarem o seu trabalho e resultados à turma.

Durante todo este processo, a investigadora/professora optou por uma postura neutra, apesar de uma constante monitorização do trabalho que ia sendo desenvolvido, por cada

grupo. As indicações e orientações foram pontuais e apenas quando as dúvidas dos grupos o exigiam, de forma a promover a autonomia e independência destes.

Os últimos noventa minutos desta experiência de ensino foram destinados à apresentação dos trabalhos à turma (Figura 5).

Figura 5 – Apresentação dos trabalhos à turma.

Discussão/conclusões preliminares

São as motivações para além da Estatística que evidenciam a importância do seu próprio estudo, na escolaridade obrigatória, uma vez que o principal objectivo é assegurar a compreensão, interpretação e manipulação de dados estatísticos, por parte da população em geral. Desta forma, na base da alfabetização e literacia estatística encontra-se a utilização de dados reais, os quais quando trabalhados em sala de aula, impulsionam o processo de mobilização de conhecimentos e procedimentos estatísticos adquiridos a contextos reais.

Embora os dados recolhidos durante a experiência de ensino implementada, que proporcionou diversos momentos de aprendizagem coletiva e individual, se encontrem ainda em fase de tratamento e análise, desde já permitiram constatar que é possível investir num enriquecimento didático na lecionação do tópico "Planeamento Estatístico", nomeadamente utilizando dados reais, sem colocar em causa a lecionação dos restantes tópicos, por utilização excessiva de tempo, e sem comprometer um ambiente tranquilo de sala de aula.

Além disso, a reflexão já realizada, no que concerne ao tópico Planeamento Estatístico, sugere que:

- a utilização de dados reais indicia um maior significado real atribuído aos conceitos e procedimentos estatísticos aprendidos, por parte dos alunos;
- o recurso às novas tecnologias, nomeadamente à folha de cálculo, constituiu um aspecto de motivação e um precioso instrumento no apoio à mobilização dos conhecimentos estatístico apreendidos;
- embora os alunos tenham interiorizado o conceito de variável qualitativa e quantitativa, relativamente a estas últimas não distinguem com a ligeireza esperada variável discreta de variável contínua, persistindo dificuldades a este nível.

Finalmente, gostaríamos de realçar desde já a reflexão desencadeada pela experiência de ensino sobre a necessidade de abordagens diferentes no ensino da Estatística, que promovam a literacia a este nível.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (2004). Sociologia e ciências da educação: A distância entre nós. *Sociologia, Problemas e Práticas 45*, 117-130.

Almeida, M. R. (2000). *Imagens sobre o ensino e a aprendizagem da estatística*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero, C. (2002). Los Retos de la Cultura Estadística**.** *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística***.** Buenos Aires. Conferencia inaugural.

Biehler, R. (1989). Educational perspectives on exploratory data analysis. In R. Morris (Ed.) *Studies in mathematics education: The teaching of statistics* (Vol. 7, pp. 185-202). Paris: Unesco.

Branco, J. (2000). Estatística no Secundário: O ensino e seus problemas. In C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 11-30). Lisboa: SPE, APM, DE e EIO da FCUL.

Branco, J., & Martins, M. E. (2002). Literacia Estatística. *Educação e Matemática, 69*, 9-13.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. *Journal of the Learning Sciences, 2* (2), 141-178.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. (2003). *Literacia Estatística*. [Comunicação apresentada na mesa redonda Literacia Estatística do *I Seminário de Ensino de Matemática* – 14ª Conferência realizada pelo COLE, Campinas].

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Matematical Thinking and Learning, 1*(1)*, 5-43*.

Cobb, G. W. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801-823.

Collins, A. (1992) Toward a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology*. Berlin: Springer-Verlag.

Holmes, P. (2003). *Statistical Literacy, Numeracy and the Future*. Nottingham: RSS Centre for Statistical Education.

Holmes, P. (2000). What sort of statistics should be taught in schools – and why? In C. Loureiro, F. Oliveira, & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e aprendizagem da Estatística (pp.49-56)*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lock H. R. (1999). *Www resources for teaching statistics* (outline for the talk). Presented at: Technology in Statistics Education, a One day Conference for Teachers of Statistics. *American Statistical Association*, March.

Lopes, C. & Carvalho, C. (2005). Literacia estatística na educação básica. In A. Nacarato & C. Lopes (Eds.), *Escritas e leituras na educação matemática* (pp. 77-92). Belo Horizonte: Autêntica.

Lopes, C. (1998). *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: Uma análise curricular*. Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

McKenzie, J., & Rao, A. (1999). *Making statistics more effective in schools of business*. Paper presented at 14th Annual Conference for Making Statistics More Effective in Schools of Business, June.

Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. *International Statistical Review*, *65*(2), 123-165.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC − ME. Retirado em 30 de Maio de 2011, de: http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. New York, NY**:** Basic Books.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações Curriculares para o ensino da estatística: Análise Comparativa de três países, *Quadrante, 10*(1), 93-115.

Ponte, J. P., Costa, F., Lopes, H., Moreirinha, O., & Salvado, D. (1997). *Histórias da aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Scheaffer, R. (2000). Statistics for a new century. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 158-173). Reston: NCTM.

Schield, M**.** (2000)**.** Statistical Literacy and Mathematical Reasoning. *International Conference on Mathematics Education* (ICME-9), Tokyo.

Schield, Milo (2007). Statistical Literacy: Factual Assessment to Support Hypothetical Thinking, *2007 IASE Satelite*, Guimarães, Portugal.

Shaughnessy, M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research and mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Nova York, NY: Macmillan Publishing Company.

Shaughnessy, M. (1996). Emerging issues for research on teaching and learning probability ans statistics. In B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 39-48). Swinburne: Swinburn University of Tecnology.

CensusAtSchool (http://www.censusatschool.org.uk/) – último acesso em 30 de Maio de 2011.

ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada (http://www.alea.pt/) – último acesso em 30 de Maio de 2011.

Estatística Interactiva (http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm24/estint.htm) – último acesso em 30 de Maio de 2011.

PLANEAMENTO ESTATÍSTICO NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Cristina Roque
Escola Secundária com 3.º Ciclo de Ferreira Dias
cmmroque@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

O presente estudo visa identificar os contributos de uma experiência de ensino, baseada em tarefas de carácter exploratório e investigativo, para o desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico dos alunos do 8.º ano de escolaridade. Segue um design de experiência de ensino, com estudo de caso qualitativo. Nesta comunicação discute-se a capacidade de planeamento de um aluno do qual é feito um estudo de caso. A análise dos dados mostra que o aluno aprofundou e ampliou os seus conhecimentos relativos à ponderação de elementos que afectam a representatividade de uma amostra e aos aspectos da variabilidade associada ao objecto de estudo. A experiência de ensino baseada na realização de investigações estatísticas e a análise crítica de estudos estatísticos motivou a sua compreensão da importância do planeamento estatístico e consequente percepção da natureza e do papel da Estatística.

Palavras-chave: planeamento estatístico, formulação de questões, amostragem.

Introdução

Em Portugal, a Estatística e as Probabilidades assumem visibilidade explícita no programa de Matemática do 3.º ciclo desde os anos 90 (ME, 1991). A crescente importância do pensamento estatístico num conjunto cada vez maior de profissões, tem levado à substituição de processos rotineiros pela resolução permanente de situações que envolvem incerteza e variabilidade. Isto tem motivado alterações ao nível da educação estatística, com uma ênfase crescente na análise de dados recolhidos no âmbito de experiências desenhadas pelos alunos. O planeamento estatístico reveste-se de assim grande interesse, constituindo uma oportunidade de dar a conhecer o que é a Estatística como ciência.

Os *Princípios e Normas* (NCTM, 2007) defendem que o currículo de Matemática deve: (i) habilitar todos os alunos a formular questões que possam ser abordadas por meio da análise de dados; (ii) desenvolver neles a capacidade para a recolha, organização e apresentação de dados relevantes que permitam responder a essas questões; e (iii)

capacitá-los para selecionar e utilizar métodos estatísticos adequados à análise de dados. O trabalho directo com dados é a ideia-chave para o envolvimento progressivo dos alunos com novas ideias e procedimentos, em oposição a uma atividade rotineira. Em Portugal, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) defende que os alunos devem ficar capazes de: (i) formular questões e planear adequadamente a recolha de dados, tendo em vista o estudo a realizar; (ii) identificar e minimizar possíveis fontes de enviesamento na recolha dos dados; e (iii) distinguir entre população e amostra e ponderar elementos que podem afectar a representatividade de uma amostra em relação à respectiva população (p. 60).

O presente estudo visa identificar os contributos de uma experiência de ensino, baseada em tarefas de carácter exploratório e investigativo, para o desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico dos alunos do 8.º ano de escolaridade. Nesta comunicação discute-se a capacidade de planeamento de um aluno, do qual é feito um estudo de caso, no início da realização da experiência de ensino e no final da realização da experiência de ensino.

Planeamento estatístico

No planeamento estatístico, assume um papel fundamental a fase precedente à organização e análise de dados, designada por vezes por "fase de produção" ou "fase de aquisição de dados". Segundo Tannenbaum e Arnold (1997), esta fase desempenha um papel importante na credibilidade da "história" que se pretende relatar pois para "obter uma boa informação estatística são necessários bons dados" (p. 426).

A formulação de questões estatísticas

Dada a curiosidade e a natureza interrogadora dos jovens um modo de os familiarizar com o contexto da investigação estatística, segundo o NCTM (2007), passa pela utilização de contextos sobre os alunos ou contextos próximos do seu "mundo". Pode-se, por exemplo, realizar estudos a nível da turma, bem como recorrer a dados recolhidos em experiências laboratoriais realizada pelos alunos. Este tipo de contexto permite um maior envolvimento e facilita a formulação de questões.

Segundo o GAISE (2005), a formulação de questões estatísticas implica a capacidade de reconhecer a existência de variabilidade da resposta, isto é compreensão da diferença entre uma questão para a qual se antecipa uma resposta determinística e uma questão

para a qual se prevê a resposta com base em dados que variam. O importante é reconhecer que existem diferentes fontes de variabilidade nos dados, nomeadamente: (i) da medição; (ii) natural; (iii) induzida; e (iv) da amostragem.

No trabalho de Konold e Higgins (2003) são analisados alguns episódios de sala de aula em que professores e alunos transformam questões gerais em questões estatísticas. Os autores defendem que os alunos podem aprender muito sobre os dados enquanto se debatem com problemas que se colocam na fase da formulação de questões estatísticas, nomeadamente quando antecipam a realização do estudo com o auxílio das questões que projetam para a respectiva recolha. Para responder a: "As crianças são mais activas do que os adultos?", um dos primeiros desafios passa pela transformação da questão inicial numa questão estatística, isto é que possa ser respondida por meio de dados, como: "Caso as distâncias totais percorridas fossem recolhidas diariamente por meio de um pedómetro, num grupo de crianças e noutro grupo de adultos, qual dos grupos teria maiores distâncias totais?" (p. 195). A formulação desta questão estatística teve por base o seguinte: O que é ser activo? De que modo se expressa ser activo? Que variáveis posso associar a ser activo? Como posso proceder para medir essa variável? Para os autores, um outro aspecto na formulação de uma questão estatística refere-se a decidir que população se pretende estudar. Os autores defendem que a aprendizagem da formulação de questões estatísticas e a recolha e análise de dados para posterior resposta está associada ao equilíbrio entre: (i) a formulação de uma questão estatística suficientemente específica de modo a permitir a recolha de dados relevantes mas que, por sua vez, não trivialize a questão inicial e (ii) a capacidade de assumir os dados produzidos como abstracções do contexto que os gerou mas nunca esquecendo que não são apenas números mas sim "números num contexto".

Recolha de dados e amostragem

Em Estatística, é necessário reconhecer que se pretende descrever as populações quando se recolhem os dados, fazer a sua posterior organização e, como tal, existe vantagem em reduzir a quantidade de dados recolhidos, bem como conhecer outras razões que poderão implicar o recurso a amostras em vez da população. O estudo de Jacobs (1999) sugere que alguns alunos rejeitam a ideia de amostragem porque subestimam as dificuldades associadas à realização de um censo. Sendo o processo de amostragem crítico na recolha de dados, constitui um ponto fulcral de uma investigação estatística. O

planeamento de um estudo estatístico, que começa com a forma de seleccionar a amostra, deve ser feito de forma a evitar amostras enviesadas, pelo que os alunos terão que ter em consideração questões como: "Qual é a população? Como deverá ser seleccionada a amostra de modo a ser representativa? É necessário utilizar uma amostra estratificada? Qual deverá ser a dimensão da amostra?" (NCTM, 2007, p. 384).

Segundo Martins e Ponte (2010) o trabalho a desenvolver com os alunos deve envolver a análise de situações em que é adequado o estudo de toda a população ou apenas uma amostra, a análise crítica de estudos estatísticos face ao uso de amostras não representativas e a ponderação de elementos que afectam a representatividade de uma amostra. Para Garfield (2002) o raciocínio correcto sobre amostras inclui saber de que modo as amostras estão relacionadas com a população de que foram extraídas e saber o que se pode inferir a partir destas.

No *Programa de Matemática* (ME, 2007), no 3.º ciclo, pretende-se que os alunos desenvolvam a noção que uma seleção aleatória da amostra constitui o único processo que garante representatividade. Para Martins e Ponte (2010) os alunos do 3.º ciclo devem ser sensíveis a três aspectos: a dimensão de uma amostra depende muito da variabilidade da população subjacente; terá de ser tanto maior, quanto maior for a precisão exigida; e não é necessariamente proporcional à dimensão da população a estudar. Garfield (2002) destaca os seguintes erros no âmbito da utilização de amostras: (i) aceitar, erroneamente, que boas amostras devem representar uma percentagem elevada da população; e (ii) confiar indevidamente em pequenas amostras e/ou assumir que uma amostra aleatória simples constitui um retrato fiel da população em análise dada incompreensão do processo de amostragem.

Unidade de ensino

Esta unidade de ensino tem por base o conjunto de tarefas correspondente ao tópico planeamento estatístico proposto pelos professores das turmas-piloto e disponível no sítio www da DGIDC, excepto as tarefas 2 e 3 adaptadas de Martins e Ponte (2010). Todas as tarefas têm natureza exploratória e investigativa. Assume-se que, para compreender a importância do planeamento estatístico, os alunos devem viver esse processo na realização de pequenas investigações estatísticas. Em contextos de realidade e semi-realidade, dando ênfase à construção do conhecimento com base no

desenvolvimento da compreensão, parte-se do conhecimento informal e intuitivo dos alunos para a construção do conhecimento formal.

Tabela 1. Objectivos das tarefas da unidade de ensino

Tarefa		**Objectivos**
1	*"População e amostra"*	Distinguir população de amostra e ponderar a representatividade de uma amostra em relação à respectiva população.
2	*"Limpar dados"*	Analisar criticamente um conjunto de dados de modo a detectar imprecisões antes de os começar a tratar, pondo em causa a fiabilidade da análise posterior.
3	*"Exemplo de uma pequena investigação estatística"*	Discutir e reflectir quanto aos seguintes aspectos: (i) etapas de uma investigação estatística, (ii) contextualização dos dados, (iii) importância da escolha das medidas de resumo e de representações utilizadas, (iv) validade e fiabilidade das conclusões depende da informação disponível sendo passível que um estudo motive novas questões.
4	*"Um estudo na escola"*	Desenvolver um estudo envolvendo às várias etapas do ciclo investigativo: (i) formular questões e hipóteses; (ii) recolher dados (iii) analisar dados, e (iv) comunicar e interpretar resultados. Discutir e reflectir quanto à variabilidade da amostragem e a validade das inferências para a população correspondente.
5	*"A frequência das vogais na língua portuguesa"*	Discutir e reflectir quanto ao papel dos métodos estatísticos como meios poderosos de tomada de decisão, e ponderação do grau de incerteza associado a previsões, para a população correspondente.
6	*"Previsões"*	

A unidade de ensino foi concretizada durante cerca de três semanas lectivas, usando, ao todo, 8 blocos, de 90 minutos e privilegiando o trabalho em pequeno grupo. Nas várias tarefas, a dinâmica de aula incluiu momentos de discussão colectiva de toda a turma. Na tarefa 4 os alunos realizaram um pequeno relatório sobre a investigação realizada.

Metodologia de investigação

Atendendo ao seu objectivo, o estudo segue um design de experiência de ensino numa abordagem de cunho qualitativo e na forma de estudo de caso. A primeira autora desempenhou o duplo papel de professora e investigadora, tendo em conta os objectivos do estudo e o tipo de questões para as quais, como professora, gostava de obter uma compreensão aprofundada. A escolha de Rui, entre os alunos que se disponibilizaram, teve em consideração o seu interesse e desempenho em OTD, o seu hábito de expressar

ideias sem receio de se expor, e a sua capacidade de fundamentação. Os critérios subjacentes à escolha deste aluno foram, assim, a existência de evidência e a abrangência.

Nesta investigação utilizaram-se os diversos processos de recolha de dados: pré teste, observação, entrevistas, pós teste e recolha documental. A observação proporciona uma visão integrada das aulas e as gravações áudio e vídeo permitem registar aspectos que de outro modo poderiam passar despercebidos. As duas entrevistas individuais realizadas a Rui foram gravadas, posteriormente transcritas na sua totalidade. Estas entrevistas permitiram um contacto mais próximo com as dificuldades e deram elementos sobre os processos e decisões assumidas pelo aluno. A recolha documental incide sobre as produções escritas do grupo de Rui. A figura 1 descreve a sequência dos processos de recolha de dados ao longo da experiencia de ensino.

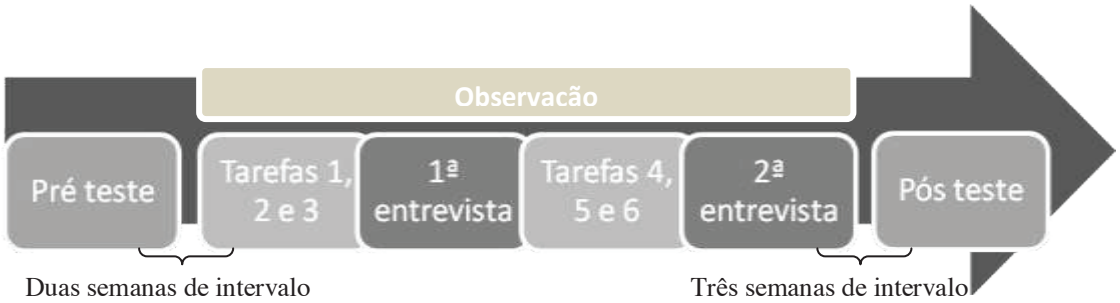


Figura 1. Sequência das tarefas, realização das entrevistas e testes

O percurso de Rui ao longo do planeamento estatístico

Rui vive com a mãe e a irmã perto da escola. Adora a prática desportiva, tendo começado por participar no grupo de Basquetebol da Escola, e atualmente integra a equipa de iniciados de um grupo desportivo da zona. Tem tido sucesso ao longo de todo o seu percurso escolar e as suas disciplinas preferidas são Inglês, Ciências Naturais e Ciências Físico-Químicas pois raramente estuda para os testes e tem sempre notas de "bom". Relativamente ao seu modo de estar na aula, é conversador e pouco organizado, distraindo-se facilmente, tem alguma facilidade em se expressar oralmente, embora o faça de modo pouco estruturado.

Recolha de dados e amostragem

Início da leccionação da unidade de ensino. No pré teste, face a uma questão, relativa à escolha de uma amostra, Rui selecciona um processo aleatório de amostragem

estratificada – "Questionar 160 alunos que são os números 1, 8, 15, 22 de cada uma das quarenta turmas da escola", rejeitando outros processos de amostragem passíveis de enviesamento tais como "questionar 160 alunos à porta da escola no início da manhã" ou "questionar 160 alunos das 6 turmas de 12.º ano".

Durante a realização da questão 3 da tarefa 1 (anexo 1), o grupo de Rui constata que a amostra em causa é representativa face à diversidade e significativa dimensão. Rui toma a iniciativa de assumir a representatividade da amostra sendo complementado pela colega de grupo que apresenta o argumento da diversidade da amostra. Rui mostra-se sensível à questão da significativa dimensão da amostra, sendo assim impensável que esta não contenha elementos que frequentam o refeitório:

> **Rui:** Eu até acho que esta está certa.
> **A e J:** Sim esta está …
> **A:** tipo, tem muita diversidade…
> **D:** Não mas olhem só, pode haver (alunos) números ímpares que não vão almoçar ao refeitório.
> **A:** Está bem, mas assim tem-se uma grande diversidade…
> **Rui:** Assim tem-se metade da escola inteira, achas que metade da escola muita gente não vai comer ao refeitório…
> **A:** assim está bom porque tens alguns (que) vão, outros (que) não vão.

Perante a necessidade do grupo indicar um processo de amostragem para um estudo sobre os projectos quanto ao prosseguimento de estudos dos alunos de 9.º ano de uma escola (questão 6a da tarefa 1), Rui defende uma selecção aleatória estratificada dos elementos a inquirir, argumentando que "Se tu estás numa turma as pessoas influenciam-se umas às outras…" e, no caso de se recorrer a um processo de amostragem aleatória simples, há a possibilidade de se inquirir mais alunos de uma turma do que de outra, ou obter uma amostra que não inclua alunos de determinada turma. Considera que um meio de evitar o enviesamento da amostra passa pela escolha de uma amostra que preserve a representação proporcional dos vários subgrupos turma, garantindo que deste modo todas as turmas sejam representadas equitativamente na amostra.

O trabalho de Rui no pré teste e durante a realização da tarefa 1, mostra que, no âmbito do planeamento, o aluno reconhece possíveis fontes de enviesamento na recolha de dados e pondera elementos que podem afectar a representatividade de uma amostra em relação à respectiva população (ME, 2007, p.60).

Durante a leccionação da unidade de ensino. Rui mostra-se capaz de fazer uma análise crítica de estudos estatísticos (Anexo 2), atendendo ao uso de amostras não representativas, e apresentando para cada caso um argumento para a sua rejeição. Face ao facto de existirem dois estudos com o recurso a um mesmo processo de amostragem válido, argumenta que deve considerar que a melhor previsão está associada ao estudo que utiliza a amostra aleatória de maior dimensão pois, deste modo, acede a uma maior porção da população, o que é preferível:

> **Rui:** Na 1, eu rejeitei… Porque aí não é ao acaso, é mesmo… É na rua mesmo ao pé do jornal... Por exemplo, se houve um ginásio mesmo ao lado do jornal… Há mais probabilidade das pessoas que eles vêem lá... Andarem grande parte no ginásio do que estarem a escolher ao acaso. Depois a 4 não escolhi porque… Foi feita em base de 1000 leitores que ligaram para lá... Então se ligaram para lá… Por exemplo, se isto for um jornal de desporto, os leitores que ligaram para lá são todas pessoas interessadas em desporto e grande parte pode fazer desporto por isso também acho que não é uma boa... Está enviesada.
>
> **Rui:** No jornal 3 tanto como no jornal 2… Não há grande diferença entre estes dois jornais, tanto um como o outro pode ser bem feito … Estão os dois estão bem feitos… Só o 1 e 4 é que estão, para mim, completamente errados.
>
> **P:** Mas como te dizem para escolher qual é o jornal, em singular entre o 2 e o 3… Optavas por um deles?
>
> **Rui:** Eu só optava pelo 3 por que tem maior número de pessoas… Assim está… Abrange uma maior área maior, mais gente.

Rui identifica e pondera elementos que afectam a representatividade de uma amostra em relação à respectiva população em diferentes contextos. Nas diferentes situações, à falta de uma linguagem formal, recorre a exemplos para ilustrar os elementos que pondera. Revela reconhecer que o aumento da precisão de uma sondagem está associada a uma maior dimensão da amostra aleatória.

Formulação de questões estatísticas

Início da leccionação da unidade de ensino. A análise do trabalho de grupo na questão 6b da tarefa 1, mostra que Rui e os colegas formulam questões bastante generalistas e dissociadas do objecto em estudo "projectos quanto ao prosseguimento de estudos". Durante a discussão constata-se que tanto Rui como a generalidade dos alunos não compreendeu ainda o objecto em estudo:

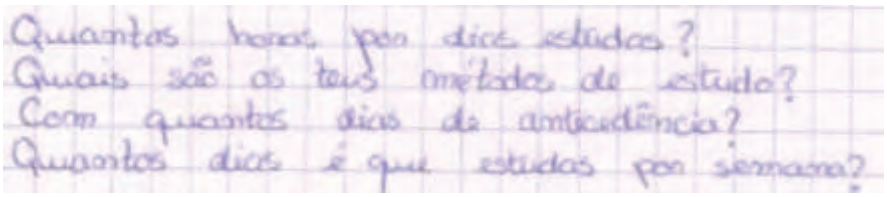


Figura 2. Resposta do grupo de Rui à questão 6b da tarefa 1

Durante a leccionação da unidade de ensino. Rui foi-se revelando capaz de reconhecer variabilidade em várias situações. Ao discutir as situações que são objecto de estudo estatístico, tendo por base a análise da pertinência de "Estudar o valor gasto pelos encarregados de educação na aquisição dos manuais escolares do 8.º ano da nossa escola", a generalidade dos alunos considera que a situação não é pertinente e de interesse estatístico dado que o conjunto de manuais escolares é idêntico para cada educando, pelo que o valor gasto é fixo. Rui não concorda, alega que o valor gasto não é necessariamente fixo, pois nem todos os pais compram no mesmo sítio, havendo locais em que fazem um desconto e/ou permitem o pagamento a crédito pelo que o valor gasto na compra dos manuais escolares do 8.º ano no contexto de uma determinada escola, varia e, como tal, é passível de constituir uma situação de interesse estatístico.

Na segunda entrevista, ao ser solicitado a Rui um esboço do estudo a realizar para responder ao problema "Os alunos da escola têm práticas correctas quanto à higiene oral?" (anexo 3), ele considera que a variabilidade inerente à situação deve ser tida em conta na decisão relativa o tipo de estudo e/ou dimensão da amostra no caso de optar por uma sondagem:

> **Rui:** Então eu acho que deveria ir a todas as turmas… Da escola com um inquérito, como é normal fazer… Stora eu estou a pensar… Escolher toda a gente da escola… Mas eu também penso que assim…
>
> **P:** Levantar informação de todas as pessoas…
>
> **Rui:** Sim, mas eu acho que assim ia ficar… Com uma dimensão demasiado grande... Ia ser mais difícil para analisar, mas se formos escolher, por exemplo cinco pessoas da turma pode não ficar tão bem… Eu acho mesmo que fazer um censo é o melhor.
>
> **P:** Então neste caso uma sondagem… Não te dá precisão suficiente…
>
> **Rui:** Eu acho que não, porque neste tipo de… Por exemplo, qual é a bebida que se bebe mais ou uma coisa assim a maioria dos jovens bebem todos as mesmas bebidas ice tea ou coca-cola e assim, mas aqui acho que ficava melhor fazer um censo… Porque… Os métodos para tratar dos dentes, da boca não são iguais para todos os jovens, há pessoas que escovam mais os dentes por dia, há pessoas que escovam depois de todas as refeições, há pessoas que escovam só à noite, há pessoas que escovam à noite e de manhã… Depende muito.

> **P:** Então e em vez de considerar toda a gente, se considerasses uma amostra um pouco maior do que a amostra que consideras ao estudar a bebida preferida… Achas que não daria informação suficiente?
>
> **Rui:** Se calhar metade da turma, 15 pessoas por turma mais ou menos acho que já dava… 14 por turma, 7 raparigas e 7 rapazes.

Rui ainda revela dificuldades na formulação de questões que possam especificar o problema "Os alunos da escola têm práticas correctas quanto à higiene oral?" indica a formulação das seguintes questões de inquérito: Quantas vezes escovas os dentes por dia? Usar fio dentário? Bochechas a boca com elixir ou flúor? Quando questionado sobre o significado que o inquirido dever atribuir ao termo "usar", optou por incluir na formulação das duas últimas questões o termo "regularmente". Uma vez mais, ao ser questionado sobre o significado que se deve atribuir ao termo "regularmente", alega que corresponde a uma utilização de pelo menos 2 a 3 vezes por semana e, dado que seria o próprio a aplicar, as dúvidas seriam esclarecidas na aplicação do inquérito caso surgissem, tal como tem observado quando solicitam a participação dos alunos da turma em inquéritos.

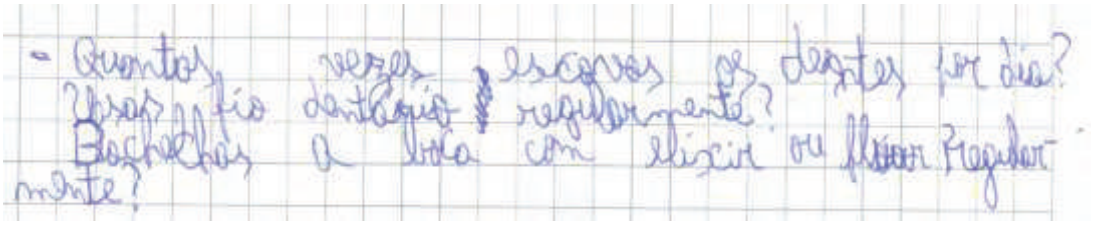


Figura 3. Excerto do esboço do plano proposto por Rui para o item 4 da 2ª entrevista

Persiste alguma dificuldade na formulação de questões de inquérito, nomeadamente no âmbito da clareza e objectividade das questões que, segundo o aluno, são ultrapassadas pela presença do autor do inquérito na aplicação.

A concluir

De forma geral, Rui consegue realizar com sucesso as tarefas propostas, revelando entusiasmo durante o estudo do tema. Desde o primeiro contacto com o processo de amostragem, o aluno mostra-se capaz de reconhecer possíveis fontes de enviesamento na recolha de dados e de ponderar elementos que possam afectar a representatividade de uma amostra. Argumenta os seus pontos de vista recorrendo a exemplos concretos que assegura estarem de acordo com as características iniciais da situação, com o objectivo dar ênfase ao elemento que pondera quanto à afectação da representatividade ou explicitar a sua opção de amostragem de modo a minimizar as fontes de enviesamento

que identificava. Comparando com os resultados de Jacobs (1999), Rui e os restantes alunos recorrem à utilização de amostras aleatórias simples em detrimento do estudo da população. Analisando o raciocínio estatístico durante o processo de amostragem constata-se que Rui não evidencia mal entendidos indicados por Garfield (2002). No entanto, quando lhe é solicitado que indique um processo de amostragem, recorre geralmente à estratificação da amostra, argumentando que, em várias situações, o género é um elemento a ponderar pelo que seria necessário um processo de amostragem que garanta a proporcionalidade do estrato género. Ao longo da unidade, o aluno revela ser capaz de identificar a variabilidade e a natureza estatística em diferentes situações. Constata-se que o aluno progressivamente formula questões para investigação de modo a orientar o processo de recolha de dados relevantes e significativos face ao problema em estudo, embora nem sempre pondere se a formulação é suficientemente clara e objectiva.

O facto da unidade de ensino valorizar a realização de pequenas investigações estatísticas e análise crítica de estudos estatísticos (Martins & Ponte, 2010) mostrou-se exequível e determinante para a compreensão da importância do planeamento estatístico, nomeadamente no progressivo reconhecimento de variabilidade, aspecto fundamental para a compreensão da natureza e do papel da Estatística (GAISE, 2005). Dada a natureza do trabalho desenvolvido, as situações propostas na unidade foram pertinentes e interessantes. O desafio passou pelo equilíbrio entre a formulação de questões estatísticas específicas e a capacidade de assumir os dados produzidos como abstracções do contexto, sem descurar numa análise macro o facto de serem "números num contexto" (Konold & Higgins, 2003).

Referências

GAISE Report (2005). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education. In (GAISE) Report, *A curriculum framework forPrek-12 Statistics Education*. Retirado a 13 de junho de 2010 de http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/

Garfield, J., (2002). The Challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education 10*(3). Retirado a 12 Junho de 2010 de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html

Jacobs, V. R. (1999). How do students think about statistical sampling before instruction? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(4), 240-246, 263.

Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. In G. Burrill (Ed.), *Research Companion to Principles and Standards of School Mathematics* (pp. 193-215). Reston, VA: NCTM.

Martins, M. E., & Ponte, J.P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME-DGIDC.

ME (1991). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa do original de 1998).

Tunnenbaum, P., & Arnold, R. (1997). *Excursions in modern mathematics*. Prentice-Hall.

Anexo 1 - Excerto da tarefa 1 – Parte C

3. A Directora de uma escola pretendia saber se os alunos estavam satisfeitos com a alimentação fornecida pela cantina da escola. Inquiriu todos os alunos com número ímpar.
   Faz um comentário sobre a representatividade da amostra.

5. O que terias a dizer sobre a representatividade de uma amostra constituída apenas por médicos para se estudar os conhecimentos de Biologia de uma determinada população?

6. Uma escola tem 523 alunos do 9.º ano. Pretende-se fazer um estudo sobre os seus projectos quanto ao prosseguimento de estudos. Para isso resolveu fazer-se um inquérito que abranja uma amostra representativa.
   a. Como obter essa amostra?
   b. Elabora três ou quatro perguntas que consideres fundamentais estar no inquérito para conhecer a opinião dos alunos quanto ao prosseguimento dos seus estudos.

Anexo 2 – Item da 1ª entrevista

Em Lagutrop, foram efectuadas sondagens relativas à prática desportiva (prática de pelos menos duas horas semanais), os quatro jornais nacionais efectuaram separadamente sondagens a nível nacional.

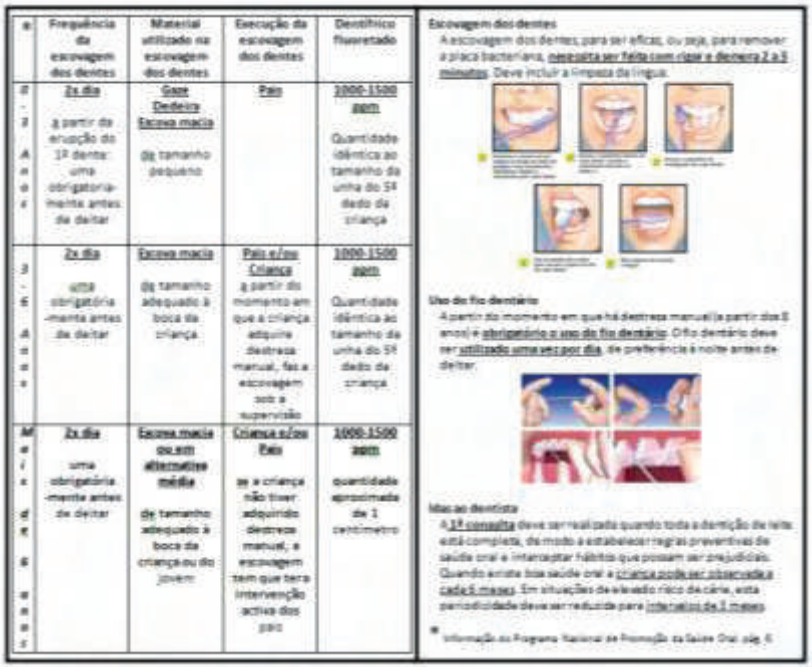
Quanto à percentagem de população que pratica desporto os resultados dessas quatro sondagens são os seguintes:

Jornal 1: 36,5% (sondagem realizada com base numa amostra de 500 cidadãos, inquiridos na rua em que se localiza o jornal);
Jornal 2: 41,0% (sondagem realizada com base numa amostra de 500 cidadãos, escolhidos ao acaso);
Jornal 3: 39,0% (sondagem realizada com base numa amostra de 1000 cidadãos, escolhidos ao acaso);
Jornal 4: 44,5% (sondagem realizada com base em 1000 leitores do jornal, que telefonaram para a redacção para votar).

Qual é o jornal, cujos resultados darão, provavelmente, uma melhor previsão da percentagem de população que pratica desporto?
Indica para cada alternativa não seleccionada uma razão da sua rejeição.

Anexo 3 - Item da 2ª entrevista

Na última consulta dentária a Rita leu um folheto que alertava para alguns cuidados relativos à higiene oral.



	Frequência da escovagem dos dentes	Material utilizado na escovagem dos dentes	Execução da escovagem dos dentes	Dentífrico fluoretado
0 - 2 Anos	2x dia a partir da erupção do 1º dente: uma obrigatoriamente antes de deitar	Gaze Dedeira Escova macia de tamanho pequeno	Pais	1000-1500 ppm Quantidade idêntica ao tamanho da unha do 5º dedo da criança
3 - 6 Anos	2x dia uma obrigatória-mente antes de deitar	Escova macia de tamanho adequado à boca da criança	Pais e/ou Criança a partir do momento em que a criança adquire destreza manual, fas a escovagem sob a supervisão	1000-1500 ppm Quantidade idêntica ao tamanho da unha do 5º dedo da criança
Mais de 6 anos	2x dia uma obrigatória-mente antes de deitar	Escova macia ou em alternativa média de tamanho adequado à boca da criança ou do jovem	Criança e/ou Pais se a criança não tiver adquirido destreza manual, a escovagem tem que tera intervenção activa dos pais	1000-1500 ppm quantidade aproximada de 1 centímetro

Escovagem dos dentes

A escovagem dos dentes, para ser eficaz, ou seja, para remover a placa bacteriana, **necessita ser feita com rigor e demora 2 a 3 minutos**. Deve incluir a limpeza da língua.

Uso do fio dentário

A partir do momento em que há destreza manual (a partir dos 8 anos) é **obrigatório o uso do fio dentário**. O fio dentário deve ser **utilizado uma vez por dia**, de preferência à noite antes de deitar.

Ida ao dentista

A **1ª consulta** deve ser realizada quando toda a dentição de leite está completa, de modo a estabelecer regras preventivas de saúde oral e interceptar hábitos que possam ser prejudiciais. Quando existe boa saúde oral a **criança pode ser observada a cada 6 meses**. Em situações de elevado risco de cárie, esta periodicidade deve ser reduzida para **intervalos de 3 meses**.

* Informação do Programa Nacional de Promoção da Saúde Oral, pág. 6

A Rita, aluna de uma escola Secundária com 3º ciclo, decidiu estudar o seguinte problema:

"Os alunos da escola têm práticas correctas quanto à higiene oral?".

Para isso resolveu fazer-se um inquérito a um conjunto representativo de alunos da escola.

Indica um esboço de como deve desenvolver o estudo, incluindo pelo menos os seguintes aspectos:

- Planeamento /Recolha de dados:

Como deve proceder para obter uma amostra representativa? Com que dimensão?

Que questões deve incluir no inquérito .... Ajuda-a na formulação de três ou quatro questões que consideres fundamentais a incluir no inquérito para conhecer as práticas/hábitos orais.

Que variáveis consideras que estão associadas às questões formuladas.

- Organização e tratamento de dados:

Como deve organizar os dados?

Como deve representar os dados?

Que medidas estatísticas deverá usar para descrever os dados?

- Análise e interpretação:

Que tipo de conclusões poderá vir a extrair?

REALIZAÇÃO DE DUAS TAREFAS SOBRE CONSTRUÇÃO, LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS POR ALUNOS DO 9º ANO

Paula Cardeal Morais
Agrupamento de Escolas de Cabeceiras de Basto
paulacccmorais@gmail.com

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

No presente estudo teve-se por objectivo descrever e compreender o desempenho, dificuldades e erros de alunos do 9.º ano na construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos. No estudo participaram 108 alunos do 9.º ano, de uma escola básica e secundária do distrito de Braga, a quem foram aplicadas duas tarefas, uma envolvendo a construção de gráficos e outra a leitura e interpretação de gráficos. Em termos de resultados, na tarefa de construção do gráfico os alunos apresentaram muitas dificuldades na escolha do gráfico adequado à situação apresentada, enquanto na tarefa de leitura e interpretação do gráfico, recorrendo aos níveis de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1989), verificou-se um desempenho semelhante em ambos os níveis explorados: "*ler entre os dados*" e "*ler além dos dados*".

Palavras-chave: Gráficos estatísticos; Construção; Leitura e interpretação; Alunos do 9.º ano.

1. Introdução

O crescente reconhecimento da importância da Estatística na sociedade actual, seja no confronto diário com informação estatística, na tomada de decisões relacionadas, na actividade profissional ou na participação social, tem-se repercutido no maior aprofundamento deste tema nos programas escolares.

Em termos de literacia estatística, Gal (2002) distingue duas componentes principais interrelacionadas que qualquer cidadão deve desenvolver: a de produtor de informação, que se refere a "fazer" Estatística (em que se inclui a construção de gráficos) e a de consumidor de informação, que se refere a *skills* de dar sentido, comunicação, reflexão e questionamento (em que se inclui a leitura e interpretação de gráficos).

Em Portugal, mais recentemente, com a reformulação do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), a Estatística, incluída no tema *Organização e Tratamento de Dados*, passou a fazer parte dos programas escolares da

disciplina de Matemática de todos os anos escolares do ensino básico e secundário, sendo o tema explicitamente referido pela primeira vez no 1.º ciclo do ensino básico e as medidas de dispersão, antes leccionadas no secundário, são introduzidas no 3.º ciclo.

Embora a presença dos gráficos no nosso dia-a-dia faça da sua construção, leitura e interpretação um tema importante do currículo escolar, alguns estudos realizados têm mostrado tratar-se de uma temática em que alunos e futuros professores apresentam dificuldades (e.g., Fernandes, Carvalho & Ribeiro, 2007; Morais, 2011; Ruiz, Arteaga & Batanero, 2009).

Neste contexto, com o presente trabalho tem-se por propósito descrever e compreender o desempenho, dificuldades e erros de alunos do 9.º ano na construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos.

2. Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos

Os gráficos providenciam um meio de comunicarmos e classificarmos dados (Curcio, 1989), permitindo representá-los de forma reduzida, compará-los e reconhecer relações matemáticas que muitas vezes não podem ser facilmente reconhecidas na forma numérica.

Estando os gráficos tão presentes nas nossas vidas, é natural que os alunos aprendam a ler e interpretar gráficos mesmo antes de os ensinarmos. No entanto, tal facto não implica que eles saibam o que é um gráfico, qual o seu significado e a importância que têm na sociedade actual (Carvalho, 2009). Assim, para Cavalcanti, Natrielli e Guimarães (2010) os gráficos são simultaneamente uma ferramenta cultural e um conteúdo escolar.

Segundo Friel, Curcio e Bright (2001), um gráfico é constituído por quatro elementos: a dimensão visual do gráfico, designada por especificadores (*specifiers*), usada para representar os valores dos dados, como por exemplo as barras num gráfico de barras; as etiquetas (*labels*), que nomeiam o tipo de medida usada ou os dados a que se aplica; o título do gráfico, que pode ser considerado um tipo de etiqueta; e, ainda, o fundo do gráfico (*background*), que pode incluir cores, grelhas e imagens sobre os quais o gráfico pode ser sobreposto. Para além destes quatro elementos, cada gráfico tem a sua própria linguagem, a qual pode ser usada para discutir sobre os dados representados.

Quando os alunos constroem um gráfico realizam uma série de acções e usam conceitos e propriedades que variam mediante o tipo de gráfico (Ruiz et al., 2009), donde a

construção de um gráfico apresenta dificuldades específicas ao estar associada à construção de tabelas e ao envolver variados conceitos, como escalas, origem dos eixos, variável independente e dependente, coordenadas, variáveis discretas e contínuas e distribuição de frequências (Espinel, González, Bruno & Pinto, 2009). Nestes dois estudos são mencionadas várias dificuldades na construção de gráficos, que resumimos de seguida.

No pictograma a dificuldade prende-se com a construção das imagens pictóricas ou símbolos e no diagrama de caule-e-folhas a dificuldade relaciona-se com a noção de número, na eventualidade do caule não possuir dígitos ou em atribuir-lhe o valor zero.

No gráfico de barras simples e no histograma as dificuldades detectadas relacionam-se com os procedimentos de construção. Na construção de gráficos de barras, para representar variáveis quantitativas discretas, os alunos etiquetam as barras como se tratasse de um histograma, colocando os valores nos extremos e não no meio das barras; não incluem um título nem rótulos nos eixos; representam num mesmo gráfico duas variáveis não comparáveis, revelando falta de compreensão do propósito dos gráficos conjuntos; representam incorrectamente os valores das frequências no eixo Ox e os valores da variável no eixo Oy, revelando desconhecimento do conceito de variável aleatória; constroem gráficos diferentes para comparar duas distribuições; utilizam escalas diferentes na construção de dois gráficos, dificultando a comparação e não fazem coincidir os valores das frequências com os considerados nas escalas.

No histograma os alunos colocam os valores das variáveis no meio das barras, escolhem uma escala não adequada ao conjunto de dados e marcam escalas em ambos os eixos com um número de divisões insuficiente e que não contemplam a origem, constroem barras separadas, etiquetam incorrectamente as barras e omitem os intervalos de frequência nula.

No gráfico circular constataram-se dificuldades associadas aos conceitos de proporção, percentagem e ângulo. Já no gráfico de extremos e quartis, tratando-se de uma representação bastante diferente das outras e de extrema relevância, envolvendo simultaneamente a centralização e dispersão, a maior dificuldade dos alunos residiu na comparação do tamanho da caixa com a percentagem de dados, afirmando que à maior caixa corresponde a maior percentagem de dados.

Para Curcio (1989) o potencial máximo de um gráfico é realizado quando através da sua observação se consegue interpretar e extrair conclusões sobre os dados nele representados. A este respeito, Friel et al. (2001) referem que a capacidade do leitor para atribuir significado aos gráficos, construídos por outros ou por si mesmo, implica a sua compreensão.

Curcio (1989) distingue três níveis de compreensão de um gráfico: primeiro, *ler os dados*; segundo, *ler entre os dados*; e terceiro, *ler além dos dados*. No primeiro nível, *ler os dados*, é necessário que o leitor faça uma leitura literal do gráfico, que se realiza através da leitura de factos que nele estão representados. Neste nível não há interpretação dos gráficos e pretende-se que o aluno compreenda a escala e as unidades de medida.

No segundo nível, *ler entre os dados*, o aluno deve interpretar e organizar a informação fornecida pelos dados. Neste nível, o aluno deve combinar e integrar a informação e identificar relações matemáticas através de algum conhecimento prévio sobre o assunto tratado no gráfico. Como refere Curcio (1989), este é o nível mais comum na resolução de tarefas que envolvem a compreensão dos gráficos, esperando-se que o aluno identifique tendências no gráfico e relacione ideias.

O terceiro nível, *ler além dos dados*, pressupõe que o aluno, ao ler a informação do gráfico, infira a informação total e tenha um conhecimento prévio aprofundado sobre o assunto referente aos dados do gráfico. Neste nível, o aluno deve conseguir responder a questões cujas respostas requerem o uso de informação implícita no gráfico, extrapolando, predizendo ou fazendo inferências. Ou seja, como refere Curcio (1989), pretende-se que o aluno se projecte no futuro e coloque questões sobre os dados.

A taxonomia de Curcio revelou, em alguns estudos, que os alunos têm poucas dificuldades no primeiro nível. No entanto, quando se deparam com questões do segundo nível verifica-se que cometem erros (Friel et al., 2001). Para estes autores, estes erros podem estar relacionados com os conhecimentos matemáticos ou com a própria leitura e linguagem dos gráficos, advogando que os estudantes devem fazer inferências a partir da representação do gráfico com a finalidade de interpretar os dados. Estes autores preconizam ainda que para se compreender um gráfico é necessário que se consiga extrair o seu significado, sendo necessário, para tal, fazer perguntas aos alunos que promovam os três níveis de compreensão por eles referidos.

3. Metodologia

Neste estudo, de natureza fundamentalmente quantitativa e de um cunho descritivo e comparativo (Gall, Gall & Borg, 2003), estudaram-se as seguintes questões de investigação: (1) Na representação de dados estatísticos, que tipo de gráficos constroem os alunos? Qual a sua adequação às situações propostas? Que erros e dificuldades revelam?; (2) Na leitura e interpretação dos gráficos estatísticos, que níveis de compreensão de Curcio (1989) revelam os alunos? Que erros e dificuldades revelam?

Participaram no estudo 108 alunos do 9.º ano de escolaridade, designados por A_i, com $i \in \{1, 2, ..., 108\}$, pertencentes a quatro turmas de uma escola básica e secundária do distrito de Braga. Em relação aos participantes, a média das suas idades era de 14 anos, distribuíam-se na mesma percentagem pelo sexo feminino e masculino e a média do seu aproveitamento na disciplina de Matemática, no 8.º ano, era de 3,1, com desvio padrão de 0,90, numa escala de 1 a 5. Tratando-se de alunos do 9.º ano, eles tinham estudado na escola o tema de Estatística, em que se inclui os gráficos, pela última vez, no 8.º ano.

O estudo decorreu no ano lectivo de 2009/2010 e a escola a que os alunos pertenciam situa-se num meio rural tranquilo, onde a população escolar provém essencialmente de zonas rurais, dedicando-se principalmente a actividades do sector primário, em que se destaca a agricultura, a criação de gado e a silvicultura.

Aos alunos foi aplicado um teste escrito constituído por cinco tarefas, duas sobre construção de gráficos e três sobre leitura e interpretação de gráficos (Morais, 2011). Destas tarefas iremos referir-nos a apenas duas, uma de cada tipo. No caso da segunda tarefa, as suas três questões distribuíam-se pelos níveis de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1989) do seguinte modo: as questões a) e b) no nível 2 (*ler entre os dados*) e a questão c) no nível 3 (*ler além dos dados*).

O teste foi aplicado em Janeiro e Fevereiro de 2010, em aulas dos alunos, com a duração de 90 minutos, sob a supervisão da investigadora, que esteve presente durante todo o tempo de realização do teste. Durante a realização do teste foi disponibilizado aos alunos o material necessário, à medida que foi solicitado, tal como calculadoras, compassos, réguas e transferidores.

Finalmente, o tratamento e a análise de dados centraram-se no estudo das respostas apresentadas pelos alunos, classificadas em correctas, parcialmente correctas e incorrectas, tendo sido determinadas percentagens e resumida a informação em tabelas.

4. Tarefa 1 - Representação gráfica do tempo médio de vida de alguns animais

No quadro seguinte indica-se o tempo médio de vida, em anos, de 21 animais.

Animal	Tempo médio de vida (anos)
Galinha	8
Pato	10
Marmota	7
Coelho	7
Canguru	5
Esquilo	9
Raposa	9
Lobo	11
Gato	11
Cão	11
Leão	10

Animal	Tempo médio de vida (anos)
Porco	10
Cabra	12
Ovelha	12
Macaco	14
Urso	23
Hipopótamo	30
Veado	13
Vaca	11
Cavalo	23
Elefante	35

Constrói o gráfico que consideras mais apropriado para representar os tempos médios de vida dos 21 animais.

Fonte: Dados retirados de Landwehr, J. M. & Watkins, A. E. (1996). *Exploring data: Teacher's edition*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Esta tarefa envolve a selecção e construção de um gráfico para representar uma variável estatística quantitativa (considerada contínua), tendo-se verificado que 42% dos alunos não responderam e os restantes 58% construíram diferentes representações gráficas, como se pode constatar pela Tabela 1. Destas respostas, muito poucas (2%) foram classificadas como correctas ou parcialmente correctas.

Tabela 1 − Distribuição das percentagens das diferentes representações gráficas segundo o tipo de resposta na tarefa ($n = 108$)

Representação	Respostas (em %)			
	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Histograma	1	1	–	2
Gráfico circular	–	–	6	6
Gráfico de barras simples	–	–	43	43
Outras	–	–	7	7
Total	1	1	56	58

O único aluno cuja resposta foi considerada correcta construiu um histograma, como se pode observar na Figura 1. Na resposta parcialmente correcta, o aluno construiu também um histograma, mas definiu classes de diferentes amplitudes, de área não proporcional às frequências e não uniu as barras.

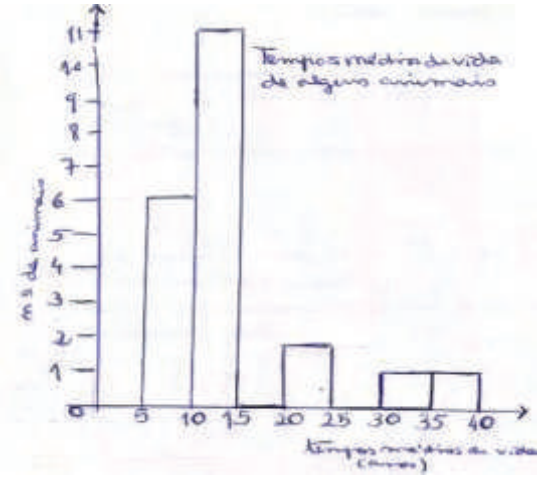


Figura 1. Resposta apresentada pelo aluno A_{75}.

Nas respostas incorrectas, 6 alunos construíram gráficos circulares, 46 gráficos de barras simples e 8 utilizaram outro tipo de construções, tais como tabelas, gráficos de linhas e gráficos cartesianos.

Nos gráficos circulares, 1 aluno estabeleceu quatro classes de igual amplitude, determinou as frequências de cada uma delas e a partir das frequências definiu os correspondentes sectores circulares, enquanto todos os restantes 5 alunos consideraram como variável o nome do animal e como frequência o seu tempo médio de vida.

Nos gráficos de barras simples, 11 alunos consideraram a variável tempo médio de vida como sendo discreta, separando as barras em 6 gráficos e unindo-as em 5 gráficos; 26 alunos organizaram, no eixo da variável, os dados por grupos de animais com o mesmo tempo médio de vida, sem considerarem as frequências no outro eixo (Figura 2); e os restantes representaram cada dado individualmente.

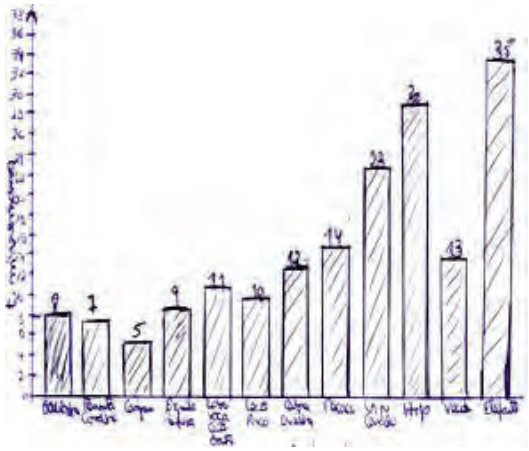


Figura 2. Resposta dada pelo aluno A_{73}.

Finalmente, nos gráficos cartesianos ou de linhas, os alunos limitaram-se também a representar cada dado individualmente, sem efectuar qualquer redução dos dados (Figura 3).

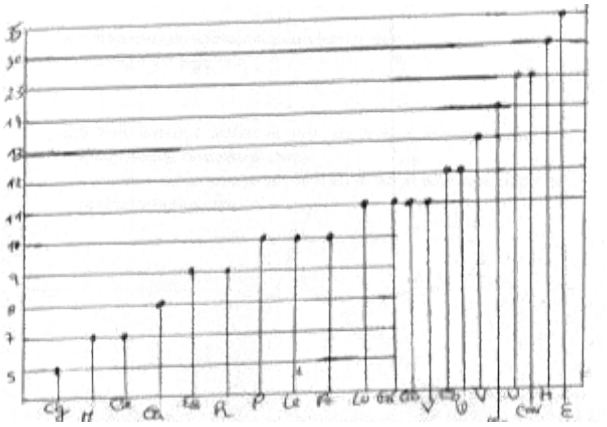
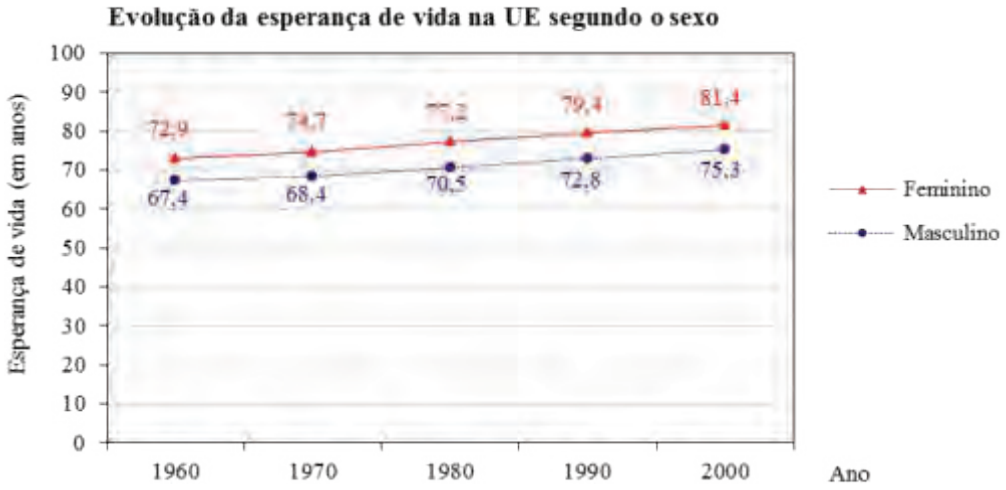


Figura 3. Resposta apresentada pelo aluno A_{32}.

5. Tarefa 2–Leitura e interpretação do gráfico de evolução da esperança de vida na UE

No gráfico seguinte está representada a esperança de vida, à nascença, de homens e mulheres da UE (União Europeia) entre 1960 e 2000.



a) Observando o gráfico, o que podes concluir acerca da esperança de vida, à nascença, na UE?
b) Determina um valor representativo da esperança de vida, à nascença, dos homens e outro das mulheres, tendo em vista comparar a esperança de vida, à nascença, dos homens com a das mulheres no período entre 1960 e 2000.
c) Como explicas a evolução da esperança de vida, à nascença, na UE, entre 1960 e 2000?

Fonte: Dados retirados de http://ec.europa.eu/publications/booklets/eu_glance/44/pt-1.pdf.

Esta tarefa envolve a leitura e interpretação de dados de um gráfico, apresentando-se na Tabela 2 as respostas dos alunos às três questões da tarefa.

Tabela 2 – Distribuição da percentagem de alunos segundo o tipo de resposta nas questões a), b) e c) ($n = 108$)

Tipo de resposta	Percentagem de alunos		
	a)	b)	c)
Correcta	19	14	43
Parcialmente correcta	62	3	–
Incorrecta	11	34	30
Não respostas	8	49	27

Questão a)

Nesta questão, em que se esperava que os alunos reconhecessem uma tendência geral dos dados (*ler entre os dados*), constata-se, pela Tabela 2, que foi baixa a percentagem de alunos que respondeu correctamente (19%) e incorrectamente (11%), enquanto a maioria dos alunos (62%) apresentou uma resposta parcialmente correcta.

Os alunos que responderam correctamente retiraram do gráfico dado dois tipos de informação: na UE, a esperança de vida à nascença aumentou desde 1960 até 2000 (tanto para os homens como para as mulheres) e a esperança de vida à nascença das mulheres é sempre superior à dos homens – "A esperança de vida tem vindo a aumentar ao longo dos anos. Mas a EMV [Esperança Média de Vida] do sexo feminino tem sido sempre superior à EMV do sexo masculino" (A_{10}).

Os alunos que responderam de modo parcialmente correcto retiraram do gráfico dado apenas um dos dois tipos de informação referidos. Destes alunos, 40 afirmaram que a esperança de vida à nascença na UE aumentou desde 1960 até 2000 – "Tem aumentado [a esperança de vida à nascença] ao longo dos anos, especificamente entre 1960 e 2000" (A_{16}), e 27 alunos afirmaram que a esperança de vida à nascença das mulheres é superior à dos homens – "Observando o gráfico posso concluir que a esperança de vida à nascença é maior nas mulheres" (A_6).

Nas repostas incorrectas, 8 alunos afirmaram que a esperança de vida é "elevada", 1 aluno afirmou que "mais de 60% das pessoas sobrevivem", 2 alunos que "a esperança de vida à nascença é inferior ao longo dos anos" e 1 aluno que "nem todos os bebés que nascem ficam vivos".

Questão b)

Nesta questão, envolvendo combinar e integrar informação (*ler entre os dados*), verificou-se uma elevada percentagem de alunos que respondeu incorrectamente (34%)

ou não respondeu (49%). Dos restantes alunos, apenas 14% respondeu correctamente e 3% apresentaram respostas parcialmente correctas.

Todos os 15 alunos que responderam correctamente determinaram as médias da esperança de vida à nascença das mulheres e dos homens (Figura 4), referindo, por vezes, que estes seriam os valores que lhes permitiriam comparar as esperanças de vida à nascença.

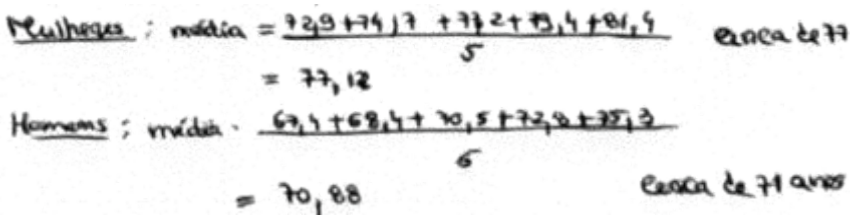


Figura 4. Resposta dada pelo aluno A_5 à questão b).

Nas 3 respostas parcialmente correctas os alunos determinaram a soma dos valores referidos[1], quer para os homens quer para as mulheres, sem terem efectuado a divisão do resultado obtido pelo número de dados.

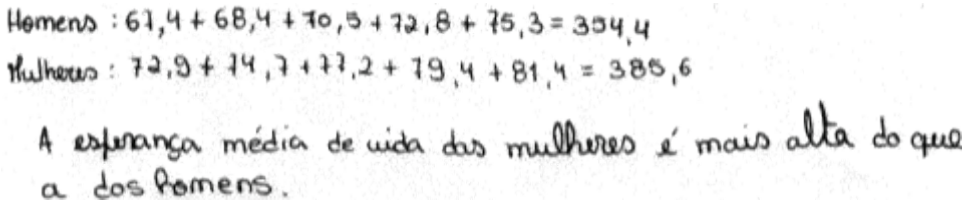


Figura 5. Resposta dada pelo aluno A_{59} à questão b).

Finalmente, nas 37 respostas incorrectas, a maioria dos alunos (30) apenas referiu a maior/menor esperança de vida das mulheres/homens, apesar de alguns deles aludirem o conceito de média – "A esperança média de vida dos homens ronda os 75 anos, enquanto das mulheres ronda os 81" (A_{18}). Os restantes 7 alunos apresentaram respostas variadas, especificamente 5 alunos calcularam diferenças entre os dados das mulheres e os dos homens (Figura 6), 1 aluno dividiu esses dados e 1 aluno determinou a média dos valores de divisão da escala do eixo das ordenadas.

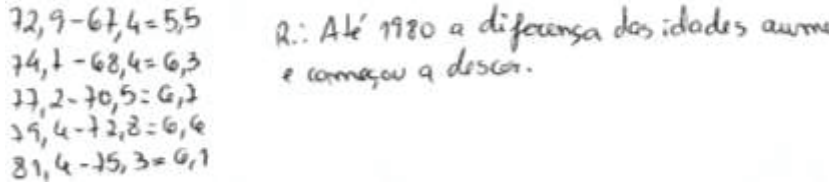


Figura 6. Resposta dada pelo aluno A_8 à questão b).

[1] Embora nesta situação a soma dos valores da variável, tal como a média, permita comparar as duas distribuições porque os seus efectivos totais são iguais, considerámos estas respostas parcialmente correctas uma vez que essa soma não permite comparar duas distribuições com efectivos totais diferentes.

Questão c)

Foi nesta questão (*ler além dos dados*) que se obteve a maior percentagem de respostas correctas (43%), seguindo-se a percentagem de respostas incorrectas (30%) e a percentagem de não respostas (27%).

Nas 47 respostas correctas, entre outras razões, os alunos atribuíram o aumento da esperança de vida, quer dos homens quer das mulheres, à melhoria da qualidade de vida e/ou e ao avanço da medicina – "Esta situação pode explicar-se através da melhoria das condições de vida" (A_1) e "Com o avanço da medicina, as melhores condições de vida" (A_{69}).

Nas 32 respostas incorrectas a maioria dos alunos (23) limitou-se reafirmar informações extraídas do gráfico dado, à semelhança do que tinham efectuado na questão a). Destes, 21 alunos referiram o aumento da esperança de vida – "Tem vindo a crescer de 1960 a 2000" (A_6), e 2 alunos a maior esperança de vida das mulheres – "Explico que cada vez mais as mulheres têm uma esperança de vida maior do que a dos homens" (A_{107}). Os restantes 9 alunos referiram que a esperança de vida tem a ver com o aumento do número de nascimentos – "A evolução da esperança de vida à nascença na UE aumentou porque houve mais nascimentos e menos mortes" (A_{14}), revelando dificuldades na compreensão do significado de esperança de vida à nascença.

6. Conclusão e implicações

Globalmente, os alunos que participaram no estudo revelaram um fraco desempenho na construção, leitura e interpretação de gráficos. Em consequência, tendo por referências os dois domínios de literacia estatística de Gal (2002), conclui-se que estes alunos apresentam um desempenho crítico enquanto produtores e consumidores de informação.

Contrariamente à visão dos professores, que afirmam tratar-se de um conteúdo fácil (González & Pinto, 2008), os resultados do presente estudo mostram que a construção, leitura e interpretação de gráficos é uma tema difícil para os alunos, reafirmando-se a complexidade semiótica destes objectos matemáticos (Ruiz et al., 2009).

Em termos dos gráficos construídos pelos alunos, destacou-se claramente a utilização do gráfico de barras simples. Ora, não sendo este gráfico adequado para representar a situação apresentada, ele conduziu sempre a respostas incorrectas. Comparativamente com outros tipos de gráficos, a prevalência do gráfico de barras simples pode ter sido

consequência de terem sido mais trabalhos nas aulas destes alunos, além de que se trata de um gráfico de mais fácil construção do que outros tipos de gráficos, como, por exemplo, os gráficos de barras agrupados ou empilhados e os histogramas.

Nos gráficos construídos pelos alunos encontrámos variados tipos de erros referidos na literatura (e.g., Espinel et al., 2009; Ruiz et al., 2009), designadamente a selecção de um gráfico não adequado para representar a situação proposta, a ausência de título e de rótulos nos eixos, o estabelecimento de escalas não adequadas e a falta de rigor na construção do gráfico. Estas dificuldades podem estar relacionadas com o facto de os gráficos, incluindo a sua construção, leitura e interpretação, constituir um conteúdo do currículo de Matemática em que os professores sentem maior desconforto em ensinar, como afirmam Monteiro e Selva (2001) num estudo que realizaram com professores em serviço.

A aparente contradição entre o facto de os professores considerarem os gráficos um tema fácil e o seu desconforto em o ensinarem pode dever-se a uma abordagem muito técnica e procedimental, tal como verificaram Fernandes, Carvalho e Ribeiro (2007). Diferentemente, uma perspectiva de aplicação da Estatística, em que é necessário tomar decisões, como acontece na escolha do gráfico apropriado da tarefa 1, pode explicar as dificuldades sentidas pelos alunos.

Já quando se consideram os dois níveis de Curcio (1989), implicados nas questões da tarefa 2, não se distinguiu claramente o nível *ler entre os dados* do nível *ler para além dos dados* em termos de repostas correctas e parcialmente correctas. Tal com foi verificado por Friel et al. (2001), o fraco desempenho dos alunos no nível *ler entre os dados*, sobretudo na questão b), está relacionado com a ausência de conhecimentos matemáticos, que na situação específica se poderá explicar pela complexidade inerente à selecção e determinação de um valor adequado.

Face às dificuldades identificadas e descritas anteriormente, para Espinel et al. (2009) é relevante que se repense o ensino desta temática, salientando-se a pertinência de: diferenciar o estudo dos gráficos de barras (para variáveis qualitativas e quantitativas discretas) dos histogramas (para variáveis contínuas ou agrupadas em intervalos); analisar os gráficos com que nos deparamos na comunicação social, de modo a aprender a ler a informação neles contida; e promover a utilização de histogramas e polígonos de frequências, de modo a perceber como se distribuem determinadas variáveis.

Referências bibliográficas

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da Estatística. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H., Martinho & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na escola* (pp. 22-36). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Cavalcanti, M. R., Natrielli, K. R. & Guimarães, G. L. (2010). Gráficos na Mídia Impressa. *Bolema*, *23*(36), 733-751.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Espinel, M. C., González, M. T., Bruno, A., Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp.57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Fernandes, A. J., Carvalho, C., Ribeiro, S. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7.º ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, *15*(28), 27-61.

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.

González, M. T., & Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Consultado em Janeiro 10, 2010, em http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Monteiro, C., & Selva, A. C. (2001). Investigando a atividade de interpretação de gráficos entre professores do ensino fundamental. *Anais da XXIV Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, Caxambu, Brazil. Consultado em Setembro 20, 2010, em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/investigando.pdf.

Morais, P. C. (2011). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Ruiz, B., Arteaga, P., & Batanero, C. (2009). Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

INTUIÇÕES DE ALUNOS DO 9º ANO DE ESCOLARIDADE SOBRE PROBABILIDADE CONDICIONADA

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

José Miguel Contreras
Universidad de Granada
jmcontreras@ugr.es

Resumo

Neste texto apresentam-se alguns resultados de um estudo centrado nas ideias intuitivas de probabilidade condicionada de alunos do 9.º ano de escolaridade.
Participaram no estudo 229 alunos do 9.º ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada, sendo aqui apenas exploradas as duas em que as frequências dos acontecimentos eram apresentadas sob a forma de tabela.
Em termos de resultados, salienta-se que as resoluções dos alunos revelam que estes possuem ideias intuitivas sobre o conceito de probabilidade condicionada, enfatizando-se a importância da leitura prévia dos dados fornecidos através de tabelas de frequências.

Palavras-chave: Probabilidade condicionada; Frequências dadas em tabelas; Alunos do 9.º ano.

1. Introdução

As Probabilidades é um tema útil na vida do dia-a-dia das pessoas, constitui um saber instrumental em outras disciplinas, é um conhecimento necessário em muitas profissões e intervém na tomada de decisões (Gal, 2005). Ora, essas variadas aplicações do tema têm-se reflectido na necessidade de aprofundar o seu ensino, tendo sido recentemente incluído nos programas escolares de muitos países.

Em Portugal, tal como em outros países, com a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) verifica-se o aprofundamento do tema Organização e Tratamento de Dados, que inclui o estudo das Probabilidades e Estatística. Contudo, tal aprofundamento acontece mais em relação à Estatística do que às Probabilidades. Efectivamente, neste último caso, mantém-se essencialmente o que estava contemplado no programa anterior.

Neste contexto, tendo por propósito avaliar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades no ensino básico, na presente investigação estudam-se as ideias intuitivas de alunos do 9.º ano sobre probabilidade condicionada, quando os dados são apresentados na forma de tabelas de frequências. Para tal, partimos dos estudos prévios de Estrada e Díaz (2006) e Contreras, Batanero, Díaz e Fernandes (2011), realizados com futuros professores, e introduzimos o caso de uma tabela simples e a leitura de uma tabela de contingência.

Neste estudo considera-se a definição de probabilidade condicionada decorrente da restrição do espaço amostral. Nesta perspectiva, a probabilidade condicionada de um acontecimento A dado que ocorreu o acontecimento B, $P(A \mid B)$, é a probabilidade de A considerando apenas os resultados possíveis da experiência aleatória que são elementos de B. Isto é, a probabilidade do acontecimento A é avaliada nas condições de um novo espaço amostral que resulta do condicionamento da ocorrência do acontecimento B (Hogg & Tanis, 1993, citado em Tarr & Lannin, 2005).

Neste estudo entendemos como ideias intuitivas aquelas que são desenvolvidas em contextos informais, não na escola (Fischbein, 1987), como era o caso dos alunos do 9.º ano que participaram no estudo, os quais não tinham ainda estudado o conceito de probabilidade condicionada na disciplina de Matemática.

2. Investigação prévia

Nas tarefas de cálculo de Probabilidades as frequências relativas aos acontecimentos podem apresentar-se em tabelas de frequências simples e em tabelas de contingência, tal como aconteceu no presente estudo. No caso das tabelas de frequências simples, no estudo de Fernandes (1999) foi incluída uma tarefa deste tipo, tendo-se obtido, em 100%, um nível de realização de cerca de 87% num item de probabilidade simples, 75% num item de soma de probabilidades e 53% num item de probabilidade condicionada.

No caso das tabelas de contingência, elas têm sido usadas para estudar o desenvolvimento do conceito de associação entre duas variáveis (e.g., Inhelder & Piaget, 1976) e as estratégias intuitivas e preconcepções acerca da associação (Batanero, Estepa, Godino & Green, 1996). Mais recentemente têm sido também usadas no estudo do conceito de probabilidade, incluindo a noção de probabilidade condicionada, por parte de Estrada e Díaz (2006) que apresentaram a futuros

professores do ensino primário uma tarefa, contra-intuitiva, envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de contingência e interrogaram-nos sobre a determinação de uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada e a sua transposta, tendo-se obtido, respectivamente, as percentagens de respostas correctas: 75%, 52%, 56% e 52%.

Contreras et al. (2011) noutra investigação com futuros professores do ensino primário envolvendo a determinação de uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada, dadas as frequências dos respectivos acontecimentos numa tabela de contingência, obtiveram, respectivamente, percentagens de respostas correctas ligeiramente inferiores às obtidas no estudo de Estrada e Díaz (2006), especificamente 66%, 41% e 44%. Em ambos os estudos, os futuros professores, antes de realizarem a tarefa, tinham estudado o conceito de probabilidade condicionada no âmbito de pelo menos uma disciplina do curso.

A exploração da mesma tarefa por alunos do 12.º ano (Fernandes & Fernandes, 2010), com ensino de Probabilidades, conduziu a resultados ligeiramente superiores. Neste estudo verificou-se ainda um impacto muito limitado do ensino de Probabilidades sobre as respostas dos alunos, diminuindo mesmo, do pré-ensino para o pós-ensino, a percentagem das respostas correctas, no caso das probabilidades condicionadas.

Por outro lado, em termos de raciocínios, outras investigações centradas no estudo da probabilidade condicionada referem-se a obstáculos, erros e dificuldades na aquisição do conceito. De entre esses estudos, salienta-se o estudo de Falk (1986), em que se verificou que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A \mid B)$ e $P(B \mid A)$. Falk designou este tipo de erro por *falácia da condicional transposta*.

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem $P(A \mid B)$ com $P(A \cap B)$, isto é, não distinguem claramente os significados da condicional "se" e da conjunção "e", o que se torna particularmente aparente aquando da passagem de um enunciado em linguagem corrente para linguagem simbólica das probabilidades.

A percepção de *causalidade* na avaliação de probabilidades está também na origem de raciocínios errados no cálculo de probabilidades condicionadas. Segundo Tversky e Kahneman (1982), a influência da causalidade manifesta-se através de *assimetrias*

inferenciais, em que as pessoas inferem com maior confiança efeitos das causas do que causas dos efeitos, e da *significação causal e diagnóstica da evidência*, em que as pessoas tendem a realçar o impacto causal dos dados para o futuro e a negligenciar as suas implicações diagnósticas acerca do passado. Neste último caso, no estudo de Falk (1986), também confirmado num estudo por Fernandes, Nascimento, Cunha e Contreras (2011), os estudantes afirmaram, numa elevada percentagem, que a questão era desprovida de sentido ou que a probabilidade de um acontecimento que ocorre depois não pode afectar a probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes.

No estudo de Estrada e Díaz (2006), a que nos temos vindo a referir, os conflitos semióticos (Godino, 2003) mais frequentemente experienciados pelos futuros professores referem-se à confusão entre a probabilidade condicionada e a sua transposta (14%), entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta (13%) e entre a probabilidade de um acontecimento e do seu contrário (7%). Já no estudo de Contreras et al. (2011), no conjunto das três questões do estudo, destaca-se o erro resultante de confundir probabilidades, sendo mais frequente a confusão entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta (14%), seguindo-se, numa percentagem muito inferior, os erros de confundir outros objectos, fórmulas e acontecimentos, designadamente entre um acontecimento e o seu contrário. Considerando agora cada uma das três questões, a prevalência do erro confundir probabilidades foi superior no caso da probabilidade conjunta (25%), seguindo-se o caso da probabilidade condicionada (16%) e, por fim, com uma percentagem muito inferior (4%), surge o caso da probabilidade simples.

2. Método

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, avaliar as ideias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada, quando as frequências dos acontecimentos são apresentadas em tabelas. Mais especificamente estudou-se o cálculo de probabilidades numa tabela simples e a leitura de dados e o cálculo de probabilidades numa tabela de contingência.

Participaram no estudo 229 alunos do 9.º ano de escolaridade, pertencentes a quatro escolas do distrito de Braga. Relativamente a estes alunos, as suas idades variavam entre os 14 e os 18 anos, com 14,5 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9.º ano); 50,7% dos alunos eram do sexo feminino e 49,3% do sexo

masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 1º período do 9.º ano e numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,0; e, finalmente, 11,8% dos alunos tinham tido uma repetência e 3,9% tinham tido duas ou três repetências no seu percurso escolar.

Foi aplicado aos alunos um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía várias tarefas sobre probabilidades, das quais trataremos neste texto apenas as duas em que informação era apresentada numa tabela. Estas tarefas têm formato similar a outras duas tarefas, uma usada por Fernandes (1999) e a outra usada por Estrada e Díaz (2006) e Contreras et al. (2011).

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no final do 2.º período escolar de 2010/2011, tendo-se revelado um tempo suficiente. Entretanto, os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9.º ano, no início do ano lectivo, nos quais não se inclui qualquer referência à probabilidade condicionada.

Por fim, a análise de dados foi efectuada com recurso ao programa de análise estatística *SPAW Statistics 18*, tendo-se determinado frequências de respostas correctas e incorrectas e de tipos de erros nas duas tarefas estudadas, organizadas e sintetizadas em tabelas.

3. Leitura de dados em tabelas e cálculo de probabilidades

Apresenta-se de seguida a análise das respostas dos alunos nas tarefas 1 e 2 do questionário quanto à percentagem de respostas correctas, respostas incorrectas e não respostas, bem como quanto aos erros identificados nas suas produções escritas.

3.1. Cálculo de probabilidades numa tabela de frequências simples

Na tarefa 1, partindo de uma tabela simples, pedia-se aos alunos para calcularem três probabilidades: uma probabilidade simples na questão a), uma soma de probabilidades na questão b) e uma probabilidade condicionada na questão c).

Tarefa 1. Escolheram-se, ao acaso, 60 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu número de irmãos. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os dados do quadro seguinte:

Nº de irmãos	Nº de estudantes
0 irmãos	8
1 irmão	25
2 irmãos	15
3 ou mais irmãos	12

Escolhe-se, novamente ao acaso, um estudante do grupo dos 60 estudantes.

a) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter exactamente 1 irmão?

b) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter mais que 1 irmão?

c) Sabe-se que o estudante escolhido tem irmãos. Qual a probabilidade de ter exactamente 1 irmão?

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de respostas correctas, erradas e não respostas em cada questão da tarefa 1, envolvendo o cálculo das probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A|C)$, sendo os acontecimentos *A*: ter exactamente um irmão, *B*: ter mais que 1 irmão e *C*: ter irmãos.

Tabela 1. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de resposta às questões da Tarefa 1

Conteúdos	Respostas		Não respostas
	Correctas	Erradas	
$P(A)$	88,6	10,5	0,9
$P(B)$	83,4	13,6	3,0
$P(A\|C)$	54,6	35,8	9,6

Da Tabela 1 destaca-se a elevada percentagem de respostas correctas no cálculo da probabilidade simples e da soma de probabilidades, e uma redução significativa da percentagem de respostas correctas na determinação da probabilidade condicionada, embora mais de metade dos alunos (54,6%) tenham respondido correctamente. É também na questão de probabilidade condicionada onde se observa uma maior percentagem de alunos a não responderem à questão (9,6%).

Consequentemente, como se observa na Tabela 2, a percentagem de erros é maior no caso da probabilidade condicionada do que no caso das outras duas probabilidades.

Tabela 2. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de erro nas questões da Tarefa 1

Erros	Conteúdo das questões

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \mid C)$
$P(A)$		0,4	**19,3**
$P(B)$	–		0,4
$P(A \mid C)$	1,3	–	
$P(C)$	–	1,3	**3,5**
$1/P(A)$	1,3	–	0,9
$1/P(B)$	–	0,9	–
$1/P(A \mid C)$	–	–	0,9
CF ou CP	1,7	**4,5**	3,1
Outras probabilidades	0,9	0,4	1,3
Outros valores	**5,3**	**6,1**	**6,4**
Total	**10,5**	**13,6**	**35,8**

Nota: CF = casos favoráveis; CP = casos possíveis.

O erro predominante ocorreu no cálculo da probabilidade condicionada, com 19,3% dos alunos a considerarem apenas o acontecimento condicionado A e a ignorarem o acontecimento condicionante C e, consequentemente, a apresentarem a mesma resposta para as questões a) e c), como é o caso do aluno A_{50}.

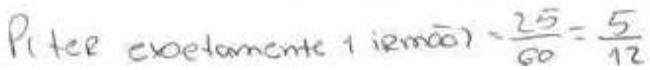


Figura 1. Resposta do aluno A_{50} às questões a) e c).

Contrariamente ao caso anterior, 3,5% dos alunos ignoraram o acontecimento condicionado, calculando assim $P(C)$, como é o caso do aluno A_{19} na questão c).

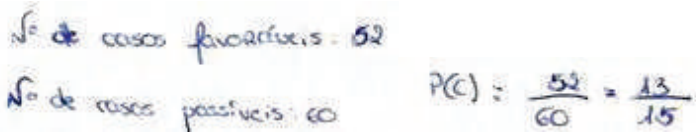


Figura 2. Resposta do aluno A_{19} à questão c).

Na categoria *CF ou CP* a razão de probabilidade apresentada contém apenas um erro relativo ou aos casos favoráveis ou aos casos possíveis, como é exemplo disso a resposta do aluno A_{203} que apresenta $P(B) = 30/60$ na questão b), resultado de uma identificação incorrecta do número de casos favoráveis ao acontecimento B.

Na categoria *Outras probabilidade*s foram incluídas as respostas dos alunos que consideram uma probabilidade, diferente das explicitadas na Tabela 2, mas com significado no contexto do problema, como é o caso do aluno A_{147} que, na questão c), apresentou o valor de $P(\overline{C})$.

Por oposição às categorias antes referidas, considerou-se a categoria *Outros valores*, onde foram incluídas respostas como a do aluno A_{136} que na questão a) apresenta para $P(A)$ a resposta $1/25$, entendida como a razão entre o valor da variável *número de irmãos* (1) e *o número de estudantes com 1 irmão* (25). Trata-se, portanto, de respostas sem sentido na situação apresentada. Nesta categoria 1,3% dos alunos apresentaram a mesma resposta (errada) para $P(A)$ e $P(A|C)$, aspecto que poderá indiciar que estes alunos também ignoraram o acontecimento condicionante C na obtenção de $P(A|C)$.

3.2. Leitura de dados numa tabela de contingência

Com a questão a) da tarefa 2 pretendia-se averiguar sobre o significado atribuído pelos alunos aos números 14, 10 e 6 da tabela de contingência apresentada. O apelo à leitura destes valores relaciona-se com a sua importância no cálculo das probabilidades da questão b).

Tarefa 2

Escolheram-se, ao acaso, 25 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles se praticava ou não desporto. Os dados obtidos foram registados, segundo o sexo dos estudantes, no quadro seguinte.

	Rapariga	Rapaz	Total
Pratica desporto	8	6	14
Não pratica desporto	7	4	11
Total	15	10	25

a) No quadro anterior, o que representa: O número 14? O número 10? O número 6?

Na leitura da tabela de contingência, quase todos os alunos interpretaram correctamente o significado dos números 14, 10 e 6, tendo sido obtidas as percentagens de respostas correctas 96,9%, 94,8% e 97,8%, respectivamente.

3.3. Cálculo de probabilidades numa tabela de contingência

Na segunda parte da tarefa 2, partindo de uma tabela de contingência, pedia-se aos alunos para calcularem quatro probabilidades: uma probabilidade simples na 1.ª pergunta; uma probabilidade conjunta na 2.ª pergunta; e uma probabilidade condicionada e a sua transposta, respectivamente, na 3.ª e 4.ª perguntas. A tarefa tem um formato similar à que foi usada nos estudos de Estrada e Díaz (2006) e Contreras et al. (2011), variando o contexto e a grandeza dos valores das frequências.

Tarefa 2

b) Escolhe-se, ao acaso, um estudante do grupo dos 25 estudantes.
Qual a probabilidade de que esse estudante seja rapaz?
Qual a probabilidade de que esse estudante seja rapaz e pratique desporto?
Sabe-se que o estudante pratica desporto. Qual a probabilidade de ser rapaz?
Sabe-se que o estudante é rapaz. Qual a probabilidade de praticar desporto?

Na Tabela 3 apresentam-se as percentagens de respostas correctas, erradas e não respostas em cada pergunta da questão b), envolvendo o cálculo das probabilidades $P(R)$, $P(R \cap D)$, $P(R \mid D)$ e $P(D \mid R)$, sendo os acontecimentos *R*: ser rapaz e *D*: praticar desporto.

Tabela 3. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de resposta à questão b) da Tarefa 2

Conteúdos	Respostas		Não respostas
	Correctas	Erradas	
$P(R)$	90,8	7,9	1,3
$P(R \cap D)$	74,7	22,3	3,0
$P(R \mid D)$	71,2	27,1	1,7
$P(D \mid R)$	65,5	31,9	2,6

Da observação da Tabela 3 conclui-se ter havido uma elevada percentagem de acertos em todas as perguntas da questão b), embora se verifique uma diminuição progressiva da percentagem de respostas correctas ao longo das quatro perguntas.

Comparativamente com as questões da tarefa 1, registou-se uma melhoria dos resultados, com especial destaque para o cálculo da probabilidade condicionada, cuja percentagem de respostas correctas passa de 54,6% para 68,4% (considerando a média das percentagens de respostas correctas obtidas no cálculo da probabilidade condicionada $P(R \mid D)$ e da sua transposta $P(D \mid R)$). Também merece destaque a redução da percentagem de não respostas.

Comparativamente com a tarefa 1, por observação da Tabela 4 conclui-se que o aumento das percentagens de respostas correctas nas perguntas de probabilidade condicionada deve-se simultaneamente à diminuição da percentagem de não respostas e à diminuição das percentagens de erros.

Tabela 4. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de erro na questão b) da Tarefa 2

Erros	Conteúdo das questões			
	$P(R)$	$P(R \cap D)$	$P(R \mid D)$	$P(D \mid R)$
$P(R)$		0,4	2,7	2,7
$P(R \cap D)$	0,4		**5,8**	**8,3**
$P(R \mid D)$	–	**5,2**		**7,4**
$P(D \mid R)$	–	**8,0**	2,2	
$P(D)$	0,4	0,4	**5,2**	–
$1/P(R)$	1,8	–	–	–
$1/P(R \cap D)$	–	0,9	–	0,4
$1/P(R \mid D)$	–	0,4	1,8	–
$1/P(D \mid R)$	–	0,4	0,9	2,2
Outras probabilidades	1,3	0,9	1,3	0,9
CF ou CP	1,8	2,2	0,4	4,4
Outros valores	2,2	3,5	**6,8**	**5,6**
Total	**7,9**	**22,3**	**27,1**	**31,9**

Nota: CF = casos favoráveis; CP = casos possíveis.

Da leitura da Tabela 4 destaca-se a dificuldade dos alunos em distinguir a probabilidade conjunta da probabilidade condicionada e em distinguir a probabilidade condicionada $P(R \mid D)$ da sua transposta $P(D \mid R)$. Dado que na categoria *Outros valores* 2,2% dos alunos apresentam a mesma resposta (errada) para $P(R \cap D)$ e $P(R \mid D)$, 1,3% apresentam a mesma resposta (errada) para $P(R \cap D)$ e $P(D \mid R)$ e 2,2% apresentam a mesma resposta (errada) para $P(R \mid D)$ e $P(D \mid R)$, este aspecto também poderá ser um indicador das dificuldades dos alunos na distinção entre estas probabilidades.

Comparativamente com a questão c) da tarefa 1, relativa ao cálculo da probabilidade condicionada $P(A \mid C)$, verifica-se uma redução na percentagem dos erros que resultam de ignorar ou o acontecimento condicionado ou o acontecimento condicionante no cálculo das probabilidades $P(R \mid D)$ e $P(D \mid R)$, embora 5,2% dos alunos ainda tenham ignorado o acontecimento condicionado R no cálculo de $P(R \mid D)$.

Quanto ao erro que resulta de considerar o inverso da resposta numérica correcta (embora pouco expressivo nas tarefas 1 e 2), ele ocorre em percentagens muito

próximas nas duas tarefas. O mesmo se passa em relação aos erros incluídos na categoria *Outros valores* (com maior expressividade nas duas tarefas do que o erro anterior), em que se incluem respostas descontextualizadas ou respostas numéricas absurdas no contexto de probabilidades. São disso exemplo, a resposta $P(R \mid D) = \#D / \#R$, apresentada pelo aluno A_{90}, e a resposta $P(R \cap D) = \#(R \cap D)$, apresentada pelo aluno A_{109}.

4. Conclusão

De uma maneira geral, os alunos revelaram possuir ideias intuitivas correctas sobre o conceito de probabilidade condicionada, quando os dados são apresentados na forma de tabela, pois a maioria dos alunos respondeu correctamente às questões colocadas.

Entre as duas formas de apresentação dos dados, através de uma tabela de frequências simples e de uma tabela de contingência, observaram-se diferenças ao nível da percentagem de respostas correctas, com especial destaque na probabilidade condicionada. No caso da tabela de frequências simples, a dificuldade mais sentida pelos alunos foi a de considerar o condicionamento de C no cálculo de $P(A \mid C)$, calculando simplesmente $P(A)$. No estudo de Fernandes (1999), numa tarefa análoga à tarefa 1, foi obtida uma percentagem de respostas correctas semelhante à obtida neste estudo.

Também em relação à tabela de contingência, a dificuldade que mais se destacou foi no cálculo das probabilidades condicionadas, embora neste caso a percentagem de respostas correctas tenha sido superior à obtida no caso da tabela de frequências simples. Talvez esta melhoria nas respostas dos alunos se deva ao facto de, previamente, os alunos terem sido questionados sobre os significados dos dados implicados nas probabilidades. Ainda neste caso, destacaram-se dificuldades em distinguir a probabilidade conjunta da probabilidade condicionada e o erro da *falácia da condicional transposta* (Falk, 1986).

Por outro lado, ainda no caso da tabela de contingência, neste estudo obtiveram-se melhores resultados do que nos estudos de Contreras et al. (2011) e Estrada e Díaz (2006), envolvendo futuros professores do ensino primário. É de salientar que nestes estudos a grandeza dos dados da tabela de contingência era consideravelmente superior.

Além disso, no estudo de Estrada e Díaz foi explorada uma situação contra-intutiva, o que poderá também explicar as menores percentagens de sucesso.

O elevado desempenho dos alunos nas questões em que se pedia para calcular uma probabilidade simples, uma soma de probabilidades e uma probabilidade conjunta mostra que elas têm potencial para serem usadas na sala de aula aquando da leccionação do tema Probabilidades.

Finalmente, os resultados obtidos nas duas tarefas encorajam a possibilidade de introduzir o estudo do conceito de probabilidade condicionada no 9.º ano de escolaridade, pelo menos na forma como foi explorado neste trabalho. Acrescenta-se ainda que as tarefas aqui utilizadas parecem reunir potencial para serem usadas na introdução deste conceito, enfatizando a leitura dos dados das tabelas antes de calcular probabilidades.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151-169.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 9th to 13th February 2011.

Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploration study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education, CD-ROM.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, J. A., & Fernandes, M. C. (2010). Influência do ensino no raciocínio de alunos do 12.º ano em probabilidade condicionada. In H. Gomes, L. Menezes, & I. Cabrita (Orgs.), *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 315-329). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, CD-ROM.

Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. C., & Contreras, J. M. (2011). Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12.º ano através do ensino. *Actas da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York, NY: Springer.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1976). *Da lógica da criança à lógica do adolescente: Ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora.

Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255 – 269.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In J. Graham (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.

DIFICULDADES NA COMPREENSÃO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA: UM ESTUDO COM ALUNOS UNIVERSITÁRIOS

Ana Henriques
CINAV, Escola Naval e Unidade de Investigação do Instituto de Educação,
Universidade de Lisboa
henriques.anaclaudia@gmail.com

Resumo

Nesta comunicação apresento os resultados de um estudo exploratório que visa analisar as dificuldades que os alunos apresentam na compreensão do conceito de intervalo de confiança. As respostas obtidas, através de um questionário aplicado a 33 alunos universitários, indicam que a maioria dos alunos compreende o conceito de intervalo de confiança mas revelam várias dificuldades conceptuais e procedimentais, algumas delas já identificadas em investigações prévias.

Palavras-chave: Estatística, Intervalo de confiança, Ensino Superior

Introdução

Nos últimos anos, o ensino e aprendizagem da Estatística tem adquirido uma grande importância devido ao seu reconhecido papel na educação geral dos cidadãos, como evidenciam diversos documentos programáticos (NCTM 2000; Ministério da Educação 2007). Esta crescente atenção teve como consequência o desenvolvimento de investigação relacionada com a melhoria do ensino e aprendizagem da disciplina. Em particular, os estudos sobre as dificuldades que os alunos revelam em relação a determinados conceitos, na realização de tarefas estatísticas, permitem um olhar mais compreensivo sobre os seus raciocínios e são essenciais para a construção de situações didácticas que permitam ultrapassar os obstáculos cognitivos identificados (Garfield & Gal, 1999; Shaughnessy, 2007).

Os intervalos de confiança têm um papel central nas disciplinas introdutórias de Estatística, tanto no ensino secundário (Silva, Martins, Martins & Loura, 2001) como no universitário (Olivo, 2008). No entanto, é um conceito que traz dificuldades de compreensão acrescidas aos alunos (Shaughnessy, 2007). Apesar de serem proficientes a construírem o intervalo de confiança, utilizando fórmulas e realizando cálculos, é difícil para os estudantes compreenderem o conceito, uma vez que não lhe dão significado. E, ainda que a competência de cálculo possa ser suficiente em muitos contextos escolares elementares, numa sociedade que cada vez mais exige uma literacia quantitativa, os cidadãos beneficiam mais da capacidade de interpretar números do que

da capacidade de os calcular. Por isso é fundamental que os alunos aprendam os conceitos estatísticos mais importantes de uma forma que seja significativa para eles.

Este estudo tem como objectivo descrever e analisar as dificuldades que os alunos universitários apresentam relacionadas com o conceito de intervalo de confiança. Pretende ainda verificar se as dificuldades identificadas são específicas do contexto educativo destes alunos ou se são comuns a outros estudos anteriores, contribuindo, assim, para a difusão de resultados de investigação relacionados com as dificuldades conceptuais dos alunos, as quais ainda não são suficientemente conhecidas dos professores.

Intervalos de confiança: investigações prévias

O intervalo de confiança é um dos procedimentos gerais de inferência estatística que pode aplicar-se a diversos campos de problemas (Cumming & Fidler, 2005; Callaert, 2007). Os mais utilizados são: a) Estimação de parâmetros desconhecidos de uma população; b) Comparação de distribuições; c) Teste de hipóteses sobre parâmetros populacionais; d) Determinar o tamanho de amostra adequado para realizar uma inferência; e e) Determinar limites de tolerância. Cada um destes campos é muito alargado e variado e incluem a estimação de médias, proporções, variâncias, parâmetros de regressão e correlação. Também encontramos muitas condições e pressupostos diferentes, dependendo do parâmetro. Por exemplo, ao estimar a média podemos distinguir os casos de variâncias conhecidas ou desconhecidas, variâncias iguais ou não, amostras grandes e pequenas, populações normais ou não. Dependendo destes pressupostos e restrições, a distribuição de amostragem usada na construção do intervalo de confiança é diferente e, consequentemente, existe uma variedade de distribuições de probabilidade, tais como, por exemplo: a normal, t-student, Qui-quadrado e F, que os estudantes devem aprender e relacionar com as condições do problema. Procedimentos, tais como calcular probabilidades e valores críticos, transformações lineares ou funcionais são também necessários. O intervalo de confiança é, assim, considerado um conceito complexo e de difícil compreensão, pois engloba diversos problemas, definições, propriedades, procedimentos e argumentos que o aluno tem que conhecer de antemão para abordar o seu estudo.

As dificuldades manifestadas pelos alunos na compreensão dos intervalos de confiança foram o foco de diversos trabalhos de investigação. Cumming e Fidler (2005)

consideram que alguns erros dos alunos podem estar relacionados com o facto de muitos estudantes visualizarem os intervalos de confiança como um objecto estatístico descritivo, no sentido de conter valores possíveis do parâmetro amostral ou de ser um intervalo de valores individuais e não como um objecto estatístico inferencial que fornece informação sobre o valor do parâmetro. Também parecem não compreender a utilidade dos intervalos de confiança para tomar decisões sobre hipóteses, possivelmente por não considerarem os valores do intervalo como um conjunto de valores plausíveis do parâmetro.

Noutros estudos (Behar, 2001; Fidler, 2005) também tem sido referido que os estudantes não sabem quais são as relações directas ou inversas entre a amplitude do intervalo, o tamanho amostral e o grau de confiança, observando-se uma fragilidade conceptual na compreensão das relações entre estes conceitos associados aos intervalo de confiança. De facto, no estudo de Fidler (2005), apenas 16% dos estudantes universitários examinados responderam que o aumento da amostra diminui a amplitude do intervalo. Por outro lado, 73% destes alunos responderam que um intervalo de 90% de confiança tem maior amplitude que o de 95%, apesar de terem frequentado uma disciplina anual de introdução à Estatística onde este tópico tinha sido abordado.

Olivo e Batanero (2007) avaliaram a compreensão de estudantes mexicanos de Engenharia sobre os intervalos de confiança e identificaram, além das dificuldades já referidas, outras relacionadas com a selecção da distribuição de amostragem necessária à construção do intervalo e erros na determinação dos valores críticos.

Método

Com o objectivo de avaliar as dificuldades dos alunos na compreensão, cálculo e interpretação de intervalos de confiança foi aplicado um questionário a 33 alunos do 2.º ano da Escola Naval, que frequentaram uma disciplina introdutória de Estatística leccionada pela autora. O conceito de intervalo de confiança foi apresentado aos alunos, de modo expositivo e numa aula de 100 minutos, após a qual tiveram oportunidade de resolver exercícios e problemas para consolidação de conceitos e procedimentos. Do total de alunos, 4 eram do sexo feminino, 29 do sexo masculino e destes, apenas 6 estavam a repetir a disciplina, pelo que eram os únicos que já tinham tido contacto com intervalos de confiança.

O questionário foi aplicado numa das últimas aulas do semestre (Maio de 2011) e realizado durante 1 hora, após o tópico ter sido abordado. Os alunos tiveram conhecimento prévio da sua realização e puderam preparar o tópico.

O questionário utilizado (ver Anexo) é composto por 10 questões de escolha múltipla, em que os alunos são solicitados a seleccionar a única resposta correcta. Estas questões estão relacionadas tanto com a natureza conceptual dos intervalos de confiança como com as relações entre o seu tamanho e o grau de confiança, o tamanho da amostra e a variabilidade da população (ver Tabela 1). O questionário contém, igualmente, três problemas para os quais os alunos apresentam uma resolução escrita, com objectivo de avaliar as suas estratégias de resolução e argumentação. A questão 1 avalia o conhecimento da definição de intervalo de confiança. As questões 2 e 3 avaliam o conhecimento procedimental da construção de intervalos de confiança (para a média de uma população normal com desvio padrão desconhecido e para a variância).

As questões que compõem este questionário foram retiradas de Olivo e Batanero (2007), que as utilizaram para avaliar a compreensão de intervalos de confiança dos estudantes mexicanos de Engenharia. Para permitir uma análise comparativa com os resultados obtidos por estes autores, as respostas dos alunos às três questões abertas foram analisadas utilizando os mesmos critérios e classificadas relativamente à sua correcção:

- *Resposta correcta* – Na questão 1, o aluno inclui na sua definição os elementos essenciais e utiliza correctamente os conceitos envolvidos (estimação pontual, parâmetro, amostra, população, intervalo de confiança, aleatório e grau de confiança). Além disso, evidencia compreender o carácter aleatório dos limites do intervalo. Nas questões 2 e 3, o aluno determina o intervalo para o parâmetro indicado, empregando a distribuição amostral adequada, encontra correctamente o valor crítico usando as tabelas e a partir daí determina os dois limites do intervalo, manifestando compreender a relação do valor crítico com o grau de confiança. O aluno ainda usa correctamente as expressões simbólicas e evidencia compreender que os intervalos se referem ao parâmetro da população. Recorda as probabilidades necessárias para calcular o intervalo, substitui os dados do problema e, finalmente, leva a cabo várias operações algébricas com inequações para chegar ao intervalo pedido.

- *Resposta parcialmente correcta* – Na questão 1, o aluno define correctamente apenas um dos conceitos ou apresenta definições incompletas. Nas questões 2 e 3, o aluno seleciona a distribuição amostral adequada e utiliza de forma correcta o procedimento geral de construção de intervalos mas comete alguns erros.
- *Resposta incorrecta* – O aluno não responde ou responde de uma forma incorrecta.

Relativamente à análise de dados, usou-se essencialmente a estatística descritiva para fornecer uma visão geral dos resultados sobre a presença de erros e dificuldades na compreensão dos intervalos de confiança. Para cada item do questionário apresento a proporção de estudantes que responde correctamente. As justificações dos estudantes são de grande importância para indagar a compreensão das situações criadas. Por isso, adicionalmente, nas questões abertas, a análise é complementada com excertos das respostas dos alunos fornecendo evidência empírica sobre a presença e o tipo de erros e dificuldades mais comuns.

Resultados e Discussão

Na Tabela 1 apresenta-se um sumário das respostas às questões de escolha múltipla do questionário, a proporção de respostas correctas (a negrito na tabela) e a descrição do seu conteúdo.

Tabela 1 – Respostas dos alunos às questões de escolha múltipla

Questão	Frequência				Respostas correctas (%)	Conteúdo do item
	A	B	C	D		
1	2	5	**23**	3	70	Definição de intervalo de confiança.
2	0	**26**	3	4	79	Relação entre amplitude do intervalo e tamanho amostral.
3	0	16	**17**	0	52	Relação entre amplitude do intervalo e grau de confiança.
4	7	**18**	3	5	55	Relação entre amplitude do intervalo e grau de confiança.
5	1	**22**	5	5	67	Relação entre amplitude do intervalo e variância.
6	0	**32**	0	1	97	Construção de intervalo de confiança para μ, amostra grande e σ conhecido.
7	2	**31**	0	0	94	Construção de intervalo de confiança para μ, amostra grande e σ desconhecido.
8	8	**22**	3	0	67	Selecção de distribuição amostral adequada.
9	0	**30**	0	3	91	Determinação de valores críticos na distribuição da estatística.
10	0	8	4	**20**	63	Interpretação gráfica de intervalos de confiança para μ_1-μ_2.

Em geral, observa-se que os alunos têm um bom conhecimento do intervalo de confiança, uma vez que todas as questões foram resolvidas correctamente por mais de metade dos alunos estudados e que a percentagem média de respostas correctas foi aproximadamente 74%.

Os alunos revelaram algumas dificuldades na definição de intervalo de confiança. Embora 70% dos alunos tenham respondido correctamente à questão 1, identificaram-se erros na compreensão relativa à inclusão do parâmetro populacional no intervalo em 24% das respostas e 6% dos alunos não compreendeu a inconstância do mesmo tendo em conta a amostra.

Depois de analisar as respostas das questões 2 a 5, focadas nas relações entre grau de confiança, tamanho amostral e variabilidade da população, que em último caso examinam a compreensão do processo de construção dos intervalos de confiança, uma série de factos sobressaem. Na questão 2, cerca de 80% dos alunos conhece a relação correcta entre precisão e tamanho da amostra. No entanto, para aproximadamente 50% dos alunos não está claro qual o efeito do grau de confiança do intervalo na sua amplitude. Na questão 3 as respostas, divididas entre a resposta correcta e a resposta incorrecta contrária a esta, revelam que os alunos reconhecem a influência do tamanho da amostra na amplitude do intervalo, mas têm dificuldade em identificar o sentido dessa relação (directa ou inversa). Na questão 4 as respostas incorrectas distribuem-se pelas várias opções. Uma grande parte destes alunos (21%) indica uma relação no mesmo sentido entre a amplitude do intervalo e o tamanho da amostra, confirmando as dificuldades já verificadas na questão anterior. Uma percentagem inferior de alunos (9%) revela dificuldades em compreender o efeito da variância da população na amplitude do intervalo. Este resultado é consistente com as respostas obtidas na questão 5, que avalia também esta relação e em que a percentagem de respostas correctas se situa nos 67%. As dificuldades nesta questão repartem-se entre considerar que o aumento da variância faz diminuir a amplitude do intervalo ou a deixa igual. Assim, podemos afirmar que os alunos revelaram muitas dificuldades nas questões relacionadas com os factores que influenciam a amplitude do intervalo.

As questões 6, 7 e 9 salientam-se pelo elevado número de respostas correctas (acima dos 90%) o que, segundo Muñiz (1994), indicia a facilidade que os alunos têm na sua resolução. O único aluno que respondeu incorrectamente à questão 6 não mostrou dificuldade na construção do intervalo pois, de forma correcta, escolheu a distribuição

amostral e determinou o valor crítico correspondente ao grau de confiança pedido. O erro teve origem na leitura da tabela da distribuição normal, como se mostra no excerto seguinte do seu trabalho:

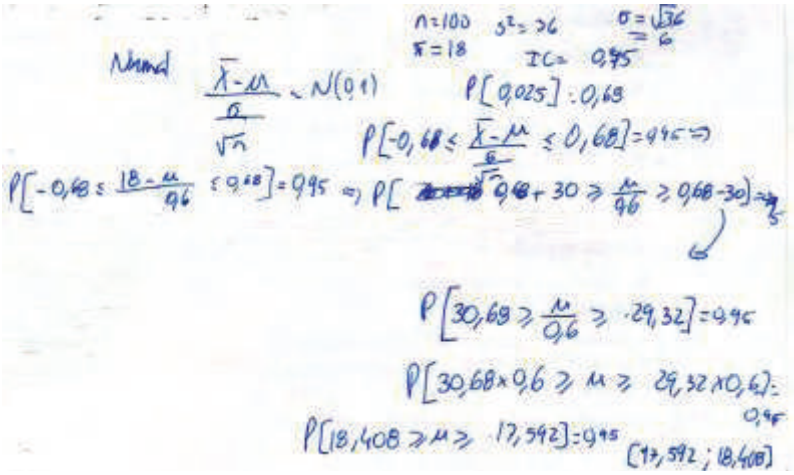


Figura 1 – Resposta do aluno A22 à questão fechada 6

Este aluno voltou a cometer o mesmo erro na questão 7, onde se observaram apenas duas respostas incorrectas. De facto, só um aluno seleccionou a distribuição t-student, apesar do tamanho da amostra ser grande e poder usar a aproximação a uma distribuição normal na construção do intervalo. No entanto, este aluno executou todo o procedimento de construção do intervalo de forma correcta, não evidenciando dificuldades neste processo.

Como esperado, estes resultados confirmam um significativo conhecimento procedimental na construção de intervalos de confiança para a média. Por isso, não é de admirar que os alunos tenham revelado também facilidade na determinação do valor crítico da distribuição da estatística na questão 9. Apenas 3 alunos determinaram o valor crítico acumulando o coeficiente de 0,90 só na parte inferior da distribuição, apesar deste erro não se ter verificado na construção dos intervalos nas questões anteriores. Esta dificuldade pode ter a ver com o facto dos alunos não terem que escrever a expressão do intervalo e, por isso, não se apercebem dos seus dois lados.

Um terço dos alunos respondeu de forma incorrecta à questão 8, demonstrando desconhecimento sobre a distribuição amostral adequada ao cálculo do intervalo de confiança para a variância de uma população. A análise das respostas erradas revela que 24% dos alunos selecciona a distribuição t-student associada ao facto do enunciado referir amostras pequenas, havendo uma clara confusão com a distribuição amostral utilizada na construção de intervalos de confiança para o valor médio. A escolha da

distribuição normal em 9% dos casos também pode ter origem na confusão com o indicado no enunciado sobre a distribuição da população ser normal. Parece, pois, que as dificuldades não se limitam à escolha da distribuição amostral para a variância, sendo também relativas às distribuições de amostragem em geral.

