O papel das diversas representações na resolução de problemas, em diferentes contextos, no estudo da proporcionalidade inversa

Sandra Nobre[1], *Nélia Amado*[2], *João Pedro da Ponte* [3]
[1]Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, sandraggnobre@gmail.com
[2]FCT, Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *O nosso objetivo é analisar a forma como uma aluna do 9.º ano utiliza representações matemáticas na resolução de problemas de proporcionalidade inversa. Interessa-nos também perceber se existe influência dos contextos dos problemas na atividade da aluna. Este trabalho é realizado no quadro de uma experiência de ensino, com uma forte ênfase na resolução de problemas, alguns dos quais com a folha de cálculo. A análise de dados incide em diálogos na sala de aula, nas produções da aluna, bem como numa entrevista realizada após o estudo do tópico. Os resultados mostram que ao longo do estudo do tópico a aluna aprendeu a utilizar diferentes representações para resolver os problemas propostos, bem como estabelecer conexões entre elas. Os contextos menos comuns para a aluna, que inicialmente lhe causavam algumas hesitações na escolha de uma estratégia, deixaram de afetar a sua capacidade de resolver problemas.*

Abstract. *Our goal is to analyze how a grade 9 student uses mathematical representations in solving inverse proportion problems. We are also interested in knowing if the problem contexts influence the student's activity. This work is conducted as part of a teaching experiment with a strong emphasis on problem solving, some of which with a spreadsheet. Data analysis focuses on classroom dialogues, in student productions as well as in an interview made after the study of the topic. The results show that during the study of the topic the student learned to use different representations to solve problems and to establish connections between them. Less common contexts for the student, at the beginning caused her some hesitation in choosing a strategy, but later did no longer affect her ability to solve problems.*

Palavras-chave: Álgebra; Proporcionalidade inversa; Resolução de problemas; Representações matemáticas; Folha de cálculo.

Introdução

Desde cedo que as crianças, no seu dia-a-dia, se deparam com situações que envolvem proporcionalidade direta ou inversa e com outras situações em que não existe proporcionalidade. O estudo da proporcionalidade inversa, como função, surge no 9.º ano, e os alunos têm de saber distinguir situações que envolvem proporcionalidade direta e inversa e situações em que não há proporcionalidade.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 425–442

Vários documentos curriculares (e.g., ME, 2007; NCTM, 2007) apontam a resolução de problemas de situações da vida real como uma atividade potenciadora do estudo da proporcionalidade inversa. Nesta comunicação debruçamo-nos sobre a forma como uma aluna utiliza as representações matemáticas na resolução de problemas e procuramos compreender a influência dos contextos na sua atividade.

A aprendizagem da proporcionalidade inversa

Os alunos começam por lidar com situações de proporcionalidade direta de forma intuitiva, recorrendo a estratégias como a redução à unidade ou o uso da regra de três simples. Mais tarde, surgem relações de proporcionalidade inversa, que exigem um raciocínio mais complexo. A compreensão deste novo conceito é, em parte, facilitada pela compreensão do conceito de proporcionalidade direta, uma vez que duas grandezas x e y são inversamente proporcionais se x é diretamente proporcional ao inverso de y.

O próprio conceito de proporcionalidade está envolto de diversas dificuldades. Vergnaud (1997) afirma que as noções de grandeza diretamente e inversamente proporcionais requerem a construção de conceitos multiplicativos de uma certa complexidade e que nem sempre podem ser compreendidos usando apenas os esquemas de somar e subtrair. Segundo Herscovics & Lincheviski (1994), há alunos que no uso imediato de métodos formais algébricos, como a expressão algébrica da proporcionalidade inversa, operam mecanicamente com os símbolos, sem entender o seu significado. Esta dificuldade pode estar relacionada com a abordagem predominantemente formal com que estes métodos são apresentados. Também Silvestre e Ponte (2009) referem que uma aprendizagem com ênfase no treino de procedimentos e verbalização de regras, sem desenvolver a compreensão da estrutura matemática da relação proporcional, tem consequências indesejáveis sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Daí o poder-se admitir que a aprendizagem será facilitada se se envolver os alunos em experiências informais antes da manipulação algébrica formal, nomeadamente através da resolução de problemas.

A resolução de problemas referentes a diferentes contextos

A resolução de problemas é uma atividade privilegiada para uma aprendizagem com compreensão. O contexto do problema desempenha um papel fundamental na construção de significados, devendo por isso ser adequado. De acordo com Bickmore-Brand (1990/1993), "o contexto é fundamental para a construção de significado durante todo o trabalho. Constitui o pano de fundo em relação ao qual todas as partes têm de fazer sentido" (p. 3). Para além de ajudar os alunos a atribuir significado ao conteúdo matemático envolvido, o contexto influencia a compreensão do enunciado, bem como o estabelecimento de um plano para o resolver (Kulm, 1984).

Como indicam Mason, Johnston-Wilder, e Graham, (2005), os alunos habitualmente gostam dos problemas resolvidos em determinado tema e em contextos em que o assunto e as técnicas são suscetíveis de surgir. Estes autores defendem que a resolução de problemas deve surgir logo no início do estudo de um tópico, em vez de apenas no seu final, tornando-se problemas de aplicação só acessíveis aos alunos com maior destreza. Desta forma, devemos incentivar os alunos a relacionar os contextos em que surgem os problemas com a sua própria experiência, de forma a promover a compreensão e o significado.