A questão 10 dá ênfase à interpretação de resultados relativos a duas amostras distintas e 63% dos alunos responderam correctamente, não revelando grande dificuldade na leitura e interpretação do gráfico. A resposta errada mais frequente está relacionada com a confusão que os alunos fazem entre a precisão do intervalo e a sua amplitude. Apesar das outras duas opções a) e c) parecerem contrárias e, por isso, poderem dividir as respostas erradas, nenhum aluno seleccionou a primeira opção e 12% optou pela c). Esta incoerência aparente pode evidenciar que os alunos compreendem que o intervalo de confiança se refere ao parâmetro populacional, uma vez que na primeira opção se dá relevo à diferença entre médias amostrais. As dificuldades destes alunos podem ser devidas a uma compreensão errada da inferência sobre as médias populacionais ou à falta de atenção na leitura do enunciado.

A tabela seguinte apresenta um sumário das respostas dos alunos às questões abertas do questionário, relativamente à sua correcção.

Tabela 2 – Respostas dos alunos às questões abertas

	Item 1		**Item 2**		**Item 3**	
Resposta	**frequência**	**%**	**frequência**	**%**	**frequência**	**%**
Incorrecta	17	52	6	18	2	6
Parcialmente correcta	15	45	7	21	16	49
Correcta	1	3	20	61	15	45

A questão 1 salienta-se pela quase ausência de respostas correctas (apenas 1 aluno respondeu de forma considerada correcta) e por uma grande percentagem de respostas incorrectas (52%), sendo que 27% destes alunos não chega a responder à questão. A falta de compreensão de alguns conceitos, aliada à competência de comunicação escrita pouco desenvolvida, pode justificar a grande dificuldade que os alunos revelaram nas suas respostas.

Nas respostas consideradas incorrectas, os alunos apresentam definições bastante confusas, sem fazerem referência a nenhum elemento essencial do conceito (por exemplo, estimação ou parâmetro) e utilizam termos incorrectos, como mostram os exemplos seguintes:

> *Uma estimação pontual é estimação que se faz para um certo grupo obtendo um valor em concreto de estima. Um intervalo de confiança é uma maneira diferente de estimar, mas neste caso através de um intervalo onde neste se encontram vários valores possíveis de estima.* (A9)
>
> *A estimação pontual é quando estimamos um valor para um ponto, enquanto que o intervalo de confiança são um conjunto de valores onde podem estar os valores.* (A17)

Os alunos que deram uma resposta parcialmente correcta revelaram vários tipos de dificuldades. Alguns alunos definem apenas um dos conceitos ou dão definições incompletas e com algumas incorrecções (pouco rigorosas), como as seguintes:

> *A principal diferença é que numa estimação pontual não temos em conta o erro, apresentando apenas uma hipótese. Num intervalo de confiança, temos em conta o erro e apresentamos um intervalo de valores associado a uma certeza de que este contém o parâmetro populacional.* (A4)
>
> *Estimação pontual é o valor certo que podemos obter de um determinado parâmetro em estudo sem erro. O intervalo de confiança dá-nos um intervalo onde esse parâmetro em estudo pode estar com alguma margem de erro.* (A32)

Além disso, observou-se que de um modo geral os alunos tiveram mais facilidade em definir estimação intervalar do que pontual.

Outros alunos concretizam a definição de intervalo de confiança para um parâmetro particular, sempre para a média, talvez por lhes ser mais familiar, ou descrevem o procedimento para encontrar as respectivas estimativas:

> *Na estimação pontual estamos a falar de um valor só, isto é, a média, por exemplo, é 7. Enquanto que um intervalo de confiança apresenta um intervalo de valores possíveis.* (A3)
>
> *Estimação pontual é usada para calcular a média pela seguinte fórmula (...). Com esta estimação não podemos saber se está certo ou não realizarmos os cálculos com base na amostra. Estimação intervalar sabemos que pelo menos 90%, 95% ou 99% daquele intervalo estáar certo, ou seja, o parâmetro tem 90%, 95% ou 99% de estar naquele intervalo. Temos a certeza que o valor está naquele intervalo.* (A29)

Na única resposta que foi considerada correcta, o aluno inclui os elementos essenciais à definição de intervalo de confiança, utiliza correctamente os conceitos de estimação pontual, parâmetro e população e evidencia compreender o carácter aleatório dos limites do intervalo:

> *Uma estimação pontual utiliza os valores da amostra de uma população, esta pode-se aproximar dos valores verdadeiros, mas não é possível justificar que estão 100% correctos. Enquanto que o intervalo de*

confiança apresenta um intervalo de valores possíveis para o parâmetro de uma população e uma percentagem de intervalos que o cobrirão. (A8)

Na questão 2 há 61% de alunos que respondem de forma correcta. As sete respostas parcialmente correctas (21%) nesta questão apresentaram o mesmo e único erro: os alunos não relacionam o valor crítico com o grau de confiança, como mostra o exemplo seguinte.

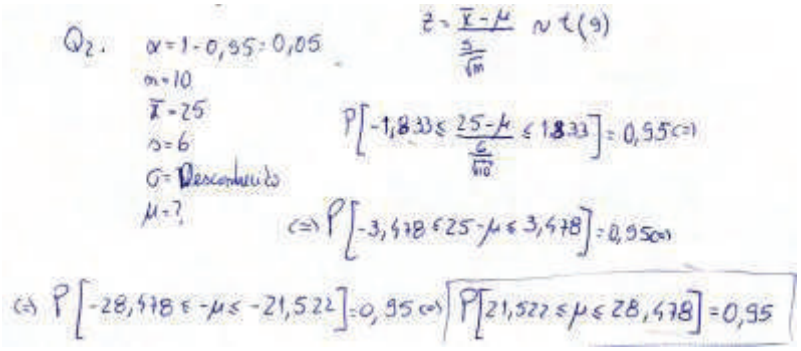


Figura 2 – Exemplo de resposta parcialmente correcta à questão aberta 2 (A2)

Nestas respostas, os alunos seleccionaram a distribuição de amostragem adequada (t-student para amostras pequenas), usaram correctamente as expressões simbólicas e através de operações algébricas e das propriedades necessárias chegaram às inequações que permitiram determinar o intervalo pedido após a substituição dos dados do problema. Em nenhuma das respostas se observaram erros na determinação dos graus de liberdade.

As respostas incorrectas (18%) não se deveram a erros cometidos na aplicação do procedimento de construção de intervalos, mas possivelmente à leitura menos atenta do enunciado ou à confusão com a questão 3 seguinte, pois todos estes alunos construíram um intervalo de confiança para a variância. Deste modo não responderam ao que é pedido. O exemplo seguinte mostra uma resposta típica desta situação:

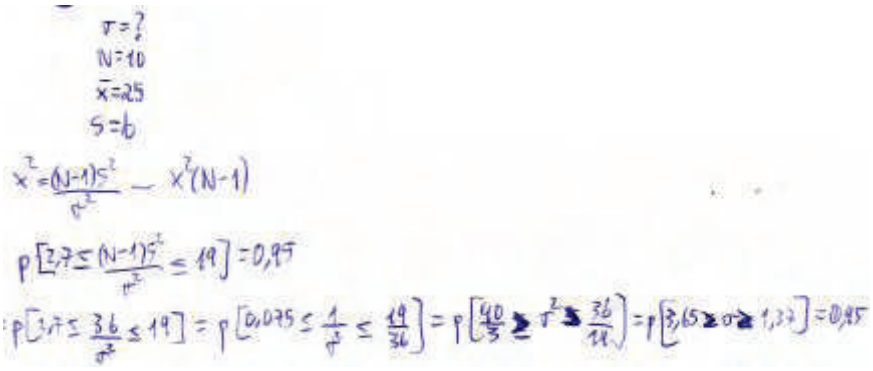


Figura 3 – Exemplo de resposta incorrecta à questão aberta 2 (A13)

Ainda assim, os alunos foram capazes de identificar no enunciado todos os dados que precisaram para construir o intervalo para o parâmetro em causa e, deste modo, os intervalos construídos estão maioritariamente correctos.

Quanto à questão aberta 3, menos de metade dos alunos respondeu correctamente (45%) e os erros identificados nas respostas parcialmente correctas foram variados. Assim, tal como na questão anterior, alguns alunos (3) não relacionaram o valor crítico com o grau de confiança, como mostra o exemplo seguinte:

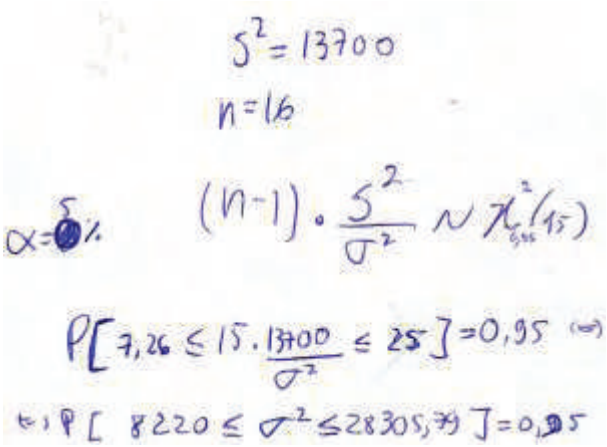


Figura 4 – Exemplo de resposta parcialmente correcta à questão aberta 3 (A24)

A maioria das respostas parcialmente correctas (6 alunos) deve-se ao facto dos alunos não terminarem o problema, tal como no exemplo anterior. Depois de encontrado o intervalo de confiança para a variância era necessário dar resposta ao problema indicando um intervalo de confiança para o desvio padrão. Os alunos parecem terem-se esquecido deste último passo:

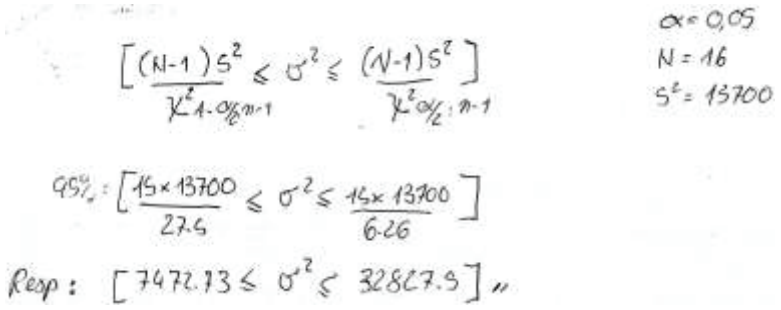


Figura 5 – Exemplo de resposta parcialmente correcta à questão aberta 3 (A15)

Dois alunos cometeram erros na resolução das inequações, apesar de todo o processo anterior de construção do intervalo ter sido realizado sem erros:

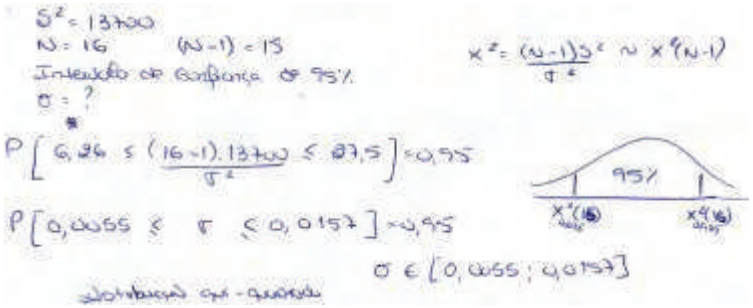


Figura 6 – Exemplo de resposta parcialmente correcta à questão aberta 3 (A23)

Nas duas respostas consideradas incorrectas (6%), um dos alunos confundiu a distribuição amostral, escolhendo a normal sem executar mais nenhum procedimento, acabando por não responder à questão. O outro aluno só recordou um limite da fórmula do intervalo de confiança para a variância, como se mostra a seguir:

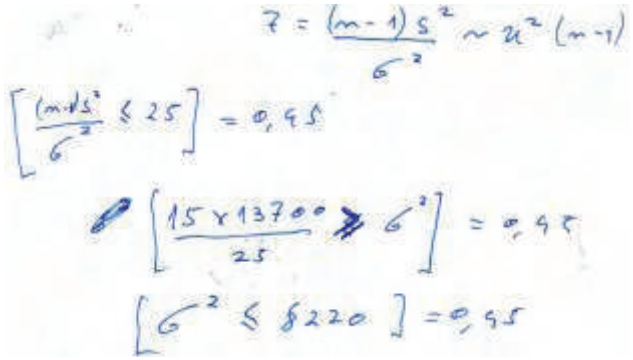


Figura 7 – Exemplo de resposta incorrecta à questão aberta 3 (A20)

O aluno soube identificar o nível de significância a usar para obter o valor crítico da distribuição do Qui-quadrado. Usa a tabela correctamente mas confunde os graus de liberdade. Leva a cabo correctamente várias operações algébricas mas não finaliza a solução e não responde ao problema.

Conclusões

Os resultados deste estudo exploratório sugerem que, de um modo geral, os alunos compreendem o conceito de intervalo de confiança, reconhecem as suas propriedades e têm facilidade na sua construção. No entanto, alguns cometem vários erros e revelam algumas dificuldades (conceptuais, procedimentais e interpretativas) em relação ao intervalo de confiança que foram já identificadas por outros autores, nomeadamente as descritas em Olivo e Batanero (2007).

De facto, as questões procedimentais foram aquelas onde os alunos revelaram um bom desempenho, com resultados bastante superiores aos observados por Olivo e Batanero

(2007). Pelo contrário, a definição de intervalo de confiança revelou ser uma questão difícil para os alunos, à qual muitos nem responderam. Tal como em Cumming e Fidler (2005) e Behar (2001), os alunos parecem não compreender a inconstância do intervalo de confiança em relação à amostra, nem o vêm como um objecto estatístico inferencial que fornece informação sobre o valor do parâmetro.

Os erros mais frequentes focam-se nas relações entre precisão do intervalo e outros elementos associados ao conceito (tamanho de amostra, grau de confiança, variabilidade populacional) e na dificuldade de compreender que o mesmo se refere à estatística e não ao parâmetro. Apesar das dificuldades observadas, a comparação com as investigações de Fidler (2005) e de Olivo e Batanero (2007), com alunos do mesmo nível de ensino, aponta para que a percentagem de estudantes a cometerem erros neste estudo seja, em geral, mais baixa. Verificaram-se, igualmente, dificuldades na selecção da distribuição amostral e na determinação de valores críticos que podem ter a ver com a falta de compreensão dos alunos sobre distribuições de probabilidade e/ou a sua relação com os intervalos de confiança. Estes resultados são consistentes com os referidos em Olivo e Batanero (2007), embora menos frequentes.

Assim, os resultados parecem indicar que as dificuldades dos alunos sobre o conceito de intervalo de confiança não são específicas dos sistemas educativos onde eles estão inseridos. Este facto evidencia a necessidade de investigação futura em duas orientações distintas. Por um lado, é necessário continuar a realizar estudos comparativos e longitudinais sobre a avaliação da compreensão dos alunos sobre diferentes conceitos envolvidos na inferência estatística e as causas das suas possíveis dificuldades. Por outro, é fundamental desenvolver instrumentos pedagógicos para confrontar os alunos com as suas dificuldades e incompreensões para os ajudar a ultrapassá-las.

Referências

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Callaert, H. (2007). Understanding confidence intervals. CERME5.

Cumming, G., & Fidler, F. (2005). *Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions*. IASE/ISI Satellite.

Fidler, F. (2005). *From Statistical Significance to Effect Estimation*. Doctoral Thesis, University of Melbourne, Victoria.

Garfield, J. B., & Gal, I. (1999). Teaching and assessing statistical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (1999 Yearbook, pp. 207-219). Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Ediciones Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics (2000*). Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Olivo E. (2008). Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Olivo E., & Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *Union, 12*, 37-51.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics.

Silva, J. C., Martins, M. E. G., Martins, A. A., & Loura, L. C. C. (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: ME.

Anexo – Questionário

Parte I

Nas questões seguintes, de escolha múltipla, assinale com um círculo a opção verdadeira e justifique a sua opção nas questões assinaladas.

1. Num intervalo de confiança:
a. Pode-se mudar de amostra que o intervalo se mantém constante.
b. Apresenta-se um conjunto de valores dentro dos quais se situa de certeza o parâmetro.
c. Indica um intervalo de valores possíveis para o parâmetro e uma percentagem de intervalos que cobrirão, aproximadamente o referido valor, para o mesmo tamanho de amostra.
d. Contém sempre o parâmetro populacional.

2. Consideram-se duas amostras diferentes de uma população onde a media populacional e o desvio padrão são desconhecidos. A primeira amostra tem 25 dados e a segunda amostra 64 dados. Constrói-se um intervalo de confiança de 95% para cada amostra para estimar a media populacional. Que intervalo de confiança espera que tenha maior precisão?
a. Espero que ambos intervalos de confiança tenham a mesma precisão.
b. Espero que o intervalo de confiança baseado numa amostra de 64 dados seja mais preciso.
c. Espero que o intervalo de confiança baseado na amostra de 25 dados seja mais preciso.
d. Não posso determinar qual dos dois terá maior precisão.

3. Se reduzirmos o nível de confiança (por exemplo de 90% para 80%), mantendo todos os demais dados fixos:
a. O intervalo de confiança não muda.
b. O intervalo de confiança terá maior amplitude.
c. O intervalo de confiança terá menor amplitude.
d. A mudança no intervalo de confiança não é perceptível.

4. Num intervalo de confiança, a amplitude do intervalo pode ser reduzida:
a. Diminuindo o tamanho da amostra.
b. Baixando o nível de confiança (por exemplo de 0.99 para 0.90).
c. Aumentando o σ_x.
d. Aumentando o tamanho da população.

5. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
a. Se o desvio padrão da população diminui, a amplitude do intervalo de confiança não muda.
b. Se o desvio padrão da população diminui, a amplitude do intervalo de confiança diminui.
c. Se o desvio padrão da população aumenta, a amplitude do intervalo de confiança diminui.
d. Se o desvio padrão da população aumenta, a amplitude do intervalo de confiança não muda.

6*. A média amostral de 100 observações numa prova de Matemática é 75. Encontre o intervalo de confiança a 95% para a média da população, assumindo que σ =7. *Apresente todos os cálculos e raciocínios que efectuar.
a. [61.28, 88.72].
b. [73.63, 76.37].
c. [68, 82].
d. [74.3, 75.7].

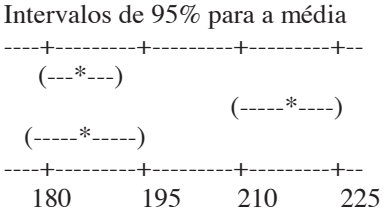
7*. Obtiveram-se os seguintes dados da emissão diária de óxidos de enxofre, para uma amostra de tamanho n = 100, média $\overline{x}$ = 18 e s^2 = 36. Construa um intervalo de confiança de 95% para a verdadeira emissão média diária de óxidos de enxofre. *Apresente todos os cálculos e raciocínios que efectuar.
a. [17.016, 18.984].
b. [16.824, 19.176].
c. [6.24, 19.76].
d. [8.16, 27.84].

8. A distribuição amostral utilizada na construção de intervalos de confiança para a variância em amostras pequenas, tomadas de uma população normal, é:
a. Distribuição t de Student
b. Distribuição Qui-quadrado
c. Distribuição Normal
d. Distribuição F

9. Ao calcular um intervalo de confiança de 90% para a média populacional, para um grupo de pontuações distribuído normalmente, poderia usar um valor z de:
a. 1.96
b. 1.65
c. 0.90
d. 1.29

10. Considere a tabela e o gráfico seguintes com dados referentes ao rendimento médio de cevada em 1980, 1984 e 1988 e respectivos intervalos de 95% de confiança:

Ano	N	Média	Desvio Padrão
1980	6	184.00	2.61
1984	5	212.40	14.36
1988	5	182.40	1.82



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
a. Uma vez que os intervalos de confiança para 1980 e 1988 têm considerável sobreposição, há uma forte evidência que as médias das amostras diferem.
b. A estimação da média da população em 1980 é menos precisa que em 1988.
c. Uma vez que os intervalos de confiança para 1980 e 1984 não se sobrepõem, há pouca evidência que as médias das populações respectivas difiram.
d. Uma vez que os intervalos de confiança para 1980 e 1988 têm considerável sobreposição, há pouca evidência que as médias das populações difiram.

Parte II

1. Explique, por palavras suas, a diferença entre uma estimação pontual e um intervalo de confiança.

2. Construa um intervalo de confiança a 95% para a média de uma população normal de desvio padrão σ desconhecido se numa amostra de tamanho 10, a média amostral é $\overline{x} = 25$ e o desvio padrão é $s = 6$.
3. Seja σ^2 a variância da distribuição da tensão disruptiva. O valor calculado da variância amostral é $s^2 = 13700$, n = 16. Calcular o intervalo de confiança de 95% para σ.

SIMPÓSIO 4

AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS EM MATEMÁTICA

AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS EM MATEMÁTICA

Leonor Santos
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
leonor.santos@fc.ul.pt

A existência de um simpósio dedicado a estudos sobre a avaliação das aprendizagens matemáticas é de enorme importância, uma vez que poderá constituir um incentivo para o desenvolvimento da investigação nesta área em Portugal. Esta necessidade não se faz sentir apenas a nível nacional, mas também a nível internacional, como se pode comprovar da leitura de actas de encontros internacionais, entre os mais relevantes na Educação Matemática, como seja o PME (Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education) e o *CERME* (Conference of European Society for Research in Mathematics Education).

A relevância de estudos sobre a avaliação das aprendizagens em Matemática é reforçada quando surgem novas orientações curriculares que implicam novas aprendizagens matemáticas. A aprendizagem matemática de que hoje se faz apelo é muito mais complexa do que no passado. Não basta que os alunos adquiram conhecimentos. Espera-se que desenvolvam diversas capacidades e que as mobilizem em contextos vários, de forma confiante e com compreensão. Mas tais orientações implicam necessariamente a renovação de práticas lectivas e, em particular, de práticas avaliativas. É esta a situação que vivemos em Portugal, tanto no Ensino Secundário como, mais recentemente, no Ensino Básico. Deste modo, não se pode dizer que este tema toma particular relevância num ou noutro ciclo de escolaridade. O desenvolvimento curricular em Matemática que se tem vivido em Portugal, na última década, abrange todos os anos de escolaridade. Assim, estudos sobre a compreensão do que se entende hoje por avaliar, as suas funções e formas de concretização na sala de aula de Matemática, quer no que há de transversal, quer de específico de acordo com as aprendizagens matemáticas esperadas, são certamente indispensáveis. Acreditamos, ainda, que o acréscimo de estudos sobre a avaliação poderá contribuir para o desenvolvimento de uma cultura de avaliação no ensino e aprendizagem da Matemática preocupada com os conceitos, as práticas e o sentido com que são realizadas. Isto é, a

investigação em avaliação é certamente um meio privilegiado para o desenvolvimento de tal cultura.

Quando falamos em avaliação das aprendizagens duas perspectivas nos ocorrem de imediato: a avaliação sumativa e a formativa. Não se diferenciam pelos processos ou instrumentos com que se operacionalizam, nem tão pouco necessariamente pelos momentos em que ocorrem, mas sim nos seus propósitos. Não são as respostas ao "Como?" e "Quando?" que são obrigatoriamente distintas., mas sim ao "Para Quê?". A avaliação sumativa tem uma função selectiva, certificativa e prognóstica, dirigida à orientação do prosseguimento de estudos dos alunos, estando, deste modo, associada à dimensão social da avaliação. Já a avaliação formativa tem por propósito promover a aprendizagem, sendo portanto caracterizada por uma natureza pedagógica. Cumprindo funções distintas, ambas são importantes de ser estudadas. O presente simpósio, embora constituído por um número reduzido de comunicações, responde a esta diversidade de abordagens, apresentando estudos que se dirigem quer a uma, quer a outra, modalidade de avaliação.

Há diversas formas de desenvolver a avaliação sumativa. Contudo, um seu exemplo paradigmático é, sem dúvida, os exames. É, exactamente, no contexto de avaliações externas realizadas no Brasil que Maria Madalena Dullius procura analisar as habilidades e competências necessárias para um bom desempenho nestas provas e verificar se a formação inicial e continuada dos professores contemplam tais habilidades e competências.

Afirmar que o aperfeiçoamento da qualidade da avaliação formativa melhora a aprendizagem é aceite, nos dias de hoje, de forma consensual. Contudo, esta não é uma prática generalizada no quotidiano da sala de aula de Matemática. Compreender quais as características que práticas de avaliação formativa poderão apresentar, bem como os desafios a enfrentar, de forma a serem efectivamente formativas, isto é, contribuírem para a aprendizagem, é o principal propósito das três outras comunicações deste simpósio.

Num contexto de trabalho colaborativo, Paulo Dias e Leonor Santos apresentam parte de um estudo ainda em desenvolvimento, que procura investigar, em particular, certo tipo de experiências matemáticas e a prática de questionamento oral com intencionalidade formativa de um professor de Matemática do ensino secundário, que

procuram em conjunto favorecer o desenvolvimento da auto-regulação das aprendizagens matemáticas, por parte dos alunos.

Ainda num contexto de trabalho colaborativo, Sílvia Semana e Leonor Santos analisam como uma professora de Matemática a leccionar uma turma do 8.º ano de escolaridade, num conjunto de aulas relativas ao tópico *Sequências e Regularidades*, prepara, implementa e avalia, estratégias que visam a apropriação dos critérios de avaliação por parte dos alunos.

Por último, no âmbito da primeira fase de generalização do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, Maria Luísa Vale, Rosa Antónia Ferreira e Leonor Santos apresentam um estudo que procura, por um lado, analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, no tópico *Sequências e Regularidades*, e, por outro, investigar até que ponto o feedback escrito e o questionamento oral, usados pela professora, podem contribuir para levar a aluna a aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los.

Do exposto, poderá concluir-se que cada comunicação incluída neste simpósio apresenta aspectos distintos: o nível de ensino em que ocorre, as práticas avaliativas dos professores, e ainda, nalguns casos, os propósitos de partida dessas mesmas práticas. Contudo, todas elas têm um propósito principal comum: o de contribuírem para uma compreensão profunda de como se aprende Matemática. A avaliação não constitui uma componente isolada e dissociada de todo o processo educativo. Acima de tudo ela é uma parte inseparável de um complexo sistema onde o fim último do acto educativo é a aprendizagem.

Assim, ao longo do simpósio procuraremos criar momentos ricos de discussão e aprofundamento das principais questões relativas à avaliação das aprendizagens matemáticas dos alunos, muito em particular aquelas que forem particularmente significativas e decorrentes das apresentações realizadas. Procuraremos, ainda, que a discussão e a reflexão por ela proporcionada possam contribuir para o surgimento de novos problemas e questões norteadoras de investigações a desenvolver no futuro.

QUESTIONAR PARA AUTO-AVALIAR: A ACÇÃO DO PROFESSOR JOSÉ

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita
paulo.dias.7@gmail.com

Leonor Santos
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
leonor.santos@fc.ul.pt

Resumo

Esta comunicação insere-se no âmbito de uma investigação mais ampla para compreender práticas avaliativas de professores de Matemática do ensino secundário, concebidas em contexto de trabalho de natureza colaborativa, e promotoras da auto-regulação da aprendizagem matemática. Num trabalho prolongado no tempo, procura-se conhecer formas de actuação em aula e tipos de experiências matemáticas, que favoreçam o desenvolvimento da auto-regulação das aprendizagens matemáticas, por parte dos alunos, e os constrangimentos que os professores enfrentam, na sua prática lectiva. Apresenta-se a acção de José, professor do ensino secundário, ao questionar os alunos para promover a auto-avaliação, e contribuir para a auto-regulação das aprendizagens. Durante a aula, José não corrige os erros, mas antes dá pistas, não valida mas antes questiona de forma a ser o próprio aluno a desenvolver argumentos convincentes sobre o seu raciocínio, tendo os alunos um papel activo na construção das suas próprias aprendizagens matemáticas.

Palavras-chave: prática avaliativa; aprendizagem matemática; auto-regulação, ensino secundário.

Introdução

José é um dos professores participantes numa investigação para a obtenção do grau de doutor pelo primeiro autor desta comunicação. Nesse estudo, procura-se compreender as práticas avaliativas de professores de Matemática do ensino secundário, concebidas com o propósito de promover a auto-regulação do aluno face à sua aprendizagem matemática.

É uma investigação realizada ao longo de dois anos lectivos (2008/2009 e 2009/2010) para compreender e aprofundar o conhecimento sobre as formas de actuação do professor de Matemática em sala de aula, os tipos de experiências matemáticas que favorecem o desenvolvimento da auto-regulação da aprendizagem matemática, e os constrangimentos que os professores de Matemática enfrentam aquando da implementação destas práticas. Este estudo ganha pertinência pela necessidade de repensar as práticas uniformes e pobres de avaliação (Abrantes, 2002; Santos, 2005), que não estão de acordo com os documentos curriculares em vigor (Fernandes, 2005; Santos, 2004) e não respondem, actualmente, às heterogeneidades dos alunos nos sistemas educativos.

Nesta comunicação procuraremos apenas responder às seguintes questões de investigação: De que modo o questionamento oral contribui para promover, nos alunos, a auto-regulação das aprendizagens matemáticas? Que constrangimentos encontra José na promoção de atitudes auto-reguladoras da aprendizagem matemática? Como procura ultrapassá-los?

Prática avaliativa

Entende-se como prática avaliativa o conjunto de acções que permitem a recolha de informação sobre a aprendizagem para possibilitar, quando necessários, ajustes fundamentados no processo de ensino e para dar feedback aos alunos, sobre o seu progresso. Assume-se, nesta perspectiva, a integração entre os processos de ensino, aprendizagem e avaliação, em que o aluno tem um papel importante na concretização das aprendizagens ao questionar, procurar estratégias, auto-avaliar-se, confrontar as dificuldades com as ferramentas que tem para as ultrapassar e procurar percursos alternativos, empenhando-se com afinco na concretização do que é o seu objectivo. Procura-se, desta forma, promover a aprendizagem através da reflexão sobre a aprendizagem (Zimmerman, Kitsantas & Campillo, 2005). Estes aspectos também são referidos por Pinto e Santos (2006), a propósito da avaliação numa perspectiva reguladora.

Na sala de aula, o professor concretiza e ajusta uma série de acções por si planeadas (Schön, 1992), faz sucessivas avaliações, toma decisões e muda de direcção. Quando o professor reflecte sobre a informação recolhida, equaciona rapidamente alternativas, melhora a sua prática e promove ambientes favoráveis ao desenvolvimento da aprendizagem. Essa é a assumpção de que a regulação das aprendizagens é um processo de natureza interactiva e intencional, e tem implicações directas no ajuste do processo de ensino e aprendizagem (Stiggins, 1995; Santos, 2005).

Uma forma de potenciar práticas avaliativas com intencionalidade reguladora é seleccionar tarefas matemáticas desafiadoras, de elevado nível cognitivo, de forma a avaliação focar-se em aspectos importantes da aprendizagem (Shepard, 2001). A interacção oral, professor e aluno, é outra forma de desenvolver uma prática avaliativa reguladora das aprendizagens (Santos, 2002; Dias, 2005). Ao acontecer de forma intencional no quotidiano do trabalho da sala de aula, a interacção oral professor e aluno é uma forma de integração da avaliação no currículo (Pinto, 2003; Santos, 2003). Quando se fala de interacção oral numa perspectiva reguladora, em geral, associamo-la ao questionamento ao longo do trabalho que o aluno está a desenvolver (Santos, 2002). É sabido que para que este questionamento seja realmente regulador deve respeitar algumas condições, como seja não corrigir os erros, mas antes dar pistas, não validar, mas antes questionar de forma a ser o

próprio aluno a desenvolver um argumento convincente sobre o seu raciocínio (Santos, 2003; 2008). Esta prática avaliativa não é realizada apenas para avaliar o resultado final. Vai acompanhando o processo de aprendizagem, mobilizando professor e aluno em torno de sucessivas reflexões sobre os efeitos que se vão gerando. A avaliação serve, neste caso, de referência para as decisões seguintes que se vão tomando.

A auto-avaliação é o processo por excelência da regulação. É um processo interno ao próprio sujeito. Nunziati (1990) aponta algumas razões que destacam a importância desse processo de regulação das aprendizagens, quando comparado com a regulação externa levada a cabo pelo professor: o itinerário de aprendizagem do aluno, bem como os seus procedimentos não seguem, necessariamente, a lógica da disciplina, nem tão pouco a do professor, considerado como um perito; o dizer do professor não garante a apropriação, por parte do aluno, dos conhecimentos; a ultrapassagem dos erros só pode ser feita por aqueles que os cometem e não por aqueles que os assinalam, uma vez que as lógicas de funcionamento são diferentes. A auto-avaliação é um processo de metacognição, entendido como um processo mental interno através do qual o próprio toma consciência dos diferentes momentos e aspectos da sua actividade cognitiva (Santos, 2002).

Se a auto-avaliação passa por um processo consciente de reflexão sobre o que se está a fazer e como se está a fazer, o aluno terá de desenvolver a sua capacidade de auto-questionamento. Mais uma vez, o papel do professor poderá ser fundamental. O aluno poderá aprender a colocar-se autonomamente boas questões se o professor lhas colocar de forma continuada. Uma forma de promover a auto-regulação é, progressivamente e de forma gradualmente autónoma, criar nos alunos hábitos de formularem questões a si mesmos. Por exemplo: "O que fizeste?", "Por que tomaste esta opção?", "Por que pensaste assim?", "Donde te surgiu esta ideia?", "Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?", "Se quisesses convencer alguém de que isto é verdade, o que dirias?", poderão contribuir para os alunos passarem autonomamente a formular estas questões para si mesmos, enquanto desenvolvem as suas tarefas (Santos, 2002).

Metodologia

Nesta investigação segue-se o paradigma interpretativo, numa metodologia de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). No estudo mais alargado participam dois professores do ensino secundário embora, para esta comunicação, apenas seja analisada parte da prática lectiva de um deles – José.

O primeiro autor trabalhou colaborativamente com os dois professores. Nas sessões de trabalho colaborativo semanal conceberam-se práticas avaliativas, que depois de concretizadas por cada um dos professores, foram, posteriormente, objecto de reflexão pelo grupo (Jaworski, 2007). Nas aulas em que as tarefas planificadas foram implementadas, o investigador foi o único a participar, em parceria com o professor titular da turma.

A turma P, profissional de técnico de informática, no ano lectivo 2009/2010, era constituída por dezoito alunos, sete raparigas e onze rapazes. Embora todos os alunos tivessem realizado as actividades propostas no estudo, apenas se teve em conta os dados referentes a dois alunos, Davide e Alexandre. Estes dois alunos foram escolhidos pelo professor José tendo em conta que progrediram para o 11.º ano, manifestaram capacidade de relacionação social para trabalhar em grupo e interagir, manifestaram empenho na realização das tarefas propostas e apresentaram documentos escritos com qualidade.

Neste texto, analisam-se dados obtidos através da observação e do registo áudio de duas aulas e de duas sessões de trabalho, posteriormente transcritas, de uma entrevista ao professor José, dos documentos das práticas lectivas e dos produtos do trabalho realizado pelos dois alunos, face a uma tarefa proposta. Na análise de dados foram tidos em conta os domínios: a planificação, a prática avaliativa e a reflexão.

Apresentação e discussão de resultados

O professor. José, professor há 32 anos, está na escola actual há dezassete anos. A sua formação base é o bacharelato em engenharia mecânica, concluindo a licenciatura em engenharia e gestão industrial mais tarde. Segundo ele, decidiu ser professor porque se defrontou com a dificuldade em arranjar emprego na área da engenharia, e porque, enquanto estudante, leccionou Matemática. Hoje em dia, José afirma que não mudará de profissão. Gosta do que faz e dá-lhe "prazer contactar com os jovens e ensiná-los" (Entrevista). Mas também declara que, ao longo da sua formação, preferiu a vertente do conhecimento matemático, em desfavor da vertente do conhecimento didáctico:

> Confesso que sou dado a pesquisar problemas da Matemática e deixo para segundo plano as pedagogias. Gosto de ver métodos diferentes de resolver problemas, mas não me preocupo muito se isso é adequado para o aluno ou não. São desafios matemáticos… é isso que tenho dado prioridade nas inscrições em formações, às vezes procuro saber mais sobre o cálculo diferencial e nem por isso, em saber, como ensinar cálculo diferencial. (Entrevista 1)

Planificação da prática avaliativa. A natureza das tarefas a propor aos alunos é um aspecto a que José dedica algum tempo, aquando da planificação de uma aula. As suas preferências vão para os problemas, mas nem sempre consegue arranjar um adequado ao que pretende, o que o obriga a fazer adaptações a problemas que encontra na internet, manuais escolares ou testes intermédios e exames nacionais:

> Ao procurar [os problemas], nem sempre encontro o que quero. Alguns são demasiado vagos, com muito texto e pouco conteúdo matemático…os alunos perdem-se na compreensão, e fico sem saber se sabem ou não a parte da matemática. Prefiro, os [problemas] que dizem respeito a conteúdos matemáticos…podem ser de cálculo…a exploração? Quer dizer, a extensão, faço eu. (Entrevista 1)

José remete os contextos realistas ou da realidade (simplificados) para segundo plano, e algumas das adaptações que faz aos problemas seleccionados são "limpezas" (Entrevista) do contexto da vida real, tornando a proposta mais directa e acessível para os alunos, do seu ponto de vista:

> Por exemplo, para quê pedir ao aluno o volume de um depósito de combustível com a forma de cilindro quando se pode pedir, simplesmente, o volume do cilindro? Depois, posso relacionar isso com outras coisas, funções e simular a variação do raio da base e estudar as implicações. (Entrevista 1)

José define, à partida, o tipo de questões a colocar aos alunos, na forma oral, no momento de exploração de uma tarefa:

> Devemos escolher uma boa pergunta, ao fazer uma boa pergunta poderemos envolver os alunos e fazer extensões à tarefa. Nesse caso, as perguntas surgem-me a partir do trabalho que os alunos vão desenvolvendo e tendo em conta os objectivos de aprendizagem que pretendo. (Entrevista 1)

A análise da prática de José recaiu sobre a tarefa *Eratóstenes* adaptada por si e realizada pelos alunos da turma P:

Na figura 4, ilustra-se um método simples para determinar o raio da Terra. Este método consiste em medir o ângulo α, ângulo de depressão do horizonte, a partir de um ponto de altitude elevada, do qual se avista o mar.

Relativamente a esta figura, que não está à escala, considere que:

- B representa o ponto de observação;
- C designa o centro da Terra;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo de depressão do horizonte, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$;
- h é a altitude do lugar, em quilómetros;
- o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em A;
- R é o raio da Terra, em quilómetros;
- $\overline{BC} = R + h$.

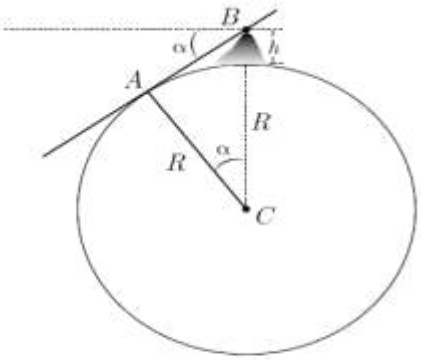


Fig. 4

1. Mostre que $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$
2. Determine o valor de h, sabendo que $R = 1000$ metros e que α =60º.
3. Determine, agora, o valor de h, sabendo que $R = 1000$ metros e que α =45º.

Apresente o resultado aproximado às unidades.

4. Compara os dois resultados anteriores.

Eratóstenes (276-195 a.C.), por volta do ano 230 a.C., calculou, por um processo diferente e de grande simplicidade, o raio da Terra.

Admita que o valor calculado por Eratóstenes foi de $6316\ \text{km}$.

O Rodrigo calculou o raio da Terra pelo método acima descrito.

Utilizando um teodolito, obteve, a partir do cume da ilha do Pico, $\alpha = 1{,}5564^\circ$.

A altitude do Pico é $2{,}35\ \text{km}$.

Fig. 5

Determine a diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Sugestão: Comece por calcular o valor obtido pelo Rodrigo, usando a igualdade $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Segundo José, trata-se de um problema matemático que envolve trigonometria e de resolução acessível. Mas a discussão tida no grupo colaborativo fez José reflectir, e a tarefa foi considerada como incluindo três exercícios, itens 1., 2. e 3., uma composição, item 4., e um problema, o item 5.:

> Acho que concordo. O item 1. é um exercício porque já fizeram um parecido em aula, o item 2. e o item 3. são semelhantes e são dois "determine" acessíveis, é só substituir. Quanto ao item 4. e item 5. são de natureza diferente, o 4. não fiz isso ainda este ano lectivo, mas no passado já foi feito, o 5 envolve uma boa compreensão do enunciado... espero que o façam. (José, Sessão de trabalho colaborativo 13)

José refere a necessidade dos alunos se envolverem na tarefa através do estabelecimento de analogias entre o que já foi realizado nas aulas anteriores:

> Eu posso ajudar, eles já fizeram problemas com triângulos rectângulos, em que usam as razões trigonométricas. Talvez, não tenham usado o co-seno, mas nessa altura eu vou intervir e relembro-os sobre outro problema…mas primeiro eles [os alunos], claro! (José, Sessão de trabalho colaborativo 13)

Esse propósito, também, poderia ser alcançado pela inclusão da sugestão de trabalho que o grupo decidiu manter no enunciado da tarefa. Mas, para José, a sugestão de trabalho no texto da proposta de trabalho é uma importante ajuda para alunos, assim como o facto dos itens 2. e 3. serem muito semelhantes, e relativamente fáceis:

> Eles [os alunos] poderão sentir alguns problemas com a linguagem, em particular os sete pontos com informação sobre a figura, ao incluirmos a sugestão, [os alunos] poderão ver o caminho que devem seguir… assim, poderão ir até ao item 3., é fácil! (José, Sessão de trabalho colaborativo 13)

Apesar desta opinião de José acerca dos primeiros itens da tarefa *Eratóstenes*, ele salientou que os alunos precisavam de ajuda na resolução do item 4., a composição:

> Quando lhes peço para comparar resultados, eles [os alunos] não sabem o que devem fazer. Nesse momento terei de ajudar, talvez dizer que devem comparar o aumento do valor do ângulo, com o valor do *h*. (José, Sessão de trabalho colaborativo 13)

José explicou que, com o item 4., pretendia levar os alunos a efectuar a generalização da relação entre h e α, ou seja h aumenta quando α se aproxima de 90º. No entanto, o feedback do professor poderia passar pela análise dos trabalhos dos alunos no momento da execução da tarefa, uma vez que poderiam aparecer várias estratégias de concretização, e o apoio devia ser o adequado a cada aluno.

O trabalho na sala de aula. Tal como planificado, José propôs a tarefa para trabalho a pares, em que os alunos deveriam registar as conclusões obtidas no caderno diário, com o objectivo de, no final da exploração, discutirem com toda a turma. Após a entrega da proposta de trabalho em fotocópia, José circulou pela sala e apoiou todos os alunos. A observação da aula, pelo investigador, centrou-se na interacção de José com dois alunos, Davide e Alexandre, em particular no que respeita o item 4.. Para começar, os alunos tiveram dificuldades em seleccionar os dados

necessários para resolver o problema (fala 3). José apoiou os alunos na selecção da informação que ajudava na concretização de uma estratégia de resolução (falas 4, 6, 8, 10 e 13), mas apenas confirmou as afirmações correctas dos alunos ou orientou-os para a releitura da proposta (falas 8 e 13):

1-Davide: Professor? A altitude é em quilómetros e o R em metros, é mesmo assim?
2-José: Por que fazes essa pergunta?
3-Davide: Porque deveriam estar na mesma unidade, para somar. Precisamos do BC, não?
4-José: O que dizes é verdade, mas também deves pensar para que faz falta o comprimento [BC]?
5-Alexandre: Estou a pensar no que temos feito nas últimas aulas e só me ocorre a trigonometria.
6-José: Trigonometria, é muito vago.
7-Alexandre [enquanto pesquisa no caderno]: Tenho aqui os triângulos e esta figura também tem um triângulo.
8-José: isso é pouco. Leiam o problema novamente, façam um esquema e depois… pensem!
(…)
9-Davide: Professor? Já sabemos, são as razões trigonométricas, seno, co-seno e tangente.
10-José: E vão usar as três?
11-Alexandre: Não, não! Vamos ver…aqui o triângulo precisa do cateto oposto, AB.
12-Davide: Nada disso! O AB são serve de nada, a pergunta é o h.
13-José: Analisem melhor. Onde está o h?
14-Alexandre: Na hipotenusa … mas, também, temos o R na hipotenusa.
15-Davide: Podemos escrever uma equação e depois é fácil.
16-José: Escrevam, e depois discutimos.
(…)
17-Davide: Professor? Vamos fazer com o co-seno!
18-Alexandre: Temos o cateto adjacente e temos a hipotenusa, isso dá para o co-seno. E depois encontramos o valor de h, pode ser?
19-José: Pode ser, há vários caminhos… esse é o vosso. Prossigam.

Mais tarde, depois de os alunos encontrarem os resultados pedidos, houve dificuldades na comparação dos valores obtidos (falas 20, 22, e 24). Os alunos apresentaram alguma hesitação na forma e no sentido dado à expressão "compara os resultados obtidos" (falas 20, 26 e 32). O professor guiou os alunos para dar resposta à comparação solicitada, mas foi colocando questões de forma a desenvolverem a auto-avaliação do trabalho realizado (falas 21, 29, 31 e 35). Através do questionamento, José procura promover a auto-regulação das aprendizagens (falas 20 e 35):

20-Davide: Professor? Comparar os resultados como?
21-José: Já efectuaram os cálculos? Que podem concluir?
22-Davide: Este é maior que aquele!
23-José: Sim, claro que o valor é maior, mas relacione isso com a figura.
24-Alexandre: A altitude é maior aqui. Mas, não sei que dizer mais…

25-José: Devem tentar escrever uma conclusão geral… uma informação que sirva para um ângulo qualquer.
26-Davide: Ângulo qualquer? Devemos calcular para outros valores?
27-José: Se precisarem, sim…devem é olhar também para os resultados.
28-Alexandre: Eu sei que o h de 60º é maior que o h de 45º, e daí?
29-José: E se fosse 30º?
30-Alexandre: Pois…temos de fazer?
31-José: E se fosse 20º?
32-Davide: Isso deve ter uma propriedade, senão o professor não dizia isso!
33-José: Vejam…calculem…
(…)
34-Davide: Professor? Ao diminuir o ângulo, a altitude também diminui.
35-José: Isso é verdade para todos? Como justificam?
36-Alexandre: Podemos calcular mais alguns…mas não é isso que o prof quer.
37-José: Pois não!
38-Alexandre: Já sei, vamos escrever e depois o professor vê!

A reflexão. As gravações áudio da interacção, de José com o par Alexandre/Davide, efectuadas durante as aulas, foram, posteriormente, discutidas. José confessou que os alunos apresentaram dificuldades não esperadas, como seja manipular as razões trigonométricas em problemas da vida real:

> Nas aulas fizemos vários exercícios com as razões trigonométricas, mas este era mais complicado. Também, é verdade que este foi feito por eles, com a minha ajuda, enquanto os outros fiz eu com a ajuda deles [os alunos]. Tive de ajudar, é sabido. As dificuldades nas razões trigonométricas nãos os deixavam continuar. (José, Sessão de trabalho colaborativo 14)

Outro aspecto que também foi revelado por José prende-se com a actividade do aluno em sala de aula e, consequentemente, com o papel do aluno e o papel do professor. José atribui a dificuldade dos alunos, também, à falta de rotinas de trabalho em aula. Segundo José, as suas perguntas não tiveram o efeito que perspectivava. Ele pretendia que os alunos reflectissem sobre as questões colocadas e que procurassem a resposta ao problema a partir dessa interacção, mas não foi o que aconteceu:

> Tentei empurar a responsabilidade da concretização para o lado deles [os alunos]. Nem sempre consegui. Mas, as minhas perguntas eram para que pensassem sobre o assunto e para que noutras tarefas pudessem pensar nessas questões também. Combater a ideia de que o aluno copia do quadro e responde sinteticamente às perguntas fechadas que o professor faz. (José, Sessão de trabalho colaborativo 14)

A reflexão de José revelou-se na forma de auto-crítica do trabalho desenvolvido, mas também definiu algumas perspectivas de trabalho de futuro, e serviu para que tomasse consciência de algumas das dificuldades dos alunos. José reflectia sobre o envolvimento dos alunos na

realização de trabalho a pares, aumentando a frequência desse trabalho, e na realização de relatórios escritos em duas fases, de forma mais sistemática, com feedback entre as duas fases, como uma forma de promover a aprendizagem:

> A trigonometria é complicada, eu sei. Mas, nesta fase do campeonato as razões trigonométricas deviam ser usadas com facilidade e verifiquei que alguns ainda não conseguem identificar quando usam o seno, o co-seno ou a tangente. Daqui por uns tempos vamos ver. Eles precisam de tempo para amadurecer ideias e envolverem-se neste trabalho. (José, Sessão de trabalho colaborativo 14)

Conclusões

Ao procurar estimular os alunos para o uso de estratégias de auto-regulação, o professor começa por planear tarefas, orientar o trabalho a ser desenvolvido para promover a avaliação, enquanto processo de permanente reflexão e comunicação, e implementar um processo de ensino em que o aluno é o elemento chave. Nesta investigação, na planificação, realizada no contexto de trabalho colaborativo, foi seleccionada uma tarefa e pensado o questionamento aos alunos como uma prática para promover a auto-regulação da aprendizagem matemática. José, na sala de aula, questionou os alunos de forma a incentivá-los para o prosseguimento do trabalho, sem dar demasiadas orientações (Santos, 2008). O professor procurou promover a auto-regulação ao possibilitar o trabalho a pares, permitir a discussão entre alunos, a interacção, conceder tempo para confronto com a tarefa, procurando que os alunos tivessem um papel activo na construção das suas próprias aprendizagens (Santos, 2002).

A intencionalidade de promover um questionamento oral favorecedor do desenvolvimento da auto-avaliação dos alunos levou à necessidade do professor alterar a sua prática lectiva, nomeadamente no papel que atribuiu a si e aos alunos. Para José a comunicação na sala de aula não era um aspecto a que daria relevância, mas na concretização desta tarefa procurou questionar os alunos e promoveu a releitura de tarefa, a análise da adequação de resultados e a analogia com outras tarefas.

O momento avaliativo, nesta experiência, iniciou-se precocemente, quando o professor identificou falhas de compreensão e os alunos solicitaram uma simples clarificação do que é solicitado no enunciado da tarefa. No entanto, a acção de José, feita para a melhoria da aprendizagem, através da ajuda à aprendizagem, dos comentários e/ou questões que fez, sem dar respostas directas ou orientadoras, só foi possível porque a tarefa era desafiadora e permitia envolvimentos diferenciados. Também, foi possível observar que a avaliação decorreu através do

incentivo à melhoria, e de forma interactiva, procurando que os alunos fossem capazes de se auto-questionarem.

Contudo, José encontrou alguns constrangimentos no desenvolvimento desta prática. Apesar da tarefa permitir uma abordagem exploratória, em que os alunos mobilizariam as suas capacidades metacognitivas para concretizar o trabalho que lhes era solicitado, esta forma de trabalhar nem sempre responsabilizou o aluno pela concretização da sua aprendizagem. O questionamento do José nem sempre teve o efeito que perspectivava, para envolver os alunos na concretização da tarefa. Mas, José apresenta expectativas favoráveis relativamente ao trabalho no futuro e ao envolvimento do aluno, se este for envolvido neste tipo de trabalho, a pares, por um período mais alargado de tempo e se desenvolver a prática de redacção de relatórios em duas fases, com feedback entre as duas fases.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (2002). Avaliação das aprendizagens no ensino básico. In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens* (pp. 9-15). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos*. Porto: Porto Editora.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino secundário. Processos utilizados pelos alunos em investigações Matemáticas*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Jaworski, B. (2007). Developmental research in mathematics teaching and learning. Developing learning communities based on inquiry and design. In *Canadian Mathematics Education Study Group Proceedings of 2006 Annual Meeting* (pp. 3-16). Calgary, Canada: University of Calgary. (retirado em 28/09/2008 de http://fag.hia.no/lcm/papers/BJ_CMESG_2006.pdf)

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pédagogiques*, *280*, 47–64.

Pinto, J. (2003). A avaliação e a aprendizagem: da neutralidade técnica à intencionalidade pedagógica. *Educação e Matemática*, *74*, 3-9.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.). *Avaliação das aprendizagens* (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, *74*, 16–21.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da Matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación Matemática* (S.E.I.E.M.) (pp. 127-151). Coruña: Universidade da Coruña.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. Canavarro & J. Brocardo (Org.) *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas – Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação**.**

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 79-91). Lisboa, D. Quixote.

Shepard, L. (2001). The role of classroom assessment in teaching and learning. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 1066-1101). Washington, DC: American Educational Research Association.

Stiggins, R. (1995). Assessment Literacy for the 21st Century. *Phi Delta Kappan*, *77*(3), 238-245.

Zimmerman, B., Kitsantas, A. & Campillo, M. (2005). Evaluación de la autoeficacia regulatoria: Una perspectiva social cognitiva. *Evaluar*, *5*, 1-21.

APROPRIAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO PELOS ALUNOS: ESTRATÉGIAS DESENVOLVIDAS POR UMA PROFESSORA NUM CONTEXTO DE TRABALHO COLABORATIVO

Sílvia Semana
Doutoranda do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
silviasemana@yahoo.com.br

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo

Nesta comunicação analisamos como são preparadas, implementadas e avaliadas, num contexto de trabalho colaborativo entre professores, estratégias que visam a apropriação de critérios de avaliação pelos alunos. Em particular, estudamos o caso de uma professora de Matemática a leccionar numa turma do 8.º ano de escolaridade, num conjunto de aulas relativas ao tópico "Sequências". Os resultados reforçam a apropriação de critérios de avaliação pelos alunos como um processo complexo e exigente, para professor e alunos, e sublinham a importância do trabalho colaborativo, ao propiciar condições para a planificação, a discussão e a reflexão sobre as estratégias implementadas. Apesar do anunciar de algumas mudanças no desempenho dos alunos e nas práticas da professora, revela-se necessário dar continuidade ao trabalho desenvolvido.

Palavras-chave: auto-regulação dos alunos em Matemática, critérios de avaliação, práticas dos professores, trabalho colaborativo.

Introdução

Muitos estudos reconhecem potencialidades na auto-regulação das aprendizagens, evidenciando que os alunos com melhor capacidade de auto-regulação tendem a ser mais motivados academicamente e a realizar melhores aprendizagens (Black & Wiliam, 1998a; Boekaerts, Pintrich & Zeidner, 2000). O desenvolvimento desta capacidade requer, porém, uma aprendizagem pelos alunos e um investimento comprometido do professor na promoção de condições propícias a essa aprendizagem (Nunziatti, 1990). No centro de todo o processo estão os critérios de avaliação, ao estabelecerem-se como um referente para os alunos avaliarem o seu desempenho e orientarem a sua acção (Hadji, 1994; Sá, 2004).

É, portanto, fundamental estudar, analisar e discutir estratégias de ensino que estimulem o desenvolvimento da auto-regulação (Santos & Gomes, 2006; Simão, 2004) e promovam, em particular, a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos. É, neste contexto, que surge o presente estudo, com o objectivo de compreender como são preparadas, implementadas e avaliadas, num contexto de trabalho colaborativo entre professores, estratégias que visam a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos. Em particular, nesta comunicação procura-se estudar o contributo de estratégias, intencionalmente pensadas em trabalho colaborativo, para a apropriação de critérios de avaliação por parte de alunos.

Fundamentação Teórica

Em linhas gerais, a auto-regulação consiste num conjunto de acções auto-dirigidas para modificar o estado actual dos acontecimentos e pressupõe que o aluno tome consciência dos seus conhecimentos e dos objectivos a atingir, conheça as exigências das tarefas a realizar, identifique os recursos que tem à sua disposição, avalie o nível de realização atingido e, se necessário, redireccione a sua actividade para chegar a resultados que considere satisfatórios (Silva & Sá, 2003; Silva, 2004). Em particular, a auto-regulação inclui uma fase em que o aluno confronta aquilo que fez com aquilo que se esperava que fizesse, percepcionando diferenças entre essas duas situações, e uma fase em que ele age de forma a reduzir ou eliminar essa diferença (Santos, 2008).

A auto-regulação pressupõe, então, a existência de um sistema de referência constituído por critérios de avaliação, que permitam ao aluno comparar a sua acção com o que é pretendido e, se necessário, implementar estratégias de correcção dessa acção, para obter sucesso na realização da tarefa (Silva, 2004). Para cumprir estes propósitos, os critérios de avaliação devem ser legítimos do ponto de vista do aluno e permitir-lhe compreender o que de si é esperado (Hadji, 1994). Os critérios devem ser apropriados pelo aluno.

A apropriação dos critérios de avaliação é, portanto, imprescindível à auto-regulação das aprendizagens. Note-se, contudo, que essa apropriação não é simples (Black & William, 1998b; Santos & Gomes, 2006). É necessário um trabalho contínuo e sustentado, cabendo ao professor um papel de facilitador no processo. Ele deve começar por definir e explicitar, para si próprio, que critérios considera na avaliação da tarefa em causa e, posteriormente, partilhar esses critérios com os alunos, envolvendo-os no

aperfeiçoamento e/ou completude dos critérios, através de um processo de negociação, que deve recorrer a uma linguagem acessível aos alunos, para que possam compreender o que é esperado deles (Santos, 2002). O professor deve, ainda, envolver os alunos directamente em experiências de avaliação (Sadler, 1989) e encorajar a reflexão, o diálogo e a negociação (Cambra-Fierro & Cambra-Berdún, 2007).

Este tipo de práticas é exigente para o professor e requer que ele repense aquilo que faz e como faz, isto é, que reflicta sobre a sua prática (Schön, 1983). O trabalho colaborativo, em particular, pode revelar-se um contexto favorável para desenvolver novas formas de trabalhar nas aulas de Matemática (Sowder, 2007) e apoiar o professor na superação dos desafios acrescidos que se lhe colocam. Entendemos trabalho colaborativo aquele em que "os diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingirem objectivos que a todos beneficiem" (Boavida & Ponte, 2002, p. 45).

Metodologia

Esta investigação insere-se num paradigma interpretativo e num design de estudo de caso (Yin, 2002). Insere-se numa investigação mais ampla em que se procuram estudar, ao longo de um ano lectivo, práticas de dois professores de Matemática (com preocupações de reflexão sobre a sua prática lectiva e experiência profissional distinta), que visam a promoção da auto-regulação das aprendizagens dos alunos e estão integradas numa experiência de ensino concebida num contexto de trabalho colaborativo entre uma das investigadoras e quatro professores do 3.º ciclo do ensino básico. O grupo colaborativo reúne com uma periodicidade semanal e as suas actividades incluem: discussão de documentos relativos à problemática da auto-regulação das aprendizagens em Matemática e planificação, discussão e avaliação de práticas de sala de aula, à luz dessa problemática.

A experiência de ensino baseia-se num ensino exploratório e na proposta de tarefas abertas e problemas (Ponte, 2005), realizados em pequenos grupos e discutidos em grupo-turma. O professor procura orquestrar as discussões matemáticas e promover uma comunicação oral em que os alunos interagem com o professor e entre si, numa comunicação reflexiva e instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000), onde predomina um padrão de discussão (Voigt, 1995) e são valorizados a partilha, o confronto e a argumentação de ideias e processos matemáticos. O investimento na apropriação dos

critérios de avaliação pelos alunos e a solicitação de auto-avaliações e reflexões escritas são outras características-chave da experiência.

Nesta comunicação, aborda-se o caso de Joana, uma professora de Matemática, a leccionar uma turma do 8.º ano de escolaridade, pertencente ao grupo colaborativo. Recorremos à análise de um conjunto de quatro aulas da professora, dedicadas ao estudo do tópico "Sequências". Estas aulas foram planificada nas sessões de trabalho colaborativo, constituindo um primeiro trabalho mais sistemático integrado na experiência de ensino. Uma das preocupações centrais assumidas pelo grupo neste primeiro conjunto de aulas foi a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, especialmente no que se refere à comunicação oral na sala de aula. Em particular, identificava-se "o não saber ouvir o outro" como uma dificuldade e pretendia-se que os alunos investissem na realização de intervenções orais oportunas e pertinentes e na reacção adequada às intervenções dos colegas, fazendo comentários, estabelecendo relações, argumentando e contra-argumentando.

Tendo em vista estes objectivos, as aulas foram planificadas com a organização seguinte: (i) trabalho em pequenos grupos de quatro ou cinco elementos sobre uma tarefa; (ii) apresentação do trabalho dos grupos, com discussão em grupo-turma; (iii) auto-avaliação escrita do trabalho do grupo, de acordo com a grelha de avaliação fornecida pela professora (anexo I); (iv) confronto, na aula seguinte, entre a auto-avaliação dos grupos e a avaliação feita pela professora. Este confronto era visto pelo grupo colaborativo como uma estratégia com potencial para a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos. Também a solicitação de auto-avaliações do grupo, e não individuais, foi propositada com o intuito de facilitar a intervenção e a argumentação das perspectivas de cada grupo e salvaguardar os casos de alunos mais introvertidos, que poderiam sentir-se constrangidos por expor a sua situação/avaliação individual.

Este modelo de aula foi considerado para a realização de três tarefas de exploração (Ponte, 2005), distribuídas por quatro aulas de 90 minutos (ver exemplo anexo II). No final desta sequência de aulas, o grupo entendeu pertinente solicitar uma reflexão escrita aberta, a cada um dos alunos, relativamente ao trabalho que desenvolveram durante o estudo do tópico, com o intuito de avaliar de que forma se apropriaram, ou não, dos critérios de avaliação e de que modo os consideravam na auto-avaliação do seu trabalho.

A recolha de dados recorreu à observação participante das quatro aulas, vídeo e áudio gravadas; a conversas informais tidas com Joana; uma entrevista semi-estruturada à professora no início do estudo áudio gravada; e à recolha documental de materiais elaborados durante a planificação e produzidos pelos alunos. A análise dos dados foi realizada através de um sistema de categorias – comunicação desenvolvida na sala de aula, e o uso de critérios de avaliação por parte dos alunos.

O Caso de Joana

Apresentação

Joana é uma professora do 3.º ciclo do ensino básico, com 42 anos de idade, cerca de 17 anos de tempo de serviço e com a licenciatura em Matemática – ramo educacional. Joana aceitou participar neste estudo, por considerar a problemática da auto-avaliação relevante e entender que a sua participação poderia ser uma mais-valia para o seu desenvolvimento profissional e, consequentemente, para a aprendizagem dos seus alunos.

Até à data de início do projecto, a professora não revelava especial preocupação com a capacidade de auto-avaliação dos alunos. As suas práticas a esse nível resumiam-se à comunicação, no início do ano lectivo, dos instrumentos de avaliação a utilizar e dos respectivos pesos na classificação final dos alunos, e à solicitação de uma auto-avaliação escrita no final de cada período escolar.

Comunicação na sala de aula

Na primeira aula, foram distribuídas duas tarefas aparentemente distintas a grupos distintos de alunos (a letra V e a letra T - anexo I). Um aspecto merecedor de atenção prendeu-se com a comunicação oral construída e, muito particularmente, com as escassas intervenções dos alunos em reacção às intervenções dos colegas, como se ilustra no seguinte extracto:

Cláudio: É possível construir alguma figura usando 650 pontos? Sim.

Professora: E então como é que vocês pensaram, Cláudio?

Cláudio: Primeiro fizemos, nós fizemos 650- 1 que dá 649.

Professora: E porque é que lhe tiraram 1?

Cláudio: Por causa do... (aponta para o ponto do meio da 3.ª figura)

Professora: Tiraram logo esse ponto daí de baixo.

Cláudio: Sim.

Professora: E ficaram com 649 pontos.

Cláudio: E depois fizemos 649 a dividir por 2 que deu 324.5, mas reparamos que não é um número inteiro, concluímos que não dá.

(ouve-se barulho do lado de fora da sala, junto à janela)

Professora: Então, tirando o facto de lá fora se estar a passar alguma coisa...Portanto, recapitulando, 1.º tiraram 1, não foi?

Cláudio: Sim.

Professora: E depois tentaram dividir os pontos que restavam em duas partes. Que seria para cada uma das partes da figura. E não deu? Então o que concluíram? Podem construir alguma figura usando 650 pontos? Ou não?

Cláudio: Não.

Esta situação foi associada, em parte, ao domínio da professora sobre os alunos no discurso na sala de aula e reconhecida por si como um aspecto a melhorar futuramente:

> Eu tenho noção que costumo fazer isso (...) Queremos avançar e estamos preocupados com o tempo e fazemos isso... Colocamos uma questão e respondemos... Fiz isso (...) Assim, também não participam como queremos... se nós estamos a falar é difícil (...) Tenho que melhorar isso. (Conversa Informal após a aula)

Na sequência dessa observação, no início da segunda aula, durante o confronto entre a auto-avaliação dos grupos e a avaliação feita pela professora, Joana insistiu na necessidade de os alunos reagirem às intervenções dos colegas, reforçando as orientações explícitas na grelha de avaliação. Em particular, salientou esta vertente como o aspecto menos positivo do trabalho desenvolvido pelos grupos na aula anterior e partilhou algumas responsabilidades com os alunos:

> … eu acho que nessa parte do intervirem quando os colegas estão a expor, e questionarem e… pedirem para explicar melhor se não perceberem… em todos os grupos, eu considerei que isso foi aquilo

> que vocês menos conseguiram… porque se repararam… essencialmente quem questionou fui eu. Não foi? Se calhar não devia ter feito… E se calhar a culpa também é um bocadinho minha porque eu dizia assim: oh Igor, mas então porquê que fizeste assim? Não era suposto ser eu a questionar, certo? Porque os outros grupos, que não conheciam a tarefa e que não estavam a compreender muito bem, é que deviam ter questionado… Então, o quê que eu quero? É que na próxima apresentação, que se calhar vai ser já hoje, se tivermos tempo, vocês estejam atentos e sejam vocês a questionar e não tenha que ser eu a dizer… (Segunda aula)

Nessa mesma aula, a comunicação oral na sala de aula registou alterações assinaláveis, com a professora a passar muito mais despercebida, e com os alunos a questionar os colegas, a tecer comentários e a argumentar, comunicando entre si, tal como aconteceu, por exemplo, durante a apresentação oral à turma de um dos grupos de alunos:

> Eduardo – Espera aí. Oh Filipe, oh Filipe, passas da primeira para a segunda… Vocês estão a dizer… Então, o número da figura é um, não é? Vocês têm que fazer três vezes um mais um?
>
> Duarte – Não… Tens que fazer o número da figura, faz de conta que é a figura dois, qual é o número da figura? É a figura dois. O número da figura é dois (…) vezes três, que é os pontos que acrescentamos, mais um, que é o do meio.
>
> Eduardo – Ah?
>
> Filipe – Olha, olha… Sem contar este [o ponto do meio], dois é o que vais estar aqui [num dos braços da figura dois], três é o que vai estar aqui [num dos braços da figura três]
>
> Ana – Olha é assim, já percebi, nós fazemos o número da figura, que é um…
>
> Eduardo – Sim.

Note-se, em particular, que no episódio de sala de aula de onde foi retirado este excerto encontram-se vinte e seis intervenções consecutivas de alunos, sem nenhuma intervenção da professora. O grupo colaborativo entendeu que esta evolução esteve associada, por um lado, à mudança no papel da professora (deliberadamente menos dominador e com mais espaço para as intervenções dos alunos) e, por outro lado, ao trabalho de confronto e discussão das avaliações, como evidenciado pelo excerto de uma discussão que aconteceu numa das sessões de trabalho colaborativo:

> Filipa – Mas os critérios funcionaram!
>
> Vasco – Aparentemente…
>
> Filipa – Exactamente, provocaram uma mudança de atitude muito grande…

(…)

Investigadora – (…) o papel do professor também me parece muito importante.

Joana – Sim, sim… Aliás, eu sentei-me, para evitar… Porque quando eu peguei no marcador e fui lá ao quadro explicar com o Edgar eu pensei "o que é que estás aqui a fazer?" Era suposto estar o grupo a apresentar e estou eu aqui no quadro, percebes? E sentando-me depois é mais fácil…

(…)

Vasco – Acho que uma coisa que também pode ter condicionado, foi quando na discussão da avaliação tu disseste que eles não perguntaram nada… E eles aí podem ter visto a vida a andar para trás e dizer olha esta vai-me dar um (…)

Joana – Sim. Sim, sim, claro.

Vasco – Isto tem a ver com a atitude da professora, acho eu. Não há milagres. (Reunião do grupo colaborativo)

Outro aspecto valorizado pelo grupo colaborativo foi o facto de Joana reconsiderar, no momento de discussão na aula, a avaliação do trabalho de um dos grupos, na sequência da argumentação apresentada por esse grupo e após a concordância dos restantes alunos. Entendeu-se que esta opção encorajou os grupos a discutir a sua avaliação, negociando-se significados e clarificando-se o que é esperado do papel dos alunos e professor.

O uso de critérios de avaliação

Ao longo das quatro aulas e com a implementação das estratégias previstas, cada vez, mais a auto-avaliação dos grupos se foi aproximando da avaliação realizada pela professora, chegando praticamente a coincidir na última tarefa. Este é um aspecto indicado por Joana como "um passo importante" e parece indiciar alguma evolução na apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos.

No que se refere às reflexões escritas finais, o grupo colaborativo não estava à espera que revelassem uma apropriação consistente dos critérios de avaliação pelos alunos, dada a experiência relativamente reduzida desenvolvida até ao momento. Ainda assim, existiam expectativas no sentido de as reflexões traduzirem algumas preocupações dos alunos concordantes com os critérios de avaliação negociados. A maioria, na sua reflexão escrita, refere-se ao trabalho em pequenos grupos e à prestação do seu grupo:

Acho que o meu grupo trabalhou bem (…) Usámos a terminologia adequada, às vezes tivemos algumas dificuldades, mas conseguimos superá-las. Expusemos sempre as nossas dúvidas quando estavam

> outros grupos no quadro. Todo o grupo ajudou a resolver as questões, mas quem mais ajudou foi a Maria e a Anabela… (exemplo 1).

Outro aspecto mencionado por uma grande parte dos alunos foram as apresentações orais à turma: "Nas apresentações orais acho que estive menos bem, porque às vezes não conseguia explicar o trabalho desenvolvido pelo meu grupo" (exemplo 2). Sete dos dezanove alunos da turma referem-se explicitamente a, pelo menos, um dos indicadores de avaliação, com especial atenção para o uso de terminologia adequada, comum a todos esses alunos. Entre estes, três alunos consideram explicitamente vários indicadores de avaliação, tais como: colocar questões, clareza das apresentações orais, intervenções adequadas e oportunas e apresentação de argumentos válidos:

> Fomos claros quando fomos ao quadro, intervimos nos momentos certos e explicamos as nossas dúvidas correctamente. Apresentamos argumentos e justificações acertadas e oportunas (exemplo 3).
>
> ... eu acho que a minha prestação foi: útil, pois fiz várias perguntas aos vários grupos; fui claro tanto a apresentar as minhas ideias à turma como a apresentá-las dentro do grupo; utilizei na maior parte das vezes terminologia adequada (…); fiquei a perceber claramente a matéria sobre as sequências; descobri algumas coisas sozinho, as outras foram os meus colegas e a professora a explicarem-me (exemplo 4).

Este último exemplo (exemplo 4) merece uma atenção especial, uma vez que corresponde ao único aluno que combina uma avaliação do seu desempenho em vários indicadores de avaliação com referências explícitas à sua aprendizagem matemática.

Apesar de algumas mudanças serem já visíveis no sentido da apropriação dos critérios de avaliação, um número significativo de alunos revelou não valorizar esses critérios (ou pelo menos muitos dos indicadores) nas suas reflexões escritas. O grupo colaborativo entendeu, portanto, necessário dar continuidade ao trabalho desenvolvido, reflectindo sobre as estratégias concretizadas no sentido do seu aperfeiçoamento.

Conclusões

Os resultados apresentados reforçam a ideia de que a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos é um processo moroso e complexo, que exige um investimento intencional e comprometido do professor (Cambra-Fierro & Berdún-Cambra, 2007; Nunziatti, 1990). O papel da professora revela-se, de facto, muito exigente, apesar de Joana se mostrar consciente do que pretende (Black, Harrison, Lee, Marshall & Wiliam,

2003). Assiste-se a um primeiro passo no sentido de uma mudança de práticas da professora, que se prevê gradual e desafiante.

Este estudo sublinha a importância do trabalho colaborativo, ao proporcionar oportunidades para a preparação, a implementação e a avaliação de estratégias que visam a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos. Essas estratégias vão no sentido das ideias preconizadas por alguns autores, quando apelam à negociação dos critérios de avaliação com os alunos (Santos, 2002, 2008; Wiliam, 2007). Inicialmente, a partilha da grelha de avaliação simplificada e o envolvimento dos alunos numa primeira experiência de avaliação permitiu uma aproximação dos alunos aos critérios de avaliação. Já o modelo de aulas, ao incluir a auto-avaliação escrita do trabalho do grupo e o confronto, na aula seguinte, entre a auto-avaliação e a avaliação feita pela professora, contribuiu para a discussão sobre o que é considerado um bom ou mau desempenho nas aulas e para a clarificação do que é esperado dos alunos (e da professora). Por último, a reflexão escrita no final do tópico permitiu avaliar de que forma os alunos se apropriaram, ou não, dos critérios de avaliação e de que modo os consideraram, ou não, na auto-avaliação do seu trabalho. Esta estratégia permitiu, ainda, à professora, no seio grupo colaborativo, reflectir sobre a sua prática e, em função da avaliação feita, adaptar e adoptar novas estratégias para as aulas futuras. Não obstante os progressos e dificuldades registados, mostra-se premente dar continuidade ao trabalho desenvolvido, através de um ciclo de prática e reflexão da professora, apoiada pelo grupo colaborativo, tendo como fim último o desenvolvimento da capacidade de auto-regulação das aprendizagens dos alunos em Matemática.

Referências bibliográficas

Black, P., & Wiliam, D. (1998a). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5(1)*, 7-74.

Black, P., & William, D. (1998b). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80(2*), 139–144.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning. Putting in practice*. England: McGraw-Hill Education.

Boakaerts, M., Pintrich, P. R., & Zeidner, M. (Eds). (2000*). Handbook of self-regulation*. San Diego, CA: Academic Press.

Boavida, A., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar* (pp. 43-55). Lisboa. APM.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Cambra-Fierro, J., & Cambra-Berdún, J. (2007). Students' self-evaluation and reflection: measurement. *Education + Training, 49*, 36-44.

Hadji, C. (1994). *Avaliação, Regras do Jogo. Das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pédagogiques, 280*, 47-62.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Sá, I. (2004). Os componentes motivacionais da aprendizagem auto-regulada. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Ed.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.55-75). Porto: Porto Editora.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science, 18*, 119–144.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In Paulo Abrantes e Filomena Araújo (Orgs.), Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas (pp. 75-84). Lisboa: ME-DEB.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), Avaliação em Matemática: Problemas e desafios (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L., & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade. *Revista Portuguesa de Pedagogia, 40*(3), 11-48.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.

Silva, A. L. (2004). A auto-regulação na aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Eds.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.17-39). Porto: Porto Editora.

Silva, A. L., & Sá, I. (2003). Auto-regulação e aprendizagem. *Investigar em Educação, 2*, 71-90.

Simão, A. M. (2004). O conhecimento estratégico e a auto-regulação da aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Eds.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.77-94). Porto: Porto Editora.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. I, pp. 157-223).Charlotte: Information Age Publishing.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-202). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte: Information Age Publishing.

Yin, R. (2002). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Newbury Park: Sage.

ANEXO I

Auto-Avaliação

Agora, devem reflectir sobre o vosso desempenho durante a discussão com toda a turma (durante a apresentação do vosso grupo e na reacção às apresentações dos restantes grupos). É importante que o façam com seriedade, assinalando com um X a opção, de 1 a 4, que melhor descreve o vosso desempenho em cada um dos parâmetros seguintes. A opção 1 corresponde a totalmente mentira e a opção 4 a totalmente verdade.

Parâmetros de Avaliação		1	2	3	4
Domínio de Conceitos e Procedimentos	Os conceitos e princípios matemáticos foram usados correctamente e mostrando compreensão.				
	A terminologia foi adequada.				
	Os procedimentos (cálculos, algoritmos, …) estavam completos e correctos.				
Estratégias e Processos de Raciocínio	Foi usada informação exterior à tarefa importante para a sua resolução.				
	Os elementos importantes da tarefa foram usados e relacionados, de forma adequada.				
	Foi apresentada uma estratégia adequada e sistemática.				
	Foi apresentado um processo de resolução completo.				
	Foi apresentada uma solução/conclusão completa, correcta e de acordo com a restante produção.				
Comunicação Oral	Descrevemos de forma clara o trabalho do grupo.				
	Apresentamos argumentos/justificações válidos.				
	Fizemos intervenções adequadas, nos momentos certos.				
	Comentamos de forma adequada as intervenções dos colegas ou professor.				

	Relacionamos e fizemos comparações entre as várias intervenções de colegas ou professor.				
	Quando não estivemos de acordo com os colegas ou professor, explicamos porquê, apresentando contra-argumentos.				

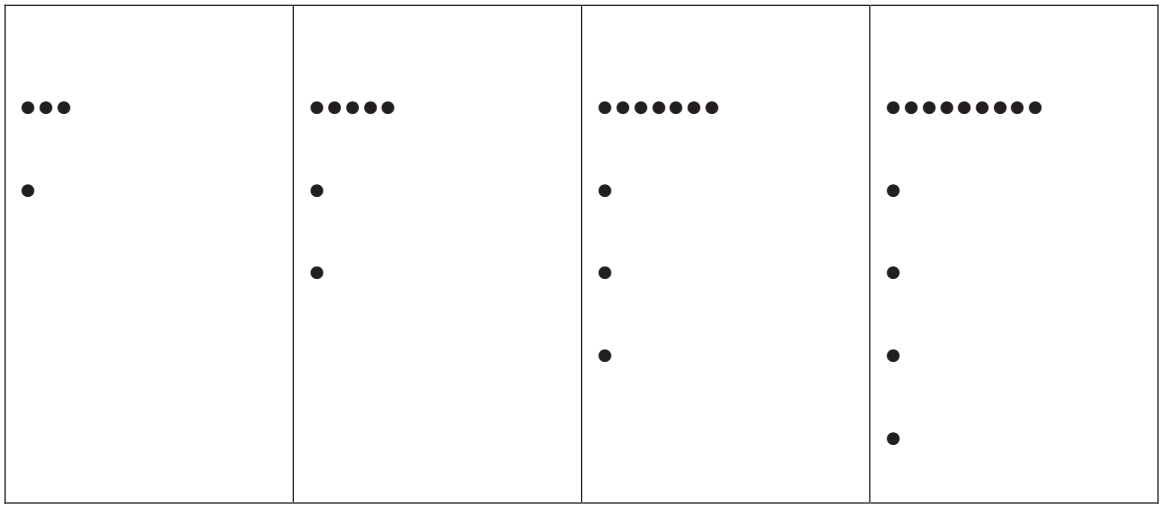
Data: ____/11/2010

Os elementos do grupo:

ANEXO II

Letra T

A Teresa constrói com pontos a inicial do seu nome, fazendo uma sequência de quatro figuras que se assemelham à letra T.



1ª figura **2ª figura** **3ª figura** **4ª figura**

1. Desenhem a quinta figura desta sequência. Por quantos pontos é formada?

2. Quantos pontos existem na 50ª figura? Expliquem como encontraram a vossa resposta.

3. É possível construir alguma figura usando 600 pontos? Justifiquem.

4. Expliquem como podem determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.

5. Escrevam uma expressão algébrica que traduza a explicação que apresentaram na pergunta anterior.

O ERRO NA APRENDIZAGEM DAS SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES: O PAPEL DOS DISPOSITIVOS DE REGULAÇÃO

Luísa Vale
Escola Secundária Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves – Valadares
mlsvale@sapo.pt

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP
rferreir@fc.up.pt

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa & UIDEF
leonordsantos@sapo.pt

Resumo

Este estudo procura analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, Maria, no âmbito do início da generalização do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, no contexto de ensino-aprendizagem do tópico *Sequências e Regularidades*. Procura ainda investigar até que ponto o *feedback* escrito e o questionamento oral, usados pela professora, podem contribuir para levar a aluna a aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los. Foi usada uma abordagem qualitativa e o estudo de caso como *design* de investigação. A análise de dados evidencia que alguns erros referenciados na literatura revista estão presentes nas produções desta aluna, em particular erros com origem num obstáculo cognitivo, na ausência de significado ou em factores afectivos. Verificou-se que o *feedback* escrito usado pela professora ajudou a aluna a reconhecer alguns erros por si cometidos mas nem sempre foi eficaz na regulação das suas aprendizagens. O questionamento oral pareceu ser um dispositivo de regulação mais eficiente que o *feedback* escrito.

Palavras-chave: Erros dos alunos, Avaliação reguladora, *Feedback* escrito, Questionamento oral, Sequências e regularidades.

Introdução

Nas últimas décadas, a análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática tem vindo a desenvolver-se sob várias formas (por exemplo, Cury, 1995). A investigação tem evidenciado que a compreensão dos erros cometidos pelos alunos e as justificações que eles apresentam podem fornecer pistas importantes para novas abordagens no ensino de vários tópicos matemáticos. Uma premissa fundamental neste contexto (e também neste estudo) é a conceptualização do erro como um fenómeno inerente à aprendizagem. Contudo, é a compreensão da natureza dos erros dos alunos que aumenta as possibilidades de aprendizagem efectiva. Em particular, com este conhecimento, o professor pode intervir com intencionalidade formativa, criando

contextos propícios para a aprendizagem, nomeadamente através de uma prática avaliativa com funções reguladoras da aprendizagem, que contemple a recolha de informação, a sua interpretação e acção consequente (Santos, Pinto, Rio, Pinto, Varandas, Moreirinha, Dias, Dias & Bondoso, 2010).

Nesta comunicação, pretendemos analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, Maria, no âmbito do início da generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME-DGIDC, 2007), no contexto de ensino-aprendizagem do tópico *Sequências e Regularidades*; pretendemos, também, investigar como o *feedback* escrito e o questionamento oral podem ser usados pelo professor para levar a aluna a aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los. A investigação aqui relatada, que parte de um trabalho mais abrangente (Vale, 2010), é guiada pelas seguintes questões: (1) Como se caracterizam os erros mais frequentemente cometidos por Maria na aprendizagem do tópico *Sequências e Regularidades*? Quais as tipologias de erro e as suas origens? (2) Como é que Maria se foi apercebendo dos erros que cometeu? De que modo o *feedback* escrito, dado pelo professor, e o questionamento oral, dado pelo professor e pelos colegas, favoreceram este processo?; e (3) Como é que Maria procurou ultrapassar esses erros Quais as principais dificuldades com que se confrontou?

O Erro na Aprendizagem da Álgebra

O erro, por si só, não conduz à aprendizagem se não for seguido de uma reflexão sobre a sua ocorrência com vista a encontrar formas de o ultrapassar. É, assim, importante que o aluno reflicta sobre o seu próprio progresso, processo e produto, identificando os erros que comete e utilizando-os para regular a sua aprendizagem (Martins, 1996). O papel do professor é fundamental para ajudar os alunos a aprender a colocar-se autonomamente boas questões, que os ajudarão, com o tempo, a evoluir nas suas aprendizagens (Santos, 2002). Note-se que a mudança do estatuto do erro, no contexto da sala de aula, é condição necessária para a auto-regulação das aprendizagens dos alunos: o erro passa de algo a esconder para algo inerente a todo o processo de aprendizagem (Hadji, 1994; Pinto & Santos, 2006), que pode dar informações importantes para a apoiar. Esta concepção de erro como ponte para a aprendizagem (Borasi, 1996; Cury, 2007) guiou todo o trabalho realizado nesta investigação.

Quando abordamos o erro em Educação Matemática, é fundamental sabermos de que modo os erros dos alunos podem ser classificados. Na literatura por nós revista, adoptámos a perspectiva de Socas (1997), que discute as dificuldades de aprendizagem em Matemática e as suas distintas origens.

Para este autor, o erro tem origens diferentes e pode ser visto como resultante da presença de um processo cognitivo inadequado e não apenas como consequência de uma falta de conhecimentos específicos ou de uma distracção. Além disso, Socas (1997) considera que os erros de aprendizagem em Matemática se devem a certas dificuldades que podemos agrupar em três categorias, codificadas do seguinte modo:

Código A – Erros com origem num *obstáculo cognitivo*. Estes erros são referidos como conhecimento adquirido, e não como uma falta de conhecimento, que provou ser eficaz em determinado contexto (Ruano, Socas & Palarea, 2003). Quando o aluno utiliza esse conhecimento fora de tal contexto, provoca respostas inadequadas (exemplos: erros de *eliminação*[1], erros de *concatenação*[2]).

Código B – Erros que têm a sua origem *numa ausência de sentido*. A categoria está dividida nas três subcategorias seguintes: **código B1 –** Erros da Álgebra que têm a sua origem na Aritmética. Para entender a generalização das relações e processos algébricos, é necessário que o aluno as tenha assimilado no contexto da Aritmética, mas nem sempre isso acontece (exemplos: uso inadequado de parêntesis, erros por *transposição*[3], erros de *divisão*[4],...); **código B2** – Erros com origem na utilização, pelos alunos, de fórmulas ou regras de procedimento de modo indevido (exemplo: aplicação inadequada da propriedade distributiva); c**ódigo B3** – Erros devido às características da linguagem algébrica (exemplos: erros com origem na incompreensão do significado do sinal de igual em Álgebra, erros na substituição formal de variáveis).

Código C – Erros com origem *em atitudes afectivas ou emocionais* (exemplos: falta de concentração, excesso de confiança, esquecimento).

A Avaliação no PMEB

[1] Erro por *eliminação*: por exemplo, simplificar $39x - 4$ como $35x$ ou $2xy - 2x$ como y.
[2] Erro de *concatenação*: erro devido à justaposição de dois ou mais símbolos, por exemplo $-1+ 2x = -12x$.
[3] Erro por *transposição*: por exemplo, simplificar $x + 5/2 = 3$ como $x + 5 = 6$.
[4] Erro de *divisão*: por exemplo, simplificar $3x = 2$ como $x = 1{,}5$.

O PMEB (ME-DGIDC, 2007) refere a importância da avaliação como veículo de informação, para o professor, sobre a evolução do desempenho dos seus alunos, nomeadamente, analisando os seus problemas ou lacunas na aprendizagem e procurando formas de os levar a ultrapassá-los. "A avaliação deve, por isso, fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem" (p. 12). É de salientar o carácter predominantemente formativo e regulador da avaliação, bem como a abordagem positiva do erro veiculados por este documento.

No estudo que originou este artigo, entendemos por regulação das aprendizagens "todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77). De facto, "se queremos 'gerir' o erro, para lá do desempenho registado, é preciso tentar determinar as razões que lhe deram origem, e dizer o que ele revela dos conhecimentos adquiridos ou das falhas do aluno" (Hadji, 1994, p. 125). Assim, a análise das produções escritas dos alunos permite, entre outros aspectos, identificar erros e distinguir a sua natureza, exigindo, simultaneamente, diferentes procedimentos pedagógicos para a sua superação. Na verdade, "a ultrapassagem dos erros só pode ser feita por aqueles que os cometem, e não por aqueles que os assinalam, uma vez que as lógicas de funcionamento são diferentes" (Leal, 1992, p. 51).

O Erro, o *Feedback* Escrito e o Questionamento Oral

Semana e Santos (2009) realçam várias estratégias que o professor pode adoptar para que os alunos possam desenvolver a sua capacidade de, em particular, identificar os erros por si cometidos e desencadear mecanismos que os ajudem a ultrapassá-los. Deste modo, poderemos rentabilizar o erro para a aprendizagem (Santos *et al*., 2010). Entre as práticas de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos, enquadradas numa abordagem positiva do erro e privilegiadas neste trabalho, destacamos o *feedback* escrito e o questionamento oral (Santos, 2008).

Várias investigações evidenciam que os professores, ao utilizarem o *feedback* escrito, de forma sistemática, provocam ganhos significativos nas aprendizagens dos alunos (Black & Wiliam, 1998) e nas suas capacidades de identificação e auto-correcção dos seus erros (Santos, 2008). Mais ainda, a existência de uma cultura de avaliação, na sala de

aula, que regule as aprendizagens dos alunos aumenta o conhecimento do professor acerca deles, facilitando e melhorando a qualidade do *feedback* escrito (Santos, 2002), o que promoverá o desenvolvimento de uma avaliação cada vez mais reguladora. No Quadro 1 sistematizamos algumas das características que um *feedback* escrito deve e não deve ter para que seja cada vez mais eficaz na promoção de uma aprendizagem mais duradoura. De referir que "o *feedback* nunca deve ser dado antes de o aluno ter oportunidade para pensar e trabalhar na tarefa (...) e preferencialmente devem ser escolhidas tarefas ainda não classificadas, nas quais os alunos tenham ainda oportunidade de melhorar" (Santos *et al*., 2010, p. 65).

Quadro 1: Características de um *feedback* escrito mais eficaz

DEVERÁ	NÃO DEVERÁ
(1) recorrer à forma interrogativa e a uma linguagem acessível, concreta e contextualizada (Santos & Dias, 2006);	(1) ser dirigido ao aluno nem incluir juízos de valor (Santos *et al*., 2010);
(2) ser claro e informativo (Santos, 2002);	(2) limitar-se a mencionar a incompletude da resposta, sem indicar pistas suficientes para o aluno progredir (Santos, 2002);
(3) dirigido à tarefa (Wiliam, 2007);	(3) ser escrito com caligrafia pouco legível (Santos, 2002);
(4) ser diversificado e adequado a cada aluno (Santos & Dias, 2006);	(4) ser acompanhado da classificação do aluno obtida na realização da tarefa (Wiliam, 2007);
(5) apontar pistas de acção futura e incentivar o aluno a reanalisar a resposta dada (Santos, 2008) ;	(5) incluir a correcção do erro (Santos, 2002);
(6) referir e reconhecer o esforço dos alunos (Santos, 2008).	(6) incluir simbologia (Santos & Dias, 2006)
	(7) ser culpabilizante (Pinto & Santos, 2006)

Apesar de o *feedback* escrito ter grandes potencialidades para ajudar os alunos a aprender, estudos efectuados evidenciam que dar *feedback* escrito exige muito tempo e conhecimento (a vários níveis) por parte do professor (Leal, 1992; Santos *et al*., 2010), tornando esta tarefa bastante complexa.

Uma outra vertente de avaliação reguladora utilizada no estudo é o questionamento oral, entendido como um processo interactivo, realizado na sala de aula, através do questionamento professor/turma, professor/aluno, ou aluno/aluno (Santos, 2008). O questionamento é, possivelmente, uma rotina na sala de aula e é, também, uma das

formas naturais conducentes a uma prática de avaliação reguladora; neste sentido, Santos (2008) realça o poder regulador do questionamento oral, quando afirma que:

> (i) acontece a par com as experiências de aprendizagem, permitindo uma regulação no momento; (ii) recorre à forma mais habitual de comunicação entre professor e alunos - a forma oral, e (iii) a sua responsabilidade pode deslocar-se do professor para o aluno sem constrangimentos de qualquer espécie, para além naturalmente do nível de desenvolvimento da capacidade dos alunos para o fazerem. (p. 18)

Para que o questionamento oral possa ser efectivamente regulador, terá de: (1) ser intencional; (2) ser participado pelos diferentes elementos da comunidade; (3) ter subjacente uma concepção do erro como fenómeno inerente à aprendizagem, consequentemente, o erro não pode servir para distinguir os que erram dos que não erram; (4) privilegiar e respeitar diferentes estratégias de raciocínio; e (5) reconhecer a comunidade turma com legitimidade para validar ou corrigir raciocínios e processos (Santos, 2008). No entanto, apesar de o questionamento oral ser um processo facilitador da aprendizagem, reconhecemos as dificuldades inerentes à sua implementação. De facto, para que o questionamento oral possa promover a auto-regulação das aprendizagens dos alunos, o professor deverá saber, em cada momento, colocar as questões adequadas às situações vivenciadas pelos alunos, o que não é fácil.

Metodologia

O estudo seguiu uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) e o *design* de estudo de caso (Merriam, 1988). Foi realizado numa turma de 7.º ano leccionada pela investigadora, primeira autora desta comunicação, no ano lectivo de 2009/10, numa escola secundária do distrito do Porto. A turma tinha 27 alunos, com 12 anos de média de idade no início do ano lectivo. Foram escolhidos três alunos para casos. A escolha baseou-se na frequência do 7.º ano pela primeira vez, na possibilidade de reunir com a investigadora fora das aulas e em níveis de desempenho a Matemática diferenciados (recorrendo ao aproveitamento escolar em 2007/08 e 2008/09). Nesta comunicação abordamos apenas o caso de Maria (pseudónimo).

Sendo a investigadora professora da turma, a observação feita foi de carácter participante. Para este estudo, foram observadas e gravadas em áudio três aulas relativas ao tópico *Sequências e Regularidades* que se desenrolaram em torno de duas tarefas. A primeira – *Investigando Robôs* – foi trabalhada em pequenos grupos, seguindo-se uma

discussão com toda a turma. A segunda tarefa – tarefa do W – foi trabalhada em duas fases.

No Quadro 2 apresentamos os diferentes instrumentos de recolha de dados utilizados, relacionando-os com as questões de investigação. A intensidade do sombreado revela o grau de importância que cada instrumento teve para dar resposta a cada questão de investigação; por exemplo, para responder à primeira questão foram mais importantes a recolha documental (das produções escritas da aluna) e a observação das aulas.

Quadro 2: Relação entre as questões de investigação e os instrumentos de recolha de dados

Questão de investigação	Entrevistas	Observação de aulas	Notas de campo	Recolha documental
Questão 1				
Questão 2				
Questão 3				

Foram realizadas cinco entrevistas a Maria, gravadas em áudio e posteriormente transcritas na íntegra. Para a recolha documental, foram reunidas as produções escritas da aluna durante a realização das entrevistas e as elaboradas durante as aulas observadas.

A análise dos erros cometidos por Maria, nas produções recolhidas, foi informada pelas categorias de Socas (1997). O questionamento oral e o feedback escrito foram analisados tendo por base o quadro teórico de referência.

Apresentação e Discussão de Resultados

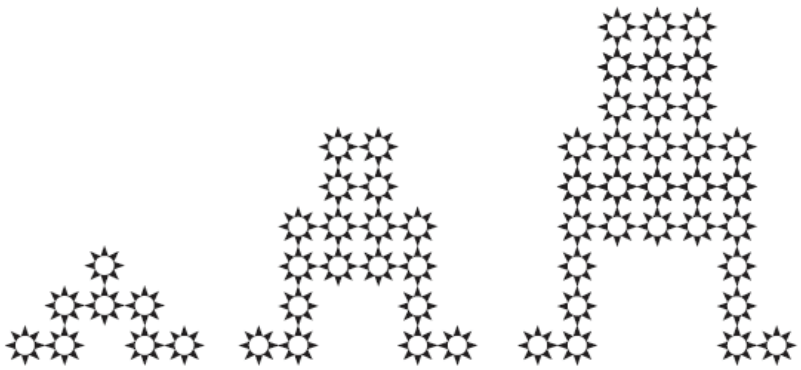
Maria é uma aluna que terminou o sexto ano com um desempenho médio na disciplina de Matemática. Não gosta de errar e é persistente. Escolhemos as respostas de Maria a duas tarefas para ilustrar, não só os erros, mas também os efeitos dos dispositivos de regulação usados pela professora e a interacção desenvolvida com os seus pares na consciencialização e superação por parte de Maria desses mesmos erros.

A Tarefa *Investigando Robôs*

A tarefa *Investigando Robôs* (adaptada pelo grupo de professores da escola que leccionavam o 7.º ano) envolvia, entre outros aspectos, a determinação do termo geral

de uma sequência e a explicitação do raciocínio desenvolvido através de uma pequena composição. Esta tarefa foi trabalhada durante uma aula de 90 minutos em pequenos grupos e, na aula seguinte, foi discutida em grande grupo. A análise que a seguir se apresenta recai sobre a questão 4 desta tarefa (Figura 1):

1.Observa os diferentes robôs:



Robô 1 **Robô 2** **Robô 3**

4. Consegues, agora, descobrir por quantos sóis é formado o robô de ordem n? Por outras palavras, qual o **termo geral** da sequência que tens estado a estudar? Numa pequena **composição** explica como pensaste para responder a esta última questão.

Figura 1: Introdução e Questão 4 da tarefa *Investigando Robôs*.

Na resolução desta tarefa, Maria comete um erro identificado no modelo utilizado como tendo a sua origem num *obstáculo cognitivo* (código A). Maria começa com a descrição do padrão que constitui cada parte do robô, explica como relaciona cada figura representada com a sua ordem e procede à explicação da regra de formação das partes de qualquer figura da sequência (Figura 2). Todavia não evidencia, na sua composição escrita, uma visão da regularidade apresentada. Por exemplo, a relação que existe entre o número de sóis que constituem a cabeça e o tronco do robô de ordem *n* está errada. A expressão simbólica de cada peça também está incorrecta, nomeadamente o número de sóis de cada pé, que é sempre igual, independentemente da ordem de cada robô. Além disso, Maria não revela intenção de adicionar cada parte do robô de modo a obter um todo e, consequentemente, a expressão algébrica que iria representar o termo geral não figura na sua produção.

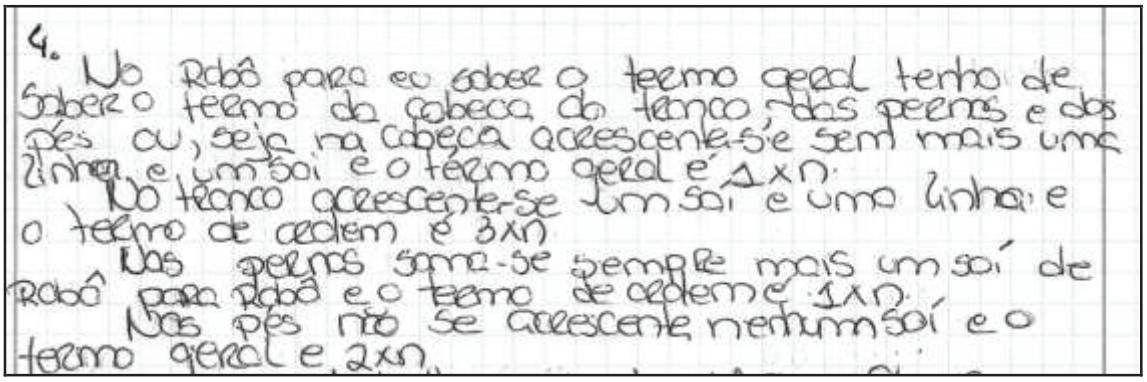

4. No Robô para eu saber o termo geral tenho de saber o termo da cabeça do tronco, das pernas e dos pés ou, seja na cabeça acrescenta-se sempre uma linha e um saí e o termo geral é 1×n.
No tronco acrescente-se um saí e uma linha e o termo de ordem é 3×n
Nas pernas soma-se sempre mais um saí de Robô para Robô e o termo de ordem é 1×n.
Nos pés não se acrescente nenhum saí e o termo geral é 2×n.

Figura 2: Composição de Maria.

A discussão da composição apresentada por Maria foi, posteriormente, realizada na aula. Com as indicações dos colegas, a aluna consegue tomar consciência dos erros que tinha cometido e corrigi-los, como se ilustra no seguinte extracto:

> Professora: Maria, lê alto a tua composição para os teus colegas.
>
> Maria: Eu sei que escrevi coisas erradas, porque vi com a Rita… Posso emendar agora?
>
> Professora: Podes. [Voltando-se para a turma] Ninguém interrompe. Se quiserem dizer alguma coisa, registam no caderno, para não se esquecerem, e no fim discutimos. Ok?
>
> Maria: [Começa por ler o primeiro período do texto que escreveu]. Eu aqui enganei-me, posso ir ao quadro?
>
> Professora: Sim, claro. Não te esqueças que tens de fazer a composição.
>
> Maria: [Já no quadro, desenha um quadrado com várias pintas]. Isto é a cabeça do robô, que vai aumentando, uma linha e uma coluna.
>
> Professora: Sim, qual é a expressão geral que nos vai dar a cabeça de qualquer robô? Tu escreveste que era 1 vezes *n*. Ainda és da mesma opinião?
>
> Maria: Não, como as pintas fazem um quadrado não pode ser 1 vezes *n*, tem que ser *n* vezes *n*. No tronco fica um rectângulo, acrescento sempre uma linha e uma coluna. Nas pernas e nos pés, eu tenho bem.
>
> Professora: Diz aos teus colegas o que escreveste.
>
> Maria: [lê os dois últimos parágrafos da composição]
>
> Professora: Quantas pintas contaste em cada pé?
>
> Maria: Sempre dois.
>
> Diogo: Se usas sempre dois, como é que dizes que a expressão é dois vezes *n*? Tem que ser sempre 4.
>
> Maria: Pois é, eu até desenhei vários robôs sempre com duas pintas em cada pé.

Filipe: As pernas também estão mal. Olha para o quadro da 3. Quantas pintas contaste nas pernas?

Maria: No 1, está zero; no 2, está uma; no 3 estão duas, vai sempre tirando uma. A expressão pode ser n - 1

Jorge: Pois, mas cada robô só tem uma perna?

Maria: Pois não! Então, tenho que multiplicar por dois…Vai ser 2 vezes n - 1. [escreve no quadro $2n$-1]

Lara: Esqueceste-te do parêntesis!

Maria: Porquê?

Professora: Tu disseste que tínhamos de multiplicar por dois, não foi?

Maria: Ah! Multiplico por dois o n-1. Por isso é que a Lara disse que faltam parêntesis…

(Aula, 10/11/2009)

A análise deste extracto permite-nos inferir que, quer o *feedback* dado pelos colegas, quer o questionamento oral da professora e dos colegas foram determinantes na regulação da aprendizagem de Maria. De realçar a intencionalidade nas questões colocadas pela professora, a contribuição de vários alunos neste diálogo (inclusive estratégias diferentes das de Maria) e a forma como todos encaram o erro, como trampolim para a aprendizagem.

A Tarefa do W

A tarefa do W (Ponte, Branco & Matos, 2009) envolvia a determinação de alguns termos de uma sequência e a apresentação do termo geral respectivo. Esta tarefa foi trabalhada em sala de aula em duas fases. A professora forneceu *feedback* escrito às primeiras resoluções dos alunos e, numa aula posterior, eles puderam voltar a trabalhar nas suas produções, procurando melhorá-las com base no *feedback* fornecido. Discutimos aqui as resoluções de Maria à alínea b) da tarefa do W (Figura 3).

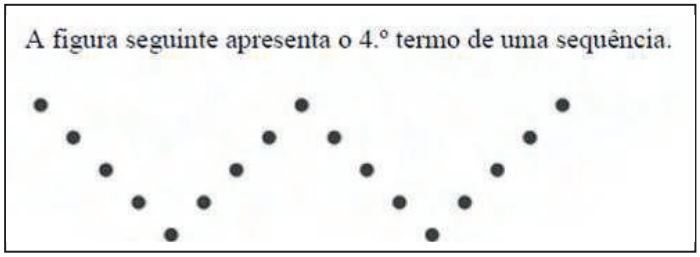


Figura 3: Alínea b) da tarefa do W.

Maria, na resolução desta questão (Figura 4), apresenta um erro enquadrado, segundo Socas (1997), no grupo codificado com B - erro que tem a sua origem numa ausência de sentido. A aluna não encontra sentido no uso da linguagem algébrica em determinados contextos, não sabe como trabalhar com letras ou estas não têm significado para ela. Escrevendo uma igualdade que assume como termo geral da sequência, a aluna aparenta não ter desenvolvido a capacidade de estabelecer generalizações e revela ainda não se ter apropriado dos conceitos de termo de uma sequência, respectiva ordem e termo geral.

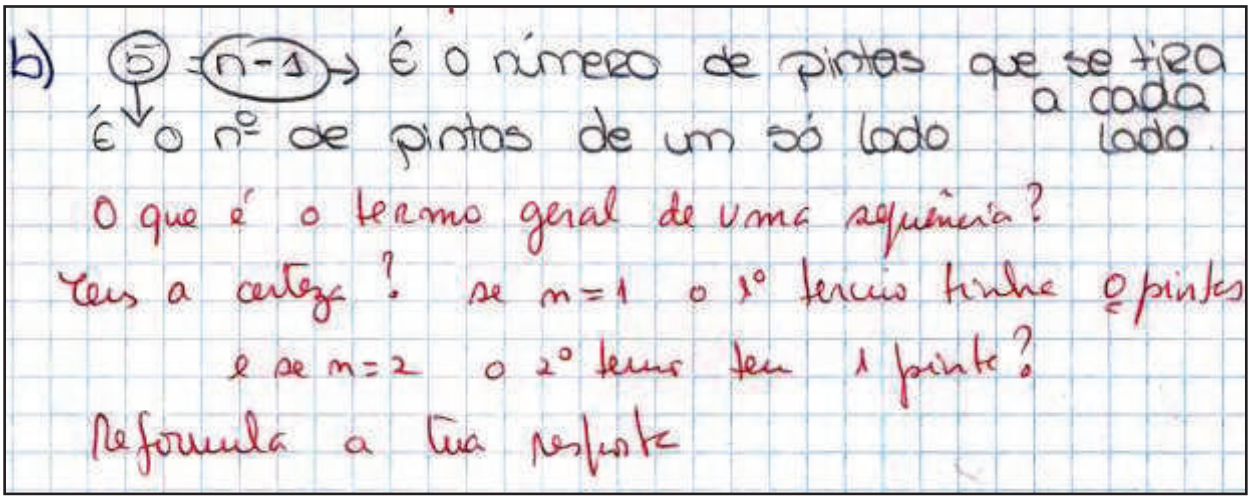


Figura 4: 1ª fase da resolução de Maria à alínea b) da tarefa do W.

O *feedback* apresentado tem forma interrogativa, é dirigido à tarefa, mas apresenta uma pista de acção futura vaga. Teve como objectivos ajudar a aluna a ultrapassar ideias erróneas e conduzi-la ao desenvolvimento de estratégias de resolução eficientes. Porém, não parece ter surtido qualquer efeito, uma vez que a aluna apresenta, na 2ª fase, uma resolução muito idêntica à anterior (Figura 5) e não responde às questões colocadas pela professora.

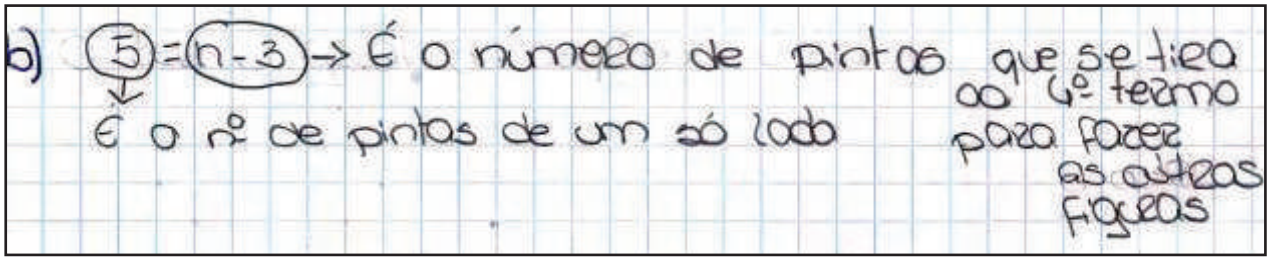


Figura 5: 2ª fase da resolução de Maria à alínea b) da tarefa do W.

Em entrevista posterior à realização desta tarefa, Maria refere alguma dificuldade em perceber o *feedback* dado à sua produção, *feedback* este que apela directamente ao conteúdo matemático necessário à resolução da tarefa:

> Professora: Percebeste o que eu queria dizer com o comentário que escrevi na 1ª fase?
>
> Maria: No comentário que a professora fez a única parte que não percebi foi a primeira pergunta que fez.
>
> Professora: O que é o termo geral de uma sequência?
>
> Maria: Sim, não sabia que era uma expressão sem sinal de igual e que tinha que resultar para qualquer n.
>
> Professora: O que achaste que estava mal na resolução da 1ª fase?
>
> Maria: Eu achei que estava mal o valor de *n* por causa do que a Stora escreveu.
>
> Professora: Consegues descrever o teu raciocínio?
>
> Maria: Eu primeiro contei as pintas só de um lado [5] depois ao olhar para a figura pensei que *n* era igual a um, pois na figura está uma bola de cada vez.
>
> Professora: Tinhas pensado em casa na tarefa entre a 1ª e a 2ª fases?
>
> Maria: Em casa pensei na 1ª fase para depois tentar fazer melhor, mas não deu, porque não sabia o que ia ter mal...
>
> (Entrevista, 27/11/2009)

Conclusões

Os principais erros cometidos por Maria, na resolução das tarefas analisadas nesta comunicação, têm, essencialmente, a sua origem num obstáculo cognitivo, mas também na ausência de significado (dificuldade na obtenção do termo geral de uma sequência). A dificuldade de Maria em encontrar uma generalização de regularidades, através do uso de variáveis, foi recorrente nas tarefas analisadas. Estas constatações são consistentes com a literatura existente sobre o tema (Ruano *et al.*, 2003; Socas, 1997).