Representações matemáticas no estudo da proporcionalidade inversa

As representações matemáticas servem os propósitos de comunicar com os outros acerca de um problema ou de uma ideia mas, simultaneamente, constituem ferramentas que ajudam a atingir a compreensão de uma propriedade ou de um conceito (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Daí encararmos o uso de representações como lentes através das quais procuramos compreender o significado envolvido nos processos matemáticos, em particular na resolução de problemas.

Para Duval (2006), as representações semióticas e a conversão das representações são fundamentais no processo de aquisição do conhecimento matemático: "nenhuma actividade matemática pode ser realizada sem usar um sistema de representação semiótico, porque o processo matemático envolve sempre *a substituição de uma representação semiótica por outra*" (p. 107, itálico no original). Para este autor, a dificuldade reside na passagem de uma representação para outra. Considera necessário distinguir o caso em que transformamos uma representação numa outra pertencente ao mesmo registo (tratamento) e o caso em que transformamos uma representação dada num registo numa representação noutro registo (conversão).

A folha de cálculo possibilita o acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005) e, em simultâneo, permite estabelecer relações funcionais, bem como conexões com a linguagem algébrica, o que pode proporcionar uma compreensão mais significativa desta linguagem. O recurso a esta ferramenta na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes num problema e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). Friedlander (1998) afirma que

> A folha de cálculo constrói uma ponte ideal entre a aritmética e a álgebra e permite aos alunos a livre circulação entre os dois mundos. Os alunos procuram padrões, constroem expressões algébricas, generalizam conceitos, justificam conjecturas, e estabelecem a equivalência de dois modelos conforme as necessidades intrínsecas e significativas e não como exigências arbitrárias colocadas pelo professor (p. 383).

Friedlander e Tabach (2001) consideram que a capacidade para trabalhar com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma, tornando o processo de aprendizagem da Álgebra mais significativo e efetivo. Estes autores defendem a necessidade de preparar tarefas que exijam que os alunos recorram a várias representações, estabelecendo relações entre elas, e desta forma, atribuindo-lhes significado. Tripathy (2008) corrobora esta ideia, afirmando que a utilização de múltiplas representações é fundamental para a compreensão de um conceito matemático. No trabalho com situações de proporcionalidade inversa surgem com frequência as representações tabular, gráfica e algébrica. Para uma boa compreensão do conceito de proporcionalidade inversa é importante que os alunos as compreendam e as consigam transformar umas nas noutras.

A experiência de ensino

Nesta experiência, a resolução de problemas assume o papel central, embora sejam propostas tarefas de natureza diversa (Ponte, 2005). Recorre-se à folha de cálculo numa fase inicial, como ponto de partida para a aprendizagem formal. Em cada tarefa são promovidos momentos de discussão e de síntese, estabelecendo uma ponte entre o trabalho na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico sempre que possível a partir das propostas dos alunos. A tabela 1 indica as tarefas trabalhadas e o respetivo ambiente. O tópico em estudo, para além da proporcionalidade inversa, integra também a análise de representações gráficas de outras situações. Destas tarefas, nesta comunicação debruçamo-nos apenas sobre as primeiras quatro. No início do estudo do tópico, os alunos resolveram uma ficha de diagnóstico.

Tabela 1. Tarefas realizadas

Tarefa	A	B	C	D	E
Designação	Diagnóstico	Os canteiros da horta do sr. Tomás	Produtos fixos	Miscelânea	Representaçõe s gráficas
Ambiente	Lápis e papel	Lápis e papel Folha de cálculo	Lápis e papel Folha de cálculo	Lápis e papel	Lápis e papel

Metodologia de investigação

Analisamos a forma como uma aluna lida com as representações matemáticas na resolução das situações propostas (maioritariamente problemas) e procuramos compreender a influência do contexto na sua atividade. Dada a natureza do estudo, a metodologia adotada é qualitativa, seguindo um paradigma interpretativo. Esta investigação segue um *design* de experiência de ensino com recurso a estudos de caso, onde a primeira autora assume o duplo papel de professora da turma e investigadora. Debruçamo-nos sobre o caso de Ana, uma aluna de 14 anos interessada, participativa nas aulas e habitualmente sem dificuldades na disciplina de Matemática.

Procedemos à recolha das produções da aluna na sala de aula, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante registada em notas de campo. Após o estudo do tópico, realizámos uma entrevista clínica (E) à aluna com o objetivo de obter mais informações sobre a sua aprendizagem. A análise de dados tem por base a análise de conteúdo (Bardin, 1977) a partir das transcrições das gravações áudio, dos registos da sequência de *frames* no Excel e da entrevista.

Resultados

Apresentamos em seguida excertos das produções de Ana, bem como dados da entrevista, destacando o modo como utiliza representações matemáticas em situações de proporcionalidade inversa.

Tarefa A

Esta tarefa contém situações problemáticas de natureza variada, umas que requerem um raciocínio proporcional e outras não, podendo gerar alguma incerteza aos alunos na escolha da estratégia de resolução. Ana resolve a tarefa com a sua colega Vanessa, recorrendo principalmente à linguagem natural para retirar dados dos enunciados, identificar incógnitas e dar respostas. Para chegar aos resultados, usa predominantemente operações elementares.