Como a principal finalidade era que Maria conseguisse identificar e corrigir sozinha os seus erros, o *feedback* fornecido tinha de dar, embora não explicitamente, alguma pista do conteúdo que melhor servisse aquela resposta. O *feedback* escrito fornecido, dirigido directamente ou ao conteúdo matemático necessário à resolução ou à tarefa, nem sempre se revelou eficaz, nomeadamente quando Maria evidenciava falta de conhecimento sobre os tópicos matemáticos abordados.

Apesar de reconhecer os erros cometidos, Maria parece não entender o que lhe é pedido no *feedback* escrito que lhe é fornecido ou o procedimento que tem de adoptar para prosseguir. Se as pistas fornecidas pelo professor não são entendidas pelos alunos, ou se o são, mas não possibilitam a correcção dos seus erros, então é necessário fornecer *feedback* às produções dos alunos de forma regular e melhorar essa prática progressivamente (Black & Wiliam, 1998; Santos & Dias, 2006).

O questionamento oral revelou-se mais eficaz no desenvolvimento da aprendizagem de Maria do que o *feedback* escrito, uma vez que aquele é uma interacção imediata que a vai ajudando a orientar as diversas etapas do seu raciocínio. Já o outro tipo acontece de uma só vez e, nos casos apresentados, recorre a conceitos que a aluna parece ainda não dominar.

Referências

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles Policy and Practice*, *5*(1), 7 – 73.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction*: *A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Cury, H. N. (1995). Retrospectiva histórica e perspectivas actuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké*, *3*(4), 39 – 50.

Cury, H. (2007). *Análise de erros*: *o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo. Das intenções aos instrumentos.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Martins, M. P. (1996). *A avaliação das aprendizagens em Matemática: concepções dos professores* (Tese de mestrado. Universidade Católica Portuguesa). Lisboa: APM.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ministério da Educação (ME-DGIDC) (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Acedido a 20 de Maio, 2009, de http://sitio.dgidc.min edu.pt/matematica/Documents/Programa Matematica.pdf.

Ruano, R., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. In E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico & A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada, Espanha: Editorial Universidad de Granada.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77 – 84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em matemática. Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SEM/SPCE.

Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Actas do ProfMat2006*. Lisboa: APM. (CD-ROM).

Santos, L., Pinto, J., Rio, F., Pinto, F., Varandas, J., Moreirinha, O., Dias, P., Dias, S., & Bondoso, T. (2010). *Avaliar para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora e Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Semana, S., & Santos, L.(2009). Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em Matemática. *Actas do XXSIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)* (pp. 488-499). Lisboa: APM.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Vale, L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte: Information Age Publishing.

SIMPÓSIO 5

CONHECIMENTO E PRÁTICAS PROFISSIONAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

CONHECIMENTO E PRÁTICAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP
rferreir@fc.up.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu & CIDETS
menezes@esev.ipv.pt

Não é por acaso que o SIEM tem vindo ultimamente a dedicar um espaço específico à discussão de trabalhos de investigação realizados em torno de questões relativas ao conhecimento e às práticas profissionais do professor de Matemática. De facto, estas temáticas têm estado, de forma recorrente, no panorama de investigação, nacional e internacional, em Educação Matemática. Neste texto, após uma breve introdução a esta temática, procuramos enquadrar no cena actual de investigação na área as comunicações que constituem este *simpósium*.

Os conhecimentos e as práticas profissionais estão intimamente ligados, podendo ser considerados como duas faces da mesma moeda. Apesar desta ligação estreita, tem existido em algumas áreas, como na Educação, uma tendência para olhar o conhecimento e as práticas dos professores como realidades distintas, uma de natureza interna (o conhecimento) e outra de natureza externa (as práticas). Nesta visão do conhecimento e das práticas profissionais dos professores é comum privilegiar um sentido da relação, o sentido do conhecimento para a prática. Para compreender melhor a natureza da relação entre o conhecimento e as práticas profissionais, para estarmos em condições de apontar contextos e dispositivos que permitam o desenvolvimento dos professores, temos necessidade de discutir, de forma naturalmente breve, do que falamos quando nos referimos ao conhecimento profissional e às práticas profissionais.

O conhecimento do professor engloba todas as suas cognições que se vão desenvolvendo ao longo do tempo, tendo uma função adaptativa à realidade. Para Piaget (1967), todo o conhecimento está ligado à acção e conhecer um objecto ou um acontecimento implica representá-lo e incorporá-lo em esquemas de acção. Nesta perspectiva, a construção do conhecimento na acção assume uma tónica individual.

As perspectivas interaccionistas relativas à aprendizagem e desenvolvimento têm em Blumer (1998) uma referência importante, bem como, no âmbito da Educação Matemática, em Bauersfeld (1994, 1995). Estas perspectivas sustentam que o conhecimento está fortemente ligado à acção, embora considerem que este processo tem uma forte componente social, ou seja, a comunicação, através da linguagem, tem um papel decisivo na forma como cada um de nós desenvolve o seu conhecimento e dá significado às coisas.

A perspectiva sócio-histórica, inspirada nas ideias de Vygotsky (1998), defende uma visão da apropriação do conhecimento como um processo de enculturação. Assim, no caso do conhecimento profissional dos professores a fonte principal do conhecimento é a transmissão do conhecimento da comunidade académica e também da profissional.

Vários são os autores que se têm debruçado sobre a temática do conhecimento profissional dos professores (de Matemática), enfatizando aspectos distintos (e.g., Ball, Thames & Phelps, 2005; Boavida, 2005; Canavarro, 2003; Ruthven & Goodchild, 2008; Schön, 1983; Shulman, 1986). Para Ponte (2011), o conhecimento profissional do professor de Matemática está sujeito à influência de vários factores mas

> assume uma especificidade própria dependendo da sua actividade e também das condições em que é exercida. O conhecimento profissional do professor é, assim, acima de tudo, orientado para uma actividade prática (ensinar Matemática a grupos de alunos), embora se apoie em conhecimentos de natureza teórica (sobre a Matemática, a educação em geral e o ensino da Matemática) e também de natureza social e experiencial (sobre os alunos, a dinâmica da aula, os valores e a cultura da comunidade envolvente, a comunidade escolar e profissional, etc.). (p. 3)

Em Portugal, tem sido dada particular atenção ao conhecimento didáctico do professor de Matemática, referente aos aspectos da prática lectiva e envolvendo quatro dimensões: conhecimento do currículo, conhecimento da Matemática, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, e conhecimento dos processos de trabalho em sala de aula (Ponte & Oliveira, 2002). Apesar da sua marcada orientação para a prática lectiva, o conhecimento didáctico envolve também outros aspectos como o conhecimento do contexto (escola e comunidade, entre outros) e o conhecimento de si mesmo como professor (Ponte, 2011).

Segundo Ponte e Chapman (2006), as práticas dos professores podem ser entendidas como as actividades que eles regularmente conduzem, não esquecendo o seu contexto de trabalho e os significados que os professores dão a esses contextos e às suas acções, para além das intenções com que realizam essas acções. Ponte e Serrazina (2004) dividem as práticas profissionais dos professores em três grandes domínios: práticas lectivas, práticas profissionais na instituição, e práticas de formação. Dentro das práticas lectivas, podemos falar das tarefas que são concebidas, propostas aos alunos e acompanhadas em sala de aula, dos materiais usados na aula, da comunicação na sala de aula, e da avaliação das aprendizagens.

Mialaret (1998) defende que a prática dos profissionais, encarada como a sua actividade (ou seja, em sintonia com Ponte e Chapman (2006)), pode ser vista a três níveis. No primeiro, considera a actividade do professor de carácter *impulsivo*, face às situações da aula. Neste caso, o professor tem algumas dificuldades em explicar por que age de determinada forma, sendo, por este motivo, pouco provável que esta experiência venha a originar aprendizagem significativa, a não ser que depois venha a reflectir sobre a situação, desconstruindo-a.

No segundo nível, Mialaret (1998) considera práticas de *rotina* que resultam da aplicação de conhecimentos que o professor já possui, e que podem assumir a forma de regras de acção. Neste nível, as práticas dos professores tendem a ser repetitivas e por vezes estereotipadas. O autor fala mesmo de uma prática segundo a aplicação de receitas, correndo-se o risco de o professor se tornar insensível às incidências da aula, ao tomar como habituais situações que o não são.

No terceiro nível de práticas, a *experiência é geradora de conhecimentos*, resultante da "procura de uma solução – eventualmente original – para os problemas encontrados na realidade quotidiana" (Mialaret, 1998, p. 164). O autor considera que a prática do professor ganha se tender para este terceiro nível, uma vez que as situações educativas colocam continuamente novos problemas, que exigem a reflexão e novas linhas de acção – esta actividade do professor conduz à formação de conhecimento didáctico. Nestes termos, a prática profissional é gerada e geradora de conhecimento, na medida em que ela é informada por conhecimento (com proveniência diversificada) e fonte de conhecimento. A formação do conhecimento didáctico, à custa da procura e investigação de problemas surgidos no dia-a-dia, pode ser realizada de forma mais ou menos sistemática, consoante as situações colocadas e a disponibilidade do professor.

Cochran-Smith e Lytle (1999) discutem o papel da prática na génese e desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores, apontando três perspectivas. Na primeira, a que chamam *conhecimento para a prática* (*knowledge for pratice*), a fonte do conhecimento profissional do professor está na investigação. O conhecimento que o professor necessita para ensinar vem de fora da profissão e da escola, através de processos de importação, seguidos de aplicação à prática. Nesta concepção do conhecimento profissional, o professor é um utilizador ou consumidor.

Na perspectiva de Cochran-Smith e Lytle (1999), existe uma segunda concepção da relação entre o conhecimento e a prática, a que os autores chamam de *conhecimento na prática* (*knowledge in pratice*). Nesta perspectiva, o conhecimento profissional do professor é adquirido a partir da reflexão sobre a experiência, em situações de ensino. Esta forma de aquisição do conhecimento profissional representa uma rompimento com a primeira perspectiva, tanto ao nível da natureza do conhecimento, e da sua relação com a prática, como ao nível do papel do professor e dos mecanismos de desenvolvimento profissional. Esta forma de entender o conhecimento dos profissionais, leva Schön (1998) a destacar o conhecimento na acção, um tipo de conhecimento tácito que os profissionais vão adquirindo com a experiência. Deste modo, a génese e o uso do conhecimento estão intimamente ligados na figura do profissional – presume-se uma ligação próxima entre conhecimento e conhecedor. Este tipo de conhecimento (que noutros autores toma diversas designações como *conhecimento prático, conhecimento na acção, conhecimento artesanal, conhecimento artístico*) insere-se numa visão sócio-construtivista da aprendizagem.

Na terceira perspectiva da relação entre o conhecimento e a prática, Cochran-Smith e Lytle (1999) defendem que o dualismo teoria/prática não se coloca, em termos da supremacia de uma delas sobre a outra, como nas duas perspectivas precedentes. Cochran-Smith e Lytle designam esta concepção de *conhecimento da prática* (*knowledge of pratice*), concepção esta que se distancia das anteriores quanto à natureza do conhecimento e na forma como se gera e usa. Não se trata de um conhecimento formal, típico da primeira perspectiva da ciência aplicada, nem de um conhecimento prático, que os professores adquirem através da reflexão sobre a acção. Trata-se de um tipo de conhecimento de um nível intermédio, que procura conciliar o uso de ferramentas teóricas características da investigação normalmente realizada em universidades, mas com uma grande ligação à escola e às aulas. É um tipo de

conhecimento em que o professor é protagonista, trabalhando frequentemente em equipa com outros professores, responsáveis educativos e investigadores, criando conhecimento didáctico, a partir da investigação de problemas que emergem das suas práticas.

Vivemos presentemente um momento de mudança com a introdução e generalização do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Esta nova realidade curricular motiva mudanças nas concepções dos professores sobre o que é ensinar e aprender matemática, bem como mudanças nas suas práticas lectivas. Necessariamente surgem novas exigências ao conhecimento profissional do professor, conhecimento esse que vai muito além, ou melhor, vai principalmente além da formação inicial. Tanto a experiência lectiva como o envolvimento dos professores em acções de desenvolvimento profissional, de natureza diversa, influenciam o seu conhecimento profissional (e.g., Martinho, 2007; Menezes, 2005; Pimentel, 2010; Saraiva, 2002), mas não podemos também esquecer a importância dos contextos em que os professores trabalham como exercendo igualmente uma influência significativa no desenvolver do seu conhecimento e das suas práticas profissionais. Em particular, vários estudos têm sido desenvolvidos envolvendo contextos diversificados de trabalho colaborativo entre docentes (Boavida & Ponte, 2002; Ferreira, 2006; Hargreaves, 1998; Nunes & Ponte, 2008; Pimentel, 2010; Santos, 2000; Saraiva, 2002; Sowder, 2007) chamando a atenção para as condições necessárias para que esse trabalho seja efectivamente produtivo e gerador de desenvolvimento profissional a vários níveis.

Quando falamos de conhecimento e práticas profissionais de professores de Matemática é quase inevitável abordarmos também aspectos relativos ao desenvolvimento profissional e à formação do professor de Matemática. Estas duas temáticas têm também ganho recentemente uma grande atenção por parte da comunidade de investigação em Educação Matemática (e.g., Boavida, 2006; Martinho, 2007; Menezes, 2004; Tomás Ferreira, 2005; Viseu, 2008). É claro o reconhecimento do professor como uma figura fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e, portanto, é essencial compreender os processos que o apoiam profissionalmente, e pelos quais ele se desenvolve e progride na profissão.

Tanto a formação inicial como a formação contínua são modos de promoção do desenvolvimento dos professores (Ponte, 1998). No nosso país, estes modos assumem formas muito diversificadas e focos e metodologias de trabalho muito distintos. Recentemente, várias iniciativas de formação têm privilegiado contextos de trabalho colaborativo de professores (Boavida, 2005; Menezes & Ponte, 2006; Pimentel, 2010), reforçando a importância deste contexto de trabalho no desenvolvimento profissional dos professores, em particular no desenvolvimento do seu conhecimento profissional e na melhoria das suas práticas.

As várias comunicações que constituem este *simpósium* abordam as questões do conhecimento e das práticas profissionais, colocando, contudo, enfoques distintos e relacionando estas duas áreas de forma diferente. Alguns textos debruçam-se sobre as práticas de comunicação professor-alunos na sala de aula tendo em conta os desafios que a actual situação curricular vivida em Portugal coloca a todos os professores. Os aspectos de gestão curricular são também discutidos enfatizando-se o papel do professor nesse processo num contexto de trabalho colaborativo. As concepções dos professores face aos desafios que enfrentam na implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico são objecto de análise bem como o conhecimento profissional de professores do 1.º ciclo e a noção de conhecimento para ensinar matemática com a tecnologia. Relativamente à formação inicial e contínua, discutem-se aspectos da parceria escola-universidade no desenvolvimento do estágio pedagógico, aspectos do conhecimento matemático de futuros professores e aspectos da contribuição de iniciativas de formação contínua para a mudança de práticas lectivas dos professores e para a melhoria do seu conhecimento profissional.

No texto de Ponte e Velez, são analisadas as concepções dos professores do 1.º ciclo relativamente a vários aspectos do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, tais como as finalidades e objectivos deste programa, a selecção de tarefas, os modos recomendados de trabalho em sala de aula e a gestão curricular. De salientar que as concepções dos professores que participaram neste estudo sofreram já a influência das práticas lectivas desses professores nesta nova realidade curricular, tendo sido possível também abordar os desafios que enfrentaram na sua adaptação ao novo programa e o balanço que já conseguiram fazer sobre todo o processo.

O estudo apresentado por Caseiro debruça-se sobre o conhecimento estatístico e o conhecimento estatístico para ensinar de professores do 1.º ciclo, discutindo algumas implicações no quadro do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Baseando-se na noção de conhecimento para ensinar matemática com a tecnologia, Rocha analisa as práticas de utilização da calculadora gráfica de uma professora e os factores que motivam essas práticas.

As práticas de comunicação professor-alunos na sala de aula, incluindo a negociação de significados, são objecto de estudo nos textos de Guerreiro e de Alves e Mamede. Embora realizados em contextos diversos e com focos distintos – o primeiro constitui um trabalho de natureza colaborativa entre professores e investigador enfatizando os processos de negociação de significados e o segundo é um estudo de carácter naturalista caracterizando o modo como se promove a comunicação na sala de aula – é claro o enfoque de ambos os textos na importância da comunicação na aula para a promoção das aprendizagens dos alunos.

O contexto de trabalho colaborativo entre professores (apesar de estar também presente no trabalho defendido por Guerreiro) surge de forma particularmente destacada nos trabalhos apresentados por Nunes e Ponte, Lopes e Bailieiro Filho, e Curi e Santos. Em todos estes trabalhos se nota uma sintonia com o terceiro nível de práticas de Mialaret (1998) e com a terceira perspectiva do modelo proposto por Cochran-Smith e Lytle (1999) relativo à relação entre o conhecimento e a prática. O primeiro trabalho aborda as práticas de gestão curricular do grupo de professores de Matemática de uma escola, com enfoque na planificação, selecção de tarefas, uso do manual escolar, e partilha e reflexão sobre a prática.

O estudo relatado por Lopes e Bailieiro Filho, realizado no Brasil, envolve um grupo de professores em trabalho colaborativo com académicos, procurando, através da implementação em sala de aula de uma proposta didáctica baseada na resolução de problemas e nos jogos matemáticos, melhorar o conhecimento matemático dos docentes (na área das probabilidades) e as suas práticas de ensino. O trabalho de Curi e Santos, igualmente realizado no Brasil, apresenta-nos um contexto de trabalho colaborativo diferente dos trabalhos anteriores – envolvendo professores dos primeiros anos do ensino fundamental, futuros professores e docentes universitários – e um objecto de trabalho desse grupo também distinto: a análise dos resultados de uma prova de avaliação externa e suas implicações para o trabalho em sala de aula. Em todos estes

estudos é possível encontrar um traço comum e que diz respeito à importância do trabalho colaborativo para a análise da prática lectiva, para a reflexão sobre as aprendizagens dos alunos, para o desenvolvimento profissional dos professores e para a construção continuada da identidade profissional do professor de Matemática.

São várias as contribuições para este *simpósium* que se desenrolam em contextos de formação inicial e contínua. O texto por Oliveira é um estudo de avaliação que discute aspectos relacionados com a parceria escola-universidade no desenvolvimento do estágio pedagógico supervisionado, no âmbito de um programa de formação inicial numa instituição de ensino superior brasileira. O trabalho realizado por Tavares, Pinto, Rocha e Rodrigues aborda questões do conhecimento matemático de futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico em Portugal, com enfoque no sentido de número.

Souza apresenta-nos um estudo em que procurou investigar as transformações nas práticas lectivas percebidas pelos professores de Matemática no decurso da sua participação em acções de formação contínua. Santos e Curi apresentam um outro estudo realizado no âmbito de uma iniciativa de formação contínua focada no conhecimento didáctico do professor acerca das noções de área e perímetro. A contribuição de Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha e Portela propõe-nos uma reflexão sobre uma das iniciativas mais marcantes de formação contínua realizada em Portugal, à escala nacional, o Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Estes autores discutem os contributos de vários estudos realizados no nosso país tendo como pano de fundo este programa de formação contínua, centrando-se, entre outros aspectos, no desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores e na reflexão sobre as práticas.

Este *simpósium* conta ainda com uma comunicação em poster que se debruça sobre a identidade profissional do professor sem habilitação para a docência na Amazónia, Brasil. No poster apresentado por Sousa, são discutidos alguns factores influentes na construção da identidade profissional daqueles professores.

Referências

Ball D., Thames M., & Phelps G. (2005). Articulating domains of mathematical knowledge of teaching. Paper presented at the *2005 Annual Meeting of the American Education Research Association*: Montreal, Canada.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In

R. Biehler, R. Shooz, R. Sträβer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133 – 146). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in the mathematics classroom: Their function and their effects. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 271 – 291). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Blumer, H. (1998). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Berkeley: University of California Press. (trabalho original publicado em 1969)

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Boavida, A. (2006). Colaboração a propósito da argumentação na aula de Matemática. *Quadrante*, 15, 65-93.

Boavida, A. Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in a community. *Review of Research in Education*, 24, 249-305.

Ferreira, A. (2006). Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras. *Quadrante*, 15, 121-144.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança*. Lisboa: Mc Graw-Hill.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Menezes, L. (2004*). Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Lisboa: APM, Colecção Teses.

Menezes, L. & Ponte, J. (2006). Da reflexão à investigação: percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo na área de Matemática. *Quadrante*, 15, 3-32.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Mialaret, G. (1998). Savoirs théoriques, savoirs scientifiques et savoirs d'action en éducation. In J. Barbier (Ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 161-187). Paris: PUF.

Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Ed.) *O professor de Matemática e os projectos de escola* (pp. 11-37). Lisboa: APM.

Piaget, J. (1967). *Seis estudos de Psicologia*. Lisboa: Dom Quixote.

Pimentel, M. T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho).

Ponte, J. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In APM (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2011, in press). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking research with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 565-592). New York, NY: Routledge.

Santos, L. (2000*). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Colecção Teses.

Saraiva, M. (2002). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Um projecto colaborativo* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.

Schön, D. (1998). A la recherche d'une nouvelle épistémologie de la pratique et de qu'elle implique pour l'éducation des adultes. In J. Barbier (Ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 201-222). Paris: PUF.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sowder, S. (2007). The Mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. I, pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Tomás Ferreira, R. A. (2005). *Portuguese student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment* (Tese de doutoramento, Illinois State University, USA).

Viseu, F. (2008). *A formação do professor de Matemática apoiada por um dispositivo de interacção virtual no estágio pedagógico* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Vygotsky, L. (1998). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: CAMINHOS E POSSIBILIDADES

Régis Luíz Lima de **Souza**[1]
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FE/USP
Brasil
regisluiz@usp.br

Resumo

Este artigo é resultado de uma pesquisa que teve como propósito identificar transformações percebidas pelos professores de Matemática em sua prática docente frente aos cursos de formação continuada. Constituiu-se com o acompanhamento, dos cursos de formação (2005-2007) realizados no município de Barueri/SP – Brasil, bem como por meio de entrevistas com oito professores que participavam ativamente desses cursos há pelo menos três anos. Construímos um referencial teórico fundamentando os elementos – formação continuada, o professor do século XXI e a Etnomatemática. De modo geral, o desenvolvimento da pesquisa permitiu concluir que tais transformações dependem de um conjunto de fatores dos quais se destacam: dar voz ao saber da experiência, ouvir o professor e cursos voltados à realidade do município. As evidências/manifestações indicam que embora seja realizado um investimento considerável por parte do município em termos de formação continuada, os resultados têm sido pouco produtivos e promissores do ponto de vista dos professores que participam dessas formações.

Palavras-chave: educação, educação matemática, formação continuada, etnomatemática.

[1] Pesquisador associado ao GEPEm - Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática - FE/USP - Brasil. Atualmente cursa doutorado Co-tutela em Educação Matemática pela Universidade de São Paulo – Brasil, na linha de pesquisa – Ensino de Ciências e Matemática e na Universidade de Lisboa – Portugal, sob a orientação dos professores: Maria do Carmo Santos Domite (USP) e João Pedro Mendes da Ponte (Universidade de Lisboa).

Gênese das nossas inquietações

As motivações que me levaram a realização desta pesquisa surgiram ao término da minha graduação e ingresso no Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FE/USP. Trabalhando em um centro de aperfeiçoamento de professores e, partindo do pressuposto de que o professor pode influenciar diretamente nas atitudes dos alunos em relação à Matemática, passei a me questionar sobre a relação existente, ou não, entre a formação continuada de professores e a trajetória desse educador em sua prática na sala de aula, ou seja, como que essa formação continuada, de algum modo, influência sua postura como educador matemático, considerando-se a relação professor-aluno.

A pesquisa se justifica, além das questões mencionadas, pelo fato de que nos incomodam as relações que derivam dos discursos e saberes profissionais e dos programas de formação continuada, que na maioria das vezes são pensados, segundo Tardif (2002), como um modelo aplicacionista de racionalidade técnica, utilizado nas maneiras de conceber a formação dos profissionais e no qual os saberes antecedem a prática, formando uma espécie de repertório de conhecimentos prévios que são, em seguida, aplicados na ação.

Diante do exposto e levando-se em consideração os cursos de formação continuada de professores oferecidos pela Secretaria de Educação do município de Barueri/SP – Brasil, o trabalho se propôs a encaminhar respostas ao seguinte problema de pesquisa:

"Quais as transformações percebidas pelos professores de Matemática em sua prática docente frente aos cursos de formação continuada?"

Como consequência do foco principal da pesquisa, nos deparamos com outras duas questões auxiliares, as quais também procuramos encaminhar respostas. São elas:

"É possível compreender (a partir das dinâmicas de formação continuada) as transformações do professor (de Matemática) não só como um intelectual da educação, mas, em especial, como um profissional prático-reflexivo em sala de aula?"

"É possível compreender se as dinâmicas que se desenvolvem nesses cursos aguçam, de algum modo, o desenvolvimento profissional dos docentes, levando-os a dirigir de forma mais autônoma suas ações/reflexões sobre a própria prática na sala de aula?"

A partir desses questionamentos o objetivo geral de nossa investigação buscou identificar como os processos de formação continuada estão contribuindo para que os professores e professoras compreendam o seu desenvolvimento profissional de modo crítico e reflexivo.

Da fundamentação teórica

Para subsidiar as discussões bem como os resultados aqui apresentados construímos um referencial teórico fundamentando os elementos:

a) formação continuada – nos dias atuais, a formação continuada de professores tem se colocado como uma questão chave na busca da transformação dos atores em sala de aula e, por isso, cada vez mais se evidencia no âmbito da pesquisa educacional acadêmica. Na verdade, de um lado temos a crescente demanda dos educadores para compreender o que pode ser reconhecido como um bom ensino e, por outro lado, a percepção dos educadores de que a formação continuada de professores em diferentes instâncias do saber e da cultura, já há algum tempo vem sinalizando a necessidade da valorização e qualificação dos professores e professoras.

A concepção de relevância do "professor-reflexivo" que teve, de algum modo, sua origem em Schön (1992), uma prática de formação que tem gerado discussões/vertentes a partir do "saber da experiência" foco de atenção de Tardif, Lessarde & Lahaye (1991), as ideias em torno de debates acerca do "professor-pesquisador" Zeichner (1993), entre outros, são fatores que vêm apontando aos formadores, a necessidade de um processo reflexivo de aprendizagem contínua por parte do professor.

De acordo com Lüdke e Boing (2004), os cursos de formação continuada para professores devem reconhecer a necessidade de um profissional que se envolva com o cotidiano da escola e que possa intervir na construção e reconstrução dos processos que se desenvolvem nas instituições escolares. Logo, conforme nos alerta Nóvoa (1992), não podemos nos limitar a entender a formação continuada de professores como uma "formação que se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas de (re)construção de uma identidade pessoal".

Segundo Apple (1986), esses deficiências apontados por Nóvoa, caracterizam os cursos de formação continuada de professores como um modelo tecnicista, o qual adota

uma perspectiva "de fora para dentro". Nesse modelo o professor é visto como um técnico que tem a tarefa de implementar descobertas feitas por outros. No entanto, prossegue Apple, "os professores são profissionais capazes de julgar e entender suas próprias ações". Sendo assim, é preciso dar voz ao professor, ou seja, é necessário possibilitar aos professores "libertar-se da autoridade do discurso dos outros", conforme sugere Vasconcelos (1997).

b) o professor do século XXI – Essa discussão está especialmente inspirada na reflexão de Jeremy Kilpatrick e Edward Silver em um artigo sob o tema "Uma tarefa inacabada: desafios aos educadores matemáticos para as próximas décadas" (2004), que desenvolveram uma análise retrospectiva do progresso realizado no século XX em termos de educação matemática, explicitando uma visão sobre as questões que foram colocadas aos educadores matemáticos e, portanto, estão aí como desafios para as próximas décadas no século XXI. Segundo eles, são estes os principais marcos ou movimentos construídos/elaborados:

- Garantir uma educação para todos;
- Promover a compreensão dos educandos;
- Manter o equilíbrio no currículo;
- Formação de professores como desenvolvimento profissional;
- A avaliação como uma oportunidade de aprendizagem;
- Desenvolver a prática profissional;
- A importância da reflexão;
- Parâmetros Curriculares Nacionais – Texto sagrado ou instrumento de reflexão?

Nosso intuito em trazer aqui uma discussão desses movimentos/marcos – que desencadeados no final do século XX, desafiam o professor deste século – vem da convicção de que os professores sujeitos desta pesquisa estão, de um modo ou de outro, sendo encaminhados por essas demandas. Nessa perspectiva, como educador e pesquisador, analisamos os importantes desafios citados por Kilpatrick e Silver, acrescentando um marco à lista desses autores, apresentado em especial por, Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio, que pode ser assim explicitado: O aluno não pode se desenvolver isolado de seu contexto sociocultural.

Diante deste novo marco apresentado, procuramos criar laços de proximidades entre os ideais educacionais de Freire e D'Ambrósio, buscando por meio da

Etnomatemática encaminhar discussões no sentido de auxiliar na organização das ideias em torno do objeto de estudo, formação de professores, e aprofundá-la numa perspectiva cultural. Sendo assim, a Etnomatemática ganha destaque especial em nosso trabalho, não ainda como uma teoria, mas como um paradigma, que traz uma nova visão da Matemática e da Educação Matemática de feição antropológica, social e política, que passam a ser vistas como atividades humanas determinadas sócio-culturalmente pelo contexto em que são realizadas;

c) etnomatemática – Predispomo-nos a observar e discutir a Etnomatemática na Formação de Professores analisando se de fato tais cursos de aperfeiçoamento tem caminhado no sentido de promover o respeito na relação de diálogo[2] entre professor/educando e formador/educador, valorizando e evidenciando o encontro de diferentes grupos sociais.

Nesse sentido, Freire nos lembra que:

> (...) o diálogo e a problematização não adormecem ninguém. Conscientizam. Na dialogicidade, na problematização, educador-educando e educando-educador, vão ambos desenvolvendo uma postura crítica da qual resulta a percepção de que este conjunto de saber se encontra em interação. Saber que reflete o mundo e os homens no mundo, com ele explicando o mundo, mas, sobretudo, tendo de justificar-se na sua transformação. (FREIRE, 1983, p. 36).

E continua:

> (...) educar e educar-se, na prática da liberdade, é a tarefa daqueles que sabem que pouco sabem – por isto sabem que sabem algo e podem assim chegar a saber mais – em diálogo com aqueles que, quase sempre, pensam que nada sabem, para que estes, transformando seu pensar que nada sabem, possam igualmente saber mais. (FREIRE, 1983, p. 15).

Dessa forma, acreditamos que esta área de estudo está intimamente ligada ao nosso problema de pesquisa, pois nos parece claro que para que haja uma reflexão por parte do educador, deve também haver um respeito mútuo quanto às diferenças. Não podemos nos enganar em acreditar que um educador ao participar de um curso de formação esteja abdicando de suas experiências particulares; assim como nossos educandos também não se despem de seus costumes e saberes ao adentrar todos os dias em uma sala de aula.

[2] No sentido de Paulo Freire (1990), compreender as relações ideológicas e políticas que se vive em continuidade, como uma constante construção.

Do campo empírico e dos procedimentos metodológicos

A pesquisa buscou realçar a compreensão dos próprios questionamentos, por meio de métodos qualitativos, pois os objetivos aqui explicitados situam-se dentro de um enfoque sócio-histórico, que, segundo Bogdan & Biklen (1994), não se investiga em razão de resultados, mas o que se quer obter é a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação, correlacionada ao contexto do qual fazem parte, valorizando os aspectos descritivos e as percepções pessoais.

De acordo com Minayo (2001), esse modelo de investigação segue o desenho metodológico de uma "pesquisa estratégica", que permite ao pesquisador orientar-se para problemas que surgem na sociedade. Ainda que não preveja soluções práticas para esses problemas, tem a finalidade de lançar luz sobre determinados aspectos da realidade.

Para o atual estudo foram sorteados, aleatoriamente, 08 (oito) professores de Matemática que participavam ativamente dos cursos de formação continuada de professores oferecidos pela Secretaria de Educação do município de Barueri/SP – Brasil há pelo menos três anos. Patton (1990) classifica esse tipo de amostragem como *Purposeful Random Sample*.

O ponto de partida foi o uso de um questionário – aplicado durante uma das semanas de encontros para formação – cuja intenção primeira foi à identificação dos educadores. Segundo Parfitt (2005), trata-se de uma ferramenta indispensável quando se quer obter dados primários, de caráter exploratório sobre as pessoas, sua formação, seus comportamentos, atitudes, opiniões e seu conhecimento sobre um determinado tema.

Como parte do processo/método, foi elaborada uma entrevista semiestruturada com o objetivo de coletar dados que não foram possíveis coletar somente por meio do questionário. As entrevistas foram realizadas individualmente em datas e locais escolhidos pelos sujeitos e, após serem gravadas, foram transcritas e textualizadas em conjunto com o entrevistado, com o objetivo de garantir a fidelidade das informações, favorecendo uma abordagem total do problema investigado em suas múltiplas dimensões.

As discussões, pré-ocupações e orientações de Boni e Quaresma (2005), no que se refere à preparação e cuidado com os processos que envolvem uma entrevista, foram organizadoras da nossa orientação.

Em um terceiro momento foi proposto aos professores que refletissem/discutissem a partir de algumas afirmações de estudiosos da formação de professores – em especial da formação continuada. Essa ação, aqui chamada de "Momentos de reflexão", foi realizada de forma escrita pelo próprio professor após as entrevistas.

Os trechos/fragmentos utilizados nos Momentos de Reflexão foram selecionados com base nas leituras que subsidiaram nosso referencial teórico, tendo em consideração os objetivos inicialmente anunciados. São eles:

"Independentemente do que fazemos nos programas de formação de professores e do modo que o fazemos, no melhor dos casos só podemos preparar os professores para começarem a lecionar". (ZEICHNER, 1993, p. 17).

"A formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas assim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas de (re)construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante investir na pessoa e dar um estatuto ao saber da experiência". (NÓVOA, 1992, p.25).

"Seremos reconhecidos socialmente como sujeitos do conhecimento e verdadeiros atores sociais quando começarmos a reconhecer-nos uns aos outros como pessoas competentes, pares iguais que podem aprender uns com os outros". (TARDIF, 2002, p.128).

"Segundo Manoel Oriosvaldo de Moura, os professores raramente questionam suas aulas e procuram saídas próprias. As tentativas (propostas) para superar os problemas do ensino da Matemática geralmente são impostas autoritariamente de fora. São alienígenas, pois não levam em consideração as condições de cada escola. O professor, ao não participar da construção de seu material, de suas estratégias e da definição dos conteúdos, não sabe por que e para quem ensina". (FIORENTINI, 1993, p. 150-151).

A combinação dessas técnicas qualitativas adotadas na presente pesquisa é chamada por Jick (1979) de "triangulação" ou mesmo de validação convergente ou multimétodo, são complementares no sentido da obtenção dos dados e favorece desse modo, o processo de reflexividade por parte do pesquisador.

Segundo Chizzotti (2003), a adoção de multimétodos de investigação contribui para o estudo de um fenômeno situado no local em que ocorre, procurando tanto encontrar o sentido desse fenômeno quanto interpretar os significados que as pessoas dão a eles.

O caminho percorrido por meio da reflexão crítica em torno dos questionários, das entrevistas transcritas e textualizadas bem como dos momentos de reflexão permitiram, em nível teórico e prático, selecionar trechos/fragmentos dos relatos dos professores e professoras considerados significativos para o encaminhamento de algumas

possibilidades de respostas ao problema de pesquisa. O intuito nesse momento foi deixar emergir vestígios das falas dos docentes que direcionassem, de algum modo, à análise dos resultados.

Essas discussões viabilizadas, enquanto dados empíricos, foram analisadas com a preocupação permanente de considerá-las como situações do mundo-vida do entrevistado e, portanto, tendo como origem e contribuição as experiências didático-pedagógicas dos mesmos.

Diante do exposto, buscamos nas descrições de cada discurso a presença evidente da essencialidade, elaborando nossas unidades de significado e, posteriormente, a partir dessas unidades de significado, organizamos cinco categorias, intituladas "categorias de análise", as quais constituem-se em uma síntese que teve por objetivo integrar as ideias gerais desveladas através de uma descrição consistente da estrutura situada a partir do problema de pesquisa. São elas:

I- formação continuada como espaço de troca de experiências;

II- a realidade do aluno/professor ou mesmo do município como ponto de partida para desenvolvimento dos cursos de formação continuada;

III- os cursos de formação continuada e sua relevância/aplicabilidade na prática educativa em sala de aula;

IV- a formação continuada e a importância dos formadores nesse processo de formação;

V- a escuta, o diálogo e a reflexão no processo de formação continuada.

Leitura reflexiva dos resultados: uma possibilidade de análise

A leitura preliminar dos dados coletados evidenciou os sentidos atribuídos pelos professores aos cursos de formação continuada de Matemática oferecidos pela Secretaria Municipal de Educação de Barueri. Sendo assim, procuramos aqui apresentar modos e resultados em termos de análise, com a expectativa de construir uma discussão, a partir das categorias elaboradas, em uma relação com os nossos interlocutores e algumas preferências teóricas localizadas ao longo da elaboração do trabalho.

De modo geral, o desenvolvimento da pesquisa – cujo propósito pautou-se na busca de evidenciar transformações percebidas pelos professores de Matemática em sua prática docente frente aos cursos de formação continuada – permitiu perceber que o desempenho dos professores em sala de aula, em decorrência aos cursos de formação,

depende de um conjunto de fatores, entre os quais estão: dar voz ao saber da experiência, ouvir o professor, pensar os cursos de formação em conjunto com os professores que participarão desse processo de formação, cursos voltados à realidade do professor e do município – local onde atuam os docentes – e a formação dos profissionais que ministram os cursos (formadores).

Um primeiro eixo norteador das discussões acerca da pesquisa foi sendo caracterizado/destacado nas falas dos professores, que apontaram o quanto o professor tem se sentido secundário nesse processo de formação. Em outras palavras, essa primeira categorização foi elaborada a partir da convergência das reivindicações dos professores, no sentido de que os cursos de formação continuada devem valorizar uma troca efetiva de experiências, como bem destacam os professores P(6) "esses cursos deveriam proporcionar condições de falarmos das nossas experiências e isso não está sendo levado em conta" e P(7) "os cursos que estão sendo oferecidos nas capacitações não são trocas de experiências e nem partem das necessidades que o professor tem em sala de aula".

Nesse sentido, a indignação dos professores é justificada nos apontamentos feitos por Nóvoa ao descrever que:

> (...) não podemos continuar a desprezar e a menorizar as capacidades de desenvolvimento dos professores. O projeto de uma autonomia profissional, exigente e responsável, pode recriar a profissão professor e preparar um novo ciclo na história das escolas e dos seus atores. (NÓVOA, 1991, p. 29).

Segundo Tardif (2002), a relevância e o interesse acerca da satisfação dos professores ao participarem de um curso de formação continuada estão diretamente ligados à valorização que se dá à experiência docente, ou seja, é a partir do saber da experiência que os professores estabelecem uma relação crítica com os saberes das disciplinas e com os saberes da pedagogia, transformando "suas relações de exterioridade com os saberes em relações de interioridade com sua própria prática" (TARDIF, 2002). Para Tardif,

> (...) a proposta de trabalho constitui um discurso em favor de uma racionalidade limitada e concreta, enraizada nas práticas cotidianas dos atores, racionalidade aberta, contingente, instável, alimentada por saberes lacunares, humanos, baseados na vivência, na experiência, na vida. (TARDIF, 2002, p. 224).

Durante o processo de organização dos fatos/dados coletados foi se delineando a insatisfação e/ou mesmo a indignação do professor em ter que participar de cursos que de algum modo, pouco, ou muitas vezes, nada acrescentavam à sua prática em sala de aula, principalmente, por abordar situações distantes à sua realidade, esses foram alguns dos principais apontamentos que nos conduziram a segunda categoria de análise – a realidade do aluno/professor ou mesmo do município como ponto de partida para desenvolvimento dos cursos de formação continuada.

E aqui, nesse contexto, consideramos importante enfatizar um dos marcos/desafios citados por Kilpatrick & Silver – o desenvolvimento da prática profissional – compreendendo a prática docente como um processo construído por sujeitos inseridos em um espaço histórico e socialmente localizado.

Em oposição aos apontamentos feitos por Kilpatrick & Silver (2004), no que diz respeito a este marco, alguns sujeitos entrevistados relatam que não veem a formação continuada como uma oportunidade de aperfeiçoar sua prática – não nos moldes pelos quais têm sido encaminhados os cursos atualmente, pois em geral os formadores, ou mesmo a estrutura dos cursos de formação, não propiciam esse aperfeiçoamento ao não considerarem as experiências vividas pelos professores. E, normalmente,

> (...) sempre, a cada nova administração, nos cursos que o professor participa, o formador considera esse professor como se ele não tivesse participado de nenhum outro curso, começa da "estaca zero" novamente. (...) O que as pessoas precisam enxergar é que todos nós temos conhecimentos, não temos zero de conhecimento. (Professor 1).

Em geral, discutimos as bases sobre as quais essa formação se assenta e suas possibilidades de proporcionarem transformações nas práticas docentes. No entanto, ainda estamos longe de superar a noção de que os cursos de formação continuada se resumem a atividades meramente mecânicas, abstratas, indiferentes e muitas vezes alienadas. Partindo desse princípio, é possível compreender o discurso do professor P(7) ao relatar que "poucas vezes aproveita as atividades que foram apresentadas nos cursos. Os cursos são válidos, mas precisam ser repensados. (...) devem ter formações que atendam as necessidades reais dos professores".

Prosseguindo com a análise dos dados coletados, verificamos que os professores insistiam em fazer observações pertinentes aos Cursos de Formação Continuada e sua relevância/aplicabilidade na prática educativa em sala de aula. Com esse enfoque, direcionamos nossa terceira categoria de análise.

Essa categoria possibilitou, de certo modo, evidenciar o elo que o professor estabelece entre os cursos que a Secretaria oferece e sua aplicabilidade no cotidiano escolar, conforme relata o professor P(1), "os cursos de formação continuada devem partir de vivências pedagógicas que surgem no interior da escola, e mais especificamente no interior da sala de aula".

Sob esse ponto de vista, Kilpatrick & Silver (2004) ressaltam a importância de se criar mecanismos que estimulem os docentes a discutirem, permanentemente, sobre os rumos da educação básica nesta contemporaneidade do século XXI a partir de questões centrais que emanam da realidade da sala de aula.

O estudo revelou também o desejo dos professores para que os cursos tenham sentido e/ou mesmo aplicabilidade na prática. Como manifesta o professor P(8)

> (...) por mais simples que seja o curso, para mim tem que resgatar algumas formas de abordagem em sala de aula. (...) Eu sempre procuro pensar como foi o curso e tento colocar em prática aquilo que discutimos, embora poucas vezes tenha alguma aplicação prática. (Professor 8).

De acordo com nossa análise, a prática concreta dos professores na área, influenciados pelos formadores – ou informadores –, ainda é marcada por perspectivas tradicionais de ensino e aprendizagem, seja por motivos políticos e econômicos da educação, seja por problemas na própria formação do professor de Matemática.

No entanto, é fato que os cursos de formação continuada não têm gerado nem propiciado ao professor uma oportunidade de tomada de consciência a partir de sua prática, conforme sugere Kilpatrick & Silver, Ponte, Tardif, dentre outros.

A próxima categorização – formação continuada e a importância dos formadores nesse processo de formação, permitiu identificar a distância entre aquilo que se tem buscado – o professor mediador, o professor reflexivo, dentre outros – e aquilo que de fato tem ocorrido em tais cursos. Isso fica claro, e torna-se mais evidente ao observarmos a fala do professor P(7)

> O formador não dá oportunidades para o professor falar sobre a sua realidade, a verdade é que nós não somos ouvidos, logo não temos grandes participações nos cursos, que acabam sendo desenvolvidos nos moldes da educação tradicional, onde o capacitador comenta, traz as atividades, fala e você, poucas vezes, discute ou mesmo socializa as situações. (Professor 7).

O estudo realizado aprofunda o papel do formador como figura fundamental no desempenho dos cursos de formação continuada. A relação dos docentes com os saberes não se reduz a uma função de transmissão de conhecimentos já constituídos, e aí a importância do diálogo.

Logo, é preciso ter especial atenção acerca de quem são os formadores que têm ministrado esses cursos e entender que as mudanças na educação não ocorrem dissociadas dos professores, pelo contrário, esses profissionais precisam ser ouvidos.

Freire (1990) costumava reiterar que precisamos saber ouvir. Esse educador foi portador de uma nova cultura política, que é o da escuta e do diálogo, fatores de extrema importância, juntamente com a reflexão, no processo de ensino e de aprendizagem.

Mas será que a escuta, o diálogo e a reflexão estão sendo vistos como elementos relevantes no processo de formação continuada? Esses são alguns dos fatores que conduziram à elaboração de nossa última categoria de análise – a escuta, o diálogo e a reflexão no processo de formação continuada.

Ao longo do trabalho procuramos valorizar a escuta, o diálogo e a reflexão entre pesquisador e sujeito, pois de algum modo entendemos que esses fatores interferem, de forma prepositiva, na tentativa de estabelecer uma relação de confiança entre as partes. Ao analisarmos as unidades de significado, percebemos que os sujeitos – parceiros dessa pesquisa – também compartilham desse pensamento.

No entanto, os relatos descrevem o quanto à escuta tem sido abandonada para dar lugar à fala, geralmente única por parte do formador, e o quanto o diálogo não é valorizado. Sendo assim, inexiste a possibilidade de reflexão acerca de sua prática, principalmente porque sendo sua prática pouco valorizada, de acordo com esses professores, a troca de experiências não ocorre, como nos alerta o professor P(2)

> Quando nós estamos em grupo, nós discutimos. Eu acabo aproveitando algumas atividades que eles fizeram e que foi legal, que deu certo na prática. O problema é que nós não somos ouvidos. Como vamos trocar experiências? Só se for as experiências dos formadores. (Professor 2).

A participação efetiva do professor no processo de formação continuada torna possível a descoberta de sua autonomia e permite uma reorientação de sua trajetória profissional a partir do diálogo e, principalmente, a partir da escuta, conduzindo-o à reflexão.

Para Zeichner (1993), o "movimento da prática reflexiva" emerge dessas circunstâncias. Ao criticarmos o modelo de formação no qual estamos inseridos, automaticamente exercemos a reflexão sobre o processo. A partir desse discurso, entendemos que a ação reflexiva visa possibilitar uma avaliação constante não só do seu trabalho em sala de aula, mas de suas ações cotidianas, como um todo, transformando o professor num sujeito ativo e participativo, discutindo e refletindo sobre suas próprias ações e modificando o seu papel de transmissor de conhecimentos (SCHÖN, 1992).

São com esses argumentos que os professores sugerem mudanças no sentido de aplicação e legitimação dos atuais cursos de formação continuada, onde poucas vezes o docente encontra espaço para falar sobre sua prática e, consequentemente, surgem críticas como:

> É difícil, porque a gente fala que tem que ouvir o aluno. Mas quando você passa de professor para aluno, quem está dando o curso para você não respeita isso, não tem ouvido. (...) Não adianta só passar a informação, é na prática que vai saber se aquilo é útil ou não. Então, você passa o curso, precisa de um espaço para trazer o retorno. É o retorno do trabalho que está sendo feito, é a devolutiva como eles falam. Precisa de espaço para essa devolutiva. Agora, infelizmente, tem muita coisa negativa e ninguém quer ouvir. (Professor 5).

Esse fragmento do relato do professor P(5) mostra-nos um dos equívocos que vem ocorrendo nesses cursos de formação continuada em Barueri, que infelizmente não tem contribuído de forma expressiva – como um instrumento de intervenção para a construção do conhecimento pedagógico – para uma formação que atenda as necessidades práticas de seus professores. E, consequentemente, não provoca efetivamente mudanças significativas na postura e nem mesmo nas práticas educativas do professor em sala de aula.

Logo, acreditamos que a formação continuada de professores pode ser decisiva para fazer emergir um novo professor, cujos conhecimentos advindos de sua realidade sejam considerados e colocados em primeiro lugar, para que ele possa aprimorar sua prática a partir de sua experiência em sala de aula. Mas para isso ocorrer, conforme nos alerta Nóvoa, Tardif, Ponte, Freire, D'Ambrósio, dentre outros, é preciso dar voz ao saber da experiência.

Conclusões

Em se tratando da presente pesquisa, os significados em torno da formação continuada para a consolidação de uma proposta de cursos parecem efetivos e válidos. No entanto, os resultados permanecem quase que inalterados. Os educadores, participantes da pesquisa, adotam uma postura reflexiva enquanto intelectuais da educação, mas os cursos pouco têm contribuído para a formação de profissionais prático-reflexivos em sala de aula e trazem à tona questões importantes para serem pensadas, em termos de formação contínua. Questões essas que não mais podem ser ignoradas.

As evidências/manifestações indicam que embora seja realizado um investimento considerável por parte do município, em termos de formação continuada, os resultados têm sido pouco produtivos e promissores, pois os professores não atribuem ou percebem transformações em sua prática associadas aos cursos de formação continuada.

Diante dos fatos, é possível concluir que teorizar sobre as transformações nas práticas educativas, a partir dos cursos de formação, sem que essas transformações sejam vivenciadas ou tenham suas razões de ser, baseadas no próprio ambiente de formação, torna-se irreal ou mesmo utópica e, consequentemente, não trazem resultados satisfatórios nem para o professor – que não vê a possibilidade de mudança da sua prática a partir desses cursos, pois em geral as discussões, como já citado, fogem à sua realidade – nem para a Secretaria – que tem por objetivo proporcionar ao docente capacitações que lhes ofereçam novas oportunidades de aperfeiçoar e/ou mesmo repensar sua prática, melhorando a qualidade de ensino do município.

Analisar as relações entre as práticas desenvolvidas nos cursos de formação do referido município e sua funcionalidade real, em termos de um movimento formador, o qual conduz o professor a autonomia profissional, mudanças de concepções e formas de trabalho, bem como o despertar de uma reflexão crítica acerca de seu trabalho, enquanto educador reflexivo, teve para nós a função de nos alertar que a experiência engendrada precisa ser partilhada por todos os envolvidos, entendidos como parte de um processo de formação continuada.

Considerações finais

Esse diagnóstico é uma das formas legítimas para subsidiar as mudanças necessárias para formarmos um profissional qualificado, atualizado e moderno. Dessa forma, pretendemos incluir esse trabalho como mais uma contribuição ao cenário do campo de estudo intitulado Formação Continuada de Professores.

Esperamos que os resultados e experiências expressos nessa pesquisa sejam instrumentos úteis na busca de novas perspectivas de atuações, colaborações e futuras parcerias. E que conduzam a novas e importantes contribuições, embora sejamos conscientes de que tais resultados não finalizam as discussões acerca da Formação Continuada de Professores de Matemática. Mas esperamos que, de algum modo, possam contribuir para aqueles que, como nós, compartilham dos anseios e preocupações em torno do tema.

E diante do desenvolvimento dessa pesquisa, onde buscamos na Etnomatemática os fundamentos teórico-metodológicos para pensar a formação de professores de Matemática é que ousamos trazer/sugerir/anunciar ou mesmo formular, para a comunidade acadêmica, a seguinte questão: é possível pensar em uma etnoformação de professores? Fica aqui uma interrogação para aqueles que, como nós, buscam alternativas para uma formação continuada que atenda as demandas educacionais dos professores desta área do conhecimento, possibilitando trocas que potencializem a compreensão da prática, na perspectiva de sua transformação e da possibilidade de desenvolvimento profissional.

Referências bibliográficas

Apple, M. W. (1986). *Teachers and texts: A political economy of class and gender relations in education*. New York: Routledge.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora. Tradução de Maria Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista.

BONI, V; QUARESMA, S. J. (2005). Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. Em Tese, Santa Catarina, v. 2, n. 1 (3), p. 68-80.

Chizzotti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. *Revista Portuguesa de Educação*, Portugal, v. 16, n. 2, p. 221-236.

D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade a ação: reflexões sobre Educação (e) matemática*. Summus Editorial – UNICAMP, São Paulo.

____. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus.

____. (1998). *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. 3a ed. São Paulo: Editora Ática.

____. (2001). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Fiorentini, D. (1993). A relação ensino-pesquisa em educação matemática no Brasil. In: encontro nacional de educação matemática, 3. *Anais*. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Flick, U. (2002). *Uma introdução à pesquisa qualitativa*. Porto Alegre: Bookman.

Freire, P. (1983). *A importância do ato de ler em três artigos que se complementam*. São Paulo, Cortez, 5ªed.

____. (1990). *Alfabetização - Leitura do mundo, leitura da palavra*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Garnica, A. V. M. (1997). *Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia*. Botucatu, v. 1, n. 1, p. 117.

Kilpatrick, J.; Silver, E. (2004). *Uma tarefa inacabada: Desafios aos educadores matemáticos para as próximas décadas*. Educação e Matemática. São Paulo, n. 80, p. 79-85, nov./dez.

Jick, T. D. (1979). Mixing qualitative and quantitative methods: trangulation in action. *Administrative Science Quarterly*, v. 24, n. 4, p.602-611, dez.

Lüdke, M.; Boing, L.A. (2004). Caminhos da profissão e da profissionalidade docentes. *Educação & Sociedade*, Campinas, v. 25, n. 89, p. 1159 - 1180, dez.

Minayo, M. C. de S. (2001). (org.) *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. 18º ed. Petrópolis, Ed. Vozes.

Nóvoa, A. (1988). Inovação para o sucesso escolar. *In*: *Aprender*, n. 6, Lisboa.

____. (1991). *Profissão Professor*. Portugal: Porto Editora.

____. (1992). (Org.) *Os professores e sua formação*. Lisboa: Edições Dom Quixote.

PARFITT, J. (2005). Questionnaire design and sampling. In: FLOWERDEW, Robin; MARTIN, David (Ed.). *Methods in Human Geography: A Guide for Students Doing a Research Project*. England: Pearson Education Limited. p. 78-109.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods,* Ed. Newbury Park, SAGE Publications.

Ponte, J. P. da. (1994). *O desenvolvimento profissional do professor de Matemática*. Educação e Matemática, Lisboa: Educa.

Schön, D. A. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. *In*: NÓVOA A. (org.). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Don Quixote.

____. (2000). *Educando o profissional reflexivo*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e Formação Profissional*. Petrópolis, RJ. Vozes.

____; Lessard & Lahaye. (1991). *Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente*. Teoria e Educação. n. 4, Porto Alegre: Pannônica.

Vasconcelos, T. M. S. de (1997). *Ao redor da mesa grande*. *A pratica educativa de Ana*. Porto: Porto Editora.

Zeichner, K. M. (1993). *A formação reflexiva de professores: Idéias e práticas*. Lisboa: Educa.

OS CONHECIMENTOS DIDÁTICOS SOBRE AS NOÇÕES DE ÁREA E PERÍMETRO VERIFICADOS DURANTE UM ESTUDO DE CASO COM UM GRUPO DE PROFESSORES

Cintia Ap. Bento dos Santos
Universidade Cruzeiro do Sul
cintia.santos@cruzeirodosul.edu.br

Edda Curi
Universidade Cruzeiro do Sul
edda.curi@cruzeirodosul.edu.br

Resumo

Este artigo é recorte de uma pesquisa para dissertação de mestrado, em que uma das etapas constava de um estudo de caso que foi desenvolvido com professores que participam do grupo de estudos que ocorria quinzenalmente na Universidade Cruzeiro do Sul sob a orientação da Profa. Dra. Edda Curi. O estudo de caso aqui apresentado foi estruturado com base no estudo teórico sobre teorias didáticas e formação de professores durante o período de pesquisa. No estudo de caso buscamos verificar os conhecimentos didáticos, curriculares e matemáticos dos professores envolvidos em relação às noções de área e perímetro. Para esta comunicação escolhemos apresentar os resultados de nossa pesquisa em relação aos conhecimentos didáticos dos professores em se tratando das noções de área e perímetro. A coleta de dado nos permitiu verificar que os professores não apresentam clareza em compreender as dificuldades dos alunos em relação ao estudo das noções de área e perímetro.

Palavras-chave: grupo de estudos; área e perímetro; formação continuada de professores; conhecimentos didáticos

Introdução

Este artigo foi realizado com base nas pesquisas de Santos (2008) e dentro do contexto desta pesquisa escolhemos aqui tratar dos conhecimentos didáticos que professores revelam ao trabalhar as noções de área e perímetro. A pesquisa foi desenvolvida com um efetivo de 7 de professores de Matemática que na época faziam parte de um Grupo de Estudos que, a cada quinze dias, se reunia na Universidade Cruzeiro do Sul, sob a coordenação da Prof[a]. Dra Edda Curi, para refletir sobre a prática, buscando seu desenvolvimento profissional. Esse grupo de professores lecionava nos anos finais do Ensino Fundamental de nove anos (6º a 9º ano). Para este artigo abordamos um dos instrumentos realizado na pesquisa e as entrevistas com os professores.

Este instrumento teve por objetivo verificar o conhecimento didático dos professores, apresentado por meio de um teste diagnóstico elaborado e analisados a luz do referencial teórico da Didática Francesa, que esclareceremos no tópico a seguir.

Quadro teórico metodológico

O teste diagnóstico utilizado para verificar os conhecimentos didáticos dos professores foi elaborado com base na abordagem teórica da pesquisadora francesa Aline Robert (1998) sobre os níveis de funcionamento do conhecimento, os quais a pesquisadora classifica em técnico, mobilizável e disponível. O instrumento constava de 8 tarefas envolvendo as noções de área e perímetro, em que uma estava associada ao nível técnico; três ao nível mobilizável e cinco ao nível disponível.

Para Robert (1998) os níveis de funcionamento do conhecimento funcionam como uma ferramenta de análise para o professor a fim de verificar o nível de aprendizagem em que seus alunos se encontram e também a capacidade de mobilizarem noções matemáticas. Para a pesquisadora o nível técnico é aquele que depende apenas da aplicação imediata de uma fórmula ou teorema, ou seja, o que é solicitado está explicito sem necessidade de mobilizações de conhecimento. Já no nível mobilizável o que é solicitado ainda é explicito, porém já não é possível chegar ao resultado a partir de uma aplicação imediata de fórmula, este nível requer uma pequena adaptação. Enquanto que o nível disponível funciona como um desafio para o aluno, em que este deve mobilizar conhecimentos anteriores, sem indicação do professor, a fim de resolver a situação proposta em que a noção em jogo não é explicita.

Cabe ressaltar que para Robert (1998) a passagem entre os níveis de funcionamento do conhecimento representam um "salto na aprendizagem" e possibilita ao professor o reconhecimento da capacidade dos alunos de mobilizarem noções matemáticas.

Para classificação dos níveis de funcionamento do conhecimento Robert (1998) também considera o importante papel dos diferentes registros representações semióticas, com base na teoria de Raymound Duval. Para Duval (1993) os registros de representação semiótica são as representações matemáticas referentes a um sistema de significação. O autor considera que a aprendizagem efetiva em matemática apenas ocorre quando os educandos conseguem representar e reconhecer o mesmo objeto matemático por meio de representações distintas. Para Duval (1993) os registros de representação semiótica

são inerentes a atividade matemática, uma vez que, significam uma forma de comunicar algo a alguém.

Por nossa própria experiência em sala de aula e pelo convívio nas escolas sabemos que em alguns casos professores imaginam que as noções de área e perímetro podem ser trabalhadas por alunos com facilidade a partir do momento que estes sabem as fórmulas para calculá-las. Na verdade o problema é mais complexo e com base em nosso quadro teórico utilizado para constituição do instrumento aqui apresentado podemos verificar como professores declaram analisar as dificuldades de seus alunos.

Para atingir nosso objetivo foi solicitado aos professores que realizassem uma leitura das tarefas a fim de identificar as possíveis dificuldades que poderiam ser encontradas pelos alunos ao resolver as tarefas do instrumento e como eles as trabalhariam frente a estas dificuldades. Dessa forma, poderíamos verificar como se apresenta a visão destes professores em relação às dificuldades apresentadas nas tarefas e se eles reconhecem, mesmo sem utilização de nomenclatura, a necessidades do aluno reconhecer o mesmo objeto matemático por meio de registros de representação distintos, ou os diferentes níveis de conhecimento envolvidos.

A entrevista foi utilizada com o objetivo de esclarecer dados que ficaram implícitos durante o desenvolvimento do teste escrito, porém que se revelam nos registros relativos à fala dos professores, complementando os resultados do instrumento sobre os conhecimentos didáticos dos professores.

Conhecimentos didáticos das noções de área e perímetro

No instrumento proposto aos professores não havia nas comandas nenhuma referência à classificação das tarefas quanto aos níveis de conhecimento esperados dos educandos, porém seis dos professores fizeram a classificação de cada tarefa destacando os níveis técnico, mobilizável e disponível, ao solicitar que analisassem a tarefa para identificar possíveis dificuldades de seus alunos, talvez porque durante os encontros do Grupo de Estudo se fez uma abordagem teórica sobre os níveis de conhecimento esperados dos educandos.

A tarefa 1, conforme apresenta a seguir, é uma tarefa de nível mobilizável, apesar de fornecer o registro figural.

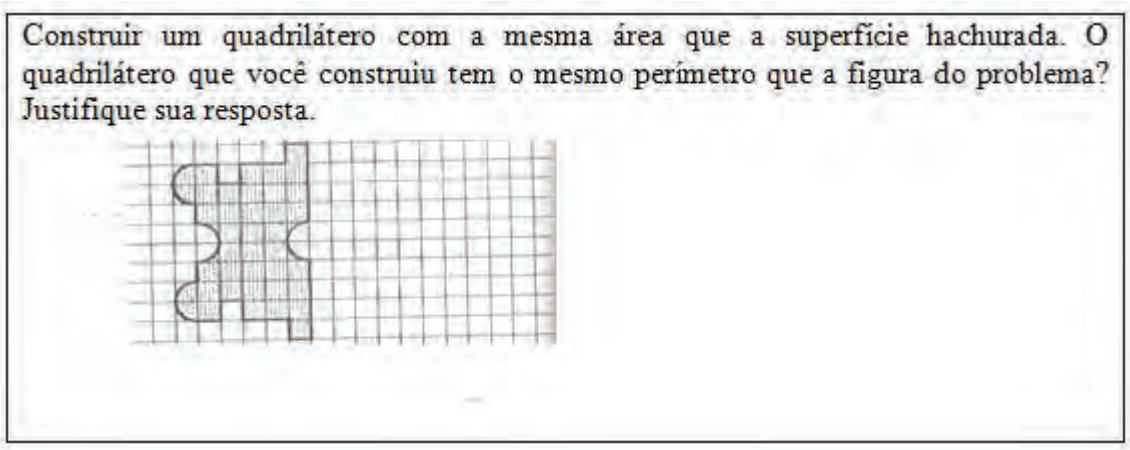


Figura 1- Tarefa 1
Fonte: Adaptado de IREM, 1996, p.77-78.

A tarefa 1 foi definida pelas professoras 003 e 005 como de nível mobilizável, descrevendo esta tarefa como: "Uma questão utilizada com freqüência em sala de aula", consideram ainda que: "As crianças de 6° e 7º ano as consideram fáceis, conseguem desenhar o que é pedido".

Durante a entrevista quando questionada sobre em que série e por que daria esta tarefa, a professora P005, respondeu da seguinte forma:

> Brincando com o 6º ano. Porque nesta série eles têm uma visão maior de trabalhar os quadradinhos, eles adoram desenhar quadradinhos, eles adoram contar quadradinhos (P005, 22/03/2008).

Já a professora P004, para os mesmos questionamentos deu a seguinte resposta:

> Acho que o 6º e 7º ano desenvolvem rápido esta questão. Porque parece mais fácil para eles, tem o desenho é só olhar a medida. Diferente de quando a gente só fala dos lados do quadrado, aqui não, eles estão vendo, eles podem olhando construir (P004, 22/03/2008).

Podemos notar que para essas professoras a construção cognitiva dos elementos geométricos, deve ser trazida pela criança da série anterior, ou seja, do 5º ano do Ensino Fundamental. Já para P004, a apresentação do registro figural e a contagem facilitam a resolução por parte do aluno.

Em seguida passaram a analisar a tarefa 2, que não apresenta valores numéricos, apenas simbólicos.

Dois retângulos R_1 e R_2 são tais que: a medida da base de R_1 é o dobro da medida da base de R_2; a medida da altura de R_1 é a metade da medida de R_2. Nessas condições é correto afirmar que: A área de R_1 é igual a área de R_2? O perímetro de R_1 é igual ao perímetro de R_2? Justifique sua resposta.

Figura 2- Tarefa 2
Fonte: Adaptada do SARESP 2007, 9º ano do Ensino Fundamental.

A tarefa 2 foi considerada pelo professor 001 como de nível mobilizável e ele a define como uma situação em que "tem uma definição básica, para resolver o problema". Na verdade esta tarefa está associada ao nível disponível e não apresenta uma definição tão simples para o aluno, uma vez que seu enunciado envolve dois registros de representação diferentes, um na língua natural e o registro simbólico, em que o aluno deve recorrer a seus conhecimentos anteriores a fim de organizar esta linguagem matemática de forma que estruture a tarefa matematicamente para poder chegar com êxito a sua solução. Já os professores 003 e 004 a definiram corretamente quanto ao nível de conhecimento que se encontra associada e justificaram a escolha da seguinte forma: "Os alunos não têm habilidades suficientes para desenvolver esse tipo de questão, talvez por não ser freqüente em aula, ela se torna difícil".

Na entrevista a professora 005 quando questionada sobre em que série daria esta tarefa, por que e com qual objetivo, respondeu da seguinte forma:

> Começaria lá na 8º e 9º ano. Porque quando tem muita letra o aluno fica perdido. O objetivo seria para eles começarem a tirar do texto e passarem para uma sentença matemática, para eles começarem a formular (P005, 22/03/2008).

Quanto ao que o aluno precisa saber para responder esta tarefa ela responde:

> Ele precisa saber o que é um retângulo, uma base e o que é dobro (P005, 22/03/2008).

Nas respostas de P005, em nenhum momento ficou evidente a necessidade prévia do aluno saber construir mesmo que mentalmente suas próprias representações.

A terceira tarefa encontra-se a seguir, apresentada inteiramente no registro da língua natural.

O que acontecerá com a área da superfície de um retângulo se dobrarmos, simultaneamente, os lados maior e menor desse retângulo? E o que acontecerá com o perímetro?

Figura 3- Tarefa 3
Fonte: Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 1986, p.137

A tarefa 3 foi analisada apenas pelo professor 003, que a considerou associada ao nível mobilizável e que a descreveu como: "Uma questão freqüente em sala de aula, os alunos tem facilidade em resolvê-las através de desenhos". Na verdade esta tarefa corresponde ao nível disponível, pois ela requer que o aluno construa seu próprio registro figural e para isso ele deve ter claramente os conceitos quanto a figuras geométricas planas, área e perímetro, além de conhecer as ferramentas algébricas, necessárias para a resolução da tarefa, ou seja, ele não pode resolvê-la por meio apenas da representação geométrica é necessário recorrer as representações algébrica e numérica.

Durante a entrevista verificamos a seguintes respostas para os questionamentos sobre a tarefa 3:

> Trabalharia esta questão acho que no 7º ano, até no 6º ano já conseguira trabalhar com ela. Porque aqui já fala do retângulo que é uma figura mais comum para eles. Para o aluno desenvolver esta questão é só ter noção do que é um retângulo e desenvolver a noção de área e perímetro. Está associada ao nível mobilizável, porque contou para eles a figura (P004, 22/03/2008).

> Creio que desde o 6º ano já pode trabalhar esta questão, porque eles já sabem dobrar, então eles já sabem que uma dobra dá dois, então eles já saberiam fazer os desenhinhos. Para o aluno resolver esta questão ele precisa saber o que é área, o que é um retângulo, o que é dobro, maior, menor, saber desenhar corretamente e fazer comparação. Esta questão é de nível mobilizável (P005, 22/03/2008).

Com base na fala das professoras fica evidente que não foi levado em consideração as dificuldades apresentadas no enunciado, considerando ainda que eles acreditam que no 5º ano os alunos já se encontram aptos a resolução deste tipo de tarefa, porém, nesse ano da escolaridade nem sempre o raciocínio algébrico já foi introduzido, fator necessário para resolução da tarefa.

A tarefa 4 a seguir foi analisada pelo grupo. Esta tarefa exige apenas uma resolução imediata por meio das fórmulas.

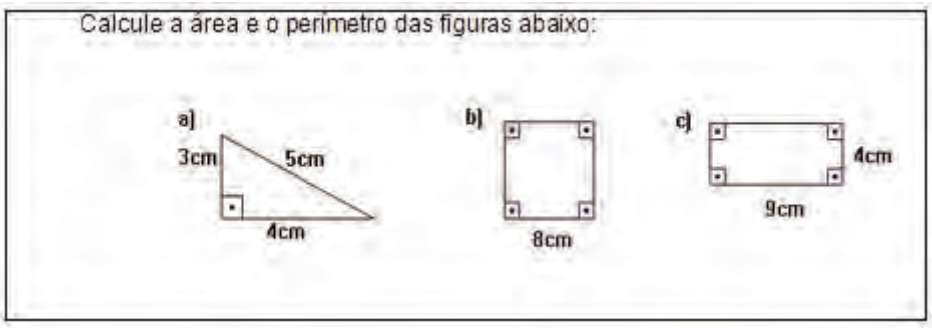


Figura 4- Tarefa 4

A tarefa 4, foi classifica corretamente pelos professores 002 e 006 como associada ao nível técnico. Descreveram ainda que: "é bastante freqüente sua aplicação em sala de aula, é fácil sua resolução, pois é só a aplicação das fórmulas estudadas". Esta tarefa foi bem reconhecida pelos professores, pois a aplicação de fórmulas a partir da apresentação do registro figural é bastante comum no estudo das noções de área e perímetro, não dependendo de grandes mobilizações de conhecimentos por parte dos educandos.

A tarefa 5 era mais complexa, apesar de fornecer o registro figural.

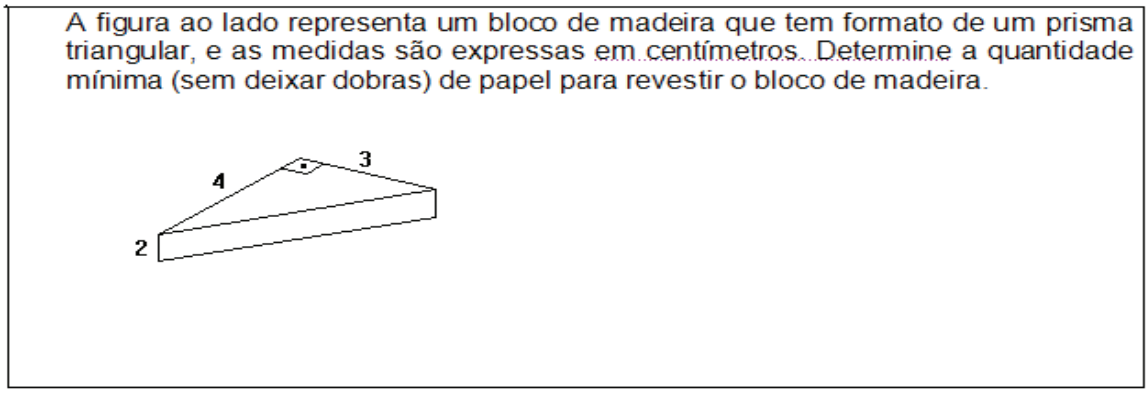


Figura 5 – Tarefa 5
Fonte: Pires; Curi; Pietropaolo, 2002.

A tarefa 5 foi considerada corretamente pelos professores 002 e 004 como de nível disponível. Eles admitiram que este tipo de tarefa não é desenvolvida com freqüência em sala de aula e que quando se faz, os alunos demonstram grande grau de dificuldade. Para o professor 006 a tarefa está associada ao nível mobilizável, comentando ainda que as noções apresentadas são claras. Na verdade esta tarefa está associada ao nível

disponível, pois em nenhum momento fica explícito a necessidade de se calcular à área e ainda se faz necessário que o aluno perceba a necessidade de utilizar o Teorema de Pitágoras. O educando ainda deve apresentar visão espacial geométrica e dessa forma, recorrer a vários conhecimentos construídos anteriormente para a resolução da tarefa.

A tarefa 6 relaciona área e perímetro e precisa de certa adaptação para ser resolvida.

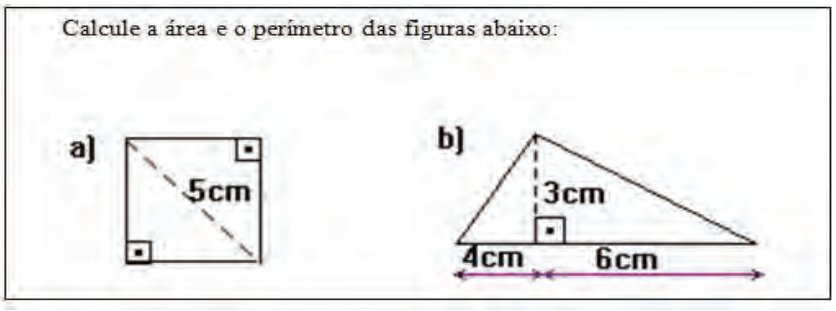


Figura 6- Tarefa 6

A tarefa 6 analisada pelos professores 002 e 006 foi classificada corretamente como de nível mobilizável. Os professores ainda reconheceram que para sua resolução o aluno deve realizar apenas algumas adaptações, uma vez que, a noção em jogo está explícita. Concordaram inclusive que este tipo de tarefa tem seu tratamento freqüente em sala de aula.

A tarefa 7 foi considerada difícil pelos professores, mesmo sendo apresentado o registro figural.

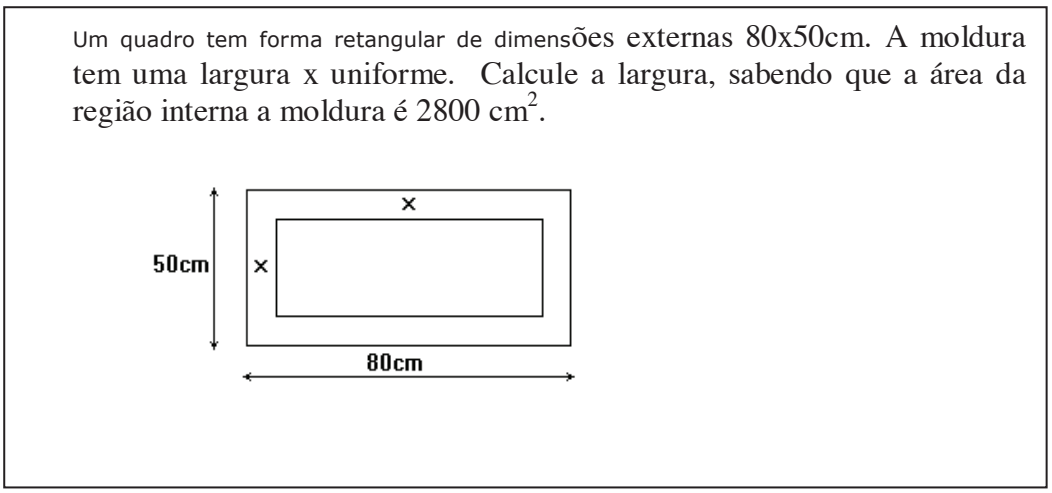


Figura 7- Tarefa 7
Fonte: IEZZI, DOLCE E MACHADO, 2005, p.71

A tarefa 7 foi considerada pelos professores 001 e 005 corretamente como sendo de nível disponível. A professora 005 considerou ainda esta tarefa como sendo bastante difícil e reconheceu que ela não fornece indicações para sua resolução e que dessa forma o aluno deve buscar recursos em seus conhecimentos anteriores, admite ainda ser uma questão pouco trabalhada em sala de aula.

A tarefa 8 destacada a seguir foi analisada mais superficialmente pelos professores.

> Dizer que uma tela de televisão tem 20 polegadas significa dizer que a diagonal da tela mede 20 polegadas. Quantas telas de televisão de 20 polegadas cabem numa

Figura 8- Tarefa 8
Fonte: IEZZI, DOLCE E MACHADO, 2005, p.128

A tarefa 8 analisada pelos professores 001, 005 e 006 foi classificada como de nível mobilizável. Os professores consideraram que não há muitas dificuldades para sua resolução, a professora 005 considerou que para esta tarefa é necessário que o aluno adapte o texto aos seus conhecimentos. Esta tarefa está associada ao nível disponível, uma vez que a noção trabalhada não é explícita e não há indicações para sua resolução. Nesta tarefa o que os professores não perceberam que o entrave para resolução desta tarefa reside na interpretação da linguagem matemática utilizada no enunciado, ou seja, o acesso ao objeto matemático só será possível mediante a representação constituída pelo aluno, uma vez que a linguagem discursiva não oferece a clareza apresentada por uma figura.

Esperávamos que os professores abordassem com mais profundidade as questões didáticas relativas as tarefas solicitadas, como por exemplo, que na tarefa 7 havia necessidade da utilização de equações polinomiais de 2° grau, que na tarefa 5 havia necessidade da utilização do Teorema de Pitágoras e assim sucessivamente em cada tarefa.

Em uma segunda etapa deste instrumento foi solicitado aos professores que, com base nas oito tarefas apresentadas, escolhessem as quatro que trabalham com mais freqüência. Com a coleta de dados observamos que houve uma concentração de escolhas nas tarefas 4 e 6 como as mais trabalhadas em sala de aula.

Verificamos que as tarefas eleitas por todo o grupo como as mais fáceis foram as tarefas 1, 4 e 6, considerando que a tarefa 3, também foi uma tarefa com relativo grau de

concentração de escolhas. As tarefas 1 e 6, são de nível mobilizável, enquanto a tarefa 4 é de nível técnico, já a tarefa 3 é de nível disponível. Pudemos perceber que os professores concentraram suas escolhas nas tarefas de níveis técnico e mobilizável.

Podemos levar em conta ainda que as tarefas 1, 4 e 6, apresentam o registro figural e isso pode nos levar a vislumbrar a idéia de que os professores consideram que quando uma tarefa já apresenta o registro figural, ela de certa forma se torna mais fácil para o aluno, considerando que ele pode partir de algo que já se encontra pronto.

Cruzando os dados em relação às tarefas que os professores trabalham com mais freqüência em sala de aula e as que classificam como mais fáceis pudemos observar que a concentração de escolhas para as tarefas trabalhadas com mais freqüência correspondem praticamente as mesmas tarefas intituladas pelos professores como as mais fáceis. Isto nos induz a acreditar que o critério de seleção das tarefas desenvolvidas em sala de aula se encontra associada ao seu grau de facilidade.

Solicitamos também que os professores indicassem as quatro tarefas que são menos trabalhadas por eles em sala de aula. Com base nos dados coletados, pudemos identificar grande concentração de escolhas para as tarefas 2, 5, 7 e 8 que correspondem a tarefas de nível disponível. As mesmas foram consideradas pelos professores as mais difíceis. Dessa forma concluímos que os professores admitem realizar com menos freqüência em sala de aula tarefas que dependem do nível de conhecimento disponível, talvez por considerá-las mais difíceis, o que de certa forma não beneficia a autonomia do aluno na resolução de uma tarefa.

Considerações finais

Com base nas análises realizadas podemos verificar que estes professores apresentam um conhecimento didático fragilizado em relação às noções de área e perímetro, não reconhecendo que as diferentes representações de um objeto matemático podem gerar um conflito quanto à resolução de uma tarefa por parte dos alunos, ou seja, o aluno pode reconhecer um objeto matemático em sua representação figural, porém pode não passar para sua representação algébrica e vice versa.

Verificamos que os professores acreditam que a partir do conhecimento de fórmulas para resolução de tarefas de área e perímetro os alunos podem solucionar qualquer situação, não levando em consideração o importante papel das diferentes representações semióticas que envolvem um objeto matemático ou os conhecimentos necessários a

serem mobilizados na resolução de uma situação que não apresenta sua noção explicitamente.

Consideramos que só o conhecimento matemático não dá conta da efetivação do processo de ensino-aprendizagem. Assim consideramos fundamental para o ensino e aprendizagem o conhecimento didático.

Com base nos dados coletados observamos que os professores tendem a uma simplificação das tarefas em sala de aula, em que as de maior grau de dificuldade são menos trabalhadas. Esta constatação pode ser observada, uma vez que, as tarefas consideradas as mais fáceis pelos professores, são aquelas mais trabalhadas em sala de aula.

Nos parece evidente que as tarefas utilizadas com mais freqüência em sala de aula são as relacionadas ao nível técnico, o que induz os professores a não perceber as variáveis didáticas, os diferentes registros de representação semiótica e a necessidade do aluno dominar conteúdos aprendidos anteriormente para resolução de determinadas tarefas.

Ficou evidente que a prévia introdução durante os encontros do grupo sobre os níveis de conhecimento esperados dos educandos ampliou a visão didática dos professores, mesmo que estes, ainda classifiquem as tarefas fazendo determinada confusão.

Consideramos importante inclusive este espaço destinado ao grupo de estudo e o vemos como um vasto laboratório de trabalho em relação à formação continuada de professores. Certamente tivemos a oportunidade, mesmo que em pequena escala, de entrar em contato com a forma como professores descrevem aspectos de sua prática e temos em vista que estes professores provavelmente passaram, de certa forma, a incorporar alguns aspectos da didática e que em situações futuras lançarão um olhar mais delineado em relação às dificuldades de seus alunos e aos níveis que estes precisam transpor em determinadas tarefas que lhe são exigidas durante a escolarização.

Referências

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* 5. IREM de Strasbourg, p.37-65.

Iezzi, G.; Dolce, O.; Machado, A. (2005). *Matemática e realidade:* 8a série. 5.ed. São Paulo: Atual.

Irem. (1996). *Atividés pour la classe de sixième: nombres décimaux aires et pèrimètres*. Université Montpellier II.

Pires, C. C.; Curi, E.; Pietropaolo, R. (2002). *Educação Matemática:* 8a série. Editora Atual: São Paulo.

Robert, A. (1998). Outils d´analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l´université. *Recherches em didactique des Mathématiques*, France, v. 18, n. 2, p. 139-190.

Santos, C. A. B. (2008). *Formação de professores de matemática:* contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro. 2008, 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

São Paulo. (1986). *Proposta curricular para o ensino de matemática:* ensino fundamental. São Paulo: CENP/SEE/SE, 181p.

São Paulo (Estado). (2007). Secretaria da Educação. Sistema de Avaliação doRendimento Escolar do Estado de São Paulo. Matemática e questionário: 8ª série, ensino fundamental: tarde. São Paulo: SARESP. *Caderno de prova do SARESP*. Disponível em:<http://saresp.edunet.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/2_Tarde/Prova-MAT-8EF-Tarde.pdf>. Acesso em: mar. 2008

O PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA: CONTRIBUTOS DA INVESTIGAÇÃO

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

António Guerreiro
Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve
aguerrei@ualg.pt

Isabel Rocha
ESECS/NIDE/Instituto Politécnico de Leiria
isabel.rocha@ipleiria.pt

José Portela
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
jose.portela@ese.ipvc.pt

Resumo

Esta comunicação analisa um conjunto de estudos que foram realizados em Portugal desde 2005, que têm como foco ou contexto o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM) e que correspondem a trabalhos para obtenção de graus académicos e/ou publicados em actas de encontros nacionais e internacionais ou em revistas. Os trabalhos analisados são, na sua grande maioria, realizados por membros de equipas do PFCM ou da Comissão de Acompanhamento. A maior parte destes estudos centra-se no desenvolvimento profissional dos professores envolvidos, com incidência na análise do aprofundamento do seu conhecimento matemático, didáctico e curricular. Um olhar transversal sobre os estudos permite destacar os contributos do modelo do PFCM, centrado na prática lectiva, com grande ênfase na leccionação e na reflexão sobre a mesma, para a evolução dos professores participantes no PFCM. O papel da análise das produções dos alunos para a reflexão dos professores é outro aspecto a destacar.

Palavras-chave: Programa de Formação Contínua em Matemática, desenvolvimento profissional, conhecimento profissional, reflexão, práticas.

Introdução

O Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico é uma iniciativa do Ministério da Educação que se iniciou em 2005/06 e que tem vindo a desenvolver-se no continente português em colaboração com instituições de ensino superior (IES) que formam professores para aqueles níveis de ensino. Durante este tempo, foram realizadas algumas investigações tomando como foco ou contexto o PFCM, muitas da autoria de formadores deste Programa com vista à obtenção dos respectivos graus académicos. Esta comunicação tem por objectivo passar em revista estes estudos e identificar os aspectos que se revelaram na investigação como ideias fortes desta formação.

O Programa do PFCM foi definido pela sua Comissão de Acompanhamento (CA)[1] e, na sua essência, considera a importância de se centrar nas escolas dos formandos, com uma grande ênfase nas práticas lectivas (Serrazina *et al.*, 2005). Os princípios que o enformam são: a) Valorização do desenvolvimento profissional do professor; b) Valorização de uma formação matemática de qualidade para o professor; c) Valorização do desenvolvimento curricular em Matemática; d) Reconhecimento das práticas lectivas dos professores como ponto de partida da formação; e) Consideração das necessidades concretas dos professores relativamente às suas práticas curriculares em Matemática; f) Valorização de dinâmicas curriculares contínuas centradas na Matemática; e g) Valorização do trabalho colaborativo entre os diferentes autores.

Os objectivos definidos para o PFCM foram inicialmente: a) Aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores envolvidos na formação[2]; b) Favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática; c) Fomentar uma atitude positiva dos professores relativamente à disciplina de Matemática e às capacidades dos alunos; d) Criar dinâmicas de trabalho entre os professores, com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática; e) Promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos, em

[1] A Comissão de Acompanhamento, nomeada em 2005 pela então Ministra da Educação Maria de Lurdes Rodrigues, é actualmente composta pelos autores desta comunicação, tendo inicialmente incluído também Maria João Gouveia, do Departamento de Matemática da FCUL.

[2] Como já foi referido, o PFCM dirige-se a professores do 1º ciclo desde 2005/2006 e, a partir de 2006/2007, passou a estender-se aos professores do 2º ciclo.

articulação com as instituições de formação inicial de professores. Mantendo-se os princípios, os objectivos foram desde 2008/2009 adaptados de modo que o PFCM responda aos desafios colocados pelo novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) e, mais recentemente, pelas Metas de Aprendizagem. Assim, para 2010/2011 foram acrescentados os dois objectivos seguintes: Clarificar as finalidades, objectivos e conteúdos do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2007) (1.º e 2.º ciclos); e Clarificar as metas de aprendizagem em Matemática definidas para o ensino básico (Serrazina *et al.*, 2010).

Um outro aspecto caracterizador do PFCM é a existência de dois tipos de sessões de trabalho: sessões de formação em grupo (8 a 10 professores) onde são trabalhados diferentes temas matemáticos, mas onde também há espaço para a planificação de aulas e reflexão sobre as mesmas e sessões de acompanhamento ao nível da sala de aula de cada professor. Todos os formandos têm de construir um portefólio reflexivo que, para além de ser um instrumento de desenvolvimento profissional, é também o instrumento de avaliação do desempenho do formando no PFCM.

Metodologia

A Comissão de Acompanhamento do PFCM solicitou aos coordenadores do programa nas IES a indicação de estudos de investigação sobre o programa. Simultaneamente a CA fez o seu próprio levantamento em actas de encontros de investigação nacionais (EIEM e SIEM) e internacionais (CERME e PME), e em revistas de investigação recentes. Foram identificados os estudos que constam da Tabela 1, que vão desde teses de doutoramento a dissertações de mestrado, artigos publicados em revistas com *arbitragem científica*, capítulos de livros e comunicações em actas de encontros. Neste último caso alguns são relatos parciais de estudos em progresso, por exemplo os de Martins e Santos (2007, 2008, 2009, 2010), outros pequenos estudos realizados por formadores. Com este levantamento e a sua análise transversal pretendemos dar a conhecer os estudos que têm sido realizados relativamente ao PFCM e identificar ideias fortes nomeadas nos mesmos sobre a formação.

Tabela 1: Estudos realizados no âmbito do PFCM (organizados por ano)

Autor/Ano	**Título**	**Tipo**	**Foco**
Vicente (2006)	Desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo no contexto de um programa de formação continua em	Tese de Mestrado	Desenvolvimento Profissi

	Matemática		
Martins & Santos (2007)	Desenvolvimento profissional de uma professora de 1.º Ciclo num contexto de formação	Artigo em actas	
Canavarro & Rocha (2008)	Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: mais valias e desafios do PFCM nos distritos de Évora e Leiria	Artigo em actas	
Martins & Santos (2008)	A reflexão escrita num contexto de formação	Artigo em actas	
Menezes (2008)	Portefólio: Instrumento de avaliação e desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo em formação contínua.	Artigo em actas	
Mercê (2008)	Concepções e práticas lectivas dos professores de matemática do 2.º ciclo em relação à calculadora: Contributos da formação para a reflexão	Tese de Mestrado	
Rocha & Pires (2008)	A influência do Programa de formação Contínua em Matemática nas práticas dos professores do 1.º ciclo	Capítulo de livro	
Colaço, Branco &Rebelo (2009)	O Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico – 4 anos de experiência na ESE de Santarém.	Artigo em revista	
Martins & Santos (2010)	Conhecimento Profissional do Professor d0 1.º Ciclo. Integração Teoria-Prática	Artigo em actas	
Serrazina (2009)	O Programa de Formação Continua em Matemática para professores do 1° e 2° Ciclo do Ensino Básico: balanço possível.	Artigo em revista	PFCM
Tenreiro-Vieira (2009)	Impacte de um Programa de Formação Continua em Matemática em professores e alunos dos primeiros anos de escolaridade	Artigo em revista	Des. Profissional Formandos
Correia (2010)	A supervisão na formação e o desenvolvimento profissional: Perspectivas de formadores no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico	Tese de Mestrado	Formação de formadores
Guerreiro & Ribeiro (2010)	Portefólio no programa de formação contínua em matemática. Aspectos emergentes da análise dos portefólios sobre a avaliação com vista à regulação das práticas de formação.	Artigo em actas	Desenvolvimento Profissional formandos
Martins & Santos (2010)	Reflection on Practice: Content and Depth	Artigo em actas	
Pezzia (2010)	La formazione matematica dei docenti di Scuola Primaria come problema pedagogico. Uno studio nel contesto della formazione continua in Portogallo	Tese de doutoramento	
Pezzia & Martino (2010	The effect of a teacher education program on affect: the case of Teresa and PFCM	Artigo em actas	
Pimentel (2010)	O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?	Tese de doutoramento	
Rocha (2010)	Contribuições de um Programa de Formação Contínua em Matemática para o Desenvolvimento profissional dos Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico.	Tese de doutoramento	PFCM
Serrazina (2010)	A formação continua de professores em Matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas.	Artigo em revista	PFCM
Silva, Fernandes &	Influência de um programa de formação contínua em Matemática no conhecimento didáctico de professores do	Artigo em actas	Des. Profissional Formandos

Alves (2010)	1.º CEB.		

Após este levantamento foi feita uma análise de todos os trabalhos, identificando-se para cada um o objecto de estudo, a metodologia utilizada e as principais conclusões. Foram identificados três focos principais nos estudos analisados: os formandos, os formadores e o próprio PFCM. Como seria previsível a grande maioria dos trabalhos focam-se nos formandos, nomeadamente no seu desenvolvimento profissional. Foram identificados 12 trabalhos incidindo nos formandos, embora com enfoques e níveis de aprofundamento muito diferentes. Com foco nos formadores apenas identificámos um trabalho, a tese de mestrado de Aurora Correia (Correia, 2010). Já a tese de doutoramento de Isabel Rocha (Rocha, 2010) tem o PFCM como objecto de estudo. O mesmo acontece com os artigos de Serrazina (2009, 2010).

Investigações realizadas no âmbito do PFCM

A análise que se apresenta está organizada segundo aquelas categorias.

Estudos com foco no próprio PFCM

A tese de doutoramento de Isabel Rocha tem como objecto de estudo o PFCM, a nível nacional, tal "como é percepcionado pelos actores envolvidos (formandos, formadores, coordenadores institucionais e comissão de acompanhamento)" (Rocha, 2010, p. 131). Mais especificamente o estudo pretende identificar, "aspectos mais ou menos fortes da concepção e concretização do programa" (p. 131), e como é que os actores envolvidos avaliam o impacto da formação no desenvolvimento profissional dos professores. A investigação realizada utilizou complementarmente metodologias quantitativas e qualitativas, as primeiras para a caracterização em larga escala do PFCM e as segundas para aprofundar a compreensão das perspectivas dos diferentes participantes. Para além de um estudo exploratório com os formandos de 1.º ciclo do distrito de Leiria, foi realizado um estudo mais geral, de natureza avaliativa e que envolveu 2974 formandos, professores do 1.º ciclo a frequentar o PFCM em 2007/2008 nas 18 IES, os 99 formadores que constituíam as equipas de formação, os 18 coordenadores institucionais e a coordenadora da Comissão de Acompanhamento do PFCM. Os dados recolhidos através de questionários, análise documental e

entrevistas semi-estruturadas foram organizados em 18 estudos de caso, um de cada IES.

O estudo conclui que a organização da formação, muito centrada na prática, constituiu uma mais-valia para todos os intervenientes. O facto de o Programa prever a possibilidade de participação num segundo ano de formação foi considerado um ponto forte, pela grande adesão de formandos e por aspectos do desenvolvimento profissional destes que só se desenvolveram e consolidaram no 2.º ano.

A construção do portefólio, completamente novo para os formandos, não mereceu o consenso de todos. Relativamente ao impacto da formação no desenvolvimento profissional dos professores, o estudo conclui que todos os intervenientes referem o aprofundamento do conhecimento didáctico como o mais conseguido, sendo também mencionado o aprofundamento do conhecimento matemático, em especial para os formandos do 2.º ano de formação. Ainda segundo Rocha (2010), estes formandos revelam uma visão mais dinâmica da Matemática e do seu ensino, mostrando uma atitude mais reflexiva sobre as práticas e a aprendizagem dos alunos, em simultâneo com uma maior preocupação com a planificação das aulas. Estas mudanças de atitudes correspondem muitas vezes a uma alteração das práticas, nomeadamente na natureza das tarefas e dos recursos utilizados.

Estas conclusões são compatíveis com as de Serrazina (2009, 2010) que, em artigos elaborados a partir dos relatórios institucionais apresentados por cada IES conclui que o balanço global da formação é muito positivo, existindo diversos indicadores que permitem dizer que os professores que frequentam o PFCM, em especial os que o fazem durante dois anos, partilham uma forma diferente de trabalhar a Matemática com os seus alunos. São também identificados alguns constrangimentos que se prendem com questões organizativas mas também com dificuldades na alteração de concepções muito arreigadas (Rocha, 2010, Serrazina, 2009).

Estudos com foco nos formadores do PFCM

O estudo de Aurora Correia (Correia, 2010), no âmbito de um mestrado em supervisão, teve como propósito conhecer e compreender a visão de professores formadores acerca das suas práticas de supervisão e do seu impacto no desenvolvimento profissional dos implicados no processo supervisivo (formadores supervisores e formandos supervisionados). Teve uma abordagem metodológica

qualitativa com a realização de dois estudos de caso. Os participantes foram dois formadores de duas equipas de formação distintas. A recolha de dados foi feita através de entrevistas, duas a cada participante. A análise teve duas dimensões: práticas de supervisão e desenvolvimento profissional.

Dos principais resultados sobre a visão dos formadores acerca das suas práticas de supervisão sobressaem os seguintes aspectos: a) respeito pelo formando enquanto profissional e enquanto pessoa e pelos seus contextos de trabalho; b) cooperação, interajuda e apoio no desenvolvimento e implementação de experiências de desenvolvimento curricular em matemática, em especial nas sessões de formação em grupo; e c) promoção da reflexão sobre as tarefas a serem propostas aos alunos e sobre o ocorrido em sala de aula, sendo destacado o papel do portefólio na promoção dessa reflexão.

Da visão dos formadores acerca do impacto das suas práticas de supervisão no desenvolvimento profissional dos formandos, sobressaem aspectos como: a) maior investimento dos formandos na preparação das suas aulas, conducentes a mudanças nas suas práticas, no sentido de serem mais concordantes com orientações actuais para o ensino da Matemática, em particular no que respeita à natureza e ao foco das tarefas matemáticas propostas aos alunos; b) progresso dos formandos no domínio do conhecimento matemático, bem como uma melhoria na relação do formando com a Matemática e no modo como a integra no conjunto de outros saberes; c) maior segurança dos formandos para introduzirem mudanças nas práticas pela presença do formador na sala de aula.

Correia (2010) refere ainda que há diferenças na visão dos formadores supervisores participantes no estudo, acerca do impacto das suas práticas de supervisão no seu próprio desenvolvimento profissional. Um destaca o contributo do trabalho colaborativo e de reflexão, com os seus pares, nas reuniões da equipa de formação e outro destaca a evolução do seu papel com a necessidade sentida na actualização de conhecimentos de modo a poder dar resposta às solicitações cada vez mais exigentes dos formandos. Essa evolução exprimiu-se em termos de assertividade, de identificação das dificuldades e previsão das mesmas, conduzindo a uma maior eficácia e eficiência na sua acção como formador/supervisor.

Estudos com o foco nos formandos

Estes estudos centram-se no desenvolvimento profissional e conhecimento profissional dos formandos. Dois destes estudos (Vicente, 2006; Pimentel, 2010) procuram compreender a influência do PFCM na evolução do conhecimento profissional dos formandos objecto de estudo e foram concretizados em grupos de formação nos quais as autoras eram formadoras. Adoptam uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, na modalidade de estudos de caso múltiplos. Os instrumentos de recolha de dados foram a observação, as entrevistas e a análise documental (essencialmente de documentos da formação). Manuela Vicente debruça-se sobre a evolução do conhecimento didáctico e Teresa Pimentel coloca o foco no conhecimento matemático e no didáctico, com incidência no pensamento algébrico.

Os dois estudos evidenciam que a evolução do conhecimento profissional das formandas é muito influenciada pela organização da própria formação. As duas professoras do estudo de Vicente (2006) atribuem o seu desenvolvimento profissional à exploração das tarefas nas sessões de grupo e sua experimentação na sala de aula, à partilha de experiências de sala de aula e posterior reflexão. As professoras estudadas apresentavam à partida um conhecimento didáctico distinto em diversos aspectos, tendo sido concluído que os contributos do PFCM foram mais significativos para a professora que apresentava um conhecimento mais frágil, sendo evidente a evolução do seu conhecimento relativamente à Matemática e ao seu ensino, ao conhecimento dos alunos e ao seu processo de aprendizagem e ao processo instrucional. No estudo de Pimentel (2010) também há evidências dos contributos da reflexão na evolução do conhecimento profissional das formandas: "o conhecimento matemático e didáctico foi desocultado e desenvolvido no contexto das tarefas propostas e das questões suscitadas pela reflexão sobre as aulas" (Pimentel, 2010, p. vii).

As percepções que os professores do 1.º ciclo do ensino básico têm sobre a influência do PFCM no seu conhecimento didáctico é também referido por Silva, Fernandes, & Alves (2010) que num estudo centrado num grupo de formação, concluem que o PFCM contribuiu para a "melhoria do conhecimento matemático e didáctico dos formandos ao nível do significado dos objectos matemáticos, das dificuldades, erros e obstáculos dos alunos na aprendizagem, da importância das capacidades transversais, resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático, e da análise de situações de ensino, metodologias específicas e recursos didácticos" (p. 492).

Pezzia e Martino (2010), uma investigadora não formadora do PFCM, também

destaca na sua investigação as características especiais da organização do PFCM considerando-as promotoras do desenvolvimento profissional das formandas, em especial no processo de mudança de atitude perante a Matemática e o seu ensino, ao proporcionar as condições necessárias para ultrapassarem as dificuldades, ao prestar atenção simultaneamente ao conteúdo, às práticas e ao lado afectivo do ensino.

Célia Mercê (Mercê, 2008) realiza um estudo com professoras do 2.º ciclo onde se propôs ampliar o conhecimento sobre o modo como integram as calculadoras nas suas práticas e de que forma é que a formação contínua pode ajudá-los a reflectir sobre as suas concepções e práticas neste campo. As três professoras estudadas, a frequentar o programa pela primeira vez, têm perspectivas diferentes em relação à utilização da calculadora. O estudo conclui que, apesar das sessões de formação contribuírem para os professores reflectirem sobre as suas práticas, apenas fez surgir algumas dúvidas na professora mais resistente ao uso da calculadora, parecendo não provocar grandes alterações nas práticas lectivas nem nas concepções profundas sobre a utilização da calculadora. Desta experiência a investigadora conclui que, no caso especial das duas professoras mais resistentes, nota a falta de uma dinâmica colaborativa nas respectivas escolas. Daí a recomendação que a formação de professores deve apostar no reforço deste aspecto.

Isabel Rocha e Manuela Pires (Rocha e Pires, 2008) procuraram analisar a influência do PFCM na prática lectiva e desenvolvimento profissional de três professoras da mesma escola mas de dois grupos de formação distintos, uma de 1.º ano e duas de 2.º ano. Uma das conclusões do estudo apontou a dificuldade de articular o trabalho das professoras por pertencerem a grupos distintos de formação, não favorecendo as dinâmicas de colaboração. A maior mudança evidenciada neste estudo é nas metodologias de ensino das professoras, com tarefas de natureza mais problemática e a promoção da comunicação, com a valorização das interacções e a necessidade de ouvir as explicações dos alunos. Esta evolução foi propiciada "pelo modelo de formação adoptado, desenvolvido em ligação com a prática lectiva dos professores e que contempla momentos de planificação, observação e reflexão num período de tempo longo" (p.65)

Estes aspectos organizativos também são destacados no estudo de Colaço, Branco e Rebelo (2009), que da análise dos questionários de avaliação anual dos primeiros quatro anos do PFCM na ESE de Santarém concluem que o modelo de formação foi

muito bem aceite pelos professores, destacando dois motivos: a possibilidade de criação de espaços de trabalho "colaborativo em que houve espaço e tempo para se confrontarem ideias o que permitiu experimentarem novas formas de trabalho e também novos materiais" (p. 42) e porque incidiu na análise e reflexão individual e posteriormente conjunta sobre as práticas dos formandos.

Tenreiro-Vieira (2009) também realça que "o desenrolar das sessões de formação em grupo, das sessões de supervisão em sala de aula, assim como o acompanhamento que faziam da actividade matemática dos alunos, evidenciou que muitos professores integraram na acção conhecimentos (re)construídos na formação" (p.88). A autora destaca algumas mudanças nos formandos "na dinâmica de sala de aula e na gestão dos tempos de aprendizagem" (p. 84), verificando-se que "progressivamente muitos formandos foram criando sucessivas oportunidades para a activa participação e envolvimento dos alunos" (p.84). Afirma ainda o reconhecimento, pelos formandos, do acompanhamento de sala de aula como uma componente "muito importante" da formação, e a oportunidade de explicitar dúvidas e formular questões sem "medos"; e a segurança e apoio sentidos na planificação e no desenvolvimento do trabalho com os alunos, bem como na gestão de sentimentos associados ao processo de mudança, como, por exemplo, a insegurança e o receio de "correr riscos" rompendo com padrões habituais de actuação" (p. 88). Esta ideia é também expressa por Correia (2010).

Ana Paula Canavarro e Isabel Rocha conduziram em 2006/2007 um estudo sobre as mais-valias que os participantes dos distritos de Évora e Leiria reconhecem no PFCM (Canavarro & Rocha, 2008). O estudo teve por base dados quantitativos e qualitativos retirados dos questionários de avaliação da formação realizados em cada uma das IES no final do ano lectivo e dos portefólios dos formandos. Os dados analisados permitem concluir do desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico dos professores; do aumento das expectativas em relação ao trabalho dos professores e ao desempenho dos alunos; e de uma valorização de uma prática de questionamento e reflexão por parte dos participantes no PFCM.

Cristina Martins com base em dados recolhidos, no âmbito do PFCM em Bragança, desenvolve o seu doutoramento procurando responder às questões: De que forma ocorre o desenvolvimento profissional do professor através da participação no programa de formação? Quais os contributos do uso do portefólio num programa de

formação contínua para o desenvolvimento profissional do professor? Em artigos que tem vindo a publicar em parceria com Leonor Santos, tem evidenciado o contributo positivo para o desenvolvimento profissional de uma das professoras e que as aprendizagens da professora põem a tónica na utilização de materiais, na resolução de problemas, na comunicação e no novo olhar sobre os conhecimentos dos alunos. Afirma ainda o desenvolvimento muito profundo das práticas individuais e colectivas de reflexão (Martins & Santos, 2007).

Numa comunicação (Martins & Santos, 2008) mais focada na capacidade de reflexão dos professores, é referido que as reflexões põem a tónica na resolução de problemas, comunicação e produções dos alunos. A valorização da capacidade de comunicação e de resolução de problemas aparecem a par do aprofundamento do conhecimento profissional (Martins & Santos, 2009). A alteração da visão da professora em estudo relativamente ao processo de ensino e aprendizagem conduziu ao reforço das interacções entre os alunos no trabalho a pares e em grupo (Martins & Santos, 2010).

Num estudo também centrado no portefólio (Menezes, 2008) Luís Menezes conclui que o portefólio é um instrumento familiar para os formandos, usado também na formação de professores com duas vertentes: avaliação e desenvolvimento profissional. Na vertente de desenvolvimento profissional o portefólio é um instrumento de problematização da prática. Os formandos concordam com o portefólio como instrumento de avaliação mas rejeitam a sua exclusividade, concluindo com a recomendação de utilização de outros instrumentos de avaliação.

Ainda sobre o portefólio, mas com o objectivo de através dele compreender o entendimento dos formandos sobre o PFCM, Guerreiro e Ribeiro (2008) concluem que as tarefas escolhidas pelos formandos para incluir no portefólio se baseiam na inovação e motivação dos alunos, com ênfase na resolução de problemas e no processo comunicativo.

Discussão e considerações finais

Uma análise transversal dos estudos apresentados permite destacar alguns aspectos. Como já referimos, a maioria dos estudos divulgados (12 em 16) tem incidência no desenvolvimento profissional dos professores que participam no PFCM. Este desenvolvimento é perspectivado nas investigações de duas maneiras distintas: como aprofundamento e aquisição de novo conhecimento matemático ou didáctico, sendo

estas duas componentes do conhecimento profissional as mais referidas, e também como desenvolvimento de um saber fazer de natureza muito prática que se reflecte na sala de aula. Neste último, sobressai a tendência do uso de metodologias de trabalho centradas em tarefas diversificadas, de natureza mais aberta, apelando a um papel activo dos alunos na construção do conhecimento matemático – em alguns estudos, a alteração da dinâmica da aula parece ser a maior conquista, merecendo muito menor atenção o estudo sobre a abordagem aos temas matemáticos.

Um outro aspecto que se destaca é o reconhecimento da importância da lógica e organização do PFCM para a evolução dos professores participantes. A forte ancoragem do PFCM na prática de sala de aula é destacada na maioria dos estudos, incluindo-se aqui a leccionação e a reflexão sobre a prática lectiva. Olhar as produções matemáticas dos alunos parece ter sido uma estratégia valorizada em muitos estudos para alimentar a reflexão do professor. Neste ciclo de trabalho sobre a prática lectiva, o foco concreto na planificação parece ter sido alvo de menos atenção por parte da investigação até agora divulgada.

Outro aspecto que é apontado em alguns dos estudos é o trabalho colaborativo entre professores, sendo identificado como um contexto de trabalho gratificante e produtivo para os professores – no entanto, parece-nos que as referências ao trabalho colaborativo muitas vezes remetem para a troca de experiências e de materiais, ficando por esclarecer em que medida se refere a uma discussão e produção colectiva de recursos para o ensino da matemática ou de uma reflexão com vista a sua real regulação.

Um outro aspecto ainda tem a ver com os portefólios. Apesar de a investigação analisada destacar a não consensualidade sobre a sua adesão, pelo menos por parte dos formandos, revela trazer mais-valias para o desenvolvimento profissional dos professores, nomeadamente ao nível do aprofundamento da sua capacidade de reflexão.

Apesar de muitos estudos se referirem à organização do PFCM e às suas estratégias formativas, apenas um estudo acaba por o tomar exactamente como objecto de estudo. Diferentes estudos permitem sublinhar a importância das sessões de acompanhamento da formação na aula dos formandos, supervisionada pelo formador, e tudo o que elas envolvem. Este é um dos aspectos inovadores do PFCM, seria importante que a investigação desenvolvesse mais estudo sobre a modalidade formativa propriamente

dita em todas as dimensões do PFCM, tanto para a sua regulação, como para a inspiração de outros programas de formação que venham a ser desenvolvidos.

Referências

Canavarro, A. P. & Rocha, I. (2008). Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: mais valias e desafios do PFCM nos distritos de Évora e Leiria. En R. Luengo González et. al. (Eds.), *Investigación en educación MATEMÁTICA XII* (pp.577-586).

Colaço, S., Branco, N. & Rebelo, C. (2009). O Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico – 4 anos de experiência na ESE de Santarém. *Interacções*, 12, 23-43.

Correia, A. (2010). *A supervisão na formação e o desenvolvimento profissional: Perspectivas de formadores no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de mestrado, Universidade de Aveiro.

Guerreiro, A., & Ribeiro, C. M. (2008). Portefólio no programa de formação contínua em matemática. Aspectos emergentes da análise dos portefólios sobre a avaliação com vista à regulação das práticas de formação. In Menezes, L.; Santos, L.; Gomes, H. & Rodrigues, C. (Org.) *Avaliação em Matemática. Problemas e Desafios* (pp. 225 – 239). Viseu: SEM/SPCE.

Martins, C., & Santos, L**.** (2007). Desenvolvimento profissional de uma professora de 1.º Ciclo num contexto de formação. *Actas XVIII SIEM*. Angra do Heroísmo: APM. CD.

Martins, C., & Santos, L**.** (2008). A reflexão escrita num contexto de formação. En R. Luengo González et. al. (Eds.), *Investigación en educación MATEMÁTICA XII* (pp.557-565).

Martins, C., & Santos, L. (2009). Conhecimento Profissional do Professor d0 1.º Ciclo. Integração Teoria-Prática. Actas XX SIEM. Viana do Castelo: APM. CD

Martins, C., & Santos, L**.** (2010). Reflection on Practice: Content and Depth. Em Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (2009). Em http://www.inrp.fr/publications/catalogue/web/Notice.php?not_id=BR%20066

Menezes, L. (2008). Portefólio: Instrumento de avaliação e desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo em formação contínua. In Menezes, L.; Santos, L.; Gomes, H. & Rodrigues, C. (Org.) *Avaliação em Matemática. Problemas e Desafios*. Viseu: SEM/SPCE. (pp. 241 – 248.

Mercê, C. (2008). *Concepções e práticas lectivas dos professores de matemática do 2.º ciclo em relação à calculadora: Contributos da formação para a reflexão*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Pezzia, M. (2010). *La formazione matematica dei docenti di Scuola Primaria come problema pedagogico. Uno studio nel contesto della formazione continua in Portogallo*. Tese de doutoramento, Università degli Studi di Napoli "Federico II", Itália.

Pezzia, M., & Martino, P. (2011). The effect of a teacher education program on affect: the case of Teresa and PFCM. Comunicação apresentada no CERME7_WG_8. Em http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/index.php?id=wg8

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho).

Rocha, I., & Pires, M. (2008). A influência do Programa de formação Contínua em Matemática nas práticas dos professores do 1.º ciclo. Em Grupo de Trabalho sobre

Investigação (Org.). *O professor de Matemática e os projectos de escola* (pp. 39-68). Lisboa: APM.

Rocha, I. (2010). *Contribuições de um Programa de Formação Contínua em Matemática para o Desenvolvimento profissional dos Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Universidad de Extremadura, Espanha.

Serrazina, L., (2009), O Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1° e 2° Ciclo do Ensino Básico: balanço possível, *Interacções, 12*, 4-22.

Serrazina, L. (2010). A formação continua de professores em Matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *2(1),* 1-23.

Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Saramago, M. J. (2005). Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.ºciclo. http://www.dgidc.minedu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=89#i

Serrazina, L M.., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2010). Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1ºciclo e do 2.º ciclo do ensino básico. http://www.dgidc.minedu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=89#i

Silva, N., Fernandes, J. A., & Alves, M. P. (2010). Influência de um programa de formação contínua em Matemática no conhecimento didáctico de professores do 1.º CEB. *Actas XXI SIEM* (pp. 492-503). Aveiro: APM. CD.

Tenreiro-Vieira, C. (2009). Impacte de um Programa de Formação Continua em Matemática em profesores e alunos dos primeiros anos de escolaridade. *Unión*, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 77-92.

Vicente, M. (2006). *Desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo no contexto de um programa de formação continua em Matemática*. Tese de Mestrado, Universidade de Évora.

FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DA PARCERIA ESCOLA-UNIVERSIDADE NO DESENVOLVIMENTO DO ESTÁGIO SUPERVISIONADO

Raquel Gomes de OLIVEIRA

Faculdade de Ciência e Tecnologia – FCT/Unesp – Presidente Prudente- São Paulo-Brasil

raqueloliveira@fct.unesp.br

Resumo

Este texto objetiva apresentar uma pesquisa que pretendeu descrever e analisar a aplicação de uma proposta de reelaboração do desenvolvimento do Estágio Curricular Supervisionado na formação inicial de professores de Matemática que buscava superar a tradicional sequência observação-participação-regência. Assim, os procedimentos para sua realização apoiaram-se: (a) na análise de sua legislação e nas diretrizes curriculares para a formação de professores, (b) na caracterização da prática de ensino e formação de professores enquanto campo de pesquisa sob diferentes enfoques e (c) no conceito de parceria entre as instituições universidade e escola. A metodologia da pesquisa envolveu os participantes no processo de planejamento, execução e avaliação das ações compatíveis com horas de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática. O desenvolvimento desta proposta de Estágio teve entre seus resultados o fato de os futuros professores iniciarem processos de identificação com a profissão docente, a partir do contexto escolar, e para a equipe pedagógica da escola, a vivência de uma experiência de trabalho cooperativo, com professor e alunos da universidade, que proporcionou reflexões e mudanças que ampliaram e aprofundaram sua compreensão da profissão docente.

Palavras-chave: Cognição Situada, Formação Inicial de Professores de Matemática, Estágio Curricular Supervisionado.

Introdução

No Brasil quando se analisam documentos e trabalhos de pesquisa sobre o Estágio Curricular Supervisionado, chega-se a diferentes concepções e orientações para sua realização. Entre essas orientações estão as centradas em atitudes e procedimentos de observação, percepção, apreciação, contemplação da prática do professor responsável pela sala de aula e comparação entre o que o contexto escolar apresenta e o que se estuda teoricamente nos cursos de Licenciatura. (Oliveira, 2009).

Historicamente, na realização dos Estágios foram desconsiderados os contextos escolares e os saberes ali produzidos como elementos contribuintes para o processo formativo dos futuros professores que o desenvolvimento de um Estágio subentende.

No passado, a ausência de comunicação entre formação inicial e contexto escolar redundou na frase *"na prática a teoria é outra"*, uma expressão que remete à aplicação de conhecimentos teóricos em situações práticas. No entanto, essa ausência de comunicação necessitou ser superada por demandas atuais dos contextos escolares.

Nesse sentido, esta comunicação tem por referência um estudo cujo problema de pesquisa foi investigar em que medida é possível superar o modelo observação-participação-regência para o desenvolvimento do Estágio Curricular Supervisionado, quando se consideram suas características históricas e as atuais Diretrizes para a Formação de Professores da Educação Básica (Resolução CNE/CP 01/2002).

Assim, este texto apresenta em primeiro lugar, aspectos do enquadramento teórico do estudo em que se optou por focar apenas elementos da Teoria da Cognição Situada, embora a base conceitual do estudo seja também formada pela Pesquisa-Ação e Trabalho Cooperativo. Referem-se, em segundo lugar, as principais opções metodológicas, destacando-se participantes e procedimentos realizados. Por último, apresentam-se os principais resultados obtidos.

Estágio Supervisionado: A necessidade e importância de reelaborar o modelo observação-participação-regência

O desenvolvimento de horas de Estágio Curricular Supervisionado foi historicamente caracterizado pela sequência de observar a aula para depois participar na mesma e, finalmente, regê-la. Na atualidade, entende-se que o tempo de Estágio, enquanto processo de aprendizagem, é em parte o resultado de atividades, do contexto e da cultura em que se desenvolve. A partir deste entendimento, optou-se por instituir a teoria da Cognição Situada como uma das principais referências teóricas do estudo desenvolvido.

Com efeito, sob o referencial de Cognição Situada aprender e conhecer confundem-se com participação e vivência, portanto experiências situadas, ocorridas em contextos: "Situações poderiam ser ditas como co-produtoras de conhecimento através de

atividade. Aprendizagem e cognição, é agora possível defender, são fundamentalmente situadas". (Brown et al. 1989, p. 32).

Discutida especificamente por Lave e Wenger (1991), a Cognição Situada remete necessariamente para o processo denominado de Participação Periférica Legítima, caracterizado pelo fato de o ponto de partida para a aprendizagem não ser propriamente a aprendizagem, mas sim a participação social em um determinado grupo que não se restringe ao conceito de vizinhança, de proximidade, mas sim de ser o continente de determinados saberes, práticas e relações.

Na Cognição Situada, aprender identifica-se com o processo de passagem da condição de novato, de recém-chegado em uma comunidade, à condição de perito em uma situação particular, sobretudo pelo engajamento/participação em atividades reais.

Quando se trabalha com iniciantes da profissão docente unicamente com orientações prescritivas quanto à escola, precisamente quanto às situações de sala de aula, confirma-se o entendimento historicamente apresentado para a formação inicial de professores: a universidade como sendo a única responsável por esta formação e a escola como o lugar apenas de aplicação do que foi aprendido nos Cursos de Licenciatura e, muitas vezes, apenas nas matérias pedagógicas da grade curricular dos referidos cursos.

Partir do princípio de que os professores da Educação Básica também são produtores de saberes (Tardif, 2002; Nóvoa, 1996; Pimenta, 2002; Sacristán, 1991; Pérez-Gómez, 2000) leva a outras disposições sobre relações estabelecidas nas situações escolares, como é o caso da relação entre estes professores e o estagiário. Logo, a inserção e a participação do estagiário na escola não mais se justificam apenas por um trabalho de observação e crítica, feitas por este, com critérios de validade sobre o conhecimento que está sendo desenvolvido na aula somente a partir de parâmetros universitários, desprezando, por isso, os saberes docentes que se legitimam na escola.

A escola como uma comunidade de prática, portanto, enquanto um sistema de relações pode vir a ser uma plataforma de desenvolvimento para a iniciação profissional na licenciatura, completamente diferente do que se concebeu historicamente para formação de professores.

Na situação específica de uma aula de Matemática, os papéis docentes, tanto do professor experiente quanto do futuro professor, não resultam do desenvolvimento de ações, planejadas externamente à sala de aula para posteriormente serem aplicadas na

mesma. Mestre e aprendiz deixam de ser transmissores de um corpo de prescrições e proposições historicamente construídas. Contrariamente a isto, quando se relacionam, mestre e aprendiz apontam para uma relação cooperativa justificada tanto pelo contexto como por objetos, tais como um conteúdo, um problema a ser resolvido, uma pesquisa temática ou uma atividade de investigação.

Para García Blanco (2000), esta é uma possibilidade de, através de tarefa/atividade, os programas de formação de professores se articularem, sob a Cognição Situada, gerando comunidades de aprendizes que proporcionem entornos de aprendizagens. Estes entornos são espaços de conhecimento de Matemática e sobre Matemática, de conhecimento curricular e de conhecimento de aprendizagens de noções matemáticas: conhecimentos considerados base para o ensino de Matemática na escola.

Principais opções metodológicas

A pesquisa qualitativa, do modo pesquisa-ação, que serviu de base ao estudo sobre o qual esta comunicação incide, ocorreu de 2004 a 2006, com estagiários do curso de Licenciatura em Matemática e com professores de Matemática e a equipe pedagógica de uma escola pública da Rede Estadual do Estado de São Paulo.

A definição do problema de pesquisa, referido na introdução deste texto, bem como o planejamento de ações para sua investigação, o desenvolvimento, a análise e discussão dos dados e formulações posteriores, fundamentaram-se em uma base conceitual formada pela Pesquisa-Ação, Trabalho Cooperativo e Cognição Situada.

Os participantes foram dezessete alunos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Presidente Prudente-SP, matriculados na disciplina Prática de Ensino de Matemática, a professora universitária responsável pela disciplina, a pesquisadora do estudo e a equipe pedagógica da escola na qual se desenvolveu o Estágio, formada pela diretora, coordenadora pedagógica e quatro professoras de Matemática. Esta unidade escolar foi denominada escola parceira e seus professores foram chamados de professores parceiros. Através da parceria escola-universidade foram agendados agendar encontros entre a equipe pedagógica escolar, os estagiários, a professora universitária e a pesquisadora.

Para o desenvolvimento dos estágios as seguintes atividades foram realizadas pelos estagiários: escolha de uma classe para estagiar e observação participante nas aulas de

Matemática da mesma; intervenção em problemas específicos do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos através do planejamento de atividades para regência partilhada; participação em projetos específicos da escola (Olimpíada da Matemática, Aulas de Reforço), trabalho extraclasse conjunto com o professor da sala estagiada e seminários de partilha de experiência de estágio que eram realizados nas aulas da faculdade. Essas ações estavam referendadas pela proposta inicial de desenvolvimento de Estágio que previa que, além da observação e análise do contexto escolar, houvesse a intervenção sobre problemas específicos. Esta intervenção adiantou-se ao período de regência das aulas indo ao encontro do conceito de Participação Periférica Legítima (Lave e Wenger, 1991).

Os instrumentos utilizados na pesquisa foram: observação participante da pesquisadora em todas as aulas de Estágio do ano letivo na faculdade, entrevistas semi-estruturadas com os professores de Matemática e com a equipe pedagógica da escola e questionários para os estagiários e seus respectivos professores supervisores de Estágio. Assim foram levantadas informações dos participantes quanto à natureza da relação escola-universidade no âmbito do Estágio, aos saberes docentes e à perspectiva, comparada posteriormente, da realização de um trabalho cooperativo no contexto escolar.

Apresentação e discussão de resultados

O questionamento das implicações de uma proposta de reelaboração de desenvolvimento de Estágio que buscou articular suas caracterizações históricas com as atuais orientações para a formação de professores para a Educação Básica, teve enquanto resultados para o futuro professor de Matemática: (a) acréscimo de conhecimento sobre a natureza da Matemática em termos de uma construção permeada por necessidades, capacidades e condições humanas que se apresentam pela história do Homem e, nesse sentido, impregnada de raciocínios não lineares, mas sim caracterizados por dúvidas, conjecturas, refutações, erros, contradições tendo como consequência outros parâmetros para o trabalho pedagógico em sala de aula; (b) saberes sobre a existência de diversas representações que os alunos de diferentes séries estagiadas constroem sobre um mesmo conceito matemático, em diferentes situações, e o modo como constroem essas representações e conseguem chegar, ou não, a um acordo para uma representação comum, no caso da Matemática, sua linguagem, ficando os estagiários cientes de que é preciso haver ambientes de discurso matemático e maneiras

para se chegar a ele em sala de aula; (c) reconhecimento do confronto de suas experiências, crenças e expectativas quanto à docência em situações reais de sala de aula com o apoio do professor experiente; (d) valorização da reflexão sobre os saberes dos professores de Matemática, quando atuam no contexto escolar, buscando ciência não somente dos saberes necessários para ensinar Matemática, mas como variam esses saberes, como se articulam e em quais situações; (e) trabalho focalizando os conceitos de cooperação e ética embasados, sobretudo pelo reconhecimento e respeito aos interesses e desenvolvimentos individuais.

Para os professores parceiros, os resultados remetem ao reconhecimento de seus saberes, de suas capacidades tanto pelos futuros colegas de profissão, assim como pela professora universitária; a tomada de consciência ou o seu desenvolvimento sobre serem co-responsáveis na formação inicial de professores; novos entendimentos sobre o desenvolvimento de horas de Estágio Supervisionado e sobre seu significado; oportunidades de serem ouvidos em suas expectativas e em seus mal estar, sobre situações mais abrangentes, como a falta de preparo para lidar com alunos portadores de necessidades especiais, por exemplo; a consciência das dificuldades para se trabalhar efetivamente em cooperação atendendo ao desenvolvimento dos projetos pedagógicos das duas instituições; a experiência de uma relação mestre-aprendiz sustentada pela troca de saberes, pela vontade mútua de aprender, pela união de gerações diferentes, com saberes diferentes, e nem por isso, menos importantes, por fim a experiência de se apresentarem em um estudo enquanto cooperadores e não apenas fornecedores de dados.

Superar a sequência observação-participação-regência é entender o Estágio como uma atividade caracterizada por elementos de cada época. Atualmente, esses elementos identificam-se com o conceito e existência de partilha, de respeito mútuo, de diálogo entre professor da escola e estagiário, entre este e os alunos da escola e entre esta e a universidade.

A análise dos dados permitiu afirmar que os participantes do estudo vivenciaram etapas que, segundo Tripp (2005), caracterizam um ciclo da pesquisa-ação: planejamento, desenvolvimento, descrição e avaliação com o objetivo de melhorar a prática (aprendendo progressivamente enquanto o processo ocorre), tanto a aprendizagem se referindo à prática quanto à investigação do que se considerou um problema, um empecilho.

Dentre os resultados da pesquisa encontram-se, também, dificuldades para a superação da histórica sequência de observação-participação-regência:

1. Não entendimento dos participantes de que não haveria um projeto de Estágio elaborado anteriormente na universidade para ser aplicado na escola;

2. Relutância dos professores da escola parceira quanto à possibilidade de proporem, juntamente com os estagiários, atividades de Estágio a serem desenvolvidas por ambos;

3. Dificuldade de conciliação de horários entre todos os envolvidos no estudo a fim de que um grupo cooperativo fosse constituído;

4. Centralização inicial das atividades de Estágio em atividades de reforço e ensino individualizado, para os alunos das salas estagiadas;

5. Falta de articulação entre os desenvolvimentos dos Estágios e elaboração e apresentação dos seminários temáticos nas aulas da faculdade.

O enquadramento teórico do estudo evidenciou que parte destas dificuldades tem causas distantes e atuais, não somente no Brasil. Uma delas remete à utilização das unidades escolares por pesquisadores vinculados às universidades que não estavam preocupados com questões educacionais da unidade pesquisada, o que pressupunha, ora um compromisso com questões educacionais mais amplas, ora o interesse por questões particulares e alheias ao contexto escolar pesquisado.

Mesmo assim, a parceria entre escola-universidade oportunizou o desenvolvimento futuro de outros ciclos de pesquisa, não por imposição, seja de uma instituição ou de outra, mas por necessidade: necessidade de fazer com que conhecimentos fossem produzidos, que se melhorassem as situações de ensino e aprendizagem, que se efetivem princípios e procedimentos educacionais demandados socialmente e amparados por lei (LDBEN de 1996; Resolução CNE/CP 01/2002; Pareceres CNE/CP 27/2001, 28/2001 e 09/2001)[1].

Quanto aos saberes necessários à docência apontados por Shulman (1986,1987), Schön (1983), Zeichner (1987, 2002), Tardif (2002), Perrenoud (2002), ao mesmo tempo em que foram vivenciados pelos estagiários e seus professores parceiros, pareceram contribuir para o diagnóstico, o planejamento, o desenvolvimento e a avaliação das horas de Estágio Supervisionado, em situações escolares.

Através da análise descritivo-interpretativa dos dados foi possível inferir que outro saber docente poderia ser também considerado desde a formação inicial do professor: o saber atitudinal-afetivo.

Nas entrevistas e nas respostas aos questionários, os professores de Matemática referiram-se a atitudes docentes e à afetividade que permitiram, ao menos neste estudo, considerá-las como um saber docente:

> Se você colocar amor na sua profissão, empenho, dedicação, coragem, ir com aulas preparadas, (...), você vai encontrar ali naquela sala diferentes crianças, que vieram de diferentes famílias (...) com diferentes problemas, (...), que são crianças que para você conseguir ensinar Matemática, primeiro você tem que chegar, ganhar o amor, passar amor para essa criança para você conseguir poder ensinar a Matemática. (Professora P1).
>
> Porque não é só o conteúdo, né? A gente não pode só dar o conteúdo... Às vezes a gente que comentar sobre o que acontece... (Professora P2).
>
> Se ele [...] não gosta é para ele mudar de profissão. Agora se ele gosta... Porque quando você gosta, você consegue passar isto para os alunos que você está ensinando, porque você ama o que está fazendo. (...) Então fica fácil para dar aula. (Professora P3).
>
> Porque a gente tem experiência (...), então tem bastante dica, bastante jeito de pegar o aluno, ir ao encontro dele, ser humilde ao aluno. O Professor, antes de tudo, é um educador. Se ele é um educador ele tem que ter educação. Eles me respeitam tanto... (Professora P4).

A percepção de aspectos atitudinais e afetivos levou a pensar que mesmo sendo saberes que provêm da subjetividade da experiência docente poderiam, em uma situação de Estágio compartilhado, ser inicialmente desenvolvidos tanto na escola estagiada como no curso de Licenciatura, como foi demonstrado por alguns estagiários em suas participações nas aulas junto à faculdade e nas respostas aos questionários aplicados aos mesmos.

Considerações finais

Fazer uso de um enquadramento teórico fundamentado na teoria da Cognição Situada, nos referenciais do Trabalho Cooperativo e, como método de desenvolvimento do estudo, na Pesquisa-Ação, permitiu que dados da pesquisa e sua análise descritivo-interpretativa confluíssem para resolver o problema que orientou o processo de investigação.

A historicidade do Estágio Supervisionado no Brasil confunde-se com a história da formação de professores, o que tem como consequência o fato da concepção do Estágio

refletir e interferir nas características de formação de professores de tempos e espaços definidos.

Uma das conclusões do estudo não é a negação das ações de observação, participação e regência como meio para que outros modelos de Estágio reflitam dimensões formativas, mas sim das questões relativas ao modo sequencial das ações de observar, participar e reger aulas, que se mostrou possível de ser superado: uma superação alicerçada por referenciais teóricos e práticos, nos quais não se presume uma aplicação linear dos primeiros nos segundos; uma superação que aproveitando as ações de observação, participação e regência se apresentou como alternativa para demandas educacionais e para disposições legais.

A Resolução CNE/CP 01/2002 não apresenta contradição textual quanto aos princípios e objetivos para a Educação Básica. Tudo se articula e corresponde ao que deveria ser e vir a tornar-se um profissional da Educação, do mesmo modo que é explícito o significado da escola como local de trabalho e também de formação deste profissional.

A ausência da institucionalização entre universidade e escola para a efetivação da dimensão prática da formação de professores, juntamente com as reformas *top down*, que não ecoam as vozes de seus principais vetores, os professores das escolas da Educação Básica, asseguram as indagações:

- Como esperar que a escola assuma, entre outras funções que vem assumindo, uma efetiva participação na formação inicial dos professores, sem que existam condições estruturais e funcionais para isto?
- O que poderia originar o tempo comum para a parceria escola-universidade que se sobressaísse à boa vontade dos participantes neste tipo de trabalho?
- Entendendo que os saberes dos professores que estão na Educação Básica e seus tempos de experiência são significativos a formação inicial de professores, não seria importante que estes possuíssem em sua carga horária, horas-aulas destinadas ao trabalho conjunto com futuros professores e com professores universitários?
- A institucionalização deste tempo de trabalho comum não seria uma oportunidade de conscientização dos professores da Educação Básica sobre a responsabilidade que lhes cabe no que se refere à formação inicial de futuros colegas de profissão?

- A tomada de consciência desta responsabilidade possibilitaria o desenvolvimento de atitudes para além do que hoje se denomina professor reflexivo e professor pesquisador de sua prática?

Essa ausência de institucionalização da parceria escola-universidade, no que se refere à dimensão prática das Licenciaturas, não desmerece o que se conseguiu com este estudo.

Essa ausência origina um interesse maior, que se identifica com o movimento de mudanças, aproximando vozes e interesses que se contrapõem a práticas históricas de formação docente, nas quais se concebeu o Estágio Supervisionado como elemento de separação entre teoria e prática nos processos de formação.

Notas

[1]Pareceres CNE/CP 27/2001, 28/2001 e 09/2001. Disponível em http://portal.mec.gov.br/sesu/ . Acesso em 20 de Abril de 2004.

Resolução nº 01 de 18 de fevereiro de 2002. Disponível em http://portal.mec.gov.br/sesu/ Acesso em 20 de Abril de 2004.

Referências Bibliográficas

Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei nº 9394 de 20 de Dezembro de 1996. *Diário Oficial da União***,** Brasília.

Brown, J.; Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18(1)*, 32-42.

Garcia Blanco, M. (2000). El aprendizaje del estudiante para profesor de Matemática desde la naturaleza situada de la cognición: Implicaciones para la formación inicial de maestros. In C. CORRAL & E. ZURBANO (Eds). *Propuestas metodológicas y de evaluación en la formación inicial de los profesores del área de Didáctica de la Matemática***.** España: Universidad de Oviedo.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press.

Nóvoa, A. (1997). Formação de Professores e Profissão Docente. In A. NÓVOA (Org). *Os Professores e a sua Formação*. Lisboa: Publicações Dom Quixote. Instituto de Inovação Educacional.

Nóvoa, A. (1996). Relação Escola-Sociedade: "Novas Respostas para um Velho Problema". In R. V. SERBINO. (Org). *Formação* de *Professores***.** São Paulo: UNESP.

Oliveira, R. (2009). Superação da Sequência Observação-Participação-Regência no Estágio Curricular Supervisionado na Licenciatura em Matemática: Resultados da Parceria Escola-Universidade. *Série-Estudos, 28(1),* 151-168.

Pérez-Gómez, A. (2000). Ensino para a Compreensão. In J. GIMENO SACRISTÁN & A. PÉREZ-GÓMEZ. *Compreender e Transformar o Ensino*. Porto Alegre: Artmed.

Perrenoud, P. (2002). A Formação de Professores no Século XXI. In P. PERRENOUD (Org.). *As Competências para Ensinar no Século XXI: A Formação dos Professores e o Desafio da Avaliação*. Porto Alegre: Artmed.

Pimenta, S. (2002). *O Estágio na Formação de Professores: Unidade Teoria e Prática?* São Paulo: Cortez.

Sacristan, J. (1991). Consciência e Acção Sobre a Prática Como Libertação Profissional dos Professores. In A. NÓVOA (Org). *Profissão Professor*. Lisboa: Livros Horizonte.

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner-How Professionals Think in Action*. New York: Jossey Bass.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57 (1)*, 1 –22.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4 - 14.

Tardif, M. (2002). *Saberes Docentes e Formação Profissional*. Petrópolis: Vozes.

Tripp, D. (2005). Pesquisa-Ação: Uma Introdução Metodológica. *Educação & Pesquisa, 31(3),* 443-466. Acesso em 12 de Maio, 2006, de http://www.scielo.br .

Zeichner, K. (2002). A Pesquisa-Ação e a Formação Docente Voltada para a Justiça Social: Um Estudo de Caso dos Estados Unidos. In J. E. D. PEREIRA & K. ZEICHNER (Orgs). *A Pesquisa na Formação e no Trabalho Docente*. Belo Horizonte: Autêntica.

Zeichner, K. & Liston, D. (1987). Teaching Students Teacher to Reflect. *Harvard Educational Review, 57 (1)*, 1-22.

O SENTIDO DE NÚMERO DE FUTUROS PROFESSORES DO 1º CICLO

Dina Tavares
NIDE - Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais

Hélia Pinto
NIDE - Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais
hpinto@esecs.ipleiria.pt

Isabel Rocha
NIDE - Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais

Marina Rodrigues
NIDE - Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais

Resumo

Neste artigo apresentam-se resultados relativos ao sentido de número de futuros professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico, que emergiram de um estudo no âmbito do projecto de investigação "O sentido de número nas práticas pedagógicas dos futuros professores". Os resultados emanaram de questionários realizados por quinze participantes e revelam que a maioria possui um conhecimento seguro e flexível sobre os números inteiros, o que já não acontece com os números racionais. Com facilidade os alunos transferem para este conjunto numérico as propriedades dos números inteiros sem reflectirem nas consequências erradas desse procedimento. Por conseguinte, os resultados encontrados mostram a pertinência de investigar neste domínio, no sentido de facilitar aos futuros profissionais a consciencialização da importância do desenvolvimento do seu sentido de número reflectindo sobre as implicações nas suas práticas pedagógicas e por consequência, na formação matemática dos seus futuros alunos.
Palavras-chave: Sentido de número, formação inicial, professores do ensino básico

Introdução

O desenvolvimento do sentido de número é hoje aceite como um dos grandes objectivos da educação matemática (NCTM, 2000; Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008). Investigações recentes (Kaminski, 2002; Tsao, 2005; Perry, Dockett & Harley, 2007; Whitacre & Nickerson, 2006) salientam a importância de um bom sentido de número nos professores dos primeiros anos de escolaridade, dado que, na sua ausência, os professores terão dificuldade em compreender e valorizar as estratégias informais utilizadas pelos seus alunos quando resolvem problemas numéricos (fundamentais na génese do desenvolvimento do sentido de número). Deste modo, torna-se pertinente a integração, nos currículos de matemática dos cursos de formação inicial de professores, de oportunidades de trabalhar, discutir e analisar aspectos relacionados com o

desenvolvimento do sentido de número, contribuindo para uma reconstrução das concepções e crenças dos futuros professores, bem como para o desenvolvimento do seu conhecimento matemático.

O estudo a que reporta este artigo foi desenvolvido no âmbito do projecto de investigação "O sentido de número nas práticas pedagógicas dos futuros professores" (SNÚMERO), integrado nas actividades do Núcleo de Investigação e Desenvolvimento em Educação (NIDE), da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria (IPL), a decorrer no biénio 2009/2011. O projecto envolve oito investigadores com formação de base na área da Matemática e envolvidos na docência de Unidades de Ensino de Matemática, Didáctica e Prática Pedagógica e tem como objectivos descrever e analisar: (i) o sentido de número que possuem os futuros professores e a importância que dão às implicações que ele terá no desenvolvimento do sentido de número dos seus alunos; (ii) as ideias e concepções dos pré-profissionais acerca do papel do sentido de número e das operações no currículo; (iii) a forma como planificam neste domínio, nomeadamente ao nível da construção de sequências de aprendizagem; (iv) o papel do pré-profissional na criação e manutenção de um ambiente de aprendizagem que facilite o desenvolvimento do sentido de número; (v) os dilemas, dificuldades e desafios que os futuros professores sentem na planificação e na intervenção quando propõem aos alunos tarefas neste âmbito; e (vi) a forma como os futuros professores reflectem acerca das suas práticas quando planificam e aplicam na sala de aula tarefas no âmbito do sentido de número.

Neste artigo serão apresentados resultados emanados, essencialmente, de um questionário que teve como objectivo caracterizar o sentido de número dos futuros professores.

Sentido de Número

A terminologia *number sense* tem sido usada por vários investigadores significando um conjunto de competências numéricas que, nos dias de hoje, são consideradas de grande relevância para o desenvolvimento nos alunos (Greeno, 1991; McIntosh, Reys & Reys, 1992; NCTM, 2000; Treffers & Buys, 2001; Dolk & Fosnot, 2001; Tsao, 2005; Kraemer, 2008). No entanto, McIntosh et al. (1992) salientam aspectos fundamentais para que se possa falar na existência de sentido de número, nomeadamente (a) conhecimento e destreza com números, que inclui múltiplas representações dos

números, sentido da grandeza relativa e absoluta dos números, capacidade de compor e decompor números e seleccionar e usar referências; (b) conhecimento e destreza com as operações, que envolve a compreensão dos efeitos de uma operação, a compreensão e o uso das propriedades das operações e das suas relações; e (c) aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações em situações de cálculo, que inclui a compreensão para relacionar contexto e cálculos, consciencialização da existência de múltiplas estratégias e apetência para usar representações eficazes.

Em termos conceptuais, sentido de número inclui o reconhecimento da magnitude relativa dos números, o efeito das operações sobre os números e o desenvolvimento de referenciais relativamente a quantidades discretas e contínuas. Em termos operacionais, envolve a capacidade para utilizar os números de modo flexível em cálculos e estimativas, avaliar a razoabilidade de resultados, a facilidade em lidar com as diferentes representações numéricas e relacionar números, símbolos e operações. Deve, ainda, acrescentar-se uma terceira dimensão, a que se refere aos aspectos afectivos e que pode ser determinante na atitude dos sujeitos perante os números em particular e a matemática em geral e que se reflectirá na concepção que vão formando relativamente a esta ciência. Como sintetizam Castro e Rodrigues (2008), o sentido de número diz respeito:

> à compreensão global e flexível dos números e das operações, com o intuito de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes para cada um utilizar no seu dia-a-dia, na sua vida profissional ou enquanto cidadão activo. É, pois, uma construção entre números e operações, de reconhecimentos numéricos e modelos construídos com números ao longo da vida e não apenas na escola. Inclui ainda a capacidade de compreender o facto de que os números podem ter diferentes significados e podem ser usados em contextos muito diversificados. (p. 11)

Nos últimos 20 anos, tem-se enfatizado em muitos países, o desenvolvimento do sentido de número em conjunto com o desenvolvimento de estratégias e procedimentos de cálculo e a sua aplicação flexível em contextos reais. Para o NCTM (2000) a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido de número e a aquisição da fluência de cálculo são considerandos o núcleo da Matemática para os primeiros anos. Askew e Ebbutt (2000) reforçam esta perspectiva quando referem que em Inglaterra se mudou a forma como a Matemática é ensinada em muitas escolas, com uma nova ênfase no cálculo mental e com novas abordagens pedagógicas, para ajudar as crianças a desenvolver um reportório de competências de cálculo envolvendo trabalho

nas técnicas e estratégias de cálculo mental. Por seu lado, a tradição nas escolas básicas portuguesas coloca a ênfase no ensino dos algoritmos de cálculo, afastando-se desta perspectiva. Alguns estudos sobre os efeitos do ensino dos algoritmos escritos no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e no desenvolvimento do sentido de número (Clarke, 2004), sugerem que encorajar os alunos a usar um único método para resolver problemas limita a sua capacidade para usar um pensamento flexível e criativo. Clarke (2004) mostra claramente os benefícios do desenvolvimento de conceitos e estratégias de cálculo mental antes do cálculo formal escrito.

Uma relação próxima entre investigação e prática é vista como um elemento importante para ajudar a mudar as práticas dos professores (Gravemeijer, 1997). É fundamental trabalhar ao lado dos professores na concepção de tarefas e materiais e melhorar estes materiais de acordo com os resultados dos estudos empíricos, num processo que conduza à construção de uma teoria pedagógica baseada na prática. Num estudo desenvolvido por Kaminski (2002) foi implementado, numa turma de futuros professores de matemática, um programa de formação integrado numa unidade curricular relacionada com Números e Operações, valorizando o desenvolvimento do sentido de número. Este programa, utilizando uma abordagem social-construtivista, proporcionou oportunidades de aquisição e desenvolvimento de estratégias e procedimentos matemáticos e facilitou o estabelecimento de inter-relações entre aspectos diversos do conhecimento matemático.

Sentido de número dos futuros professores

Os poucos estudos que investigam o conhecimento matemático dos futuros professores, ao nível do sentido de número, mostram que muitos exibem dificuldades, usando erradamente procedimentos matemáticos e não compreendendo o verdadeiro significado dos conceitos. Em particular, um estudo de Ball (1990) evidencia que os futuros professores dos primeiros anos tendem a generalizar as propriedades dos números inteiros aos números não inteiros. O trabalho de Hungerford (1994) permite perceber que os futuros professores dos primeiros anos apresentam lacunas relativamente à compreensão do número racional. São muitas vezes bons executores de algoritmos de cálculo, mas têm dificuldades em lidar de forma compreensiva com problemas não estandardizados em que esses números, ou as operações elementares, estão presentes. Assim, os futuros professores parecem usar concepções alternativas em relação ao

sistema numérico, sem uma visão conceptual clara quanto às propriedades desse sistema.

Relativamente a esta problemática, Tsao (2005) desenvolveu um estudo com o intuito de caracterizar os processos cognitivos utilizados pelos estudantes de 3.º ano, de um curso de formação de professores, na resolução de problemas simples envolvendo sentido de número. Do ponto de vista metodológico, foram aplicados questionários e realizadas entrevistas a estudantes organizados em dois grupos, constituídos em função do desempenho académico (*hight ability group* e *low ability group*). Os resultados sugerem que os alunos mais fracos (*low ability group)* tendem a usar métodos mais rígidos, baseados em procedimentos estandardizados. Os melhores (*hight ability group*) têm um desempenho bastante satisfatório nas diferentes categorias consideradas (magnitude dos números, uso de factos numéricos/propriedades, flexibilidade com números e operações, decomposição). Em termos globais, os resultados indicam que ambos os grupos têm mais dificuldade nos itens em que o universo numérico se alarga aos números racionais do que nos itens envolvendo apenas números inteiros. Relativamente aos números não inteiros, entendem números decimais e fracções como pertencentes a universos distintos, tendo dificuldade em relacioná-los. Adicionalmente, o pior grupo não estabelece conexões entre números decimais e fracções e tem particulares dificuldades nas operações multiplicação e divisão, referindo recorrentemente, por exemplo, que o efeito da multiplicação é sempre aumentar e o da divisão é sempre diminuir.

Os estudos sobre ideias e concepções dos professores desenvolvidos nas últimas décadas salientam a sua influência na prática profissional. Como salienta Tsao (2005) as instituições de formação têm aqui uma particular responsabilidade, em particular no diagnóstico destas ideias nos futuros professores e no desenvolvimento de estratégias de formação que os possam auxiliar a melhorar o seu sentido de número. Importa pois, no contexto Português, estudar a natureza, a estrutura e o conteúdo do sentido de número dos futuros professores, assim como a forma como o mobilizam quando perspectivam a sua prática profissional. Neste quadro surge pertinente o diagnóstico relativamente ao sentido de número dos futuros professores que se apresenta neste artigo.

Metodologia

A metodologia do projecto seguiu uma abordagem interpretativa de tipo qualitativo com design de estudo de caso. Envolveu 15 participantes, alunos de uma turma do 4.º ano de Licenciatura em Ensino no 1.º Ciclo, no ano lectivo de 2009/2010. No início do referido ano lectivo, todos os participantes responderam individualmente a um questionário com o propósito de se diagnosticar o seu sentido de número e cujos resultados são o foco deste artigo. Por vezes, as respostas dadas ao questionário foram clarificadas posteriormente, no momento em que foram realizadas entrevistas clínicas cujo objectivo não se insere neste artigo.

Do questionário faziam parte nove questões abertas (Tabela 1), envolvendo aspectos relacionados com diferentes componentes do sentido de número. A sua concepção teve por base os trabalhos desenvolvidos por Kaminski (2002), McIntosh et al (1992) e Whitacre e Nickerson (2006).

Tabela 1: Conteúdo do questionário

Questão	**Âmbito**
1, 2 e 5	Estratégias de cálculo mental
3	Valor de posição
4	Conhecimento e destreza com os números em contexto
6	Significado atribuído ao número racional
7	Comparação e ordenação dos números racionais
8	Noção de densidade
9	Efeito das operações com números racionais

Com as duas primeiras questões pretendia-se verificar se os futuros professores mobilizavam estratégias de cálculo baseadas nas propriedades da adição (1.ª questão) e da multiplicação (2.ª questão). Procurava-se ainda verificar se a proficiência relativa aos algoritmos padronizados causaria, ou não, resistência à utilização de outro tipo de estratégias de cálculo. Com a 3.ª questão pretendia-se analisar a compreensão dos alunos em relação à estrutura do sistema de numeração e a importância que atribuem ao valor de posição. A 4.ª questão envolvia uma situação problemática muito simples, com

o intuito de analisar o modo como os alunos aplicam os seus conhecimentos e destrezas com os números em contextos simples do seu dia-a-dia. Com a 5.ª questão prendia-se analisar as estratégias de cálculo mental utilizadas, nomeadamente a aplicação de conhecimentos e destrezas com os números inteiros em contextos de puro cálculo envolvendo a multiplicação. As questões seguintes tinham objectivos semelhantes às anteriores, mas alargava-se o universo numérico aos números racionais, visando analisar o modo como os alunos aplicam os seus conhecimento e destrezas com estes números . Assim, com a 6.ª questão pretendia-se perceber quais os significados que os alunos atribuem às fracções e com as duas seguintes, analisar a compreensão que possuem relativamente à estrutura do conjunto dos números racionais, nomeadamente comparação e ordenação (7.ª questão) e sua densidade (8.ª questão). A 9.ª questão surge com o propósito de analisar o conhecimento dos alunos em relação ao efeito das operações com números racionais.

A análise de conteúdo dos dados emanados dos questionários, por vezes complementados pelo esclarecimento dos procedimentos utilizados aquando da realização de entrevistas em profundidade e respectiva triangulação levou a um diagnóstico do sentido de número dos futuros professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Foram definidas categorias de análise à posteriori, de acordo com as respostas apresentadas. Estas categorias de análise basearam-se nos desempenhos dos estudantes relativamente às respostas dadas às diferentes questões do questionário

Resultados

Na tabela 2 apresenta-se uma análise dos desempenhos dos 15 alunos, em cada uma das questões do questionário que realizaram individualmente.

Tabela 2: Desempenhos dos alunos no questionário

Questões	**Desempenhos**
1. Calcule 26 + 9 + 24 + 18 + 41 e explicite os procedimentos a que recorreu.	- 80 % dos alunos (12) recorre a estratégias de cálculo utilizando as propriedades da adição para facilitar os cálculos; - 7 % dos alunos (1) utiliza as propriedades da adição, mas recorre as estratégias que não facilitam os cálculos; - 13 % dos alunos (2) recorre ao algoritmo

	padronizado da adição
2. Calcule 50 x 17 x 2 e explicite os procedimentos a que recorreu.	- 47 % dos alunos (7) recorre a estratégias de cálculo utilizando as propriedades da multiplicação para facilitar os cálculos; - 40 % dos alunos (6) utiliza as propriedades da multiplicação, mas recorre a estratégias de cálculo que não facilitam os cálculos; - 13 % dos alunos (2) recorre a estratégias incorretas
3. No número 764 349, quantas vezes o segundo 4 é maior que o primeiro 4? Justifique a sua resposta.	- 53 % dos alunos (8) responde corretamente. - 47 % dos alunos (7) responde incorretamente.
4. Se determinados cadernos que custavam 2,5 €, estão com um desconto de 50%, quanto custam os dois cadernos?	- 27 % dos alunos (4) responde corretamente sem apresentar quaisquer cálculos mas justificando a resposta. - 73 % dos alunos (11) responde corretamente, mas apresenta cálculos.
5. Calcule mentalmente 6 x 98. Explique o seu raciocínio.	- 60 % dos alunos (9) responde corretamente utilizando estratégias facilitadoras de cálculo (aproximação à dezena mais próxima seguida de compensação) - 40 % dos alunos (6) responde corretamente, realizando o algoritmo padronizado da multiplicação.
6. Invente três situações problemáticas em que a fracção 2/5 surja com diferentes significados.	- 67 % dos alunos (9) apresenta apenas uma situação que envolve a fracção como partilha. - 33% dos alunos (6) não responde ou apresenta uma situação errada.
7. De entre os números 2/5 e ½, qual é o maior número? Porquê?	- 40 % dos alunos (6) responde corretamente, justificando com recurso a esquemas ou numeral decimal. - 60 % dos alunos (9) responde corretamente, mas não justifica ou erra a justificação.
8. Quantos números existem entre 7/9 e 8/9?	- 13 % dos alunos (2) responde corretamente.

	- 87 % dos alunos (13) não responde ou responde incorretamente.
9. 750 : 0,98 é maior ou menor que 750? Justifique a sua resposta.	- 27 % dos alunos (4) responde e justifica corretamente. - 53 % dos alunos (8) responde corretamente, mas não justifica. 20 % dos alunos (3) responde incorretamente

Análise dos resultados

Uma análise aos resultados apresentados na tabela permite constatar que os alunos apresentam menos dificuldades em lidar com números inteiros. Efectivamente, qualquer uma das questões que envolve números inteiros apresenta um elevado número de respostas correctas verificando-se ainda, o recurso, pela maioria dos alunos, a estratégias facilitadoras de cálculos. Parecem conseguir analisar os números e estabelecer relações entre eles, que lhes permitem a utilização de estratégias flexíveis de cálculo mental (Figura 1 e 2).

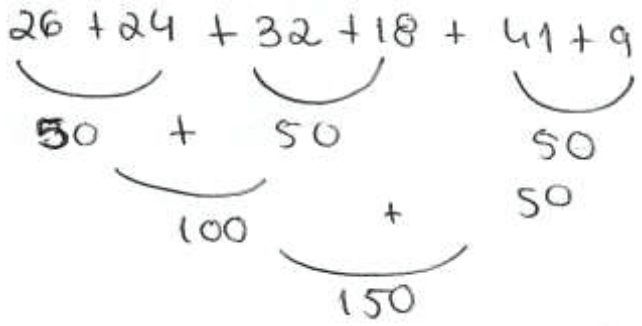


Figura.1: Produção para a questão 1 com recurso a estratégias flexíveis de cálculo

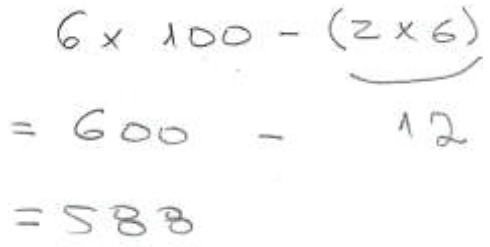


Figura.2: Produção para a questão 5 com recurso a estratégias flexíveis de cálculo

Porém, alguns alunos (2) optam pela utilização do algoritmo tradicional (Figura 3).

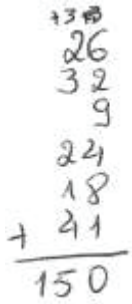


Figura 3: Produção para a questão 1 com recurso ao algoritmo

Um aluno, apesar de realizar cálculos horizontais, tem a preocupação de realizar operações intermédias em que a soma das unidades não ultrapasse a dezena o que conduz a que a última operação realizada seja mais complexa que o desejável (Figura 4). Estes resultados estão em consonância com os obtidos por Tsao (2005), que denotam que os alunos mais fracos tendem a usar métodos mais rígidos, baseados em procedimentos estandardizados

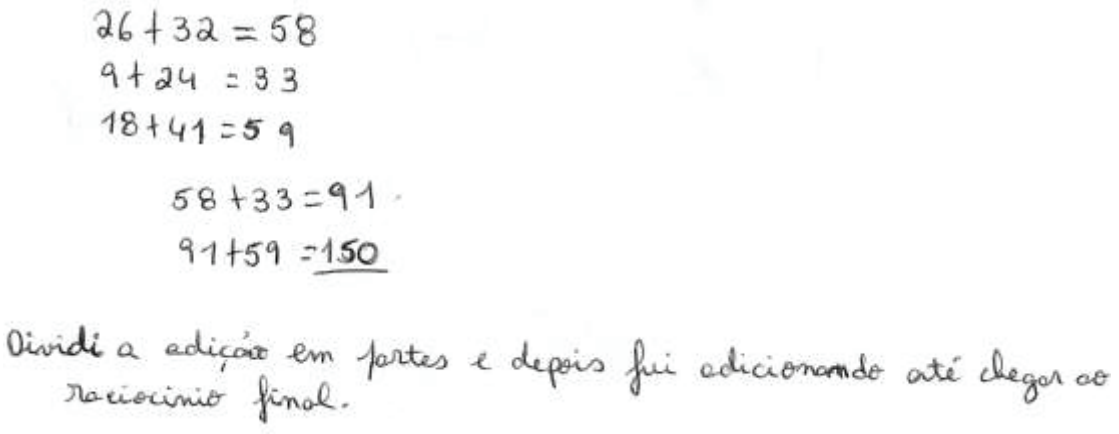


Figura 4: Produção para a questão 1 sem estratégias flexíveis de cálculo

Ainda relativamente aos números inteiros, verifica-se que grande parte dos alunos evidencia compreender a estrutura do sistema de numeração decimal conseguindo relacionar o valor de posição dos diferentes dígitos representativos do número.

Quando o universo numérico se alarga e começam a trabalhar com os números racionais o panorama é diferente. Uma simples situação problemática, em contexto familiar, envolvendo números decimais, provoca constrangimentos que levam a que uma resposta que deveria ser simples e imediata seja encontrada através de cálculos desnecessários (Figura 5).

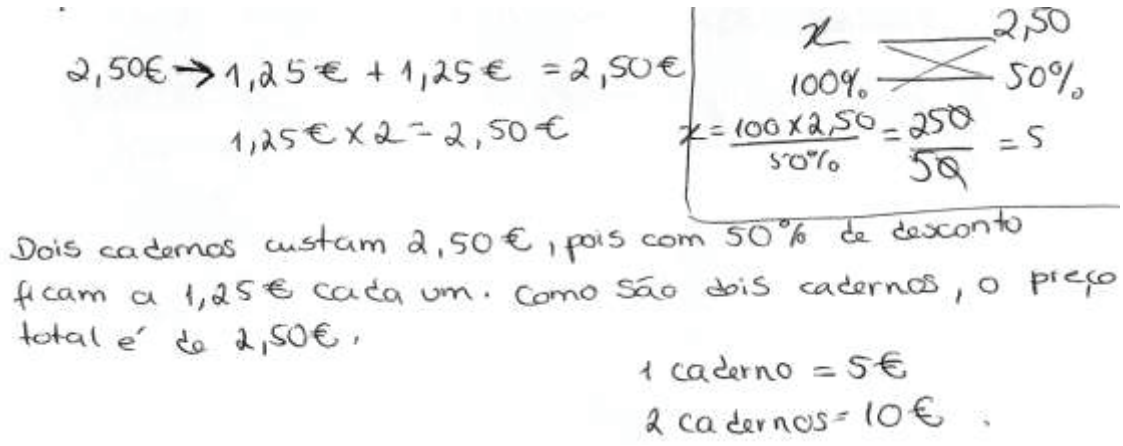


Figura 5: Produção para a questão 4 com recurso a cálculos desnecessários

Também a compreensão da estrutura do conjunto dos números racionais parece igualmente problemática para os alunos, nomeadamente quando se trata de perceber a densidade deste conjunto. Assim, perante a questão 8, surgem apenas duas respostas correctas (sem justificação). Quatro alunos não respondem e nove respondem de forma errada, conforme se ilustra na figura 6.

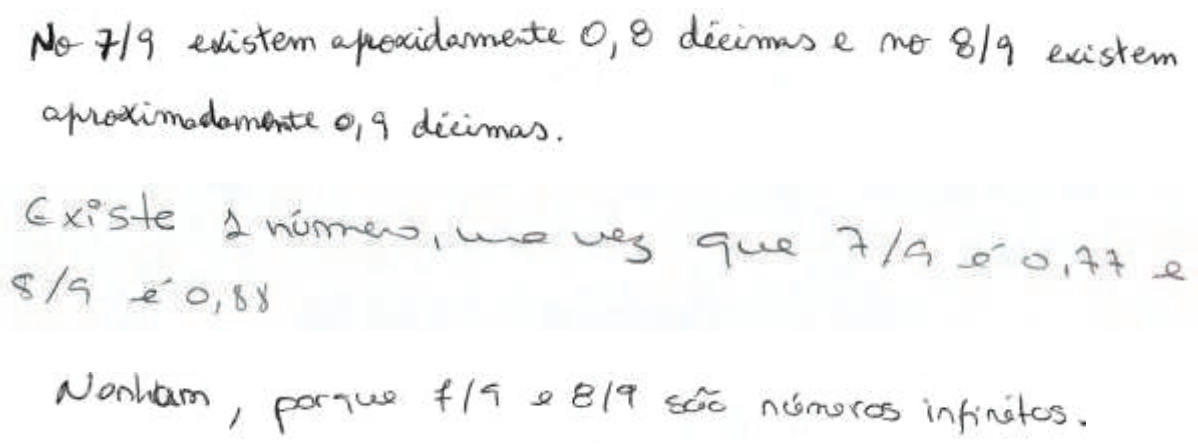


Figura 6: Produções incorretas para a questão 8

Ao nível do efeito das operações com racionais, nomeadamente da divisão, também surgem dificuldades. Assim, perante a questão 9, apenas dois alunos conseguem responder correctamente, sendo que há alunos a evidenciarem o mal-entendido de que a divisão diminui sempre (Figura 7). Surpreendente e difícil de explicar, o facto de apenas no final do seu percurso académico, este aluno ser confrontado com o conflito cognitivo que advém da concepção errada de entender a divisão como uma operação em que o quociente é sempre inferior ao dividendo. No entanto, estes resultados estão em consonância com os obtidos por Ball (1990), que afirma que os futuros professores dos primeiros anos tendem a generalizar as propriedades dos números inteiros aos números decimais e às fracções. Também os resultados de Tsao (2005) reforçam esta generalização errada que os futuros professores fazem das propriedades das operações com números inteiros aos números não inteiros referindo, por exemplo, que recorrentemente afirmam que o efeito da multiplicação é sempre aumentar e o da divisão de diminuir.

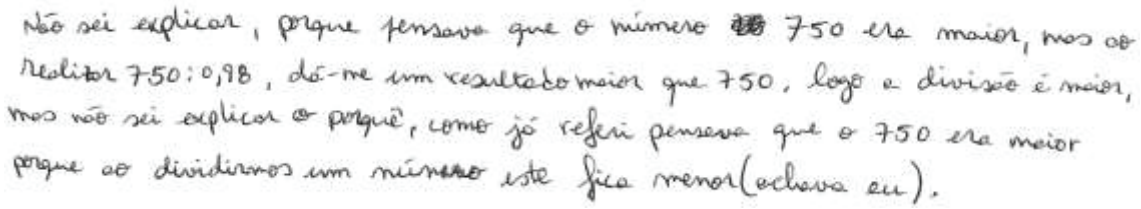


Figura 7: Produção para a questão 9, revelando com mal-entendido sobre a divisão de racionais

Os resultados relativos às questões que envolvem números racionais reflectem concepções erradas destes alunos acerca da estrutura do conjunto dos números racionais que parecem resultar, em grande parte, de uma extrapolação das propriedades do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais. Os estudos levados a cabo por Hungerford (1994) reforçam estes resultados, afirmando o autor que os futuros professores dos primeiros anos apresentam lacunas relativamente à compreensão do número racional.

Conclusões

Este estudo, integrado num projecto de investigação mais vasto, teve como objectivo diagnosticar e analisar o sentido de número de uma turma de futuros professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Os resultados obtidos revelam que a maioria dos alunos possui um conhecimento seguro e flexível sobre os números inteiros e as suas propriedades, que lhes permite, perante situações de cálculo, recorrerem a estratégias flexíveis de cálculo. Por conseguinte, parecem mobilizar o conhecimento das propriedades e da estrutura do conjunto dos números inteiros de forma significativa, com o objectivo de facilitar os cálculos e de explicitar raciocínios. Porém, há alunos que privilegiam a utilização de estratégias mais rígidas (utilização dos algoritmos tradicionais) apesar de estas conduzirem a cálculos mais morosos e complexos.

A passagem do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais provoca constrangimentos e dificuldades, evidenciando que neste universo numérico, os seus conhecimentos são pouco consistentes. Assim, parece que é com facilidade que os alunos transferem para este conjunto numérico as propriedades dos números inteiros sem reflectirem nas consequências erradas desse procedimento. Esta transferência, leva ao aparecimento de determinados conflitos cognitivos - como a surpresa da constatação de que o quociente de uma divisão pode ser superior ao dividendo – que os alunos não conseguem, por si só, ultrapassar.

De salientar, ainda, é a dificuldade apresentada pela maioria dos alunos na resolução de uma situação problemática simples, evidenciando não conseguirem transferir conhecimentos que exibem em situações de puro cálculo, para situações quotidianas. Esta dificuldade reflecte falta de sentido de número, já que um bom sentido de número está fortemente ligado ao desenvolvimento da capacidade de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes para utilizar no dia-a-dia. A ênfase numa aprendizagem matemática muito formal que parece ter acompanhado desde início, o percurso escolar destes alunos, promove o desenvolvimento de uma visão da matemática, estática, centrada no trabalho com lápis e papel e desligada da realidade. Esta concepção da matemática leva a que, perante as mais simples situações problemáticas, os alunos optem por uma utilização mecanizada de técnicas e regras sem qualquer tipo de compreensão. Assim, parecem procurar uma técnica na qual encaixem os dados do problema, em vez de tentarem compreender o problema, o que se pretende, de que dados dispõem e como os podem relacionar com o que é pedido.

Pelo que fico dito, os resultados encontrados mostram a pertinência de investigar neste domínio, no sentido de facilitar aos futuros profissionais a consciencialização da importância do desenvolvimento do seu sentido de número reflectindo sobre as

implicações nas suas práticas pedagógicas e por consequência, na formação matemática dos seus futuros alunos.

Referências bibliográficas

Askew, M. & Ebbutt, S. (2000). *The numeracy file*. London: Beam Education.

Ball, D. (1990). Breaking with experience in learning to teach mathematics: the role of a preservice method course. *International Journal of Mathematics Education,* 10 *(2),* 10-16.

Castro, J. & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados*. Lisboa: DGIDC.

Clarke, D. M. (2004). Issues in the Teaching of Algorithms in the Primary Years. In B. Clarke & al. (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp.21-36). Göteborg: National Center for Mathematics Education

Dolk, M. & C. Fosnot (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heineman.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. Beishuizen, M, Gravemeijer, K.P.E. & E.C.D.M. van Liesthout (Eds.). *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*. Freudenthal Institute, Utrecht, 13-34

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education,* 22 (*3*), 170-218.

Hungerford, T. (1994). Future elementary teachers: the neglected constituency. *The American Mathematical Monthly,* 101 (*1*), 15-21.

Kaminski, E. (2002). Promoting Mathematical Understanding: Number Sense in Action. *Mathematics Education Research Journal*. Vol 14, nº2 (133-149)

Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Eds.) *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Colecção Educação. Lisboa: Escolar Editora.

MacIntosh, A.; Reys, B. J. & Reys, R. R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Matthematics, 12(3),* 2-8, 44.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Treffers, A. & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) – calculation up to 100. In: M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 61-88). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Tsao, Y. (2005). The number sense of preservice elementary teachers. *College student journal*, 39 (4), 647-679.

Whitacre, I. & Nickerson, S. (2006). Pedagogy that makes (number) sense: A classroom teaching experiment around mental math. *PME-NA* , vol 2, 736-743.

CONHECIMENTO PROFISSIONAL EM ESTATÍSTICA DE 3 PROFESSORES DO 1.º CICLO

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
anac@eselx.ipl.pt

Resumo

O presente artigo faz parte da investigação realizada no âmbito do mestrado em Educação Matemática. Este estudo pretende contribuir para uma maior compreensão do conhecimento dos professores de 1.º ciclo sobre Educação Estatística. Com este propósito foram formuladas as seguintes questões orientadoras da investigação: a) Que conhecimento estatístico é mobilizado pelos professores de 1.º ciclo em tarefas de OTD? b) Que conhecimento pedagógico no ensino da OTD é mobilizado pelos professores de 1.º ciclo em tarefas de OTD?
A metodologia seguida neste estudo é de natureza qualitativa de cunho interpretativo. A recolha de dados foi realizada através de três estudos de caso com professores a leccionar turmas de 4.º ano de escolaridade, tendo sido realizadas duas entrevistas semi-estruturadas e observação não participante de cinco aulas de cada professor. A análise dos dados foi realizada através de um quadro de análise desenvolvido com base em estudos identificados na literatura.
Os resultados do estudo revelam que os professores evidenciam um conhecimento estatístico limitado, tendo sido detectadas fragilidades em todo o conhecimento dos professores, concluindo-se que os professores de 1.º ciclo demonstram não possuir conhecimentos necessários para leccionar OTD ao nível do 1.º ciclo do ensino básico de acordo com as actuais orientações curriculares de Matemática.

Palavras-chave: Conhecimento profissional de professores, Educação Estatística, Organização e Tratamento de Dados (OTD), 1.º ciclo

Introdução

A Estatística aparece no Novo Programa de Matemática do 1.º ciclo com bastante relevo, reflectindo a importância cada vez maior que este tema tem na nossa sociedade:

> O tema Organização e tratamento de dados merece destaque neste programa e é explicitamente referido nos três ciclos, incluindo as duas etapas do 1.º ciclo. O presente programa vai mais longe que o anterior na complexidade dos conjuntos de dados a analisar, nas medidas de tendência central e de dispersão a usar, nas formas de representação de dados a aprender e no trabalho de planeamento, concretização e análise de resultados de estudos estatísticos. (p.7)

Esta evolução leva-me a reflectir sobre a preparação dos actuais professores de 1.º ciclo estarem preparados para leccionar este tema de acordo com as novas

orientações, sendo que o conhecimento matemático dos professores tem sido apontado como um tópico importante para investigações na área da Educação Matemática, tal como referem Ball et al (2001), ao que Groth (2007) acrescenta que de todos os temas matemáticos para ensinar normalmente o conhecimento dos professores é mais fraco na área da Estatística.

Este artigo aborda esta problemática e encontra-se inserido num estudo mais amplo realizado no âmbito do mestrado em Educação Matemática (Caseiro, 2010).

Neste trabalho pretendo estudar o modo como os professores de 1.º ciclo mobilizam conhecimentos no âmbito da educação estatística. Mais especificamente, procuro saber:

a) Que conhecimento estatístico é mobilizado pelos professores de 1.º ciclo em tarefas de OTD?

b) Que conhecimento pedagógico no ensino da OTD é mobilizado pelos professores de 1º ciclo em tarefas de OTD?

Conhecimento profissional do professor

A revisão da literatura acerca do conhecimento do professor para ensinar é posto em foco com a obra de Shulman de 1986, onde o autor classifica o conhecimento profissional em três categorias de saberes: conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico de conteúdo e conhecimento curricular. Vários autores basearam-se nestas três categorias de saberes para realizarem estudos posteriores, como é o caso de Hill, Ball e Schiling (2008) que vão mais além nesta conceptualização do conhecimento do professor e propõem um modelo (figura 1), que apresenta diversas subdivisões das categorias apresentadas por Shulman (1986). Para os autores este conhecimento tem duas componentes: o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. O conhecimento do conteúdo engloba o conhecimento comum do conteúdo (*CCK*), o conhecimento especializado do conteúdo (*SCK*) e o conhecimento do horizonte matemático. O *CCK* refere-se à quantidade e à organização de conhecimento do assunto na mente do professor. Esse conhecimento não é conhecimento detido apenas pelo professor mas conhecimento comum a muitos outros profissionais que fazem uso da Matemática (Hill & Ball, 2004). Já o *SCK* é um conhecimento próprio e

único para planear e conduzir o ensino de determinado assunto. Este conhecimento permite aos professores apreciarem métodos de resolução de problemas de alunos e, quando estes apresentam métodos inovadores, serem capazes de determinar se os métodos podem ser generalizados a outros problemas (Hill & Ball, 2004). Por sua vez, o conhecimento do horizonte matemático diz respeito ao conhecimento do modo como os vários tópicos estão relacionados dentro do currículo (Hill, Ball & Schilling, 2008).

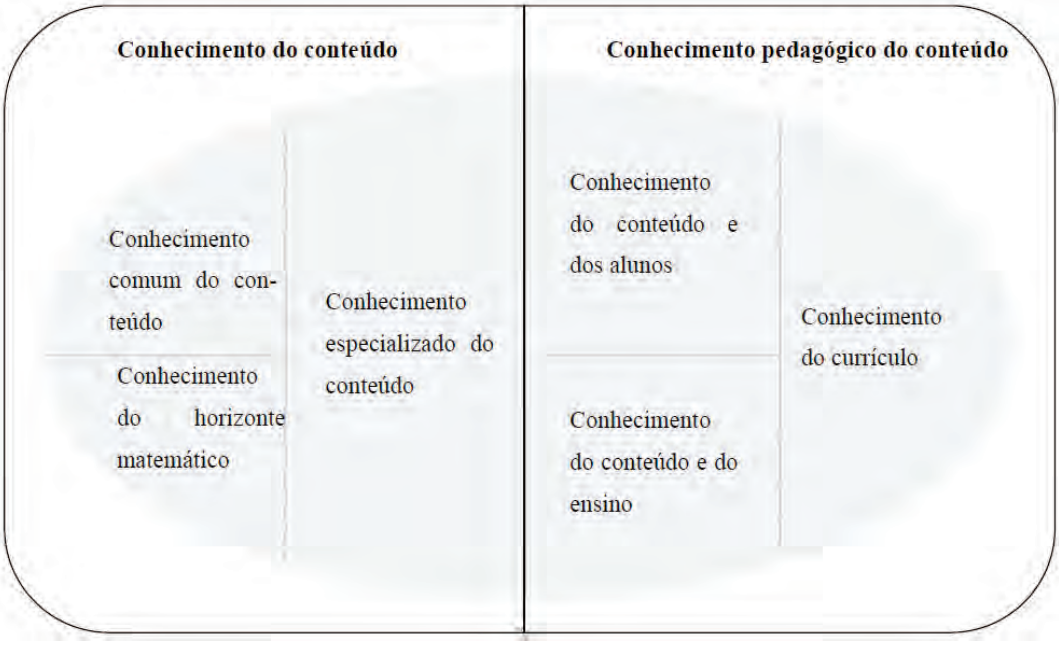


Figura 1 – Conhecimento profissional dos professores (Hill, Ball & Schiling, 2008)

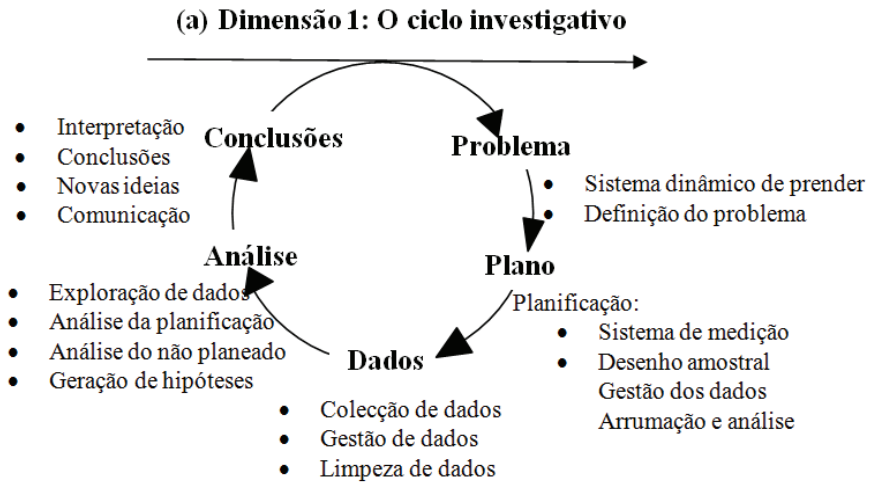
A segunda componente do conhecimento apresentada por Hill, Ball e Schilling (2008), diz respeito ao conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK). Nesta componente são englobados o conhecimento do conteúdo e dos alunos (*KCS*), o conhecimento do conteúdo e do ensino (*KCT*) e o conhecimento do currículo. O *KCS* é definido como sendo o conhecimento de conteúdo interligado com o conhecimento de como os alunos pensam sobre um determinado aspecto do conteúdo, o que sabem sobre aspectos desse conteúdo, ou o modo como aprendem determinado conteúdo, sendo essencial que o professor tenha conhecimento das concepções e dos mal-entendidos que os alunos possam apresentar. O *KCT* combina o conhecimento do conteúdo matemático com os princípios pedagógicos para ensinar cada tópico. Por fim, o conhecimento do currículo abrange o conhecimento de programas desenhados para o ensino do assunto em questão e dos diversos materiais educacionais relacionados com esses programas.

Trabalho estatístico

A Estatística é um tópico do currículo da Matemática escolar que tem vindo a ganhar maior ênfase nos últimos anos, o que está de acordo com a importância que lhe é actualmente atribuída. É o que afirma Fernandes (2009): "esta relevância da Estatística na sociedade tem-se repercutido no incremento do seu ensino nas escolas, o qual não mais deixou de se desenvolver e aprofundar desde a sua introdução no ensino secundário na década de sessenta, do século passado" (p. 1).

Embora seja considerada parte da Matemática, vários autores apontam diferenças significativas entre a Estatística e a Matemática que têm implicações para o seu ensino e aprendizagem (Groth, 2007). Burril (2008) refere que a Estatística e a Matemática diferem nas suas características essenciais: (i) o papel do contexto; (ii) os métodos de raciocínio; (iii) a precisão; e (iv) o papel dos dados e da recolha de dados. Pelo seu lado, Scheaffer (2006) refere que é possível fazer-se um *casamento feliz* entre a Estatística e a Matemática, embora o autor reconheça que estas duas disciplinas sejam distintas uma da outra.

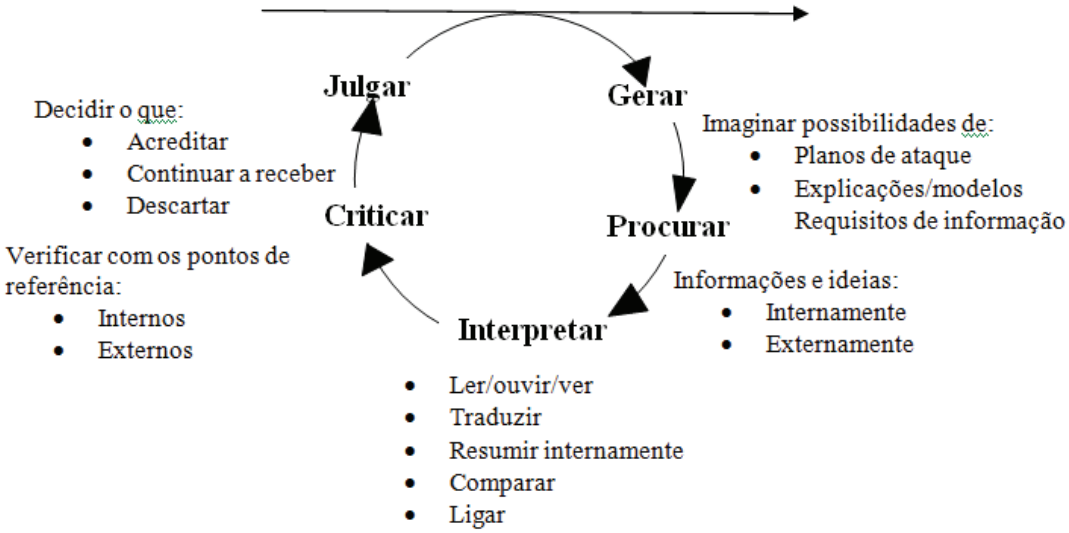
Wild e Pfannkuch (1999) sugerem quatro dimensões nas quais o trabalho estatístico se encontra dividido (o ciclo investigativo, tipos de pensamento, o ciclo interrogativo e disposições).



(b) Dimensão 2: Tipos de pensamento

- Reconhecimento da necessidade dos dados
- Transnumeração (mudar as representações para poder compreender)
  - ✓ Capturar as medidas do sistema real
  - ✓ Mudar a representação dos dados
  - ✓ Comunicar mensagens dos dados
- Considerar a variação
  - ✓ Perceber e reconhecer
  - ✓ Medir e modelizar para fins de predição, explicação, ou controlo
  - ✓ Explicar e lidar com
  - ✓ Estratégias de investigação
- Raciocinar com modelos estatísticos
  - ✓ Raciocínio baseado em agregados
- Integração da estatística e do contexto
  - ✓ Conhecimentos, informações e concepções

(c) Dimensão 3: O ciclo interrogativo



(d) Dimensão 4: Disposições

- Cepticismo
- Imaginação
- Curiosidade e consciência
  - ✓ Observação, atenção
- Abertura
  - ✓ A ideias para alterar preconceitos
- Uma propensão de procurar um significado mais profundo
- Ser lógico
- Envolvimento
- Perseverança

Figura 2 – Quatro dimensões do trabalho estatístico apresentadas por Wild e Pfannkuch (1999)

Conhecimento profissional de professores no trabalho em Estatística

Groth (2007) sistematizou o conhecimento estatístico para ensinar subdividindo-o em comum e especializado, de acordo com os autores citados anteriormente, e referindo que quer o conhecimento matemático quer o conhecimento não matemático podem ser subdivididos em conhecimento comum e conhecimento especializado:

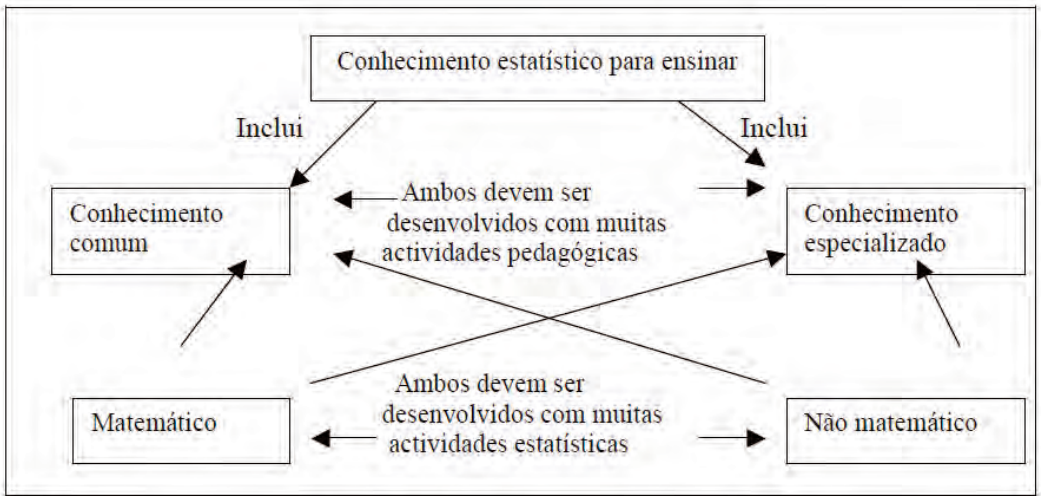


Figura 3 – Estrutura hipotética para o conhecimento estatístico para ensinar (Groth, 2007)

Por sua vez, segundo Burgess (2007), quadros do conhecimento dos professores no domínio da educação matemática são inadequados para a análise do conhecimento dos professores em Estatística por causa das diferenças entre Estatística e Matemática, como referido anteriormente. Deste modo torna-se necessária a construção de um quadro sobre o conhecimento dos professores no ensino e aprendizagem da Estatística. Deste modo, Burgess baseando-se em vários estudos anteriores, sobretudo Wild e Pfannkuch (1999) e Hill, Ball e Schilling (2004) criou o seguinte quadro conceptual para analisar o conhecimento estatístico dos professores:

Tabela 1 – Conhecimento estatístico para ensinar (Burgess, 2007)

		Conhecimento estatístico para ensinar			
		Conhecimento de conteúdo		**Conhecimento pedagógico de conteúdo**	
		Conhecimento comum do conteúdo	Conhecimento especializado do conteúdo	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	Conhecimento do conteúdo e do ensino
Pensamento	**Necessidade dos dados**				
	Transnumeração				
	Variação				
	Raciocínio com modelos				
	Integração da estatística e do contexto				
Ciclo investigativo					
Ciclo interrogativo					
Disposições					

O estudo

Neste trabalho pretendo estudar o modo como os professores de 1.º ciclo mobilizam conhecimentos no âmbito da educação estatística. Mais especificamente, procuro saber:

a) Que conhecimento estatístico é mobilizado pelos professores de 1.º ciclo em tarefas de OTD?

b) Que conhecimento pedagógico no ensino da OTD é mobilizado pelos professores de 1º ciclo em tarefas de OTD?

Para estudar e dar resposta a estas questões do estudo optei por seguir uma perspectiva interpretativa dos dados qualitativos que recolhi nesta investigação. Como o estudo se baseia no conhecimento de três professores do 1.º ciclo (neste caso, Ana, Isabel e Filipe) torna-se um conjunto de três estudos de caso, tal como refere Ponte (1994):

> Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês" evidenciando a sua unidade e identidade próprias. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico. (p. 3)

Estes professores foram seleccionados para o estudo por se tratarem de professores com diferentes formações e idades, mas que aquando do estudo se encontravam a leccionar turmas de 4.º ano de escolaridade geograficamente perto de modo a possibilitar maior mobilidade da minha parte de uma escola para outra.

Tuckman (2000) refere que as fontes de obtenção de dados que se podem utilizar num estudo de caso são normalmente de três tipos: (1) Entrevistas, (2) documentos vários e (3) através da observação. Neste estudo a recolha de dados foi realizada através dos métodos descritos a seguir:

Tabela 2 – Métodos de recolha de dados

Método de recolha de dados	***Descrição***	***Objectivo***	***Data***
Entrevistas	Semi-estruturadas audiogravadas: - duas a cada professor	- Caracterizar a formação do professor, assim como as suas preocupações com o ensino/aprendizagem da Matemática no 1.º ciclo; a sua relação com a Matemática; e a sua prática acerca do tema OTD - Perceber algum do conhecimento dos professores em conteúdos de OTD do 1º ciclo	Novembro/Dezembro 2009 Fevereiro 2010
Observação não participante	Foram observadas e registadas 5 aulas de OTD de cada professor	- Recolher outros dados descritivos acerca da actuação dos professores em aulas onde aborda conteúdos de OTD	Fevereiro e Março de 2010

A análise dos casos com os quais se desenrolou este estudo tem como referência a divisão do trabalho estatístico apresentada por Wild e Pfannkuch (1999) em quatro dimensões (ciclo investigativo, tipos de pensamento, ciclo interrogativo e disposições), relacionando-a com algumas das subdivisões das duas categorias de saberes apresentadas por Hill, Ball e Schiling (2008): conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo, mais especificamente o conhecimento comum de conteúdo e o conhecimento especializado de conteúdo, assim como o conhecimento do conteúdo e dos alunos, e o conhecimento do conteúdo e do ensino, acrescida da divisão apresentada por Groth (2007) que divide o conhecimento de conteúdo estatístico em conhecimento matemático e não matemático. O conhecimento curricular não irá ser abordado neste estudo uma vez que não foi possível recolher os dados necessários para o poder analisar. Deste modo, surge a tabela apresentada a seguir (tabela 2) para tentar registar e perceber qual o conhecimento que os professores usam no âmbito da educação estatística, sendo que duas dimensões do trabalho estatístico não vão ser estudadas: (1) "Ciclo Interrogativo", devido ao facto de não terem sido os professores a fazer uma investigação, logo não se interrogaram sobre como gerar, procurar, interpretar, criticar e julgar os dados, o que faz com que com este estudo não seja possível analisar tais aspectos; (2) "Disposições", devido à dificuldade que é perceber qual a disposição do professor perante cada situação de trabalho estatístico por si proposta e devido ao facto de não ter estado presente aquando da preparação das aulas por parte dos mesmos. Por sua vez também não são analisadas as sub-dimensões Interpretação dos resultados, Variação e Raciocínio com modelos, devido a não se tratarem de conteúdos do programa de 1.º ciclo.

Tabela 3 – Quadro de análise do conhecimento estatístico dos professores de 1º ciclo

Dimensões do trabalho estatístico	Sub-dimensões do trabalho estatístico	Conhecimento estatístico				Conhecimento pedagógico do conteúdo	
		Conhecimento matemático		Conhecimento não matemático			
		Comum	Especializado	Comum	Especializado	Dos alunos	Do ensino
Ciclo Investigativo	**Formulação de questões**						
	Recolha de dados						
	Análise de dados						
Tipos de pensamento	**Necessidade dos dados**						
	Transnumeração						
	Integração da estatística e do contexto						

Análise de dados e discussão dos resultados

Observando os quadros de análise do conhecimento obtidos para cada um dos professores envolvidos no estudo é possível verificar algumas sobreposições no que aos tipos de conhecimento evidenciado dizem respeito, assim como alguns tipos de conhecimento estatístico do professor que não foram evidenciados por nenhum dos três professores. Na tabela 4 é possível perceber um exemplo de cada tipo de conhecimento demonstrado por, pelo menos, um dos professores:

Tabela 4 – Exemplos de dados recolhidos que demonstram conhecimento estatístico dos três professores

Dimensões do trabalho estatístico	**Sub-dimensões do trabalho estatístico**	**Conhecimento estocástico**				**Conhecimento pedagógico do conteúdo**	
		Conhecimento matemático		**Conhecimento não matemático**			
		Comum	**Especializado**	**Comum**	**Especializado**	**Dos alunos**	**Do ensino**
Ciclo Investigativo	**Formulação de questões**	Ler com precisão um gráfico de pontos, a fim de formular perguntas a partir de dados	Compreender as diferenças entre o modo como os alunos lêem um pictograma e gráfico de pontos		Apreciar o potencial das questões estatísticas colocadas pelos alunos	Ser capaz de atribuir importância aos interesses dos alunos	Dar explicações adequadas aos alunos do porquê de uma questão ser boa para investigar e outra não
	Recolha de dados	Realizar cálculos e medições correctas de quantidades		Construir inquéritos e desenhar experiências	Compreender o modo como os alunos constroem inquéritos e como decidem a quem fazê-los de modo a dar resposta às questões do seu estudo		Capacidade de planear uma sequência de ensino adequada, relacionada com a recolha de dados
	Análise de dados	Calcular medidas estatísticas descritivas tais como a moda					
Tipos de pensamento	**Necessidade dos dados**						Dar explicações adequadas aos alunos sobre a necessidade de certa recolha de dados
	Transnumeração	Capacidade de perceber porque uma medida não é útil para representar uma situação	Capacidade de reconhecer se o aluno deu o processo certo ou regra para encontrar uma medida		Analisar se a classificação, medida ou representação do aluno é válida e correcta para os dados		Capacidade de planear uma sequência de ensino adequada, relacionada com alteração das representações, e compreender quais as

							representações que são susceptíveis de ajudar ou prejudicar os alunos perante cada situação
	Integração da estatística e do contexto			Compreender que quanto maior for a amostra, relativamente à população, maior será a confiança a ter nos resultados	Ser capaz de avaliar a explicação dos alunos com base nos dados estatísticos e no conhecimento do contexto da investigação		Saber como incentivar os alunos a considerar a relevância do conhecimento contextual em relação ao estudo estatístico em curso

Para serem mais perceptíveis as sobreposições dos conhecimentos evidenciados pelos professores apresento, a seguir, um quadro que engloba os quadros obtidos para cada um dos professores:

Tabela 5 – Conhecimento estatístico evidenciado pelos três professores

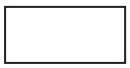
Dimensões do trabalho estatístico	Sub-dimensões do trabalho estatístico	Conhecimento estatístico				Conhecimento pedagógico do conteúdo	
		Conhecimento matemático		Conhecimento não matemático			
		Comum	Especializado	Comum	Especializado	Dos alunos	Do ensino
Ciclo Investigativo	**Formulação de questões**						
	Recolha de dados						
	Análise de dados						
Tipos de pensamento	**Necessidade dos dados**						
	Transnumeração						
	Integração da estatística e do contexto						

Legenda:

Conhecimento evidenciado pelos três professores

Conhecimento evidenciado por dois professores

Conhecimento evidenciado por um professor



Conhecimento não evidenciado por nenhum professor

Pela análise do quadro verifica-se, imediatamente, que o conhecimento demonstrado pelos professores é bastante reduzido. Analisando o conhecimento demonstrado em termos das dimensões do trabalho estatístico verifica-se que, de um modo geral, em todas as sub-dimensões do trabalho estatístico houve, pelo menos, um professor a evidenciar algum conhecimento, sendo que todos os professores evidenciaram o seu conhecimento sobretudo acerca da primeira sub-dimensão do trabalho estatístico pertencente ao ciclo investigativo: formulação de questões.

A recolha de dados e a transnumeração foram as segundas sub-dimensões mais evidenciadas por estes professores. Por fim, o conhecimento dos professores na sub-dimensão integração da estatística e do contexto foi pouco evidenciado, sendo que nas restantes sub-dimensões (análise dos dados e necessidade dos dados) não foi evidenciado quase nenhum conhecimento por parte dos professores.

Analisando o quadro em termos dos tipos de conhecimento do professor verifica-se que, embora muito conhecimento não tenha sido evidenciado por nenhum professor, de entre o conhecimento evidenciado o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino foi o mais demonstrado, sendo que o conhecimento matemático comum e o conhecimento não matemático especializado também foram dos mais evidenciados por estes professores.

No que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino, os professores demonstraram algumas evidências deste conhecimento, pensando diversas vezes numa sequência de ensino adequada para trabalhar com os seus alunos nas várias sub-dimensões do trabalho estatístico. Esta demonstração de conhecimento está de

acordo com o que é referido por Nóvoa (2009) quando afirma que é importante que o professor tenha um conhecimento que ultrapasse o mero saber da teoria.

No que diz respeito ao conhecimento matemático comum os professores evidenciaram conhecimento em praticamente todas as sub-dimensões do trabalho estatístico, uma vez que no caso particular dos professores se torna necessário que tenham um bom conhecimento comum do tópico para que consigam ter conhecimento especializado do mesmo tópico, tal como referem Groth (2007) e Hill et al (2004), quando afirmam que o conhecimento comum está contido no conhecimento especializado.

Quanto ao conhecimento não matemático especializado, os professores demonstraram que também realizam tarefas estatísticas que envolvem principalmente conhecimento não matemático, reforçando a ideia de que nem todos os trabalhos desenvolvidos em termos de estatística são meramente matemáticos.

No que diz respeito ao conhecimento não matemático comum foi pouco evidenciado pelos professores, embora, tal como seja frisado por alguns autores (como, por exemplo, Groth (2007) e Hill et al (2004)) o conhecimento comum está contido no conhecimento especializado, ou seja, se os professores apresentam conhecimento não matemático especializado em diversas sub-dimensões do conhecimento estatístico é porque os referidos professores também têm conhecimento não matemático comum em cada uma das mesmas sub-dimensões, embora tal aspecto não tenha sido visível e não esteja referido no quadro anterior.

Por fim, o conhecimento dos professores foi menos evidenciado em termos do conhecimento matemático especializado e do conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos. O conhecimento matemático especializado apenas foi evidenciado em duas sub-dimensões do trabalho estatístico (formulação de questões e transnumeração), sendo que numa delas foi demonstrado por dois professores e na outra apenas por um. Tal facto talvez se deva ao tipo de tarefas realizadas pelos professores (tarefas abertas e de descoberta), não sendo, deste modo, possível de detectar este tipo de conhecimento.

Por fim, no que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos os professores raramente o evidenciaram, sendo apenas evidenciado pelos três professores na sub-dimensão do trabalho estatístico "Formulação de questões". A escassez na demonstração deste conhecimento está de acordo com o referido por

Watson, Callingham e Donne (2008) quando referem que os professores apresentam um conhecimento mais precário no que toca ao conhecimento do conteúdo e dos alunos, ou seja, no que os alunos sabem sobre Estatística, as dificuldades que têm e o modo como as ultrapassar.

Considerações finais

Estudos realizados sobre o conhecimento profissional em termos estatísticos dos professores têm sido poucos, sobretudo em Portugal, e ainda mais raros quando se referem ao conhecimento estatístico dos professores de 1.º ciclo. Deste modo se percebe a pertinência de tentar perceber se os professores deste nível de ensino se encontram preparados para leccionar OTD segundo as novas orientações curriculares.

O actual Programa de Matemática do Ensino Básico enfatiza o tema Estatística ao longo dos três ciclos. Deste modo torna-se pertinente perceber até que ponto os professores estão preparados para leccionar segundo as novas orientações curriculares.

De uma forma geral, analisando os dados recolhidos, conclui-se que os professores apresentam várias lacunas em termos de conhecimento estatístico, uma vez que muito do conhecimento necessário para leccionar OTD no 1.º ciclo não foi demonstrado por nenhum dos professores envolvidos neste estudo.

Conclui-se, deste modo, que o conhecimento estatístico dos professores envolvidos neste estudo parece ser limitado a vários níveis, tendo sido as maiores falhas observadas em termos do conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos, conhecimento matemático especializado e conhecimento não matemático comum, embora tenham sido detectadas fragilidades em todo o conhecimento estatístico destes professores.

Estas constatações tornam-se importantes na medida em que os professores devem trabalhar estatística com os seus alunos desde muito cedo, embora tenham demonstrado, neste estudo, que não se encontram preparados para o realizarem, uma vez que apresentam diversas lacunas de conhecimento nas diversas sub-dimensões do trabalho estatístico.

Para que o ensino da Estatística esteja de acordo com as orientações curriculares actuais torna-se necessário que os professores estejam à-vontade com este tipo de

tarefas e demonstrem conhecimento nesta área. Deste modo é importante ter isso em conta na formação inicial e contínua de professores.

Referências

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Burgess, T. A. (2007). Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics.

Burrill, G. (2008). Fundamental ideias in teaching statistics and how they affect the training of teachers. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Caseiro, A (2010). Conhecimento dos professores de 1.º ciclo sobre Educação estatística (Tese de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa). Lisboa, APM.

Fernandes, J.A. (2009). Ensino e aprendizagem da Estatística: Realidades e desafios. Comunicação apresentada no *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática: Números e Estatística: Reflectindo no Presente, Perspectivando o Futuro*. Vila Real, Portugal. Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. (Também disponível em http://www.amstat.org/).

Groth, R. E. (2007). Toward a Conceptualization of Statistical Knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (5), 427-437.

Hill, H. C., Schilling, S., e Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hill, H. C., e Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics Professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 330-351.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Nóvoa, A. (2009). Professores, Imagens do futuro presente. Lisboa: EDUCA

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Scheaffer, R. (2006). Statistics for a new century. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Orgs.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 158-173). Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Watson, J. M., Callingham, R. A., & Donne, J. M. (2008). Establishing PCK for teaching statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 223-265.

A PRÁTICA PROFISSIONAL NUM CONTEXTO DE UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA

Helena Rocha
Bolseira da FCT/ME*
hcrocha@ie.ul.pt

Resumo

Nesta investigação procura-se caracterizar a utilização que uma professora faz da calculadora gráfica, no âmbito do estudo do tema funções, ao nível do 10º ano de escolaridade, bem como identificar alguns dos factores que determinam essa utilização. Esta caracterização tem por base os elementos recolhidos no decorrer da observação de 14 aulas e da realização de diversas entrevistas. As conclusões alcançadas apontam para a implementação de três tipos de tarefas (exercícios, problemas e investigações), para três tipos distintos de utilizações da calculadora gráfica (para obter informação, fundamentalmente de suporte gráfico; para confirmar resultados; e para investigar) e para uma influência do tempo disponível, do *Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia* e da experiência de utilização da tecnologia sobre a prática profissional.

Palavras-chave: Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia, calculadora gráfica, prática profissional

Introdução

Mais de uma década depois da utilização da calculadora gráfica se ter tornado obrigatória no ensino secundário português e quando começam a surgir estudos que sugerem que a utilização que os professores fazem desta tecnologia fica muito aquém das suas potencialidades (ver, por exemplo, Dunham, 2000, Vrasidas & Glass, 2005), importa conhecer e compreender melhor o que efectivamente está a acontecer.

Neste artigo procura-se fazer uma caracterização da utilização que é feita da calculadora gráfica, por parte de uma professora, no âmbito do estudo do tema funções ao nível do 10º ano de escolaridade e identificar alguns dos factores que interferem com as opções assumidas pela professora na sua prática profissional. Em particular pretende-se compreender:

- Que tipos de tarefas são propostas,
- Como é a calculadora gráfica utilizada,
- Quais os principais factores que marcam a integração que é feita da calculadora gráfica.

Os elementos aqui apresentados fazem parte dum estudo mais abrangente e ainda em curso, que envolve três professoras e cuja fase de análise carece ainda de aprofundamento mesmo relativamente à professora de que são apresentados alguns elementos.

Quadro teórico

A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática propicia a adopção de todo um conjunto de propostas de trabalho (Goos & Bennison, 2008). De entre os diferentes tipos de tarefas que um professor pode propor, Ponte (2005) destaca os problemas, os exercícios, as investigações, os projectos e as tarefas de modelação (ver Rocha, 2011, para uma caracterização). Com diferentes estruturações (mais abertas ou mais fechadas), com diferentes níveis (desafio reduzido ou elevado), com diferentes durações (curta ou longa) e em diferentes contextos (matemático ou real), são as características das tarefas a que o professor recorre e o papel que assume na sua condução que marcam o ensino que protagoniza (Gimeno, 2000). E se, como refere Farrel (1996), a tecnologia interfere com as tarefas a que o professor recorre e com a frequência com que o faz, a forma como esta é usada é igualmente influente.

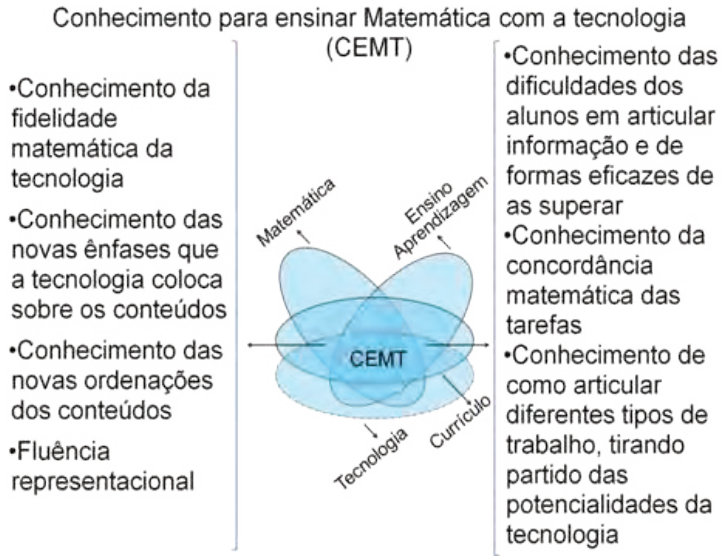
Estudos realizados sugerem que a confirmação de resultados, o traçar de gráficos de funções e o desenvolvimento da capacidade de prever o aspecto de um gráfico antes de o traçar, são as utilizações mais frequentes desta tecnologia (Simmt, 1997; Doerr & Zangor, 2000; Banker, 2001; Cavanagh & Mitchelmore, 2003). Ainda assim, existem também referências a utilizações para explorar para além do conceito em estudo (Simmt, 1997), para obter soluções alternativas (Banker, 2001), para simular fenómenos reais (Banker, 2001), para transformar tarefas de cálculo em tarefas interpretativas (Doerr & Zangor, 2000) e para confirmar conjecturas (Doerr & Zangor, 2000).

As razões apontadas para as diferentes utilizações desta tecnologia são variadas. Dunham (2000) refere as crenças e concepções que os professores detêm sobre a Matemática e sobre o seu ensino, a formação inicial e contínua, o pouco tempo de que dispõem para planificar as aulas e os poucos incentivos para integrar a calculadora na sua prática. Romano e Ponte (2009) mencionam também as concepções dos professores, mas destacam ainda a sua experiência prévia. A estes aspectos Fleener (1995) acrescenta as perspectivas individuais do professor e ainda a cultura de sala de aula e as

normas da comunidade. Por seu turno Hoban (2002) e Dreiling (2007) apontam a experiência pessoal do professor e a sua resistência à mudança, enquanto Powers e Blubaugh (2005) abordam o conhecimento dos professores.

O conhecimento de que os professores necessitam para fazer uma integração efectiva da tecnologia é aliás um dos aspectos que tem vindo a ser alvo de um interesse crescente e cuja importância é cada vez mais reconhecida (Doerr & Zangor, 2000; Powers & Blubaugh, 2005; Polly et al., 2010; Bowers & Stephens, 2011). Foi o reconhecimento da importância de um conhecimento profissional específico para ensinar com a tecnologia que me levou a desenvolver o modelo CEMT - Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (Rocha, 2010). O modelo CEMT considera quatro domínios base do conhecimento, mas valoriza particularmente conhecimentos que transcendem cada um destes e, em particular, dois conjuntos de conhecimentos inter-domínios, um na confluência do conhecimento da Matemática, Currículo e Tecnologia e outro na do Ensino Aprendizagem, Currículo e Tecnologia. O CEMT é então conceptualizado como um conhecimento específico, desenvolvido de forma integrativa a partir da interacção entre todos os conhecimentos referidos.

Figura 1: Modelo CEMT - Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia



Contexto e metodologia

O presente estudo centra-se no professor, com especial incidência na sua prática profissional e no papel que nesta é reservado à calculadora gráfica. Desta forma, a

opção pela adopção de um estudo de natureza qualitativa parece particularmente adequada. Este é um tipo de investigação que é conduzido no ambiente natural, sem intervenção intencional sobre o ambiente em questão e que se caracteriza pela riqueza de pormenores das descrições, das opiniões e dos comportamentos humanos (Savenye & Robinson, 2001). O investigador despende uma grande quantidade de tempo no terreno (Bogdan & Biklen, 1997), sendo ele o principal instrumento de recolha de dados, ao contactar de perto com o objecto de estudo, procurando manter-se aberto à percepção do que se passa ao seu redor, atendendo às perspectivas e valores dos envolvidos no estudo (Savenye & Robinson, 2001).

Dentro das investigações qualitativas, e partilhando das suas características, temos os estudos de caso. Stake (2009) descreve o estudo de caso como um estudo das particularidades e das complexidades, na busca de compreensão da acção no seio de circunstâncias importantes.

Determinante nestes estudos, como realça Yin (2003), é aceder a um conjunto significativo de informação e, consequentemente, a múltiplas fontes. Neste sentido, para o estudo de caso sobre a professora Carolina em que se baseia este trabalho, a recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de 14 aulas e recolha documental. Foram realizadas entrevistas no início e no fim do ano lectivo e também antes e depois de cada aula observada. Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas. A análise de dados revestiu-se essencialmente dum carácter descritivo e interpretativo, tendo por base a análise de conteúdo dos elementos recolhidos.

Carolina é uma professora com mais de 30 anos de ensino que, no ano lectivo 2009/2010 leccionou a uma turma do 10.º ano a disciplina de Matemática A. Este foi o segundo ano que utilizou calculadora gráfica com alunos neste nível de escolaridade, tendo a vez anterior ocorrido em 1997/1998. Nessa altura Carolina acompanhou os alunos até ao 12.º ano, após o que se seguiu um período de alguns anos em que não leccionou no ensino secundário.

As aulas com a calculadora gráfica

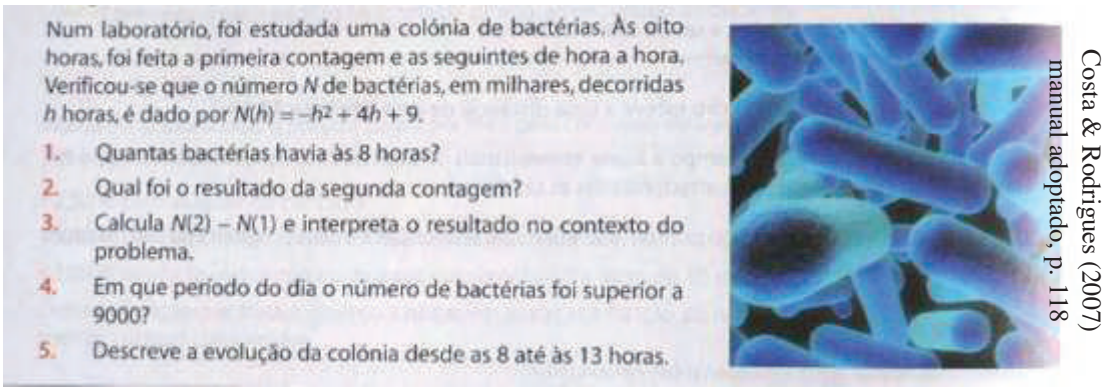
Um olhar sobre as propostas de trabalho efectuadas por Carolina no decorrer das aulas observadas permitiu constatar que estas tinham características diversas, podendo preencher uma aula inteira ou apenas parte desta, mas que existiam também alguns

aspectos em comum entre determinadas propostas e respectiva implementação. Por uma questão de simplicidade apresentarei as tarefas organizadas em função dessas semelhanças e utilizarei o termo *situação* para me referir a esse conjunto de tarefas e à respectiva implementação na sala de aula. Na impossibilidade, por questões de espaço, de apresentar aqui em detalhe todas as situações, darei maior destaque a duas delas, apresentando apenas para essas elementos relativos à sua implementação.

Situação 1

Ao longo do estudo do tema Funções, Carolina foi propondo diversas tarefas que tinham por base um contexto da realidade. Em comum, para além de um contexto real, todas tinham o facto de disponibilizarem a expressão da função que modelava o fenómeno, colocando depois várias questões sobre este que, em termos matemáticos, correspondiam a determinar a imagem de certo objecto, a encontrar um extremo, a resolver uma equação ou inequação ou a recorrer à Matemática para melhor compreender o fenómeno envolvido. A abordagem seguida passou invariavelmente pela introdução da expressão da função na calculadora, pelo traçar do gráfico e eventual procura de uma janela de visualização mais adequada a que se seguiu, consoante a questão em causa, um recurso a *trace*, ao menu *calc* (para determinar um valor, os zeros ou um extremo) ou o criar de uma segunda função constante e determinar as intersecções desta com a função original.

Figura 2: Tarefa "Colónia de bactérias" – situação 1


Num laboratório, foi estudada uma colónia de bactérias. Às oito horas, foi feita a primeira contagem e as seguintes de hora a hora. Verificou-se que o número N de bactérias, em milhares, decorridas h horas, é dado por $N(h) = -h^2 + 4h + 9$.

1. Quantas bactérias havia às 8 horas?
2. Qual foi o resultado da segunda contagem?
3. Calcula $N(2) - N(1)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.
4. Em que período do dia o número de bactérias foi superior a 9000?
5. Descreve a evolução da colónia desde as 8 até às 13 horas.

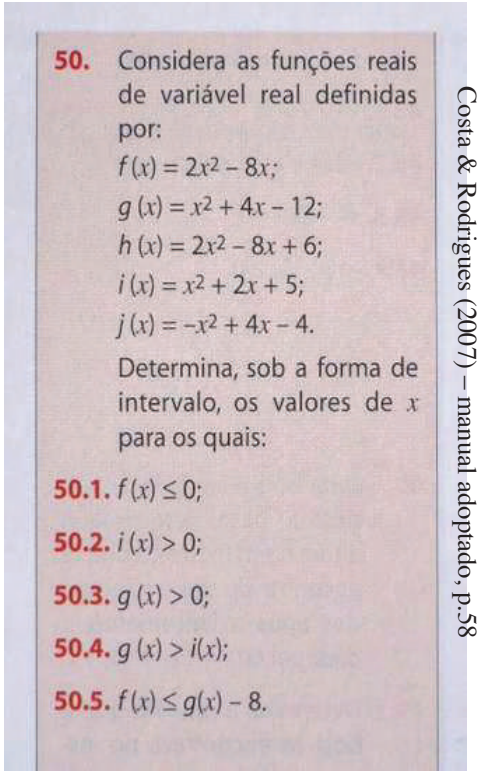
Costa & Rodrigues (2007) manual adoptado, p. 118

Situação 2

O trabalho de carácter mais mecânico e repetitivo também integrou as propostas efectuadas por Carolina, assumindo muitas vezes a forma da resolução de uma equação ou inequação, do preenchimento de um quadro de sinais, do cálculo dos zeros de uma função quadrática, de mostrar que são iguais expressões como x^3+x^2-4x-4 e $(x+2)(x+1)(x-2)$ ou de encontrar o ponto de intersecção entre duas funções.

Em comum estas situações tinham o contexto estritamente matemático e a existência de uma estratégia de resolução que já era do conhecimento dos alunos. Em todas elas o recurso à calculadora era permitido, podendo existir casos em que era pedida uma resolução analítica, mas sendo mais comuns as ocasiões em que não era dada qualquer indicação à partida. Ainda assim, as observações das aulas sugeriram algumas regularidades. A calculadora foi usada para realizar a fórmula resolvente e determinar as coordenadas do ponto de intersecção de duas funções. A resolução de equações ou inequações foi frequentemente realizada analítica e graficamente. E os restantes tipos de questões foram sempre realizados sem qualquer apoio da calculadora.

Figura 3:
Proposta de trabalho – situação 2



50. Considera as funções reais de variável real definidas por:

$f(x) = 2x^2 - 8x$;
$g(x) = x^2 + 4x - 12$;
$h(x) = 2x^2 - 8x + 6$;
$i(x) = x^2 + 2x + 5$;
$j(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Determina, sob a forma de intervalo, os valores de x para os quais:

50.1. $f(x) \leq 0$;

50.2. $i(x) > 0$;

50.3. $g(x) > 0$;

50.4. $g(x) > i(x)$;

50.5. $f(x) \leq g(x) - 8$.

Costa & Rodrigues (2007) – manual adoptado, p.58

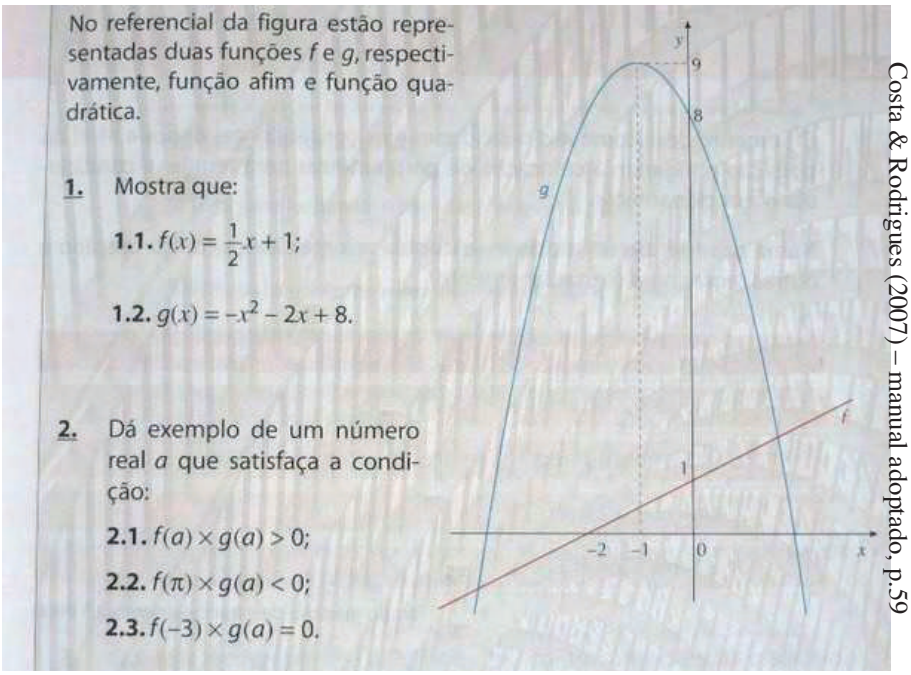
Situação 3

Outras tarefas caracterizaram-se pela disponibilização de um gráfico à partida. Estas foram sempre propostas em contexto estritamente matemático, em que podia ou não ser dada a expressão das funções envolvidas. Em comum tiveram ainda uma abordagem sem calculadora, sendo a única excepção os casos em que no final era pedido para recorrer à tecnologia para confirmar a correcção da expressão da função a que os alunos tinham chegado.

Exemplo

São apresentados os gráficos de uma função quadrática e de uma afim, sobre o mesmo referencial, é pedido que se justifique que as expressões analíticas correspondem às apresentadas e que se indique um valor de a para o qual $f(-3)\times g(a)=0$, outro para o qual $f(\pi)\times g(a)<0$ e outro ainda para o qual $f(a)\times g(a)>0$.