Na primeira situação: "Seis homens pintam uma casa em 3 dias. Quantos homens são necessários para pintar essa casa num dia?", Ana retira os dados do enunciado, coloca-os numa disposição tabelar e fica hesitante quanto aos procedimentos a seguir.

> A.: Oh, professora… agora como é que eu justifico aqui? É assim? 6 homens pintam uma casa em 3 dias, então em 2 dias é 4 homens e num dia são 2 homens…

Ana começa por usar uma igualdade de razões como se tratasse de uma situação de proporcionalidade direta, o que leva a professora a perguntar:

> P.: Ai é?
> A.: Então….
> P.: 6 homens pintam em 3 dias… se queremos diminuir os dias…
> A.: Temos de aumentar os homens.

A intervenção da professora leva a aluna a verificar que o número de homens deve aumentar em vez de diminuir, pelo que decide mudar de estratégia. Continua a resolver a tarefa com a colega:

> V.: Metes mais 6 homens e pintam em 1 dia… não? … Mais?
> A.: Não, porque se tu fores diminuindo a relação entre isto é 2, 6 a dividir por 3 é 2. Se for aumentar 6 mais 2 dá 8 e aqui tens 2 dias mais 2, 8 mais 2 dá 10, 8 mais 2 dá 10, pintam num dia.
> P.: Será?
> A.: Acho que não…
> P.: Vamos lá pensar. [A professora afasta-se]

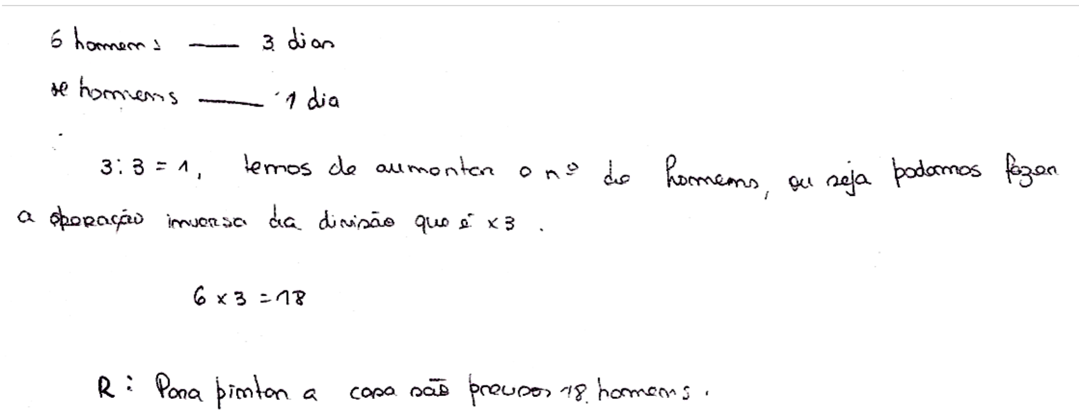
Influenciada pela colega, Ana ensaia um raciocínio aditivo para a situação, embora sem sucesso. Como a questão da professora não incentiva a continuar com aquela estratégia, as alunas admitem que não se trate da melhor forma para lidar com a situação:

> V.: A gente aumenta mais 2 e fica 2, a gente aumenta mais 2 e fica 1… 6, 7, 8, 9, 10 … 10 homens é 1 dia … Professora venha lá aqui… aqui eu fiz assim: 6 a dividir por 3 é igual a 2, isto quer dizer que 2 homens pintam a casa…
> A.: 2 homens é 6 dias.
> V.: 2 homens é 1 dia, vá.
> P.: Mas como é que pode ser 2 homens 1 dia?
> V.: Não, espere aí, professora… assim dá: 6 homens em 3 dias…
> P.: 6 homens em 3 dias…
> V.: Então? Agora eu quero baixar este número, então aumento mais dois, aumento mais 2, fica 2, olhe fica 2 dias.
> P.: E será assim? Pensem lá melhor…
> V.: Eu não sei, eu já não sei… agora não encontro mais nenhuma maneira.
> A.: Pois… [A professora afasta-se]
> V.: Olha, não vou fazer, vou passar à frente.

Ana e a colega não encontram uma forma de chegar à resposta. A professora afasta-se, regressando uns minutos depois.

> P.: Então e aqui? Já chegaram a alguma conclusão acerca do problema dos homens?
> A.: Eu fiz 3 a dividir por 3, dá 1 dia.
> P.: Hummm?
> A.: Eu fiz 3 a dividir por 3, dá 1 dia. E depois como eu tenho aqui 3 vou ter que multiplicar por 3.
> P.: E então?
> V.: Se pudéssemos fazer uma regra de três simples…
> A.: Mas eu tenho de fazer vezes 3 porque quando eu diminuo aqui tenho de aumentar aqui e dá 18.

Depois de um caminho sinuoso, em parte sugerido pela colega, Ana percebe que para obter a resposta correta tem de usar um raciocínio multiplicativo e não aditivo. A sua produção final (figura 1) e o diálogo mostram que, mesmo de forma intuitiva, a aluna entende que, se o número de dias diminuir, o número de homens tem de aumentar na mesma proporção. Usa raciocínio inversamente proporcional, pois, como refere: “eu tenho de fazer vezes 3 porque quando eu diminuo aqui tenho de aumentar aqui”. Usando linguagem natural, explica os procedimentos e os cálculos efetuados para obter a sua resposta.