Figura 4: Proposta de trabalho – situação 3



Costa & Rodrigues (2007) – manual adoptado, p.59

As informações constantes do gráfico permitem a resolução e é essa a via seguida:

> Prof- Então, Sofia? Arranja-me um valor para o a… Olhas para o gráfico, que não está no quadro, está aí no teu livro, e o a poderá ser por exemplo igual a quanto?... …

Mas no gráfico apenas estão marcadas as coordenadas de dois pontos de cada função e, perante o pedido insistente da professora para um valor para o a, os alunos parecem não saber o que dizer:

> A 1 - –1.
>
> Prof- Achas que sim? -1 não! Qual é o g(-1)? É 9.
>
> A 1 - Ah!
>
> Prof- E tu queres um elemento a cuja imagem seja negativa.
>
> A 2 - –4
>
> Prof- O –4 não, porque se fosse –4
>
> A 3 - Era 0

Prof- Era 0, mas pode ser por exemplo…

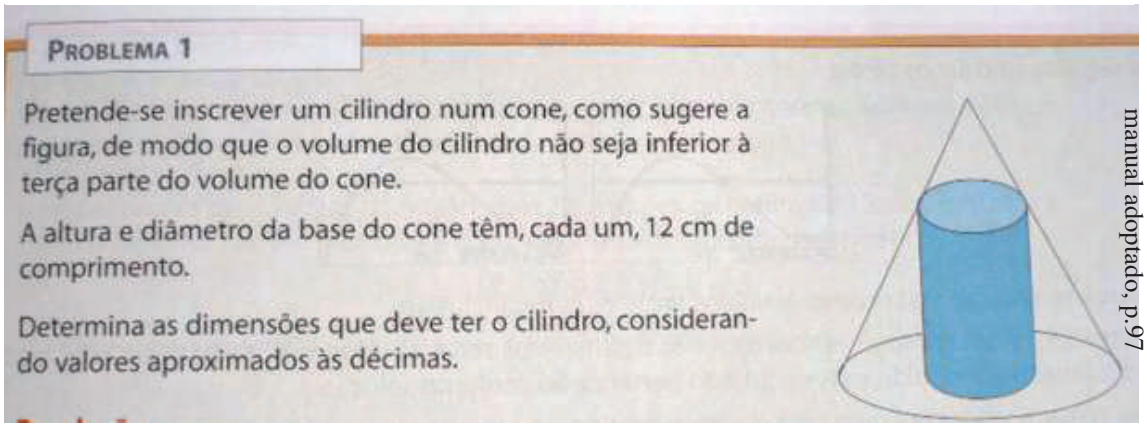
A 4 - –5.

Prof- Por exemplo.

Situação 4

Existiram ainda tarefas, com ou sem contexto real, em que os alunos necessitaram de ponderar o que fazer, à procura de uma abordagem para as questões que lhes colocavam. Foram basicamente tarefas de carácter geométrico, em que a certa altura era necessário encontrar determinada área (ou volume) ou arranjar a expressão da função que representava essa área (ou volume) em função de algum parâmetro. Nestes casos, há semelhança do que sucedia noutros, não havia indicações explícitas relativamente à conveniência de recorrer ou não à calculadora, contudo a sua utilização era usual sempre que existia a expressão de uma função e era necessário encontrar alguma informação relativamente a esta.

Figura 5: Proposta de trabalho – situação 4


PROBLEMA 1

Pretende-se inscrever um cilindro num cone, como sugere a figura, de modo que o volume do cilindro não seja inferior à terça parte do volume do cone.

A altura e diâmetro da base do cone têm, cada um, 12 cm de comprimento.

Determina as dimensões que deve ter o cilindro, considerando valores aproximados às décimas.

Costa & Rodrigues (2007) manual adoptado, p.97

Situação 5

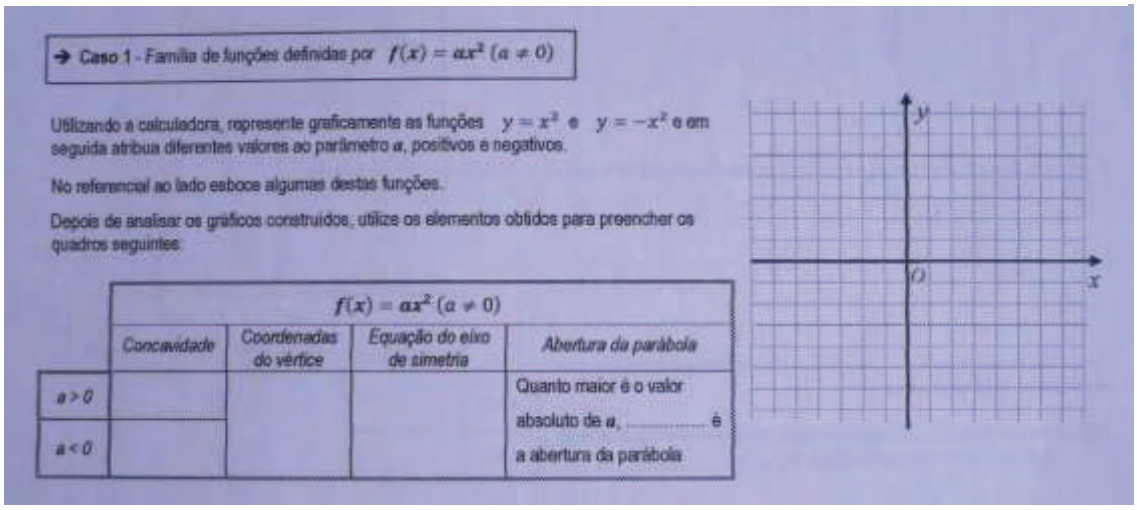
O estudo de algumas famílias de funções foi feito com base em tarefas em que era proposto aos alunos que traçassem com a calculadora gráfica alguns gráficos de funções para depois, a partir da observação destes, tentar identificar determinadas características comuns. Foi assim estudada a função afim, a quadrática e a módulo. Apesar das semelhanças entre as propostas efectuadas, estas divergiram quanto ao grau de abertura. O estudo da função afim foi realizado com base numa ficha bastante estruturada, em

que eram inclusivamente indicadas aos alunos quais as funções a considerar; o estudo da função quadrática já deixou aos alunos a escolha dos diferentes parâmetros das funções a considerar e o estudo da função módulo teve por base uma opção intermédia, com uma parte inicial mais estruturada, em que eram indicadas as funções a considerar, e uma parte bastante aberta em que não só era deixado aos alunos a escolha dos parâmetros a considerar como também a identificação da família de funções que convinha estudar.

A realização destas actividades foi marcada por algumas dificuldades por parte dos alunos. Carolina previa que a função afim fosse abordada muito rapidamente, ocupando apenas meia hora da aula, uma vez que os alunos tinham terminado há poucos dias o estudo da recta. Inicialmente considerou a possibilidade de elaborar uma ficha de trabalho com características mais abertas, deixando aos alunos a escolha das funções, mas acabou por não o fazer por considerar não dispor de tempo para tal. A realização da tarefa acabou contudo por ocupar quase a totalidade da aula, com Carolina a constatar que os alunos não estabeleceram pontos de contacto entre a função afim e o que tinham visto no decorrer do estudo da recta:

> Prof- Eu fiquei com a sensação que para eles aquilo era uma coisa completamente diferente do que tinham feito com a recta. (…) Nós até tínhamos trabalhado bastante aquela questão. (…) E eles até tinham dito logo "Ah quando o *m* é positivo vai sempre a subir, quando m é negativo vai sempre a descer". (…) E eu pensei "Pronto, a história da monotonia, depois da função, aquilo é trigo limpo".

Figura 6: Excerto da ficha de trabalho sobre a função quadrática – situação 5



→ **Caso 1** - Família de funções definidas por $f(x) = ax^2\ (a \neq 0)$

Utilizando a calculadora, represente graficamente as funções $y = x^2$ e $y = -x^2$ e em seguida atribua diferentes valores ao parâmetro a, positivos e negativos.

No referencial ao lado esboce algumas destas funções.

Depois de analisar os gráficos construídos, utilize os elementos obtidos para preencher os quadros seguintes:

$f(x) = ax^2\ (a \neq 0)$				
	Concavidade	*Coordenadas do vértice*	*Equação do eixo de simetria*	*Abertura da parábola*
$a > 0$				Quanto maior é o valor absoluto de a, ... é a abertura da parábola
$a < 0$				

No estudo da função quadrática as dificuldades foram ainda maiores. A título ilustrativo descreve-se sucintamente os acontecimentos no decorrer do estudo da família ax^2, com base na aula e nos comentários da professora.

> Prof- Eu dizia-lhes para eles começarem por $y=x^2$. A minha ideia era que a partir daí eles vissem que: quando o *a* aumenta, a abertura da parábola diminui; quando *a* é mais próximo de 0, a abertura da parábola aumenta. Mas eles começaram a atribuir assim valores à toa, sem nenhuma sequência, percebes? E às tantas já não sabiam qual era o gráfico que correspondia a que expressão.

A professora opta então por recorrer a outra representação e pede aos alunos para verem qual é a imagem de determinado objecto por meio de cada uma das funções, sugerindo que considerem o valor 1. Os alunos procuram corresponder à solicitação da professora, fazendo no caderno o cálculo que esta lhes pede. O processo revela-se demorado e a professora procura simplificar o trabalho dos alunos sugerindo-lhes que considerem $y_1=x^2$ e $y_2=2x^2$. No entanto, a reacção destes difere do que esperava:

> Prof- Quer dizer, pensando eu que eles ali viam, pronto, uma imagem, então no caso do 1, era o dobro da outra. Portanto, se para o mesmo objecto uma imagem era o dobro da outra, o $y=2x^2$ tinha que ser a que tinha uma abertura mais pequena. Eles ficam-me parados e eu não sei! Quer dizer, eu às tantas digo assim: "Meu Deus, mas o que é que se está a passar?"

As dificuldades dos alunos acabam por fazer com que a professora opte por lhes indicar que considerem apenas três funções, uma com a=1, outra com a>1 e outra com 0<a<1. Esta opção parece não facilitar o trabalho dos alunos, que continuam a não conseguir ver o efeito do parâmetro como a professora pretendia.

Depois da aula Carolina procura reflectir sobre a reacção dos alunos. Questiona as opções que assumiu, levantando a hipótese de estar a exigir demais aos alunos ou de o estar a fazer demasiado cedo:

> Prof- Às tantas eu começo a pensar se… Não sei, se a calculadora foi demasiado cedo para… Quer dizer, se a pessoa lhes está a exigir demais… Quer dizer, porque eles não estão habituados a pensar… … Percebes? Não sei.

Ao preparar o estudo da função módulo Carolina tem presente as experiências anteriores. Alude assim à realização de investigações como um processo que envolve uma crescente habituação dos alunos a este tipo de tarefas, mas também à opção consciente por uma abordagem um pouco mais estruturada:

> Prof- Vamos lá a ver se eles já estão um bocado mais enturmados com estas coisas todas. Portanto eu agora dei-lhes [as expressões das funções], não deixei ao critério deles irem desenhar funções… Como aquilo [na função quadrática] eu acho que não resultou muito bem…

Sendo a parte inicial da ficha bastante estruturada, os alunos não revelam dificuldades e mesmo a identificação do efeito geral do parâmetro não parece ser problemático. O único problema significativo prende-se com o registo dos gráficos no referencial da ficha. Uma vez que este se encontra traçado sobre um quadriculado, é necessário ter presente a correcta inclinação das semi-rectas. Este foi um aspecto de que alguns alunos se aperceberam mas, a maioria, traçou o gráfico incorrectamente ao copiar algo visualmente de um ecrã que, por ser rectangular, deturpa o ângulo formado com os eixos coordenados. A professora foi então apoiando os alunos, consciencializando-os da questão quando necessário e incentivando-os a socorrer-se dos seus conhecimentos sobre a recta.

Para além desta dificuldade, a professora identifica ainda uma outra, relacionada com a janela de visualização escolhida pelos alunos:

> Prof- Outra coisa que eu reparei é que eles fizeram o *zoom standard* e depois não ampliaram nada (…) e portanto os gráficos estavam muito próximos uns dos outros.

Ainda assim, esta não era uma das questões centrais colocadas por esta proposta de trabalho, uma vez que era possível representar todas as funções escolhidas pela professora com a janela *standard*. A razão para tal prende-se, segundo Carolina, com questões de espaço e a necessidade do referencial onde os alunos registariam os gráficos observados caber na ficha, mas também a alguma falta de tempo para reflectir sobre a ficha elaborada e para a melhorar antes de a dar aos alunos:

> Prof- Estas foi assim que era para caberem aqui (aponta o referencial na ficha). Se eu pusesse |x| +10 tinha que [aumentar o referencial]…

I – Mas podias ter posto o eixo dos *xx* um bocadinho mais abaixo no quadriculado (…) e já te permitia abordar essa questão.

Prof- Pois, também podia. Mas sabes que isto às tantas é feito tudo sempre com muito pouco tempo e depois isto é *copy* e *paste*. Quer dizer, a pessoa faz o referencial no início [do ano], agrupa e depois *copy* e *paste*… Mas se eu conseguisse fazer as coisas assim com uma semana ou duas de antecedência, a pessoa ia vendo e pensava: "Olha aqui é melhor fazer assim e assado", mas assim…

As tarefas

As tarefas propostas por Carolina envolveram diferentes níveis de estruturação, questões que os alunos já sabiam como abordar ou que enfrentavam pela primeira vez, contextos puramente matemáticos ou inseridos na realidade. Uma análise das situações atrás referidas parece permitir concluir que foram propostos problemas, exercícios e investigações.

A diversificação do contexto também foi tida em conta, embora não para todo o tipo de tarefas, visto que todas as investigações realizadas incidiram sobre o efeito gráfico da variação de determinados parâmetros de certas famílias de funções.

Os projectos e as tarefas de modelação não estiveram entre as propostas de trabalho seleccionadas por esta professora durante o estudo das Funções. Antes de iniciar o tema chegou a referir a intenção de realizar uma tarefa de modelação, mas acabou por nunca a concretizar.

O tipo de utilização da calculadora gráfica

Uma análise das situações de trabalho promovidas por Carolina sugere três tipos diferentes de utilização da calculadora gráfica: para obter informação, para confirmar resultados e para explorar.

A utilização dominante da calculadora gráfica parece ser para obter uma informação concreta e especificada à partida. Estão nestas circunstâncias os casos em que a calculadora é utilizada para obter o gráfico de uma função, para determinar um dos seus extremos, para executar a fórmula resolvente, para efectuar um cálculo numérico ou outra ocorrência similar. Trata-se de uma utilização que está presente em três das cinco

situações atrás descritas e que, quase sempre, parte da expressão analítica de uma função e da sua representação gráfica.

A calculadora é também utilizada para confirmar resultados alcançados por outra via. Esta é uma utilização que Carolina tende a incentivar quando é pedida a expressão da função que se adequa a um gráfico apresentado, mas que não é comum noutras situações, por exemplo, nunca ocorre quando é feito o preenchimento de um quadro de sinais.

Um recurso à calculadora para explorar esteve igualmente presente na busca de compreensão ou conhecimento sobre novos aspectos, correspondente às situações em que os alunos realizaram actividades de investigação.

O tipo de utilização que é feito da calculadora parece ainda ser bastante padronizado. Ou seja, tende a circunscrever-se a um conjunto bastante limitado de possibilidades (gráfico, zeros, extremos, …) e a deixar de lado um amplo conjunto de abordagens. Por exemplo, para mostrar a igualdade entre expressões como x^3+x^2-4x-4 e $(x+2)(x+1)(x-2)$, podia partir-se de um estudo gráfico da primeira e da procura dos seus zeros. Também a construção da expressão de uma função podia ser feita com o apoio da tecnologia numa linha exploratória. De igual modo, tarefas como a apresentada na situação 3 podiam ser desenvolvidas com o apoio da calculadora. E se as respostas dos alunos parecem sugerir alguma dificuldade na compreensão da situação, o recurso à calculadora podia permitir aos alunos aceder a uma tabela de valores para as duas funções, constituindo-se como um contributo para a compreensão da situação, que podia inclusivamente envolver a representação gráfica da função produto ($f \times g$) e facilitar a compreensão de que para saber o sinal da função produto para um determinado valor a não é necessário conhecer os valores de $f(a)$ e $g(a)$ mas apenas os seus sinais.

Factores que interferem com a utilização da calculadora gráfica

Um dos aspectos que parece ter influenciado a prática de Carolina é a falta de tempo. Este constrangimento leva-a a optar por uma proposta mais estruturada aquando do estudo da função afim, e é também o tempo, embora de uma outra forma, que a impede de reflectir previamente e da forma aprofundada que desejaria sobre as tarefas que propõe aos alunos, nomeadamente, sobre a ficha que elaborou em torno da função módulo.

A sua prática é igualmente marcada pelo seu Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (CEMT). É notória a forma como se apoia no seu CEMT e em particular no conhecimento das características do trabalho de natureza investigativa, para procurar adequar as tarefas à experiência dos seus alunos com este tipo de actividade. E é igualmente este conhecimento que determina as características do equilíbrio que estabelece entre as abordagens com e sem tecnologia, bem como os apoios que procura para ultrapassar as situações mais problemáticas, como quando os alunos não estavam a traçar adequadamente os gráficos da função módulo ou quando não conseguiam identificar qual dos gráficos representava que função quadrática. Alguma padronização na forma como a tecnologia é utilizada terá também a influência do seu CEMT, o mesmo acontecendo com a importância que reconhece ao trabalho em torno da janela de visualização e com os momentos que escolhe para abordar a questão.

Influente sobre o seu CEMT e, consequentemente, sobre a utilização que faz da calculadora gráfica será ainda a sua quase inexperiência com esta tecnologia. O CEMT envolve conhecimento ao nível da forma como a tecnologia potencia a Matemática e o seu ensino e aprendizagem. Carolina não teve ainda grandes oportunidades para identificar as dificuldades dos alunos ao articular informações provenientes de diferentes vias, tecnológicas ou não; nem para aferir a concordância matemática das tarefas que propõe; nem para perceber como esta tecnologia pode alterar a ênfase nos conteúdos matemáticos. Estes são apenas alguns aspectos do CEMT que marcam de forma significativa as características deste conhecimento, que exigem tempo para se desenvolver, experiência com a tecnologia e reflexão sobre esta. E Carolina parece sentir precisamente isso quando alude à falta de tempo para preparar as tarefas para os seus alunos.

Conclusão

A calculadora gráfica é utilizada em três dos cinco tipos de tarefas caracterizados por Ponte (2005): exercícios, problemas e investigações. A utilização que é feita não parece contudo ser marcada pelo tipo de tarefa, mas antes por aquilo que se pretende. Com efeito, o recurso a esta tecnologia surge muito tendencialmente associado à parte gráfica, em consonância com as características de utilização identificadas por Simmt (1997), Doerr e Zangor (2000), Banker (2001) e Cavanagh e Mitchelmore (2003). O uso

da calculadora é assim considerado conveniente quando o que se pretende é o gráfico de determinada função ou alguma informação que possa ser obtida através deste. Nestas circunstâncias o uso da máquina parece partir de uma expressão analítica e pretender a representação gráfica.

Nos casos em que se parte do gráfico e se pretende uma representação analítica, a via de abordagem parece não passar propriamente pela calculadora, incluindo-a mais como uma forma de confirmação do que como uma via de exploração para, com base em conhecimentos matemáticos e por um processo experimental, ir sucessivamente construindo a expressão pretendida.

A via para ultrapassar eventuais dificuldades também parece centrar-se mais num recurso a conhecimento e abordagens analíticas do que na utilização de outras potencialidades da máquina. Pouco usual é ainda a utilização da calculadora gráfica para confirmar resultados, numa divergência notória com as conclusões dos estudos atrás referidos, que a apontam como uma das utilizações mais frequentes desta tecnologia.

A análise preliminar dos dados sugere que o tempo, tanto para implementar determinadas metodologias na sala de aula, como para as preparar adequadamente, reflectindo sobre as suas implicações e sobre as potencialidades para a aprendizagem dos alunos, é um dos factores que interfere com a utilização que é feita da calculadora gráfica na sala de aula. Este último aspecto é particularmente interessante, uma vez que embora se lhe encontrem referências na literatura (ver Dunham, 2000), não é um dos factores mais explicitados pelos professores. Para além do tempo, a prática de Carolina parece ser também influenciada pelo CEMT detido por esta, sendo ainda de ter em conta a inexperiência de utilização desta tecnologia e as respectivas influências sobre o seu conhecimento e consequentemente sobre a sua prática.

Referências

Banker, T. (2001). *Preservice secondary mathematics teachers' beliefs and practice regarding the use of graphing calculators in mathematics instruction*. PhD dissertation, University of Georgia (unpublished document).

Bogdan, R. & Biklen, S. (1997). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bowers, J. & Stephens, B. (2011). Using technology to explore mathematical relationships: a framework for orienting mathematics courses for prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* (DOI: 10.1007/s10857-011-9168-x).

Cavanagh, M. & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2007). *Espaço 10 A*, vol.2. Porto: Edições ASA.

Doerr, H. & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.

Dreiling, K. (2007). *Graphing calculator use by high school mathematics teachers of western Kansas*. PhD dissertation, Kansas State University (unpublished document).

Dunham, P. (2000). Hand-held calculators in mathematics education: a research perspective. In E. Laughbaum (Ed.), *Hand-held technology in mathematics and science education*, pp.39-47. Columbus, OH: The Ohio State University.

Farrell, A. (1996). Roles and behaviours in technology-integrated precalculus classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 35-53.

Fleener, M. (1995). The relationship between experience and philosophical orientation: a comparison of preservice and practicing teachers' beliefs about calculators. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 14 (3), 359-376.

Gimeno, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: ArtMed.

Goos, M. & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 102-130.

Hoban, G. (2002). *Teacher learning for educational change*. Buckingham: Open University Press.

Polly, D.; Mims, C.; Shepherd, C. & Inan, F. (2010). Evidence of impact: transforming teacher education with preparing tomorrow's teachers to teach with technology (PT3) grants. *Teaching and Teacher Education*, 26, 863-870.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, pp. 11-34. Lisboa: APM.

Powers, R. & Blubaugh, W. (2005). Technology in mathematics education: preparing teachers for the future. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5 (3/4), 254-270.

Rocha, H. (2010). O conhecimento para ensinar Matemática com a tecnologia. *Actas do SIEM*. Lisboa: APM.

Rocha, H. (2011). A calculadora gráfica no ensino das funções: implicações sobre aspectos da prática de uma professora. *Actas do EIEM 2011*. Póvoa de Varzim, Maio de 2011.

Romano, E. & Ponte, J. (2009). Teachers' use of graphics calculator in secondary mathematics classrooms. In C. Bardini, P. Fortin, A. Oldknow & D. Vagost

(eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Metz, France: ICTMT 9.

Savenye, W. & Robinson, R. (2001). Qualitative research issues and methods: an introduction for educational technologists. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology*, pp. 1171-1195. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Simmt, E. (1997). Graphing calculators in high school mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (2/3), 269-289.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vrasidas, C. & Glass, G. (2005). Achieving technology integration in classroom teaching. In C. Vrasidas & G. Glass (Eds.), *Preparing teachers to teach with technology*, pp. 1-20. Greenwich: Information Age Publishing.

Yin, R. (2003). *Case study research – design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Nota

* Trabalho desenvolvido com o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia e do Ministério da Educação

PRÁTICAS DE GESTÃO CURRICULAR DE UM GRUPO DE MATEMÁTICA[1]

Cláudia Canha Nunes
Agrupamento de Escolas Fernando Pessoa, Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
cjohnent@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este artigo analisa de que forma um grupo de Matemática faz a gestão do currículo, em especial, como desenvolve a planificação anual e de unidade, selecciona tarefas e usa o manual escolar, partilha e reflecte sobre experiências da prática. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa e interpretativa, sendo os dados recolhidos por observação participante, entrevista e recolha documental. Os resultados indicam que a gestão do currículo no contexto do grupo permite desenvolver uma cultura de ensino inovadora, a par da utilização do manual escolar e alinhada com as actuais orientações curriculares. Mostram, também, que o grupo é uma forma de organização apropriada para aceitar desafios, inovar e a superar dificuldades da prática. Por fim, o trabalho colaborativo e a partilha de experiências, que permitem reflectir sobre a prática e a aprendizagem dos alunos, são elementos essenciais para a construção da identidade profissional e ao desenvolvimento profissional do professor e do grupo.

Palavras-chave: Gestão curricular, Matemática, Grupo de Matemática.

Introdução

Nos últimos anos, em Portugal, foram lançadas um conjunto de medidas políticas para melhorar os resultados dos alunos em Matemática, que deram origem, entre outros, à publicação do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) e ao Plano da Matemática (PM). Reconhece-se que as actuais orientações curriculares em Matemática tornam mais exigente o trabalho dos professores, colocando-lhes novos desafios. Ora, como indica Hargreaves (1998) uma mudança educacional, para ser bem sucedida, requer uma intervenção simultânea em vários níveis, entre eles, o desenvolvimento profissional dos professores, o desenvolvimento do currículo e da avaliação, e o desenvolvimento da liderança e da organização escolar.

Um dos aspectos fundamentais da prática profissional do professor é a sua gestão do currículo, atendendo aos objectivos e temas nele indicados, em relação com as características dos alunos e as condições e recursos da escola. Esta gestão torna-se particularmente complexa quando se procuram concretizar práticas profissionais inovadoras que, por vezes, parecem não corresponder aos interes-

[1]Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

ses e necessidades dos alunos. Este artigo tem por objectivo analisar de que modo o grupo faz a gestão do currículo de Matemática ao nível macro, diversifica as tarefas que propõe aos alunos e utiliza o manual escolar de Matemática como instrumento de planeamento da prática lectiva.

Quadro conceptual

É usual distinguir diversos significados de currículo, nomeadamente, o currículo prescrito (ou formal) dos normativos legais, o currículo mediado (por exemplo, pelos manuais escolares), o currículo planificado (ou moldado) pelo professor para as suas aulas, o currículo em acção posto em prática pelo professor na sua sala de aula, o currículo aprendido pelos alunos e o currículo avaliado, por exemplo, através de exames nacionais (Gimeno, 1989; Ponte, 2005). A gestão curricular representa então o conjunto de acções do professor que contribuem para a construção do currículo na turma (Gimeno, 1989). Como refere Ponte (2005), esta gestão tem a ver, essencialmente, com o modo como o professor interpreta o currículo prescrito e o concretiza a dois níveis: a planificação da prática lectiva (currículo moldado) e a sua prática lectiva na aula (currículo em acção). O modo como o professor encara a aprendizagem dos alunos, assume grande importância no processo de gestão curricular. Tendo em conta a avaliação e reflexão periódica que faz das suas práticas profissionais, vai reajustando tanto o seu currículo moldado como o seu currículo em acção. Como gestor do currículo, o professor mobiliza o seu conhecimento e identidade profissional na tomada de decisões e adapta o currículo fazendo face a diversos desafios, incluindo as exigências da sociedade moderna, da diversificação do público escolar, e o papel complexo que lhe é atribuído pelos documentos curriculares como agente facilitador das aprendizagens. Os materiais curriculares, em particular, o manual escolar e as tarefas são elementos centrais na gestão do currículo, e caracterizam a natureza das propostas de trabalho que são desenvolvidas pelos alunos e, consequentemente, podem determinar a qualidade da aprendizagem (Ponte, 2005).

Para ensinar bem, o professor tem que conhecer bem as técnicas de ensino, conhecer o conteúdo do que se ensina, os alunos e o contexto (Shulman, 1986), mas fundamentalmente o professor ensina o que ele é (Ponte & Chapman, 2008). A identidade profissional do professor é um aspecto da identidade social, que pressupõe a existência de uma comunidade na qual se transmitem formas de fazer, conceber e pensar, que constituem valores colectivos e marcas pessoais dos elementos que a ela pertencem (Dubar, 2002). Ponte e Chapman (2008) referem que na construção da sua identidade profissional, o professor assume a cultura, valores e normas do grupo de pertença, mas tem também a possibilidade de os influenciar e assim contribuir para a transformação do grupo, mobilizando o seu espólio cultural e experiência pessoal. Por outro lado, o processo de socialização do professor na escola e no seu grupo disciplinar é frequentemente complexo, inibindo por vezes a experimenta-

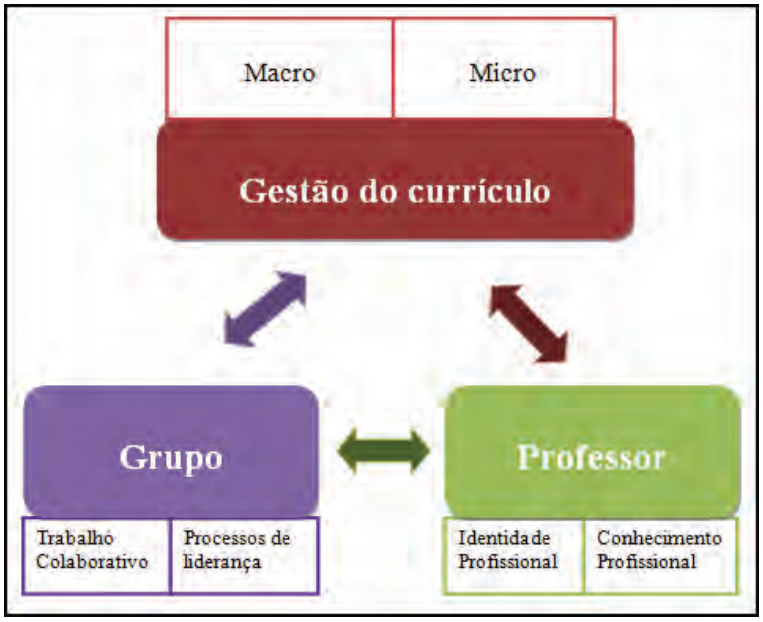
ção de novas ideias, o envolvimento em projectos de inovação curricular e o estabelecimento de relações pessoais e a partilha de experiências. Este processo torna real a dualidade que existe entre o modelo de cultura profissional idealizado pelo professor e a realidade com que é confrontado na prática e no seu dia-a-dia (Ponte & Oliveira, 2002). Se quisermos que as nossas escolas conheçam um desenvolvimento significativo, o mais importante será o tipo de envolvimento e o modo como os professores trabalham em conjunto (Nunes & Ponte, 2008).

A dinâmica de trabalho colaborativo é um contexto favorável para reforçar a confiança, elemento fundamental para promover a inovação e a eficácia, reduzir o receio de experimentar algo novo, criar oportunidades de aprendizagem e de desenvolvimento profissional (Boavida & Ponte, 2002; Hargreaves 1998). Igualmente, a reflexão sobre a prática e a colaboração são elementos essenciais na promoção da aprendizagem quando criadas oportunidades de partilha de experiências. (Hargreaves, 1998; Schön, 1993; Sowder, 2007). Esta pode ser uma forma de criar dinâmicas capazes de mobilizar o capital de conhecimento de cada um dos professores para um objectivo comum e apoiá-los nas suas acções. No entanto, tal como refere Sowder (2007), importa enfatizar que a colaboração por si só não leva à melhoria dos resultados, a não ser que os professores envolvidos estejam concentrados nos objectivos correctos e sejam capazes de definir uma estratégia de acção onde todos têm um papel e responsabilidade a assumir com base num objectivo comum.

Tem vindo a ser reconhecido que para assegurar qualidade de ensino e, consequentemente, melhorar a qualidade da aprendizagem dos alunos em cada disciplina é importante haver uma liderança efectiva, capaz de promover e regular a qualidade do processo de ensino-aprendizagem. O líder disciplinar (no caso português, o coordenador de departamento) assume responsabilidades e compromissos profissionais não só com a instituição a que pertence mas também com os seus pares. Esta pode também ser uma forma de desenvolver a cultura profissional de escola (Nunes & Ponte, 2008). Estas são dimensões fundamentais que podem ajudar a perceber como o professor desenvolve o seu trabalho, nomeadamente a forma como gere o currículo, e que estão organizadas quadro conceptual deste estudo (Quadro 1).

O quadro conceptual tem como eixos centrais o professor de Matemática que pertence a um grupo e o departamento de Matemática da escola. Este quadro permite olhar para o trabalho do professor nas diferentes dimensões e pode ajudar a compreender a complexidade e estrutura das relações que se estabelecem entre os diferentes domínios.

Quadro 1 - Quadro Conceptual do estudo



Neste trabalho, a gestão do currículo tem principal agente o professor, mas é feita em duas dimensões, macro e micro. A dimensão macro é essencialmente desenvolvida em grupo, parte da interpretação do currículo prescrito e dá origem o currículo planeado (anual por nível de ensino e por unidade). Esta dimensão integra não só elementos do trabalho colaborativo dos professores, mas também o do conhecimento e identidade de cada um dos professores que constitui o departamento de Matemática.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, com o design de estudo de caso. Centra-se num grupo de Matemática com 14 professores de uma escola secundária com 3.º ciclo do centro do país e estuda o caso do grupo de professores e dentro desse grupo, três professores: Ana, a coordenadora do departamento de Matemática, Matilde, uma professora recém-chegada à escola e ao grupo, e Simão, um professor da escola há 27 anos. Neste artigo, como já referimos, damos atenção à gestão curricular realizada pelo grupo. A recolha de dados decorreu durante todo o ano lectivo de 2007/08, tendo sido feita pela primeira autora do artigo e inclui: (i) observação participante de dez sessões de trabalho e de duas aulas, com registo no diário de campo, (ii) duas entrevistas com cada um dos professores seleccionados para estudo de caso e (iii) recolha documental. De acordo com o plano de investigação, o primeiro momento de análise de dados ocorre durante a recolha de dados, permitindo identificar a necessidade de novas recolhas de dados. O segundo nível de análise envolve o desenvolvimento de categorias, temas ou classes susceptíveis de fornecer uma interpretação dos dados. O terceiro nível de análise transcende a formação de catego-

rias e centra-se na análise do discurso dos professores, pretendo-se explicar o significado dos dados, de modo a proporcionar contributos para a compreensão do fenómeno em estudo.

O grupo de professores

O grupo tem uma vasta experiência de trabalho colaborativo e nos últimos anos tem desenvolvido diferentes projectos de Matemática na escola. A maioria destes projectos emerge da necessidade sentida pelos professores de modificar a prática de modo a superar dificuldades dos alunos e a melhorar a sua aprendizagem. Durante o ano lectivo de 2007/08 o grupo desenvolveu o projecto *As tarefas de investigação, demonstrações e os problemas nos manuais escolares e na gestão do currículo*, abrangendo todas as turmas do 7.º ao 12.º ano de escolaridade e decorrendo em simultâneo com PM. Este projecto tem por objectivo diversificar as tarefas na aula de Matemática, de modo a promover a aprendizagem dos alunos. O coordenador é Simão, que procura definir o objectivo do projecto e negociar com os colegas as actividades que pretendem desenvolver no ano lectivo. Neste sentido, há a preocupação de que todos os professores e níveis de ensino estejam envolvidos, numa dinâmica de trabalho colaborativo onde a reflexão sobre a prática e a partilha de experiências são elementos essenciais para o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem de qualidade.

No conjunto dos catorze professores que constituem o departamento de Matemática o número de anos a que pertencem a esta escola (entre 1 e 28 anos) e o tempo de serviço é muito variado (entre 5 e 28 anos). Quanto à sua formação inicial todos os professores são licenciados e três têm mestrado. O grupo procura estabelecer contacto com a realidade exterior à sua escola, participando em encontros profissionais regionais e nacionais e em acções de formação contínua para professores. Para além da formação individual, está presente a preocupação de desenvolvimento profissional do grupo, sendo valorizada a criação de espaços de formação contínua no contexto da escola. Esta prática tem por base uma norma instituída há mais de uma década, de partilha interna da formação que cada professor recebe. Por outro lado, desenvolvem os seus projectos tendo como ponto de partida problemas que emergem da prática. São elementos facilitadores desta dinâmica a existência de vários formadores no grupo e um espaço comum para trabalho conjunto, integrado no horário de cada professor. Dentro da escola o grupo propõe actividades extra-lectivas e desenvolve algum trabalho em parceria com outras disciplinas.

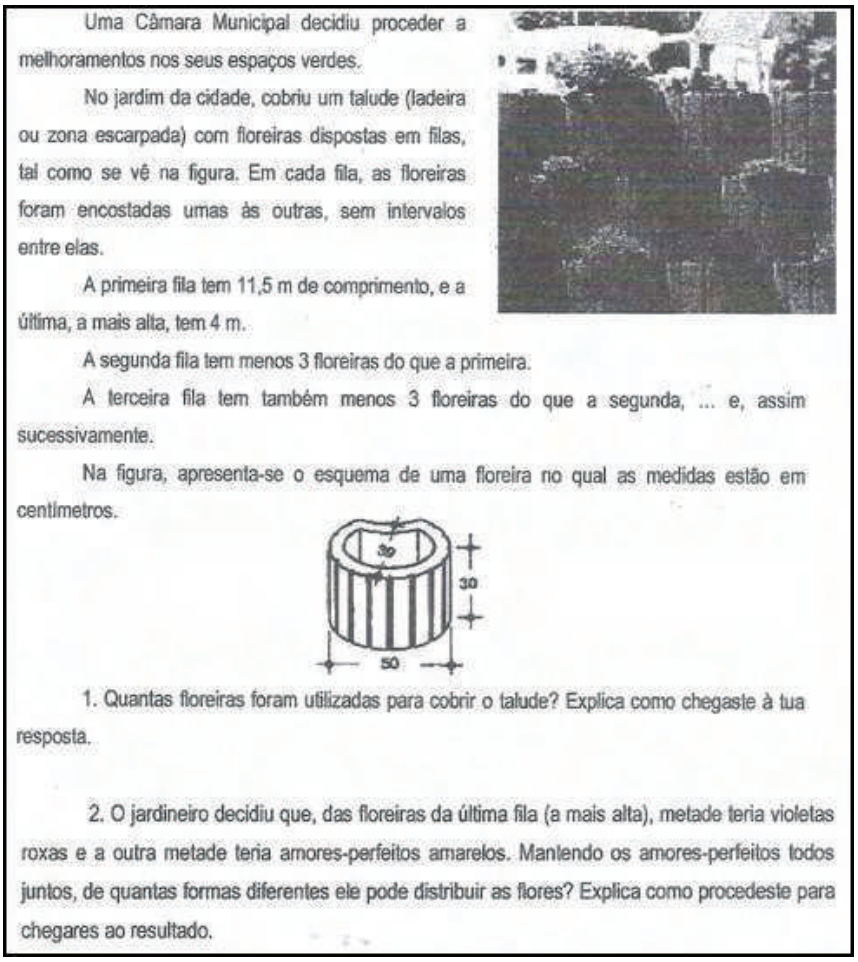
O trabalho que os professores do departamento de Matemática tem vindo a desenvolver é reconhecido pelo órgão de gestão da escola, que o evidencia proporcionando condições para o desenvolvimento das actividades do grupo. Igualmente, a comunidade escolar, em geral, e o encarregados de educação, em particular, procuram dar apoio aos professores, sempre que lhes é possível, através de

um acompanhamento mais próximo dos seus educandos. Os resultados dos alunos na avaliação externa, normalmente acima da média nacional, e as taxas de entrada em cursos do ensino superior, são elementos valorizados pela escola, pais e alunos, e contribuem para o reconhecimento que o grupo tem alcançado.

A gestão do currículo

Planificação anual e de unidade. A planificação do ano lectivo feita pelo grupo tem como principal objectivo definir a sequência de unidades a trabalhar com os alunos, prever o número de aulas a utilizar em cada uma dessas unidades e definir nos momentos de avaliação formal dos alunos, em particular os momentos de realização dos testes. Neste trabalho os professores usam como materiais de apoio essencialmente, os documentos produzidos em anos anteriores, o manual escolar e os programas de Matemática, estes apenas quando surgem dúvidas. Nesta fase, percebe-se que a gestão do currículo tem como referência o currículo prescrito nos documentos oficiais, mas através do currículo mediado pelo manual escolar e os documentos produzidos pelos professores. Igualmente, percebe-se que os professores procuram conhecer as tarefas propostas nos manuais escolares como ponto de partida para o trabalho a propor aos alunos. Porém, há a preocupação de partir do trabalho realizado em anos anteriores, em particular com tarefas extra manual que podem servir como introdução aos temas ou para complementar as tarefas propostas no manual escolar. Nas sessões de planificação do trabalho anual e da primeira unidade (Sessão Trabalho - ST 1 e ST 2) emergiram temas a que o grupo deu particular atenção em sessões seguintes, entre outros, temas relacionados com a natureza das tarefas, o papel do professor na gestão do currículo em acção, e as parcerias no estudo acompanhado.

As tarefas. As tarefas ocupam um papel central nas sessões de trabalho do grupo no âmbito do projecto. A discussão sobre as orientações curriculares ajudou o grupo a negociar um conjunto de significados, nomeadamente sobre a natureza das tarefas, estratégias de ensino-aprendizagem e sobre o papel do professor e do aluno na realização de tarefas na sala de aula [Diário de Campo (DC) ST3]. Neste sentido, na planificação do trabalho a desenvolver com os seus alunos, os professores procuram diversificar a natureza das propostas. Os exercícios e problemas ocupam um lugar de relevo, com origem, principalmente, no manual escolar. Mas, para além destas tarefas, o grupo procura também propor tarefas de natureza mais aberta e que se enquadram na temática dos dois projectos. No conjunto das dez sessões de trabalho que observei, o grupo discutiu quatro tarefas: *Estantes*, *o Farol*, *O Talude* (Figura 1), e *O passeio da Matilde*.



Uma Câmara Municipal decidiu proceder a melhoramentos nos seus espaços verdes.

No jardim da cidade, cobriu um talude (ladeira ou zona escarpada) com floreiras dispostas em filas, tal como se vê na figura. Em cada fila, as floreiras foram encostadas umas às outras, sem intervalos entre elas.

A primeira fila tem 11,5 m de comprimento, e a última, a mais alta, tem 4 m.

A segunda fila tem menos 3 floreiras do que a primeira.

A terceira fila tem também menos 3 floreiras do que a segunda, ... e, assim sucessivamente.

Na figura, apresenta-se o esquema de uma floreira no qual as medidas estão em centímetros.

1. Quantas floreiras foram utilizadas para cobrir o talude? Explica como chegaste à tua resposta.

2. O jardineiro decidiu que, das floreiras da última fila (a mais alta), metade teria violetas roxas e a outra metade teria amores-perfeitos amarelos. Mantendo os amores-perfeitos todos juntos, de quantas formas diferentes ele pode distribuir as flores? Explica como procedeste para chegares ao resultado.

Figura 1 – Enunciado da tarefa *O Talude.*

A origem das tarefas e quem as leva para o grupo varia. Por exemplo, a tarefa *O Talude* foi trazida por Simão de uma das reuniões de acompanhamento do PM. Trata-se de uma tarefa de investigação e está ligada a um contexto real. Na sessão de trabalho, Simão faz circular uma cópia da tarefa por cada um dos seus colegas, lê em voz alta o enunciado e, por fim, pergunta: "O que vamos fazer. Aplicamos a tarefa ou não? O que acham?" [ST 4]. Gera-se uma discussão entre pares até que finalmente chegam a acordo em propor a tarefa aos alunos, com o objectivo de diagnosticar as suas dificuldades alunos na resolução de tarefas de natureza investigativa. Os professores decidiram que a tarefa seria resolvida individualmente e que as produções escritas dos alunos seriam analisadas numa das sessões de trabalho do grupo. A estrutura da tarefa manteve-se igual à inicial, mas às duas questões acrescentaram uma linha, pedindo para o aluno explicar como tinha chegado à resposta, como forma de assegurarem que eles registassem as estratégias e raciocínios utilizados na resolução da tarefa. A análise das respostas dos alunos foi feita com base numa grelha de critérios de classificação construída pelo grupo, por nível de desempenho.

O manual escolar. Os diferentes manuais escolares (do 7.º ao 12.º ano) estão presentes em todas as reuniões de trabalho do grupo. Este é o recurso mais usado pelos professores e ocupa um papel cen-

tral na gestão do currículo, quer na fase de planificação das actividades a desenvolver com os alunos, quer no desenvolvimento das actividades de sala de aula. A escolha dos manuais é feita em grupo, depois de uma análise de todos os manuais disponíveis, tendo como principais critérios de análise a forma como introduz os tópicos matemáticos e as tarefas que propõe. Embora existam critérios para analisar os manuais, nem sempre a escolha parece ser bem sucedida:

> O manual de 7.º ano foi uma má escolha. Decidimos escolher este manual porque era o que já tínhamos adoptado para o 9.º ano e gostamos bastante de trabalhar com ele. Mas o do 7.º ano dos mesmos autores está organizado de forma diferente e não tem propostas tão interessantes. (…) Acabo por ir buscar muitos exercícios a outros manuais, principalmente para introduzir matéria [Maria, DC ST 2].

Nas palavras de Maria, percebe-se que a selecção do manual do 7.º ano foi influenciada pela experiência que os professores tinham de utilização do manual do 9.º ano. Porém, o manual parece não condicionar a forma como a professora gere o currículo, nem o trabalho que propõem aos alunos. Nas aulas, o manual é usado pelos professores essencialmente para propor tarefas para os alunos resolverem, ajudar os alunos a localizar os tópicos que estão a ser trabalhados na aula, e para marcar trabalho para casa. Este método parece estar relacionado com a preocupação dos professores em organizar e promover o estudo autónomo dos alunos: "Em casa vejam os exemplos que estão no manual e os exercícios resolvidos. São fundamentais para o sucesso na resolução de um exercício com assímptotas" [Aula Ana]. Para além disso, a forma como o grupo usa o manual e centraliza nos professores a tomada de decisões sobre o seu uso, evidencia o papel mediador do manual no processo de ensino-aprendizagem da Matemática desenvolvido por este grupo.

A partilha de experiências entre professores. A partilha de episódios e experiências da prática entre os professores faz parte da maneira de estar da dinâmica do grupo, quer quando se reúnem formalmente ou se encontram. A propósito da tarefa O Talude Matilde refere,

> Eu tive alunos, principalmente os do 7.º ano, que não compreendiam o enunciado da tarefa. Começou logo com a palavra Talude: "*Professora o que é um talude?"* Tive que desenhar no quadro, aliás a figura não se percebe bem, devia estar a cores. Com a minha explicação, houve alguns que começaram a desenhar e a procurar forma de responder às questões. Mas a maioria, que começou a fazer contas, não saía dali. Tive que ir ao lugar e dizer para começarem a desenhar o talude usando os dados do enunciado. [ST 5]

Com as palavras de Matilde, houve vários professores que partilharam que também eles tiveram que proceder do mesmo modo, e que as dificuldades dos alunos tinham sido semelhantes. Assim, emergiu a discussão sobre os contextos das tarefas, que por vezes são contextos reais, mas que são pouco familiares aos alunos.

Nas sessões em que foram discutidas produções dos alunos e se procurou classificar o desempenho dos alunos, emergiu a discussão sobre a natureza da informação que os professores conseguem obter sobre as aprendizagens dos alunos. Outra preocupação revelada pelos professores é sobre a melhor forma de transmitir essa informação aos alunos de modo a ajudá-los a perceber os pontos fortes e os menos conseguidos. As questões que emergem são:

> Quais as estratégias e os procedimentos que os alunos usaram na resolução da tarefa? Quais as dificuldades que os alunos revelam? Que trabalho pode ser feito de modo a ajudar os alunos a superar as dificuldades que surgiram? Como podemos devolver a informação aos alunos sobre as suas produções de modo a ajudá-los a evoluir? [DC, ST 5, 7, 8 e 9]

Fruto da discussão, Sebastião sugere que a correcção das tarefas seja sempre acompanhada de um comentário do professor que procure alertar para os aspectos que o aluno pode melhorar. Esta discussão acabou por convergir no objectivo das tarefas que se preparam e se propõem aos alunos.

> Sebastião: Nós temos o caso de alunos que conseguem interpretar o problema, mas depois não resolvem nada. Eles não sabem que estratégia usar para resolver o problema!
>
> Simão: Nós temos grelhas até relativamente simples, mas nós não damos feedback aos alunos como deve ser!
>
> Sebastião: Acho que nós podíamos melhorar! Se pedirmos para eles justificarem as suas respostas e nós fizermos comentários, os alunos começam a perceber onde é que podem melhorar. Nós muitas vezes nestas tarefas só damos a avaliação global, não especificamos onde é que eles tiveram melhor desempenho e o que pode ser melhorado. [ST 5]

A análise das respostas dos alunos e da grelha de classificação da tarefa faz emergir uma reflexão sobre a forma como os professores desenvolvem a avaliação das aprendizagens dos alunos. Como resultado, o grupo reconhece que pode fazer melhor, nomeadamente na qualidade do feedback que dá aos alunos sobre as suas produções, revelando capacidade de reflectir e questionar sobre as práticas. A percepção é corroborada reforçada com um episódio que Simão conta:

> Um aluno meu do 12.º ano chegou ao pé de mim quase em lágrimas e disse, *Professor, nunca ninguém me tinha dado os parabéns pelo meu trabalho!* Eu fiquei a pensar como é que estas pequenas palavras podem ter um efeito tão motivador num aluno. [ST 7]

Das sessões de trabalho há indicadores que revelam que os professores têm a preocupação de perceber como é que podem ajudar os alunos a alcançar melhores aprendizagens. Neste sentido, não hesitam em reconhecer que têm lacunas e que podem melhorar as suas práticas. Em particular, percebe-se que identificam a capacidade de resolução de problemas como uma dificuldade pelos alunos na realização de tarefas de natureza mais aberta, como por exemplo, *O Talude*.

Outra reflexão que emergiu centrou-se na realização de tarefas em duas fases. Da primeira para a segunda fase, os professores devolvem aos alunos as suas produções com feedback escrito e, numa segunda fase, os alunos têm oportunidade para reflectir e melhorar os seus trabalhos. Esta estratégia tem permitido ajudar os alunos a melhorar o seu desempenho:

> Filomena: Eu acho que já se nota alguma mudança nos alunos com a realização destas tarefas. Na primeira vez que fiz *O Talude* tive que ler com eles e explicar o que era um talude. Da segunda vez eles leram sozinhos e começaram logo a fazer.
>
> Sebastião: Também pode haver outros factores externos. Sabes que os miúdos comentam entre si os resultados que obtiveram.
>
> Filomena: Mas mais importante, parece-me a mim, tem sido a periodicidade com que nós lhes propomos este tipo de tarefas. Eles começam a perceber o que se espera que eles façam. Já não ficam parados a olhar para mim como antes!
>
> Simão: Isso sim! Também concordo! [ST 8]

As palavras de Filomena salientam a importância de haver continuidade na realização de tarefas de natureza mais aberta. Por outro lado, ela destaca a concepção que a cultura de sala de aula exige tempo e continuidade para que se estabeleça e se torna natural. Este é um processo que requer aprendizagem por parte do professor e dos alunos. Esta análise é também partilhada por Simão.

Conclusão

Na gestão do currículo o grupo procura utilizar diversos materiais curriculares. As tarefas ocupam um papel central em todo este processo e marcam a natureza das propostas de trabalho que os professores propõem aos seus alunos. Na planificação do seu trabalho os professores começam por tirar partido do manual escolar, uma vez que é um recurso que todos os alunos têm. Nestes encontram sobretudo, propostas de exercícios e problemas. Para além das tarefas do manual, constroem outras de natureza mais aberta, procurando diversificar as tarefas que lhes permite desenvolver um processo de ensino-aprendizagem de acordo com as orientações curriculares oficiais. Igualmente com as tarefas mais abertas, procuram promover outras capacidades, nomeadamente o raciocínio e a comunicação matemática, e diagnosticar as dificuldades e aprendizagens dos alunos. Numa primeira fase, os professores construíram as tarefas e discutiram possíveis estratégias para a sua realização em sala de aula. Numa segunda fase, os professores procuraram olhar para as produções dos alunos e reflectir sobre o modo como os alunos se envolveram na realização da tarefa, salientando as dificuldades e a forma como ajudaram os alunos a superar as suas dificuldades.

O trabalho do grupo tem como ponto de partida os objectivos definidos para o ensino da Matemática. Neste sentido, as sessões de trabalho organizam-se em torno da discussão de temas como, as orientações curriculares para o ensino da Matemática, as tarefas, os materiais curriculares, análise e

classificação das produções dos alunos, balanço dos resultados dos alunos na avaliação interna, estratégias de ensino-aprendizagem, dificuldades que emergem das práticas, entre outros. Igualmente importante, são os momentos de partilha de experiências de sala de aula, que permitem reflectir sobre a prática e a aprendizagem dos alunos (Schön, 1993; Sowder, 2007). O ambiente de trabalho evidencia as boas relações pessoais que existem no departamento. É possível perceber que há elementos mais integrados do que outros, mas também que o ambiente reflecte uma postura de partilha e acolhimento. Há espaço para troca de ideias, sugestões, críticas e reflexão sobre as experiências individuais vividas em anos anteriores. No contexto de trabalho em subgrupos, os professores vão trocando ideias sobre as actividades que fizeram em anos anteriores, reflectindo sobre a potencialidade da sua utilização nas suas turmas, adaptando-as e ajudando-se uns aos outros (Hargreaves, 1998). A cultura do grupo e de trabalho colaborativo parece ajudar no processo de socialização dos novos elementos, ao mesmo tempo que fomenta um clima de confiança propício à partilha de experiências e dificuldades, elementos essenciais para a construção da identidade profissional e ao desenvolvimento profissional do professor (Ponte & Chapman, 2008).

Finalmente, a cultura de trabalho colaborativo e o desenvolvimento dos projectos constituem elementos essenciais para os professores aceitar desafios, experimentarem práticas inovadoras, partilharem experiências e com isso desenvolver o seu conhecimento e identidade profissional. Esta é uma cultura que define uma estratégia fundamental para o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem de qualidade visando o sucesso das aprendizagens dos alunos em Matemática.

Referências bibliográficas

Boavida, A. Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Dubar, C. (2002). *La crisis de las identidades:La interpretatión de una mutatíon*. Barcelona: Bellaterra.

Gimeno, J. (1989). *El curriculum: Una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança*. Lisboa: Mc Graw-Hill.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Ed.) *O professor de Matemática e os projectos de escola* (pp. 11-37). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. D. English. *Handbook of International Research in Mathematics Education,* (pp. 223-261). NY: Routledge.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sowder, S. (2007). The Mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. I, pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* Aldershot Hants, NY: Avebury.

JOGOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE PROBABILIDADES: PERCEPÇÕES DE PROFESSORAS SOBRE MUDANÇAS EM SUAS PRÁTICAS

José Marcos Lopes
Universidade Estadual Paulista – UNESP –São Paulo - Brasil
jmlopes@mat.feis.unesp.br

Inocêncio Fernandes Bailieiro Filho
Universidade Estadual Paulista – UNESP –São Paulo - Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br

Resumo

Apresentamos neste trabalho os resultados da aplicação de uma proposta didático-pedagógica para o Ensino Médio, que teve como ponto de partida para a construção dos conceitos básicos de probabilidade uma situação de jogo associada à resolução de problemas. Trata-se de uma pesquisa de intervenção na prática escolar com base na pesquisa-ação colaborativa. A proposta de ensino foi aplicada por três professoras em quatro salas do segundo ano do Ensino Médio[1] de uma escola pública de uma cidade do interior do Estado de São Paulo, Brasil. O objetivo da pesquisa foi investigar as percepções das professoras de Ensino Médio, sobre mudanças ocorridas em suas práticas na sala de aula e também discutir o ensino e a aprendizagem de Probabilidade por meio de jogos e resolução de problemas.

Palavras-chave: probabilidade, ensino e aprendizagem, resolução de problemas, jogos.

Introdução

A Probabilidade, além de servir de base teórica para outras ciências, como por exemplo, à Estatística, é essencial para a formação dos estudantes, visto que o acaso e os fenômenos aleatórios impregnam nossas vidas e nossa sociedade. A previsão do tempo, um diagnóstico médico, um estudo sobre a possibildade de contratar um seguro de vida, são exemplos em que a probabilidade não é uma propriedade física tangível, mas um grau de percepção ou crença que a pessoa tem na possibilidade de ocorrência ou não daquele evento (Batanero, 2006). Tais exemplos fornecem uma gama de problemas que podem ser trabalhados em sala de aula.

Porém, muitas vezes, os professores de Matemática não conseguem perceber a diferença entre problema e exercício. Consideramos problema qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas (Van de

[1] No Brasil, o *Ensino Fundamental* tem duração de nove anos e é destinado a alunos de 6 a 14 anos. O *Ensino Médio* tem duração de três anos e é destinado a alunos de 15 a 17 anos.

Walle, 2001).

Existem várias concepções sobre a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Utilizamos neste trabalho aquela que julgamos ser a mais coerente com as orientações preconizadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais[2] (PCN) - Brasil (2000), ou seja, usamos o problema para ensinar Matemática. A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Em termos metodológicos, os conceitos, as ideias e os métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de situações-problemas nas quais os alunos tenham que desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. A situação-problema deve expressar aspectos chaves para o conceito que se quer estudar e o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada e utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas.

No Ensino Médio, os conteúdos de probabilidades são considerados difíceis e, por isso, é conveniente que busquemos propostas que possam apresentar esse tema de forma lúdica (Corbalán, 2002). Assim, uma das contribuições de nossa proposta é oferecer um jogo original, que associado à resolução de problemas possa ser utilizado na construção efetiva de todos os conceitos básicos de Probabilidade.

O Jogo

O jogo proposto utiliza dois dados e é disputado por dois jogadores, por exemplo, João e Maria. São considerados lances vencedores:

(4; 1) ou (1; 4) vale 1 ponto;	(4; 2) ou (2; 4) vale 2 pontos;
(4; 3) ou (3; 4) vale 3 pontos;	(4; 4) vale 4 pontos;
(4; 5) ou (5; 4) vale 5 pontos;	(4; 6) ou (6; 4) vale 6 pontos.

O jogador poderá não marcar pontos ou ter pontuação zero. Tal fato ocorre se nos seus dois possíveis lançamentos ele não conseguir obter alguma face 4. Cada jogador poderá efetuar até dois lançamentos. Se não conseguir alguma face 4 no primeiro lançamento, efetua o segundo lançamento com os dois dados. Se conseguir pelo menos uma face 4 no primeiro lançamento, reserva esse dado e decide se lança ou não o outro dado mais

[2] O documento *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*, elaborado pelo Ministério da Educação, apresenta diretrizes para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental (para alunos dos 7 aos 14 anos) .

uma vez. Vence o jogo quem obtiver a maior pontuação. Caso os dois jogadores obtenham a mesma pontuação, tal procedimento é repetido.

Comentários sobre o jogo.

O jogo proposto foi inpirado em *Game of Kasje* (Schuh, 1968). Para ilustrar o desenvolvimento do jogo, suponha que, numa partida, primeiramente, João efetue um ou dois lançamentos e que, posteriormente, seja a vez de Maria efetuar o seu jogo. Maria está numa posição melhor de decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento, já que conhece a pontuação obtida por João. Para tornar o jogo mais justo, deve existir uma alternância entre João e Maria como primeiro jogador.

Estamos supondo para este jogo a utilização de dados com faces equiprováveis. Se João conseguiu (4; 1) ou (1; 4), ou seja, 1 ponto no primeiro lançamento, então ele deverá lançar o segundo dado mais uma vez, pois não é possível diminuir sua pontuação. Agora, se João obteve 3 pontos, (4; 3) ou (3; 4) no seu primeiro lançamento, e decidir lançar o segundo dado mais uma vez, então ele terá uma chance em 6 de permanecer com a mesma pontuação (ou seja, obter a face 3 no lançamento do segundo dado), duas chances em 6 de piorar sua pontuação (ou seja, obter a face 1 ou a face 2 no lançamento do segundo dado) e três chances em 6 (obter as faces 4, 5 ou 6) de melhorar sua pontuação. Desse modo, temos as seguintes estratégias:

*Estratégia de João***:** Aproveita seu segundo lançamento se e somente se obteve pontuação menor ou igual a 3 no primeiro lançamento.

A estratégia de Maria deve ser diferente, tendo em vista que, quando da realização do seu jogo, ela já sabe a pontuação obtida por João.

Estratégia de Maria: Se obtém uma pontuação maior do que João já no seu primeiro lançamento, então o jogo termina com a vitória de Maria. Se obtém uma pontuação menor do que João no seu primeiro lançamento então ela utilizará o seu segundo lançamento. Se empata com João em seu primeiro lançamento, então ela usará o seu segundo lançamento se João obteve 3 pontos ou menos.

Podemos mostrar utilizando as duas estratégias acima estabelecidas que as probabilidades de Maria são: 36,25 % para ganhar; 35,60 % para perder e 28,15 % para empatar o jogo. Assim, concluímos que a probabilidade de Maria vencer o jogo é um

pouco maior do que a de perder.

A pesquisa-ação colaborativa como alternativa metodológica

Na presente pesquisa as professoras participaram de um processo simultâneo de aprender e ensinar Probabilidade. Na pesquisa-ação, o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo, para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes (Pereira, 1998 citado por Fiorentini, 2004).

O que levou as professoras a participar do projeto colaborativo foram, sobretudo, a possibilidade de aprofundar seus conhecimentos sobre os conceitos de Probabilidade e a possibilidade de melhorar suas práticas pedagógicas.

Como nosso propósito era a transformação da prática pedagógica das professoras e a melhoria da aprendizagem em conteúdos de Probabilidade, optamos pelo desenvolvimento de uma pesquisa-ação colaborativa que visa "criar uma cultura de análise das práticas nas escolas, tendo em vista suas transformações pelos professores, com a colaboração dos professores universitários" (Pimenta, Garrido, & Moura, 2001 citado por Fiorentini, 2004, p. 70).

O eixo central da pesquisa foi a prática pedagógica para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio, e o principal objetivo da pesquisa foi o estudo das percepções dessas professoras sobre a transformação ou não de suas práticas e saberes para o ensino de Probabilidade, utilizando-se uma situação de jogo associada à resolução de problemas.

Metodologia

Os sujeitos desta investigação são três professoras efetivas da rede estadual de ensino, responsáveis por turmas do segundo ano do Ensino Médio, de uma cidade do noroeste do Estado de São Paulo - Brasil.

Os dados foram coletados ao longo de dois anos, durante encontros, com a aplicação de dois questionários, por meio de depoimentos escritos, diário de campo e entrevistas individuais. Foram realizados oito encontros em 2007 e nove em 2008. Todos os encontros foram realizados na escola, aos sábados pela manhã.

Em maio de 2007, aplicamos um questionário que contemplou, na primeira parte, questões relacionadas à formação acadêmica e ao tempo de magistério das professoras

e, na segunda parte, questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Probabilidade. Nosso interesse principal era saber se as professoras já haviam trabalhado com jogos e resolução de problemas para o ensino de Probabilidade. Reaplicamos a segunda parte deste mesmo questionário em dezembro de 2007.

A proposta didático-pedagógica foi aplicada, em sala de aula, pelas próprias professoras, em suas turmas, no ano letivo de 2008. Durante a aplicação da proposta, mantivemos e intensificamos nossos encontros com as professoras como forma de avaliação e replanejamento de ações.

Realizamos, em dezembro de 2008, uma entrevista semi-estruturada com cada uma das professoras. A primeira parte da entrevista teve por objetivo compreender qual a concepção atual das professoras sobre a Resolução de Problemas e o uso de Jogos para o ensino de Matemática e, na segunda parte, foram tratadas questões que estavam diretamente relacionadas com a aplicação, em sala de aula, da proposta didático-pedagógica.

Os dados foram analisados sob a perspectiva da investigação narrativa. A narrativa é o uso da história/relato como método de investigação. É "uma história produzida deliberadamente, com um propósito muito particular" (Ponte, 1998 citado por Nacarato, 2000, p. 42).

Ações desenvolvidas com as professoras

Buscamos promover uma reflexão por parte das professoras sobre as formas de ensino e as principais dificuldades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade no Ensino Médio. Nesse sentido, as professoras foram orientadas a refletir sobre suas próprias práticas, identificando e diagnosticando problemas que nela ocorrem e se dispondo a intervir em tais situações utilizando metodologias apropriadas, tornando-se, desse modo, investigadoras de sua própria prática.

Num primeiro momento, trabalhamos com as professoras os conteúdos de Probabilidade, com o objetivo de superar possíveis dificuldades e deficiências sobre o tema. Num segundo momento, realizamos um estudo e discussão de alguns textos específicos sobre a utilização de jogos e da resolução de problemas com o intuito de destacar as várias interpretações dessas metodologias, e também as atuais orientações dos PCN, para o ensino de Probabilidade. Num terceiro momento, aproveitando a experiência e a vivência das professoras, discutimos e preparamos o material didático

que seria utilizado em sala de aula.

Aplicação da proposta didático-pedagógica em sala de aula

Nossa proposta de ensino foi aplicada, em sala de aula no terceiro bimestre de 2008, já que, naquele momento, as professoras estavam mais seguras quanto aos conteúdos que deveriam trabalhar nas suas turmas. O desenvolvimento das atividades em sala de aula foi de responsabilidade das professoras titulares de cada turma. As professoras iniciaram a aplicação da proposta de ensino com a realização do jogo.

Os alunos foram divididos em duplas e foi estipulado que realizassem algumas partidas do jogo. Cada dupla recebeu dois dados e uma caneca. Foi solicitado aos alunos que anotassem os resultados de cada partida para verificar jogadas erradas e procurar determinar a melhor estratégia para se conseguir a vitória no jogo. Após o trabalho com o jogo, que demandou praticamente uma aula de 50 minutos, as professoras fizeram os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

O segundo jogador possui maior possibilidade de vencer o jogo?

Inicialmente, os alunos responderam a esses questionamentos pela intuição e pela experiência das partidas jogadas. No final dos trabalhos, após a resolução dos problemas propostos e do estudo dos conceitos probabilísticos, esperava-se que os alunos fossem capazes de justificar matematicamente os questionamentos feitos.

Na sequência, as professoras iniciaram a fase de resolução dos problemas. Foi permitido que os alunos continuassem com os dados para, eventualmente, justificar alguma ação sobre o jogo. Como exemplo, citamos um dos problemas que foram utilizados para a sistematização dos conceitos de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento.

Problema. Considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados, João terá maior chance em conseguir 1 ponto ou 6 pontos? Justificar sua resposta.

Para o estudo de cada conteúdo probabilístico, dois ou três problemas envolvendo situações do jogo deveriam ser resolvidos pelos próprios alunos (em grupo) usando de sua própria linguagem. Após a resolução dos problemas pelos grupos, uma pequena plenária deveria discutir soluções certas e erradas e, na sequência, o professor responsável pela sala faria a sistematização do conceito estudado. Posteriormente, outros exercícios e problemas envolvendo situações do jogo ou não também deveriam

ser propostos aos alunos.

Outros conteúdos de Probabilidade foram trabalhados da mesma forma. As professoras usaram por volta de 30 horas-aula para desenvolver todos os conceitos básicos de Probabilidade.

Aspectos e análise do trabalho desenvolvido

Ao longo deste processo de pesquisa-ação foi possível perceber o interesse e o entusiasmo das professoras, por procurarem melhorar seus conhecimentos em Probabilidade e trabalhar com novas metodologias de ensino.

Em um dos encontros realizados, foi solicitado que as professoras relatassem por escrito o(s) motivo(s) que as levaram a participar deste trabalho colaborativo. A professora A respondeu: "*melhorar a prática de ensino, buscando novos conhecimentos para poder enriquecer o conteúdo em questão*". A professora B respondeu: "*melhorar o conhecimento sobre Probabilidade e principalmente adquirir uma nova metodologia de como ensinar*". Já para a professora C foi: "*a necessidade de aperfeiçoamento no tema proposto, buscando novas estratégias, para melhorar o trabalho com os alunos [...] ter a oportunidade de estar discutindo e trabalhando em um grupo restrito um tema bastante complexo e gerador de muitas dúvidas*".

As respostas das professoras contemplam alguns dos principais objetivos de uma pesquisa-ação, como a melhoria da prática pedagógica, a melhoria das condições de trabalho e o desenvolvimento de um grupo reflexivo na escola. Percebemos também as dificuldades conceituais (matemáticas) em Probabilidade, "*um tema bastante complexo*" (Professora C) e "*melhorar o conhecimento sobre Probabilidade*" (Professora B).

Da aplicação do primeiro questionário no início de 2007, destacamos que as professoras consideravam Probabilidade um assunto de difícil compreensão até mesmo para o professor. A professora B nunca havia utilizado a resolução de problemas para o ensino de Probabilidade. A professora A respondeu: "*passei a parte do conteúdo, explicando e utilizando as fórmulas na resolução de problemas e exercícios*" e a professora C mencionou: "*foi fornecida situações-problema que, em dupla, os alunos buscavam encontrar soluções para as mesmas*". Fica claro que as professoras, naquele momento, não tinham, uma compreensão clara de como usar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

Sobre o uso de jogos como estratégia de apoio ao processo de ensino e aprendizagem, a professora B respondeu que não havia utilizado e a professora C mencionou: "*utilizei dados e moedas*". Até aquele momento, as professoras não tinham, pelo menos a nosso ver, utilizado o jogo como um elemento desencadeador da construção de conceitos matemáticos, isto é, usado o jogo para ensinar Matemática.

Para o ensino dos conteúdos de Probabilidade as professoras utilizavam aulas expositivas com forte apoio do livro didático escolhido pela escola. Assim, adotavam uma abordagem de ensino tradicional, com a apresentação da teoria (fórmulas) e posteriormente a resolução de exercícios.

Quando reaplicamos o questionário em dezembro de 2007, observamos nas professoras um desenvolvimento significativo em suas compreensões sobre resolução de problemas e uso de jogos para o ensino de Matemática.

No final do ano de 2008, realizamos uma entrevista semi-estruturada e individual, áudio gravada, com o intuito de avaliar e refletir sobre o trabalho desenvolvido. Apresentamos a seguir, alguns recortes dessas entrevistas, procurando identificar e analisar as percepções das professoras, a transformação ou não de suas práticas em sala de aula e os saberes adquiridos com o ensino de Probabilidade através do uso de uma situação de jogo associada à resolução de problemas.

As três professoras mencionaram que não haviam estudado probabilidade nem na formação básica, nem em seus cursos de graduação. Uma delas é licenciada em Matemática e as outras duas são licenciadas em Ciências, com habilitação em Matemática.

Quando indagadas sobre o que é um problema de matemática, responderam: "*é aquele que exige leitura, raciocínio, desenvolvimento e estratégia*" (Professora A); "*é um desafio, porque a pessoa tem que se deparar com uma situação nova e dessa situação ela tem que arrumar uma estratégia de resolução*" (Professora B), e "*é algo que o aluno tem que refletir, buscar uma solução e movimentar as estruturas dele, buscar informações que ele já tinha*" (Professora C).

Podemos inferir que as professoras compreendem as diferenças entre problemas e exercícios, o que consideramos como o primeiro requisito para a utilização da resolução de problemas como uma metodologia de ensino, ou seja, usar o problema para se ensinar matemática.

As professoras reconhecem a importância da utilização da resolução de problemas em suas aulas, entretanto reconhecem a pouca disponibilidade de material e a dificuldade de usar esta metodologia para todos os conteúdos de Matemática do Ensino Médio.

Dos depoimentos das professoras, percebemos que ocorreu uma mudança em suas práticas de ensino, em particular, no conteúdo Probabilidade. Quando questionadas como ensinavam esse conteúdo antes da aplicação da nossa proposta, responderam: "*eu pegava o livro e já ia direto na fórmula*" (Professora A). "*Eu nunca tinha começado um trabalho com jogos, [...] o que eu achei mais interessante, mesmo depois do jogo, foi relacionar todos os problemas com o jogo, porque os livros não fazem isso*" (Professora B) e "*eu só tinha trabalhado uma vez [...] pelo livro didático [...] não cheguei ao final*" (Professora C).

Sobre as possibilidades didático-pedagógicas de ensino e aprendizagem de Probabilidade via Jogos e Resolução de Problemas no contexto da pesquisa desenvolvida, a Professora A mencionou que: "*se nós pudéssemos transformar todas as matérias de Matemática em jogos eles (os alunos) aprenderiam melhor, mas infelizmente existe pouco material disponível*".

Na fala a seguir, a professora C descreve, em conformidade com o exposto em Saraiva e Ponte (2003) algumas das principais dificuldades para uma mudança de postura na prática pedagógica, a saber, a formação docente e a decisão de mudar. "*Eu sempre tive esta noção de que o ideal seria isto, o que acontece é que a gente tem um pouco de dificuldade porque na nossa formação nós não trabalhamos assim, tanto durante a época de estudante também a gente não tinha isto aí, então não foi desenvolvido [...] a gente carrega um pouco do que trazemos de ter tudo automatizado, aquela repetição*" (Professora C).

A insegurança pessoal do professor é um dos obstáculos para a mudança. O professor, na maioria das vezes, trabalha com uma determinada orientação curricular, sentindo-se seguro para resolver qualquer problema que possa surgir. Assim, é natural que tenha relutância e receio em abandonar a sua base de segurança (Saraiva & Ponte, 2003).

Como pontos negativos destacamos que uma aluna, por questões religiosas, se negou a participar do jogo. A Professora A, das turmas do noturno, destacou ser difícil trabalhar com muitos alunos nesse tipo de atividade.

A professora A observou como ponto positivo uma mudança no interesse dos alunos.

Uma de suas alunas declarou: "*eu gostei muito, aprendi como nunca havia aprendido Matemática, achei fácil e muito interessante*". Segundo a professora, "*essa aluna tinha dependência nessa disciplina e havia parado de estudar por quatro anos. Durante as aulas se interessou muito pelo jogo, demonstrou liderança entre seus colegas e conseguiu excelente nota na prova de Probabilidade*".

A professora B destacou como pontos positivos que os alunos gostaram de jogar, tiveram boa participação nas aulas e que com a aplicação da proposta "*os alunos caminham numa 'boa', você vai passo a passo*". Também destacou a importância de reuniões com o grupo de professores de Matemática da escola, pela troca de experiências e de aprendizagens e pela possibilidade de produção de novos saberes docentes.

O desenvolvimento dessa proposta didático-pedagógica possibilitou às professoras a produção de novos saberes em Probabilidade. A Professora A mencionou que: "*eu aprendi mais. Eu tenho mais facilidade hoje, mais domínio para trabalhar com eles (os alunos*". Para a Professora B: "*esse projeto (trabalho colaborativo) é excelente, me ajudou muito, eu amadureci*". A Professora C considera que o desenvolvimento do trabalho colaborativo possibilitou uma evolução em seu desempenho profissional: "*ajudou mais um pouco, e eu principalmente que não tinha muito contato com o conteúdo [...] eu evolui, dei um passo à frente"* (Professora C).

Considerações finais

Mediante os dados obtidos, podemos destacar cinco pontos: 1. As professoras concluíram que aprofundaram seus conhecimentos nos conceitos sobre Probabilidade; 2. As professoras perceberam que a falta de conhecimento de conteúdo é um fator que dificulta mudanças em suas práticas; 3. O apóio dado às professoras, através da pesquisa colaborativa contribuiu para o uso de novas metodologias de ensino; 4. Com o trabalho colaborativo as professoras passaram a ter uma visão crítica do material didático fornecido pelo Governo Estadual e também dos livros didáticos; 5. As professoras iniciaram um processo de troca de experiências com outros professores(as) de Matemática da escola.A partir dos depoimentos das professoras, acreditamos que o desenvolvimento da presente pesquisa produziu novos conhecimentos e compreensões sobre as possibilidades didático-pedagógicas de ensino e de aprendizagem de

Probabilidade via Jogos e Resolução de Problemas. Essas professoras puderam trabalhar com a Resolução de Problemas e com Jogos, dois instrumentos recomendados pelos PCN para o ensino de Matemática, mas que, infelizmente, ainda são pouco utilizados, sobretudo no Ensino Médio.

Ao analisar as concepções e as posturas didático-pedagógicas adotadas, pudemos observar um aumento de confiança e um maior domínio dos conteúdos de Probabilidade, que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento profissional de cada professora. De fato, houve vontade e pré-disposição dessas professoras para inovar e oferecer aos seus alunos um ensino mais significativo e prazeroso.

Referências bibliográficas

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico em la vida cotidiana: um desafio educativo. In P. Flores, & J. Lupiáñez (Ed.), *Investigación em el aula de matemática. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Brasil. (2000). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática* (2ª ed.). Rio de Janeiro: DP&A.

Corbalán, F. (2002). Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Madrid: Síntesis.

Fiorentini. D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In M. C. Borba, & J. L. Araujo (Ed.), *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (pp. 47-76). Belo Horizonte: Autêntica.

Nacarato, A. M. (2000). Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: Currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando geometria. Campinas, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Tese (Doutorado em Educação Matemática).

Saraiva, M., & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Quadrante*, Lisboa, *12*(2), 25-52.

Schuh, F. (1968). *The master book of mathematical recreations*. New York: Dover Publications, Inc.

Van de Walle, J. A. (2001). Elementary and middle school mathematics. New York: Longman.

A COMPREENSÃO DOS RESULTADOS DA PROVA BRASIL DE MATEMÁTICA PARA O 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E IMPLICAÇÕES PARA SALA DE AULA: A CONTRIBUIÇÃO DE UM GRUPO COLABORATIVO

Edda Curi
Cintia Ap. Bento dos Santos
Universidade Cruzeiro do Sul
edda.curi@cruzeirodosul.edu.br

Cintia Ap. Bento dos Santos
Universidade Cruzeiro do Sul
cintia.santos@cruzeirodosul.edu.br

Resumo

Esta comunicação tem como finalidade provocar uma discussão sobre os possíveis usos de resultados de uma avaliação externa em Matemática para alunos de 5º ano do Ensino Fundamental, denominada Prova Brasil, por um grupo de pesquisadores constituído de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, alunos de Curso de Pedagogia e professores universitários. O grupo se reúne a cada quinze dias e pode ser considerado colaborativo que vem construindo sua identidade na tentativa de solucionar coletivamente problemas de aprendizagem de Matemática de seus alunos apontados na referida avaliação externa. Em todas as reuniões são feitas atas com as memórias do grupo por um pesquisador e os participantes fazem um caderno de registro com suas observações. Esses instrumentos são usados para coleta de dados para pesquisa. O conteúdo matemático escolhido para esse texto é o Sistema de Numeração Decimal. Entre os resultados, se destacam que quando professores se sentem mais participativos nos processos de avaliação externa, compreendem seus objetivos e analisam seus resultados procuram incorporar os dados da avaliação em sua prática e ampliam sua visão sobre a aprendizagem de seus alunos e sobre o ensino de matemática.

Palavras chave: Prova Brasil, Grupo Colaborativo, Sistema de Numeração Decimal.

Introdução

Esta comunicação tem como finalidade fomentar uma reflexão sobre os possíveis usos de uma avaliação externa em Matemática para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental por um grupo colaborativo, buscando a melhoria das aprendizagens de seus alunos e seu desenvolvimento profissional. Está inserida numa pesquisa longitudinal denominada PROVA BRASIL DE MATEMÁTICA: REVELAÇÕES E POSSIBILIDADES DE AVANÇOS NOS SABERES DE ALUNOS DE 5º ANO E INDICATIVOS PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES[1] no âmbito do Programa Observatório da Educação, CAPES/INEP. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, organizou-se um grupo de

[1] Maiores detalhes sobre o projeto podem ser verificados em Curi (2010).

pesquisadores composto por três pesquisadores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, sob a coordenação da professora Doutora Edda Curi, um estudante de doutorado e três estudantes do mestrado profissional do Programa já citado, seis estudantes de graduação do Curso de Pedagogia da Universidade e seis professoras que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental em escolas da rede pública de São Paulo. Os trabalhos desse grupo estão em fase inicial e para esta comunicação discutiremos os primeiros resultados da pesquisa.

São fontes de dados para a pesquisa os cadernos de registros das professoras e das atas de memórias do grupo. Em todas as reuniões os participantes do grupo, individualmente, fazem anotações num caderno de registros. As discussões sobre os resultados da Prova Brasil das escolas envolvidas, os erros dos alunos, as principais reflexões, a participação no grupo de pesquisa fazem parte dos registros desses cadernos. Além disso, uma pesquisadora da Universidade faz as atas de memória do grupo que são construídas ao longo dos encontros do grupo com pautas das reuniões, indicações de leitura, slides das sínteses teóricas, relatos dos integrantes do grupo, instrumentos usados nas pesquisas realizadas tanto com as professoras como com os alunos, perfis das escolas envolvidas incluindo os relatórios detalhados dos resultados da Prova Brasil de Matemática.

Como o grupo de pesquisa discute os resultados de uma avaliação externa de âmbito nacional, apresenta-se a seguir alguns comentários sobre esse tipo de avaliação.

Alguns comentários sobre avaliações externas

As avaliações externas fazem parte da rotina das escolas brasileiras, porém as discussões sobre os resultados precisam ainda de reflexão. Os objetivos das avaliações externas de âmbito nacional são de subsidiar o sistema com dados e informações sobre alunos, professores e gestão e as escolas com os níveis de proficiência dos alunos em Língua Portuguesa e Matemática.

No que se refere ao ensino de Matemática, as informações divulgadas sobre os resultados dos alunos brasileiros indicam que, de modo geral, o desempenho dos estudantes está abaixo da média esperada. Mas, há poucos estudos acadêmicos sobre os resultados de avaliações externas. Além disso, são pouco incorporados na prática escolar. Uma das hipóteses da não incorporação dos resultados por parte dos professores

é que eles se considerarem alijados do processo. Outra hipótese é a não utilização desses dados por parte de gestores para formulação de políticas que possibilitem a melhoria da qualidade do ensino.

Além de demorarem a chegar às escolas, a linguagem dos relatórios dessas avaliações nem sempre são acessíveis aos professores. Como Guerra (2007) e Freitas (2003) consideramos importante o acesso dos professores a esses relatórios para analisar os resultados de seus alunos e atribuir-lhes significados dentro da prática docente. Uma avaliação externa só tem utilidade se a escola se apropriar de seus resultados e se produzir informações que possibilitem modificações de processos escolares específicos.

Os dados que foram analisados pelo grupo de pesquisa são os da Prova Brasil de Matemática de 5º ano do Ensino Fundamental, por esse motivo apresentamos a seguir alguns esclarecimentos sobre essa prova que pertence ao Sistema de Avaliação da Educação Básica proposto pelo Ministério de Educação e Cultura – MEC.

Alguns esclarecimentos sobre a Prova Brasil

O Sistema de Avaliação da Educação Básica é composto por dois processos de avaliação: a Avaliação Nacional da Educação Básica – ANEB, que é feita por amostra e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – ANRESC, que é censitária, denominada Prova Brasil. Ambas se complementam e destacam o perfil e proficiência em Língua Portuguesa e Matemática dos alunos e das escolas brasileiras.

Com base em Horta Neto (2010) é possível inferir que a Prova Brasil é um misto de avaliação normativa e avaliação criterial. Quanto à avaliação normativa, o juízo de valor está baseado na comparação entre unidades de análise utilizadas (indivíduos ou instituições). É considerado normativo numa referência à curva normal da estatística, é relativo à classificação do indivíduo em relação aos demais. Quando a comparação é realizada a partir de referências definidas previamente, o autor afirma que o juízo de valor se refere a critério. Ao estabelecer níveis diferentes de aprendizagem que se esperam de cada aluno, é construída uma escala que contenha esses níveis, apontando o que se espera do aluno em cada um deles, denominada de escala de níveis de proficiência.

O relatório com resultados das avaliações nacionais é produzido com base nessa escala, porém a linguagem nem sempre é clara para o professor, os níveis de proficiência são

apresentados de forma simplificada, muitas vezes sem exemplos, o que oferece poucos elementos para discussão sobre possibilidades da melhoria das aprendizagens.

Constituição do Grupo Colaborativo

O grupo de pesquisa abriga atores de vários segmentos educacionais que se propuseram a realizar um trabalho coletivo; envolve experiências diferenciadas e trajetórias profissionais e acadêmicas diversas, o que pode revelar diferentes fluxos do trabalho coletivo. Reúne-se a cada quinze dias nas dependências da Universidade Cruzeiro do Sul e pode ser caracterizado como um grupo colaborativo, pois congrega as características descritas por Fiorentini (2004) para o trabalho colaborativo.

O autor aponta a importância das "diferentes modalidades ou sentidos de trabalho coletivo", destacando "aspectos característicos e constitutivos do trabalho colaborativo" como a "voluntariedade, identidade e espontaneidade" dos seus participantes, assim como a "liderança compartilhada ou co-responsabilidade" e o "apoio e respeito mútuo" que se estabelece.

O grupo vem construindo sua identidade na tentativa de solucionar coletivamente problemas de aprendizagem matemática dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental apontados nos resultados da Prova Brasil de Matemática, numa perspectiva de sistematização dos conhecimentos produzidos pela experiência do grupo.

De acordo com Boa Vida e Ponte (2002), a pesquisa colaborativa constitui uma estratégia na tentativa de solucionar problemas complexos, os quais são difíceis de serem enfrentados pelos professores individualmente. A pesquisa colaborativa entre pesquisador(es) e professor(es), segundo Boavida e Ponte (2002) envolve sempre uma negociação que leva a decisões conjuntas promovendo o diálogo profissional.

O processo de consolidação da parceria entre os elementos do grupo de pesquisa numa perspectiva colaborativa baseou-se, fundamentalmente, em ouvir a prática das professoras, seus saberes experienciais, suas dificuldades pedagógicas por meio da reflexividade.

O professor constrói saberes na sua prática, que conforme Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999) são "saberes experienciais ligados à ação, mesclando aspectos cognitivos, éticos e emocionais ou afetivos" (Ibid, p.55). Segundo esses autores, os saberes experienciais

são dinâmicos e provisórios. Tardif e Borges (2001) destacam ainda que os saberes experienciais articulam iniciativas dos docentes nos contextos próprios e sempre expressam um "saber-fazer" e um "saber-ser" nas condições da prática.

Nos primeiros encontros, as professoras, de maneira geral, mostravam-se insatisfeitas com a profissão, relatavam que eram cobradas pelos resultados das avaliações, mas que nem sabiam o que se avalia e qual o objetivo das avaliações externas.

Essa insatisfação foi diminuindo ao longo do trabalho; as professoras mostravam-se ansiosas para iniciar discussões "de sala de aula" como se referiam e foram se tornando mais confiantes e colaborativas à medida que assuntos da prática eram colocados, se expondo mais e confiando na socialização e nas propostas das colegas e dos pesquisadores.

A experiência de constituição desse grupo de pesquisa mostrou-se extremamente satisfatória para os seus participantes, que valorizam os encontros, a troca de experiências, a socialização de idéias, a escuta do outro, o estudo e a construção de novos saberes. A proposta de realização de atividades com os alunos partia sempre das professoras. Os alunos de graduação estavam ansiosos por esse momento que possibilitava o acompanhamento da prática.

Pode-se entender que houve a construção de saberes experienciais na concepção de Tardif (2002) e Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999), nos encontros e nas vivências colaborativas: ouvir, falar, analisar a prática pedagógica, compreender e construir novas práticas. A intervenção dos pesquisadores foi importante na socialização de dificuldades e na análise de questões sobre as práticas, nas sínteses teóricas, na sistematização das aprendizagens, no exercício de uma liderança dialogada.

Destaca-se um saber docente construído nas reuniões, um saber situado na ação coletiva e compartilhada, em que cada participante exerce seu papel conforme sua experiência profissional, mas todos atuam com uma finalidade comum, com os objetivos da pesquisa, com a finalidade de melhorar a prática. Esse espaço de discussão constituiu-se um espaço de formação em serviço e também um espaço de pesquisa.

Algumas análises realizadas

O grupo de pesquisa iniciou suas análises confrontando os descritores de avaliação da Matriz de Avaliação da Prova Brasil (2008) com documentos curriculares das redes públicas (municipal e estadual) de São Paulo.

A Matriz de Avaliação de 5º ano é composta por 28 descritores de desempenho. O descritor é o detalhamento de uma habilidade cognitiva (em termos de grau de complexidade), que está sempre associada a um conteúdo que o estudante deve dominar na etapa de ensino em análise. Quando um item é elaborado, há a intenção de avaliar se o aluno já é capaz de mobilizar uma determinada habilidade no processo de resolução do item.

O primeiro conteúdo proposto para análise do grupo de pesquisa foi o Sistema de Numeração Decimal. Nos encontros realizados, as professoras relatavam sobre o que desenvolviam com seus alunos sobre esse assunto e coadunavam com o que era proposto nos documentos oficiais e com os itens da Prova Brasil.

Ao entrar em contato com itens de avaliação mostravam-se surpresas com os tipos de questões propostas e o baixo índice de acertos de seus alunos, pois afirmavam que haviam ensinado todos esses conteúdos a seus alunos e estes erravam muito mais do que previam. Esses itens constavam de relatórios com resultados da Prova Brasil distribuídos às escolas, mas as professoras os desconheciam.

Os descritores relativos ao sistema de numeração decimal envolvem o reconhecimento e utilização das características do sistema, a identificação de números naturais na reta numérica, a decomposição e composição de um número em suas diversas ordens, incluindo a decomposição na forma polinomial.

Com as discussões realizadas, as professoras começaram a perceber que havia diferenças entre o que ensinavam e como ensinavam e a abordagem das questões da Prova Brasil, como relata a professora P2 em seu caderno de registros:

> [....] na prova, a ordem de grandeza dos números era de dezenas ou centenas de milhar, os números apresentados para decomposição tinham zero intercalado, no trabalho que faço uso mais os números menores que 1000, (Atas de memória, 2/04/2011).

Após essas análises, uma reflexão sobre a prática foi registrada nas atas de memória do grupo:

> [.....] as crianças não fazem generalizações, mesmo que aprenderam compor e decompor um número da ordem das centenas, não generalizam

> para a ordem das dezenas de milhar, por exemplo. (Atas de memória, 2/04/2011).

Um fato que chamou a atenção do grupo, registrado nas atas de memória, é que na prova havia um item que solicitava a quantidade de centenas do número 7500 e que o percentual de acertos dessa questão foi próximo de 30%. Essa constatação permitiu outra reflexão sobre a prática destacada nas atas de memória do grupo em que as professoras admitiam que trabalhavam o valor posicional do algarismo no número, mas não discutiam com seus alunos sobre a quantidade de dezenas ou de centenas que há num determinado número.

A análise do item descrito a seguir permitiu outra reflexão interessante.

O número 5 001 é igual a
a) 500 + 1
b) 500 + 10
c) 5 000 + 1
d) 5 000 + 10

Prova Brasil, 2007

Ao analisar a questão, uma das professoras relatou:

> Meus alunos decompõem esse número como 5000 + 000 + 00 + 1 e acabam errando porque não encontram a resposta que obtiveram entre as alternativas, (P2, 16/4/2011).

Esse relato provocou várias discussões e o grupo concluiu que essas crianças estão "numa escrita intermediária" e precisavam avançar para a "decomposição convencional", o que possibilitou uma intervenção por parte da professora e o avanço das crianças na aprendizagem.

Às vezes, as dificuldades para compreender as características do sistema de numeração decimal eram das próprias professoras, como é possível verificar no excerto do caderno de registros da professora P3.

> Tive dificuldade para entender "esta história de ordens e classes", não sobre colocar os números nas "casinhas", mas para saber o valor posicional em algumas situações que tem nos livros didáticos e na Prova Brasil, (Caderno de registros, 26/03/2011).

A compreensão dos relatórios da Prova Brasil que apresentavam análise de itens, percentual de acertos, discussão de possíveis erros dos alunos permitiu uma reflexão sobre o ensino que praticavam e, consequentemente a investigação sobre a própria prática, o que corrobora estudos de Ponte (2002) sobre esse assunto.

Nas discussões realizadas nas reuniões do grupo, as professoras perceberam que não desenvolviam atividades de contagens orais, de observação de regularidades em

sequências numéricas, nem de situações em que não existiam regularidades. Alguns conhecimentos matemáticos foram aprofundados, como, por exemplo, a escrita numérica na forma polinomial.

Algumas sequências de atividades foram discutidas. Uma das tarefas desafiava o grupo a utilizar um procedimento para resolver a multiplicação 6 x 48 numa calculadora com as teclas 6 e 8 quebradas. Outra solicitava que escrevessem o maior e o menor número possível com os algarismos 4, 9, 5 e 6, sem repeti-los. Uma terceira convidava as professoras a descobrirem dois números consecutivos cujo produto é 210. Outra atividade pedia que completassem seqüência e explicitassem as leis de formação. Uma última tarefa solicitava que as professoras acrescentassem zeros à direita de números previamente escritos e analisassem o que ocorria com eles. Algumas professoras revelaram procedimentos interessantes na resolução das tarefas, outras mostravam dificuldades quando buscavam um procedimento de resolução. Na tarefa em que deviam escrever o maior e o menor número com os quatro algarismos, algumas professoras precisaram escrever todos os números para depois compará-los, o que revela dificuldades com a posicionalidade do sistema de numeração decimal. A palavra consecutivo precisou ser esclarecida no grupo e nem sempre as professoras descobriam a lei de formação de uma seqüência numérica. Na tarefa que solicitava que acrescentassem zeros à direita do número e analisassem o que acontecia com ele, percebeu-se que algumas professoras indicavam as "casas" relativas à posição de cada algarismo no número e não percebiam que quando se coloca um zero à direita o número, este fica multiplicado por 10. Este fato parece revelar que elas não percebem que o valor de cada algarismo num número é obtido multiplicando esse algarismo por uma determinada potencia de base 10.

Segundo Parra e Saiz (1996) se for colocado um ou mais algarismos à direita de algum número, necessariamente potências de 10 de "maior grau" que as envolvidas irão intervir em sua decomposição e o número será 10 (ou 100 u mil, ...) vezes maior. Elas afirmam que é uma questão de posicionalidade do sistema de numeração decimal.

A resolução dessas atividades provocou comentários que revelam a frustração das professoras por não compreenderem adequadamente conteúdos matemáticos básicos para o ensino. A professora P4 revela sua dificuldade com a decomposição dos números e com o valor absoluto e o valor posicional dos algarismos nos números.

> Tive dificuldades para fazer as atividades em que não se podia usar algumas teclas da calculadora, por não conseguir "desmontar" o número e que o mesmo aconteceu ao ter que identificar quantas dezenas tem este número (Caderno de registro, 30/04/2011).

Ao analisar as atas de memórias desses encontros, chamou atenção o fato de que a compreensão do Sistema de Numeração Decimal não era tão simples para o grupo, que às vezes mostrava desconhecer algumas características básicas desse Sistema. A idéia de que basta "dividir o número em casinhas (M/C/D/U)" para compreender o Sistema de Numeração Decimal era presente no grupo.

Esse fato corrobora outros estudos como o de Curi (2011) que revela que, talvez por esse sistema numérico ser tão simples e comumente usado no dia a dia ou, então, pela pouca importância dada pelos professores para esse assunto, ele é tratado com muita superficialidade durante a escolarização.

Após vários encontros, com novos saberes, as professoras decidiram aplicar a seus alunos os itens da Prova Brasil que haviam analisado e que envolvem o Sistema de Numeração Decimal. Os protocolos dos alunos foram analisados pelo grupo de pesquisa e foram discutidas algumas possíveis intervenções. Essas discussões permitiram a construção de seqüências de atividades que buscaram explorar várias questões com graus de dificuldade diferenciados. As seqüências foram desenvolvidas com os alunos no mês de maio, as primeiras análises já foram efetuadas e deram origem a outro artigo apresentado no Profmat.

A compreensão dos resultados da Prova Brasil e as discussões realizadas nos vários encontros deram segurança para que as professoras propusessem e analisassem atividades desenvolvidas com seus alunos, o que permitiu ampliar os conhecimentos das professoras. Serrazina (2001) destaca que o conhecimento do professor é dinâmico e continuamente alterado, durante sua trajetória profissional, pelas interações do professor com o ambiente da sala de aula, com os alunos e com experiências profissionais pessoais e de colegas, o que permite categorizá-lo como um conhecimento de natureza situada.

Considerações Finais

Considera-se que, embora essas professoras tivessem dificuldades tanto nos conteúdos matemáticos básicos como no ensino desses conteúdos, a percepção dessas dificuldades e a postura em reconhecê-las foram favoráveis à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional.

O desenvolvimento da pesquisa colaborativa mostrou que os contextos externos reforçaram a parceria para consolidar a pesquisa sobre a prática pedagógica na escola. As diversas reuniões realizadas ajudaram a estreitar o relacionamento da rede pública com pesquisadores da Universidade e alunos da graduação, futuros professores. Pode-se considerar, ainda, que a pesquisa colaborativa, centrada no diálogo e no companheirismo favoreceu a tomada de decisões na consolidação de estratégias voltadas à formação continuada de professores, gerando amadurecimento no processo de aprendizagem do grupo, porque possibilita a reflexão dos participantes e o estreitamento das suas relações interpessoais, embora com a desvantagem da imprevisibilidade dos fatos que ocorrem na escola.

Este estudo mostra que quando professores se tornam mais participativos do processo de avaliação externa, compreendendo seus objetivos, analisando questões e resultados, utilizando dados de avaliação em sua prática, ampliam a visão sobre as aprendizagens de seus alunos, sobre o ensino de Matemática, se tornam pesquisadores de sua própria prática aprimorando seu desenvolvimento profissional.

O grupo vivencia um trabalho coletivo e colaborativo; a articulação entre a pesquisa, a formação docente e a prática pedagógica; a busca de novas experiências didáticas, seja na universidade ou escola; a participação no processo coletivo de criação; a reflexão sistemática e permanente antes, durante e depois da realização de experiências didáticas, favorecendo o processo de desenvolvimento profissional de todos participantes.

Referências

Boavida, A. M.; Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. In: GTI (Org). Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: *APM*, p. 43-55.

Brasil. (2008). Ministério da Educação. PDE: *Plano de Desenvolvimento da Educação*: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasilia: MEC, SEB; Inep.

Curi, E. (2011). Sistema de Numeração Decimal: uso cotidiano e aprendizagens escolares. *Anais CIAEM*. Recife.

_____. (2010). Projeto "Prova Brasil de Matemática: Revelações possibilidades de avanços nos saberes de alunos de 4ª série/5ºano e indicativos para formação de professores", aprovado no âmbito do *Programa Observatório da Educação*, Edital 2010, apoio Capes, in xerox.

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M.; Araújo, J. L. *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica. p. 47-76.

Fiorentini, D.; Nacarato, A. M.; Pinto, R. A. (1999). Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. *Quadrante:* Revista teórica e de investigação. Volume 8, Revista APM, Lisboa, Portugal.

Freitas, L. C. (Org). (2003). *Avaliação de escolas e universidades*. Série avaliação: construindo o campo e a crítica. Campinas: Komedi.

Guerra, M. A. S. (2007). *Uma flecha no alvo:* a avaliação como aprendizagem. São Paulo: Edições Loyola.

Horta Neto, J. L. (2010). Avaliação externa de escolas e sistemas: questões presentes no debate sobre o tema. In *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos* – RBEP. Brasília: vol 91 no 227, p.84-104, jan/abr.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em Reflectir e Investigar sobre a prática profissional. GTI – Grupo de Trabalho de investigação (organização). *APM*, Portugal.

Serrazina, L. (2001). A formação para o ensino de matemática: perspectivas futuras. In: ——— (Org.). *A formação para o ensino da matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Porto; INAFOP, p. 9-20.

Tardif, M.; Borges, C. (2001). Os Saberes dos Docentes e sua Formação. *Educação e Sociedade*, n. 74, Ano XXII, Abril. Campinas, CEDES.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ, Vozes.

Parra, C.; Saiz. I. (1996). O sistema de numeração: um problema didático. In *Didática da Matemática*. Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas.

NEGOCIAÇÃO DE SIGNIFICADOS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA: PRÁTICAS ENTRE PROFESSORAS E ALUNOS DO 1.º CICLO[1]

António Guerreiro
Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve
aguerrei@ualg.pt

Resumo

A presente comunicação reporta-se à caracterização das práticas de negociação de significados na sala de aula de matemática no 1.º ciclo do ensino básico. Os dados empíricos constam dos *casos* referentes a uma investigação, ainda em curso, com três professoras deste ciclo de ensino, sobre a evolução das conceções e práticas de comunicação matemática, no decorrer de um trabalho de natureza colaborativa focado na reflexão sobre as práticas comunicativas em sala de aula. Os dados revelam a existência de múltiplas práticas culturais, grandemente *silenciadas* pela predominância da cultura matemática escolar baseada em conceitos e procedimentos matemáticos, alimentados pelo *controlo* e pelo *poder* do professor (com a anuência dos alunos) na transmissão de informação e conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave: Comunicação matemática, negociação de significados, práticas de ensino.

Introdução

A negociação de significados na sala de aula de matemática parece resultar do confronto de diversas práticas culturais (Meira, 1996), com especial relevo da cultura escolar matemática (Pinto & Fiorentini, 1997), oscilando entre práticas de *imposição* de significados e de *genuína* negociação de significados, dependentes do nível de *controlo* e *poder* do professor em relação aos alunos (Bishop & Goffree, 1986), em consonância com a natureza das práticas de ensino da matemática e da valorização dos conhecimentos pessoais dos alunos.

O processo de *literacia matemática* pode resultar numa *imposição* cultural exterior de conceitos, processos e normas ou incidir na negociação de significados matemáticos, através da conjugação dos conhecimentos da ciência matemática com os conhecimentos pessoais de cada indivíduo (Bishop & Goffree, 1986). O desenvolvimento da compreensão de conceitos e representações matemáticas implica processos complexos

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

que requerem a partilha de múltiplos significados, assentes em regras culturais específicas da matemática.

Nesta comunicação, tento caracterizar os processos envolvidos na negociação de significados na sala de aula de matemática, entre o professor e os alunos, ilustrando-os com testemunhos e episódios de sala de aula de três professoras, recolhidos no âmbito de uma investigação sobre a evolução das conceções e práticas de comunicação matemática, no decorrer de um trabalho de natureza colaborativa focado na reflexão sobre as práticas comunicativas no 1.º ciclo do ensino básico.

A investigação referida enquadra-se numa metodologia qualitativa adotando o paradigma interpretativo e tomando por *design* o estudo de caso (Stake, 1994), em que participaram três professoras – Alexandra, Carolina e Laura –, num contexto de trabalho de natureza colaborativa comigo, na qualidade de investigador, ao longo de dois anos, consubstanciado na discussão de perspetivas sobre comunicação e, fundamentalmente, na análise das suas práticas de comunicação matemática em sala de aula.

Na recolha de dados, foi utilizada a *observação* e *participação* na sala de aula (com registos áudio e vídeo), com enfoque na comunicação, complementada com a *inquirição*, através da realização de entrevistas e encontros individuais (com registos áudio), e a *colaboração* em encontros de trabalho com as professoras participantes no estudo (com registos áudio), consubstanciada na reflexão sobre as práticas.

A análise de dados tem por propósito interpretar a evolução das conceções e práticas das professoras sobre a comunicação matemática, envolvendo diferentes fases até à construção do texto interpretativo que corporiza *o caso*, através da redução dos dados (Goetz & LeCompte, 1984) provenientes do trabalho de campo.

Negociação de significados matemáticos

A negociação de significados matemáticos direciona os objetivos de ensino na sala de aula para a interação entre os alunos, o professor e o conhecimento matemático, na busca de um entendimento comum. O significado do conhecimento matemático é partilhado e assumido pelos intervenientes quando estes concordam com a validade dos referentes, dos exemplos, das analogias e das conexões apresentadas pelos interlocutores (Bishop & Goffree, 1986).

A construção do conhecimento na sala de aula baseia-se na negociação de significados, num processo onde todos têm similares possibilidades de emitir ideias críticas sobre as questões colocadas e de construir novos significados a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com os outros indivíduos (Bishop & Goffree, 1986).

Nesta perspetiva, conceitos e representações matemáticas emergem e são partilhados no contexto de práticas culturais específicas da sala de aula, através de significados intrinsecamente associados às circunstâncias e formas de interação social nas práticas de ensino (Meira, 1996). A negociação reporta-nos assim para a produção de significados de conceitos, processos e normas sociais e sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996), durante a atividade matemática escolar.

Conjugando as perspetivas teóricas sobre a negociação de significados de vários autores (Bishop & Goffree, 1986; Carvalho, 2001; Frid & Malone, 1995; Meira, 1996; Pinto & Fiorentini, 1997), proponho uma caracterização dos processos de negociação de significados na sala de aula de matemática, segundo três vertentes: negociação de conceitos matemáticos; negociação de processos matemáticos e negociação de normas sociais e sociomatemáticas.

Negociação de conceitos matemáticos

A negociação dos conceitos matemáticos parece decorrer da participação dos indivíduos em múltiplas práticas culturais (Meira, 1996), confrontando significados matemáticos com significados sociais de um mesmo conceito ou de conceitos distintos mas igualmente denominados. Esta ambiguidade parece ocorrer na distinção entre o significado social e o significado matemático de uma mesma palavra, frase, expressão ou símbolo.

A ocorrência de desacordo entre a professora e uma das suas alunas sobre o conceito de par (de calças) foi relatada por Carolina, num dos encontros de natureza colaborativa. A tarefa matemática em causa envolvia o produto cartesiano de duas variáveis:

> Era um palhaço, tinha três blusas e três pares de calças. A moça faz aquilo, foram dois ou três que fizeram isto, não mais. A moça foi logo a primeira que mostrou e eu: «O quê? Dezoito maneiras? *Má atão* [Mas então], onde é que tu foste buscar isto? Onde é que tu foste buscar isto? Dezoito maneiras?».
>
> [Encontro colaborativo _ Carolina]

Perante a interrogação de Carolina, a aluna negociou com a docente o seu significado de par:

> «Então, professora, três pares de calças, a professora já disse que um par são dois».
>
> [Encontro colaborativo _ Carolina]

A confrontação entre o significado social de um par de calças e o significado matemático de par, adotado pela aluna, parece ilustrar a ambiguidade entre conceitos sociais e matemáticos com denominação comum. Paralelamente, parece existir também confronto entre a expressão linguística de um conceito e a sua representação matemática.

O conceito social de pisca-pisca, representado matematicamente por um instante sem dimensão, parece ilustrar a negociação entre a expressão linguística e a representação matemática. Num problema em que se pretendia determinar o momento em que duas lâmpadas, que piscavam de três em três segundos e de cinco em cinco segundos, respetivamente, estavam simultaneamente acesas, os alunos demonstraram significativas dificuldades em representar matematicamente os instantes em que ambas piscavam, revelando incompreensão sobre o conceito de pisca-pisca.

Para os alunos, uma lâmpada piscar de três em três segundos era sinónimo da lâmpada acender durante três segundos e apagar durante três segundos:

> Tiago: – Primeiro desenhámos sessenta traços, cada traço é um segundo. Sessenta segundos são um minuto.
>
> Professora: – Pronto.
>
> Tiago (com referência à representação figurativa): – Deste lado é a porta [associada à lâmpada] dos três segundos. E aqui é o dos cinco em cinco. Primeiro, estes três segundos, acende a primeira luz. Estes aqui, cinco segundos, acende. Estes, aqui até aqui, mais três, apaga. Destes cinco, mais cinco, está apagada.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

O aluno continuou a explicação concluindo que estão as duas lâmpadas acesas aos quinze segundos. Alexandra questiona os alunos do grupo:

> Professora: – Vocês mostram que os primeiros três segundos, e pelo que o colega explicou, a luz estava acesa. Ela está acesa três segundos? Ela acende no três. Ela acende, passados mais três, ela acende. Não está acesa, apagada, acesa, apagada.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

O conceito de piscar de três em três segundos (ou de cinco em cinco segundos) foi suficientemente negociado, por parte da docente, após ter identificado esta incompreensão: "*Acender de cinco em cinco não é equivalente a estar aceso cinco segundos. Piscar de cinco em cinco não é estar aceso cinco segundos*" [Aula _ 4.º ano _ Alexandra].

Estes episódios remetem-nos para o significado e representação de conceitos matemáticos relativos às medidas em unidades de tempo. Carolina relata que os alunos, nos problemas de viagens, confundem regularmente o horário de chegada com o tempo de viagem: "*Chegaram às dez e tal, era dez horas e tal de viagem*" [Encontro colaborativo _ Carolina].

As dificuldades de aprendizagem matemática de alguns procedimentos menos usuais, como o cálculo em bases diferentes da decimal, podem estar diretamente relacionadas com a incompreensão de conceitos matemáticos e a ausência de negociação dos significados matemáticos destes mesmos conceitos.

Na negociação de conceitos podemos incluir também o significado da notação escolhida na resolução de problemas ou na representação gráfica, como formas de representação de conceitos. Num problema de cumprimentos com um beijo, Laura negoceia com os alunos o sentido das setas que ligam o nome das meninas:

> Professora: – Para contar os beijos têm que fazer o quê?
>
> Alunos: – Contar as setas.
>
> [Aula _ 2.º ano _ Laura]

A notação usualmente utilizada nos pictogramas também foi negociada por Laura, a propósito da existência de *meia bola*:

> Professora: – A Marta disse-me que há por aí bolinhas cortadas ao meio. Querem dizer?
>
> Alunos: – Que valem um.
>
> Professora: – Um. Porquê?
>
> Alunos: – Porque uma bola vale dois.
>
> [Aula _ 3.º ano _ Laura]

A negociação de conceitos matemáticos parece estender-se, com os alunos do 1.º ano de Alexandra, ao rigor com que estes executam o seu trabalho, particularmente no recorte de figuras geométricas de modo a, dentro das possibilidades, estas manterem as *propriedades originais*:

> O Vladislav corta aquilo tudo direitinho, tão direitinho que até fica, na figura geométrica, o risco preto. A maior parte de vocês estão a cortar tudo à toa e depois já não são nem quadrados, nem círculos, nem retângulos, nem triângulos. São umas formas assim à toa. Ele não, está a cortar direitinho pelo risco. Com muito cuidado.
>
> [Aula _ 1.º ano - Alexandra]

A negociação de significados matemáticos de conceitos algébricos parece também ocorrer em resultado da linguagem utilizada como sinónimo de raciocínios algébricos. O conceito de incógnita como *coisa* e da representação icónica de um quadrado em representação *do quadrado da coisa* é discutida em Pinto e Fiorentini (1997), salientando os diferentes significados atribuídos pela professora e pelos alunos à expressão algébrica *o quadrado da coisa*. Os autores destacam o papel da professora na *imposição* do significado algébrico construído culturalmente por si própria enquanto aluna, salientando o *poder* do sistema educacional na reprodução cultural.

O pensamento algébrico associado à busca de padrões e generalizações aritméticas é igualmente negociado, por vezes sem sucesso, revelando a relevância da negociação de significados no campo da álgebra. Alexandra tenta identificar padrões na construção de números inteiros ou decimais com três algarismos distintos:

> Professora: – Como é que trocaram os números? João Miguel, tu ias dizer, se calhar não o que eles fizeram mas como tu fizeste, diz lá.
>
> João Miguel: – Eu tentei todas as maneiras possíveis para conseguir os números decimais de um algarismo. Fui juntando, fui juntando.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

O insucesso da negociação do processo de generalização foi partilhado pela docente nos encontros de trabalho de natureza colaborativa – "*Foi isso que eu quis puxar, mas eles não iam lá. Ainda falei no padrão, ainda falei na estratégia, mas não foram lá"* [Encontro colaborativo _ Alexandra].

Por seu turno, Laura tenta negociar o significado do valor das unidades na definição de números pares e ímpares: "*Não conseguem encontrar, por exemplo nos pares, parecença nenhuma ou semelhança nenhuma entre os números? Entre os ímpares também parecenças entre eles?"* [Aula _ 2.º ano _ Laura]. A insistência da professora – "*Ainda não se aperceberam aqui de nada, mesmo depois de sublinhar e depois de dizermos?"* [Aula _ 2.º ano _ Laura 2007] –, sem significativos progressos, originou um acentuado desconforto da docente, relatando que, como os alunos "*não viam nada*", em

resultado também "*já não me* [lhe] *apetecia que eles vissem*" [Encontro colaborativo _ Laura].

A consciência do professor sobre a necessidade de negociar o significado dos conceitos e ideias matemáticas pode facilitar a aprendizagem dos alunos, através de uma partilha de significados matemáticos entre todos e da clarificação das representações matemáticas de conceitos sociais.

Negociação de processos matemáticos

A negociação de processos matemáticos emerge de forma relacionada com as estruturas de ação, comportamento e comunicação na sala de aula (Meira, 1996), implicando o confronto entre processos matemáticos e sociais. Num estudo, referido por Meira (1996), os alunos adotaram processos matemáticos em contextos sociais, nomeadamente na utilização de uma lista de preços de serviços de correio, assumindo uma forte influência pela utilização de procedimentos matemáticos nas aulas de matemática, tornando as ações dos indivíduos subordinadas aos contextos.

A utilização de processos sociais em confronto com processos matemáticos ocorreu durante uma das aulas de Carolina, em torno da leitura da informação acerca dos horários de comboios. Durante a resolução coletiva de uma tarefa matemática baseada num folheto de horários de comboios, reproduzido no manual, um dos alunos alertou a turma para a incorreção das interpretações sem atender às observações existentes no folheto:

> Fábio: – Não, professora vocês não repararam nas observações.
> Professora: – Vamos ouvir o Fábio. Diz.
> Fábio: – Vocês não repararam nas observações.
> [Aula _ 3.º ano _ Carolina]

Este acontecimento redirecionou a resolução da tarefa, originando uma valorização da interpretação social dos horários para além da estruturação matemática dos dados existentes. O contexto escolar específico é referido por Carvalho (2001), ao indicar a existência de duas esferas diferentes: situações não escolares e escolares, em que, nestas últimas, as operações não necessitam de sentido para serem realizadas.

Os processos matemáticos relacionados com o cálculo algorítmico surgiram de forma significativa nas aulas do 4.º ano de Alexandra, especialmente em torno da multiplicação e da divisão com números decimais. A obrigatoriedade ou não do alinhamento dos números decimais pela casa das unidades, na operação da multiplicação, foi um dos processos renegociados entre a professora e os alunos, em resultado do questionamento de um aluno:

> Aluno: – A vírgula não está debaixo da vírgula.
>
> Professora: – Vírgula debaixo de vírgula. É necessário colocar vírgula debaixo de vírgula?
>
> Aluno: – Não, às vezes não é preciso.
>
> Professora: – Quando é que temos de pôr…?
>
> Alunos: – Nas contas de mais. Nas contas de menos.
>
> Professora: – Adições e subtrações é que se tem de ter o cuidado de pôr vírgula debaixo de vírgula. Na multiplicação, não. E porquê?
>
> Aluna: – Porque acrescenta-se no fim.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

Este tipo de negociação de processos matemáticos foi recorrente, especialmente em relação às regras algorítmicas da multiplicação e divisão com números decimais. Num outro episódio, com estes mesmos alunos, geraram-se ambiguidades a propósito da *comutatividade* do cálculo algorítmico da multiplicação (com o registo tradicional *da conta em pé*).

Diogo questiona-se pelo facto da multiplicação, apresentada por colegas, não apresentar as parcelas parciais do algoritmo da multiplicação (As alunas efetuaram a multiplicação de setenta e cinco centésimas por nove e o Diogo efetuou o produto de nove por setenta e cinco centésimas):

> Diogo: – Na nossa conta, os resultados ali da conta… Tipo o setenta e cinco e o nove estão ao contrário.
>
> Professora: – E isso faz o resultado ser diferente?
>
> Diogo: – Não. Sim, mas também faz…
>
> Professora: – Faz ser diferente?
>
> Diogo: – Não, mas falta uma coisa. É que elas, na conta de multiplicar, ainda têm de somar.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

A ambiguidade da representação algorítmica parece ilustrar a negociação das operações aritméticas em torno dos procedimentos de cálculos, assumindo, o aluno, a inexistência das parcelas intermédias como um erro de cálculo. Esta atitude parece revelar uma assimilação do procedimento matemático através da sua representação visual.

Alguns conceitos matemáticos transformam-se em processos matemáticos, baseados no cálculo, caracterizados por procedimentos. Numa das aulas de Laura, uma aluna questiona a professora sobre o que é o dobro, originando uma negociação de significados em torno do processo de determinação do dobro:

> Professora: – O que é o dobro? Não tens aí um grupo para o saber? Não levaram já para casa para calcular o dobro? Como é que tu calculaste o dobro? Como é que se calcula o dobro de qualquer coisa?
>
> Pinto: – Eu sei, posso dizer?
>
> Outro aluno: – Multiplicar por dois.
>
> Professora: – Então, mas ela... Nós não escrevemos? Nós não fizemos? Nós não desenhámos?
>
> [Aula _ 2.º ano _ Laura].

A utilização da calculadora na negociação de significados de processos matemáticos como a multiplicação de números decimais por dez, com o intuito de negociar a movimentação da vírgula, é referida por Frid e Malone (1995) como um processo negociado, subvalorizado pelos alunos de anos escolares iniciais, em detrimento do *poder* do professor na definição do procedimento matemático. Esta negociação foi partilhada por Alexandra ao referir que utilizou a máquina de calcular para "*eles se aperceberem",* antes *"de começar com a multiplicação por dez, cem e mil*" [Encontro _ Alexandra], das regras decorrentes destas multiplicações.

A negociação de processos matemáticos parece incidir nos processos e procedimentos algorítmicos das operações aritméticas. As dificuldades manifestadas pelos alunos na realização das operações, nomeadamente na divisão, podem resultar de uma prática de ensino baseada na *imposição* de procedimentos sem negociação de processos matemáticos.

Negociação de normas sociais e sociomatemáticas

O estudo da negociação de significados na sala de aula de matemática também envolve a análise das rotinas diárias e das ações resultantes das interações sociais (Meira, 1996). A definição do papel do professor e dos alunos nas interações, originando normas

sociais e sociomatemáticas, mesmo que implícitas, acerca da oportunidade, da adequação e do valor das intervenções dos alunos e do professor, parece influenciar as representações acerca da matemática e da atividade matemática escolar.

Neste contexto, as ambiguidades, gradualmente resolvidas através de processo de negociação, inerentes ao ensino-aprendizagem da matemática, não se referem à natureza dos conceitos matemáticos, mas ao (re)estabelecimento das normas sociais e sociomatemáticas (Meira, 1996). A negociação de normas sociais e sociomatemáticas é debatida por Carvalho (2001), em torno das questões do género, ao analisar que as interações das alunas a propósito das tarefas escolares são diminutas em comparação com os alunos estudados.

A predominância das negociações de significados parece decorrer da regulação de comportamentos sociais e das atitudes dos alunos, particularmente em relação à organização do trabalho a pares ou em grupo e da participação dos alunos nas atividades de sala de aula. A negociação do trabalho em grupo parece apresentar uma dimensão social da aprendizagem e da entreajuda entre os alunos:

> Professora: – Ora bem**,** vocês estão sentadinhos em grupo, que é para utilizarem as ideias de todos. Não é para entrarem em conflito, não é para discutirem, não é para uns quererem mandar nos outros. É para explicarem uns aos outros os raciocínios que vocês querem seguir.
>
> [Aula _ 3.º ano _ Alexandra]

A negociação de significados relativos às normas sociais apresenta igualmente uma dimensão de *imposição* escudada no *controlo* e *poder* do professor. Alexandra partilhou, com o grupo de trabalho de natureza colaborativa, que impôs uma ida ao quadro como forma de obrigar um aluno, que não queria registar todas as combinações possíveis de números com três algarismos, a registá-las no quadro e no caderno:

> E qual foi a solução que eu dei ao caso? Ai não tens que passar?! Vais fazer a outra, passas duas vezes. Mas não lhe disse. Disse: «Então o António agora vai ao quadro». Fez no quadro e depois teve de fazer no lugar. Fez duas vezes.
>
> [Encontro colaborativo _ Alexandra]

A negociação de comportamentos apresenta assim uma vertente disciplinadora e reguladora do trabalho dos alunos, a par das regras da participação individual de cada um dos alunos no trabalho em grupo. Esta vertente da negociação de significados parece também integrar uma dimensão sociomatemática, nomeadamente em relação às atitudes dos alunos perante os conteúdos disciplinares da matemática:

> Professora: – A conta estava certa, mas não tem valor nenhum. Porque não sabem porque é que a fizeram, como a fizeram, por que razão. É à toa. O que eu quero aqui é que vocês percebam aquilo que estão a fazer. Quando não percebem, agradeço que perguntem, que digam.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

A negociação de significados matemáticos parece incidir nas normas sociais e sociomatemáticas numa dimensão de negociação formativa e disciplinadora, regulando a aprendizagem matemática e o comportamento escolar dos alunos.

Alguns comentários finais

O significativo enfoque nos significados e processos matemáticos na cultura de sala de aula parece originar uma persuasão destes significados e processos na resolução das tarefas, mesmo quando estas apresentam um expressivo contexto social, como no caso do par de calças, dos horários de comboios ou do conceito de dobro.

Contudo, a representação de ideias matemáticas, como a localização de acontecimentos sem dimensão, a identificação de padrões ou o cálculo em bases não decimais, não surge entre os alunos, parecendo significar um conhecimento matemático baseado em procedimentos sem compreensão, assentes numa estrutura visual, como no caso dos cálculos algorítmicos.

A subordinação aos contextos e procedimentos matemáticos (Frid & Malone, 1995; Meira, 1996) parece originar uma valorização, por parte dos alunos (e do professor), do papel do professor na transmissão e validação dos conhecimentos matemáticos, ampliando a desvalorização dos conhecimentos específicos, pessoais e culturais, dos alunos (dos outros).

Neste sentido, a negociação de normas sociais e sociomatemáticas parece normalizar a partilha de conhecimentos e regular os comportamentos dos alunos, fomentando uma cultura de sala de aula pautada pela similaridade das atitudes e dos comportamentos.

Referências bibliográficas

Bishop, A. & Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Carvalho, D. L. (2001). Diálogo Cultural, Negociação de Sentidos e Produção de Significados Matemáticos por Jovens e Adultos. *Zetetiké* (Vol. 9, nº 15/16, pp. 43-76). Campinas: UNICAMP – FE/CEMPEM.

Frid, S. & Malone, J. (1995). Negotiation of Meaning in Mathematics Classrooms: A Study of Two Year 5 Classes. *Mathematics Education Research Journal*, 7(2), 132-147.

Goetz, J. & LeCompte, M (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research. Orlando:* Academic Press, Inc.

Meira, L. L. (1996): Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula, *in*: Mira, M.; Brito, M. (Org) *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica* (Vol. 5, pp. 95-112). Rio de Janeiro: ANPEPP.

Pinto, R. A. & Fiorentini, D. (1997). Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para a "coisa". *Zetetiké* (Vol. 5, n.º 8, pp. 45-71). Campinas: UNICAMP – FE/CEMPEM.

Stake, R. (1994). Case studies. In. Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Londres: Sage.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA – UMA ANÁLISE DA PRÁTICA DE PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Lúcia Alves
AE António C. de Oliveira, Esposende
lucialano@hotmail.com

Ema Mamede
CIEC, Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Resumo

Este artigo centra-se em aspectos da comunicação matemática nas práticas de sala de aula do 1.º ciclo do ensino básico. Procura perceber que postura revelam os professores na promoção da comunicação matemática em sala de aula. Para tal procurou-se saber como promovem os professores do 1.º ciclo a comunicação matemática nas suas práticas em sala de aula. Foram analisadas aulas de três professoras a leccionar o 1.º ano de escolaridade de uma escola pública. Utilizou-se uma metodologia qualitativa para analisar as práticas dos professores através da observação de aulas e da reflexão crítica por parte dos professores participantes no final de cada aula. Os resultados sugerem que os professores reconhecem a importância da comunicação matemática, mas apresentam algumas fragilidades na sua promoção em sala de aula que passam por uma insuficiente promoção da comunicação oral, subaproveitando oportunidades de desenvolvimento de discussão e cortando o exercício da argumentação dos seus alunos.

Palavras-chave: Comunicação matemática; práticas de sala de aula; professores do 1.º ciclo.

A Comunicação na sala de aula

A comunicação constitui um objectivo curricular e um meio de aprendizagem (DGIDC, 2007). Ponte e Serrazina (2000) agrupam a comunicação na aula de Matemática em três categorias: exposição, questionamento e discussão. A primeira é de carácter expositivo; a exposição de uma história, de uma ideia ou de uma experiência por um dos intervenientes, professor ou aluno. A comunicação por questionamento é caracterizada pelas sucessivas perguntas que o professor faz aos alunos com o intuito de detectar dificuldades, motivá-los a participar, ajudá-los a pensar, etc. Ainda sobre o questionamento na aula de Matemática, Matos e Serrazina (1996) e Ponte e Serrazina (2000) consideram três tipos fundamentais de perguntas na aula de Matemática: Perguntas de focalização, de confirmação e de inquirição. As primeiras têm por objectivo "focalizar" a atenção do aluno naquilo que é essencial, auxiliando-o a seguir

um determinado raciocínio. Se o aluno está desorientado no meio de um cálculo, por exemplo, o professor orienta-o acerca do passo seguinte a realizar (Ponte & Serrazina, 2000). As perguntas de confirmação colocam o foco nas aprendizagens realizadas. O objectivo é verificar conhecimentos e eventuais *feedbacks*. Estas perguntas, cujas respostas são, à partida, conhecidas do professor, são colocadas com o intuito deste se certificar que os alunos também as conhecem (Ponte & Serrazina, 2000). Para os autores, estas perguntas quando respondidas correctamente pelos alunos aumentam a sua autoconfiança e ajudam a uma melhor interiorização das ideias. Por último, as perguntas de inquirição são, para os autores, as únicas verdadeiramente genuínas. Com estas questões, o professor pode determinar o modo de pensar dos alunos, o modo como resolveram uma certa tarefa e a opinião dos mesmos relativamente a uma estratégia ou resultado. São perguntas muitas vezes abertas que favorecem o pensamento divergente e a reflexão. Finalmente, para estes autores, a interacção entre os alunos ou entre os alunos e o professor pode assumir uma forma de discussão, em que normalmente o professor assume o papel de moderador. Uma discussão entre alunos pode revelar o seu modo de pensar (Ponte & Serrazina, 2000). Ouvindo os alunos, o professor não só se apropria dos seus modos de pensar como lhes dá a oportunidade de clarificarem as suas ideias. A discussão pode constituir uma oportunidade para os alunos aprenderam a argumentar matematicamente (Voigt, 1995).

Para o NCTM (1994), o modo como os professores conduzem o discurso depende dos conhecimentos que os mesmos têm sobre a Matemática, sobre o currículo e sobre os alunos. O discurso é visto pelo NCTM (1994) como "a maneira de representar, pensar, falar, concordar e discordar" e "engloba tanto a forma como as ideias são trocadas como aquilo que as ideias veiculam" (p. 36). O modo como o discurso é conduzido, na aula de Matemática, determina o conhecimento e as formas de pensar que são valorizadas, bem como os processos de construção e validação dos significados.

A interacção entre alunos e professor baseia-se, tradicionalmente na sequência triádica Iniciação-Resposta-Avaliação (I-R-A) em que o professor inicia uma pergunta à qual o aluno responde, sendo depois avaliada pelo professor (Sinclair & Coulthard e com Mehan citados em Wood, 1998). Esta sequência reflecte uma comunicação unívoca que, de acordo com Wood (1998) pode conduzir a uma aprendizagem pouco significativa. Em alternativa a esta sequência, Martinho (2007) refere a sequência Iniciação-Resposta-

Seguimento (I-R-S), em que o professor dá continuidade à resposta do aluno, colocando uma nova questão, muitas vezes de incentivo ao raciocínio dos alunos.

O papel do professor é, deste modo, considerado fundamental na condução do discurso e determinado por três aspectos essenciais: 1) provocar o raciocínio dos alunos através das tarefas que propõem e das questões que colocam (NCTM, 1994); 2) ser activo na condução do discurso, mas não no sentido de o dominar, decidindo quando fornecer informações e colocar questões orientadoras e quando deixar os alunos debaterem-se sozinhos (NCTM, 1994), já que facilmente o controlo e a autoridade exercidos pelo professor interferem no ambiente de aprendizagem (Bishop & Goffree, 1986), impedindo o desenvolvimento da autonomia dos alunos; e 3) promover o controlo e a organização da participação dos alunos, decidindo sobre a escolha dos alunos a quem pedir a participação, a escolha do modo de agrupamento para trabalhar e qual o meio de comunicação que os alunos devem utilizar para apresentar o seu pensamento.

O professor tem um papel fundamental enquanto facilitador ou inibidor de processos comunicativos na sala de aula (Bishop & Goffree, 1986; NCTM, 1994; Ponte & Serrazina, 2000). Existem já vários estudos de investigação centrados no professor no âmbito da comunicação matemática.

Menezes (1995) ao estudar, entre outros aspectos, a importância que professores de Matemática do 2.º ciclo dão à pergunta e o tipo de perguntas que colocam aos alunos, refere que os professores entendem o questionamento como essencial ao discurso, colocando questões de verificação de conhecimentos e de pensamento divergente. Também Romão (1998) analisou o tipo de discurso e as interacções entre professor e aluno de quatro professores do 2.º ciclo, tendo identificado o uso de questões fechadas e de resposta curta de entre os professores mais jovens, e o uso de questões mais abertas e desafiadoras pelos mais experientes. Mais recentemente, Almeida (2007) analisou as interacções verbais de dois futuros professores de Matemática, sendo que um deles valoriza as interacções professor-aluno e um ensino baseado na transmissão de conhecimentos pelo professor; outro valoriza as interacções entre os alunos, valorizando as suas discussões e as questões abertas como forma de promover a aprendizagem.

Ainda no âmbito da comunicação matemática realizaram-se estudos de natureza colaborativa. Menezes (2004) estudou o modo como três professores do 1.º ciclo se

desenvolveram ao longo de uma colaboração centrada na comunicação matemática nas dimensões: reflexão, conhecimento e práticas, colaboração e autonomia, tendo registado evolução na visão de comunicação destes. Martinho (2007) estudou as concepções, as práticas e a reflexão sobre as práticas de três professores de Matemática do 2.º e 3.º ciclos, tendo registado evoluções ao nível destes aspectos, mas identificado dificuldades ao nível da monopolização do discurso, do acompanhamento das intervenções dos alunos e da descentralização da autoridade.

A crescente publicação de estudos no âmbito da comunicação matemática e a escassez no 1.º ciclo tornam relevante a presente investigação. O 1.º ciclo constitui um nível de ensino de aprendizagens fundamentais para a aquisição de conhecimento matemático dos anos subsequentes. O estudo realizado procurou perceber que postura revelam os professores do 1.º ciclo na promoção da comunicação matemática em sala de aula, analisando-se as práticas, os entendimentos e as dificuldades dos professores. Neste artigo, procura-se apenas responder à questão: Como promovem os professores do 1.º ciclo a comunicação matemática nas suas práticas em sala de aula?

Metodologia

Na parte do estudo aqui documentada adoptou-se uma metodologia qualitativa de análise (Bogdan & Bicklen, 1994) na variante de estudos de caso múltiplos (Yin, 2009) de professoras do 1.º ciclo. As participantes Augusta, Beatriz e Célia, a leccionar o 1.º ano de escolaridade, tinham 9, 21 e 27 anos de serviço, respectivamente, e experiências profissionais distintas. Os nomes são fictícios para preservar o anonimato.

A análise organizou-se em torno de dois momentos, observação de aulas e reflexão crítica. Na observação de aulas, a investigadora é não participante, assumindo o papel de mero espectador das aulas leccionadas. A observação ocorreu em contexto de sala de aula, nas duas primeiras semanas de Março de 2010. O período de recolha de dados decorreu durante 3 aulas, vídeo e áudio gravadas, tendo demorado cada uma, cerca de 60 minutos. O agrupamento de escolas onde as professoras exerciam funções seguia, a título experimental, as orientações do novo Programa de Matemática. Foram registadas notas de campo em gravação de voz segundo um guião previamente definido e elaborados pequenos relatórios escritos.

A reflexão crítica de cada professora no final de cada aula surgiu da questão "Como acha que decorreu a sua aula?" e teve o propósito de obter uma apreciação imediata das participantes. Esta reflexão não teve por objectivo criar uma discussão em torno da aula dada, mas somente obter o parecer das participantes sobre o decurso da mesma. As reflexões foram áudio gravadas.

Resultados

Na análise da promoção da comunicação matemática das práticas das participantes, apresentam-se aqui as características observadas mais marcantes sobre os tipos de comunicação, os padrões de interacção subjacentes e o tipo de pergunta veiculado, realçando-se os vários meios de comunicação promovidos e o lugar atribuído à negociação e à discussão de ideias.

A comunicação como exposição foi utilizada com frequência por umas das professoras, tendo sido usada pelas restantes uma vez. Este tipo de comunicação surgiu muito associada a uma história como forma de introduzir a actividade matemática. A comunicação por questionamento foi a mais utilizada pelas três professoras em todas as aulas, procurando que os alunos construíssem conceitos matemáticos e se apropriassem de algum vocabulário matemático. Por exemplo, Augusta procura ajudar os alunos a identificar algumas propriedades de figuras geométricas através do questionamento. A transcrição a seguir apresentada (Quadro 1) evidencia este facto. Os nomes dos alunos que nela figuram são fictícios.

Augusta: Olha, e se eu me apetecer pô-lo antes assim [o lado menor como base]. Isto já não é um rectângulo, não me digam isso!
Marta: Não.
Augusta: Não, pois não Marta?
Lucas: Ficou um quadrado.
Augusta: Ficou um quadrado? Toda a gente concorda?!
Lucas: Sim [Apenas responde o Lucas].
Augusta: Ficou um quadrado, este? Então este é igual a este, assim? [A professora compara este rectângulo com o quadrado].
Maria: Não.
Augusta: Porquê Maria?

Maria: Porque está virado ao contrário.

Augusta: Quem? Isto é na mesma um rectângulo virado ao contrário?

Lucas: Não.

Augusta: Quem é que diz que acha que é? (…)

[Todos concordam, incluindo o próprio Lucas].

Augusta: Então este também é um rectângulo? Este e este são rectângulos?

Alunos: [Em coro] Sim.

Augusta: Pois é, porque nós fizemos numa posição diferente.

Quadro 1 – Excerto do Episódio 1 referente à 3.ª aula de Augusta

No excerto acima transcrito é visível a atitude inquiridora da professora no sentido de detectar as concepções dos alunos sobre o rectângulo. As perguntas de inquirição "Ficou um quadrado? Toda a gente concorda?!" "Porquê Maria?" são disso um exemplo. Com o remate "pois é, porque nós fizemos numa posição diferente", a professora Augusta atribui um maior rigor à concepção de Maria "porque está virado ao contrário".

Num outro episódio, a professora Célia procura também através do questionamento que os alunos identifiquem as figuras geométricas em diferentes posições. No excerto que se segue (Quadro 2) é possível observar-se este aspecto, bem como o tipo de perguntas utilizado.

Célia: Que figura temos aqui? (…)

Rui: É o rectângulo.

Célia: Vamos lá olhar. Quero perguntar para ver se sabem. André, que figura é esta? Ninguém ajuda. [A professora rodava o quadrado, mudando-o de posição].

André: Quadrado.

Célia: Que figura é esta, Luís?

Luís: Quadrado.

Célia: Quadrado. O quadrado o que é que tem? Os lados …

Alunos [Em coro]: São iguais.

Célia: E que cor é esta?

Alunos [Em coro]: Azul.

Célia: Azul. Quem sabe que figura é esta, Paulo?

(…)

Célia: E assim, que figura temos aqui? É ali para o Jorge. Que figura é esta Jorge?

Jorge: Rectângulo.

Célia: Rectângulo. Eu de dois qua-drados fiz um rec-tângulo [Professora e alunos ao mesmo tempo].

Célia: E esta, Nuno? [Dois quadrados unidos em que o lado menor é a base].

Nuno: Um rectângulo.

Célia: E assim? [O lado maior é a base].

Alunos: Rectângulo.

Célia: Estão a ver! Eu também o podia pôr assim. Acabo de fazer a mesma figura.

Quadro 2 – Excerto do Episódio 2 referente à 2.ª aula de Célia

No excerto acima transcrito é possível ver-se, principalmente, perguntas de confirmação, como "Quadrado. O quadrado o que é que tem? Os lados …" ou "Quem sabe que figura é esta, Paulo?", inseridas no padrão de sequência triádica nas variantes I-R-A/S. Contudo, podem-se também identificar perguntas de inquirição como "E assim, que figura temos aqui? É ali para o Jorge." ou ainda "André, que figura é esta?".

Através do questionamento, Beatriz procura desenvolver nos alunos a linguagem matemática (ver Quadros 3 e 4).

Beatriz: Quem é este?

Alunos: É o rectângulo.

Beatriz: O rectângulo, quantos lados tem?

Alunos: Quatro.

Beatriz: E o quadrado?

Alunos: Quatro.

Beatriz: Então são iguais?

Alunos: O quadrado tem os lados todos iguais e o rectângulo …

Aluna: O quadrado tem os lados todos iguais e o rectângulo tem dois lados maiores e outros mais pequenos.

Beatriz: O rectângulo tem os lados iguais dois a dois.

Quadro 3 – Excerto do Episódio 3 referente à 1.ª aula de Beatriz

No Quadro 3 observa-se o padrão de interacção de sequência triádica na variante I-R-S. Associado a este padrão, a professora colocou perguntas de confirmação: "Quem é

este?", "O rectângulo quantos lados tem?"; e perguntas de inquirição: "Então são iguais?". Esta pergunta de inquirição envolve mais raciocínio, pois o aluno teria de explicar as diferenças entre o quadrado e o rectângulo.

Beatriz teve ainda a preocupação de reformular o que os alunos diziam, de modo a clarificar as suas ideias e desenvolver a linguagem matemática, evidenciando assim alguma negociação e oportunidade de desenvolvimento de significados matemáticos (ver Quadro 4).

Beatriz: Como é que sabes que é o círculo? Estás a espreitar!
Aluno: Porque é redondo.
Beatriz: Porque é redondo. Tem uma linha curva.

Quadro 4 – Excerto do Episódio 4 referente à 1.ª aula de Beatriz

As professoras utilizaram também perguntas de focalização, como se pode verificar no Quadro 5, procurando assim concentrar a atenção do aluno em aspectos considerados importantes à resolução da tarefa, confrontando o desenho do aluno com o da ficha de trabalho.

Augusta: Olha, Tiago, vamos olhar para o eixo (…) diz lá uma coisa, agora vamos comparar com este. Achas que a casinha está encostada ou separada do eixo? (…)
Tiago: Separada.
Augusta: Está separada? Ora mostra-me onde é que ela é separada do eixo, aqui no meu desenho. Está separada?
Tiago: Não.
Augusta: E a tua, está separada?
Tiago: [Acenou afirmativamente].
Augusta: Então como é que vamos resolver isso? [Pausa] Vamos procurar uma forma de resolver? Como é que vais construir a casa junto ao eixo como está aqui? (…) Vamos fazer as paredes encostadas, Tiago.

Quadro 5 – Excerto do Episódio 5 referente à 2.ª aula da Augusta

A discussão em grande grupo como forma de partilha de ideias, processos e resultados do trabalho desenvolvido não teve lugar em nenhuma aula observada das três professoras. Contudo, pareceu ter sido indispensável em algumas aulas de Augusta e Célia. A reflexão em torno do trabalho desenvolvido esteve presente em duas aulas de

Augusta, mas não incluiu a discussão de ideias matemáticas. Veja-se o exemplo do Quadro 6, decorrido após a resolução de uma ficha de cálculo combinatório.

Augusta: De é que gostaste mais? (...).
João: Gostei de fazer… o losango e gostei de adivinhar.
Augusta: De adivinhar, ah foi?! A parte que mais gostaste foi de adivinhar como é que podias pintar?
João: [Acenou afirmativamente].
Marta: Queria fazer mais vezes.
Augusta: De que é que gostaste mais? Qual foi a parte que gostaste mais?
Marta: Gostei de descobrir e de pensar.
Augusta: E o Tiago, não gostaste Tiago? Gostaste?
Tiago: Quero fazer mais vezes.
Augusta: Porquê?
Tiago: Porque é uma actividade bonita.
Augusta: É bonita. Mas eu assim não percebo porque é que é bonita?! O que é que gostaste?
Tiago: Gostei de descobrir.
Augusta: De descobrir? Qual foi a parte que nós descobrimos? O nome dessa figura? Foi isso que mais gostaste de descobrir? Só o nome dela? Foi a parte que tu mais gostaste? Descobrir como é que se chamava essa figura? Só descobrimos como é que se chamava o losango? Não fizemos mais nada?
Tiago: A pintar.
Augusta: E descobrimos a pintar, é?
Tiago: [Acenou afirmativamente].
(…)
Augusta: Porque é que gostaste? Foi tão difícil, não foi? Não achaste difícil?
Maria: Porque pensei muito.
Augusta: Porque pensaste muito? Então se pensaste muito é porque era muito difícil! Foi?
Maria: [Acenou negativamente].

Quadro 6 – Excerto do Episódio 6 referente à 3.ª aula de Augusta

O Quadro 6 evidencia várias perguntas de inquirição inseridas na sequência I-R-S. Contudo, foi perdida a oportunidade dos alunos serem estimulados a explicar e justificar as suas ideias, e de acrescentarem conhecimento ao que já possuíam por não ter havido uma reflexão e síntese em torno das possíveis soluções e processos de organização.

Relativamente aos meios de comunicação, a linguagem verbal oral, as representações visuais e as activas foram os mais usados. Ressalve-se o facto dos alunos ainda não dominarem a comunicação escrita. Beatriz preocupou-se em tornar a linguagem dos alunos matematicamente mais adequada (ver Quadros 3 e 4).

Discussão e conclusão

A comunicação por questionamento, segundo a caracterização de Ponte e Serrazina (2000) esteve presente nas aulas das três professoras. No presente estudo, o tipo de perguntas veiculado foi sobretudo de confirmação e de inquirição, segundo a designação de Matos e Serrazina (1996) e de Ponte e Serrazina (2000). As perguntas de confirmação baseavam-se na memória como forma de verificar conhecimentos. Estes resultados convergem parcialmente com os apresentados por Menezes (1995) que estudou o tipo de perguntas que os professores do 2.º ciclo mais colocam aos alunos em sala de aula, tendo distinguido as questões de verificação de conhecimentos, que neste artigo se entendem como as de confirmação, e as questões de pensamento divergente que aqui se entendem por perguntas de inquirição. As perguntas de inquirição, segundo a designação de Matos e Serrazina (1996) e de Ponte e Serrazina (2000), embora menos usadas do que as anteriores, estiveram presentes nas aulas das três professoras, muitas vezes associadas ao padrão de sequência trádica I-R-S (Martinho, 2007). Relativamente aos padrões de interacção registou-se predominância do padrão de sequência triádica Iniciação-Resposta-Avaliação sobre o padrão Iniciação-Resposta-Seguimento. A respeito deste último padrão e de acordo com Martinho (2007), o professor ao dar continuidade à resposta do aluno tem a oportunidade de colocar uma nova questão que pode ser incentivadora do raciocínio dos alunos. Nas aulas observadas neste estudo, verificou-se um subaproveitamento destas oportunidades, o que resultou numa fraca promoção da discussão e argumentação nos alunos.

Os resultados da análise permitem identificar aspectos já referidos por Martinho (2007) quando analisou as práticas de professores do 2.º e 3.º ciclos no âmbito da comunicação matemática. A autora identifica o nível de monopolização do discurso como uma das dificuldades dos professores nas suas aulas. De algum modo, este aspecto foi também aqui identificado quando sobressai o padrão de sequência triádica Iniciação-Resposta-

Avaliação, frequentemente utilizado pelas professoras do estudo, indicando assim algum controlo do discurso por parte das professoras.

Em jeito de remate, o estudo aqui descrito permitiu conhecer um pouco mais sobre as práticas das professoras do 1.º ciclo relativamente à promoção da comunicação matemática.

Referências bibliográficas

Almeida, M. G. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: dois estudos de caso com futuros professores*. (Tese de Mestrado, Universidade do Minho).

Bishop, A. J. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and Dynamics. In B. Christiansen, A. A. Howson & M. Otte (Org.), *Perspectives on mathematics education,* (Tradução de J. M. Varandas, H. Oliveira & J. P. Ponte), pp. 1-47. Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Martinho, M. (2007). *A comunicação na sala de aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Tese de doutoramento em Educação, Lisboa: Universidade de Lisboa.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas dos professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta.* Dissertação de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores.* Tese de doutoramento em Educação, Lisboa: Universidade de Lisboa.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM/IIE [Trabalho original publicado em 1991].

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Romão, M. (1998). *O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática: Um estudo realizado com quatro professores no contexto das aulas de apoio de Matemática*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: APM.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. (pp. 163-201). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in Mathematics classes: Funneling or focusing? In H. Steinbring, M. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom.* (167-177). Reston: NCTM.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods*. (5.ª edição). Newbury Park: Sage.

O NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA NO 1.º CICLO: CONCEPÇÕES DE CINCO PROFESSORAS[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Isabel Velez
Agrupamento de Escolas Dr. Azevedo Neves, Amadora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
velez@campus.ul.pt

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de um estudo exploratório com cinco professoras do 1.º ciclo do ensino básico de um mesmo Agrupamento, cujo objectivo é analisar as suas concepções relativamente ao novo programa de Matemática, que estão a usar com os seus alunos do 3.º ano de escolaridade. Através de entrevistas individuais semi-estruturadas, pretendemos conhecer as concepções das docentes sobre o novo programa, o processo de adaptação e o balanço que fazem da sua introdução. As professoras têm posições totalmente diferentes sobre o novo programa. Duas são muito críticas, considerando que o novo programa valoriza aspectos que não merecem relevo, como o raciocínio, e que lhe faltam aspectos essenciais, como a atenção aos algoritmos, o conhecimento de termos matemáticos, a sistematização de processos. Outras duas valorizam os aspectos inovadores no novo programa, considerando que os alunos aderem e aprendem melhor a Matemática. Todas consideram que houve uma mudança brusca do antigo programa para o novo, o que lhes tem trazido algumas dificuldades.

Palavras-chave: Programa de Matemática, Concepções, Raciocínio, Tarefas, 1.º ciclo

Introdução

O novo programa de Matemática (ME, 2007) entrou oficialmente em vigor em todo o país (para o 1.º, 3.º, 5.º, e 7.º anos) em Setembro de 2010. Trata-se de um programa que se apresenta na continuidade do programa anterior (ME, 1990), embora com alguns aspectos inovadores. Assim, no 1.º ciclo, destaca-se a atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a valorização da geometria através do estudo informal de transformações, a valorização da estatística (aspectos que praticamente não existiam no programa anterior) e a abordagem diferente ao estudo das operações aritméticas, valorizando-se o papel dos alunos no processo de construção dos algoritmos.

[1]Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/0989311/2008).

Os resultados da introdução deste novo programa dependerão, em grande medida, do modo como os professores se posicionarem em relação a ele e como o puserem em prática. Assim, o objectivo deste estudo exploratório é analisar as concepções dos professores do 1.º ciclo relativamente ao novo programa de Matemática, que já aplicam com os seus alunos, na sala de aula.

Concepções dos professores sobre o ensino da Matemática

As concepções podem ser vistas como elementos estruturantes do conhecimento, que definem a nossa forma de pensar, ser, estar e actuar (Ponte & Chapman, 2006). O conhecimento profissional dos professores determina, em grande medida, o modo como estes actuam na sua prática profissional. Sistematizando a investigação realizada até então, Thompson (1992) refere que, de uma forma geral, as concepções dos professores relativamente à Matemática se podem classificar em três grupos: (i) centradas na resolução de problemas, vendo este domínio em constante problematização, descoberta e expansão; (ii) como visão platónica, encarando-a como estática e universal, cabendo-nos apenas estudá-la e conhecê-la melhor; e (iii) numa perspectiva instrumental, como utensílio que utilizamos para atingir certos fins. Por outro lado, esta autora indica quatro grandes tipos de concepções relativamente ao ensino da Matemática: (i) centradas no aluno e na sua construção individual do conhecimento; (ii) centradas no conteúdo mas com ênfase na compreensão conceptual; (iii) centradas no conteúdo mas com ênfase no desempenho (*performance*); e (iv) centradas na sala de aula, isto é, no conhecimento produzido pela investigação sobre aulas eficazes. Thompson (1992) indica ainda que as concepções que se focam no conteúdo dando ênfase ao desempenho têm muito a ver com a teoria do treino repetitivo (*drill theory*), já descrita e criticada por educadores matemáticos nos longínquos anos de 1930, e que assume como ideia central a automatização dos procedimentos de cálculo pelos alunos, sem que estes tenham que dar muita atenção a compreender os erros que cometem.

Na investigação realizada em Portugal (tal como aconteceu em muitos outros países), as categorias gerais relativamente à Matemática indicadas por Thompson (1992) foram passando para segundo plano. Em contrapartida emergiram diversos aspectos relativos ao ensino da Matemática como centrais para a análise das concepções e práticas lectivas dos professores, incluindo a sua perspectiva sobre as finalidades e objectivos do ensino desta disciplina, as tarefas usadas na sala aula, os modos de trabalho com os alunos e os

processos de gestão curricular (Canavarro, 2003; Ponte, 2005; Ponte & Serrazina, 2000; Viseu, 2008). São estes pontos que tomamos em consideração no presente trabalho.

Metodologia

Este estudo, de cunho exploratório, segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) e foi realizado em 2010/11. O estudo tem lugar num Agrupamento localizado na zona limítrofe de Lisboa que integra três escolas: duas EB1/JI e uma EB2,3/ES, com aproximadamente 1200 alunos, entre os 3 e os 26 anos (no ensino diurno).

As participantes neste estudo são cinco professoras do 1.º ciclo do ensino básico, que leccionam neste agrupamento há seis anos lectivos ou mais e que pertencem ao respectivo Quadro: Ana, Beatriz e Carla têm mais de 20 anos de serviço, enquanto Daniela e Eva têm menos de 15 anos de serviço Relativamente ao seu percurso formativo, as três professoras com mais tempo de serviço tiveram a sua formação inicial no Magistério Primário, tendo realizado formação, posteriormente, para equivalência à Licenciatura e as outras duas professoras frequentaram uma escola superior de educação. Todas têm frequentado ações de formação pontuais e algumas participaram no Programa de Formação Contínua: Beatriz (um ano no PFC de Ciências), Carla e Daniela (um ano no PFC de Matemática). Todas acompanharam as suas turmas, desde o 1.º ano de escolaridade. Foram seleccionadas para esta investigação porque constituem o grupo das professoras que leccionam o 3.º ano de escolaridade neste agrupamento e estamos interessados em conhecer as suas concepções sobre o novo Programa de Matemática que começaram a leccionar precisamente este ano lectivo.

Cada entrevista durou cerca de 45 minutos e foi realizada, separadamente, com cada professora, na sala de trabalho individual, de cada escola. A entrevistadora (também professora no mesmo agrupamento e já conhecida das professoras) manteve um discurso informal de forma que as professoras não se sentissem avaliadas nas suas respostas às diversas questões. Assim, durante as entrevistas, registada em áudio, as professoras falaram do seu trabalho na leccionação da Matemática e deram a sua opinião relativamente à aplicação do novo programa, referindo o que consideram como pontos negativos e pontos positivos, e no modo como encaram as mudanças relativamente ao programa anterior. As entrevistas foram transcritas e sujeitas a análise de discurso (Fiorentini & Lorenzato, 2006), tendo em vista perceber os significados que

estruturam a sua relação com o novo programa. A análise considera as perspectivas das professoras sobre o novo programa relativamente às suas finalidades e objectivos gerais, tarefas, modos de trabalho na sala de aula e gestão curricular, temas muito trabalhados na investigação em Portugal acima referida e selecionados a partir do material empírico recolhido. Para dar mais unidade à compreensão das perspectivas das professoras, considera-se também a sua avaliação global do processo de concretização do novo programa.

Finalidades e objectivos gerais

As finalidades e objectivos gerais do programa constituem um referencial curricular importante. O anterior programa de Matemática afirma que "as grandes finalidades do ensino da Matemática para o conjunto dos três ciclos do Ensino Básico" (incluindo portanto o 1.º ciclo) são desenvolver as capacidades de raciocínio, comunicação e resolver problemas e que o programa se desenvolve "a partir da actividade considerada fundamental — a resolução de problemas" (ME, 2007 p. 163). Já o novo programa (ME, 2007) enuncia duas grandes finalidades, que podemos resumir como (i) conhecer, compreender e ser capaz de usar a Matemática e (ii) desenvolver atitudes positivas e apreciação da Matemática. A um nível mais específico, o programa aponta nove objectivos gerais de aprendizagem que incluem ser capaz de lidar com representações, comunicar, raciocinar matematicamente, resolver problemas e estabelecer conexões.

As professoras não se referem explicitamente às finalidades e objectivos gerais do programa. No entanto, implicitamente, tomam posições que deixam transparecer a sua posição relativamente a esta questão. Ana estabelece do seguinte modo o contraste entre o antigo e o novo programa e refere que continua a dar grande relevo aos aspectos do programa anterior que considera fundamentais no ensino desta disciplina:

> Estes programas agora… (abana a cabeça negativamente) é só cálculo mental, raciocínio… Mais não sei quê. Contas, operações, numeração romana…? Quase nada! E depois é isto tudo assim… Nós damos porque sabemos que temos que dar!

Na sua perspectiva, o antigo programa salienta aspectos processuais (contas, operações…) e o conhecimento de certas representações (como a numeração romana), enquanto o novo programa salienta o cálculo mental e o raciocínio, ideias que lhe

parecem muito difusas e inadequadas como orientações fundamentais para o ensino-aprendizagem. Uma concepção semelhante é apresentada por Beatriz, quando diz que os alunos podem "nem saber fazer as contas", o importante é que consigam fazer o "raciocínio":

> Acho que passámos do 8 para o 80. Eles têm que saber fazer tudo. Tudo é importante. É importante eles chegarem ali e aplicarem os conhecimentos que têm, não só através dos desenhos, mas também através do cálculo. Agora os meninos têm é que chegar ao resultado! Podem nem saber fazer contas, mas o que importa é chegar ao resultado!! O resultado está lá! O raciocínio está lá e agora é só o que interessa! Depois no dia a dia… As coisas não são assim!

Deste modo, Ana e Beatriz valorizam sobretudo orientações que reconheciam no programa anterior mas não reconhecem no novo programa. Continuam a ter como referência o programa antigo e não o novo programa, fazendo, porém, uma interpretação muito própria de ambos. No caso do programa de 1990, Ana e Beatriz consideram nucleares aspectos que este programa não valoriza e, no caso do programa de 2007, criticam fortemente aspectos que consideram negativos mas que já eram salientes no programa de 1990 (nomeadamente o raciocínio).

As restantes professoras também não se mostram muito familiarizadas com as finalidades e objectivos gerais do novo programa mas mostram uma posição diferente. O seu discurso valoriza a utilização de vários tipos de representação e de estratégias de raciocínio e a importância dos alunos desenvolverem a sua capacidade de comunicação. É o que evidenciam nas seguintes afirmações:

> Às vezes usam umas palavras que eu fico assim "Eh lá, o que é que queres dizer com isso?" (ri-se) Ou às vezes nós usamos uma linguagem demasiado complicada, e eles a explicar, explicam melhor aos outros… Mas é engraçado. Antigamente (…) não raciocinavam… Era só fazer a conta. (Eva)

> O resultado é o mesmo e a estratégia utilizada não tem que ser igual. Cada um tem a sua para atingir o objectivo final e eu tenho que considerar isto tudo normal. (Carla)

> Os [modos de representação] mais utilizados talvez sejam as tabelas, porque agora as tabelas são muito… É tudo à base de tabelas… Ou então os próprios desenhos. (Daniela)

Síntese. As professoras parecem muito pouco familiarizadas com as finalidades e objectivos gerais do novo programa. Todas consideram que este dá grande relevo ao raciocínio, à comunicação e às representações informais. Ana e Beatriz não vêem esta mudança como positiva e dão maior importância a alguns dos aspectos do programa anterior, que continuam a aplicar na sua prática. Por sua vez, as outras três professoras, encaram a mudança de forma positiva.

Tarefas

As tarefas a propor aos alunos são um elemento estruturante das práticas profissionais dos professores. Ana salienta a realização de exercícios (operações, contas) e tarefas indutoras da memorização de termos matemáticos (divisor, quociente, resto…), que considera centrais e que eram valorizadas no programa anterior, mas não no actual:

> Fazíamos muito trabalho, muitas operações, muitas contas. Eu agora ainda mando ao quadro para fazer as continhas, os termos, porque faz muita falta! Já dei os termos todos! É essencial saber os termos: o divisor, o quociente, o resto…

Por sua vez, Carla sublinha a maior complexidade das tarefas que propõe no quadro do actual programa, aspecto que valoriza como muito positivo:

> Os outros [referindo-se às tarefas realizadas com o antigo programa] eram muito mais simples. Por exemplo: Tens 100 pinhas, caíram trinta, quantas ficaram?

Eva formula igualmente uma perspectiva muito crítica em relação ao programa anterior no que respeita às tarefas a propor aos alunos:

> No outro [programa], era mais mecanização. Repete, repete, até mecanizar o exercício, o mecanismo, A maior parte das vezes era assim… Depois de repetirem não sei quantas vezes, chegavam lá. [em tom depreciativo].

Esta professora vê de modo negativo a mecanização tradicional de exercícios que era feita na sala de aula e no seu discurso nota-se entusiasmo quando se refere à resolução de problemas, nomeadamente a discussão das soluções encontradas em grupo, as representações informais e a crescente autonomia dos alunos na realização deste tipo de tarefas:

> Então, vêm aqui, usam o quadro, explicam à maneira deles, mostram ou levam a sua folha, fazem os desenhos. Outras vezes também fazem a pares, outras vezes fazem a grupos…

Síntese. O discurso das professoras evidencia claramente a existência de duas concepções distintas em relação às tarefas a propor aos alunos. Por um lado, Ana e Beatriz consideram que o novo programa desvaloriza os exercícios, visando a aprendizagem de procedimentos e conceitos que consideram importantes. Por sua vez, Carla e Eva têm uma opinião oposta, considerando que o novo programa leva a propor tarefas mais complexas e estimulantes, com resultados positivos na aprendizagem.

Modos de trabalho na sala de aula

O modo como se trabalha na sala de aula tem uma influência decisiva no que se aprende. Beatriz mostra preferência pela forma de trabalho em grande grupo, o modo de trabalho em que o professor pode exercer o maior controlo sobre o desenvolvimento da aula. Justifica-o do seguinte modo:

> Porque sei que as dificuldades de uns, são as dificuldades de muitos! Então mando sempre um ao quadro… E depois… Todos juntos, vamos dizendo: "Como é que devemos pensar?", "Como é que havemos de fazer?". Depois um vai dizendo uma coisa, outro vai dizendo outra e é assim!

Como consequência da aplicação do novo programa, as restantes professoras reconhecem que as suas práticas lectivas estão a sofrer mudanças, diversificando as suas metodologias. Assim, Ana e Carla trabalham com os alunos individualmente e em grande grupo e Daniela começou agora a modalidade de trabalho a pares e,

esporadicamente, em pequeno grupo. Eva descreve as diferentes metodologias de trabalho na sala de aula, destacando que, à medida que os alunos se foram adaptando às novas tarefas, ela foi arriscando novos modos de trabalho:

> Vêm aqui, usam o quadro, explicam à maneira deles, mostram ou levam a sua folha, fazem os desenhos. Outras vezes também fazem a pares, outras vezes fazem a grupos… Mas depende da actividade… Por exemplo, houve uma que, de acordo com um horário, tínhamos que organizar uma vista ao Jardim zoológico, porque nós até vamos a essa visita. Então essa foi em grupos…

Síntese. A maior parte das professoras considera que, com o novo programa de matemática, os modos de trabalho na sala de aula têm vindo a sofrer alterações. Consideram que os alunos devem assumir uma autonomia cada vez maior, trabalhando por vezes em pares e em grupos, e devem a assumir a responsabilidade de comunicar a toda a turma os seus raciocínios.

Gestão curricular

A gestão curricular, incluindo a planificação do trabalho antes das aulas e a sua condução na sala de aula, constitui uma faceta importante da prática profissional do professor (Ponte e Serrazina, 2004). O manual escolar constitui usualmente um importante instrumento de gestão curricular. Ana, no entanto, diz que este ano não o utiliza e planifica actividades de acordo com o antigo programa. Na sua perspectiva, os assuntos realmente importantes não são devidamente abordados no manual escolhido:

> Aquele livro é enorme!! Aquilo é uma coisa!!! Mas como vamos ter tempo para fazer aquilo tudo??! Não há tempo para sistematizar as coisas! (…) É problemas, é números por extenso, é ordens, é classes. Ali dá-se mas muito levemente! Problemas normais, problemas de antigamente! Eles também precisam disso!! Não é só assim… (abana as mãos). É preciso saber: dados, indicação, operação! Bem… é o que temos!

Beatriz também demonstra estar insatisfeita com o manual, em especial pelo facto de valorizar muito as representações informais (“desenhos”) e conter uma reduzida quantidade de exercícios envolvendo “coisas práticas”:

> Tu pegas no manual deles e é tudo raciocínio! Mas coisas práticas, eles não te conseguem resolver! (…) Mas os manuais agora focam-se só nos desenhos… Mas em quaisquer livros! São todos iguais!! Só raciocínio, só raciocínio… Pronto, tudo através de desenhos! É que depois, nem sequer têm espaços para fazer grandes contas!

Pelo seu lado, Daniela e Eva tecem elogios ao manual, apesar de reconhecerem a dificuldades das tarefas propostas. Eva reconhece que usa o manual como apoio para a gestão curricular e refere também que a sua organização já não é tão clara como no antigo programa. Refere que isso, por vezes, se torna difícil para ela:

> Sim… neste (apontando para o manual). Neste! Este é bom, só que a nível de compreensão é um bocado difícil. (Daniela)

> Depois aquela sequência tão linear, "Agora vou dar sólidos, agora medidas…", isso já não existe, e acabas por perder-te um bocadinho. Aparece-te um problema e pensas "Ai, ainda não dei isto!" (Eva)

Síntese. O discurso das professoras deixa transparecer que o trabalho com o novo programa tem correspondido a um período de adaptação no campo da gestão curricular. Todas consideram que as tarefas propostas no manual escolhido são mais complexas do que no manual anterior, o que, na opinião de algumas é positivo e de outras é negativo. Eva refere que deixou de existir a linearidade que caracterizava os manuais antigos, o que lhe tem dificultado a planificação de actividades. Possivelmente, será uma dificuldade sentida por todas, fazendo com que Ana e Beatriz rejeitem tão veemente o novo manual.

Avaliação global

De um modo ou de outro, todas as professoras sentem dificuldades na aplicação do novo programa. Algumas indicam que não se sentem confortáveis em trabalhá-lo com os seus alunos. É o caso de Beatriz e Ana, que assumem claramente o seu descontentamento. Por exemplo, Ana, mostra preocupação que os alunos não aprendam, devido à falta de "sistematização":

> É um programa tão extenso e nada é sistematizado (…) Agora a seguir vêm os números decimais e quero ver o que vai sair dali. Nós

> trabalhávamos os números decimais e estávamos ali que tempos, depois passávamos para outra coisa e voltávamos atrás.

Outras professoras revelam receio, temendo que os seus alunos não consigam acompanhar as modificações, que, segundo elas, ocorreram de um ano para o outro. É o caso de Eva, que refere ter sido uma mudança muito drástica:

> Sabes que isto foi um grande pulo, porque o programa mudou muito e agora obriga-os a pensar e eles não estão habituados.

Todas as professoras concordam que os alunos se sentem mais motivados com as tarefas que são apresentadas agora. No entanto, Ana refere que ainda não se pode afirmar que o trabalho realizado segundo o novo programa tenha contribuído para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos:

> Não, ainda é muito cedo. Os que se destacam, já se destacavam da outra maneira, por isso, não. O rendimento deles é igual, o raciocínio mantém-se. Eles continuam a fazer o raciocínio de outra maneira. Os novos programas não vieram abrir nada de especial!

Em contrapartida, Eva diz que começa a notar mudanças na forma de raciocínio e no modo como os alunos encaram as situações problemáticas. Na sua perspectiva, estes passaram a reflectir mais e a encarar as tarefas como mais entusiasmo, por exemplo quanto têm de descobrir o maior número possível de diferentes soluções:

> Mas é engraçado. Antigamente davas um problema e eles começavam logo: "É de mais! É de menos! Dividir!". Acabavam por acertar sempre! Alguma delas tinha que ser… Mas não raciocinavam… Era só fazer a conta. Aí é que eu noto diferença. Eles já não perguntam isso, já não se preocupam com isso, já pensam mais.

Daniela e Eva dizem que o novo programa é mais difícil, o que, na sua opinião, é positivo, pois os alunos são mais estimulados e ficam mais motivados. Daniela, por exemplo, destaca a valorização de diferentes estratégias de raciocínio:

> É comum, eles próprios dizerem: "Professora, eu cheguei ao mesmo resultado mas fiz de maneira diferente!". Eu própria incentivo a isso e explico. Por exemplo quando são aqueles problemas de multiplicações

> por filas e colunas. Há uns que preferem começar pelas filas, outros pelas colunas, depois há outros que fazem por partes (…) E eu deixo… deixo surgir…

Algumas professoras estabelecem uma relação causa-efeito entre o surgimento das provas de aferição de 4.º ano (obrigatórias, desde há alguns anos) e a alteração do programa. No seu entender, os resultados das provas de aferição contribuíram para a criação de um novo programa e, consequentemente, de novos manuais:

> Isto tem a ver com as provas de aferição (encolhe os ombros). Na altura nós queixávamo-nos que não havia exercícios deste tipo em lado nenhum, e não fazíamos nada disso com os miúdos. (Ana)

Estas professoras parecem acreditar que a mudança no programa se deve a razões políticas, apenas para que os resultados das provas sejam melhores, e não para que os seus alunos tenham uma experiência de aprendizagem mais completa.

Síntese. Todas as professoras evidenciam preocupação com o novo programa, embora em alguns casos com uma avaliação globalmente positiva e noutros casos globalmente negativa. Por um lado, Ana e Beatriz consideram que o programa prejudica a aprendizagem pois omite conhecimentos importantes e não dá lugar à sistematização de conhecimento. Por outro lado, Daniela e Eva consideram que as tarefas que agora são propostas estimulam mais o raciocínio e a comunicação dos alunos e também a sua autonomia.

Conclusão

As cinco professoras mostram posições muito divergentes relativamente ao novo Programa de Matemática – duas têm uma perspectiva fortemente negativa, duas têm uma visão positiva e uma tem uma posição intermédia. As professoras mais críticas consideram que o novo programa prejudica fortemente a aprendizagem e continuam a trabalhar segundo o programa antigo, em nome da preparação dos alunos para o futuro e para a vida activa. Nos termos de Thompson (1992), parecem assumir uma concepção centrada no conteúdo com ênfase no desempenho, valorizando a memorização e o treino repetitivo. As professoras com uma visão mais favorável valorizam aspectos que são

sublinhados no novo programa, como o raciocínio, o uso de representações informais e a comunicação, também em nome do desenvolvimento dos alunos. Nos termos de Thompson (1992), parecem valorizar o conteúdo com ênfase na compreensão conceptual e também os processos de trabalho na sala de aula. Todas as professoras reconhecem que se encontram num processo de transição entre o velho e o novo programa, o que tem colocado dificuldades, não só aos alunos, mas também a elas enquanto professoras.

A natureza das imagens que os professores criam sobre um programa e a sua possível distância relativamente ao texto programático ficam bem evidenciadas neste estudo. As concepções que as professoras têm sobre o ensino da Matemática, isto é, aquilo que elas valorizam neste ensino, constitui a lente fundamental (Ponte, 1992) através da qual vêm os programas. Trata-se de uma lente poderosíssima que as leva a ver o mesmo objecto de modos radicalmente diferente. Note-se, porém, que, para além das suas concepções, o que os professores pensam de um programa decorre também do modo como este é trabalhado nos espaços de formação, tornando-se claro que neste campo há ainda muito por fazer.

As cinco professoras tiveram reduzida formação relativamente ao novo programa, sendo as diferenças que evidenciam muito associada à sua proximidade relativamente à formação inicial. O seu Agrupamento solicitou a participação no programa de Formação Contínua de Professores do 1.º ciclo, mas esta não se chegou a concretizar. Por isso, a interpretação que as professoras fazem do programa apoia-se fortemente nas mensagens apreendidas em contextos profissionais e nos manuais escolares. A realização deste estudo permitiu facultar os resultados ao Agrupamento, levando a Direcção a realizar, por iniciativa própria, sessões de formação interna para todos os professores de Matemática e de 1.º ciclo, o que, por sua vez, coloca novas questões: Qual a formação indicada para estes professores? Que mudanças conseguirá promover no seu conhecimento do programa e na sua prática profissional?

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994).*Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: Percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Ministério da Educação (1990). *Programa do 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC (disponível em sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Viseu, F. (2008). *A formação do professor de Matemática, apoiada por um dispositivo de interacção virtual no estágio pedagógico* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

SIMPÓSIO 6

TECNOLOGIAS E RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

TECNOLOGIAS E RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

Hélia Jacinto
Escola Básica José Saramago e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
helia_jacinto@hotmail.com

A rápida desactualização da actualidade

A integração das tecnologias de informação e comunicação na educação matemática continua a apresentar-se como um dos temas mais importantes e porventura dos mais frequentemente evocados nos diversos fóruns de investigação em educação matemática.

São muitos os esforços que vão sendo realizados para se ir actualizando e percebendo o estado da arte nesta área de trabalho e de investigação um pouco por todo o mundo. Por exemplo, no ICME 10, que teve lugar na Dinamarca, em 2004, a equipa designada para fazer a síntese da investigação e dos desenvolvimentos mais importantes na área das TIC na educação matemática, ao longo de um período temporal de cerca de dez anos, propôs-se identificar e caracterizar tendências, novas perspectivas e questões emergentes. Mas os próprios investigadores incumbidos da tarefa classificaram o seu trabalho de esmagador, face à profusão de estudos realizados e de publicações relatando investigações neste domínio (Leung, 2008). Além disso, assinalaram um outro factor que acrescenta dificuldades à tentativa de produzir uma súmula actual: devido ao avanço extremamente rápido da tecnologia, a "meia-vida" das publicações produzidas é relativamente curta, isto é, a literatura científica relativa ao trabalho com tecnologias (hardware e software) está em constante movimento e rapidamente parece ficar ultrapassada.

Esta pode ser uma das boas razões pelas quais este Simpósio se ergue sob o tema *Tecnologias e Recursos no Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Aliás, o tema do simpósio coincide com o que foi escolhido por um dos Grupos de Trabalho do CERME

(Technologies and Resources in Mathematics Education). Com efeito, a rápida evolução das tecnologias cria uma dificuldade de partida, que é a de estabelecer os contornos dos meios tecnológicos que pretendemos albergar na pesquisa dedicada à utilização de tecnologias no ensino e na aprendizagem da Matemática. O binómio tecnologias e recursos parece resultar da "necessidade de considerar as tecnologias no seio de uma variedade de recursos disponíveis para os alunos, para os professores, para os formadores, etc. Estes agentes podem agora tirar partido de software, de computadores, de quadros interactivos, mas também de ferramentas de geometria mais tradicionais, de livros de texto, etc." (Gueudet, Bottino, Chiappini, Hegedus & Weigand, 2010). Portanto, parece haver uma tentativa de encarar os vários tipos de materiais e dispositivos digitais como parte de um conjunto mais vasto de materiais curriculares e de recursos de ensino e aprendizagem.

No ICME de 2004 foi feita uma tentativa de clarificar o que entender por tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, tomando duas grandes categorias: hardware (processadores e equipamentos de input/output) e software (com fins gerais, para programação e especificamente destinado à Matemática).

HARDWARE	SOFTWARE
• Processadores Computadores Calculadoras Outros equipamentos portáteis • Equipamentos de input/output Input Aparelhos de captação de dados Internet Câmaras digitais, etc. Output (apresentação para a turma) Quadros interactivos Projectores	• Com fins gerais Folha de cálculo • Para programação LOGO BASIC (na calculadora) • Para a Matemática Software de cálculo simbólico Software de geometria dinâmica Software de traçado de gráficos (que corre nos computadores ou nas calculadoras gráficas) Software de tratamento de dados • Outros programas específicos

Figura 1. Categorização das tecnologias disponíveis para o ensino e aprendizagem da Matemática (Leung, 2008, p. 230).

Os autores, ao elaborarem a resenha dos resultados apresentados na literatura de investigação, apuraram as vantagens e os constrangimentos que trazem os seguintes recursos ao ensino e à aprendizagem da Matemática: i) quadro interactivo e calculadoras gráficas; ii) folha de cálculo, sistemas de cálculo simbólico, sistemas de geometria dinâmica. Note-se que a Internet não foi merecedora de grande atenção, ficando igualmente de lado as linguagens de programação e os pacotes destinados ao traçado de gráficos ou à análise de dados.

Panorama e tendências no presente simpósio

O simpósio "Tecnologias e recursos no ensino e aprendizagem da matemática" reúne um conjunto de trabalhos nacionais e além fronteiras, que deixam antever um debate interessante sobre o panorama actual da investigação, nesta área. Uma análise transversal e comparativa das comunicações presentes neste simpósio permite identificar traços e algumas tendências bem como os interesses actuais dos participantes, no que se refere à integração das tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática. Havendo neste simpósio diversas contribuições cujo objecto de estudo é a aprendizagem da Matemática mediada por uma ferramenta tecnológica, em contexto de sala de aula, ocorre-nos admitir uma maior facilidade em aceder a recursos e a espaços propícios ao desenvolvimento de tarefas que envolvem ferramentas tecnológicas, anteriormente vistas como dispendiosas e em número insuficiente para satisfazer as condições ideais. De facto, a grande maioria das contribuições deste simpósio foca a utilização de ferramentas tecnológicas em contexto de sala de aula. Os autores centram-se nas potencialidades de algumas tecnologias (computadores, calculadoras gráficas e robots, GeoGebra e folha de cálculo) e nos seus contributos para o ensino e a aprendizagem da Matemática, quer através do desenvolvimento de conceitos, quer de capacidades transversais.

O tema matemático que mais atenção recebeu dos autores é a Álgebra, verificando-se que alguns estudos aprofundam os contributos de software específico no desenvolvimento de conceitos e noções relacionados com o estudo de funções, com as equações e com modelos matemáticos que envolvem relações entre variáveis.

A Geometria não tem uma presença acentuada nos trabalhos submetidos, ficando igualmente pouco representados os ambientes de geometria dinâmica. Ao invés, surge uma evidente valorização do GeoGebra, que apesar de integrar todas as características de um programa de geometria dinâmica no plano, parece tornar-se um poderoso representante dos programas de traçado de gráficos, ganhando a sua utilização em sala de aula características semelhantes à da calculadora gráfica. Assim, o GeoGebra surge como ferramenta para o estudo da Álgebra e muito pouco na Geometria (apenas é estudada a sua utilização para tratar os lugares geométricos), contrariamente ao que poderia ser uma tendência natural, na esteira de muitos estudos que envolveram a utilização do Sketchpad e do Cabri. Parece igualmente de registar, no leque de comunicações propostas, uma total ausência da geometria no espaço.

O grande interesse e procura dos programas de traçado de funções, que se registou desde cedo na introdução das tecnologias na aula de Matemática, parecem surgir renovados pelas potencialidades do GeoGebra relacionadas com a sua componente algébrica. Um outro dado interessante que emerge das contribuições deste simpósio reside no facto de encontrarmos o GeoGebra a ser incorporado na aula de Matemática como uma ferramenta para o trabalho em modelação matemática.

Este último aspecto aponta também para o aparecimento de uma vertente teórica, centrada nos processos de modelação matemática e na aprendizagem de conceitos por via da exploração de modelos matemáticos, que não está habitualmente presente na discussão e na investigação acerca das tecnologias na aula de Matemática.

Além deste aspecto, a paleta de perspectivas teóricas abraçadas pelos autores dos trabalhos propostos é variada e rica, incluindo a Teoria da Actividade e a Aprendizagem Situada, a Teoria da Génese Instrumental, a Teoria das Situações Didácticas, bem como conceitos teóricos de índole mais particular, designadamente no âmbito do Pensamento Matemático Avançado, da Argumentação e Investigação Matemática e da Representação em Matemática.

Em síntese, o simpósio foca-se essencialmente na calculadora gráfica e no computador e, sobretudo, no software especificamente dedicado à Matemática, o que mostra uma actualidade interessante do ponto de vista da penetração de recursos específicos para a disciplina de Matemática e também da variedade de abordagens conceptuais. Ao mesmo tempo, parece reflectir menos investimento – na sala de aula e na formação de professores – numa maior diversidade de hardware e de software, situação a que poderá atribuir-se uma certa concentração dos trabalhos de investigação em alguns temas curriculares.

Referências bibliográficas

Gueudet, G., Bottino, R., Chiappini, G., Hegedus, S., & Weigand, H.-G.. (2010). Introduction – Technologies and resources in mathematical education. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (eds.) *Proceedings of CERME 6* (pp. 1046-1049), Lyon.

Leung, F. (2008). Information and communication technology in mathematics education. In M. Niss (ed.). *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 228-243), IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Dinamarca.

APRENDER MATEMÁTICA, INFORMÁTICA, E NÃO SÓ …COM ROBOTS. O PROJECTO DROIDE II

Elsa Fernandes[1]
elsa@uma.pt

Paula Abrantes
Eduardo Leopoldo Fermé
Luís Gaspar
Cristina Lopes
Sónia Martins
João Filipe Matos
Alcione Santos
Madalena Santos
Teresa Silva

Grupo de Investigação em Educação, Tecnologia e Sociedade,
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo

Com esta comunicação pretendemos apresentar o projecto DROIDE II – os robots na Educação Matemática e Informática. Este projecto tem como objectivo é compreender de que forma o uso dos robots como artefactos mediadores da aprendizagem contribui para que os jovens produzam significado e desenvolvam aprendizagem de tópicos e conceitos matemáticos e informáticos e sobre a possível articulação entre as duas áreas de conhecimento. Pretende-se também contribuir para a compreensão da participação em ambientes sociais digitais. O quadro teórico adoptado é a Teoria da Actividade (articulada com conceitos da Interacção Pessoa-Máquina – HCI) e a Teoria da Aprendizagem Situada.

A seguir, apresentaremos a base empírica do projecto bem como algumas considerações metodológicas no que concerne à recolha e análise de dados quando se tem como referencial teórico a Teoria da Actividade.

Tendo em conta que este é um projecto em curso e, por isso, ainda não existem resultados apurados apresentaremos os produtos que vão ser elaborados no âmbito do mesmo.

Palavras-chave: Aprendizagem, Robots, Matemática.

Introdução

Os robots da Lego foram apontados como sendo artefactos facilitadores da integração das tecnologias no processo de ensino/aprendizagem da Matemática. A aprendizagem

[1] Esta comunicação foi preparada no âmbito das actividades do projecto DROIDE II - Os Robots na Educação Matemática e Informática, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), contrato n.º PTDC/CPE-CED/099850/2008.

via construção de robots evoluiu bastante com os trabalhos de Seymour Papert, que criou o termo construcionismo e destacou não só a importância da construção e programação de robots para aprender Matemática e Ciências, bem como o seu potencial na aprendizagem da resolução de problemas e desenvolvimento da criatividade (Harel e Paper, 1991). Também Norton, McRobbie and Ginns (2007) abordam o potencial da utilização dos robots da Lego no trabalho dos alunos bem como no desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas. Fernandes, Fermé e Oliveira (2006) destacam que a utilização dos robots para aprender Matemática promove um incremento da discussão entre os alunos bem como a cooperação entre eles. Defendem ainda que a utilização de robots na aprendizagem da Matemática aumenta significativamente o nível de participação dos alunos e consequentemente a qualidade do que é aprendido.

Considerando que a robótica educativa é uma área relativamente nova em Portugal com pouca investigação dedicada a esta temática, decidimos criar um projecto – DROIDE II – cuja finalidade é compreender de que forma o uso dos robots como artefactos mediadores da aprendizagem contribui para que os jovens produzam significado e desenvolvam aprendizagem de tópicos e conceitos matemáticos e informáticos e sobre a possível articulação entre as duas áreas de conhecimento – na tentativa de contribuir quer para o desenvolvimento do conhecimento nesta área de investigação quer para a compreensão da participação em ambientes sociais digitais.

O DROIDE II adopta uma estratégia que coloca em diálogo o campo teórico e o campo empírico da investigação em quatro fases: 1) criação de problemas na área da Educação Matemática/Informática a serem resolvidos através dos robots e criação de robots para abordar problemas específicos na área da Educação Matemática/Informática; 2) criação de cenários de aprendizagem utilizando os robots, em diferentes contextos de aprendizagem (escolares, não escolares e virtuais); 3) análise da prática dos alunos aquando da resolução dos problemas utilizando os robots nos diferentes cenários de aprendizagem. 4) desenvolvimento de um conjunto de linhas orientadoras sobre a utilização destes artefactos em ambientes de aprendizagem (da Matemática, da Informática).

Enquadramento Teórico

Como foi anteriormente referido, o projecto visa compreender a aprendizagem da Matemática, Informática e outras, quando mediado por robots. Neste sentido, adoptou-se como perspectivas teóricas a Teoria da Aprendizagem Situada (Lave e Wenger, 1991, Wenger, 1998) e a Teoria da Actividade (essencialmente a 3ª geração – Engeström, 1987 e Engeström, 2001) articulada com conceitos da Interacção Pessoa-Máquina.

Considerando a aprendizagem como um aspecto da prática social, esta envolve a pessoa no seu todo. Isto é, inclui não só uma relação com actividades específicas, mas uma relação com as comunidades sociais, implicando ao indivíduo tornar-se um participante pleno. Em 1991, Lave e Wenger, defendem que a aprendizagem não é vista apenas como transferência de informação mas como um processo sócio-cultural, onde é pertinente:

> "(...) mudar o foco analítico do indivíduo como alguém que aprende para uma ideia de aprendizagem como participação no mundo social, e do conceito de processo cognitivo para uma visão mais alargada de prática social." (Lave & Wenger, 1991, p.43).

Aprender é um processo que tem lugar numa estrutura participativa e não numa mente individual (Lave e Wenger, 1991). Isto significa entre outras coisas, que a aprendizagem é mediada pelas diferentes perspectivas que existem entre os co-participantes. A dimensão social não é uma condição periférica da aprendizagem, mas é intrínseca a essa mesma aprendizagem. Em vez de perguntar quais os tipos de processos cognitivos e estruturas conceptuais que estão envolvidas na aprendizagem, Lave e Wenger (1991) questionam sobre os tipos de contratos sociais que criam um contexto adequado para que a aprendizagem tenha lugar. Situam a aprendizagem não na aquisição de estruturas, mas no acesso, por parte dos aprendizes, a papéis participantes em execuções de especialistas. A aprendizagem pode ser vista como uma característica da prática, que deve estar presente em todo o tipo de actividade.

> "A aprendizagem pode ser vista como um tipo especial de prática social associada a um certo tipo de participação designado por participação legítima periférica" (Hanks, p.18, in Lave e Wenger, 1991).

Assim, parece emergir como natural quando se quer compreender a aprendizagem adoptar conceitos como comunidade, prática, participação e reificação, e negociação do significado.

Mas os robots como artefactos mediadores da aprendizagem são uma peça chave neste puzzle. Os artefactos ganham relevância quando queremos compreender a aprendizagem como um fenómeno emergente da participação em práticas sociais. Contudo, pensar em artefactos e em particular no papel mediador da aprendizagem que desempenham, arrasta-nos para abordagens histórico-culturais.

O que significa dizer que um artefacto é mediador da aprendizagem? Significa que ele é algo com que a pessoa pensa, que torna significativo o processo de transformação dos objectos, ou seja, que lhe dá poder.

O conceito de mediação desempenha um papel central na Teoria da Actividade. Assenta no pressuposto de que o sujeito não age directamente com o meio ambiente, ou seja, não tem acesso directo aos objectos. A relação entre o sujeito e um objecto do ambiente é mediada por artefactos (Wertsch, 1991). Estes podem ser instrumentos, signos, linguagem, sistemas de contagem, técnicas mnemónicas, sistemas algébricos, diagramas, mapas que, entre outros, medeiam a actividade, são construídos pelos indivíduos e existem numa relação dialéctica entre as pessoas e a actividade (Wertsch, 1991).

Deste modo, assumem um papel relevante, para pensar a aprendizagem mediada por artefactos, conceitos como mediação, artefacto e sistema de actividade (3º geração da Teoria da Actividade)

O conceito de actividade (Engeström, 2001) inclui complexas inter-relações entre o sujeito individual e a comunidade onde está inserido. Os vários elementos que compõem um sistema de actividade colectiva são os seguintes:

a) Sujeito que é um indivíduo ou grupo de indivíduos cuja actuação é tomada como ponto de partida para a análise; b) o objecto é o "espaço do problema" em relação ao qual a actividade está direccionada e que é moldado ou transformado em outcome (produto/resultado) com a ajuda dos artefactos; c) as ferramentas e signos que são ferramentas físicas e simbólicas, externas e internas (instrumentos e signos mediadores) que desempenham o papel de artefactos de mediação entre o sujeito e o objecto; d) a comunidade constituída pelos indivíduos e/ou grupos que compartilham o mesmo objecto; e) a divisão do trabalho que evidencia formas implícitas ou explícitas de organização da comunidade relacionada com a transformação do objecto em outcome;

inclui a divisão horizontal das tarefas entre os membros da comunidade e a divisão vertical associada ao poder e ao status; f) e as regras que são os regulamentos implícitos e explícitos, normas e convenções que restringem e regulam as acções no interior do sistema de actividade.

O sistema de actividade colectiva trata-se da representação de um modelo dinâmico em que os componentes do sistema e as suas relações mútuas não são estáticas nem harmoniosas, mas são caracterizadas pela ambiguidade e pela mudança (Silva, 2008)

Porquê trazer ideias da Interacção Pessoa-Máquina (IPM ou HCI – Human-Computer Interaction)? Terry Winograd, Professor de Computação na Universidade de Stanford afirma que:

> "Human-computer interaction is the kind of discipline which is neither the study of humans, nor the study of technology, but rather the bridging between those two. (...) I think the challenge is to really keep knowledge of both the technology and the people playing off against each other in order to develop new things." (Preece, Rogers, Sharp, Benyon, Holland e Carey, 1994, p. 54)

IPM existe há algum tempo como um domínio de investigação e tem tido alguma visibilidade na concepção de aplicações informáticas. Contudo, emergiu a necessidade de contrariar a tendência em separar as pessoas e as máquinas. De um lado, o foco da investigação era colocado nas pessoas, como utilizadores de tecnologia, ou como criadores – aqueles que desenvolvem tecnologia; por outro lado, o foco colocava-se nas pessoas e nas suas aprendizagens ou na forma como utiliza a tecnologia e os condicionalismos e potencialidades naquela utilização. Pessoas e máquinas eram olhadas separadamente. Mas, e tal como foi referido anteriormente, a IPM preocupa-se em analisar e facilitar a interacção entre ambos, no mesmo contexto e no mesmo espaço. Compreender e representar como as pessoas interagem com as máquinas é perceber como o conhecimento é transmitido entre ambos. Mataric (2007) sugere que o princípio base desta interacção deve centrar-se na manipulação de objectos do mundo real. O mesmo autor apresenta um robot como sendo um sistema autónomo que existe no mesmo mundo físico que as pessoas, pode "sentir" o ambiente e actuar nesse mesmo ambiente para alcançar alguns objectivos. Podemos, desta forma, especificar alguns componentes do robot: i) um corpo físico, ou seja existe e realiza tarefas no mundo físico; ii) os sensores podem "sentir" e perceber o ambiente que o rodeia; iii) os motores que lhe permitem realizar determinadas acções; e iv) o processador que lhe permite ser

autónomo. Estas características permitem que interaja com as pessoas de forma mais real e autêntica. Como refere Powers (2008)

> "people work in the physical world, and so interfaces that also work in the physical world are most effective, the simples, and the most natural (p. 69)".

A base empírica do projecto Droide

Esta investigação é de natureza interpretativa e a base empírica do projecto tem como objectivo procurar evidência: (1) das aprendizagens matemáticas/informáticas, e outras, quando os robots são mediadores da aprendizagem o que poderá ser feito através da identificação e descrição: a) do reportório partilhado que constroem os jovens nessas práticas; b) das contradições que surgem nos ambientes de aprendizagem provocados pela introdução dos robots; c) do modo como essas contradições fazem emergir novas formas de actividade; d) dos contributos que o trabalho com robots pode ter no desenvolvimento da competência matemática/informática; (2) dos contributos para a aprendizagem que decorrem da participação em ambientes sociais digitais o que poderá ser feito através da identificação e descrição de: (a) como explicitam/comunicam os jovens modos de fazer e de pensar nestes ambientes; (b) como participam crítica mas construtivamente nesse tipo de ambientes; (c) como se consciencializam da sua própria responsabilidade e iniciativa que este tipo de participação exige.

Assim, decidimos recolher dados em quatro tipos de ambientes de aprendizagem: Formação inicial de professores, sala de aula de Matemática (3º ciclo), ambientes virtuais de aprendizagem (Droide Virtual), e na modalidade projecto (1º ciclo do Ensino Básico).

Formação inicial de professores – na Didáctica III – disciplina de um mestrado em Ensino da Matemática – cujo conteúdo se relaciona com a utilização das TIC na aula de Matemática, onde as alunas aprenderam a trabalhar com os robots e posteriormente os utilizaram nas suas aulas de Matemática para trabalhar temas como sejam as funções (7º ano – novo programa) e a trigonometria (9º ano). Convidaram a orientadora de estágio a entrar 'nesta aventura' com elas. As estagiárias 'ensinaram' a orientadora a trabalhar

com os robots. Em conjunto modificaram as propostas de trabalho existentes, no âmbito destas temáticas, criaram cenários de aprendizagem e implementaram as propostas de trabalho em contexto de sala de aula. Desta situação emergiram dois ambientes de recolha de dados: formação inicial de professores e sala de aula de Matemática (3º Ciclo).

Droide Virtual - O ProjectoDroide Virtual reuniu estudantes de três regiões, Madeira, Porto e Lisboa e docentes oriundos de Escolas Secundárias destas mesmas regiões (Santos, Fermé e Fernandes, 2007), os quais tinham um interesse comum, a aprendizagem da programação, não sendo necessário que os mesmos fossem alunos do curso Tecnológico de Informática. Os participantes foram distribuídos por três grupos virtuais, cada um deles formado por pelo menos um estudante de cada uma das três regiões e por um tutor pertencente a uma delas.

Criou-se oito problemas que desafiavam os estudantes à aprendizagem de conceitos importantes para conseguir concluir o que era proposto, não tendo sido resolvidos apenas problemas matemáticos.

Na constituição dos grupos virtuais a distribuição dos estudantes participantes e a escolha do professor tutor foram feitas em função da disponibilidade de horário dos mesmos. Cada participante recebeu um kitLEGO®Mindstorms® NXT, um tabuleiro para o desenvolvimento das actividades e uma ferramenta para auxílio à programação destes kits, a Plataforma MultiLinguagens MLP. Os requisitos e restrições de contexto nos problemas propostos, o tabuleiro utilizado, a plataforma de programação MLP, os robots, as regras de participação estabelecidas, bem como os tutores, foram elementos importantes para a organização desta prática (Santos, Fernandes e Fermé, 2011).

Uma História com robots (Fernandes, Gaspar, Lopes, Martins e Santos, 2011) – criou-se um cenário de aprendizagem que visava o trabalho na modalidade projecto com duas turmas do 1º Ciclo do Ensino Básico (uma turma do 2º ano e outra do 3º ano) num total de 40 alunos. O propósito final era que os alunos criassem uma história em que os robots construídos seriam os personagens da mesma. Começou-se por, numa primeira sessão permitir um primeiro contacto com os artefactos, construídos com Legos – uns robots outros não, visando que os alunos descobrissem e justificassem quais eram os robots e quais não eram e assim 'definissem' o que era um robot. Nas duas sessões seguintes os alunos construíram os seus próprios robots, seguindo algumas instruções

que lhes foram fornecidas e posteriormente aprenderam a programá-los. Neste processo aprenderam o que pode (e o que não pode) fazer um robot. Os alunos tinham três tipos de robots (RCX, NXT e PicoCricket) e podiam escolher construir um robot dentro de três categorias – humanóides, animais, e carros). Posteriormente criaram a história e encenaram-na. Os alunos trabalhavam em grupos de quatro. Cada grupo era composto por alunos do 2º e 3º anos. Durante este trabalho muitas e interessantes aprendizagens, em diferentes áreas, foram realizadas.

A recolha de dados para a análise e produção de evidência teve a duração de 6 meses nos diferentes contextos de aprendizagem e foi realizada através de: a) observação de ambientes de aprendizagem em que os robots sejam artefactos mediadores da aprendizagem; e b) de entrevistas informais aos diferentes participantes e com a imersão de subgrupos de investigadores no terreno. Foram utilizados gravadores vídeo e áudio na recolha de dados, das sessões de actividades, bem como nas entrevistas individuais e de grupo aos participantes. Foram tomadas as devidas precauções, em termos éticos, que uma investigação desta natureza exige.

Para a recolha de dados nos vários ambientes de aprendizagem foram tidos em consideração os seguintes aspectos: (1) o tempo de permanência no terreno ter de ser suficientemente longo para permitir a compreensão dos objectivos do sujeito para se engajar na actividade; (2) a necessidade de dar atenção a padrões amplos de interacção em vez de, a episódios curtos, de modo a perceber a direcção global da actividade; (3) a importância de usar várias técnicas de recolha de dados (como sejam entrevistas, realização de observações, gravação das sessões em vídeos e recolha de materiais históricos); (4) a necessidade do investigador compreender os factos do ponto de vista do sujeito (Nardi, 1996 em Mwanza, 2002).

As posteriores sessões de análise de dados, utilizando o enquadramento teórico acima referido, têm como objectivo: a) compreender a aprendizagem, da Matemática e Informática e outras, quando mediada por artefactos tecnológicos como sejam os robots; b) aperfeiçoar os problemas criados para serem resolvidos com robots bem como os robots para resolverem determinados problemas; c) aperfeiçoar os cenários de aprendizagem criados; d) caracterizar a participação em ambientes sociais digitais.

Nenhuma teoria oferece técnicas e procedimentos prontos a usar; ela é uma ferramenta conceptual e assim sendo, deve ser adaptada à natureza específica do objecto a ser

estudado. Engeström (1993) descreve três princípios da Teoria da Actividade quando se pretende operacionalizar os conceitos da mesma e que têm sido levados em consideração neste projecto. O primeiro é a necessidade de focalizar o sistema de actividade colectivo como unidade de análise. O segundo destaca a importância de identificar as contradições internas e externas, dentro e entre os vários componentes do sistema de actividade colectivo visto que estas são a base da aquisição de novo conhecimento sobre o sistema de actividade que está a ser analisado. O último, mas não menos importante, refere-se à necessidade de analisar o desenvolvimento histórico da actividade em questão no contexto em que ela normalmente acontece.

Considerações Emergentes

O Projecto Droide II, cuja duração é de três anos, está a meio do seu percurso. Num dos ambientes de aprendizagem (ambiente virtual de aprendizagem) a recolha está concluída. Nos outros três ambientes está em fase de conclusão. Consequentemente, ainda não existem resultados mas algumas evidências emergiram ao longo da recolha de dados e revelam-se prometedoras no que concerne à aprendizagem mediada por robots.

No final do projecto apresentaremos linhas orientadoras para a aprendizagem (da Matemática, da Informática e outras) mediada por robots e sobre a vivência em ambientes sociais digitais.

Pretendemos, quer através de artigos e comunicações apresentados (ou a apresentar), quer em publicações em revistas nacionais e internacionais, mostrar a importância que assumem os robots enquanto facilitadores da aprendizagem de modo a que o projecto possa contribuir para a melhoria de práticas lectivas e das aprendizagens.

O web-site do projecto Droide II está a ser construído e aspiramos com ele difundir o trabalho que está a ser realizado pela equipa do projecto. Disponibilizaremos: (1) relatos da experiência com: (a) pequenos vídeos; (b) descrição dos processos e produtos do projecto; (c) sumários das nossas aprendizagens; e (2) descrições e ilustrações de cenários de aprendizagem com robots.

Referências bibliográficas

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.

Engeström, Y. (1993). Developmental studies of work as a testbench of activity theory. In S. Chaiklin and J. Lave (Ed.), *Understanding practice: perspectives on activity and context*, Cambridge, Cambridge University Press, 64-103.

Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding. An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Fernandes, E., Fermé, E. Oliveira., R. (2006). Using Robots to Learn Functions in Math Class". *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: Technology Revisited*, pp 152-159. Hanoi University of Technology. Editors, Le Hung Son, Nathalie Sinclair, Jean Baptiste Lagrange and Celia Hoyles. Vietnam.

Fernandes, E., Gaspar, L., Lopes, C., Martins, S. e Santos, A. (2011). Uma História com robots. *Actas do ProfMat 2011*. APM. Lisboa. (Submetido).

Harel, I. and Papert, S. (1991). Situating Constructionism. In Harel, I. and Papert, S. (eds), *Constructionism*. Norwood, NJ, Ablex Publishing Corporation.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness and Personality* (Marie J. Hall, Trans.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press.

Mataric, M. (2007). *The Robotics Primer*. MIT Press, Cambridge, MA, 2007

Mwanza, D. (2002). *Towards an Activity-Oriented Design Method for HCI Research and Practice*. PhD Thesis - The Open University, United Kingdom.

Norton, S., McRobbie, C. Ginns, I. (2007). Problem Solving in a Middle School Robotics Design Classroom. *Research in Science Education*, 37 (3). 261-277.

Preece, J., Rogers, Y., Sharp, H., Benyon, D., Holland, S., Carey, T. (1994). *Human-Computer Interaction*. (Addison-Wesley, Wokingham)

Santos, E. A., Fermé, E., e Fernandes, E. (2007). Droide Virtual: utilização de robots na aprendizagem colaborativa da programação através da web. In *Actas da V Conferência Inernacional de TIC na Educação: Challenges 2007* (pp. 263-267). Braga: Centro de Competência da UM.

Silva, T. (2008). *As TIC como ferramentas mediadoras da aprendizagem matemática*. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind: A sócio-cultural approach to mediated action*. Hertfordshire, EUA: Harvester Wheatsheaf.

A GÊNESE INSTRUMENTAL EM PROPOSTAS DE ATIVIDADES COM O USO DO GEOGEBRA

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
abarcaap@pucsp.br

Sergio Vicente Alencar
sergiomatematica@yahoo.com.br
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Resumo

Este trabalho apresenta resultados e análise de duas oficinas desenvolvidas, com o uso do GeoGebra, para professores de Matemática da escola básica. O referencial teórico subjacente é a Gênese Instrumental de Pierre Rabardel que estuda a transformação de um artefato em instrumento. A metodologia utilizada é o *Design Experiments*, escolhida por permitir a realização de uma avaliação formativa para executar e refinar projetos educacionais. As duas oficinas descritas neste trabalho foram realizadas em um laboratório de informática com a participação, respectivamente, de 26 e 13 professores de Matemática da rede estadual de Ensino de São Paulo. Por meio da análise dos resultados obtidos, verificou-se que a maioria dos professores conseguiu alcançar o processo de instrumentalização e que o ambiente dinâmico propiciado pelo software GeoGebra colaborou para a instrumentação. No entanto, alguns professores apresentaram dificuldades em recuperar alguns conceitos matemáticos no desenvolvimento das atividades e, para minimizar essa ocorrência, a segunda oficina passou por aprimoramentos inseridos na variável de aprendizagem do *Design Experiments*.

Palavras-chave: Educação Matemática; Gênese Instrumental; GeoGebra; Formação de Professores.

Introdução

O projeto *Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática: uma abordagem por meio de Oficinas Didáticas*[1] tem como objetivo compreender as dificuldades existentes na prática de docentes de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo, no que diz respeito à transposição didática dos saberes a ensinar, e as possibilidades oferecidas pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), no sentido de criar estratégias didáticas que permitam dinamizar o processo de construção do conhecimento por parte dos alunos.

Desta forma, esta iniciativa pretende fomentar a compreensão, por parte dos professores

[1] Projeto CNPq 401390/2010-1

participantes da pesquisa, das dimensões das transposições didática e informática e da possibilidade de intervir efetivamente na construção dos saberes a ensinar em sala de aula com o uso de TICs, bem como analisar as complexidades envolvidas com o seu uso.

Por meio da promoção de oficinas didáticas com o uso do GeoGebra, como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Matemática, esta investigação intenciona analisar os resultados de duas oficinas já realizadas com o uso desse *software*, com suporte na Gênese Instrumental de Pierre Rabardel (1995).

Zuchi (2008) utilizou a Abordagem Instrumental de Rabardel como um dos suportes teóricos de sua pesquisa, destacando a sua importância para que as ferramentas informáticas tenham suas potencialidades exploradas e, posteriormente, sejam integradas em sala de aula. A autora realizou um trabalho com o objetivo de fazer uma análise das especificidades e as potencialidades de um ambiente informatizado complexo, verificando os seus efeitos sobre a aprendizagem da matemática. Em sua conclusão Zuchi afirma que a integração das novas tecnologias no ensino de matemática causa um desequilíbrio no processo de ensino e aprendizagem existente, requerendo, portanto, novas adaptações, tanto dos professores e alunos. Este fato está ligado às especificidades e potencialidades das novas ferramentas e ao modo como são concebidos os recursos que permitem a integração dessas novas tecnologias em sala de aula.

Um desafio para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática é a inserção de diferentes recursos na prática pedagógica do professor. Um desses recursos é o tecnológico que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil:

> (...) é um instrumento capaz de aumentar a motivação dos alunos, se a sua utilização estiver inserida num ambiente de aprendizagem desafiador. Não é por si só um elemento motivador. Se a proposta de trabalho não for interessante os alunos rapidamente perdem a motivação. (Brasil. SEC, 1997, p.57).

Oliveira (citado por Costa, 2010) destaca que a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na formação dos professores é fundamental, mas que nem todo professor possui, em seu histórico de formação, as condições necessárias de aproximação e de criação de fluência junto a interfaces tecnológicas. Para contribuir para a autoformação, o autor indica a participação em oficinas como um primeiro passo.

Para se chegar a uma proposta que seja considerada adequada e alcance os objetivos propostos as oficinas têm como metodologia o *Design Experiments*, que, de acordo com Doerr e Wood (2006), permite a realização de uma avaliação formativa para testar e aperfeiçoar modelos educacionais baseados em princípios derivados de investigação prévia.

Assim, esse texto tem como objetivo apresentar os resultados de duas oficinas já realizadas por meio da análise de duas das atividades propostas. A metodologia subjacente permitirá que outras oficinas possam ser reformuladas após a análise de seus resultados.

Para guiar o desenvolvimento deste trabalho, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: *quais orientações são necessárias para que uma oficina inicial de GeoGebra, estruturada de acordo com a Gênese Instrumental de Rabardel, possibilite que os participantes, professores de Matemática da escola básica, possam elaborar estratégias próprias de ensino e aprendizagem com o uso deste software?*

As análises realizadas das duas oficinas mostram um aspecto inicial importante a ser considerado em resposta à questão colocada: oferecer, como suporte, os conceitos matemáticos utilizados que podem estar adormecidos desde a graduação ou ensino médio destes professores.

Aportes teóricos e metodológicos

Gênese Instrumental de Rabardel

A Gênese Instrumental de Rabardel (1995) se apoia na teoria da ergonomia cognitiva, referente aos processos mentais (percepção, memória, raciocínio etc.) que afetam as interações entre seres humanos e outros elementos de um sistema, sendo a interação homem computador um exemplo disso.

Rabardel (1995) descreve as relações que existem entre o sujeito (indivíduo ou grupo de indivíduos), o artefato e os esquemas de utilização que compõem o instrumento.

A abordagem instrumental estuda os aspectos próprios que existem no artefato e no instrumento e processos que envolvem a transformação progressiva do artefato em instrumento, denominada de Gênese Instrumental. Esse processo busca a integração

entre as características dos artefatos (potencialidades e limitações) e as atividades do sujeito – seus conhecimentos e métodos de trabalho.

O foco de interesse de Rabardel (1995) é a transformação do uso do artefato em uma ferramenta, propondo, então, o modelo de situações de utilização de um instrumento, composto pelo Sujeito, Instrumento e Objeto.

Com base nisso, Rabardel (1995) propõe o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais), apresentando as relações entre o sujeito e o objeto mediado pelo instrumento. Para Rabardel (2000), o modelo SAI (Figura 1) evidencia as várias interações que intervêm nas atividades instrumentais: sujeito-objeto [S-O], sujeito-instrumento [S-i], instrumento-objeto [i-O] e sujeito-objeto mediado pelo instrumento [S(i)-O], que se desenvolvem em um ambiente formado pelo conjunto de condições que o sujeito deve levar em conta para realizar sua atividade.

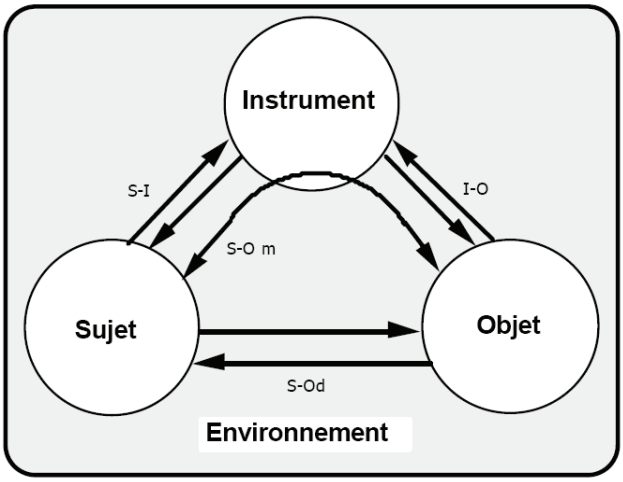


Figura 1. Modelo da Tríade das Situações de Atividades Instrumentais
Fonte: Rabardel (2000, p.175)

O modelo SAI pode ser um guia para examinar, detalhadamente, o uso de instrumentos em uma tarefa. Entre os três pólos sujeito, objeto e instrumento uma multiplicidade de interações existem: interações sujeito-objeto diretamente ou mediado pelo instrumento; interações sujeito-instrumento e instrumento-objeto. O mediador possui a orientação de *objeto-sujeito* (é o meio que permite o conhecimento do objeto) e de *sujeito–objeto* (é o meio da ação transformadora dirigida sobre o objeto).

A composição e a origem de um instrumento, segundo o autor, dependem de seus invariantes: esquemas e artefatos são instrumentalizados (utilizados) pelo sujeito; mas, os esquemas pertencem ao sujeito e são generalizados ou acomodados por ele ao

artefato e, às vezes, esquemas novos devem ser construídos. Os processos descritos distinguem-se em termos de instrumentação e instrumentalização, que é denominado, pelo autor, de Gênese Instrumental.

Conforme Rabardel (1995), a Gênese Instrumental tem duas dimensões: a instrumentação (orientada para o sujeito) que tem relação com o surgimento e evolução de esquemas de utilização e da ação instrumental e a instrumentalização (orientada para o artefato) que tem relação com o enriquecimento das propriedades do artefato.

Zuchi (2008) caracteriza a instrumentação como um processo pelo qual as especificidades e as potencialidades de um artefato vão condicionar as ações de um sujeito para resolver um dado problema e a instrumentalização como um processo pelo qual o sujeito modifica, adapta ou produz novas propriedades, personalizando o artefato de acordo com suas necessidades, como, por exemplo, quando o indivíduo personaliza o computador de acordo com suas necessidades.

É importante observar que as duas dimensões do processo de Gênese Instrumental referem-se ao sujeito e ao objeto, mas com orientações diferentes. Assim, ambas contribuem para a evolução do instrumento, para a reorganização e modificação dos esquemas de utilização do sujeito, permitindo a estruturação de sua ação e a participação da formação dos conceitos matemáticos.

No modelo SAI (Figura 1) a instrumentação é a relação entre sujeito e instrumento (S-i) e a instrumentalização é a relação entre sujeito e objeto, mediada pelo instrumento (S(i)-O), assim como a relação entre instrumento e objeto (i-O).

Metodologia *Design Experiments*

A metodologia utilizada neste trabalho, denominada *Design Experiments* ou *Design Research* é, de acordo com Collins et al. (2004), um termo introduzido em 1992, por Ann Brown e Allan Collins. Experimentos utilizando esta metodologia foram desenvolvidos com o objetivo de realizar avaliação formativa para testar e refinar projetos educacionais baseados em princípios derivados de pesquisas anteriores.

Visando à minimização de obstáculos, o *"Design Experiments"* permite um progressivo aprofundamento da investigação, pois se aplica uma primeira versão de um projeto para

posterior análise, resultando numa revisão baseada nas experiências colhidas e avaliadas.

A metodologia *"Design Experiments"*, de acordo com Doerr e Wood (2006) segue um processo de iterações de concepção, desenvolvimento, experimentação, avaliação e reformulação. No que diz respeito à aprendizagem de docentes, esse trabalho busca analisar e avaliar as interpretações ou modos de pensar que os professores utilizam para dar sentido ao seu ensino e aos artefatos e instrumentos que são utilizados em seu trabalho, mais especificamente com o software GeoGebra.

Os autores Doerr e Wood (2006) destacam os vários ciclos de análise necessários, com a finalidade de reformulação do produto utilizado. Isso implica que a coleta e a interpretação dos dados não ocorrem ao término da atividade (experimento). No caso desse trabalho, o produto são propostas de oficinas reformuladas em cada etapa com o uso do GeoGebra.

No Design Experiments, três tipos de variáveis dependentes devem ser avaliadas: variáveis de clima (cooperação entre os aprendizes, compromisso, grau de esforço apresentado pelos aprendizes etc.); variáveis de aprendizagem (conhecimentos, conteúdo, habilidades e disposições) e variáveis sistêmicas (alteração, expansão, sustentabilidade, alteração, facilidade de adoção e custos) que podem indicar as vantagens e dificuldades encontradas pelos professores ao realizar o experimento.

Procedimentos metodológicos

As duas oficinas, apresentadas neste trabalho foram realizadas, cada uma, em dois encontros, de 4 horas, aos sábados de manhã em um laboratório de informática de uma instituição de ensino já com o GeoGebra instalado, ou seja, cada professor possuía um computador sendo permitido o diálogo entre os participantes. A primeira oficina contou com a participação de 26 professores e na segunda com 13 professores.

Nas duas oficinas realizadas, nos momentos iniciais do primeiro encontro, foi apresentado, por meio do endereço http://www.geogebra.org, o software GeoGebra de conhecimento de alguns participantes, as possibilidades de download e configuração da caixa de ferramentas.

Neste trabalho são apresentadas duas das atividades desenvolvidas nas oficinas realizadas e suas respectivas análises.

Atividade 1: A primeira atividade foca a ideia de instrumentalização. O professor deveria configurar a caixa de ferramentas do GeoGebra, deixando visíveis apenas as ferramentas necessárias para a construção de um triângulo equilátero, verificando a relação entre objetos livres e independentes. A proposta se insere na ideia de instrumentalização, pois enriquece as propriedades do artefato, que de acordo com Zuchi (2008) caracteriza a instrumentalização, uma vez que o indivíduo personaliza o artefato de acordo com as suas necessidades.

No final da atividade foram feitas algumas questões, a fim de verificar o entendimento sobre objetos livres e objetos dependentes, relacionando-os com o dinamismo do GeoGebra.

a) Observe na janela algébrica quais são os objetos livres e quais são os objetos dependentes. Explique essa diferença de caracterização.
b) Mova os vértices do triângulo. O que você observa na janela algébrica?
c) Na janela algébrica, tente modificar as coordenadas dos três vértices do triângulo. Quais foram possíveis modificar? O que aconteceu com a figura?

Na análise dos arquivos verificou-se, na primeira oficina, que apenas dois professores não conseguiram fazer a construção do triângulo eqüilátero e um desses dois professores não conseguiu configurar a caixa de ferramentas da forma solicitada.

Um professor, na construção do triângulo equilátero, estruturou sua figura do seguinte modo: definiu um segmento de reta, traçou uma circunferência em cada extremo do segmento de reta e raio com medida igual a do segmento de reta, marcou um dos pontos de intersecção entre as circunferências, definindo o terceiro vértice do triângulo. Mas, no momento de "clicar" no objeto correto para a construção, o fez num ponto aleatório (ponto B), próximo à circunferência, porém interno. A figura 2 apresenta como ficou o "triângulo equilátero" desse professor:

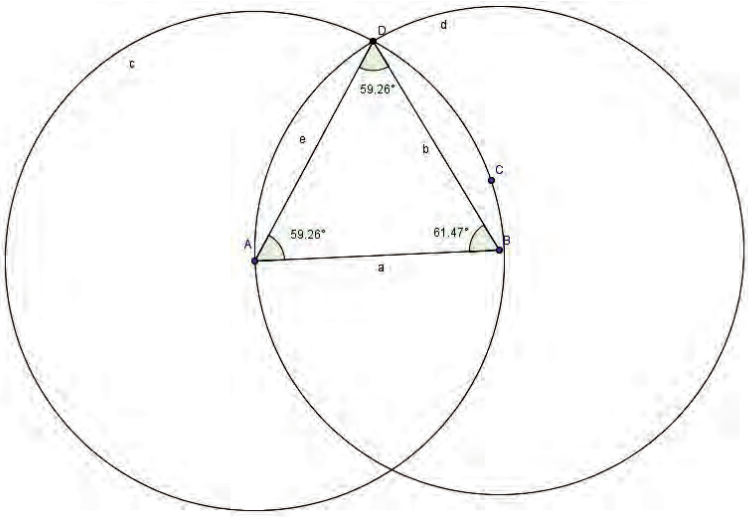


Figura 2**.** "Triângulo equilátero" construído por um dos professores

Outro professor fez a construção do triângulo equilátero por tentativa de aproximação, utilizando apenas as ferramentas "Polígono" e "Ângulo". A figura 3 apresenta como ficou o seu "triângulo equilátero":

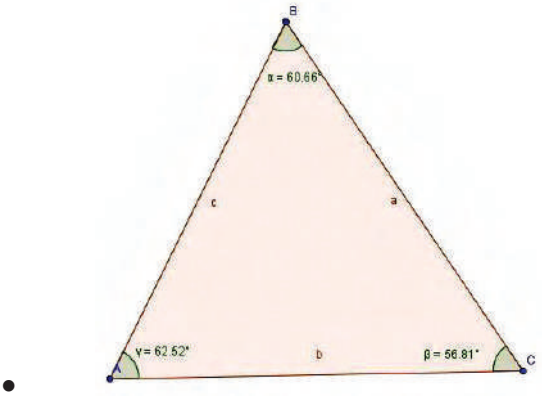


Figura 3. "Triângulo equilátrero" construído por tentativa de aproximação

Na análise das respostas apresentadas da atividade 1 verificou-se que 23 professores identificaram os objetos livres e os objetos independentes, explicando a diferença entre eles. Os outros 3 professores não responderam às questões.

Para a segunda oficina foi acrescentada a figura abaixo, pois alguns professores não se lembravam da construção de um triângulo eqüilátero e consultaram uns aos outros para recuperar a figura. Deste modo, para a segunda oficina, foi acrescentada ao lado da atividade 1 a figura 4 abaixo tendo como hipótese que essa reformulação ajudaria os professores a recuperarem na memória as propriedades de um triângulo equilátero.

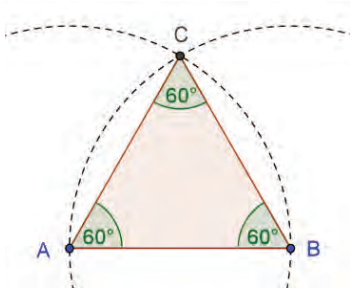


Figura 4. Triângulo equilátrero

Na análise dos arquivos da segunda oficina, verificou-se que todos os professores conseguiram fazer a construção do triângulo eqüilátero e apenas um professor conseguiu configurar a caixa de ferramentas da forma solicitada. Verificou-se também que 12 professores identificaram os objetos livres e os objetos independentes, explicando a diferença entre eles. Verificou-se, novamente a dificuldade de alguns professores se lembrarem das propriedades de um triângulo equilátrero.

Atividade 2. A segunda atividade foca a ideia de instrumentação. O professor deveria fazer um estudo do gráfico da função afim (f(x)=ax+b) criado com o uso dos seletores "a" e "b". Para isso, uma série de questionamentos, vinculados ao dinamismo do software GeoGebra, foram colocados. O que caracteriza a proposta como um processo de instrumentação é o fato de ela ter uma relação com surgimento e evolução de esquemas de utilização por meio do uso de um instrumento, ou seja, as especificidades e as potencialidades do artefato condicionam as ações do sujeito para resolver o problema.

Algumas questões foram colocadas para verificar o entendimento do gráfico de uma função afim por meio do dinamismo do GeoGebra:

a) O que a mudança no valor do seletor "a" causa na representação gráfica da função? Exemplifique.
b) O que a mudança no valor do seletor "b" causa na representação gráfica da função? Exemplifique.
c) Em qual situação o gráfico da função f(x)=ax+b é paralelo ao eixo das abscissas? Como você justifica isso matematicamente?
d) Em qual situação o gráfico da função f(x) = ax + b é perpendicular ao eixo das abscissas? Como você justifica isso matematicamente.

A criação dos seletores, digitação no campo entrada e formatação do gráfico foram realizadas corretamente por todos os professores nas duas oficinas, que também conseguiram identificar corretamente os objetos livres e os objetos dependentes,

explicando a diferença entre eles. No entanto, alguns erros teóricos e de análise surgiram em algumas respostas. O quadro 1 apresenta as respostas dos professores das duas oficinas relacionadas com análise gráfica da função afim.

Quadro 1. Respostas dos professores das duas oficinas

Questão a	
Explicou corretamente a mudança de inclinação da reta, interpretando o "seletor a" como coeficiente angular	Não explicou corretamente a mudança de inclinação da reta
24	**2**
10	**3**
Questão b	
Explicou corretamente a translação da reta, interpretando o "seletor b" como o coeficiente linear	Não explicou corretamente a mudança de posição da reta (translação).
21	**5**
13	**0**
Questão c	
Soube identificar o valor de a=0 e justificar.	Não explicou corretamente o valor de a = 0
24	**2**
13	**0**
Questão d	
Soube identificar e justificar a impossibilidade.	Não soube justificar a impossibilidade.
20	**6**
11	**2**

Seguem as respostas de cada um dos professores que não explicaram corretamente a mudança de inclinação da reta na questão a:

Primeira Oficina (2 professores):

> Professor 1: *"Uma mudança na posição da inclinação da reta, um movimento de translação tanto para a direita como para a esquerda";*
> Professor 2: *"Altera a função do termo dependente".*

O "professor 1" confunde a rotação com a translação e que o "professor 2" não vincula a mudança no valor do "seletor a" com a mudança de inclinação da reta que representa graficamente a função "f(x) = ax + b".