6 homens —— 3 dias
x homens —— 1 dia

3 : 3 = 1, temos de aumentar o nº de homens, ou seja podemos fazer a operação inversa da divisão que é × 3 .

6 × 3 = 18

R: Para pintar a casa são precisos 18 homens.

Figura 1. Produção de Ana (Q 4 da tarefa A)

A situação “Alguns amigos da Joana querem fazer-lhe uma surpresa e oferecer-lhe o seu livro preferido. Se forem 6 amigos, cada um deve participar com 2 €. Se cada amigo der menos 50 cêntimos, quantos amigos deverão participar na compra do livro?” envolve igualmente o raciocínio inversamente proporcional. Na resolução, Ana não revela dificuldades:

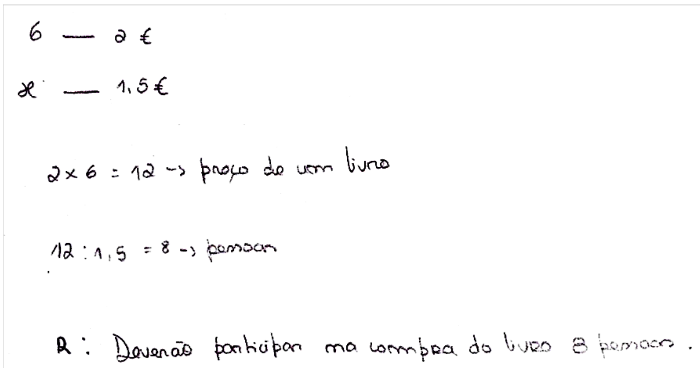


Figura 2. Produção de Ana para a questão da tarefa A-2

Uma aluna resolve no quadro e explica o seu processo de resolução.

> Adr.: Fiz 6 vezes 2 para saber o preço do livro e depois fiz 1,5 vezes 8, por tentativas.
> P.: E o 8 foi por tentativas?… E este 8 é o quê?
> Alguns alunos: É o número de amigos.
> A.: Mas podíamos fazer 12 a dividir por 1,5 e vai dar logo o número.

Diversos alunos chegam igualmente ao número de amigos por tentativas. No entanto, como mostra a sua intervenção, Ana recorre à divisão. Na sua resolução (figura 2), procede ao cálculo da constante de proporcionalidade para depois, através da divisão, obter o valor da outra grandeza. Usa cálculos elementares para obter a sua resposta e recorre à linguagem natural para explicar o significado dos resultados que obtém.

Ana diz que foi nesta tarefa que “a gente viu que podia existir proporcionalidade inversa. Foi a primeira ficha que nos deu a entender que além da proporcionalidade direta podemos também ter proporcionalidade inversa…” (E). Acrescenta ainda que esta ficha foi “muito acessível” (E) e que gostou de a resolver. Note-se que os contextos dos dois problemas são distintos, embora exista grande familiaridade dos alunos com o último, o que não acontece com o primeiro.

Tarefa B

Esta tarefa é resolvida num ambiente que combina lápis e papel e folha de cálculo. Na primeira questão, Ana facilmente preenche a tabela e percebe a relação que existe entre a base e a altura de um canteiro retangular quando a sua área é fixa, explicando como procedeu no caso de o comprimento duplicar e triplicar (figura 3).

1. A tabela ao lado apresenta algumas das primeiras experiências efectuadas pelo Sr. Tomás. Completa-a.

1.1. Tendo em conta os valores obtidos na tabela explica o que acontece à medida do comprimento da altura se duplicarmos a medida do comprimento da base? E se triplicarmos?

Se duplicarmos o comprimento da base, o comprimento da altura fica metade, dividimos por 2, o mesmo acontece quando triplicarmos o comprimento da base, dividimos por 3.

Base (b)	Altura (a)	Área
10	12	120
2	60	120
3	40	120
60	2	120
80	1,5	120
1	120	120

Figura 3. Produção de Ana (Q1.1 da tarefa B)

Na folha de cálculo, Ana obteve os valores para a altura com recurso a uma fórmula e à geração de variáveis-coluna (figura 4):

Base (b)	Altura (a)	Área
1	120	120
1,5	80	120
2	60	120
2,5	48	120
3	40	120
3,5	34,28571	120
4	30	120

Base (b)	Altura (a)	Área
1	=E6/C6	120
1,5	=E7/C7	120
2	=E8/C8	120
2,5	=E9/C9	120
3	=E10/C10	120
3,5	=E11/C11	120
4	=E12/C12	120

119	1,008403	120
119,5	1,004184	120
120	1	120

119	=E242/C242	120
119,5	=E243/C243	120
120	=E244/C244	120

Figura 4. Produção de Ana (Q 2.1 da tarefa B)

Na entrevista, Ana recorda os procedimentos em Excel para obter a altura com uma fórmula: "pus igual área, cliquei sobre a área, sinal de dividir sobre a base mais enter" (E). A aluna reconhece ainda o contributo da folha de cálculo: "o Excel serviu muito, pois como vemos no exercício 2 ele apresenta-nos reticências, ou seja, números com vírgulas até 120. Se nós fôssemos construir esta tabela à mão ia demorar muito tempo, enquanto com o Excel, com a técnica de arrastar, é muito mais fácil de resolver" (E).

A questão seguinte pede a expressão algébrica e Ana não tem dificuldades em escrevê-la, afirmando que "foi igual ao que estava lá porque eu fiz a área total a dividir pela base para saber a altura, por isso foi como ali atrás" (E). Refere-se ao trabalho com a folha de cálculo onde reconhece a sua equivalência com a escrita em linguagem algébrica com lápis e papel, sem que a semântica específica de cada ambiente lhe provoque dificuldades. Noutra questão, é pedida a construção da representação gráfica da função definida na tabela com as dimensões do canteiro. Esta é a primeira vez que Ana contacta com a hipérbole (figura 5): "foi quando percebemos que este era o gráfico da proporcionalidade inversa. Nesta ficha ficámos também a conhecer a expressão algébrica" (E).

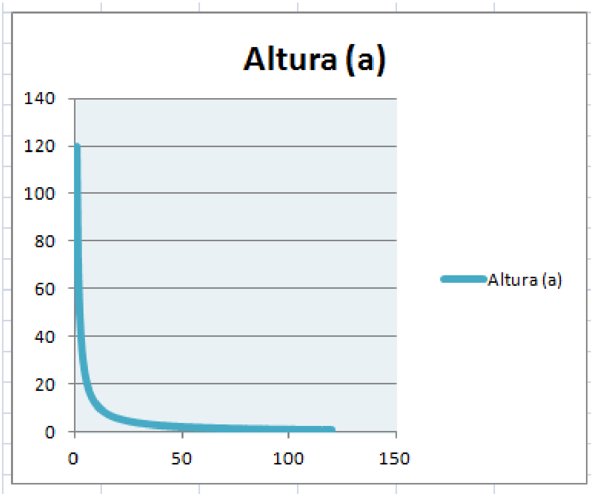


Figura 5. Produção de Ana (Q 2.3 da tarefa B)

Na entrevista, Ana atribui à folha de cálculo um importante papel na construção de gráficos referindo que "…através de gráficos, o Excel é mais preciso na construção" (E). Na sua perspetiva, esta tarefa serviu "para iniciarmos, mais aprofundadamente, o estudo da proporcionalidade inversa; foi quando começámos a aprender a construir tabelas e gráficos da hipérbole" (E). Afirma ainda que "com esta ficha aprendi a proporcionalidade inversa e consegui perceber que podemos traduzi-la em 3 passos, por exemplo: a tabela, o gráfico e a expressão algébrica. Aprendi também que o gráfico é a hipérbole, como se constrói e também que podemos ter 3 formas diferentes da expressão algébrica, ela pode ser representada de três formas diferentes" (E). Identifica as representações diferentes estudadas e as três formas de escrever a expressão algébrica. Tanto na entrevista como em sala de aula, Ana dá evidências da aprendizagem das diferentes representações, em particular a expressão algébrica (método formal algébrico) para lidar com situações de proporcionalidade inversa.

Tarefa C

Esta tarefa tem como objetivo o contacto dos alunos com a representação gráfica da hipérbole em IR e ainda em situações em que a constante de proporcionalidade é um número negativo. A primeira situação informa que o produto de dois números é 4 e pede a construção de uma tabela na folha de cálculo. Ana constrói a tabela com vários valores. A pedido da professora, os alunos colocam números positivos e negativos de modo a obterem a representação gráfica em IR . Ana escreve a coluna relativa aos valores de *y* como relação de dependência das outras duas, tendo em conta a condição dada. À semelhança de muitos alunos na turma, ao gerar a variável coluna, coloca o valor 0 para *x*. Depois de algum questionamento por parte da professora, os alunos compreendem que existe um erro, excluindo então o valor 0 para a variável *x*. Na escrita da expressão algébrica, foi assim reforçada a importância de indicar que *x* não pode tomar o valor 0, levando os alunos à escrita do domínio quando explicitam a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa.

Na segunda questão em que produto de *x* e *y* é -4, Ana procede de forma análoga nos dois ambientes, lápis e papel e folha de cálculo (figura 6).

x	y	Total
-8	0,5	-4
-7	0,571429	-4
-6	0,666667	-4
-5	0,8	-4
-4	1	-4
-3	1,333333	-4
-2	2	-4
-1	4	-4
0		-4
1	-4	-4
2	-2	-4
3	-1,33333	-4
4	-1	-4
5	-0,8	-4
6	-0,66667	-4
7	-0,57143	-4
8	-0,5	-4

x	y	Total
-8	=O3/M3	-4
-7	=O4/M4	-4
-6	=O5/M5	-4
-5	=O6/M6	-4
-4	=O7/M7	-4
-3	=O8/M8	-4
-2	=O9/M9	-4
-1	=O10/M10	-4
0		-4
1	=O12/M12	-4
2	=O13/M13	-4
3	=O14/M14	-4
4	=O15/M15	-4
5	=O16/M16	-4
6	=O17/M17	-4
7	=O18/M18	-4
8	=O19/M19	-4