Segunda Oficina (3 professores):

> Professor 1: *"Observa-se que a janela algébrica se move. Alteração dos valores das retas e dos eixos";*
> Professor 2: *"A função pode ser positiva ou negativa";*
> Professor 3: *"A função pode ser positiva ou negativa, Quando a função é positica ela é crescente. Quando a função é negativa ela é dececrescente";*

O “professor 1” confunde movimento do gráfico da função (mudança de inclinação) com “janela algébrica” e “valores de retas e eixos”. Os professores 2 e 3 denominam o coeficiente angular de função.

As respostas de cada professor que não explicou corretamente a translação da reta na questão b foram apenas na primeira oficina (5 professores):

> Professor 1: *“Altera o ângulo da função dependente”;*
> Professor 2: *“É alterado o ângulo formado entre a reta da função e o eixo y. “b” é o coeficiente linear”;*
> Professor 3: *“Os coeficientes são alterados, pois clicando no seletor b altera o ponto B livre e a função”;*
> Professor 4: *“A reta é arrastada para a direita e para a esquerda, rotação”;*
> Professor 5: *“Movimentando o valor do seletor b, nota-se que a inclinação referente ao eixo y altera, ao passo que a inclinação angular não se altera”.*

Os professores 1, 2 e 3, vinculam a mudança no coeficiente linear com a mudança de inclinação da reta. O “professor 4” confunde a rotação com a translação e o “professor 5” confunde mudança de ponto de intersecção com o eixo y com inclinação.

As respostas de cada um dos professores que não explicaram corretamente a resposta da questão c foram apenas na primeira oficina (2 professores):

> Professor 1:*“Em nenhuma situação isso acontece. Existem infinitas imagens de x”;*
> Professor 2: *“Quando a função b é maior ou menor que a abscissa”;*

Os professores 1 e 2 não compreenderam o paralelismo do gráfico da função com o eixo das abscissas.

As respostas de cada um dos professores que não explicaram corretamente a resposta da questão d estão relacionadas abaixo:

Primeira Oficina (6 professores):

> Professor 1: *“Quando a função for maior que zero”;*
> Professor 2: *“Quando o valor de a for diferente de zero ”;*
> Professor 3: *“Quando a=0 ”;*
> Professor 4: *“Quando o coeficiente linear é igual a zero, ou seja, se a=1 temos a função identidade, se a>1 ou a<1 temos a função linear”;*
> Professor 5: *“Quando a = 1”;*
> Professor 6: *“Quando a for zero”.*

Os professores não compreenderam o perpendicularismo do gráfico da função com o eixo das abscissas. Deste modo foram acrescentadas, na segunda oficina, respectivamente às questões c e d: Quando duas retas são paralelas? Quando duas retas são perpendiculares?

Com as modificações verifica-se que o fato de provocar a lembrança das definições de paralelismo e perpendicularismo pode ter colaborado nas respostas dadas pelos professores na segunda oficina.

Na instrumentação, segundo Rabardel, as especificidades e as potencialidades do artefato condicionam as ações do sujeito para resolver o problema e observa-se que as dificuldades conceituais emergentes, por parte dos professores, podem interferir nessa instrumentação.

Considerações Finais

Os resultados e análise das respostas de alguns professores das oficinas possibilitarão uma reformulação nas atividades para as próximas oficinas.

Formulou-se a seguinte questão para este trabalho: *quais orientações são necessárias para que uma oficina inicial de GeoGebra, estruturada de acordo com a Gênese Instrumental de Rabardel, possibilite que os participantes, professores de Matemática da escola básica, possam elaborar estratégias próprias de ensino e aprendizagem com o uso deste software?*

Uma orientação que se mostra necessária para as próximas oficinas é a recuperação de alguns conceitos matemáticos. Os conhecimentos adormecidos na memória dos professores dificultaram o uso do GeoGebra mas não impediram totalmente que a instrumentação e instrumentalização estivessem presentes.

Com relação à Gênese Instrumental, verifica-se que a maioria dos professores conseguiu alcançar o processo de instrumentalização na atividade 1, uma vez que localizaram corretamente as ferramentas necessárias para a construção do triângulo equilátero, configurando o ambiente GeoGebra para isso. Na atividade 2, verifica-se que a característica dinâmica do software GeoGebra colaborou para a ocorrência da instrumentação, uma vez que ao manipular as potencialidades do software, os sujeitos condicionaram suas ações para responder aos questionamentos realizados.

Como a metodologia utilizada é o *Design Experiments*, algumas mudanças na realização e estrutura para as próximas oficinas já estão sendo previstas, por meio da análise prévia.

Referências bibliográficas

Brasil. SEC, (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ministério da Educação e do Desporto*. Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução. Ensino de quinta a oitava série - Brasília: MEC/SEF.

Collins, A.; Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal Of The Learning Sciences*. Evanston, pp.13-42.

Costa, R. C. (2010). *A formação de professores de Matemática para uso das tecnologias da informação e comunicação: uma abordagem baseada no ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo grau*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Doerr, H. M. & Wood, T. (2006). Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In M. C. Borba (Ed.), *Tendências internacionais em formação de professores de matemática* (Cap.5, pp.113-128). Belo Horizonte: Autêntica.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Trad. Heidi Wood. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P., (2000). La mémoire technique : une anticipation du futur? Un exemple en DAO-CAO. *Technologies, Idéologies, Pratiques:mémoires de la technique, techniques de la mémoire*. Vol 13, n° 2, pp.167-179.

Zuchi, I. (2008). A integração dos ambientes tecnológicos em sala: Novas potencialidades e novas formas de trabalho. *2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,* Brasil.

CONEXÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES, EM FUNÇÕES NÃO FAMILIARES, MEDIADAS PELA CALCULADORA GRÁFICA: O CASO DO DIOGO

Madalena Consciência
Escola Secundária Dr. Ginestal Machado, Santarém
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lena.consciencia@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Com este estudo pretendemos compreender que conexões entre representações estabelece um aluno do 11.º ano perante tarefas envolvendo funções não familiares, tendo à sua disposição o artefacto calculadora gráfica (CG). Os dados em análise foram recolhidos em duas entrevistas clínicas realizadas individualmente. Os resultados mostram que o aluno recorreu sistematicamente à CG para efectuar a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e que, em particular perante situações de conflito, procurou estabelecer conexões entre várias representações. O aluno revelou, por vezes, algumas dificuldades em conjugar a informação proveniente de várias representações o que não parece dever-se à compreensão dos conceitos envolvidos (domínio, contradomínio, etc.), mas sim a um nível relativamente elementar no processo de génese instrumental e a uma certa "rigidez" do conceito imagem, desenvolvido pelo aluno, relativo a certas classes de funções.

Palavras-chave: Conexões entre representações, Funções, Calculadora Gráfica, Génese instrumental.

Introdução

Na matemática as representações desempenham um papel crucial, em particular, a compreensão do conceito de função dificilmente é conseguida sem o recurso a várias representações, já que cada uma delas fornece apenas informação sobre alguns dos seus aspectos particulares (Gagatsis & Elia, 2005). A representação gráfica é, muitas vezes, fundamental para a compreensão de noções associadas ao conceito de função e a chave para a resolução de problemas, permitindo inclusive que os alunos possam resolver problemas antes de possuírem os conhecimentos algébricos necessários para o fazer. A CG permite ao aluno efectuar rapidamente a conversão entre as representações algébrica, gráfica e numérica, sendo por isso um importante instrumento no trabalho

com funções. No entanto, é imprescindível que o aluno consiga interpretar os resultados fornecidos pela máquina, o que implica ter algumas noções sobre o seu modo de funcionamento e a capacidade para relacionar e conjugar a informação proveniente das várias representações.

Neste estudo pretendemos compreender como é que um aluno do 11.º ano de escolaridade resolve tarefas matemáticas envolvendo funções um pouco diferentes daquelas que lhe surgiram em contexto de sala de aula, tendo à sua disposição o artefacto CG. Mais concretamente, pretendemos responder à seguinte questão de investigação: Que conexões estabelece o aluno entre várias representações ao resolver situações matemáticas envolvendo funções não familiares, tendo como artefacto mediador a CG?

Enquadramento Teórico

Funções e Representações

O conceito de função é um dos mais importantes na matemática, mas, muitas vezes, os alunos sentem dificuldades ao trabalhar com as funções, em parte, devido à necessidade de coordenar múltiplas representações (Elia *et al*., 2007). O problema da compreensão matemática, segundo Duval (2006), deve-se a um conflito cognitivo que surge do facto de os objectos matemáticos apenas serem acessíveis através de representações semióticas e, no entanto, ser imprescindível, para o progresso na aprendizagem, que o aluno consiga distinguir o objecto representado da sua representação. Este autor refere dois tipos de transformação entre representações: *tratamentos* e *conversões*, sendo os tratamentos transformações de representações dentro do mesmo registo, por exemplo, simplificação de expressões algébricas, e as conversões transformações entre diferentes registos, por exemplo, passagem da expressão analítica de uma função para a sua representação gráfica. As conversões são mais complexas do ponto de vista cognitivo mas não podem ser separadas do tratamento pois é a escolha do tratamento que determina a relevância do registo (Duval, 2006).

A compreensão do conceito de função envolve ainda uma certa dualidade de pensamento, já que este pode ser concebido operacionalmente, como um processo, ou

estruturalmente, como um objecto (Sfard, 1991). A autora considera que os conceitos matemáticos são primeiramente adquiridos operacionalmente sendo a transição para a sua forma estrutural um processo realizável em três fases: interiorização, condensação e reificação. Slavit (1997) propõe uma abordagem que poderá contribuir para a reificação do conceito de função – o desenvolvimento de uma visão orientada pelas propriedades. À medida que os alunos contactam com novas propriedades funcionais, de natureza local e global, e novas classes de funções, vão desenvolvendo o que Tall e Vinner (1981) denominam de *conceito imagem*, e ocorrerá uma forma de reificação, no sentido de Sfard, quando o aluno compreender a visão orientada pelas propriedades sem a dependência de exemplos específicos ou de tipos de funções.

Contudo, as duas concepções operacional/estrutural devem complementar-se e constituir um todo coerente do conceito de função, pois embora dramaticamente diferentes constituem duas importantes facetas da mesma entidade, como dois lados da mesma moeda. A dualidade processo/objecto pode ser percebida nas várias representações de função, no entanto, algumas representações favorecem uma das concepções (Sfard, 1991). O estabelecimento de conexões entre diferentes representações permite desenvolver a compreensão tanto da essência do conceito como das suas várias facetas (Even, 1998).

Abordagem Instrumental

A abordagem instrumental foi desenvolvida com o objectivo de analisar a actividade humana, tendo em conta que esta envolve, na maioria das vezes, a interacção com artefactos que funcionam como mediadores entre o utilizador e o objecto da sua acção. A ideia principal desta teoria reside na diferença entre artefacto e instrumento, na medida em que um artefacto só se torna um instrumento quando o indivíduo é capaz de se apropriar dele e integrá-lo na sua actividade (Rabardel, 2002). Um instrumento é assim uma entidade mista constituída pelo artefacto e por esquemas de utilização. Os esquemas de utilização permitem organizar a acção de modo a utilizar o artefacto, e como tal, dependem das propriedades do próprio artefacto. Porém, não podem ser aplicados directamente, têm que ser adaptados à especificidade de cada situação.

O processo através do qual o artefacto se torna um instrumento é denominado de Génese Instrumental. Este processo é constituído por duas dimensões e orientações:

Instrumentalização, dirigida do sujeito para o artefacto, referente ao surgimento e evolução do componente artefacto do instrumento – selecção, reagrupamento, produção e atribuição de funções, desvios, catacrese e transformação; e Instrumentação, do artefacto para o sujeito, referente ao surgimento e evolução dos esquemas de utilização (Rabardel, 2002).

Vários investigadores têm recorrido à abordagem instrumental para analisar a actividade do aluno mediada pela CG (ou simbólica), tendo concluído que o processo de génese instrumental não é trivial, Artigue (2002), refere-se, inclusivamente, à "inesperada complexidade da génese instrumental" (p. 252), já que os aspectos conceptuais e técnicos interagem e desenvolvem-se simultaneamente (Drijvers & Trouche, 2008).

Metodologia

Este estudo insere-se numa investigação de âmbito mais alargado, a decorrer, que tem como principal objectivo compreender como é que o aluno se apropria da CG na sua actividade matemática e qual o papel que esta desempenha no que respeita à aprendizagem das funções, no ensino secundário.

A metodologia de investigação segue uma abordagem qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo, na modalidade de estudo de caso, dado que se pretende compreender em profundidade um fenómeno no seu contexto natural, sem objectivo de generalizar ou efectuar previsões. A recolha de dados iniciou-se no ano lectivo 2009/2010, numa turma do 10.º ano de Matemática A, tendo continuado no ano lectivo 2010/2011, com os alunos no 11.º ano. Os métodos de recolha de dados envolveram a observação participante, entrevistas clínicas aos quatro alunos que constituem os casos e recolha de alguns documentos produzidos pelos alunos na sala de aula.

No estudo mais restrito aqui apresentado pretende-se compreender como é que um dos casos estabelece conexões entre representações ao resolver tarefas matemáticas envolvendo funções não familiares, tendo à sua disposição o artefacto CG. Para tal são analisados alguns dos dados recolhidos nas duas últimas entrevistas clínicas efectuadas pela primeira autora (I) ao aluno individualmente. A primeira (E1) foi realizada no final de Fevereiro de 2011, e a segunda (E2) no início de Abril de 2011. As tarefas propostas

nessas entrevistas (ver anexo) envolvem questões de dois tipos: algumas são questões com que o aluno está familiarizado, nomeadamente, a Questão 1 da E1 e a Questão 1 da E2, com excepção da transformação $f(cx)$, $c \neq 0$; enquanto as restantes, tendo em conta a função envolvida, podem ser consideradas questões não familiares. A nossa análise centra-se nas questões envolvendo funções não familiares pois consideramos que tarefas que introduzam uma certa "incerteza" (Zaslavsky, 2005), poderão contribuir para uma melhor compreensão relativa aos conceitos desenvolvidos pelos alunos, e ao modo como estes integram os artefactos disponíveis na sua actividade. Em particular, por uma questão de limitação e de similaridade, são aqui analisadas as respostas do aluno às alíneas 2.1 e 2.3 da E1, e Questão 2 da E2.

O Caso Diogo

O Diogo (D) é um aluno com bom desempenho em todas as disciplinas, tendo obtido 17 valores de classificação a Matemática A, no segundo período do ano lectivo 2010/2011.

Perante a questão 2.1 (E1) o Diogo decidiu recorrer à CG, questionando: "Posso fazer como eu quiser, não é? Posso ir à calculadora?", o que denota que usualmente se sente confortável na determinação do domínio e do contradomínio de uma função a partir da representação gráfica. Porém, a representação gráfica obtida para a função *f* na CG entrou em conflito com a "imagem mental" do que o Diogo esperava obter: "Mas eu só estou a ver uma linha. E uma, uma expressão deste tipo deveria ser uma, uma hipérbole". Efectuou alterações na janela de visualização mas, continuando a observar "uma recta", expressou o seu conflito perante a obtenção do domínio numa e noutra representação:

> **D**: Aqui o domínio parece que é o conjunto $\mathbb{R}$, porque não tem início e não tem fim, mas aqui, se eu fizesse de maneira analítica, eu diria que o domínio, é o conjunto $\mathbb{R}$ excepto 2!

Perante o seu desconcerto, a investigadora sugeriu que confirmasse com a CG a existência de imagem para *x* igual a 2, procedimento que o aluno aparentemente desconhecia:

> **D**: Posso calcular! Ah! Com a máquina? […] Está bem. […] Não, não sabia. (Observa o que a máquina devolve) Ah! Pois, realmente, não tem

nenhum valor de *y*! Mas este gráfico é uma recta! (Ri) Parece-me uma recta!

No que toca ao domínio, a informação dada pela representação numérica é consistente com a informação que o Diogo retira da representação algébrica, contudo, a representação gráfica obtida na CG não é compreendida pelo aluno. A sua resposta em relação ao contradomínio da função é baseada em imagens mentais evocadas pelo tipo de função. Inicialmente considera que o contradomínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, depois reformula a resposta para $\mathbb{R}$, justificando: "Eu pensava que todas as funções deste tipo tinham que ter, contradomínio $\mathbb{R}$. Não sei porquê, era uma ideia que eu tinha".

Ao ser confrontado pela investigadora com as funções presentes na Questão 1, o Diogo apercebe-se da contradição: "Era $\mathbb{R}$ excepto, pois! Tinha excepto!" A investigadora questiona-o sobre a informação que retira da representação gráfica, e o aluno revela continuar em dúvida relativamente a essa representação: "Isto é partindo do princípio que a representação gráfica está bem, não é? […] Parece-me que todos os objectos têm a mesma imagem!". Só depois de verificar se tinha editado correctamente a expressão na CG é que o Diogo recorreu à tabela para confirmar a conjectura "todos os objectos têm a mesma imagem". O tratamento da expressão algébrica, através da divisão dos polinómios (procedimento que efectuou na Questão 1.5 da E1), poderia ter atenuado o conflito entre a representação algébrica e a gráfica, mas o Diogo não tomou essa iniciativa.

A representação gráfica da função *g* também provocou alguma surpresa ao aluno: "Hum, muito giro. […] Não faz variações daquelas que eu estava a pensar!". A sua resposta à questão é baseada na representação gráfica, considerando o domínio $\mathbb{R}$ e indicando uma estratégia correcta para responder ao contradomínio. A investigadora questiona-o sobre o domínio tendo em conta a expressão analítica, e a sua resposta sugere não ter compreendido completamente a razão de o denominador não se poder anular:

D: Se fosse como esta [*f*] o domínio tinha que ser $\mathbb{R}$, excepto menos um.

I: Então e qual é a diferença?

D: É o numerador.

> **I**: E isso interfere alguma coisa com o domínio da função?
>
> **D**: Pois, talvez não […] Vou calcular para o valor *x* igual a menos um. (Risos) Pois! Aconteceu o mesmo que no outro. Também não tem nenhum, nenhum *y*.

O facto de o numerador ser de grau superior a um não lhe provocou conflito imediato, mas, ao ser confrontado com a expressão, recorreu espontaneamente à representação numérica.

Na questão 2.3 da E1 o Diogo apelou também à CG para converter a representação algébrica para a gráfica, registando a diferença em termos das familiares hipérboles: "Estou a ver aqui umas coisas estranhas, pois, este aqui ao contrário dos outros vai a descer!". É interessante notar que o aluno começou por ter dificuldades em interpretar a questão, o que pode ser ilustrado por expressões do tipo: "se temos um *k*, se temos *h* de *x* igual a qualquer coisa, é possível" ou "se não tem solução não há *k*!", mas, assim que lhe foi sugerido que voltasse a observar a representação gráfica, conseguiu estabelecer conexões com a representação simbólica e verbal:

> **D**: Pois. Para (pausa longa), para ser impossível há aqui algum valor de, *y* (pausa), que não vai ter, objecto. Certo? Por exemplo, daqui, aqui (aponta no eixo das ordenadas). […] Neste espaço, há-de ser, (pausa longa), então os valores de k.

Na questão 2.1 da E2 o Diogo determinou analiticamente o domínio da função, recorrendo à CG para estudar o sinal do radicando (figura 1).

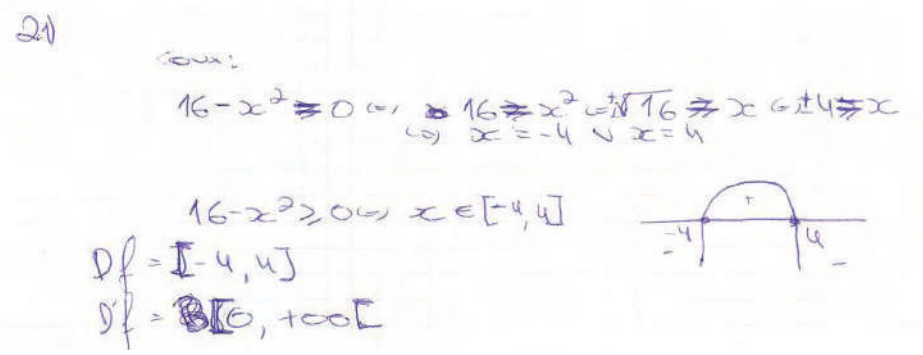


Figura 1 – Resolução da questão 2.1.

A sua resposta relativamente ao contradomínio revela que o aluno, de algum modo, considerou a representação algébrica, no entanto, não procurou estabelecer conexão com outra representação, o mesmo acontecendo relativamente ao contradomínio de *h*, na questão 2.3.1:

> **D**: O contradomínio, eu penso que é o conjunto de, de $\mathbb{R}$. Certo? […] Porque, primeiro porque eu penso que todas as (pausa), só inversas, funções inversas é que o contradomínio é diferente. (Pausa) Certo? […] E porque não há aqui nada que imponha que (pausa), os valores de *x* entre menos quatro e quatro, podem tomar todos os valores, no *y*.

No decurso da entrevista o aluno emendou o contradomínio das duas funções, não por ter tido em conta a representação gráfica a que entretanto recorrera, mas devido ao facto de ter prestado maior atenção à representação algébrica: "O contradomínio devia ser o, o de zero a mais infinito, […] a raiz não vai tomar nenhum valor negativo".

Na questão 2.2. o Diogo recorreu à calculadora para visualizar a representação gráfica da função, mas esta não lhe pareceu consistente com o domínio que determinou analiticamente:

> **D**: Pelos vistos eu já me enganei em alguma coisa! (Pausa) Porque, quatro e menos quatro não são (pausa), não pertencem, ao domínio. Certo? […] Porque na, no ponto quatro e menos quatro, o gráfico não passa nesses pontos. […] Porque parece-me! Tem aqui uma falha.

O Diogo toma a iniciativa de recorrer à representação numérica, mas não consegue explicar o porquê da divergência com a representação gráfica, demorando algum tempo a aceitar a informação, aparentemente contraditória, proveniente das várias representações:

> **D**: Intersecção com o eixo do *x*, é esta situação, haa, eu pensava que, havia menos quatro e quatro, mas, pelos vistos, não há. […] Quer dizer, se eu calcular, se eu calcular o *x* igual a quatro, ou *x* igual a menos quatro dá, o *y* dá-me zero. […] Pronto, mas já que *y* é igual a zero, e não, não definido, tem de intersectar aqui o eixo.

Para determinar o domínio da função *h*, o Diogo recorreu mais uma vez à representação gráfica, editando sem dificuldades a expressão correspondente na CG. Tentou estabelecer conexões com a representação numérica, não sendo bem sucedido, devido à aparente consistência da informação retirada das representações visualizadas (figura 2):

> **D**: […] Então vou recorrer aqui à tabela (percorre algumas linhas), o domínio será $\mathbb{R}$ excepto, haaa, excepto zero. […] Recorrendo aqui à tabela, podemos ver que, todos os valores, de *x* têm uma imagem correspondente, e o valor de zero não tem nenhuma imagem, definida, não está definido.
>
> **I**: Hum, em zero não está definido. E como é que sabes que todos os [outros] valores de *x* têm uma imagem?

D: Suponho, porque senão teria, na representação gráfica, teria que haver alguma, falha.

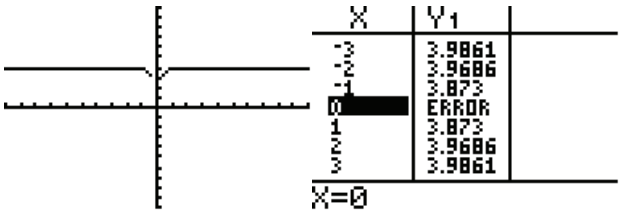


Figura 2 – Representações gráfica e numérica, visualizadas pelo Diogo na CG.

Na questão 2.3.2, após algumas alterações na janela de visualização, o Diogo concluiu que não existiria intersecção do gráfico de *h* com os eixos, mas entretanto determinou analiticamente os zeros, obtendo um resultado aparentemente incompatível com a visualização gráfica e numérica:

> **D**: Isto é um bocado, assim um bocado contraditório! […] Porque tenho valores para *x*, para quando o *y* é zero. Parece-me muito mal! […] Porque supostamente a partir do meu cálculo, isto devia ter … […] Mas não tem.

Na tentativa de compreender a situação, recorreu à representação numérica, dessa vez já com um objectivo definido, compreendendo, portanto, que tinha que alterar o "acréscimo" dos valores de *x*, e apesar de ter exclamado "ela concorda comigo, mas então não percebo a representação gráfica", acabou por vislumbrar uma estratégia para resolver o conflito alterando a janela de visualização:

> **D**: [Vou] Tentar reduzir para ver ali naquele espacinho! Onde eu não vejo bem. Pois! (Observa) Pois, sendo assim há uma intersecção com o eixo *Ox*.

Nesta questão o aluno procurou, intencionalmente, conjugar a informação proveniente das várias representações (figura 3). O facto de ter determinado analiticamente os zeros poderá ter contribuído para isso pois ficou com informação relevante para poder utilizar a representação numérica de forma mais segura e encontrar uma estratégia para compreender melhor a representação gráfica na CG.

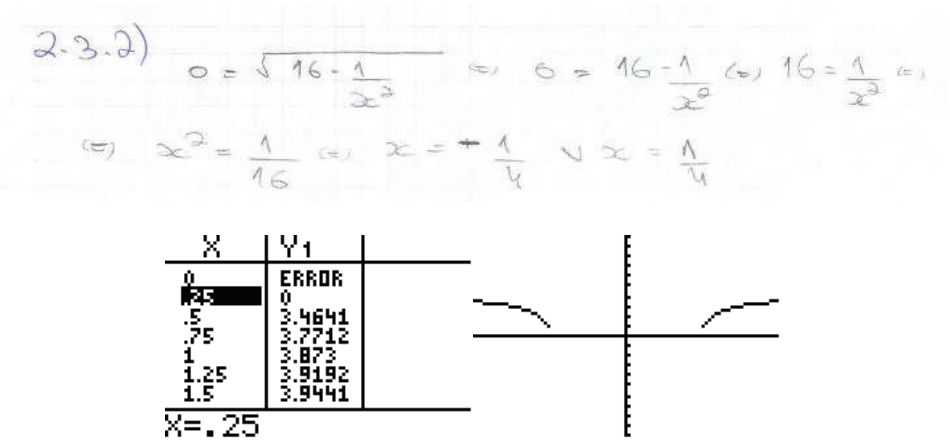


Figura 3 – Representações usadas pelo Diogo (Questão 2.3.2).

Na última questão o Diogo utilizou a CG para efectuar a conversão para a representação gráfica e determinou os pontos de intersecção nesse registo, não recorrendo a outras representações. Inicialmente foi induzido em erro pela visualização gráfica pois parecia existir um intervalo onde as duas representações se intersectavam: "não percebi, isto intersecta-se, teoricamente, entre aqui e aqui", mas como alterou a janela acabou por conseguir visualizar apenas os dois únicos pontos de intersecção.

Conclusões

O Diogo recorreu à CG em todas as questões aqui analisadas, embora na questão 2.1 da E2, a tenha utilizado, numa situação familiar, como instrumento de confirmação do sinal da função quadrática envolvida, situação para a qual já tinha desenvolvido esquemas de utilização. Nas restantes questões a CG serviu essencialmente como instrumento para converter a representação algébrica para a gráfica, com o objectivo de retirar desta representação informação que lhe permitisse responder ou explorar a questão, o que sugere que o aluno sente alguma à-vontade com esta representação.

A função *f*, presente na Questão 2 da E1, era, na perspectiva do aluno, uma função semelhante às com que habitualmente trabalhara, pelo que a representação gráfica obtida na CG entrou em contradição com as imagens mentais que desenvolvera para esse tipo de funções. Ao tentar estabelecer conexões entre a representação algébrica e gráfica o Diogo acabou por constatar também que a representação gráfica na CG tem que ser "descodificada" e que para tal é importante estabelecer conexão com a

representação numérica. As restantes funções provocaram também ao aluno, em algum momento, uma situação de conflito, levando-o a procurar conexões entre as representações, e simultaneamente, a tentar desenvolver e adaptar os esquemas de utilização. Sem dúvida que este é um processo que requer tempo, ainda assim, conseguimos perceber alguma evolução, tanto ao nível do estabelecimento de conexões entre as representações, como ao nível da utilização da CG, nomeadamente, na penúltima questão da E2, em que o aluno começou a tomar consciência que tinha que "focar a lente" na zona da representação gráfica que pretendia analisar, ou, estando em causa a representação numérica, que tinha de utilizar a tabela de forma dinâmica, alterando o acréscimo dos valores de x.

É interessante notar que o facto de as funções não serem familiares para o aluno permitiu um trabalho rico ao nível das conexões entre representações, apesar da dificuldade evidenciada na conjugação da informação proveniente das várias representações. Essa dificuldade não parece ter decorrido da compreensão dos conceitos envolvidos nas questões (domínio, contradomínio, etc.) mas antes do nível relativamente elementar em que o aluno se encontra no processo de génese instrumental, e de uma "rigidez" do conceito imagem desenvolvido para certas classes de funções. Parece importante que os alunos possam ser confrontados com situações que permitam identificar as propriedades que são invariantes em certas classes de funções, e as que o não são (Slavit, 1997), procurando raciocinar em termos relacionais e em vários registos, caso contrário poderão desenvolver um conceito imagem restrito, e um conhecimento fragmentado, que nem sempre lhes permitirá responder com sucesso às situações que vão encontrando.

Os resultados do estudo parecem indicar que as situações não familiares têm um forte potencial para o estabelecimento de conexões entre representações, e que o artefacto CG, ao permitir uma rápida conversão entre representações de uma função, pode ser um importante instrumento na actividade do aluno, mediando a aprendizagem das funções, o que levanta também a questão da importância da orquestração instrumental na sala de aula (Drijvers & Trouche, 2008).

Referências bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245-274.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (Vol. 2, pp. 363 - 448). New York: NCTM & Information Age Publishing, Inc.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 105-121.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece. In M. Bosh (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), (pp. 102-111). Sant Feliu de Guixols, Spain.

Rabardel, P. (2002). *People and technology: A cognitive approach to contemporary instruments*. Obtido em 10 de Novembro de 2008, de http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (3), 259-281.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (3), 297-231.

Anexo

ENTREVISTA 1

1. Num tecido branco, no mesmo instante, caíram duas pequenas gotas de tinta, uma preta e outra vermelha, em dois pontos que distam 10 cm um do outro. Ambas as gotas deram origem a manchas circulares em que os raios r_p e r_v, em centímetros, são dados em função do tempo t, em segundos, que decorreu após as gotas terem caído no tecido pelos seguintes modelos matemáticos:

$$r_p(t)=\frac{4t+5}{t+2},\quad t\geq 0; \qquad r_v(t)=\frac{5t+1}{t+3},\quad t\geq 0.$$

1.1. Determine o raio da mancha preta no instante em que a gota caiu no tecido.

1.2. Determine a área da mancha vermelha dois segundos após a gota ter caído no tecido.

1.3. Quanto tempo decorreu até que o perímetro da mancha preta fosse $6,8\pi$ cm.

1.4. Determine ao fim de quanto tempo as manchas atingiram a mesma dimensão. Apresente o resultado arredondado às décimas.

1.5. Com o decorrer do tempo será que as duas manchas se intersectam? Justifique a sua resposta.

2. Considere as seguintes funções:

$$f(x)=\frac{8-4x}{2x-4} \qquad g(x)=\frac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1}$$

$$h(x)=\frac{20-9x-2x^2}{x-3}$$

2.1. Indique o domínio e o contradomínio das funções f e g.

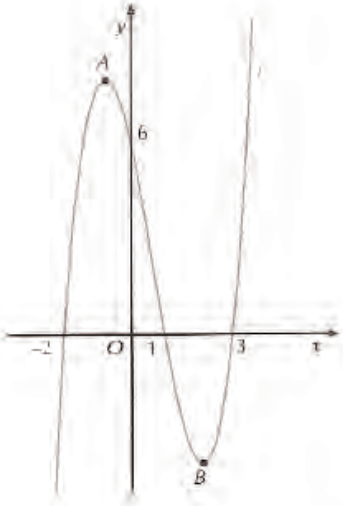
2.2. Tendo em conta o gráfico da função g faça uma previsão (sem recorrer à funcionalidade gráfica da calculadora) acerca da forma do gráfico da função $\frac{1}{g}$.

Confirme a sua previsão recorrendo à calculadora gráfica e procure encontrar uma justificação caso esta não esteja correcta.

2.3. Investigue para que valores inteiros de k a equação $h(x)=k$ é impossível.

ENTREVISTA 2

1. Observe a figura onde está representada graficamente uma função f polinomial do terceiro grau:



1.1. Indique o domínio da função g definida por $g(x)=\sqrt{f(x+2)}$.

1.2. Determine os valores de x que satisfazem a condição

$$\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{-x^2+2x}\geq 0.$$

1.3. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

1.4. Determine, com aproximação às centésimas, os valores das abcissas dos pontos A e B, correspondentes a extremos relativos da função f.

2. Considere a função cuja expressão analítica é $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

2.1. Qual é o domínio e o contradomínio da função?

2.2. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados?

2.3. Seja h a função definida por $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.3.1. Qual é o domínio e o contradomínio da função h?

2.3.2. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de h com os eixos coordenados?

2.3.3. Quais são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e h?

3. Há alguns anos não era permitido o uso de calculadoras gráficas na aula de Matemática. Se fizesse uma viagem ao passado que indicações gerais daria aos estudantes para que eles representassem graficamente as funções do tipo:

$$y = \frac{a}{x-b} \qquad\qquad y = ax + b + \frac{c}{x}$$

Apresente os seus argumentos.

A CALCULADORA GRÁFICA COMO INSTRUMENTO PARA O DESENVOLVIMENTO DA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA[1]

Maria da Graça Magalhães
Escola Secundária/3 Henrique Medina
graça.n.magalhaes@gmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd - Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo

A presente investigação tem como objectivo provar que a calculadora gráfica pode desempenhar um papel de instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da argumentação matemática, quando os alunos são estimulados a desenvolver tarefas de investigação em pequeno e em grande grupo. Para tal a professora investigadora elaborou uma tarefa de investigação, sobre o tema das funções racionais, que foi aplicada a uma turma do 11.º ano. A tarefa foi realizada primeiro em pequenos grupos e posteriormente em grande grupo, com a entrega final de um relatório individual. A metodologia adoptada foi de carácter qualitativo e descritivo. Neste estudo a calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral para os alunos na medida em que os ajudou na compreensão da tarefa, assim como na validação ou rejeição das conjecturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática. É de salientar, a importância da calculadora gráfica, do ponto de vista dos alunos, para o sucesso da investigação. A sua utilização permitiu construir e visualizar os gráficos de diferentes funções e, através da sua análise, formular conjecturas e tentativas de prova.

Palavras-chave: Argumentação matemática, calculadora gráfica, tarefa de investigação.

Introdução

Na última década o desenvolvimento das capacidades argumentativas nos alunos tornou-se um assunto discutido e trabalhado pela comunidade matemática por diferentes razões, nomeadamente, a necessidade de uma abordagem precoce das habilidades relevantes no processo de prova, a exploração do potencial de interacção social no desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas e a importância das competências argumentativas nos currículos como forma de reforçar a autonomia intelectual nos alunos (Douek & Pichat, 2003).

Boavida (2005) salienta que o interesse pela argumentação, assim como a importância de serem criadas condições favoráveis na aula de matemática para experiências em que

[1]Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

o foco seja a explicação e a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações e a formulação, avaliação e prova de conjecturas têm sido alvo de várias investigações em Matemática. O facto é que apesar da noção de argumentação ser utilizada frequentemente em educação matemática, o seu significado não tem sido amplamente discutido.

Particularmente, no que concerne ao tema das funções, Domingos (2008) considera que ao nível da educação em Portugal tem sido dada pouca relevância ao estudo das funções, apesar de fazer parte do currículo dos ensinos básico e secundário. Para Kaldrimidou e Ikonomou (1998), o conceito de função tem uma posição central na ciência e na educação matemática. Estudos efectuados apontam para as potencialidades do estudo em torno das diferentes representações das funções, nomeadamente numérica, algébrica, tabular, gráfica e verbal e das dificuldades que os alunos têm em estabelecer conexões entre elas (Carraher & Schliemann, 2007; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). No entanto, apesar de na educação matemática a representação gráfica de funções ser um tópico importante, verifica-se que para a grande maioria dos alunos é considerada como um obstáculo difícil de transpor na sua compreensão pois ao trabalharem com funções e gráficos, constata-se que os conhecimentos que vão adquirindo ficam compartimentados e estanques, ou seja, demonstram ter dificuldades em estabelecer relações entre as informações das diferentes representações (Demana & Waits, 1992).

Com o aparecimento da calculadora gráfica, esse obstáculo pode estar reduzido por se tornar uma ferramenta que ajuda a compreender melhor alguns conceitos, possibilitando aos alunos a visualização enquanto fazem matemática (Demana & Waits, 1992). A visualização pode ser entendida como o processo de formar imagens mentalmente, com o auxílio de papel e lápis ou com o uso da tecnologia. Dependendo do contexto matemático, a visualização não está isolada das restantes representações podendo ser estabelecidas relações entre elas (Cunninghan & Zimmermann, 1991). A possibilidade de visualização com a calculadora gráfica permite que os alunos dediquem mais tempo à resolução de problemas e menos à manipulação meramente mecânica dos mesmos (Kaber & Longhart, 1995).

Para além da sua componente visual a calculadora gráfica proporciona também aos alunos momentos de discussão em que partilham as suas ideias através de previsões,

testes e generalizações, criando-se assim ambientes propícios à investigação matemática (Gracias & Borba, 2000). Como refere Dugdale (1993) a fácil manipulação das representações gráficas dá origem à possibilidade de visualização da representação de funções e desempenha assim um papel importante no raciocínio matemático, na investigação e na argumentação. Assim, novas formas de trabalhar na sala de aula são necessárias para incentivar os alunos a raciocinar com o auxílio da calculadora gráfica.

Para esta experiência a professora investigadora seleccionou e elaborou uma tarefa de investigação, sobre o tema das funções racionais e implementou-a numa turma do 11.º ano. Trata-se de uma tarefa integrada numa sequência de tarefas elaboradas pela professora com o intuito de trabalhar o tema das funções de modo exploratório. Esta tarefa com recurso à calculadora gráfica tinha como objectivo, para além de proporcionar aos alunos uma experiência significativa de aprendizagem do conceito de função racional, desenvolver as suas capacidades de argumentação em Matemática.

Com a presente investigação pretende-se responder à seguinte questão: Poderá a calculadora gráfica desempenhar um papel de instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da argumentação matemática, quando os alunos são estimulados a explorar uma tarefa de investigação em pequeno e em grande grupo?

Argumentação matemática

Nas últimas décadas, a maior preocupação da Matemática escolar foi centrar-se no produto em vez de se centrar no processo, visto que muitos alunos são incapazes de explicar ou de justificar os seus raciocínios (Vincent, Chick & McCrae, 2005). No entanto, fazer matemática consiste em fazer descobertas, conjecturas, generalizações, contra-exemplos, refutações e provas. O aluno, ao tentar resolver uma situação problemática, vai fazer esquemas cognitivos ou desenvolver raciocínios de forma a encontrar a solução adequada ao problema em questão. Nesse processo podem surgir raciocínios incorrectos, no entanto, o erro deve ser encarado como um fenómeno inerente à aprendizagem (Ponte & Serrazina, 2000).

Quando, na sala de aula, um aluno explicita o seu pensamento aos restantes elementos da turma a argumentação causa efeito na discussão que se desenvolve posteriormente,

pois os alunos após ouvirem a explicação do colega podem desenvolver argumentações contra, a favor ou simplesmente melhoram as suas ideias (Whitenack & Yackel 2008).

As actuais orientações curriculares de Matemática dão especial ênfase à necessidade de se criarem, na sala de aula, contextos diversificados em que a explicação e a justificação de ideias e procedimentos matemáticos têm um lugar de destaque (Boavida, 2008). Torna-se assim fundamental valorizar no processo de ensino e aprendizagem o envolvimento de todos os alunos em actividades argumentativas em qualquer tópico matemático e não apenas em alguns temas ou em ocasiões particulares em que se exploram determinado tipo de tarefas.

Fonseca (2000) aponta três hábitos que importa desenvolver nos alunos: (i) tratar as afirmações como conjecturas, desenvolvendo a capacidade de testar e de modificar as afirmações com o intuito de serem encontradas justificações convincentes; (ii) testar conjecturas e justificá-las; e (iii) ter um olhar crítico relativamente aos argumentos apresentados pelos colegas. Assim, se os alunos forem desafiados e estimulados, ao longo da escolaridade, a uma "prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações" vão construindo uma ideia cada vez mais correcta do significado, da necessidade e da importância da prova na Matemática (Veloso, 1998, p. 374).

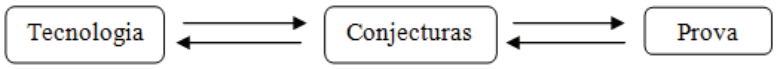
Calculadora gráfica

A introdução da calculadora gráfica na escola não pretendia ser uma mera ferramenta à disposição dos alunos para lhes facilitar o trabalho. O objectivo foi essencialmente desafiar, criar a possibilidade de resolverem problemas mais exigentes com uma ferramenta que lhes abreviava o trabalho mais rotineiro. No entanto, a calculadora gráfica precisa de ser utilizada de forma adequada, de maneira a que sejam aproveitadas todas as suas potencialidades e que os alunos aumentem a sua autonomia e espírito crítico na resolução de problemas e na descoberta de conceitos matemáticos (Quesada, 1996). Segundo alguns autores, os alunos normalmente utilizam a calculadora gráfica como instrumento de confirmação dos resultados obtidos analiticamente (Rocha, 2000).

Para que seja feita uma utilização inteligente da calculadora gráfica cabe ao professor uma responsabilidade acrescida no que se relaciona com a planificação de tarefas que sejam adequadas ao seu uso e cabe ao aluno a capacidade de decisão em relação à

adequação da utilização da calculadora na resolução das tarefas propostas pelo professor (Burril et al., 2002). As calculadoras vieram assim, proporcionar um novo tipo de tarefas, questões e estratégias de ensino e aprendizagem a desenvolver dentro da sala de aula (Dunham & Dick, 1994).

Ponte et al. (1997) consideram que trabalhar com a calculadora gráfica na resolução de tarefas que desafiem e estimulem os alunos a formular conjecturas promove a capacidade de investigar e de desenvolver raciocínios e argumentos. A calculadora gráfica enriquece a qualidade e a extensão das investigações na aula de Matemática, pois desta forma os alunos podem analisar exemplos e contra-exemplos, explorar e formular conjecturas mais rapidamente (Hirschhorn & Thompson, 1996). A calculadora gráfica pode assim, desempenhar um importante papel como instrumento mediador no processo de decisões tornando o aluno participante activo no processo de aprendizagem.



Metodologia

Com a presente experiência pretende-se estudar se a utilização da calculadora gráfica pode desempenhar um papel de instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática dos alunos, quando estes são estimulados a desenvolverem uma tarefa de investigação com recurso à calculadora gráfica, em pequeno e em grande grupo.

Para isso foi realizada uma experiência durante o mês de Fevereiro de 2010, numa turma do 11º ano, heterogénea, composta por 25 alunos (18 raparigas e 7 rapazes) e em que a investigadora, primeira autora deste artigo, era professora da disciplina de Matemática.

Esta experiência consistiu na exploração de uma sequência de tarefas de modo a que os alunos construíssem o seu próprio conhecimento no desenvolvimento sobre o conceito e o comportamento das funções racionais. Nesta comunicação apresenta-se apenas extractos da investigação efectuada na quinta e última tarefa da sequência.

A recolha de dados foi efectuada através de registos áudio e vídeo dos diálogos desenvolvidos em pequeno e grande grupo e posteriormente através dos relatórios escritos e reflexões realizadas individualmente sobre a tarefa proposta.

A análise dos dados foi organizada em duas partes: a argumentação matemática (formulação e teste de conjecturas e da conjectura à prova) e a calculadora gráfica (contributos e dificuldades). Nesta comunicação apresentam-se apenas pequenos excertos de alguns diálogos desenvolvidos na discussão em pequeno grupo, dos relatórios de investigação e de reflexões sobre a tarefa.

A tarefa de investigação

Para efectuar esta experiência, a professora dividiu inicialmente a turma em pequenos grupos de três ou quatro elementos. A tarefa de investigação proposta aos alunos foi a seguinte:

Considera os dois gráficos seguintes:

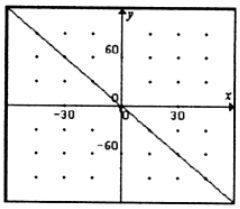


Fig.1

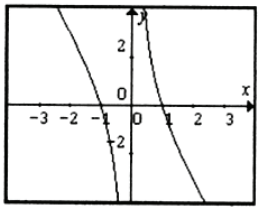


Fig.2

Estes gráficos representam a mesma função. No entanto, foram considerados rectângulos de visualização diferentes na calculadora gráfica.
Determina a expressão analítica da função considerada na fig.1 e fig.2.

Esta tarefa tinha como objectivo principal a sensibilização dos alunos para a escolha da uma janela de visualização, na calculadora gráfica, quando se pretende obter o gráfico de uma determinada função. Nos trabalhos em pequeno grupo foi utilizada a calculadora gráfica e na discussão desenvolvida em grande grupo foi utilizado o quadro interactivo com a calculadora gráfica previamente instalada.

Realização da tarefa em grupo

Na fase inicial da aplicação da tarefa a professora efectuou uma breve introdução chamando a atenção que a família de funções que iria ser estudada era do tipo

$f(x)=ax+b+c/(dx+e)$. Referiu também que a representação gráfica desta nova família de funções poderia contemplar assimptotas oblíquas, que ainda não tinham sido obtidas nos casos estudados em aulas anteriores.

Argumentação matemática

Na fase inicial os alunos começaram por analisar as duas representações gráficas da mesma função, para a qual se pretendia encontrar a sua expressão analítica. Inicialmente, a maioria dos grupos tentou descobrir a equação da recta da fig. 1. Por exemplo, um dos grupos após a leitura do enunciado imediatamente elaborou uma conjectura relativamente a uma possível equação da recta, que consideraram ser $y=-2x$, testando de seguida a sua veracidade.

Fausto: Segundo o enunciado, os dois gráficos representam a mesma função.
Elisa: Pois é. O que muda é a escala. Temos que achar a expressão.
Fausto: A expressão da função deve ser do tipo $f(x)=ax+b+c/(dx+e)$.
Elisa: Parece que a recta do gráfico 1 corresponde à assimptota do gráfico 2.
Alexandra: Então vamos calcular a expressão da recta.
Fausto: A expressão é $y=-2x$.
Júlia: Agora temos que relacionar a expressão com qualquer coisa....
Elisa: Como a expressão da assimptota oblíqua é $y=ax+b$, vamos comparar.
Alexandra: Já achamos $ax+b$. O $ax+b$ é igual a $-2x$.

Este grupo não teve qualquer dificuldade em fazer a conexão entre os dois gráficos dados na tarefa pois facilmente elaboram uma conjectura que relacionava a equação da recta da fig. 1 com a assimptota oblíqua do gráfico da fig. 2. Outros alunos, de uma forma mais detalhada tentaram inicialmente encontrar a equação da recta da fig. 1, e passaram de imediato à fase da exploração. Estes alunos a partir de dois pontos pertencentes à recta do gráfico 1, nomeadamente $(30,-60)$ e $(-30,60)$ determinaram analiticamente a equação da recta $y=-2x$.

Célia: ... Da figura 1 podemos concluir que ... Vamos determinar o declive da recta, não é?
Raul: Sim.
Célia: Vamos considerar um ponto da recta $A(30,-60)$.
Raul: Também podemos considerar o ponto $B(-30,60)$.
Margarida: Vamos determinar o declive da recta utilizando os dois pontos.
Raul: $\overline{AB}=B-A=(-60,120)$.
Célia: Então o declive fica igual a $120/(-60)$ que dá -2. Fazendo a equação da recta, $y=mx+b$ ... Substituímos o y por -60, o m por -2 e o x por 30, e vamos calcular o b ... O b vai dar 0. Então a equação da recta vai dar $y=-2x$.

Posteriormente, todos os grupos tentaram encontrar a expressão analítica da função cujos gráficos estão exemplificados nas figuras 1 e 2. Nesta fase os alunos elaboraram conjecturas e tentaram provar que as expressões analíticas encontradas eram válidas, independentemente da janela de visualização considerada. Um dos grupos, na tentativa de encontrar a expressão analítica da função dada graficamente no enunciado da tarefa passou à análise dos aspectos mais significativos da fig. 2.

> *Célia:* Da figura 2 podemos tirar os pontos $C(-1,0)$ e $D(1,0)$. A assimptota vertical é $x=-d/c$.
> *Raul:* A assimptota vertical é $x=0$.
> *Célia:* Vamos então escrever a função analítica de uma função que a assimptota é $x=0$. Ora, $f(x)=ax+b+c/(dx+e)$ ...
> *Raul:* Se a assimptota vertical é zero, e tem de ser zero.
> *Célia:* Então fica $f(x)=ax+b+c/dx$. E $ax+b$ vai ser $-2x$ na função.

Os alunos deste grupo conforme foi evoluindo o trabalho descobriram, por tentativa erro, qual era a expressão analítica da função dada graficamente, utilizando para tal a calculadora gráfica como forma de confirmar as suas conjecturas. No entanto, sentiram a necessidade de verificar que a expressão analítica encontrada era válida.

> *Raul:* Por tentativa erro descobri que a função fica $f(x)=-2x+2/x$.
> *Margarida:* Temos que fazer agora analiticamente ...
> *Célia:* Sabemos que a função $f(x)=-2x+c/dx$ pois e é zero.
> *Raul:* Substituímos o valor de x e y por um dos zeros da função.
> *Célia:* Ao substituir na função o ponto $(1,0)$ temos $c=2d$.
> *Margarida:* Então se substituirmos o d por 1 e o c por 2 ...
> *Raul:* ...obtemos a função $f(x)=-2x+2/x$.

A maioria dos grupos para testar a validade da expressão analítica encontrada descobriu que o valor da incógnita c era igual ao dobro da incógnita d e posteriormente concluíram que c tinha que ser igual ao dobro de d, no entanto, ambas as incógnitas tinham de ter o mesmo sinal.

> *Alexandra:* O c é o dobro do d.
> *Fausto:* Pois é. Então se o d for 1 o c tem que ser obrigatoriamente 2.
> *Júlia:* Vamos tentar comprovar isso...Substitui o d por 2 e o c deu 4.
> *Elisa:* O c tem que ser o dobro de d, mas os seus sinais têm que ser iguais. Se forem diferentes não dá.
> *Alexandra:* Se c tiver sinal diferente de d já não se aplica a expressão $-d/e$.
> *Fausto:* Então a expressão da função é $f(x)=-2x+c/dx$.

Outros grupos, não conseguiram chegar à conclusão de que c é o dobro de d, no entanto, por tentativa e erro, encontraram a expressão analítica da função pretendida.

Rui: Então agora temos de dar valores a c e d …
Maria: Até obtermos a figura 1.
Vitória: Sim.
Maria: $c=1$ *e* $d=-1$.
Rui: Não dá.
Dora: $c=-1$ *e* $d=1$.
Vitória: Não dá, mas está quase. Vamos experimentar $c=2$ *e* $d=1$.
Rui: Esse dá!

Durante a exploração desta tarefa alguns grupos desenvolveram argumentos na tentativa de testarem e provarem as suas conjecturas.

Calculadora gráfica

A calculadora gráfica foi utilizada durante a exploração da tarefa com o intuito de teste e de verificação se as expressões analíticas encontradas correspondiam às representações gráficas da figura 1 e 2, caso fosse alterada a janela de visualização. Nas discussões desenvolvidas por cada um dos grupos foi evidente a importância da utilização da calculadora gráfica nesta investigação. Os alunos ao longo da elaboração das suas conjecturas de forma a tentarem encontrar uma expressão analítica para a função que podia ser representada graficamente quer pelo gráfico 1 quer pelo 2, foram utilizando a calculadora gráfica de forma activa e crítica. Nomeadamente, um dos grupos quando pretendeu testar se a expressão analítica era válida, utilizou o *Zoom* da calculadora para fazer variar a janela e assim, verificar que era uma das possibilidades para a tarefa.

Dora: Para termos a certeza que esta bem é melhor aumentarmos a janela.
Maria: Temos bem!
Rui: Quanto maior é a janela mais a função se aproxima da assimptota!
Todos: Sim!
Dora: Sendo assim a expressão analítica da função da figura 1 e da figura 2 é $f(x)=-2x+2/x$.

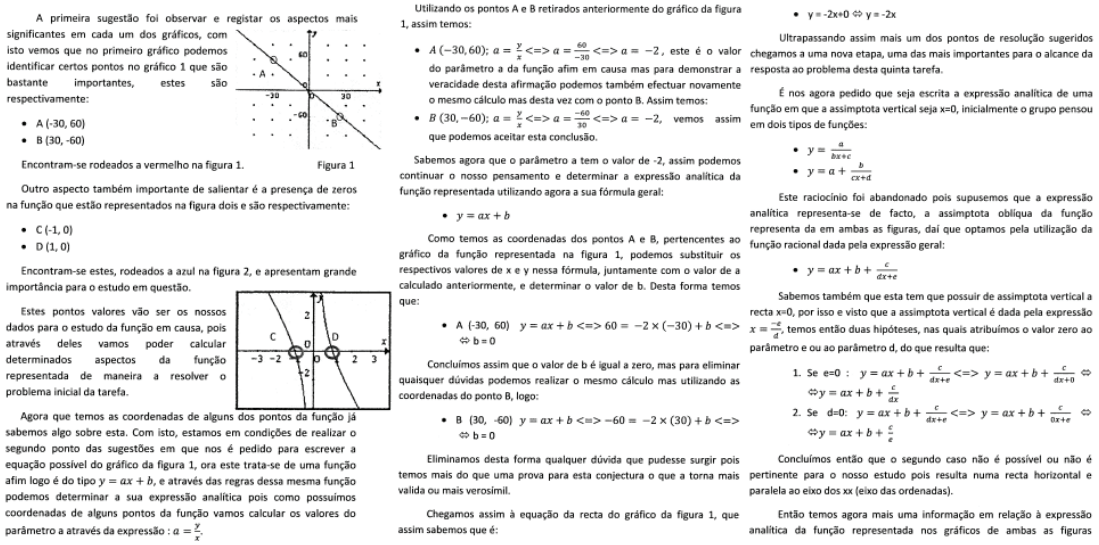
Na discussão desenvolvida pelos diferentes grupos foi também evidente verificar a importância da utilização da calculadora gráfica na exploração desta tarefa, nomeadamente a visualização dos diferentes gráficos que foram sendo obtidos devido à alteração dos valores dos parâmetros.

Relatório da tarefa e reflexão

Nesta tarefa, os argumentos apresentados pelos alunos foram no sentido de explicarem como é que raciocinaram até encontrarem uma expressão analítica de uma função que estivesse de acordo com as condições da tarefa.

Argumentação matemática

Na fase de apropriação da tarefa os alunos referiram nos seus relatórios que, após a leitura individual da tarefa, começaram por fazer uma análise de cada um dos gráficos. A maioria dos alunos evidenciou uma grande capacidade de organização do raciocínio, argumentando sempre de uma forma completa e rigorosa relativamente às conjecturas seguidas e às abandonadas, assim como às tentativas de prova realizadas. Por exemplo, Raul descreve o processo de raciocínio efectuado pelo seu grupo.



A primeira sugestão foi observar e registar os aspectos mais significantes em cada um dos gráficos, com isto vemos que no primeiro gráfico podemos identificar certos pontos no gráfico 1 que são bastante importantes, estes são respectivamente:

- A (-30, 60)
- B (30, -60)

Encontram-se rodeados a vermelho na figura 1. Figura 1

Outro aspecto também importante de salientar é a presença de zeros na função que estão representados na figura dois e são respectivamente:

- C (-1, 0)
- D (1, 0)

Encontram-se estes, rodeados a azul na figura 2, e apresentam grande importância para o estudo em questão.

Estes pontos valores vão ser os nossos dados para o estudo da função em causa, pois através deles vamos poder calcular determinados aspectos da função representada de maneira a resolver o problema inicial da tarefa.

Agora que temos as coordenadas de alguns dos pontos da função já sabemos algo sobre esta. Com isto, estamos em condições de realizar o segundo ponto das sugestões em que nos é pedido para escrever a equação possível do gráfico da figura 1, ora este trata-se de uma função afim logo é do tipo $y = ax + b$, e através das regras dessa mesma função podemos determinar a sua expressão analítica pois como possuímos coordenadas de alguns pontos da função vamos calcular os valores do parâmetro a através da expressão : $a = \frac{y}{x}$.

Utilizando os pontos A e B retirados anteriormente do gráfico da figura 1, assim temos:

- $A(-30, 60)$; $a = \frac{y}{x} <=> a = \frac{60}{-30} <=> a = -2$, este é o valor do parâmetro a da função afim em causa mas para demonstrar a veracidade desta afirmação podemos também efectuar novamente o mesmo cálculo mas desta vez com o ponto B. Assim temos:
- $B(30, -60)$; $a = \frac{y}{x} <=> a = \frac{-60}{30} <=> a = -2$, vemos assim que podemos aceitar esta conclusão.

Sabemos agora que o parâmetro a tem o valor de -2, assim podemos continuar o nosso pensamento e determinar a expressão analítica da função representada utilizando agora a sua fórmula geral:

- $y = ax + b$

Como temos as coordenadas dos pontos A e B, pertencentes ao gráfico da função representada na figura 1, podemos substituir os respectivos valores de x e y nessa fórmula, juntamente com o valor de a calculado anteriormente, e determinar o valor de b. Desta forma temos que:

- A (-30, 60) $y = ax + b <=> 60 = -2 \times (-30) + b <=> \Leftrightarrow b = 0$

Concluímos assim que o valor de b é igual a zero, mas para eliminar quaisquer dúvidas podemos realizar o mesmo cálculo mas utilizando as coordenadas do ponto B, logo:

- B (30, -60) $y = ax + b <=> -60 = -2 \times (30) + b <=> \Leftrightarrow b = 0$

Eliminamos desta forma qualquer dúvida que pudesse surgir pois temos mais do que uma prova para esta conjectura o que a torna mais valida ou mais verosímil.

Chegamos assim à equação da recta do gráfico da figura 1, que assim sabemos que é:

- y = -2x+0 $\Leftrightarrow$ y = -2x

Ultrapassando assim mais um dos pontos de resolução sugeridos chegamos a uma nova etapa, uma das mais importantes para o alcance da resposta ao problema desta quinta tarefa.

É nos agora pedido que seja escrita a expressão analítica de uma função em que a assimptota vertical seja x=0, inicialmente o grupo pensou em dois tipos de funções:

- $y = \frac{a}{bx+c}$
- $y = a + \frac{b}{cx+d}$

Este raciocínio foi abandonado pois supusemos que a expressão analítica representa-se de facto, a assimptota oblíqua da função representa da em ambas as figuras, daí que optamos pela utilização da função racional dada pela expressão geral:

- $y = ax + b + \frac{c}{dx+e}$

Sabemos também que esta tem que possuir de assimptota vertical a recta x=0, por isso e visto que a assimptota vertical é dada pela expressão $x = \frac{-e}{d}$, temos então duas hipóteses, nas quais atribuímos o valor zero ao parâmetro e ou ao parâmetro d, do que resulta que:

1. Se e=0 : $y = ax + b + \frac{c}{dx+e} <=> y = ax + b + \frac{c}{dx+0} \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = ax + b + \frac{c}{dx}$
2. Se d=0: $y = ax + b + \frac{c}{dx+e} <=> y = ax + b + \frac{c}{0x+e} \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = ax + b + \frac{c}{e}$

Concluímos então que o segundo caso não é possível ou não é pertinente para o nosso estudo pois resulta numa recta horizontal e paralela ao eixo dos xx (eixo das ordenadas).

Então temos agora mais uma informação em relação à expressão analítica da função representada nos gráficos de ambas as figuras

Figura 1. Excerto do relatório de Raul

Note-se que Raul conforme efectuou a verificação de que $c = 2d$, referiu quais foram os argumentos considerados pelo seu grupo para a validar. Finalmente os alunos encontraram a expressão analítica que tem como representação gráfica as duas figuras dadas no enunciado da tarefa, como é o caso de Júlia.

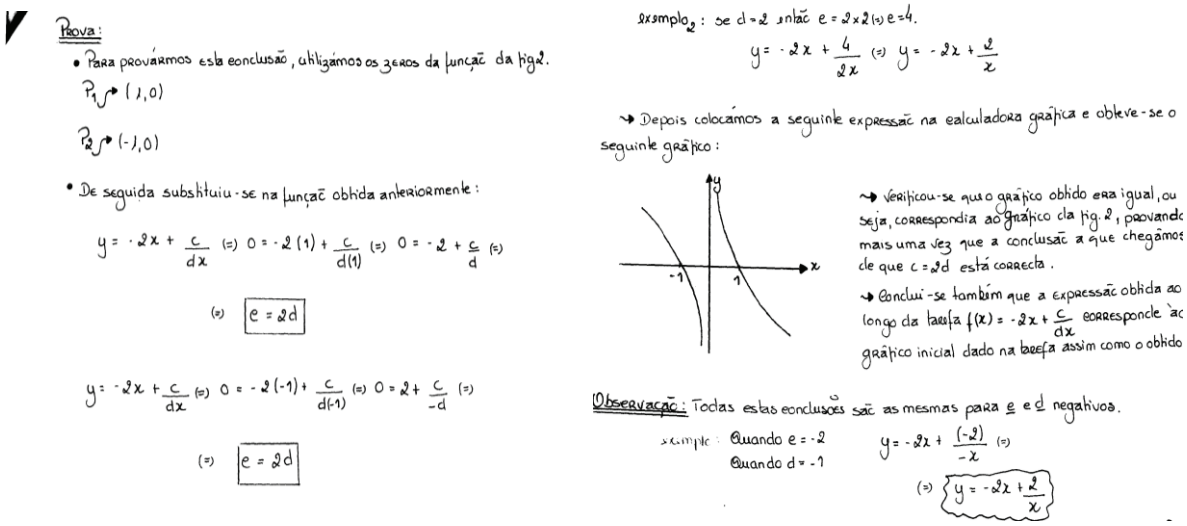


Figura 2. Excerto do relatório de Júlia

No final dos relatórios os alunos efectuaram uma reflexão sobre o desenvolvimento da investigação. Em particular, Célia referiu que a experiência que realizou "desempenhou um papel muito importante na sua aprendizagem e no desenvolvimento da capacidade de argumentar relativamente às conjecturas seguidas e às abandonadas". Salientou também que o método de ensino, em que os alunos participam activamente no desenvolvimento da sua aprendizagem, faz com que "haja mais entusiasmo e uma maior vontade de ir para as aulas".

Calculadora gráfica

Nesta tarefa foram vários os contributos da utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento da investigação. Em particular, Raul no seu relatório tem evidências relativamente à vantagem da utilização da calculadora gráfica na verificação através da alteração da janela de visualização, de que as duas figuras dadas no enunciado da tarefa eram possíveis representações gráficas da mesma função.

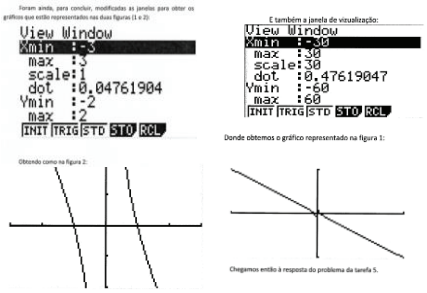


Figura 3. Excerto relatório de Raul

Sónia referiu também que para confirmar que a função $f(x) = -2x + 2/x$ tinha uma assimptota vertical de equação $x = 0$ recorreu ao *menu table* da calculadora gráfica.

Esta função confirmada pela opção *table* tem assímptota vertical $x = 0$.

x	Y1
-2	3,8333
-1	1,6666
0	ERROR
1	-1,6666
2	-3,8333

Figura 4. Excerto do relatório de Sónia

A calculadora gráfica ajudou os alunos a testarem e a validarem as suas conjecturas, desenvolvendo deste modo a capacidade de argumentação matemática nos alunos. Nas suas reflexões, os alunos consideraram que a calculadora gráfica foi um instrumento essencial e indispensável no desenvolvimento da investigação em grupo. Por exemplo, Célia considera que a calculadora gráfica permitiu testar "se determinada conjectura formulada era válida ou se deveria ser refutada". Salientou também que é importante que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica para que não sejam tiradas conclusões erradas devido às limitações deste instrumento tecnológico. Afonso é da opinião de Célia relativamente à calculadora gráfica acrescentando que "pode ser um instrumento muito útil quando utilizado correctamente, com a janela de visualização mais conveniente". Rafaela destacou também a importância da utilização dos instrumentos tecnológicos nas aulas de matemática relativamente à possibilidade de visualização gráfica das funções e por se tratar de um suporte para o debate de ideias, ou seja, para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente nos alunos. Esta aluna refere que "as novas tecnologias são boas companheiras da matemática".

Conclusão

Os alunos ao utilizarem as potencialidades da calculadora gráfica, progressivamente foram adquirindo uma atitude mais crítica e reflexiva em relação à tarefa de investigação proposta, tentando encontrar possíveis regularidades na descoberta da solução e na formulação da respectiva conclusão. Este facto é destacado por Gracias e Borba (2000) que consideram que quando se implementam tarefas de investigação, na sala de aula, em que se potencie o uso da calculadora gráfica, criam-se oportunidades de

aprendizagem, no que se refere à discussão, exploração e compreensão de conceitos matemáticos.

A calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral, na medida em que ajudou os alunos na compreensão da tarefa, assim como na validação ou rejeição das conjecturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática. É de salientar, a importância deste instrumento, do ponto de vista dos alunos, para o sucesso da investigação, pois foi a partir da sua utilização que foi possível construir e visualizar os gráficos de diferentes funções e através da sua análise, formular conjecturas e tentativas de prova. Outros estudos apontam no mesmo sentido ao revelarem que o processo de elaboração de hipóteses, teste de conjecturas, refutação e generalização, é possível ser efectuado de forma mais rápida e eficiente devido às potencialidades da calculadora gráfica na produção de vários gráficos, estimulando assim, a investigação matemática (Gracias & Borba, 2000).

Neste estudo, foi notório que a calculadora gráfica contribuiu para a realização da tarefa, por os alunos terem a possibilidade, de mais rapidamente, visualizar os vários gráficos, das diferentes funções. Esta opinião é reiterada por Demana e Waits (1992), pois consideram que a calculadora gráfica é um instrumento que pode ajudar os alunos numa melhor compreensão de alguns conceitos devido à possibilidade de visualização enquanto fazem matemática. Assim, verificou-se que a calculadora gráfica desempenhou o papel de instrumento facilitador da aprendizagem e o de mediador no processo de investigação, fundamental na construção de novos conceitos matemáticos e estimulando os alunos a desenvolver o seu próprio conhecimento matemático.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In A. M. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres, J. Duarte & T. O. Duarte, *Actas XVI SIEM* (pp. 13-43). Évora: APM.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Burril, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: Research findings and implications for classroom practice*. Michigan: Michigan State University.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp.669-705). New York, NY: Macmillian.

Cunningham, S., & Zimmermann, W. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning Mathematics* (pp.1-8). USA: Mathematical Association of America.

Demana, F., & Waits, B. K. (1992). A computer for all students. The Mathematics Teacher, 85 (2), 94-95.

Domingos, A. (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino aprendizagem. In A. P. Canavarro (Org.), *20 anos de temas na E e M* (pp.126-136). Lisboa: APM.

Douek, N., & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In Neil A. Pateman, Barbara J. Dougherty & Joseph T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA,* (Vol. 2, pp.341-348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Dunham, P., & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher, 87* (6), 440-445.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp.101-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fonseca, H. I. C. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. Lisboa: APM.

Gracias, T. S., & Borba, M. C. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações da calculadoras gráficas. *Educação e Matemática, 56*, 35-39.

Hirschhorn, D., & Thompson, D. (1996). Technology and reasoning in algebra and geometry. *The mathematics teacher, 89* (2), 138-142.

Kaber, L., & Longhart, K. (1995). Using graphing calculators to teach high school mathematics. In D. Thomas (Ed.), *Scientific Visualization in Mathematics and Science Teaching* (pp.19-25). Charlottesville, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of Mathematics: The Case of graphic representations of functions. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.271-288). Reston: NCTM.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research 60* (1), 1-64.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática. Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Quesada, A. R. (1996). On the impact of first generation of graphing calculators on the mathematics curriculum at the secondary level. In P. Gomez & B. Waits (Eds.), *Roles of calculators in the classroom* (pp.143-164). New York: State University of New York Press.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Lisboa: Universidade Aberta.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vincent, J., Chick, H., & McCrae, B. (2005). Argumentation profile charts as tools for analyzing students´ argumentations. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Volume 4, pp. 281-288). Melbourne: PME.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos. A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática, 100*, 85-88.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2.º GRAU RECORRENDO À FOLHA DE CÁLCULO

Fernando Luís Santos
Escola Superior de Educação Jean Piaget, Almada
UIED – Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento
fsantos@almada.ipiaget.org

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
UIED – Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento
amdd@fct.unl.pt

Resumo

No âmbito de um estudo sobre a implementação de um currículo e de metodologias de ensino e aprendizagem da matemática num curso de formação inicial de professores, tendo como pressuposto teórico as teorias sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA), desenvolveu-se uma tarefa com 60 alunos de um curso de Educação Básica (EB) sobre equações de 2.º grau recorrendo à folha de cálculo e ao *GeoGebra,* a ser entregue num fórum específico na plataforma institucional de ensino a distância.

A engenharia didáctica, utilizada como metodologia de investigação caracterizou-se como um esquema experimental baseado nas tarefas realizadas.

Os resultados mostram que apesar de somente 50% dos estudantes terem concluído a tarefa (que decorreu durante uma semana) estes desenvolveram graus de autonomia e de pro-actividade em tarefas posteriores, recorrendo a estas ferramentas para promover tarefas de experimentação matemática dos conceitos desenvolvidos até ao final da Unidade Curricular (UC).

Palavras-chave: Aprendizagem autónoma, experimentação matemática, formação de professores, pensamento matemático avançado.

Introdução

O ensino da matemática na formação inicial de professores assume como objectivos fundamentais: suportar o conhecimento matemático e desenvolver o sentido didáctico e criativo pelo desenvolvimento do seu pensamento matemático adquirindo uma compreensão matemática mais profunda dos conceitos a ensinar.

Juntamente com os desafios que o Processo de Bolonha trouxe ao Ensino Superior em Portugal existe uma crescente preocupação com a educação em ciência, tecnologia e matemática expressa pelos responsáveis políticos e com resultados menos satisfatórios em alguns relatórios internacionais (Ramalho, 2002, GAVE-ME, 2004,

Pinto-Ferreira, 2007). Pretende-se assim desenvolver actividades que permitam identificar aprendizagens e estratégias de ensino e aprendizagem matemática.

A experiência empírica mostra que muitos estudantes têm dificuldade na aprendizagem dos conceitos teóricos, adquirindo sobretudo rotinas de memorização e mecanização de procedimentos. As razões principais podem prender-se com a dificuldade na abstracção dos conceitos, a apresentação formal das ideias matemáticas e a dificuldade em acompanhar os raciocínios dedutivos que as demonstrações exigem (Tsvigu, 2007). Para tentar lidar com este problema foram desenvolvidas metodologias de ensino e de aprendizagem baseadas na teoria do PMA e na aprendizagem auto-regulada (AA-r). Neste artigo descreve-se o caso das equações de 2.º grau recorrendo a ferramentas computacionais tais como a folha de cálculo e o *GeoGebra*.

As tarefas foram aplicadas no âmbito da UC de Matemática II do currículo do 1.º Ciclo de EB (Licenciatura) de uma Instituição de Ensino Superior na zona da Grande Lisboa. Para além de 2 sessões presenciais de 2 horas (uma onde se introduzia o tema e outra onde se explicou a utilização das ferramentas), foram disponibilizados apontamentos e vídeos explicativos na página da UC na *Moodle*. Desta forma podem esclarecer dúvidas de modo autónomo estando a plataforma disponível a qualquer altura, promovendo assim a AA-r. Juntamente com este material foram preparados alguns exercícios que foram distribuídos como um trabalho a desenvolver e entregue *online*.

Enquadramento do estudo

Investigações anteriores e correntes têm-se centrado no ensino e na aprendizagem da matemática e não tanto no conhecimento conceptual do professor. Os estudos sobre este tópico têm evidenciado preocupações pois este tipo de conhecimento matemático não está presente em muitos professores (Veloso, 2004). Muitos investigadores têm escrito sobre os problemas na compreensão e na utilização de teorias matemáticas, principalmente de teoremas, na passagem para o nível da matemática formal (Leron citado por Abramovitz et al, 2007) utilizando os teoremas como *fórmulas mágicas* a ser memorizadas e utilizadas na resolução de problemas juntamente com um conjunto de regras de procedimento e algoritmos.

Considerando uma conjugação de factores (que envolve as alterações a nível da formação de professores, os resultados de estudos internacionais e um novo programa

para o Ensino Básico) elaborou-se um currículo de matemática para a formação inicial de professores combinando três níveis de intervenção: (i) uma formação matemática sólida para todos os níveis da EB (pré-escolar, 1.º e 2.º ciclos); (ii) uma aprendizagem das conexões entre os actos de conhecer e de ensinar matemática e (iii) promoção de competências tecnológicas em ambientes educativos.

Argumenta-se que o currículo deve fornecer uma matriz matemática suficientemente forte e flexível para que possam manipular e criar condições para que aprendam matemática com base nos 3 problemas que enfrenta a educação matemática: identificar conteúdos relevantes; entender como o conhecimento deve ser aprendido e o que é necessário para ensinar conceitos matemáticos. Torna-se então necessário que as estratégias pedagógicas e didácticas na área de matemática os encorajem a assumir um papel activo no seu processo de aprendizagem. Gertek citado por Joffrion (2010) explica que o conceito de experiência enquanto interacção do sujeito com o seu ambiente reflecte a crença do construtivismo pois o currículo deve ser relevante vendo a aprendizagem pela prática como factor crucial.

O pensamento matemático avançado (PMA)

Em 1988 Tall argumentou que o PMA podia ser interpretado de duas formas distintas: Pensamento relacionado com a matemática avançada ou, formas avançadas de pensamento matemático. Mas, o que é o PMA? Desde que o termo foi introduzido que tem existido discussão sobre o mesmo, alguns autores apontam as diferenças cognitivas entre os estudantes do ensino secundário e o início do ensino superior até os defensores dos conflitos cognitivos inerentes aos modos diferentes de pensamento, o que pode acontecer em qualquer idade, e com qualquer conteúdo matemático.

Segundo Leikin et al (2010) o grupo do PMA do CERME (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*) abordou a discussão sob duas perspectivas: uma centrada na matemática considerando-se as relações com os conteúdos e conceitos matemáticos apresentando investigações sobre aquisições conceptuais, técnicas de prova e demonstração, resolução de problemas, técnicas de ensino e processos de abstracção, outra centrada no pensamento onde as investigações se focam nos estudantes com grande potencial em matemática relacionando diferentes grupos com conteúdos de matemática avançada.

Aprender matemática significa participar em diferentes tipos de práticas matemáticas, uma forma de explicar as variações entre cada prática pode ser vista através de definições de Tall (2002) sobre o PMA e o pensamento matemático elementar (PME) partindo do problema identificado por Dreyfus (Tall, 2002) como o ciclo de *generalização → síntese → abstracção* considerado fundamental no desenvolvimento de conceitos matemáticos avançados ou complexos.

Estas diferenças também são trabalhadas por Dubinsky (Tall, 2002) quando se aborda a dualidade da abstracção entre empírica e reflexiva mais tarde caracterizada pela teoria APOS (Edwards, Dubinsky & McDonald, 2005).

A educação matemática vista pela sua vertente mais restrita, a didáctica da matemática é uma área aplicada em que as margens entre o trabalho científico e a prática construtivista é, no mínimo, ténue. Para Winkelmann (Biehler, Scholz, Sträßer & Winkelmann, 1994) as reflexões e/ou melhoramentos no processo de desenvolvimento curricular em matemática servem como ponte para os vários grupos envolvidos na educação matemática.

A tradução de conceitos, seus princípios, técnicas e métodos de pensamento do ponto de vista do matemático para o ponto de vista do professor de matemática envolvem pelo menos 2 factores importantes: a escolha dos conceitos matemáticos a ensinar e a forma como os ensinar. Para futuros professores estas questões são ainda mais empoladas de modo a que estas experiências de aprendizagem sejam mais envolventes e efectivas também na área do conhecimento sobre como os alunos aprendem matemática.

Tall (1981, 1995, 2002) descreve o PMA com base em 2 componentes - a especificação dos conceitos por definições matemáticas precisas e as deduções lógicas de teoremas salientando que a formalização e sistematização dos conceitos matemáticos é a etapa final do pensamento matemático mas não a actividade completa. Edwards et al (2005) centram-se na definição do fenómeno que parece ocorrer durante a experiência matemática quando estes relacionam conceitos abstractos e demonstrações dedutivas, reconhecendo que as estruturas mentais que garantiam sucesso académico já não resultam, ligando assim o conceito de PMA a este período de transição.

Rassmussen et al (2005) propõem uma abordagem alternativa ao PMA em que utilizam a expressão *advancing mathematical activity* (no original) que foi traduzida

para *tarefas de pensamento matemático avançado* justificando a expressão dirigida para o processo total e não para a parte final do processo referida por Tall, esta caracterização tem um enfoque especial nas práticas matemáticas importantes e nas diferentes abordagens práticas a essa actividades reflectindo a caracterização do pensamento matemático como um acto de participação nas diferentes práticas matemáticas. A utilização de símbolos, de algoritmos e de tarefas representam, sem serem exaustivas, um núcleo útil de práticas transversais a todos os domínios da matemática.

Para isso é necessário fazer a ponte entre a AA-r (Wolters, 2010) e o desenvolvimento de competências de aprendizagem da matemática ligando aspectos didácticos e pedagógicos à utilização de ambientes educativos potenciados tecnologicamente. Argumenta-se que é possível por intermédio de ferramentas computacionais encontrem potenciais conteúdos matemáticos e que pela experimentação obtenham benefícios para o pensamento matemático, baseado na familiarização para desenvolver ideias matemáticas.

A folha de cálculo e o *GeoGebra*

Quando criou o VisiCalc, Bricklin nunca esperava que as folhas de cálculo tivessem tantas formas de utilização, de uma mera ferramenta para contabilidade a folha de cálculo tem ganho visibilidade no ensino e na aprendizagem (Baker & Sugden, 2003). Para Abramovich & Brantlinger (1998) uma das vantagens da modelação matemática é a possibilidade dos estudantes explorarem conceitos matemáticos mediados por ferramentas computacionais em ambientes alternativos, neste caso a folha de cálculo e o *GeoGebra* que segundo Laborde (2010) assumem um papel essencial pelas suas características específicas de visualização, nomeadamente de expressões algébricas pois estas estão interligadas.

Metodologia

O objectivo deste estudo é identificar características inerentes à resolução de tarefas com equações de 2.º grau recorrendo à folha de cálculo e ao *GeoGebra* de forma a promover a experimentação matemática.

Utilizou-se a engenharia didáctica (ED) (Brun, 2000) enquanto metodologia de investigação, caracterizada por um esquema experimental baseado na concepção,

realização, observação e análise de tarefas matemáticas. No caso deste estudo, visto ser limitado no tempo a uma tarefa, optou-se pelo nível da micro-engenharia.

Para Turingam e Yang (2009) a AA-r descreve um reportório de estratégias para ultrapassar os desafios que são colocados, espera-se que durante o processo estes se tornem mais pro-activos e procurem oportunidades de obter novas aprendizagens. Neste sentido, esta metodologia de ensino e de aprendizagem pretende envolvê-los num conjunto de actividades de PMA na óptica das sugestões de Rasmussen et al (2005).

Assumindo que as tarefas podem ser descritas pelo modelo da AA-r sugerido por Pintrich (Wolters, 2010) como construtoras activas, asseguram-se as seguintes 4 fases: (i) *antecipação* enquanto planificação e estabelecimento de objectivos bem como o reconhecimento de conhecimentos anteriores; (ii) *monitorização* enquanto se mantêm registo dos progressos; (iii) a utilização da *gestão* dos conteúdos e a *regulação* das várias estratégias de aprendizagem para completar a tarefa e (iv) *reflexão*, geração de conhecimento a nível do PMA, nomeadamente a extensão do problema e sua generalização.

Participantes

Os participantes foram 60 estudantes do 2.º ano do 1.º ciclo da EB a frequentar a UC de Matemática II durante o 2.º semestre de 2011. Estes têm formações (antes do ensino superior) muito diversas onde a maioria não tem contacto com a disciplina desde o 9.º ano de escolaridade e tendo frequentado a UC de Matemática I cujos conteúdos versaram sobre cálculo proposicional, teoria de conjuntos e aritmética racional.

O material de aprendizagem

Uma grande parte dos instrumentos utilizados recorre a exemplos considerados tradicionais (exercícios de papel e lápis), vídeos explicativos e tutoria recorrendo às várias ferramentas disponíveis na *Moodle* definindo à partida qual o trabalho a desenvolver e os objectivos pretendidos. De acordo com o modelo, o material fornecido por intermédio da *Moodle* é um complemento das aulas presenciais (teóricas e práticas) leccionado a distância.

No caso apresentado a tarefa e o trabalho foi introduzido nas aulas práticas na semana anterior à aula teórica sobre o mesmo tópico. Compreendeu 3 tipos de material: (i) documento explicativo sobre a resolução de equações de 2.º grau com exercícios; (ii)

vídeo a explicar a resolução de equações de 2.º grau; (iii) 2 vídeos a explicar a utilização da folha de cálculo e do *GeoGebra*.

O documento abordava a noção do que é uma equação de 2.º grau e explicava os procedimentos de resolução com exemplos de exercícios resolvidos contemplando as várias possibilidade de resultados no conjunto R. O primeiro vídeo tem a mesma estrutura do documento explicativo dos procedimentos. Os segundos vídeos explicam a introdução de fórmulas nas células de uma folha de cálculo com exemplos da colocação de equações e exploração das mesmas, e a introdução das equações na secção de álgebra do *GeoGebra* e posterior visualização do gráfico respectivo.

Das 10 equações apresentadas, 5 eram impossíveis em R, 2 eram possíveis com zeros naturais, 1 era possível com um só zero (natural), 1 era possível com dois zeros fraccionários e uma era possível com um zero natural e outro fraccionário. Estas secções representam a fase da concepção à luz da ED.

A tarefa desenvolvida

Na 2.ª fase da ED (realização) solicitou-se a escolha de uma de 10 equações de 2.º grau disponibilizadas e posterior exploração recorrendo à folha de cálculo, pretendia-se a analise da equação escolhida e a sua separação nas parcelas correspondentes às várias partes da equação conforme a figura seguinte:

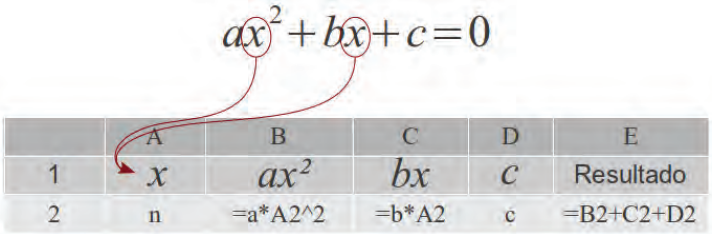


Figura 1. Processo de transformação de uma equação de 2.º grau na forma canónica para uma tabela na folha de cálculo.

Este processo permite a exploração de vários valores de x e, ao mesmo tempo, fornece informações de como a equação se altera consoante os valores introduzidos. Nesta parte da tarefa pretendeu-se a experimentação das alterações e/ou regularidades dos resultados e/ou dos parâmetros da equação de uma forma meramente numérica, para, na segunda parte da tarefa explorarem a mesma equação no *GeoGebra* permitindo a verificação gráfica da evolução da equação, aferida com os valores da folha de cálculo. A tarefa após concluída (ficheiro de folha de cálculo e ficheiro do *GeoGebra*)

foi entregue no espaço de fórum de partilha na *Moodle* como forma dos restantes colegas com dúvidas pudessem questionar e/ou aprofundar a sua aprendizagem promovendo assim a noção de comunidade de prática (CoP) onde as tarefas são partilhadas por todos.

Era esperado, que, durante a tarefa, os estudantes se apercebessem das relações entre os vários termos da equação e a forma como os parâmetros se alteram quando se alteram os valores da mesma. Pretendia-se que após a visualização numérica e algébrica/geométrica a percepção/compreensão que têm das equações fosse mais consistente com o que se espera de um futuro professor.

Resultados

Da observação e análise dos resultados (duas últimas fases da ED) realizado até à data limite de entrega (1 semana) a percentagem de respostas foi de 50%, ou seja só 30 entregaram o trabalho completo, foram entregues mais 3 trabalhos que não foram contabilizados pois os ficheiros entregues não continham as fórmulas de cálculo (um dos trabalhos estava mesmo em formato PDF), o terceiro estava incompleto (faltava o ficheiro do *GeoGebra*).

Um dos dados que se verifica pela análise das equações escolhidas é apresentado na seguinte tabela:

Tabela 1. Estatística descritiva das respostas obtidas em cada equação.

Equação	N.º de respostas	% de respostas
$3x^2+x-4=0$	2	6,67
$x^2-5x-6=0$	16	53,33
$2x^2+6x+5=0$	4	13,33
$4x^2+2x+2=0$	1	3,33
$-3x^2+5x-8=0$	0	0
$-5x^2+3x-3=0$	0	0
$x^2=4x-4$	5	16,67
$9x^2+3x=-2$	0	0
$-2=-2x^2-3x$	1	3,33
$x^2+x-1=0$	1	3,33
Total	30	100

Pela análise da tabela, a 2.ª equação destaca-se com 53%, este valor pode ser justificado pelo facto dos resultados serem colocados em fórum público e ter ocorrido um fenómeno de repetição pela visualização dos trabalhos dos colegas, bem como a entreajuda existente (evidências de criação de uma CoP), como se verifica na figura 2.

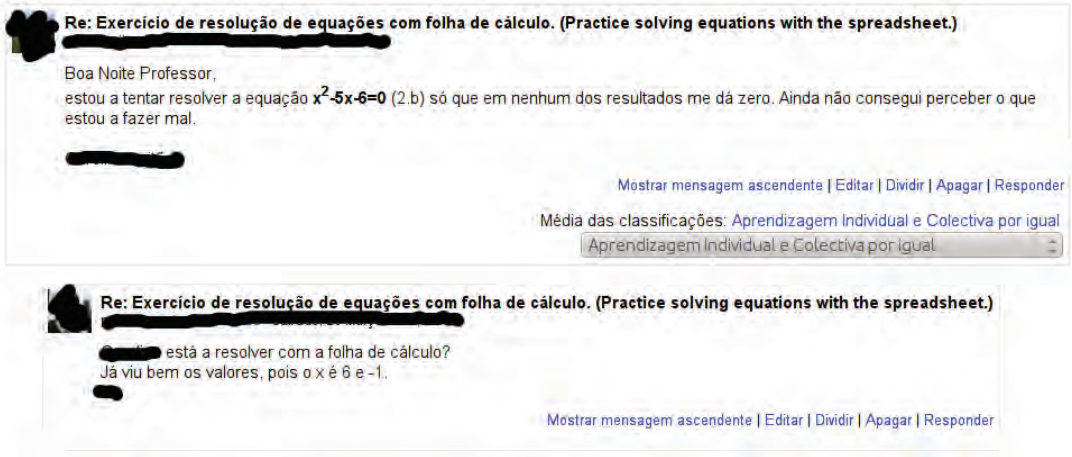


Figura 2. Exemplo retirado do fórum onde um dos estudantes ajuda outro, antes da intervenção do professor.

A participação no fórum foi relativamente elevada tendo em conta o resto da UC, com um conjunto de dúvidas sobre a inserção de fórmulas na folha de cálculo, bem como dos que escolheram as equações sem zeros como se verifica na figura 3.

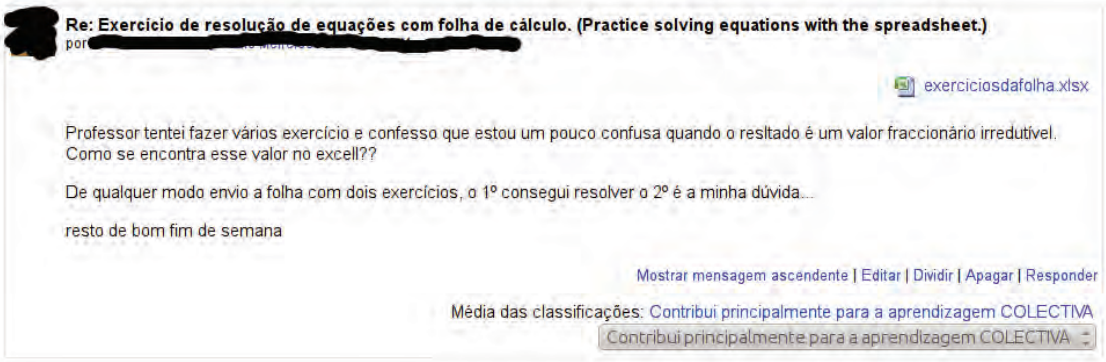
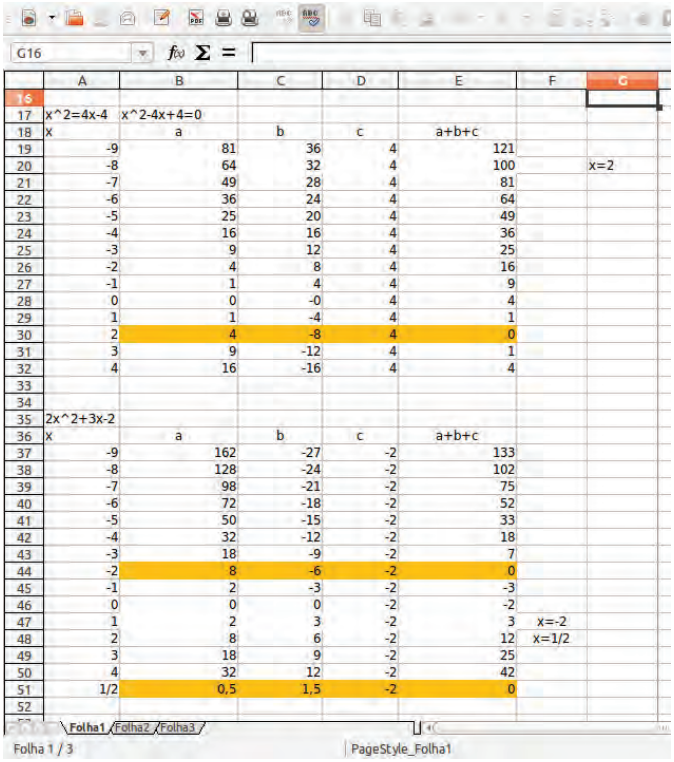


Figura 3. Exemplo retirado do fórum sobre dúvidas na inserção de fórmulas.

De acordo com uma análise aos conteúdos das participações no fórum existe a tendência de alguns estudantes para atingirem o quarto nível da AA-r, ou seja a tentativa de extensão para tarefas semelhantes tal como em 4 dos 30 trabalhos entregues terem surgido evidências de tentativas de generalização dos conceitos envolvidos (estudantes que tentaram resolver mais do que uma das equações para verificar se o processo se poderia replicar), como se verifica pelas figuras 4 e 5.



	A	B	C	D	E	F	G
16							
17	x^2=4x-4	x^2-4x+4=0					
18	x	a	b	c	a+b+c		
19	-9	81	36	4	121		
20	-8	64	32	4	100		x=2
21	-7	49	28	4	81		
22	-6	36	24	4	64		
23	-5	25	20	4	49		
24	-4	16	16	4	36		
25	-3	9	12	4	25		
26	-2	4	8	4	16		
27	-1	1	4	4	9		
28	0	0	-0	4	4		
29	1	1	-4	4	1		
30	2	4	-8	4	0		
31	3	9	-12	4	1		
32	4	16	-16	4	4		
33							
34							
35	2x^2+3x-2						
36	x	a	b	c	a+b+c		
37	-9	162	-27	-2	133		
38	-8	128	-24	-2	102		
39	-7	98	-21	-2	75		
40	-6	72	-18	-2	52		
41	-5	50	-15	-2	33		
42	-4	32	-12	-2	18		
43	-3	18	-9	-2	7		
44	-2	8	-6	-2	0		
45	-1	2	-3	-2	-3		
46	0	0	0	-2	-2		
47	1	2	3	-2	3	x=-2	
48	2	8	6	-2	12	x=1/2	
49	3	18	9	-2	25		
50	4	32	12	-2	42		
51	1/2	0,5	1,5	-2	0		
52							

Figura 4. Folha de cálculo com a resolução de mais de uma equação.

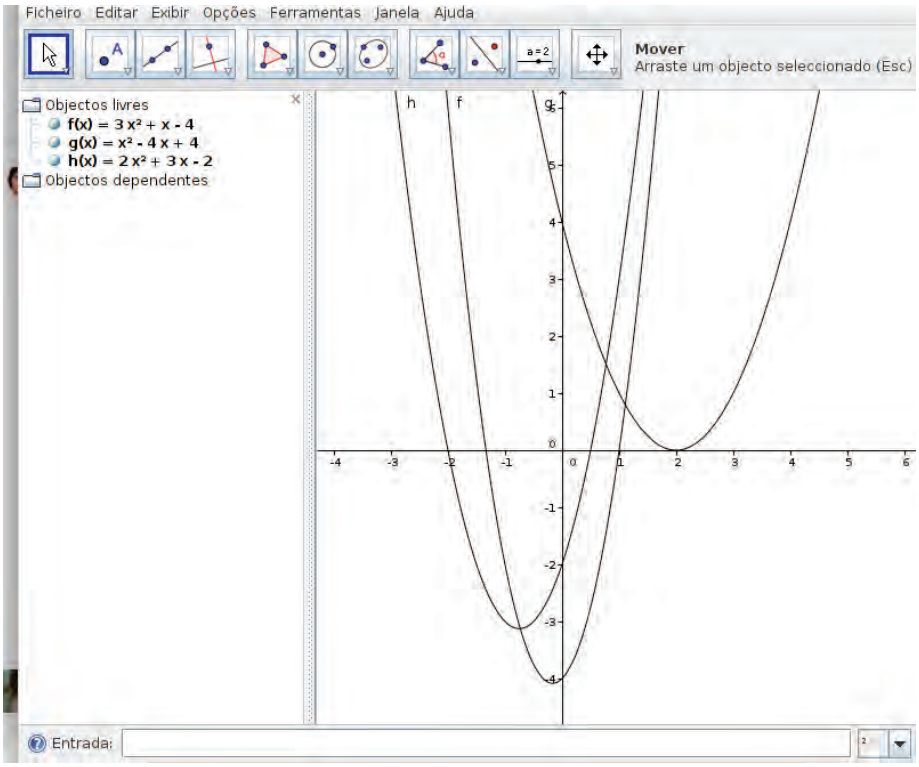


Figura 5. GeoGebra com mais de uma equação.

Estas conclusões precisam de ser validadas recorrendo a outros instrumentos de pesquisa, tais como entrevistas para comprovar esta hipótese.

Considerações finais e futuros desenvolvimentos

Torna-se importante salientar que os estudantes não estavam familiarizados com a utilização das fórmulas na folha de cálculo, e muitos iniciaram a sua utilização imediatamente antes desta tarefa, pela análise ao conteúdo das conversações nos fóruns as questões prendiam-se mais sobre a inserção de fórmulas, do que sobre a tarefa em si.

A abordagem que fizeram partiu da experimentação das equações que estavam mais familiarizados como se pode constatar pela escolha das equações que tinham sido mais trabalhadas em aula (67% com 2 zeros), os restantes participaram mais nos fóruns e exploraram o facto das equações escolhidas terem 1 só zero ou nenhum zero o que implicou uma constante verificação dos resultados obtidos (na folha de cálculo e no *GeoGebra*) o que evidencia alguma tentativa de passar da exploração dos dados numéricos para uma compreensão do conceito (abordando assim o PMA) na linha do ciclo identificado por Dreyfus, ou mesmo pela generalização reflexiva da teoria APOS, estas impressões finais carecem de validação, necessitando de uma análise mais profunda.

Após esta tarefa o grupo tornou-se mais activo nas tarefas seguintes, nomeadamente com o estudo das funções e estas tarefas utilizando a folha de cálculo e o *GeoGebra* fomentaram a experimentação em matemática num ambiente ideal para desenvolver essa mesma tarefa tal como enunciado por Wolters (2010).

Indícios desta postura investigativa por parte dos estudantes foram evidenciadas pelo tempo investido na prova e demonstração de que as suas conjecturas estão correctas. Esta actividade aponta para a necessidade de envolver mais os estudantes neste ambiente investigativo, mas é necessário mais trabalho de forma a flexibilizar e integrar estas actividades não só na realidade da experiência matemática de futuros professores, mas que estes transportem essas experiências para a sua prática profissional.

Referências bibliográficas

Abramovitz B., Berezina M., Berman A. & Shvartsman L. (2007). Lagrange's theorem: what does the theorem mean?. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proccedings of the fifth congress of the european society for research in mathematics education*. Acedido em http://ermeweb.free.fr/CERME%205/CERME5%20Proceedings%20Book.pdf

Abramovich, S., & Brantlinger, A. (1998). Tool Kit Approach to Using Spreadsheets in Secondary Mathematics Teacher Education. In S. McNeil, J. D. Price, S. Boger-

Mehall, B. Robin, J. Willis (Eds), *Technology and Teacher Education Annual*, 1998, 573-577. Charlottesville, VA.

Biehler, R., Scholz, R. W., Sträßer, R., & Winkelmann, B. (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Dewey, J. (2009). Education as engineering. *Journal of Curriculum Studies*. 41, nº1, 1-5. DOI: 10.1080/00220270802169345 (Original work published in 1922).

Baker, J. & Sugden, S. J. (2003). Spreadsheets in Education –The First 25 Years. *Spreadsheets in Education (eJSiE)*: Vol. 1: Issue 1, Article 2. Acedido em http://epublications. bond.edu.au/ejsie/vol1/iss1/2

Brun, J. (Dir) (2000). *Didáctica das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. & McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25. Doi: 10.1207/s15327833mtl0701_2.

Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. (2004). *PISA 2003 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática*. Lisboa: GAVE.

Joffrion. C. (3 de Outubro de 2010). *Influence of Educational Theorists on Thinking in Education*. ezine@rticles. Acedido em http://ezinearticles.com/?Influence-of-Educational-Theorists-on-Thinking-in-Education\&id=5142815

Laborde, C. (2010). Linking geometry and algebra through dynamic and interactive Geometry. In Z. Usiskin, K. Andersen & N. Zoto (Eds.). *Future curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference*. Charlotte, NC: Information Age Pub.

Leikin, R., Cazes, C., Mamona-Dawns, J., & Vanderlind, P. (2010). Introduction Advanced Mathematical Thinking: Reflection on the work at the conference. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2238-2245). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique. Acedido em http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/ cerme6/

Pinto-Ferreira, C. (Coord.), (2007). *PISA 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses*. Lisboa: GAVE-ME.

Ramalho, G. (Coord.), (2002). *PISA 2000 - Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: GAVE-ME.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73. DOI: 10.1207/s15327833mtl0701.

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Plenary Lecture, Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Recife, Brazil, July 1995, (Vol I, pp. 161–175).

Tall, D. (1981). The mutual relationship between higher mathematics and a complete cognitive theory for mathematical education. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale P.M.E.*, Grenoble, 1981, pp. 316–321.

Tsvigu, C. (2007). *Students' Experiences, Learning Styles and Understanding of Certain Calculus Concepts: A Case of Distance Learning at the Zimbabwe Open University*. University of the Western Cape. Acedido em http://etd.uwc.ac.za/usrfiles/modules/ etd /docs/etd_gen8Srv25Nme4_2962_1257947645.pdf.

Turingam, J. P. & Yang, Y. (2009). A Cross-Cultural Comparison of Self-Regulated Learning Skills between Korean and Filipino College Students. *Asian Social Science*, 5,12, 3-10.

Veloso, E. (2004). Educação matemática dos futuros professores. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor*. Évora: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Wolters, C. A. (2010). *Self-Regulated Learning and the 21st Century Competencies*. Acedido em http://www.hewlett.org/uploads/Self_Regulated_Learning_21st_Century_Competencies.pdf

LUGARES GEOMÉTRICOS: UMA ABORDAGEM COM O SOFTWARE GEOGEBRA[1]

Gerson Pastre de Oliveira
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) – Brasil
gpastre@pucsp.br

Péricles Bedretchuk Araújo
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – Brasil
pericles.bchuk@gmail.com

Resumo

A pesquisa descrita neste artigo relata uma investigação que teve por bases a Teoria das Situações Didáticas e pressupostos relativos ao emprego de estratégias pedagógicas mediadas por tecnologias para a aprendizagem em Geometria. A sequência didática proposta neste estudo visou possibilitar aos alunos participantes, estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e do segundo ano do Ensino Médio, construir os conceitos de circunferência e mediatriz, sob o ponto de vista de lugares geométricos. Para isso, utilizou-se o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*. A investigação empregou tarefas nas quais situações do cotidiano associadas à circunferência e à mediatriz como lugares geométricos foram apresentados aos alunos. Tais ocorrências foram utilizadas na aprendizagem de geometria através de tarefas de construção que, também, permitiram levantar as dificuldades de aprendizagem dos estudantes e suas estratégias, quando em contato com ambientes dinâmicos como os que foram proporcionados pelo programa computacional. O estudo permitiu considerar que a intervenção mediada pelo *software* de Geometria Dinâmica auxiliou os estudantes na superação dos problemas encontrados. Semelhante efeito também pode ser creditado, de certa forma, à proposta colaborativa das situações didáticas planejadas.

Palavras-chave: Geometria dinâmica, lugares geométricos, teoria das situações didáticas, GeoGebra.

Introdução

Este artigo relata uma pesquisa concluída e levada a efeito no âmbito do grupo "Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática", do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, envolvendo alunos de uma escola pública de Educação Básica, cursando séries finais do Ensino Fundamental ou o Ensino Médio. O objetivo era o de avaliar se uma sequência de situações adidáticas, estruturadas em uma estratégia pedagógica mediada pelo *software* GeoGebra, poderia contribuir para a aprendizagem dos temas "circunferência" e "mediatriz", vistos como lugares geométricos.

[1] Este artigo é resultado de pesquisa apoiada pela Fapesp (Processo no. 2010/01225-8) e pelo CNPq (Processo no. 401390/2010-1).

Fundamentação teórica

No contexto supramencionado, segundo Brousseau (2008), uma *situação adidática* é aquela na qual o estudante não tem a revelação, por parte do professor, da intenção de ensinar, ainda que este tenha planejado dada situação de modo a estabelecer condições favoráveis para a construção do novo saber. O aluno não buscará a solução de problema para responder ao professor, mas para solucionar a situação que lhe é apresentada, ganhando maior autonomia. O professor não intervém diretamente para que o aluno adquira o conhecimento esperado: o aprendiz adapta-se a um 'meio', que é fator de desequilíbrios.

Ainda em relação aos conceitos mencionados, uma figura geométrica se caracteriza por determinadas propriedades que a individualizam. Neste contexto, a concepção de lugar geométrico pode ser vista como "um conjunto de pontos que apresentam uma determinada propriedade: se certo ponto possui a propriedade *x*, então ele pertence ao lugar geométrico dos pontos que satisfazem *x*" (Camargo, n.d., s/p).

Segundo King e Schattschneider (1997), os lugares geométricos representam um assunto evitado em livros de geometria, ainda que representem um tema que pode enriquecer o seu estudo. Entender as propriedades geométricas que estão atreladas a uma determinada figura e como elas se relacionam pode possibilitar um entendimento de conceitos geométricos como a circunferência, mediatriz, bissetriz e outros. Especificamente nesta pesquisa, os lugares geométricos trabalhados são a circunferência e a mediatriz, que têm as seguintes definições:

> **Circunferência**: lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto dado chamado centro da circunferência – a distância constante é a medida do raio;
>
> **Mediatriz**: lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos extremos de um segmento (Camargo, n.d., p.2).

Estas definições também podem ser encontradas em livros didáticos. No caso da circunferência como lugar geométrico, uma definição pode ser: "a circunferência é um lugar geométrico no plano, pois todos os seus pontos têm uma propriedade comum: estão a uma mesma distância a um ponto fixo" (Mori e Onaga, 2009, p. 226).

Um ponto que se move em um plano, com determinadas propriedades, pode ser visto como um lugar geométrico – por exemplo, a distância deste ponto em relação a dois outros pode ser constante e igual a *x*. A curva formada pelo ponto em questão pode

ser de difícil visualização com recursos estáticos – claro que não é impossível, apenas mais difícil. Esta é a argumentação de King e Schattschneider (1997), que acrescentam ser difícil para as pessoas imaginarem um ponto se movendo em uma configuração na qual pode haver outros pontos e ainda serem capazes de apontar o lugar geométrico. Uma possibilidade existente nos programas de Geometria Dinâmica é a capacidade de visualização de lugares geométricos por meio do traçado de um ponto, entre outros recursos. Evidentemente, o recurso, por si só, não tem o poder de melhorar a capacidade de aprendizagem de um estudante em particular – ou de um grupo: são as estratégias pedagógicas planejadas no âmbito das situações de aprendizagem as responsáveis por fomentar este processo (Oliveira, 2009).

No que diz respeito à Geometria Dinâmica, argumenta Gravina (1996):

> a partir de exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos conjeturam e, com o feedback constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjeturas, chegando a resultados que resistem ao "desenho em movimento", passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática (Gravina, 1996, s/p).

Nas tarefas desta pesquisa, os lugares geométricos são utilizados em uma série de construções geométricas, considerando uma abordagem com o *software GeoGebra*. Entende-se, desta forma, que o uso das tecnologias não significa a simples transposição das aulas tradicionais para o computador, mas expressa uma mudança na forma de ensinar, representando uma forma de estimular o aluno a ganhar autonomia, avançando desde a perspectiva de um simples executor de tarefas automatizadas, para a de alguém que aprende a aprender. Denota, também, uma postura diferenciada do professor, de modo que ele possa transitar e saber usar os potenciais oferecidos pelas TICs.

Metodologia

Foi importante, na investigação aqui relatada, eleger um estilo de trabalho para os sujeitos, de tal forma a favorecer um ambiente de interações intensivas, tanto quanto possível. Esta ambientação surgiu com base nas ideias do trabalho colaborativo, o qual favorece o relacionamento social dos indivíduos, ao incentivar as discussões entre os seus membros, gerando momentos ricos de aprendizagem onde um membro pode incentivar o outro a expor suas ideias, reformulá-las, compartilhar seus conhecimentos,

buscando o êxito da tarefa na qual estão envolvidos. A ideia de colaboração na aprendizagem assim foi definida por Ramos e Quartiero (como citado em Oliveira, 2007, p. 113):

> (..) entendemos a colaboração 'como atividade síncrona e coordenada que resulta de uma tentativa contínua de construir e manter uma concepção compartilhada de um problema' (Roschelle e Teasley como citado em Rosatelli et al, 2003, p. 48). Neste sentido, a colaboração caracteriza-se como uma ação na qual os objetivos e os problemas são partilhados visando à construção do conhecimento e a aprendizagem.

Participaram da pesquisa nove alunos voluntários, com idades entre 14 a 16 anos, dos quais três eram do 9º ano do Ensino Fundamental e seis do 2º ano do Ensino Médio, em uma escola pública situada no município de São Paulo. As sessões ocorreram em horário diverso das aulas regulares. Os alunos foram divididos em 3 grupos, com 3 alunos cada. Os grupos foram indicados por A, B e C, e os alunos de cada grupo como A1, A2, A3, e assim por diante. A sequência de ensino foi aplicada por um dos pesquisadores e contou com a colaboração da professora de Matemática da turma. Foram utilizados 12 computadores e um projetor multimídia[2] durante as quatro sessões de aplicação do instrumento, que contava com 13 tarefas, das quais 3, em função da relevância, são descritas neste artigo.