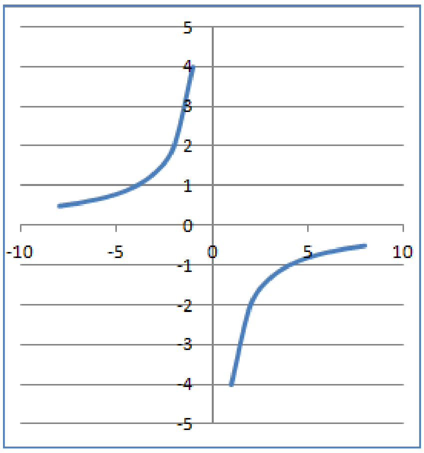
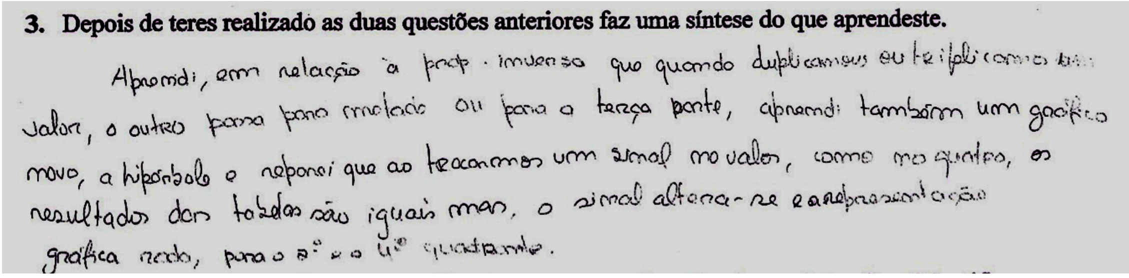


Figura 6. Produção de Ana (Q 2 da tarefa C)

A terceira questão solicita uma síntese do que tinham aprendido. Ana reconhece que a mudança no sinal da constante corresponde a uma representação gráfica em quadrantes diferentes (figura 7):



3. **Depois de teres realizado as duas questões anteriores faz uma síntese do que aprendeste.**

Aprendi, em relação à prop. inversa que quando duplicamos ou triplicamos um valor, o outro passa para metade ou para a terça parte, aprendi também um gráfico novo, a hipérbole e reparei que ao trocarmos um sinal no valor, como no quadro, os resultados das tabelas são iguais mas, o sinal altera-se e a representação gráfica muda, para o 2.º e o 4.º quadrante.

Figura 7. Produção de Ana (Q 3 da tarefa C)

Na entrevista, Ana confessa ter sido esta a tarefa que menos gostou de realizar, dizendo: "acho que era um bocado chata" (E). Refere que as anteriores "eram mais problemas, dava para resolver mais sem olharmos muito para o Excel, esta aqui já era mais relacionada com o Excel" (E). Perante a insistência para que explicasse melhor a sua ideia, acrescenta "podíamos resolver de outras formas, pareciam mais… esta aqui, a forma como ela aparecia… parecia mais séria…. as outras pareciam mais de brincar" (E). Parece assim considerar que um contexto puramente matemático é mais sério, ao passo que as tarefas que apresentam um contexto da vida real, não puramente matemático, são mais interessantes e envolventes. No entanto, reconhece que esta ficha é uma das mais importantes:

> Foi a que nos fez ver diferenças entre números que podem parecer semelhantes mas que alteram muito, como vimos na hipérbole, que mudou logo de quadrantes e foi o que serviu para aprofundarmos mais o nosso conhecimento sobre proporcionalidade inversa. Foi a partir desta ficha que começámos a perceber melhor e a resolver exercícios com mais fluência (E).

Em relação aos métodos formais, Ana escreve a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa. Além disso, consideramos que foi importante para perceber o significado da indicação do domínio da variável independente.

Tarefa D

Para Ana, a tarefa D foi fácil de resolver,

> pois já percebia, já sabia ver as diferenças entre a proporcionalidade inversa e a proporcionalidade direta e entre outros casos em que se podia também representar através de um gráfico mas que não era a proporcionalidade… As funções, nesta ficha aparecem duas funções afim porque têm duas variáveis e outro resultado, e esta ficha deu para perceber várias diferenças entre eles. (E).

Ana resolve a ficha com a colega, explicando-lhe como proceder (ver a figura 8):

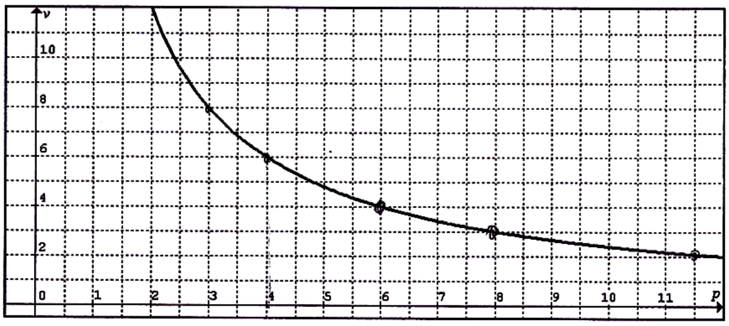


Figura 2: Representação gráfica

2.1. As duas grandezas, volume e pressão do gás, são inversamente proporcionais. Justifica esta afirmação.

Sim, são inversamente proporcionais, pois quando o volume aumenta a pressão diminui, proporcionalmente e quando a pressão aumenta o volume diminui proporcionalmente

2.2. Qual é a constante de proporcionalidade?

$K = 24$

2.3. Escreve a expressão algébrica que define o volume (*v*) em função de (*p*).

$V = \frac{24}{p}$

Figura 8. Produção de Ana (Q 2 da tarefa D)

> A.: A constante é tipo isto: aqui quando tu tens a tocar num ponto, depois tens de coordenada 8 e 3, olha tens aqui 4 e 6, 6 e 4… estás a ver? Então tu vais ter de multiplicar este número e este, que é o que corresponde ao *y* vezes o *x* que vai dar o *k*, que é a constante.
> V.: Então um vezes o outro tem de dar sempre 24?
> A.: Tem ! [risos]

Como a colega ainda não respondeu à alínea 3 da questão anterior, Ana continua a ajudá-la: "Aqui o volume é *v,* é o *y*, por exemplo, e tu para saberes o valor do *y* tens de dividir a constante pelos números da pressão…". Revela assim o seu entendimento da constante de proporcionalidade e a forma que usa para escrever a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa através da interpretação da representação gráfica.

Relativamente a esta tarefa, Ana diz que "foi um apanhado geral sobre os tipos de proporcionalidade que conhecemos e podemos utilizar as funções que já podiam estar esquecidas e que deu para relembrar… e deu para perceber o que sabemos e não melhor… e essas coisas…" (E).

Entrevista

Na entrevista, após revisitar as diversas tarefas resolvidas nas aulas, Ana resolve outras tarefas. Preenche tabelas tendo em conta a natureza da proporcionalidade que existe entre duas grandezas. Escreve ainda as respetivas expressões algébricas e descreve as respetivas representações gráficas. Num dos problemas propostos faz uma associação com outro que resolveu anteriormente (figura 9):

> A.: 600 vezes 30 dá 18000… Já está!
> P.: Então explica-me lá tudo o que tu fizeste.
> A.: Primeiro, ao ler o enunciado, este enunciado era parecido a um exercício que já tinha visto no nosso livro, então fui optar por uma tabela em que pus os coelhos e a ração.

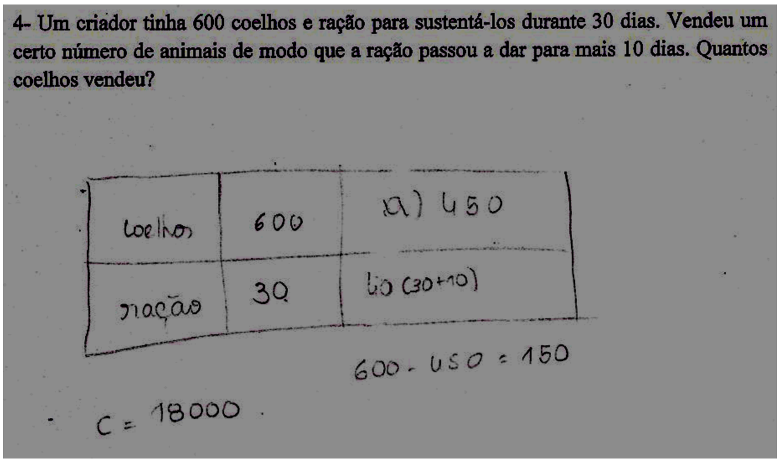


Figura 9. Produção de Ana (Q 4 da entrevista)

Ana escolhe a tabela como representação de suporte que a ajuda a organizar a informação dada e a encontrar o que é pedido. Questionada acerca da escolha das variáveis, responde:

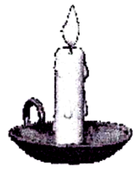
> A.: Porque sabemos que o criador tinha 600 coelhos e tinha ração para 30 dias, então se ele vendesse alguns coelhos a ração iria aumentar se os coelhos diminuíssem ou iria diminuir se os coelhos aumentassem […].

Ana explica que são essas grandezas que variam no problema e explica depois também como procede para chegar à solução.

Apresentamos a última situação proposta na figura 10.

5. A Carlota acendeu uma vela e a cada quarto de hora mediu e registou a sua altura.

Altura (cm)	30	15	10
Tempo (min)	15	30	45



a) A manter-se a mesma relação entre a altura da vela e o tempo consideras que existe algum tipo de proporcionalidade nesta situação? Porquê?

Figura 10. Enunciado da Q 5 da entrevista

> A.: A manter a mesma relação existe proporcionalidade inversa, pois ao fazermos a constante ela dá-nos sempre 450, pois 30 vezes 15 e 15 vezes 30 e 10 vezes 45 dá-nos 450. Existe proporcionalidade inversa.