Nesta pesquisa, os procedimentos metodológicos consideraram os pressupostos da Engenharia Didática, caracterizada como:

> [..] um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, a observação e a análise de sequências de ensino (Artigue como citado em Machado, 2008, p.235).

Os procedimentos adotados na metodologia da engenharia didática distinguem quatro fases. Nas análises preliminares, são realizadas as considerações sobre o quadro teórico-didático envolvido. No caso desta investigação, tais elementos compreendem a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1997), bem como conhecimentos ligados aos lugares geométricos "circunferência" e "mediatriz", além de um exame sobre livros didáticos que trazem os temas em estudo e suas abordagens. Na fase de análise a priori, o pesquisador define as variáveis didáticas presentes nas tarefas, bem como indica as

[2] Os alunos utilizaram os computadores individualmente, discutindo os resultados no âmbito do grupo posteriormente. Os outros 3 computadores foram utilizados, respectivamente, por um dos pesquisadores, pela professora de Matemática das turmas e para o projetor multimídia, utilizado para socialização dos resultados entre os alunos e para os momentos de institucionalização.

possibilidades de resolução das mesmas. A fase da experimentação realiza-se no momento em que ocorre o contato do pesquisador com os alunos que participaram da investigação e prevê uma explicação dos objetivos e das condições em que a pesquisa será realizada, assim como o estabelecimento do contrato didático na consecução das tarefas (Brousseau, 2008). Por fim, na análise a posteriori e validação, coletaram-se os dados obtidos na fase de experimentação, resultados estes oriundos tanto das observações desenvolvidas em cada sessão como das produções desenvolvidas pelos alunos com o *software* GeoGebra. É o momento em que se comparam análise a priori e a posteriori, validando ou não as hipóteses levantadas.

Assim, entende-se, no âmbito deste trabalho, que o sucesso do emprego de tecnologias digitais em sala de aula está em estabelecer as estratégias apropriadas para o desenvolvimento cognitivo do aluno e o aperfeiçoamento das práticas de ensino por parte do professor. Nesta investigação, a sequência com esta visão está integrada à propositura de problemas de acordo com a Teoria das Situações Didáticas. Para Brousseau (como citado em Almouloud, 2007, p.31),

> Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos.

Nesta teoria, o principal elemento de estudo é a própria situação didática, no contexto da qual se pode identificar certas ordens de interações existentes entre o saber, o professor e o aluno, em dadas situações de ensino, como explicitado na próxima figura.

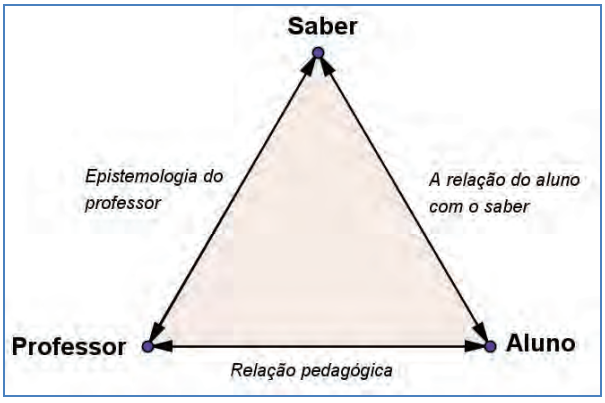


Figura 1 – Triângulo didático (adaptado de Almouloud, 2007, p. 32)

Tal como nos aportes construtivistas piagetianos, considera-se aqui que o sujeito aprenda pela adaptação a um *milieu* antagônico, ou seja, um meio que é agente de dificuldades, desequilíbrios e contradições diversas. São as respostas inéditas as atestadoras da aprendizagem de dado estudante. O *milieu* como adversário não é uma condição indesejável, pelo contrário: deve ser desta forma para que possa existir a superação desde o conhecimento estruturado no sujeito, a partir da percepção e avanço desde o desequilíbrio cognitivo. A responsabilidade pela criação e organização de um *milieu* com intencionalidade didática deve ser do professor, que criará situações passíveis de acionar as aprendizagens matemáticas pretendidas. Assim, uma situação didática poderia ser definida como

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (Brousseau como citado em Almouloud, 2007, p. 33).

Como elemento importante da situação adidática, surge o conceito de *devolução*: o professor propõe uma tarefa e estimula o aluno a aceitá-la como desafio a resolver. A esse respeito, Brousseau (2008, p. 91) afirma que "a devolução é ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e o mesmo assume as consequências dessa transferência".

Em seguida, então, são mencionadas as tarefas analisadas e expostas neste artigo.

Tarefas e análises

Para a primeira tarefa, o seguinte enunciado estava disponível, com as distâncias anunciadas já em escala:

> Um carro está a 3,5 cm do Parque Raul Seixas, do qual já havia passado, e a 4,5 cm da Praça Jequitibá. Em que lugar o veículo se encontra? Observe a direção em que o carro vai[3]. Abra o arquivo correspondente, localize o mapa e resolva a atividade no GeoGebra (adaptado de Brasil, 1973, p. 53)

[3] O pesquisador encarregado da aplicação das tarefas explicou aos participantes que, apesar do enunciado, o carro não se deslocava, necessariamente, por uma estrada determinada.

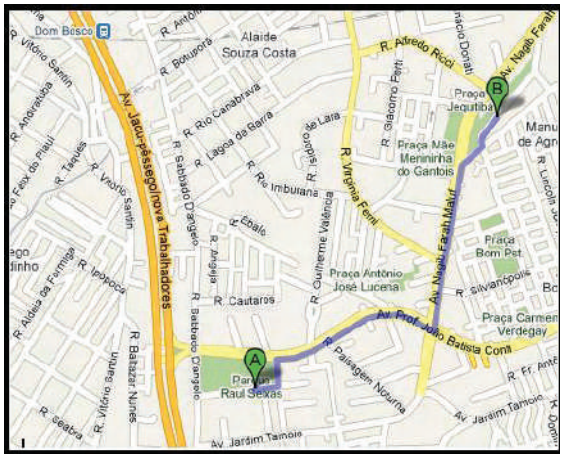


Figura 2 – Mapa da tarefa 1 – Fonte: *Google Maps*

Nesta tarefa, os grupos poderiam criar segmentos de 3,5 e 4,5 cm como raios de duas circunferências que teriam, por exemplo, dois pontos comuns, marcados como lugares nos quais o veículo poderia estar. Ocorre, porém, que um dado grupo poderia, por exemplo, entender que o veículo estaria em um ponto qualquer dos segmentos, e não em pontos de intersecção das circunferências, o que não seria uma solução válida.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Quadro 1 – Tarefa 1, análise a posteriori

Situação adidática e institucionalização	**Tarefa 1**
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Analisam a situação proposta. De início, os grupos entenderam que tinham que medir a distância entre as duas praças: tentam descobrir se o ponto está entre elas. Fazem testes com o *GeoGebra*. Observamos nesta fase que um grupo procurava estabelecer uma estratégia que lhes possibilitasse encontrar um terceiro ponto. Houve várias tentativas, como só usar a ferramenta "segmento por dois pontos".
Formulação	Observaram a necessidade de usar segmentos nas medidas do problema como raios de circunferências que tivessem intersecção entre si. Os alunos propõem o uso das ferramentas "segmento com comprimento fixo" e "circunferência".
Validação	Os grupos comunicam suas estratégias uns aos outros. Simulam a situação no programa *GeoGebra* e argumentam que as ferramentas "segmento com comprimento fixo" e "compasso" deveriam ser aplicadas em cada ponto definido do mapa. Neste caso, definiram o tamanho dos dois segmentos, aplicaram a ferramenta "compasso" em cada ponto e obtiveram os dois pontos que são a intersecção das duas circunferências.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões, solicitando que os alunos meçam as distâncias dos pontos encontrados para as referências e observem que a intersecção das circunferências possibilitou encontrar os pontos solicitados.

Analisando as gravações em áudio desta sessão, observamos que alguns alunos entenderam que o carro ia de uma praça a outra. O pesquisador observou que isto não ocorria. Os membros do grupo C queriam usar a ferramenta "segmento por dois

pontos", mas havia o obstáculo de como definir a medida. Neste meio tempo, observamos que os integrantes do grupo A procuravam encontrar a solução fazendo várias tentativas, ou seja, através da experimentação com uso da interface computacional. Depois de certo tempo, o grupo B apresentou uma solução válida para a questão. O aluno B3 dividiu com os demais grupos a solução apresentada, que consistia no uso das ferramentas "segmento com comprimento fixo", a partir de um ponto A com 3,5 cm e de um ponto B com 4,5 cm. Em seguida, usaram a ferramenta "compasso" sucessivamente nos pontos A e B, marcando pontos de intersecção entre as circunferências encontradas e argumentando que estes seriam os lugares possíveis para a localização do veículo.

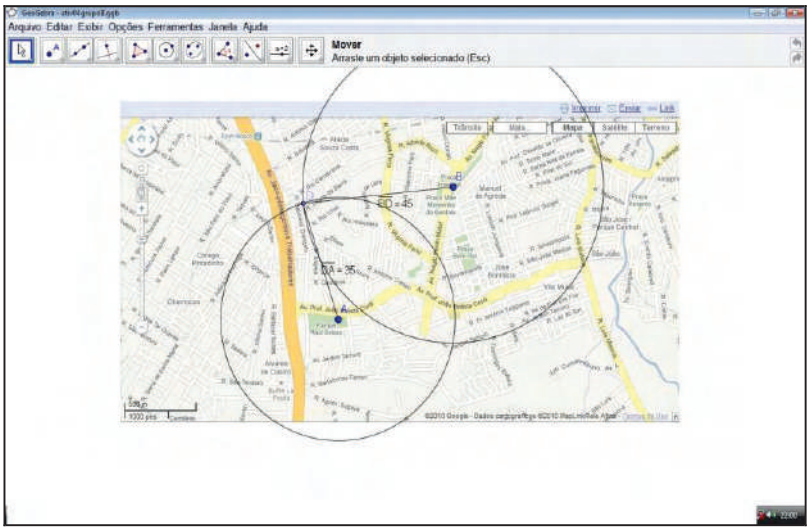


Figura 3 – Protocolo da solução da tarefa 1, Grupo B, parte 1

Observamos que os grupos A e C executaram a solução proposta pelo grupo B, depois de argumentarem entre si e de a considerarem válida. É possível verificar que a colocação dos segmentos da maneira como a tarefa foi executada implicava na dificuldade de alinhá-los com exatidão a partir dos pontos dados. Uma melhor exploração da interface, com uso da ferramenta "Círculo dados centro e raio" facilitaria a execução.

A tarefa 2 trazia o seguinte enunciado:

> "uma estrada de ferro passa bem próxima a duas cidades. Irá ser construída uma nova estação, próxima a linha férrea, de modo que ela fique a uma mesma distância das duas cidades" (Casado, 2009, p.2). Simule esta situação no GeoGebra. Confira os resultados, mude a posição das cidades ou da estação e verifique se as propriedades geométricas se mantêm.

A intenção era de que os grupos interagissem com o arquivo proposto para a tarefa e observassem que a nova estação seria um ponto da mediatriz, que se encontraria equidistante das duas cidades (pontos). A estratégia esperada seria a de desenhar pontos, representando as cidades, um segmento entre eles, representando a linha férrea, o uso da ferramenta "mediatriz" ou outra que permitisse traçar a mediatriz, além de um ponto de intersecção entre a mediatriz e o segmento (ou um ponto móvel sobre a mediatriz). A partir daí, deveria haver a movimentação dos elementos envolvidos na construção, de modo a constatar a manutenção das propriedades anunciadas.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Quadro 2 – Tarefa 2, análise a posteriori

Situação adidática e institucionalização	**Tarefa 2**
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Interagem com o arquivo que simula as diferentes posições das duas cidades e a linha férrea. Os alunos movimentam a posição das cidades.
Formulação	A partir da mediatriz, a movimentação dos elementos garantia que as cidades mantinham a mesma distância da estação.
Validação	Os grupos mostravam, entre si, que as diferentes movimentações das duas cidades mantinham distancias iguais.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões e apresenta a mediatriz como uma reta que equidista de dois pontos.

Nesta tarefa, os grupos responderam as questões propostas sem maiores dificuldades. Em seu depoimento, os membros do grupo C indicaram ter compreendido o conceito: "*a segunda tarefa era igual à outra que realizamos e a distância da ferrovia até a outra cidade eram iguais. Se você mexer as cidades sempre terá a mesma medida".*

A tarefa 3 era uma extensão da anterior, e trazia o seguinte enunciado: "c*omo você faria se, no lugar de duas cidades, tivéssemos três? Tente resolver com o GeoGebra"* (Casado, 2009, p.2).

A estratégia dos grupos para encontrar uma solução poderia ser a de aplicar a construção de mediatrizes com a utilização, no *GeoGebra*, das ferramentas: "compasso" e "reta", em conjunto, ou "mediatriz".

Esperava-se que os estudantes, ao manipularem a figura construída na tela, percebessem que o circuncentro não se restringe a área delimitada pela região triangular formada pelas três cidades. Esperava-se, igualmente, que pelo menos um dos pontos não fosse colinear em relação aos outros dois[4].

Poderia acontecer que a solução que os grupos adotassem fosse a de ajustar os elementos para conseguir a posição do circuncentro, por tentativa e erro, procurando um ponto que ficasse a igual distância das três cidades, o que não seria uma construção válida.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Quadro 3 – Tarefa 3, análise a posteriori

Situação adidática e institucionalização	**Tarefa 3**
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Usam a ferramenta mediatriz em dois pontos. Definem estratégias de como achar o centro. Alguns percebem que o centro se encontra na mediatriz e tentam ajustá-lo.
Formulação	Os grupos conjecturam sobre como procurar a ferramenta mais adequada na barra de menus: ponto médio, mediatriz, mediana.
Validação	Procuram confirmar com o professor e com os demais grupos se a mediatriz e a mediana representam o mesmo conceito ou se são distintos.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões e intervém. É institucionalizado o circuncentro, como o lugar que equidista dos três vértices do triangulo. É observado que nem sempre o circuncentro se encontra no interior do triângulo.

Nesta tarefa, os alunos colocaram na tela os pontos A, B e C. Através das discussões, compreenderam que deveriam achar um ponto que ficasse a igual distância de A e de B. Daí, os alunos anunciaram que a mediatriz possibilitaria ter todos os pontos a igual distância de A e de B. O mesmo procedimento se deu para os pontos B e C. Como as mediatrizes se intersectavam, os estudantes empregaram corretamente a ferramenta "intersecção de dois objetos", observando, também, que tal intersecção equidistava de A, B e C.

O pesquisador solicitou que modificassem a posição das cidades (pontos A, B e C). Os grupos não imaginavam que a estação estaria, em determinadas condições, fora do triângulo formado pelos ponto A, B e C. Foi neste momento que o pesquisador

[4] Apesar de o interesse em discutir o caso em que os três pontos sejam colineares, este tópico não foi abordado no estudo aqui relatado.

instituiu o que era um circuncentro, como a intersecção das mediatrizes do triângulo formado por A, B e C.

Após esta tarefa, os grupos escreveram, livremente, o que haviam compreendido. Observou-se, em suas produções, que os alunos compreenderam o conceito de mediatriz, bem como a diferença entre este conceito e o de mediana.

Considerações finais

Nas interações ocorridas entre os estudantes, ficou bastante clara a importância do caráter colaborativo proporcionado pelas situações adidáticas em discussão. No âmbito dos grupos, em um primeiro momento, ocorriam as lógicas de ação e de formulação, posteriormente ampliadas para discussões gerais com o intuito de obter a validação. Após a obtenção de certo grau de conhecimento sobre os conteúdos em jogo, ao final das tarefas, ocorria o momento de institucionalização.

Por vezes, as situações adidáticas de validação representaram momentos de orientação, nos quais o pesquisador atuou na tentativa de resgatar elementos essenciais ao processo, ou de recolocar os estudantes em contato com o conteúdo matemático, em relação ao qual apresentavam dificuldades. O ideal seria que tais atuações fossem reduzidas, mas isto pode representar o reflexo da necessidade que os estudantes têm de serem habituados ao trabalho com situações-problema, vistas como possibilidades de engajar os aprendizes em projetos de autoaprendizado nem sempre presentes na escola tradicional.

A inserção de uma estratégia pedagógica mediada pelo *software* GeoGebra foi muito importante para a consolidação de algumas aprendizagens sobre a circunferência e a mediatriz como lugares geométricos. Os estudantes puderam experimentar suas hipóteses, conjecturar sobre distintas possibilidades de resolução, abandonando aquelas que não representavam caminhos vistos como válidos. Interessante observar que os aprendizes recorriam às tarefas anteriores ou à teoria aprendida nos momentos de institucionalização para dar continuidade na solução de uma tarefa nova na qual se envolviam. Este aspecto é importante para denotar a possibilidade de que os alunos não desenvolvam dependência da tecnologia para a construção de elementos matemáticos,

mas que a utilizem como parceira e mediadora, na direção da resolução de um problema.

Claro que diversas dificuldades persistiram. Vários foram os momentos de intervenção orientadora do pesquisador. Em diversas circunstâncias, as ferramentas adequadas eram esquecidas ou não havia um relacionamento entre elas e as construções geométricas em processo. Entretanto, o caráter dinâmico da interface permitia retomar as conjecturas, e o debate entre os participantes, em caráter colaborativo, criava condições para que o trabalho continuasse, ainda que na obtenção de resultados, às vezes, errados. Aqui, então, os pressupostos teóricos da estratégia pedagógica adotada permitir obter retroações a partir do *milieu*, percebendo o erro, questionando, reconstruindo e, finalmente, chegando a resultados mais satisfatórios.

O uso do GeoGebra permitiu aos grupos de estudantes, por causa da estratégia adotada, desenvolver autonomia para experimentar e validar as suas conjecturas. Possibilitou, também, compreender os conceitos de circunferência e mediatriz como lugares geométricos. Além disso, foi possível para os alunos investigar a equidistância, quando os grupos usavam a ferramenta "distância" para verificar a regularidade da propriedade pela qual um ponto da mediatriz se mantinha equidistante de dois outros.

A respeito das construções geométricas desenvolvidas, o GeoGebra mediou a validação da construção por meio do recurso "arrastar", aplicado aos diferentes elementos da construção, quando perceberam que a mesma se mantinha inalterada – ou a percepção de erros, quando a construção "desmanchava".

Algumas dificuldades precisam ser destacadas. Por exemplo, os grupos se prenderam excessivamente ao traçado do desenho: na tarefa que envolvia a colocação de um ponto (circuncentro) equidistante de três outros, os grupos, em sua maioria, responderam que o ponto devia ficar no meio na região triangular, ou seja, prenderam-se muito a concepções intuitivas ligadas ao desenho e não levaram em conta as propriedades da figura geométrica. Para mudar isso, procurou-se orientar os grupos a usar o recurso de "arrastar", no qual um dos três pontos foi escolhido e a sua movimentação permitia aos estudantes ver o circuncentro fora da região triangular, com a manutenção da característica de ficar equidistante dos três pontos. Esta situação permitiu caracterizar o circuncentro como um lugar geométrico – e seria bastante difícil de ser aplicada sem a mediação do *software*. Outras dificuldades ocorreram na

interpretação dos textos das tarefas e na tentativa de obter resultados simplesmente ajustando as figuras a uma configuração preconcebida e que seria próxima a solução buscada, ignorando propriedades geométricas fundamentais. Estes aspectos carecem de maior atenção por parte dos currículos oficiais, que, em sua implementação, precisam de maiores espaços para tarefas que visem superar estas limitações, para além da eventual intervenção do professor.

Outras sugestões referem-se a pesquisas com outros lugares geométricos, como a bissetriz, o arco-capaz e retas paralelas, bem como investigações que envolvam áreas, sólidos geométricos, estudo de curvas e movimento de pontos, sob o ponto de vista dos lugares geométricos.

Referências Bibliográficas

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Fundação Nacional de Material Escolar (1973). *Desenho 2: plano – espaço*. Brasília: MEC.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao Estudo das Situações didáticas: conceitos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Acesso em 30 de maio, 2010, de http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne.

Camargo, M. A (n.d.). *Arcos e cordas: conceitos de desenho geométrico*. Acesso em 20 de agosto, 2010, de http://educacao.uol.com.br/matematica/ult1705u8.jhtm

Casado, M. J. (2009). *Lugares geométricos*. Acesso em 08 de março, 2010, de http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/Geogebra/index.htm.

Gravina M.A. (1996). Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte*. Acesso em 20 de agosto, 2010, de http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm.

King, J. E. & Schattschneider, D. (1997). *Geometry Turned On*: *Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. The Mathematical Association of America, 1997. Acesso em 20 de agosto, 2010, de http://mathforum.org/dynamic/geometry_turned_on.

Machado, S. D.A. (2008). Engenharia Didática. In Machado, S.D.A. (org.). *Educação Matemática*: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC.

Mori, I. & Onaga, D. S. (2009). *Matemática, Ideias e Desafios*. São Paulo: Saraiva - 8º e 9.º anos.

Oliveira, G. P. (2009). Estratégias didáticas em Educação Matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília: SBEM. 1 CD-ROM.

Oliveira, G. P. (2007). *Avaliação da aprendizagem em cursos online colaborativos: uma abordagem multidimensional*. Tese de Doutorado (Educação). São Paulo: USP.

O GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ESTUDO DA VARIAÇÃO LINEAR

Fátima Canário
Escola Secundária de Palmela
fatimacanario@hotmail.com

Nélia Amado
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

Resumo

Nesta comunicação procura-se analisar o contributo da utilização do software GeoGebra no estudo da variação linear, com alunos de 8.º ano de escolaridade de uma turma com o NPMEB. As tarefas apresentadas aos alunos visam a utilização da Matemática para a compreensão de problemas reais, com recurso a modelos computacionais. No estudo de uma situação concreta de variação linear, o GeoGebra teve como principal efeito suscitar uma análise de índole geométrica do modelo matemático, que se sobrepôs a eventuais procedimentos de natureza algébrica, como seja a concretização de valores de variáveis numa equação. Em segundo lugar, destaca-se a eficácia dos alunos na utilização das ferramentas oferecidas pelo software para atingirem os seus objectivos de análise do modelo. Um dos pares de alunos observados usou o software como um ambiente intelectual em que foram aproveitadas as possibilidades gráficas e, sobretudo, a combinação entre diversas formas de representação matemática.

Palavras-chave: Modelos matemáticos, variação linear, função afim, GeoGebra.

Introdução

O estudo das funções começa a ganhar importância no 3.º ciclo do Ensino Básico, como um dos tópicos do tema da Álgebra, fazendo desde logo apelo a diferentes tipos de representações: tabela, gráfico e expressão algébrica. Este tópico, tal como acontece com a Álgebra em geral, é portador de dificuldades bem identificadas, resultantes da introdução da linguagem própria dos processos algébricos, particularmente para estabelecer e definir relações entre variáveis.

Na brochura da Álgebra que acompanha o novo programa de Matemática do Ensino Básico ressalta também a importância do conhecimento sobre funções na formação dos indivíduos na sociedade actual (Ponte, Branco & Matos, 2009):

> Ao longo do ensino básico, os alunos devem desenvolver a sua capacidade de ler e interpretar gráficos de funções, que constitui uma capacidade importante para o seu futuro enquanto cidadãos. Para isso, necessitam de trabalhar com gráficos que apresentem vários tipos de variação em certos intervalos: (i) estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou constantes; e (ii) com variação constante e não constante (p. 127).

Na mesma brochura é realçada a necessidade de se apresentarem tarefas que impliquem utilizar as funções para modelar situações da realidade e para resolver problemas, evitando a submissão exclusiva aos aspectos puramente matemáticos do conceito de função. Deste modo, o aluno poderá contextualizar as suas aprendizagens e não ficar limitado à manipulação simbólica na resolução de exercícios com expressões algébricas.

As ideias gerais que enformam o presente trabalho – i) uma preocupação com a aprendizagem contextualizada das funções, em particular da função afim, ii) uma ênfase na utilização da Matemática para a compreensão de problemas reais e iii) a consciência da importância da exploração de modelos computacionais – conduziram à opção por um trabalho em sala de aula com recurso ao computador na construção e exploração de modelos matemáticos que envolvem relações de variação linear. Um dos objectivos desta decisão foi a de ajudar os alunos a compreender o significado dos coeficientes da expressão algébrica da função afim, relacionando-os com a sua representação gráfica. A expressão algébrica da função afim surgiu, em cada tarefa, ligada a uma situação problemática real, de forma a contextualizar as funções analisadas e a dar-lhes significado.

A utilização do GeoGebra na construção de modelos matemáticos

O GeoGebra é um software que associa e estabelece conexões entre geometria dinâmica, representação gráfica de equações no plano e folha de cálculo. Para além de uma visualização quase imediata do gráfico de uma função, o recurso a este programa permite ao aluno lidar de forma articulada com as várias representações da função. Explorações matemáticas diversas são possíveis a partir desta ferramenta: Se mudar um

dos parâmetros na expressão, que alterações vai ter o gráfico? Se "deslocarmos" o gráfico, o que muda na expressão?

Nas orientações metodológicas do programa de Matemática para o Ensino Básico, é referido que os alunos devem usar calculadoras e computadores, salientando-se que "o seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados" (Ponte et al., 2007, p. 9).

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar a tecnologia é apresentada como um dos seis princípios enunciados, tal é a importância atribuída à tecnologia que salientam "ser essencial pois influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2000/2007, p. 26).

Como refere Carreira (1992), interessa "analisar o que poderá ser um novo ambiente intelectual marcado pela utilização do computador em actividades de modelação e aplicação da matemática" (p. 41). É hoje possível uma abordagem diferente à resolução de problemas e a realização de tarefas de natureza investigativa cuja concretização era antes impensável.

Amado & Carreira (2008) defendem que a visualização é fundamental no raciocínio matemático, na medida em que torna as ideias mais perceptíveis, promove a intuição matemática e dá sentido a muitos resultados e processos. Assim, uma das consequências da utilização da tecnologia é o facto de os alunos poderem melhorar e amplificar significativamente as suas aprendizagens dado que a tecnologia efectua os cálculos rotineiros, "permite que o aluno explore uma maior variedade de situações, testemunhando a verdadeira natureza dos processos matemáticos e envolvendo-se em aplicações com dados realistas" (p. 287). Para além disso, "as tecnologias vêm permitir investir em conhecimentos e capacidades de nível superior, tais como, saber interpretar um gráfico, fazer conjecturas, ser capaz de relacionar conceitos e utilizá-los, saber analisar criticamente os resultados obtidos, investigar, ser versátil em representações matemáticas diversas" (p. 287).

> Desta forma, os alunos não apenas aprendem Matemática, quando recorrem a ferramentas tecnológicas, como também aprendem novas

> formas de pensar e encontram caminhos para desenvolverem a sua própria Matemática (Amado & Carreira, 2008, p. 287).

Carreira (1992, 2009) salienta que o computador pode dar um contributo significativo para uma abordagem experimental ao conhecimento matemático, desempenhando um papel importante na construção de generalizações a partir de múltiplas observações e facilitando a compreensão de ideias matemáticas abstractas, na medida em que permite a manipulação de representações gráficas.

Introduzir o computador na actividade da sala de aula torna também viável contemplar diferentes ritmos de aprendizagem e desenvolver a autonomia dos alunos. A opção pelo trabalho a pares na resolução de tarefas com o computador permite, por exemplo, fomentar a discussão entre os alunos e fazer emergir os processos e raciocínios que cada um desenvolve, tornando o discurso e a interacção com o software em elementos de mediação fundamentais nas aprendizagens realizadas.

Os adolescentes devem, cada vez mais, aprender a pôr espontaneamente as suas ideias à disposição dos seus parceiros cada vez que a situação o permita ou exija. Aprender é basicamente uma tarefa colectiva, que exige um grau elevado de capacidade comunicativa. Aprender matemática identifica-se, neste sentido, com fazer matemática, de tal maneira que esta quase se confunde com a linguagem da comunidade que a pratica (Schoenfeld, 1996).

A exploração de modelos matemáticos em tarefas contextualizadas

A ausência de ligação entre o mundo real e a matemática escolar é uma das razões que pode estar na origem de dificuldades no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Gravemeijer (2005) refere o facto de se considerarem "dois mundos disjuntos" como um dos factores que torna a Matemática menos acessível aos alunos. Com o intuito de ultrapassar este problema, o Instituto Freudenthal tem vindo a desenvolver a educação matemática realística (RME), teoria que mostra como um tema pode ser ensinado, de acordo com a perspectiva de Freudenthal acerca da Matemática como uma actividade humana. Esta teoria propõe a *reinvenção guiada*, ou seja, defende que os alunos devem, com o auxílio do professor, efectuar um percurso de invenção onde realizem, por eles próprios, um trabalho de (re)construção da Matemática.

Para Gravemeijer é importante que o professor ajude os alunos a construírem o seu próprio conhecimento matemático com base no que eles já sabem, ao invés de insistir em tentativas de estabelecer conexões com a "matemática pronta". A apresentação de algoritmos como "receitas" para resolver problemas é um obstáculo à aprendizagem pois os alunos não conseguem estabelecer relações com um certo conhecimento universal e externo, que para eles não existe. Dissolver o fosso existente entre o conhecimento objectivo e formal do professor e o conhecimento intuitivo e do senso comum que o aluno possui, levou à noção de *modelação emergente*. A modelação, nesta óptica, é a actividade dos alunos durante a resolução de um problema contextualizado, partindo de experiências do quotidiano, para chegar ao conhecimento matemático. Assim "a abordagem do modelo emergente ajuda os alunos a construírem uma realidade matemática por eles próprios" (Gravemeijer, 2005, p. 21).

Gravemeijer aponta a necessidade de se planearem sequências de ensino, baseadas em recursos e tarefas, cujo objectivo é o de catalisador do percurso de re(invenção) da Matemática que se pretende ensinar. A modelação emergente tem como ponto de partida uma actividade em que se faz uso de ferramentas mais ou menos formais, como desenhos, diagramas, notações informais ou notações matemáticas convencionais. Na interacção com estes modelos, a actividade vai-se refinando até à reinvenção dos conteúdos formais que estão envolvidos no problema contextualizado. Pressupõe-se que a interacção com estes modelos ajuda os alunos a reinventarem a Matemática formal. Assim, um *modelo de*, criado em actividades matemáticas informais, desenvolve-se até dar origem a um *modelo para*, que corresponde a um raciocínio matemático mais geral e formal.

Um modelo matemático, em termos teóricos, é uma imagem do objecto real, elaborada por meio de processos matemáticos e conceptuais, que permite testar hipóteses, inferir conclusões, tentar generalizações e particularizações através da indução e da dedução.

A natureza dinâmica do modelo matemático, que pode sofrer alterações na medida em que deve aproximar-se sucessivamente da realidade, permite fazer uma interpretação do problema real, que pode variar em conformidade com o entendimento dessa mesma realidade. Assim, através do modelo matemático estabelece-se uma ligação entre a realidade e a Matemática.

Matos & Carreira (1996) distinguem as dimensões de generalidade e de eficiência no que respeita à utilidade dos modelos matemáticos. "A potência de um modelo será tanto maior quanto maior for a sua generalidade, no sentido da sua aplicabilidade em múltiplas situações, e quanto maior for a sua capacidade de responder a questões relativas a diferentes extensões, variantes e casos particulares de uma mesma situação problemática (núcleo)" (Matos & Carreira, 1996, p. 14).

Para compreender os processos cognitivos presentes na construção de um modelo matemático é conveniente distinguir entre modelos internos e modelos externos, estando os primeiros ligados aos modelos conceptuais e ao significado que a situação real tem para o sujeito e os segundos ligados aos sistemas de representação utilizados. "O recurso a múltiplos sistemas de representação promove a actividade metacognitiva na resolução de problemas de aplicação, na medida em que pode contribuir para a monitorização do processo de modelação e para a reflexão sobre a relação entre os modelos e o fenómeno em estudo." (Matos & Carreira, 1996, p. 15).

Propósito e metodologia do estudo

Este estudo tem como objectivo contribuir para a compreensão de aspectos da aprendizagem evidenciados por alunos de 8.º ano na utilização do GeoGebra em tarefas contextualizadas, de natureza exploratória, relativas ao estudo da variação linear. Em particular, procuramos responder à seguinte questão: Que utilização fazem os alunos do GeoGebra na construção e exploração de modelos matemáticos?

Na base desta investigação está a realização de uma experiência de ensino numa turma de 8.º ano de escolaridade, do ensino articulado da Música[1].

Atendendo às questões de investigação, optou-se por uma abordagem qualitativa, seguindo um paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994).

Foram seleccionados dois pares de alunos da referida turma, que constituem os casos em estudo. Neste artigo optou-se por apresentar o trabalho desenvolvido pelo par constituído por Diogo e João.

[1] O ensino articulado da Música consiste num plano de estudos adaptado em que as disciplinas do Conservatório substituem as disciplinas de formação artística do ensino regular.

Os dados recolhidos provêm de diversas fontes, como é recomendado na investigação qualitativa (Erickson, 1986). Neste artigo analisamos e apresentamos uma parcela destes dados, obtidos a partir do trabalho produzido pelo par de alunos numa tarefa, em sala de aula. Os alunos dispunham do computador e do GeoGebra para a realização das tarefas. É feita a análise dos ficheiros criados pelos alunos e do protocolo do GeoGebra, o que permite verificar "passo a passo" os procedimentos realizados pelos alunos. As aulas foram também gravadas em áudio e vídeo.

A observação participante foi outra importante fonte de dados. A investigadora (e primeira autora deste artigo) não é professora da turma mas colabora frequentemente nas aulas do respectivo professor, pelo que os alunos não estranharam a sua presença e a encararam como mais uma professora da turma. A investigadora e o professor da turma desenvolveram uma estreita colaboração no que respeita à elaboração das tarefas propostas nesta experiência de ensino e ao desenvolvimento das aulas. Ao ser um elemento activo no decorrer das aulas, circulando na sala de aula com o intuito de ouvir e registar os diálogos dos pares de alunos, perceber os seus raciocínios e os processos que estavam a utilizar para resolver as tarefas propostas, quando os alunos solicitaram a sua ajuda, a investigadora procurou sempre questionar e incentivar a reflexão.

Análise de dados

A tarefa "Quanto custa ter carro próprio?"

O custo em euros de possuir um carro é uma função do número de quilómetros percorridos por mês. Com base numa informação publicada no "Time Magazine", o custo varia linearmente com a distância e é de 336 euros por mês para uma distância percorrida de 300 km e de 510 euros por mês para uma distância percorrida de 1500 km.

Na realização desta tarefa, que apresentava um conjunto de questões referentes à situação descrita, Diogo e João recorrem ao GeoGebra para obter a equação da recta em "sete passos". Começam por utilizar a folha de cálculo para introduzir os dados fornecidos no enunciado, isto é, o montante pago por mês para a distância percorrida (os alunos identificam o objecto como a distância e a imagem como o custo). Em seguida, utilizam a "entrada" para marcar os dois pontos resultantes da tabela e pedem a recta definida por dois pontos, na zona gráfica (figura 1). O GeoGebra permitiu, de forma

quase instantânea, que os alunos tivessem acesso ao gráfico da função (recta *a*) e à sua expressão algébrica (figura 1), ficando "livres" da tarefa de deduzir a equação da recta.

Para obterem uma previsão do custo mensal, no caso de o carro percorrer 1000 km por mês, os alunos introduzem a recta de equação x=1000 e, em seguida, recorrendo ao GeoGebra, determinam o ponto de intersecção *C* das rectas *a* e *b* (figura 1).

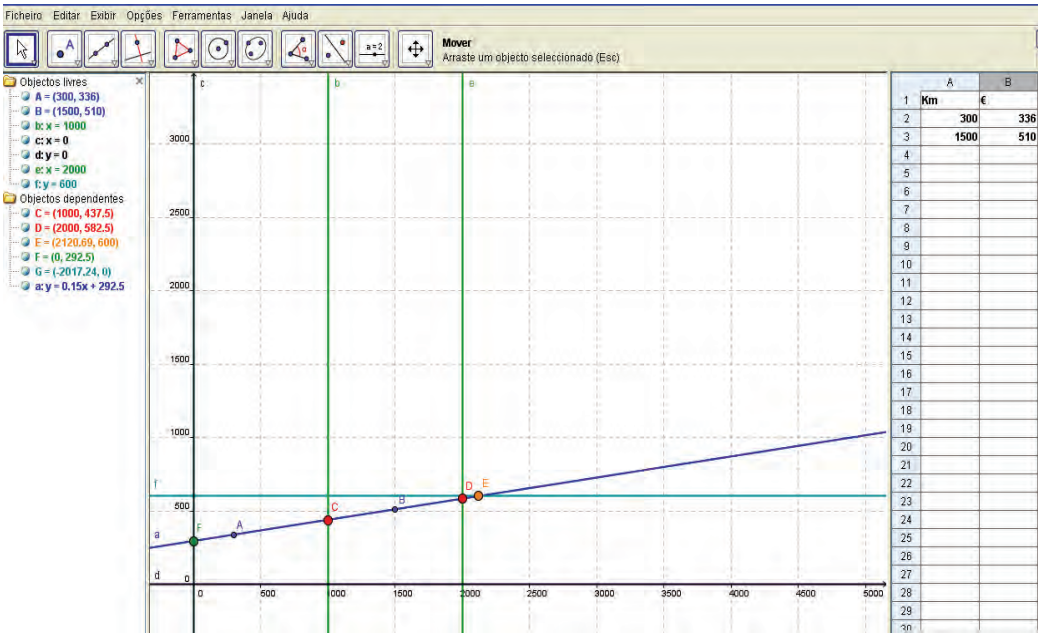


Figura 1. Representações criadas pelos alunos no GeoGebra

Para calcular o valor do custo para uma distância de 2000 km, o procedimento foi análogo ao anterior, com a obtenção das coordenadas do ponto *D* (intersecção das rectas *a* e *e*). O recurso ao GeoGebra assume, na resolução destas questões um papel decisivo, pois de outra forma seria necessário recorrer à resolução de equações algébricas.

Na questão 3 pretendia-se determinar a distância máxima a percorrer de forma a não exceder o custo mensal de 600 €. Os alunos concluem que é necessário traçar uma recta horizontal de equação y=600 (recta *f*) e voltam a pedir o ponto de intersecção como aconteceu nos casos anteriores, obtendo assim a resposta a esta questão com as coordenadas do ponto *E* (figura 1).

Os alunos fazem ainda a interpretação do significado da ordenada na origem (figura 2) e da abcissa na origem (figura 3) da recta que representa a relação custo-distância, no contexto do problema. Concluem que, mesmo no caso de a viatura estar parada (0 km percorridos pelo carro), o proprietário tem despesas a pagar (292.5 €).

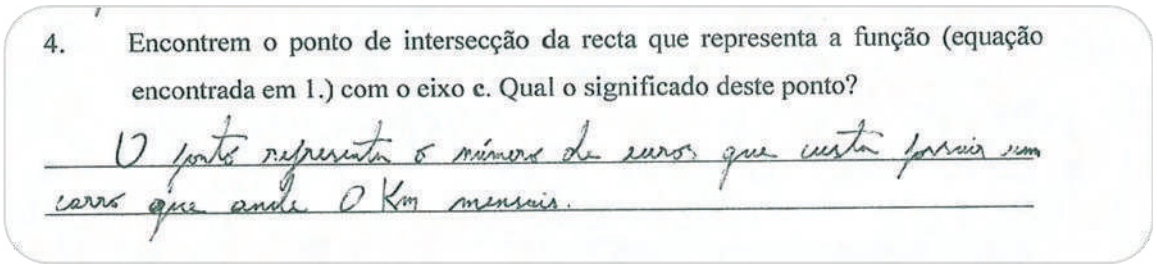


Figura 2. Resposta à questão 4 pelo par de alunos

Verificam que um custo igual a zero é um acontecimento impossível, pois o custo só se anula se o carro percorrer uma distância *negativa*, o que não tem sentido (figura 3).

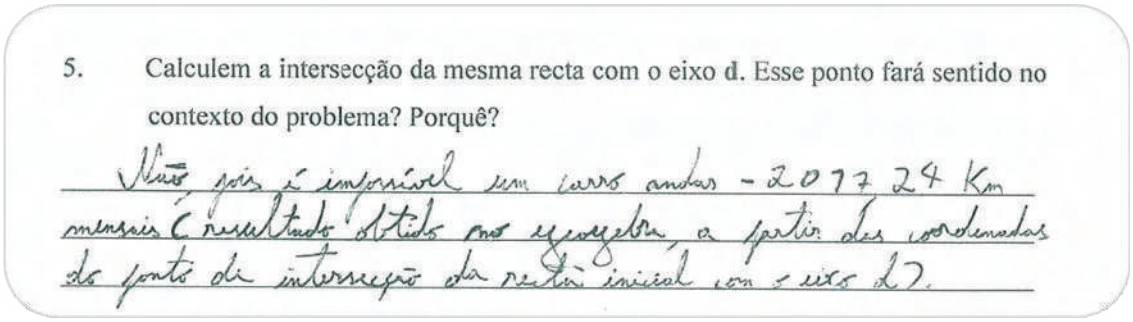


Figura 3. Resposta à questão 5 pelo par de alunos

Os alunos perceberam assim que neste contexto a existência de um zero da função não corresponde à existência de um zero nos custos.

Por fim, pede-se aos alunos para indicarem o declive da recta. Os alunos não mostram dificuldade em responder e revelam compreender o seu significado no contexto do problema (figura 4).

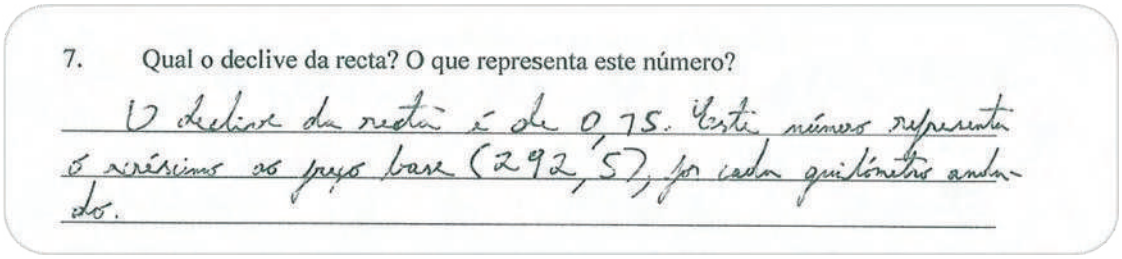


Figura 4. Resposta à questão 7 pelo par de alunos

Os processos dos alunos no GeoGebra

A utilidade do GeoGebra está bem patente desde o momento inicial. Começa por ser importante para obter um modelo matemático de variação linear e continua a sê-lo ao

longo da realização da tarefa como, por exemplo, na determinação do ponto de intersecção de duas rectas.

O papel mediador do GeoGebra no processo de construção e análise do modelo matemático que exprime a relação custo-distância é bastante visível nos processos desenvolvidos pelos dois alunos. No que se refere à natureza do modelo matemático envolvido, é notório que os alunos têm a noção de que um modelo de variação linear fica completamente determinado a partir do conhecimento de dois pontos. Por outras palavras, os alunos associam um modelo de variação linear a uma recta e sabem que uma recta é determinada por dois dos seus pontos.

Assim, o GeoGebra permite avançar directamente para a representação gráfica do modelo a partir do conhecimento de dois pontos, tornando-se saliente o carácter de ferramenta geométrica intrínseco ao software. Os alunos tiram partido desta faceta do GeoGebra, iniciando a sua exploração do modelo de uma forma que consideramos ser eminentemente geométrica. A janela de álgebra do GeoGebra funcionou muito mais como uma janela de *outputs* do que de *inputs*, razão pela qual o tratamento das questões colocadas se desviou da manipulação algébrica e se concentrou na representação e manipulação geométrica dos dados.

Perante a abordagem seguida por este par de alunos, parece razoável afirmar que estes encaram a *recta* como um *modelo para* a descrição da variação linear, no sentido atribuído por Gravemeijer (2005). Portanto, ganha proeminência a representação gráfica sobre a representação algébrica e concomitantemente a manipulação geométrica do modelo sobre a sua manipulação algébrica. O gráfico da função custo-distância é identificado com a representação de uma recta num referencial cartesiano de eixos *d* (abcissas/distância) e *c* (ordenadas/custo), correspondentes à variável independente e à variável dependente no modelo.

A expressão algébrica que representa a variação do custo com a distância é automaticamente gerada pelo GeoGebra na janela de álgebra: $y = 0.15x + 292.5$. É evidente que os alunos dão sentido a esta expressão e que reconhecem algumas das suas propriedades mais centrais, designadamente o parâmetro que corresponde ao declive da recta (acréscimo de custo por quilómetro) e o parâmetro que corresponde à ordenada na origem (o preço base). Ao mesmo tempo, são capazes de "interrogar" o modelo e obter

respostas a várias questões, usando sistematicamente uma análise "geométrica". Assim, a questão do custo correspondente a uma distância de 1000 km é resolvida com a obtenção do ponto de intersecção da recta *a* com a recta vertical de abcissa 1000, tal como sucede com o custo para uma distância de 2000 km. Por outras palavras, concretizar a variável x com o valor 1000 ou com o valor 2000 é traduzido geometricamente pela obtenção de intersecções de rectas, patenteando a influência da natureza híbrida (geométrica/algébrica) do GeoGebra na forma de actuação dos alunos. Da mesma maneira, a procura da distância máxima que o carro deveria percorrer para se ter um custo não superior a 600 euros é efectuada geometricamente, isto é, a concretização da variável y com o valor 600 volta a ser traduzida pela procura de intersecção da recta *a* com a recta horizontal de ordenada 600.

É também clara a capacidade que os alunos evidenciam de interligar e de combinar as representações gráficas e algébricas para produzir respostas às questões colocadas. Diremos que o modelo é interpretado e explorado geometricamente com um apoio algébrico de retaguarda. Esta análise do modelo matemático demonstra uma inversão conceptual na forma mais tradicional de trabalhar o estudo de funções (manipulação algébrica com a representação gráfica como apoio de retaguarda).

Considerações finais

Os resultados que decorrem dos dados analisados permitem destacar dois aspectos fundamentais dos processos de exploração de um modelo de variação linear com recurso ao GeoGebra.

Em primeiro lugar, o GeoGebra teve como efeito evidente suscitar uma análise de índole geométrica do modelo matemático, que se sobrepôs inexoravelmente a eventuais procedimentos de natureza algébrica, como seja a concretização de valores de variáveis numa equação. Neste sentido, a ferramenta computacional contribuiu para deslocar os processos dos alunos para aspectos conceptuais, ligados ao significado das variáveis e à sua tradução em termos gráficos, obviando hipotéticas dificuldades com o trabalho de cálculo e de manipulação algébrica. Ao mesmo tempo, esta análise geométrica permitiu tornar patentes características essenciais de um modelo de variação linear que os alunos mostraram ser capazes de identificar e compreender: o declive da recta como taxa de

variação e a ordenada na origem como valor inicial da variável dependente. Acresce o facto de que o recurso ao GeoGebra tornou claro que os alunos encaram a representação gráfica de uma recta como um *modelo para* uma relação de variação linear. Ficou patente que os alunos tinham já adquirido essa noção (isto é, que associavam a variação linear a uma recta), pelo que o GeoGebra desempenhou um papel de amplificador conceptual desta mesma noção. Explorar um modelo linear consistiu, neste caso, em explorar as propriedades e características da representação cartesiana da recta. E o próprio conceito geométrico de recta (uma direcção definida por dois pontos) foi sustentado pela experiência com o GeoGebra, que permite o traçado de uma recta e a obtenção da sua equação a partir de dois pontos cujas coordenadas são conhecidas.

Em segundo lugar, é de sublinhar a eficácia dos alunos na utilização das ferramentas oferecidas pelo software para atingirem os seus objectivos de análise do modelo. Pode concluir-se que o par de alunos observado usou o software como um ambiente intelectual em que foram aproveitadas as possibilidades gráficas e, sobretudo, a simbiose entre diversas formas de representação matemática. Como tem sido observado em estudos já realizados, é hoje possível uma abordagem diferente à resolução de problemas e particularmente à construção e exploração de modelos matemáticos em situações contextualizadas (Carreira, 1992, 2009; Lingefjard, 2011). No caso específico do estudo da função afim, estamos perante a possibilidade de promover abordagens que não se esgotam no seu tratamento algébrico mas que alargam o seu significado e promovem pontes entre conceitos matemáticos e a compreensão de fenómenos do quotidiano.

Referências

Amado, N. & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática – Diferenças na prática de sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 286-299). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (tese de mestrado). Lisboa: APM.

Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos "nativos digitais" com os "manipulativos virtuais". *Quadrante*, Vol. XVIII, Nº 1 e 2, p. 53-85.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83- 101). Lisboa: APM.

Lingefjard, T. (2011). *Students constructing modeling tasks to peers*. Comunicação apresentada no CERME 7, Working Group 6 – Applications and Modeling, Rzeszów, Polónia, Fevereiro de 2011. (Disponível em http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/6/CERME7-Lingefjaerd.pdf).

Matos, J. & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Ministério da Educação. Instituto de Inovação Educacional.

NCTM (2000/2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Ministério da Educação, DGIDC.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

PROCESSOS DE MODELAÇÃO NO ENSINO PROFISSIONAL: UMA TAREFA ENVOLVENDO FUNÇÕES[1]

Cláudia Oliveira
EB 2,3 Aristides de Sousa Mendes, Póvoa de Santa Iria
claratejo@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação integra-se numa investigação cujo objectivo principal é compreender os processos de modelação desenvolvidos pelos alunos, do 2.º ano de um curso profissional, a partir da resolução de tarefas, que envolvam a modelação de situações reais, decorrentes de actividades de natureza profissional. A investigação segue uma abordagem qualitativa e assume um cunho descritivo e interpretativo. A comunicação centra-se na actividade desenvolvida pelos alunos, numa tarefa de modelação, sendo descrita através de um diagrama que representa o ciclo de modelação matemática. Os resultados mostram que o ciclo de modelação está dependente da natureza da tarefa e que a actividade dos alunos percorre as fases nele enunciadas, sendo que nestas é possível ver representadas sub-actividades. A realização da tarefa de modelação permitiu observar a importância das interacções sociais e do uso do conhecimento extra-matemático na mobilização dos conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave: Ciclo de modelação, modelação matemática, tarefas contextualizadas, resolução de problemas e funções.

1. Introdução

No *Programa de Matemática para os Cursos Profissionais de Nível Secundário* (ME, 2004) as Aplicações e Modelação Matemática constituem o tema transversal, sendo preconizado que o ensino dos vários temas seja suportado em actividades que contemplem a modelação matemática e o estudo de situações realistas, adequadas a cada curso. Sugere-se que estas sejam extraídas do mundo real e das profissões e integradas num contexto significativo para os alunos. Por outro lado, as aptidões que o mundo profissional hoje exige, ultrapassam a rotina e os procedimentos mecânicos, incluindo "a flexibilidade de raciocínio sobre informação quantitativa e a sua utilização" (NCTM, 2007, p. 21).

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Esta comunicação integra-se numa investigação cujo objectivo principal é compreender os processos de modelação desenvolvidos por alunos, do 2.º ano de um curso profissional, a partir da resolução de uma tarefa que envolve uma situação próxima da realidade, associada a actividades de natureza profissional. Definiram-se as seguintes questões: i) Como se caracterizam os processos de modelação dos alunos, na resolução de uma tarefa contextualizada, no tema das funções? ii) Como se relacionam o desenvolvimento de processos de modelação e o conhecimento matemático dos alunos, em particular das funções?

2. Modelos e Modelação Matemática

2.1 Da resolução de problemas à modelação matemática

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas através da construção de modelos de situações realistas é um desafio a ter em conta. Vários autores têm argumentado no sentido de envolver todos os alunos na perspectiva da modelação, fomentando o pensamento crítico e desenvolvendo a capacidade de usar a Matemática como uma ferramenta para analisar questões sociais, políticas ou do mundo profissional (Blum & Niss, 1991; Lesh & Doerr, 2003). Existem, no entanto, diferenças entre a matemática escolar e matemática usada no mundo profissional, considerando Lesh & Zawojewski (2007) e uma destas diz respeito ao conhecimento e à capacidade para criar e modificar modelos matemáticos.

A investigação sobre os objectivos fundamentais da modelação matemática e sobre as razões que os sustentam tem tido um papel importante para a compreensão geral do conceito de modelo e de processo de modelação (Blomhøj, 2008).

Sobre este domínio, podem encontrar-se na literatura diferentes abordagens e perspectivas de modelação (Sriraman & Kaiser, 2006). Neste estudo centrámo-nos na perspectiva contextual para a construção da tarefa aplicada nesta investigação, nomeadamente, nos seis princípios orientadores para a concepção de tarefas geradoras de um modelo, enunciados por Lesh, Hole, Hoover, Kelly & Post (2000), e na perspectiva cognitiva, para analisar os processos de modelação matemática dos alunos, a qual descrevemos sumariamente em seguida.

2.2 A perspectiva cognitiva da modelação

Nesta perspectiva, os principais interesses são a compreensão das funções cognitivas presentes na actividade do aluno durante a resolução de tarefas de modelação e o papel que o *processo de modelação* matemática pode desempenhar no ensino e aprendizagem da Matemática. Para tal, os processos de modelação são analisados com o propósito de reconstruir as *rotas de modelação*. Estas constituem o caminho percorrido entre as várias fases do processo de modelação individual e permitem a descrição das fases de modelação.

A resolução de tarefas de modelação traduz uma correspondência entre a realidade ("resto do mundo" fora da Matemática) e a Matemática. No ciclo de modelação o ponto de partida é uma *situação real* que tem de ser estruturada pelo resolvedor do problema, que lida com um *modelo real* da situação. O modelo real é traduzido matematicamente, dando origem ao *modelo matemático* da situação original e, inclusivamente, podem ser construídos diferentes modelos da mesma situação. O processo de resolução do problema continua, através da escolha de métodos adequados e do trabalho no seio da Matemática obtendo-se assim, *resultados matemáticos*. Estes devem ser traduzidos para o mundo real relativamente à situação original. Ao fazer isto, o resolvedor do problema também valida o modelo matemático. Se ocorrem insuficiências, o que habitualmente sucede, então o ciclo reinicia-se.

A *situação real*, o *modelo real*, o *modelo matemático* e os *resultados matemáticos* constituem as *fases do processo de modelação*. Vários estudos, com uma abordagem cognitiva da modelação, observam ser frequente a ocorrência da *representação mental da situação* durante a resolução de tarefas de modelação e por isso incluem-na no ciclo de modelação, que adoptam nas suas investigações, como se observa na Figura 1 (Ferri, 2006).

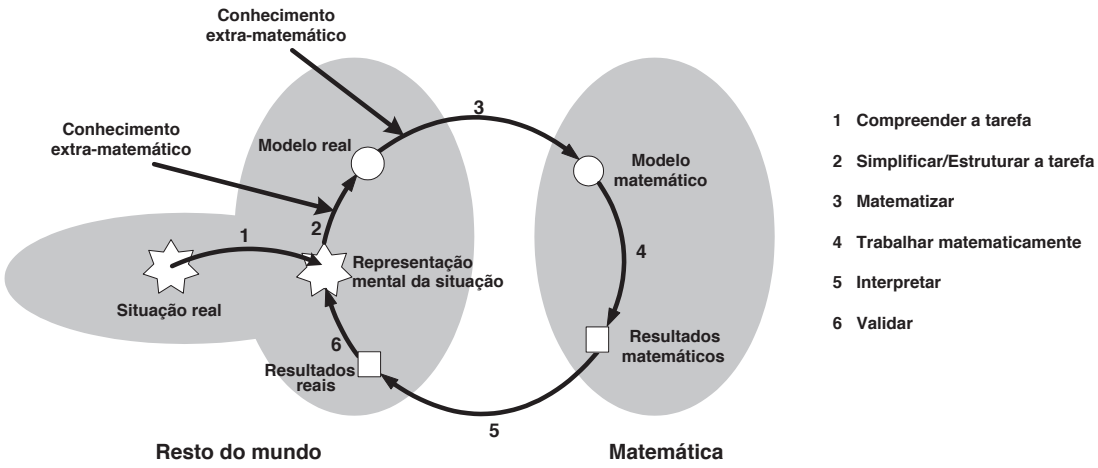


Figura 1 - Ciclo de modelação sob uma perspectiva cognitiva (adaptado de Ferri, 2006)

As vantagens, para a investigação, deste modelo sobre outros, relacionam-se com o facto de este constituir uma ilustração de um processo teórico de resolução (Ärlebäck, 2009) que permite dividir o ciclo de modelação, por exemplo, em *sub-actividades* (Ferri, 2006). Esta ideia vem corroborar a importância de se conhecer os passos de modelação relevantes levados a cabo na resolução de uma tarefa de modelação, a sua transição e barreiras cognitivas (Blum & Ferri, 2009).

De acordo com a representação do ciclo de modelação apresentado na Figura 1, as *fases* consistem em seis áreas por onde um aluno pode ir enquanto modela e em particular, designam-se as *sub-actividades* verificadas nas transições entre as fases e que constituem os seis passos de modelação: *compreender*, *simplificar/estruturar*, *matematizar*, *trabalhar matematicamente*, *interpretar* e *validar* (Blum & Ferri, 2009).

3. Metodologia

Metodologia de investigação. O estudo seguiu uma abordagem de investigação qualitativa, assumindo um cunho descritivo e interpretativo. Os participantes são um grupo de quatro alunos de uma turma do 2.º ano de um curso profissional. A recolha de dados decorreu durante o ano lectivo de 2009/10 e a principal fonte de dados foi a gravação em vídeo da actividade dos alunos durante a resolução da tarefa. Foram

também usadas outras fontes, como os registos escritos produzidos pelos alunos e notas de campo registados pela primeira autora, enquanto investigadora e professora da turma.

Para a caracterização da actividade dos alunos enquanto resolvem tarefas de modelação recorreu-se ao diagrama adoptado neste estudo para representar o ciclo de modelação, apresentado na Figura 1. O resultado final desta análise foi traduzido graficamente através do diagrama adoptado e que acompanha a caracterização do processo de modelação (secção 4), onde se incluem setas a tracejado que representam a rota descrita pelo grupo durante a resolução da tarefa.

A tarefa de modelação. A tarefa intitulada "Entregas ao domicílio" (Anexo 1) surge depois de os alunos terem interpretado, recorrendo à calculadora gráfica (CG), propriedades de funções representadas pela sua expressão algébrica.

O processo pelo qual os alunos passam na resolução do problema apresentado e o registo que dele fazem constitui o foco principal desta tarefa.

4. Exploração da tarefa de modelação "Entregas ao domicílio"

Caracterização do processo de modelação e mobilização dos conhecimentos matemáticos. Os alunos trabalham em grupo durante dois blocos de aulas de noventa minutos. No primeiro bloco, os alunos fazem uma representação mental da situação, compreendendo a tarefa e usando diversas vezes os seus conhecimentos extra-matemáticos. Ao simplificar e estruturar uma abordagem para o problema, deparam-se com dificuldades para fazer emergir um modelo real e, já perto do final do primeiro bloco, iniciam a matematização do problema. No segundo bloco de aulas, a sua actividade centra-se em torno da matematização, com vista a gerar um modelo matemático, e do trabalho matemático para encontrar resultados que virão a ser considerados como os resultados reais e que permitem, na perspectiva dos alunos, a conclusão da resolução do problema, pelo que o ciclo de modelação termina na fase dos resultados reais (Figura 2).

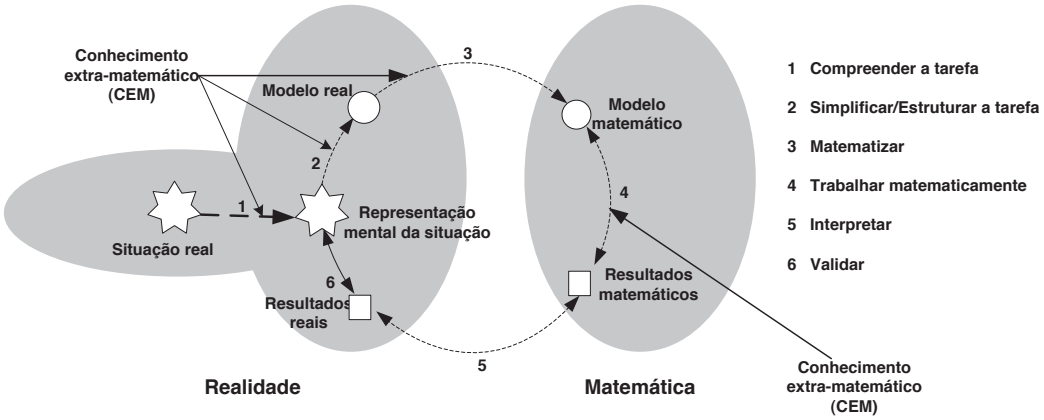


Figura 2 – Rota no ciclo de modelação na tarefa de modelação "Entregas ao domicílio"

De seguida descreve-se e analisa-se, sumariamente, a actividade dos alunos durante a resolução da tarefa, de acordo com a rota no ciclo de modelação apresentada na Figura 2.

Situação real → Representação mental da situação

Os alunos procuram compreender a tarefa e transitam da situação real para a representação mental da situação (seta 1, Figura 2). Rodrigo sumariza o que é pedido na tarefa, como sendo um aluguer, evidenciando o uso do conhecimento extra-matemático, na transição entre estas fases.

Representação mental da situação → Modelo real

Na transição da representação mental da situação para o modelo real, os alunos *simplificam* e *estruturam* o problema, adicionando as distâncias da casa dos clientes ao supermercado e usam esse valor para encontrar um preço a cobrar por quilómetro. Apelando novamente ao conhecimento extra-matemático, estabelecem a comparação com situações reais idênticas e pela primeira vez o número de quilómetros surge como uma potencial variável.

Rodrigo: Uma coisa que eu não sei é como é que os gajos do *Continente* fazem…eles não fazem preços certos?

Andreia: É, é preços certos… Tu vais ter o valor do frete e depois vais dividir o frete pelos quilómetros…aí vai dar quanto é que ele vai cobrar…

Sandro: Então 'bora' lá ver quanto é que ele faz por quilómetro… (Sandro fala baixinho a olhar para o papel…)

Andreia: Porque tu queres é saber o custo é por quilómetro… é por quilómetro… não é por pessoa… tens de descobrir por quilómetro que é o que ele te pede… logo as pessoas aqui não contam…porque depois tu tens de fazer isso é pelo quilómetro

Na transição da representação mental da situação para o modelo real é evidente o bloqueio dos alunos perante a dificuldade em identificar o "número de quilómetros" como a chave para construir o modelo real e o modelo matemático.

Modelo real → modelo matemático

As afirmações verbais dos alunos encontram-se no campo da Matemática, o que evidencia que a sua actividade está a situar-se na transição do modelo real para o modelo matemático. Os alunos continuam a fazer apelo aos seus conhecimentos extra-matemáticos. Na tentativa para definir um modelo matemático que traduza a situação enunciada, observa-se a mobilização de conhecimentos matemáticos que a seguir se descrevem.

A noção de variável. Dar sentido à noção de variável e estabelecer uma conexão entre esta noção e a relação de dependência, constitui uma dificuldade para os alunos. Evidencia-se um bloqueio na transição para o modelo matemático que é consumidor de muito tempo e onde não surgem progressos significativos.

Sandro: a gente sabe os quilómetros que vai fazer mas não sabe pensar o custo por quilómetro, como não sabemos o número de clientes nem a quantos clientes vamos aplicar aquela taxa de dois euros. Como é que se faz essa conta? Quantas incógnitas podemos utilizar numa fórmula? Como é que é essa fórmula agora?

Interpretação das letras. Os alunos apresentam dificuldades em atribuir significado à letra utilizada nas expressões analíticas. Verifica-se que a letra *x* é encarada como incógnita e não como variável.

Professora: Quando vocês escrevem esse *x* aí na máquina, o que é isso significa?

Rodrigo: é os valores que não sabemos…

Sandro: são as incógnitas…

Conceito de função afim e identificação dos seus parâmetros. Os alunos estabelecem a relação do custo da carrinha por dia em função do número de quilómetros percorridos, primeiro em linguagem natural e só depois em linguagem matemática. O entendimento do significado de cada parâmetro não é imediato nem feito com clareza e

não parece que os alunos tenham percebido a variação do custo dependendo do número de quilómetros percorridos e que este constitui a variável independente.

A utilização da calculadora gráfica e interpretação de representações gráficas. Na realização desta tarefa os alunos usam as suas CG, em cálculos elementares e para a introdução de expressões algébricas e observação das representações gráficas que as traduzem, com o propósito de encontrar uma função que modele a situação apresentada. A validação dos raciocínios depende do sentido dado às representações gráficas conseguidas.

Andreia introduz na CG a expressão $0{,}637x + 2$, obtém uma recta como representação gráfica e faz a sua interpretação. Rodrigo e José concluem que esta não se ajusta à sua ideia, uma vez que identificam a existência de uma relação de proporcionalidade inversa entre o número de quilómetros percorridos e o custo, referindo-se à função por "inversa". Os alunos discutem a propriedade que esperam encontrar na representação gráfica que traduza a situação que pretendem modelar e, com base no seu conhecimento extra-matemático, José contrapõe o modelo linear encontrado por Andreia.

Professora: O que é vos faz confusão com essa função?

Andreia: É que não é inversa *setora*… isso é que lhe está a fazer confusão…

Professora: Inversa?

Andreia: É que ele está a pensar na inversa. É isso é que lhe está a fazer confusão.

Professora: Inversa como?

Andreia: (vira-se para Rodrigo) Não é? Tu estavas a pensar que quanto maior fosse o número de quilómetros menor era o custo.

José: Quanto maior é o número de quilómetros menor é o custo.

Andreia: Tens uma empresa que faz uma coisa de Loures para Santarém e de Loures para o Porto. Para o Porto fica mais barato do que para Santarém? Eu acho que o do Porto fica mais caro.

José: Tens que cobrar mais aos que estão mais perto.

Andreia: O custo por quilómetro diz tudo… logo tem de ser aquele custo por *x* quilómetros. Se aumenta os quilómetros, aumenta o custo. Por isso, nunca pode ser de outra maneira.

O sentido que os alunos atribuem à representação gráfica obtida com a CG permite ajudá-los a decidir sobre a validade do modelo encontrado. Esta é a estratégia

que Sandro utiliza ao introduzir na máquina a expressão $\frac{0.637x+2}{x}$. Sandro procura intuitivamente a função "inversa" que sabia não ser representada por uma recta, mas sim de um outra forma que obrigaria que na expressão algébrica surgisse uma divisão pela letra utilizada para representar o número de quilómetros. Esta intuição do aluno sucede do facto de nas últimas aulas ter estudado as propriedades gráficas de funções racionais.

A interacção entre Rodrigo, José e Sandro permite a compreensão da representação gráfica obtida no contexto da situação apresentada. Os alunos interpretam o significado do eixo das abcissas e discutem a redefinição da janela de visualização, no que diz respeito ao domínio e o contradomínio válido para esta função.

Sandro: É que eu não sei explicar o que está aí. Eu não percebo bem esta matéria.

Rodrigo: Isto não nos interessa. (Aponta para a ramo negativo da hipérbole)

Professora: Porque é que isso não interessa?

Rodrigo: Não há quilómetros negativos. Nós não fazemos quilómetros negativos.

José: O que é que é o eixo dos *xx*?

Sandro: É o número de quilómetros (diz baixinho com algum receio)

Figura 3 – Representação gráfica obtida por Sandro

Os alunos construíram dois modelos: $y = 0{,}637x + 2$ e $y = \frac{0{,}637x+2}{x}$ mas, sem clarificar a correspondência entre estes modelos e as situações apresentadas no enunciado da tarefa.

Modelo matemático → Resultados matemáticos →Resultados reais

Através da concretização da variável, com recurso à CG, os alunos validam a função $y = \frac{0{,}637x+2}{x}$ como o modelo que traduz o seu raciocínio.

Os alunos baseiam a sua discussão na leitura das representações gráficas obtidas e procuram validar os modelos que lhes correspondem através de metáforas com o seu conhecimento extra-matemático. Na tentativa de encontrarem um modelo que traduza a situação, mostram alguma dificuldade em estabelecer relações entre as diferentes representações de uma função, especialmente a analítica e a gráfica. A validação do potencial modelo, continua dependente do significado da variável na expressão da função introduzida na CG e da interpretação que fazem da sua representação gráfica. Os alunos não manipulam algebricamente as expressões encontradas.

Com o auxílio da CG, Rodrigo confirma a conjectura formulada sobre o preço a pagar por quilómetro, interpreta a representação gráfica obtida e define o modelo que para si representa a situação (Figura 4).

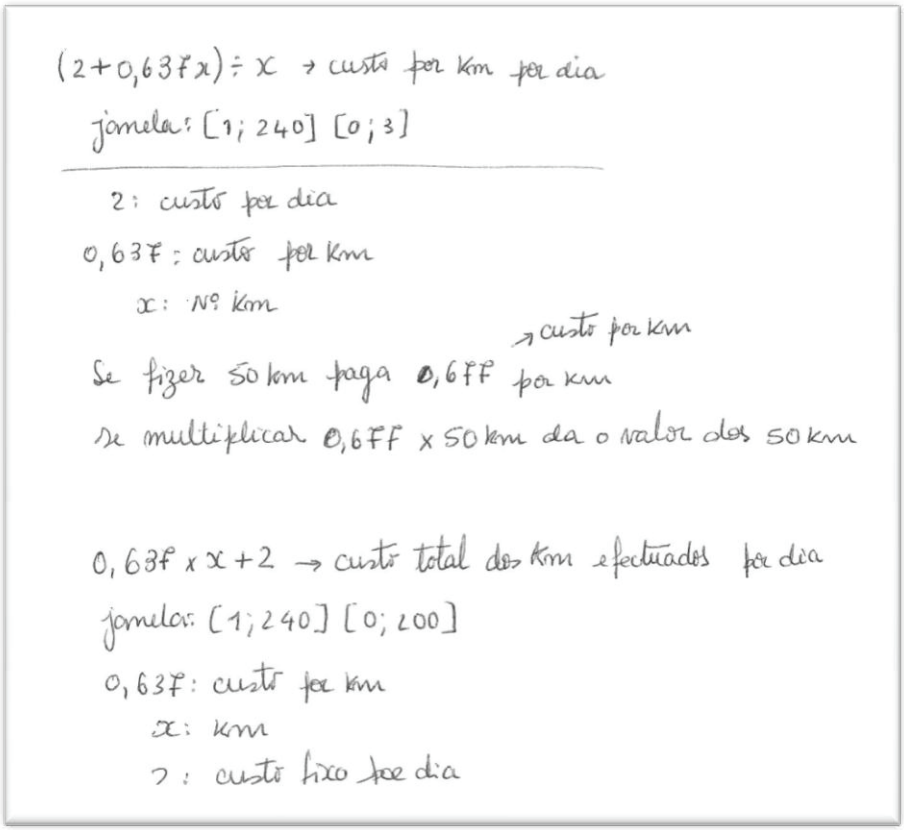


Figura 4 - Primeiro registo escrito sobre a tarefa

Na transição do modelo matemático para os resultados matemáticos os alunos trabalham matematicamente muito apoiados na interpretação dos resultados gráficos e numéricos obtidos com a CG. Os resultados matemáticos são discutidos de acordo com a sua possível correspondência com resultados reais. Já perto do final do segundo bloco de aulas, dão a tarefa como concluída tendo produzido o que se apresenta na Figura 5.

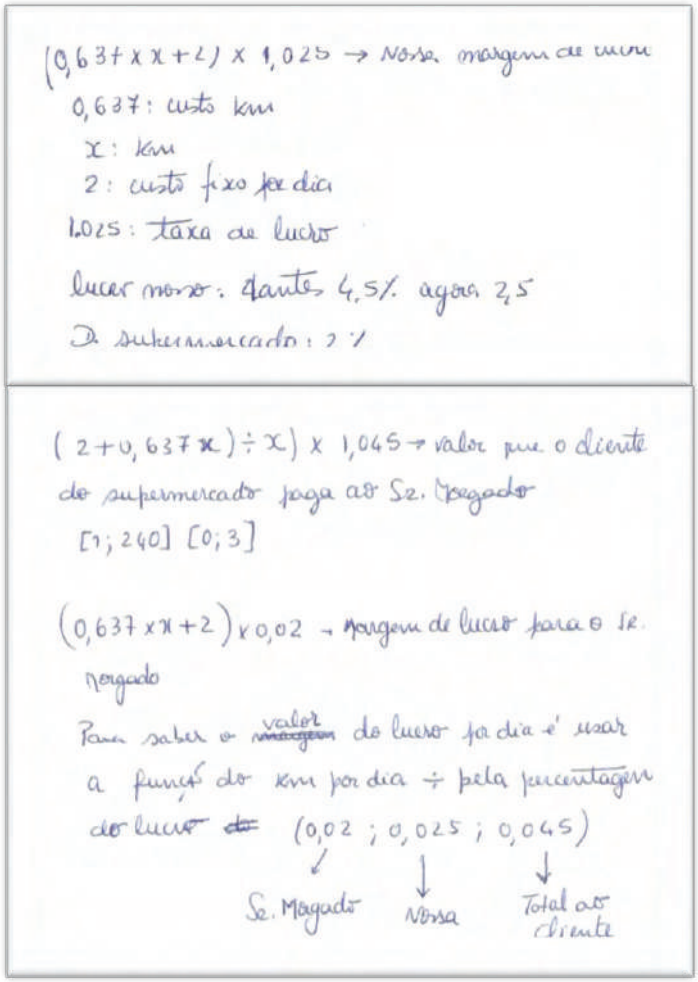


Figura 5 – Registos escritos como resposta à tarefa

5. Conclusões

Procurando caracterizar os processos de modelação, primeira questão do estudo, foi possível observar que a actividade dos alunos, percorre o ciclo de modelação de acordo com as fases enunciadas. Foi ainda possível ver representadas sub-actividades como *simplificação/estruturação* da tarefa, o que inclui a construção de relações

funcionais, a partir das quais foram alargando a sua compreensão da tarefa, e o uso de informação relativa ao conhecimento extra-matemático dos alunos; *matematização*, através da manipulação do problema, quantificação de dados relevantes, identificação de variáveis e da sua relação, tomada de decisões acerca da relevância das variáveis, construção de hipóteses, organização e selecção de informação para além da fornecida no enunciado e uso de estratégias no desenvolvimento do modelo matemático e trabalho matemático, através da noção de variável e de função, da interpretação das letras usadas nas expressões tomadas como modelos, do conhecimento de algumas propriedades da função afim e da função racional, e da interpretação de representações gráficas com auxílio da CG. A *interpretação* e a *validação* da solução encontrada, são também sub-actividades que se evidenciam na resolução desta tarefa, uma vez que, por exemplo, os alunos interpretaram e validaram as expressões algébricas que obtiveram, através de interpretações das representações gráficas obtidas com a CG. O conhecimento pessoal extra-matemático foi usado para validar os modelos construídos e os resultados obtidos nos cálculos efectuados.

Considerando estes resultados, pode concluir-se que o conhecimento extra-matemático é requerido não só na transição da situação real para a representação mental da situação e para o modelo real, e deste para o modelo matemático, mas também na transição entre as fases do modelo matemático e os resultados matemáticos. O conhecimento extra-matemático caracterizou-se por saberes da área de estudo do transporte de mercadorias. Este conhecimento foi requerido nas sub-actividades relativas à compreensão simplificação e estruturação da tarefa e da sua matematização.

Relativamente à segunda questão do estudo que visava a relação entre o desenvolvimento de processos de modelação e o conhecimento matemático dos alunos, em particular das funções, verificou-se que os modelos gerados incluem diversos tópicos matemáticos. Os alunos fizeram apelo à noção de variável, ao conceito de função, à interpretação de representações gráficas e propriedades das funções, em geral, e da função afim e função racional, em particular. Os modelos gerados baseiam-se em metáforas com situações reais e em representações de funções, como a gráfica e a algébrica.

Os alunos usaram a CG para, através de sucessivas tentativas, encontrarem uma expressão algébrica que traduzisse as ideias que o grupo intuiu sobre o contexto do

problema apresentado. Em nenhum momento manipularam algebricamente as expressões, o que evidencia alguma dificuldade no campo do pensamento algébrico.

No presente estudo fica claro como alguns aspectos do uso da calculadora gráfica, e do processo de modelação interferem mutuamente no processo de resolução de problemas. Tal ocorre quando os alunos sentem necessidade de usar as representações gráficas obtidas com a CG para validarem os seus modelos, o que decorre da identificação do contexto do problema com situações problemáticas similares propostas em aulas anteriores. Neste estudo verifica-se que os alunos, pelas suas experiências matemáticas anteriores e com base nos seus conhecimentos sobre algumas propriedades das funções como o domínio ou o contradomínio, de funções afim e racional, procuram uma representação gráfica que traduza a situação apresentada de acordo com a compreensão do problema e com o seu conhecimento extra-matemático.

A terminar há a destacar o papel importante que a discussão, em pequeno e em grande grupo, teve em todo o processo de resolução da tarefa. Parte das discussões, cujo foco saiu do âmbito da Matemática, terá sido fundamental para que os alunos continuassem a tarefa nos momentos de bloqueio. A dinâmica de grupo revelou-se essencial para a transição entre as fases e para a activação de sub-actividades no ciclo de modelação, durante o processo de resolução da tarefa. As interacções e as discussões, quando os alunos foram confrontados com diferentes opiniões, conduziram e talharam o processo de modelação. Este facto leva-nos a concluir que, embora com algumas limitações, esta tarefa cumpriu bem os seus objectivos e que as tarefas de modelação são contextos particularmente promissores para a formação matemática dos alunos que frequentam este tipo de cursos.

Referências bibliográficas

Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6 (3), 331-364.

Blomhøj, M. (2008). *Different perspectives on mathematical modelling in educational research - categorising the TSG21*. In ICME 11, Monterey, México. (http://tsg.icme11.org/document/get/811).

Blum, W. e Ferri, B. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.

Blum, W. e Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 37-68.

Ferri, B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.

Lesh, R. e Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ:Erlbaum.

Lesh, R., Hole, B., Hoover, M., Kelly, E. e Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. Lesh (ed.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591- 645). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. e Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematic teaching and learning,* (pp.763-804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

ME (2004). *Programa de Matemática para cursos profissionais de nível secundário*. Direcção-Geral de Formação Vocacional. ME. (http://www.anq.gov.pt/default.aspx?access=1)

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Sriraman, B. e Kaiser, G. (2006). Theory usage and theoretical trends in Europe: a survey and preliminary analysis of CERME4 research reports. *ZDM*, 38(1), 22-51

Anexo 1 – Tarefa "Entregas ao domicílio"

Entregas ao domicílio Caixa de entrada | X

Transportes2TT para colaboradores mostrar detalhes 10 Mar (10:30)

Responder

Caro colega:

O Sr. Morgado é proprietário do supermercado *Sempre Fresco* e hoje de manhã enviou-me o *e-mail* que reencaminho e a lista dos seus habituais clientes com algumas informações. Deve ser-lhe cobrada uma taxa de saída da carrinha de 2 euros por dia e aplicar o valor habitual por quilómetro. É nosso cliente há muitos anos, pelo que neste caso, podemos não aplicar a margem de lucro que habitualmente usamos.

Peço-lhe que sugira um valor por quilómetro a cobrar ao cliente do supermercado para que seja rentável ao Sr. Morgado a realização das entregas ao domicílio. Dê detalhes e uma explicação o mais clara possível para que ele possa decidir se a sua sugestão é boa para ser usada.

Cumprimentos do vosso director.

Manuel Pedrinhas

Transportes 2TT@gmail.com

De: Rui Morgado [ruimorgado@gmail.com]
Enviado: quarta-feira, 10 de Março de 2010 09:52
Para: Transportes 2TT
Assunto: Entregas ao domicílio

Olá Amigo Pedrinhas!

Espero que vá bem. Eu vou bem mais a minha Maria, mas esta crise está a notar-se cada vez mais! Os clientes aqui da zona cada vez mais se atormentam em vir cá ao meu estabelecimento… as pernas já não ajudam! Vejo passar as carrinhas do hipermercado ali do Centro Comercial para cima e para baixo e pensei que se calhar também podia fazer as entregas à casa dos meus clientes de há tantos anos. Talvez assim não perdesse tanta clientela! Olhe, mando-lhe uma lista com algumas informações sobre os nossos habituais clientes. Eu próprio farei a distribuição todos os dias, da parte da tarde. Mande-me lá os preços de quanto ficaria a custar-me este serviço e ajude-me a pensar no preço a cobrar aos meus clientes. Só preciso da carrinha porque o meu carrito não serve para estas coisas.

Até breve,

Rui Morgado

Lista dos clientes do Sr. Morgado

Nome da(o) cliente	Distância da residência ao supermercado (em km)	Nome da(o) cliente	Distância da residência ao supermercado (em km)
Maria	9,4	Madalena	10,9
Rosa	5,1	Fátima	5,9
Gertrudes	7,6	João	8,3
Luísa	13	Inácia	11,2
Josefa	10,1	Miquelina	6,7
Teresa	6,9	Francisco	9,3
Antónia	13,2	Maria Inês	3,2
Conceição	7,9	Matilde	11,4
Maria Clara	4,9	Maria Joana	4,6
Mariana	10,5	Maria do Céu	12,6
Fernanda	6,3	Vitor	3,3
Ana	6,9	Luís	8,1
José	6,2	Filipe	6,4
Maria Rita	7,8	José António	3,7
António	4,9	Maria de Fátima	12,6

Anexo 2 – Informação complementar à tarefa "Entregas ao domicílio"

Excerto de informação sobre custos padrão do transporte de carga completa para o transporte internacional (Anuário da ANTRAM, 2009, p.59)

	€/Km		€/Km
Gasóleo	0,294*	Renovação de Alvará	0,0004
Pneus	0,033	Pedido de licença do veículo	0,00004
Oleo	0,004	Autorização comunitária	0,00004
Manutenção e reparação	0,048	Motorista	0,272
Trânsitos	0,083	Seguros	0,027
Inspecção obrigatória	0,001	Impostos	0,004
Total custos variáveis	**0,462**	Amortizações	0,112
		Juros	0,033
		Total custos fixos	**0,448**
			0,909

Fonte: Logistema – Estudo Comparativo das Condições Económicas de exploração dos transportes de Mercadorias em Portugal e Espanha
*** Preços actualizados em Fevereiro de 2009**

POSTERS

ANÁLISE COMPARATIVA DE DISTRIBUIÇÕES NUMA TURMA DE 7.ºANO

Inês Campos
Escola Secundária da Ramada
inesspc@gmail.com

Joana Mata Pereira
Escola Básica 2,3 Francisco de Arruda
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@gmail.com

Nuno Raínho
Instituto Politécnico de Leiria
Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Leiria
nuno.rainho@esecs.ipleiria.pt

Resumo

Este poster apresenta os resultados de um estudo que visa compreender a capacidade de analisar e caracterizar distribuições por alunos do 7.º ano. Em particular, pretende-se analisar a compreensão de alguns objectos matemáticos subjacentes ao conceito de distribuição, nomeadamente, as representações gráficas, as medidas de localização e as medidas de dispersão, enquanto factores que contribuem para a mobilização e desenvolvimento do pensamento e da literacia estatística. Usou-se uma metodologia de investigação de natureza qualitativa e interpretativa, com base num estudo de caso. A recolha de dados teve por base registos escritos dos alunos na realização e discussão (videogravada) de duas tarefas. A análise do trabalho realizado pelos alunos permite reforçar a importância da comparação de distribuições para o desenvolvimento do pensamento e da literacia estatística. O poster começa com a apresentação do estudo, incluindo o objetivo, o contexto, a metodologia usada e a descrição das tarefas que o suportam. Também apresenta alguns exemplos e a análise do trabalho dos alunos para documentar os resultados do estudo.

Palavras-chave: Distribuição, Representação gráfica, Medidas de tendência central, Medidas de dispersão.

Introdução

A crescente importância atribuída à Estatística, nos documentos curriculares portugueses (por exemplo, ME, 2007), é o reflexo da sua visibilidade nas sociedades actuais, quer ao nível da vida quotidiana das pessoas, quer ao nível do exercício da cidadania.

O ensino da estatística deve desenvolver a capacidade de ler, analisar e fazer inferências a partir de distribuições de dados. Segundo Baker e Gravemeijer (2004), o conceito de distribuição é uma componente fundamental do pensamento estatístico, sendo a sua compreensão fulcral para o

desenvolvimento do raciocínio e da literacia estatística. No entanto, a distribuição é um elemento matemático complexo que envolve diversos conceitos – dados, variável estatística, valor, frequências, medidas de tendência central e medidas de dispersão. As medidas de localização e de dispersão e as representações gráficas constituem meios complementares para a interpretação e análise de distribuições. Contudo, o estudo destas medidas não deve centrar-se na realização de exercícios de cálculo em que a natureza dos dados não chega a ser discutida, mas sim explorando situações significativas para os alunos aproveitando-se oportunidades relevantes para a compreensão desses conceitos (Martins & Ponte, 2010). Por outro lado, ao longo do ensino básico, é importante que os alunos tenham oportunidade de comparar diversos tipos de representação para a mesma situação e verificar quais são os mais apropriados (Martins & Ponte, 2010).

O estudo

O presente estudo visa compreender a capacidade de análise e de caracterização de distribuições, em alunos do 7.º ano de escolaridade. Em particular, pretende-se analisar a compreensão de alguns objetos matemáticos subjacentes ao conceito de distribuição, enquanto fatores que contribuem para a mobilização e desenvolvimento do pensamento e da literacia estatística. Atendendo a este objetivo, esta investigação insere-se no paradigma interpretativo, sendo de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e recorre a um estudo de caso (Stake, 2009) – uma turma do 7.º ano que trabalha pela primeira vez com o actual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007).

A recolha de dados decorre em sala de aula, em dois momentos distintos que abrangem a aplicação e discussão de duas tarefas incidindo na análise comparativa de distribuições com diferentes representações gráficas – gráfico de pontos e diagrama de extremos e quartis. A análise dos dados tem por base as produções escritas dos alunos na realização destas tarefas e a discussão em sala de aula das respetivas resoluções.

Conclusão

O desempenho dos alunos nas tarefas realizadas tem características distintas e parece ser influenciado quer pelo contexto da tarefa, quer pela respetiva estrutura, o que motiva a utilização de diversas estratégias pelos alunos. Além disso, a realização de tarefas que envolvem a comparação de distribuições promovem uma análise centrada não apenas nas características observáveis, mas também nas subjacentes a cada uma das representações utilizadas.

Referências bibliográficas

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds), The Challenge of developing Stastical Literacy, Reasoning, and Thinking (pp.147-168). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Martins, M., & Ponte, J. P. (2010). Organização e tratamento de dados. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação.

ME. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Obtido em 16 de Janeiro de 2008, de Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação: http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Stake, R. (2009). A Arte da Investigação com Estudos de Caso. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.Jonassen, D. (2007). *Computadores, Ferramentas Cognitivas: Desenvolver o pensamento crítico nas escolas*. Porto: Porto Editora.

LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS POR ALUNOS DO 10º ANO DE ESCOLARIDADE

Adélia Prates
Escola Secundária Moita
profmatdelinha@gmail.com

Celina Tavares
Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich
Escola Secundária Stuart Carvalhais
celina.m.tavares@sapo .pt

Rosa Pedro Dias
Escola E.B.2,3 Ruy Belo
rosa.p.dias@gmail.com

Resumo

Este poster apresenta os resultados de um estudo onde se analisou as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas pelos alunos do 10.º ano de escolaridade na leitura e interpretação das diferentes formas de representação gráfica. O estudo utilizou uma metodologia mista, qualitativa e quantitativa. A recolha de dados teve por base as produções escritas dos alunos durante a realização de três tarefas, na sala de aula, que foram posteriormente analisadas, relativamente às suas dificuldades, de acordo com as categorias de Curcio (1989). Os resultados obtidos mostram que os alunos revelam bons desempenhos no nível "Ler os dados" mas apresentam dificuldades nos níveis "Ler entre os dados" e "Ler para além dos dados".

Palavras-chave: Análise de gráficos; leitura de gráficos; interpretação gráficos; estratégias; dificuldades.

Segundo Martins e Ponte (2010) o objectivo principal do Ensino da Estatística é o desenvolvimento da literacia estatística, que inclui a capacidade de ler e interpretar dados organizados na forma de tabelas e gráficos e de os usar para responder às questões mais variadas e o trabalho do professor tem de contemplar todos estes objectivos. Deste modo, pretende-se promover a capacidade dos alunos compreenderem e usarem conceitos e representações estatísticas na resolução de questões diversas.

Os mesmos autores referem, ainda, que um aspecto importante em Estatística é o das conexões. Uma vez que todos os dias nos defrontamos com tabelas e gráficos difundidos pela imprensa e redes sociais, parece pertinente proporcionar aos alunos, na sala de aula, um envolvimento entusiástico com tarefas estatísticas que utilizam diferentes representações gráficas que focam diversas áreas de actividade e situações do quotidiano, retiradas de revistas e da Internet.

No final dos anos 80, Curcio refere que "os gráficos providenciam um meio para comunicar e classificar dados. Permitem a sua comparação e facilitam demonstrações matemáticas que dificilmente seriam compreendidas se só se recorresse à sua forma numérica (1989, p. 1). Apesar disso, as autoras identificaram várias dificuldades na leitura e interpretação de dados por parte dos estudantes.

O problema em estudo surge neste contexto e deriva da nossa prática lectiva e de nos termos deparado com as dificuldades que os alunos do 10.º ano de escolaridade apresentam na leitura e interpretação de gráficos. Assim, parece pertinente investigar o nível de desempenho evidenciado por alunos do 10.º ano de escolaridade na realização de tarefas de leitura e interpretação de gráficos, com o objectivo de melhorar as nossas práticas lectivas.

O objectivo principal do estudo é procurar conhecer as estratégias de raciocínio utilizadas pelos alunos do 10.º ano de escolaridade na leitura e interpretação de gráficos e as dificuldades manifestadas. Em particular, quais as estratégias que os alunos utilizam e que dificuldades manifestam na leitura e interpretação de diferentes formas de representação gráfica.

O estudo segue uma metodologia mista, qualitativa e quantitativa (Bodgan & Biklen, 1994). A recolha de dados foi realizada por duas das autoras, em Maio de 2011, em duas escolas secundárias, uma da região de Setúbal e outra de Lisboa, com a participação de 51 alunos. As produções escritas dos alunos durante a realização de três tarefas em sala de aula foram depois analisadas, relativamente às suas dificuldades, de acordo com as categorias de Curcio (1989). Relativamente às estratégias decidimos adoptar as categorizadas por Ponte, Branco e Matos (2009), nomeadamente as usadas no estudo da análise gráfica das funções, uma vez que os alunos utilizam os conhecimentos adquiridos na Álgebra para resolver as questões que lhes são colocadas e os elementos definidos por Friel, Curcio e Bright (2001).

De um modo geral podemos afirmar que quase todos os alunos conseguem identificar os dados e ler as legendas ou eixos dos mesmos não apresentando dificuldades no nível I de Curcio - Ler os dados. Contudo, à medida que o grau de complexidade dos gráficos e questões aumenta nos níveis II e III constatámos que os alunos utilizam com dificuldades as estratégias de contagem/estimativa, aditivas e multiplicativas cometendo erros de interpretação da informação dada.

Os resultados parecem evidenciar que os alunos devem ser incentivados desde cedo a explorar e analisar gráficos com dados reais que conduzam o aluno a examinar criticamente o gráfico e os dados envolvidos, com o intuito de desenvolverem o seu pensamento e raciocínio estatístico.

Nesta comunicação começamos por apresentar o(s) objectivo(s) do estudo, os principais autores que o fundamentam e uma descrição da metodologia utilizada. Descrevemos, em seguida, as tarefas e os seus objectivos e damos alguns exemplos do trabalho dos alunos na realização das tarefas. Terminamos com as principais conclusões do estudo.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Curcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities. Reston, VA: NCTM.

Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications: Journal for Research in Mathematical Education, 32(2), 124-158.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). Organização e tratamento de dados. Lisboa: ME - DGIDC.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. Lisboa: ME - DGIDC.

JOGOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

José Marcos Lopes
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – FEIS/UNESP - Brasil
jmlopes@mat.feis.unesp.br

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – FEIS/UNESP - Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br

Resumo

Apresentamos neste trabalho uma proposta didático-pedagógica para o ensino de conceitos básicos de probabilidade, por meio do uso de um jogo associado à resolução de problemas. O jogo elaborado, inspirado em "Game of Kasje" (Schuh, 1968), foi utilizado como ponto de partida para o trabalho com situações problema, que tinham como propósito a construção dos conceitos probabilísticos. Assim, a partir da dinâmica desenvolvida com o jogo, formulamos várias situações-problema, cujas soluções e com a adequada intervenção do professor, podem induzir os alunos à construção e/ou à reconstrução dos conceitos básicos de probabilidade. A nossa proposta de ensino busca subsidiar o trabalho de professores, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Palavras-chave: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Ensino, Jogos, Probabilidade.

Introdução

A Probabilidade é a área da Matemática que trata do estudo e da modelagem de fenômenos aleatórios ou não determinísticos. Os conceitos da teoria de probabilidades proporcionam um modo de medir a incerteza e de aplicar a matemática para resolver problemas reais.

No Brasil, muitos professores têm dificuldades com o ensino de conteúdos de Probabilidade, e isso parece não ser uma exclusividade de nosso país. Contreras, Díaz, Batanero e Ortiz (2010), em um trabalho com 166 professores (em formação e em exercício), de Espanha, Portugal e México, afirmam que as novas diretrizes curriculares que ampliam o estudo da Estatística e da Probabilidade nos diferentes níveis educativos requerem uma formação específica dos professores, ou seja, apenas os conhecimentos matemáticos não são suficientes para que os professores possam ensinar probabilidade de uma maneira efetiva e desenvolver em seus alunos um adequado raciocínio probabilístico.

Neste trabalho o jogo é considerado um elemento que pode ser utilizado como ponto de partida no processo de construção do conhecimento.

O Jogo

O jogo proposto utiliza dois dados (ambos equilibrados ou não viciados) e é disputado entre dois jogadores, por exemplo, João e Maria. Na sua vez, cada jogador pode efetuar até dois lançamentos. São considerados lances vencedores aqueles em que se obtêm as seguintes faces:

(4; 1) ou (1; 4) vale 1 ponto; (4; 2) ou (2; 4) vale 2 pontos;

(4; 3) ou (3; 4) vale 3 pontos; (4; 4) vale 4 pontos;

(4; 5) ou (5; 4) vale 5 pontos; (4; 6) ou (6; 4) vale 6 pontos.

Se o jogador lançar os dados e não obter nenhuma face 4 no primeiro lançamento, ele efetua o segundo lançamento com os dois dados. Se obter pelo menos uma face 4 no primeiro lançamento, ele reserva esse dado e decide se lança ou não o outro dado mais uma vez. Vence o jogo quem obtiver a maior pontuação. Caso os dois jogadores obtenham a mesma pontuação, o procedimento é repetido.

Primeiramente, João efetua um ou dois lançamentos, posteriormente é a vez de Maria efetuar o seu jogo. Assim, Maria está numa posição de vantagem para decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento, já que conhece a pontuação obtida por João. Para tornar o jogo mais justo, deve existir uma alternância entre João e Maria como primeiro jogador de uma partida.

Estamos supondo para este jogo a utilização de dados equilibrados. Se, por exemplo, João conseguiu (4; 1) ou (1; 4), ou seja, 1 ponto no primeiro lançamento, então ele deverá lançar o segundo dado mais uma vez, pois não é possível diminuir sua pontuação. Agora, se João obteve 3 pontos, (4; 3) ou (3; 4) no seu primeiro lançamento, ele deve decidir se irá lançar o segundo dado mais uma vez, considerando que ele terá uma chance em 6 de permanecer com a mesma pontuação (ou seja, obter a face 3 no lançamento do segundo dado), duas chances em 6 de piorar sua pontuação (ou seja, obter a face 1 ou a face 2 no lançamento do segundo dado) e três chances em 6 de melhorar sua pontuação (obter as faces 4, 5 ou 6). Se o jogador não conseguir obter alguma face 4 nos dois lançamentos, ele não marca pontos.

No contexto do jogo podem ser exploradas várias noções de Probabilidade a partir da resolução de diferentes problemas, como por exemplo:

> *Problema 1* (probabilidade da união de dois eventos). Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João obter uma pontuação menor ou igual a 1?

Problema 2 (soma e produto de probabilidades). Qual a probabilidade de João marcar 1 ponto neste jogo?

Considerações finais

Acreditamos que a nossa principal contribuição foi oferecer uma proposta que pode subsidiar e melhorar o trabalho pedagógico do professor.

Basicamente, o que propomos neste trabalho é que o aluno construa o seu próprio conhecimento, por intermédio do desenvolvimento de seu raciocínio dedutivo. A memorização de fórmulas é temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é para toda a vida.

Referências

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C., & Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de professores y su evolucion en un taller formativo. Educação Matemática Pesquisa, 12(2), 181-198.

Schuh, F. (1986). The Master Book of Mathematical Recreations. New York, NY: Dover Publications.

UM PROJETO PARA A MELHORIA DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO[1]

Maria Madalena Dullius
Centro Universitário UNIVATES
madalena@univates.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma pesquisa em desenvolvimento cujo objetivo é analisar as habilidades e competências necessárias para um bom desempenho, no âmbito da Matemática, nas avaliações externas do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE, bem como verificar se a formação inicial e continuada dos professores contemplam tais habilidades e competências e a partir desses resultados propor ações e desenvolver atividades de intervenção pedagógica que possam contribuir para melhoria dos índices de desempenho nas referidas provas. A proposta metodológica abrange estudos de cunho mais qualitativo em alguns casos e em outros o foco predominante será a análise quantitativa. As análises e atividades a serem desenvolvidas são estruturadas a partir da contribuição coletiva de pesquisadores, mestrandos, estudantes de Licenciatura e professores da Educação Básica. O principal resultado esperado é contribuir para a melhoria da qualidade de ensino, por meio dos objetivos e metas descritos.

Palavras-chave: Habilidades e Competências; Matemática; Provas

Desenvolvimento

Especificamente neste trabalho, objetivamos relatar as atividades e análises realizadas a partir do estudo de questões da Prova Brasil, SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes) e PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos).

A presente pesquisa possui estreita relação com o Programa de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e o Curso de Licenciatura em Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES. O trabalho proposto envolve uma equipe formada por três mestrandos, seis docentes da Educação Básica da Rede Pública de Ensino, seis estudantes do curso de Licenciatura e dois professores pesquisadores da instituição.

Os quinze bolsistas que integram a pesquisa foram distribuídos em três grupos, sendo que um mestrando, dois bolsistas da graduação e dois professores da Educação

1 Este projeto conta com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior - CAPES – Brasil (Programa Observatório da Educação)

Básica compõem cada grupo. Assim como, também as provas analisadas ficaram sob responsabilidade das diferentes equipes. O estudo iniciaram em março, com reuniões semanais da equipe para a realização de buscas e discussões teóricas, levantamento e análise de dados, resolução e discussão de questões que compõem as provas. A seguir apresentamos um quadro com uma síntese das Provas.

Quadro 1: Síntese das provas

Provas	**Objetivos**	**Público alvo**	**Característica das questões**
Prova Brasil	avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro	alunos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental (EF)	- foco em resolução de problemas - significativo envolvimento de gráficos, figuras e tabelas - questões contextualizadas
SAEB		alunos do 5º e 9º ano do EF e 3º ano do Ensino Médio (EM)	
ENEM	avaliar a qualidade do EM no país	alunos que estão cursando ou já concluiram o EM	- envolve quatro áreas do conhecimeno - muitas questões envolvendo gráficos, porcentagem e geometria - questões contextualizadas
ENADE	avaliar o desempenho dos estudantes com relação aos conteúdos, o desenvolvimento de competências e habilidades e o nível de atualização	estudantes ingressantes e concluintes de cursos de graduação	- maioria das questões envolve conhecimentos específicos sobre algum conteúdo e algumas exigem conhecimentos didáticos sobre conteúdos desenvolvidos no EF e EM
PISA	produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da Educação Básica	alunos com 15 anos de idade que estão cursando a 7ª ou 8ª série do EF ou 1º ou 2º ano do EM	- conteúdos variados - questões contextualizadas - questões que permitem o uso de estratégias e raciocínio lógico

Considerações

O próximo passo é identificar habilidades e competências envolvidas nas questões, bem como o estudo das mesmas. Nas ações previstas para os quatro anos de realização da pesquisa constam a preparação de ações de intervenção e produção de

materiais, que possam contribuir para a melhoria dos índices das avaliações nacionais e externas. Ainda buscaremos conhecer os cursos de formação de professores, o perfil dos docentes que atuam nos cursos de licenciatura e também os que atuam na Educação Básica e faremos um estudo para verificar se os cursos de Licenciatura em Matemática do RS contemplam as habilidade e competências requeridas nas provas de Matemática.

Referências bibliográficas

Abreu, M (2009). *Lições do Rio Grande Referencial Curricular para as escolas estaduais in Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias*/Secretaria de Estado da Educação. -Porto Alegre: SE/DP.

Macedo, L. de (2009). *Por que competências e habilidades na educação básica?* in Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias/Secretaria de Estado da Educação. -Porto Alegre: SE/DP. Obtido em 25 de março de 2011 de www.inep.gov.br

SOBRE O CONCEITO DE NÚMERO: DISCUTINDO A FORMAÇÃO DE CONCEPÇÕES COM BASE NAS EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho;

UNESP – Campus de Ilha Solteira

balieiro@mat.feis.unesp.br

Neide Cristina Sabaraense Balieiro

neidecsb@mat.feis.unesp.br

Resumo

O objetivo desse trabalho é investigar e discutir as concepções dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de número e as possíveis transformações dessas concepções através das experiências vivenciadas durante o curso. Para tanto, com base na abordagem qualitativa de pesquisa, elaboramos um questionário com questões abertas, que foi respondido por todos os alunos do curso. Para a análise dos dados obtidos, realizamos uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento do conceito de número no decorrer da História da Matemática, com o intuito de comparar essas definições com as respostas dadas pelos alunos.

Palavras chave: número, história, filosofia, educação, matemática, concepções.

IDENTIDADE PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NÃO HABILITADO E FORMAÇÃO INICIAL – CONTRIBUTOS E CONFIGURADORES

Josimar de Sousa
Unemat/MT/Brasil
jsousa.mt@unemat.br

Resumo

O essencial neste estudo é compreender os configuradores da identidade profissional docente do professor de Matemática sem habilitação na Amazônia-Brasil, vivenciado no Projeto de Licenciaturas Parceladas. A metodologia usada é do tipo qualitativa interpretativa. Cinco professores egressos foram entrevistados. A teoria de apoio foi a da identidade profissional de Dubar (1997a, 1997b, formação de professores de Matemática de D`Ambrosio (1993, 1996), Fiorentini (1998), Ponte (2002, 2003), Nacarato (2006), Nóvoa (2005) e outros. O estudo revelou que a identidade profissional docente desses professores é composta por configuradores afirmados e adquiridos na formação inicial como o conhecimento específico de Matemático e baseia-se nas experiências vividas na escola. Portanto, o curso de formação inicial exerceu um papel significativo na constituição da sua identidade profissional que é fortalecida pelas experiências vividas em seus lugares de circulação como o espaço de formação inicial – o Projeto Parceladas – e no espaço de atuação profissional – as escolas.

Palavras-chave: Identidade profissional, Formação do professor de Matemática.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ONLINE E A CRIATIVIDADE DOS NATIVOS DIGITAIS – O PROJECTO PROBLEM@WEB

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

Hélia Jacinto
Escola Básica José Saramago e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
helia_jacinto@hotmail.com

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática e CMUC, Universidade de Coimbra
jaimecs@mat.uc.pt

Juan Rodriguez
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e
CEAF, Instituto Superior Técnico de Lisboa
jsanchez@ualg.pt

Nélia Amado
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

Nuno Amaral
Escola Básica 2,3 das Naus
nuno_amaral@sapo.pt

Rosa Antónia Ferreira
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto e CMUP
rferreir@fc.up.pt

Sandra Nobre
EB 2,3 Prof. Paula Nogueira e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
sandraggnobre@gmail.com

Resumo

O Projecto Problem@Web[1] propõe-se estudar a resolução de problemas num contexto que vai para além da aula de Matemática. Tem um claro terreno de investigação baseado em competições matemáticas, de natureza inclusiva, que decorrem essencialmente pela Internet. Serão apresentados dois dos vectores de investigação do

[1] Projecto Nº PTDC/CPE-CED/101635/2008, "Resolução de Problemas de Matemática: perspectivas sobre uma competição interactiva na Web" financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

projecto que envolvem a criatividade na resolução de problemas e a influência da utilização das tecnologias digitais nas resoluções dos participantes.

Palavras-chave: Resolução de problemas, criatividade, tecnologias digitais.

Contextualização

English, Lesh e Fennewald (2008) analisaram os últimos 50 anos de investigação em ensino e aprendizagem de resolução de problemas e identificaram factores que têm impedido avanços no conhecimento sobre a natureza da resolução de problemas e a sua expressão na prática efectiva em sala de aula. Dois desses factores são: (i) a limitada investigação sobre a relação entre o desenvolvimento de conceitos matemáticos e a resolução de problemas e (ii) o insuficiente conhecimento acerca da resolução de problemas em contextos para além da sala de aula.

Os alunos aprendem realmente Matemática fora da escola, segundo estudos internacionais, como o TIMSS e o PISA. De acordo com os relatórios, as melhores pontuações não reflectem apenas os resultados do trabalho desenvolvido em sala de aula. Aprender matemática para além da sala de aula, através do uso de ambientes tecnologicamente versáteis, é particularmente encorajado no presente (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdnyakov, & Stedøy, 2009).

Os campeonatos de resolução de problemas online são espaços que promovem a realização do potencial intelectual e criativo dos alunos (Koichu & Andzans, 2009). Contemplam a possibilidade de utilização de variados recursos que influenciam a actuação dos alunos, gerando oportunidades para a exploração, descoberta e comunicação matemática (Freiman *et al.,* 2009).

O projecto Problem@Web incide sobre os Campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 – competições online de resolução de problemas, promovidas pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve[2]. Pretende estudar: (i) competências e estratégias em resolução de problemas, (ii) atitudes de alunos que manifestam talento e criatividade na resolução de problemas, e (iii) feedback e comunicação em ambientes digitais.

[2] http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/

Dois vectores de investigação: Criatividade e Tecnologias

Destacaremos duas das problemáticas de investigação – criatividade e tecnologias – deste projecto, apresentando um breve suporte teórico e uma análise pontual de dados empíricos. Foram já identificadas características comuns aos participantes mais fluentes em termos tecnológicos que nos permitem descrevê-los como *nativos digitais* (Prensky, 2006). Estes jovens vivem num mundo impregnado de constantes *novas* tecnologias, artefactos que parecem desempenhar um papel activo no seu processo de conhecimento (Borba & Villareal, 2005). São alunos que aprendem através da descoberta, retêm melhor a informação e usam-na de forma criativa (Oblinger & Oblinger, 2005). Muitos revelam potencial matemático criativo ao nível da resolução de problemas, destacando-se pela autonomia nas abordagens efectuadas e pelas capacidades de comunicar e explicar simbolicamente as suas resoluções, conjugando conhecimento, imaginação e inspiração (Applebaum, Freiman & Leikin, 2008).

Aspectos metodológicos

Embora os estudos desenvolvidos neste projecto assumam designs metodológicos diversos, o seu carácter é predominantemente naturalista, visando analisar e interpretar informações recolhidas de formas também diversas (dados documentais; entrevistas a participantes, encarregados de educação e professores; observação participante em contextos escolares e não escolares; etc.) com vista à elaboração de estudos de caso.

Referências bibliográficas

Applebaum, M., Freiman, V., & Leikin, R. (2008). *Views on Teaching Mathematically Promising Students*. Artigo apresentado no ICME 11, Topic Study Group 6 – Activities and programs for gifted students. [Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/595].

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. New York, USA: Springer.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Artigo apresentado no ICME 11, Topic Study Group 19 – Research and development in problem solving in mathematics education. [Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/458]

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). NY: Springer

Koichu, B., & Andzans, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R. A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 286-307). Rotterdam: Sense Publishers.

Oblinger, D., & Oblinger, J. (2005). Is It Age or IT: First Steps Toward Understanding the Net Generation. In D. Oblinger & J. Oblinger (Eds.), *Educating the Net Generation*. New York, NY: Educause.

Prensky, M. (2006). *Don't bother me Mom, I'm learning: how computer and video games are preparing your kids for 21st century success and how you can help!* St. Paul: Paragon House.