Ana utiliza a noção de constante de proporcionalidade para verificar a existência de proporcionalidade inversa. Para resolver a última alínea, começa por observar os gráficos (figura 11):

> A.: Ao princípio podem ser todos, porque são todos hipérboles, mas aqui altura… 15… 30… 45… sim, pode ser o gráfico B.
>
> P.: Porquê?
>
> A.: Ao olharmos para a tabela podemos ir à procura dos pontos no gráfico. Sabemos que o *x* é o tempo pois aparece aqui nos números, é fácil de perceber, e o *y* é a altura. Então, ao irmos à procura do tempo aos 15 minutos, temos de ter a altura de 30, o que acontece no gráfico B. Ao vermos, temos 30, vemos que a hipérbole passa entre 20 e 10, então podemos pensar que é 15, mas para termos a certeza vamos olhar para o próximo ponto porque sabemos que vai ter de nos dar o valor exato, 10, e dá-nos porque passa em cima do valor 10.

e) Dos gráficos representados no referencial cartesiano seguinte haverá algum que possa representar a relação entre a altura da vela e o tempo que esta demora a arder? Se sim, indica qual deles é justificando a tua resposta.

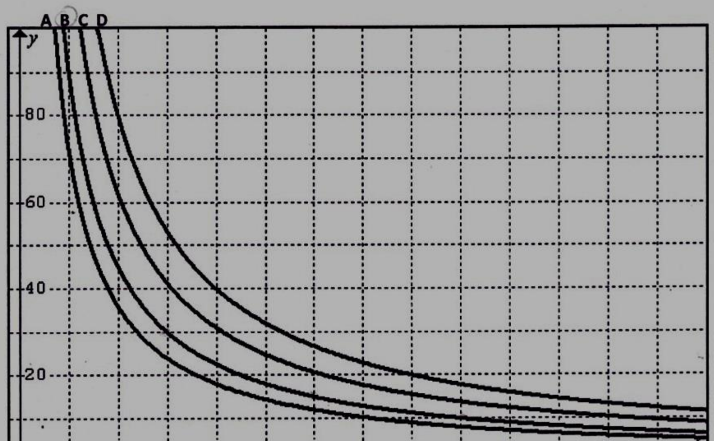


Figura 11. Seleção do gráfico (Q 5e da entrevista)

A identificação dos pontos da tabela com as coordenadas do gráfico foi essencial para a tomada de decisão quanto à escolha da representação gráfica B.

A concluir

Ao longo do estudo, Ana tem oportunidade de lidar com representações tabelar, gráfica e algébrica. Além disso, antes da aprendizagem formal do uso da expressão algébrica, tem diversas experiências informais em situações de proporcionalidade inversa, como sugerem Herscovics e Lincheviski (1994) e Silvestre e Ponte (2009).

Na tarefa A, Ana consegue resolver problemas intuitivamente recorrendo a um raciocínio inversamente proporcional. O facto de ter algumas dificuldades no primeiro problema dessa tarefa e não ter quaisquer dúvidas no segundo pode estar relacionado com a familiaridade dos contextos das situações apresentadas, como sugerem Kulm (1984) e Mason, Johnston-Wilder, e Graham (2005). Na tarefa B, a aluna é levada a escrever a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa tendo como suporte o trabalho realizado na folha de cálculo. Tal como referem Haspekian (2005) e Friedlander (1998), a folha de cálculo pode apoiar o percurso dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra. A tarefa C, por ter um contexto puramente matemático, fez com que a aluna não se envolvesse fortemente (Mason et al., 2005). No entanto, a partir do momento em que aprende a utilizar a expressão algébrica para resolver as situações de proporcionalidade inversa, utiliza-a como *controle*, para identificar se, em determinada situação, existe ou não proporcionalidade inversa. Embora nem sempre a escreva de imediato, parece ser com base nessa relação que ela pensa para responder às questões. A tarefa D permitiu a Ana fazer uma revisão em situações de natureza diversa. Neste momento a aluna já tem destreza na utilização das diferentes representações estudadas, especialmente na sua conversão, o que é fundamental no processo de aquisição de conhecimento (Duval, 2006).

Na entrevista, a aluna utiliza recorrentemente a expressão algébrica de proporcionalidade inversa para resolver as situações propostas. No entanto, o uso da expressão algébrica não surge de forma isolada, mas sim em conjugação com tabelas ou gráficos. São bastante visíveis as conexões que a aluna faz entre as várias representações e mostra facilidade nas conversões de umas para outras, o que constitui uma forte evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico da aluna no estudo deste tópico (Friedlander & Tabach, 2001). Tanto na resolução das várias tarefas como na entrevista, as dificuldades que sentia inicialmente foram-se dissipando, evidenciando no final uma aprendizagem significativa do conceito de proporcionalidade inversa. Verificamos que os contextos dos problemas propostos começam por constituir uma condicionante para a aluna ou eram um fator decisivo para o seu envolvimento. Por fim, a aluna conhece métodos que lhe permitem decidir se está perante uma situação de proporcionalidade inversa ou não e os contextos já não influenciam a sua destreza na resolução dos problemas.

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bickmore-Brand, J. (1990/1993). Implications from recent research in language arts for mathematical teaching. In J. Bickmore-Brand (Ed.), *Language in mathematics* (pp. 1-9). Portsmouth, NH: Heinemann.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, *91*(50), 382-383.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A.A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Kulm, G. (1984). The classification of problem-solving research variables. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 1-21). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Mason, J., Johnston-Wilder, S., & Graham, A. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Sage.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Silvestre, A., & Ponte, J. P. (2009). Resolução de problemas de valor omisso: Análise das estratégias dos alunos. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds), *Números e estatística: Reflectindo o presente perspectivando o futuro*. Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Vergnaudg, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.