Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

"Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra

Hélia Jacinto[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Escola Básica José Saramago e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, helia_jacinto@hotmail.com
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Este artigo aborda a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias no âmbito de um Campeonato extraescolar – o Sub14. A investigação, de natureza qualitativa, apoiada em diversos tipos de dados, visa compreender de que forma uma concorrente coloca em interação os seus conhecimentos matemáticos e a sua fluência tecnológica para solucionar dois problemas do campeonato, com recurso ao GeoGebra. Os dados revelam que a jovem utiliza o programa como uma ferramenta-para-pensar, e que é o reconhecimento das potencialidades de ação do GeoGebra em estreita articulação com as suas aptidões que geram esta atividade de resolução de problemas. Assim, uma forma de compreender e caraterizar a influência mútua entre literacia tecnológica e aptidão matemática do sujeito consiste em reconhecer e descrever aquilo a que chamaremos a sua literacia tecno-matemática.*

Palavras-chave: Competições matemáticas; resolução de problemas; literacia tecnológica; literacia tecno-matemática; GeoGebra.

Atividades matemáticas para além da sala de aula

Nos últimos anos têm surgido inúmeras competições matemáticas extracurriculares com o intuito de fomentar o gosto pela disciplina e complementar as aprendizagens formais. Apesar da popularidade, poucos são os estudos que se debruçam sobre este fenómeno, pelo que alguns autores frisam a necessidade de maior compreensão sobre essas atividades, em particular as que assentam em contextos tecnologicamente ricos e são extensões do currículo escolar (Barbeau & Taylor, 2009).

O Campeonato de Matemática Sub14®, organizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, destina-se a alunos de 7.º e 8.º ano do Algarve e Alentejo. Os concorrentes acedem a um problema publicado quinzenalmente na página *web* do Sub14 e enviam a sua resolução por correio eletrónico, num formato à sua escolha, para a comissão organizadora. As regras definem que é necessário apresentar o raciocínio e o processo de resolução com detalhe e clareza.

Estudos anteriores, com foco no fenómeno "resolução de problemas de matemática com tecnologias", revelaram o elevado grau de sofisticação tecnológica dos participantes na apresentação das suas resoluções, cuja fluência é desenvolvida, sobretudo, fora da sala-de-aula (Jacinto & Carreira, 2012a). Identificaram-se, ainda, determinadas características dos resolvedores de problemas, observando-se uma certa concomitância entre o uso de conhecimento matemático e do conhecimento da tecnologia durante essa atividade. Outro conjunto de evidências ilustra diferentes modos de pensar e de agir sobre um mesmo problema, recorrendo a uma mesma ferramenta, o que constituiu um forte indício de como o uso da tecnologia modifica e transforma a atividade de resolução de problemas (Jacinto & Carreira, 2012b; Jacinto & Carreira, 2013).

Pretende-se aqui compreender e clarificar de que modo o conhecimento matemático e a fluência tecnológica se inter-relacionam, na atividade de resolução de problemas de uma concorrente, quando recorre ao GeoGebra para solucionar e exprimir a solução de alguns problemas do campeonato.

Literacia para o século XXI

Vivemos numa sociedade de tal forma *e-permeada* (Martin & Grudziecki, 2006) e matematizada que se tem vindo a assistir a uma significativa transformação nas formas de representação do conhecimento. As representações digitais estão a modificar a natureza do conhecimento matemático, pelo que a capacidade para compreender como é que a informação se transforma em conhecimento é uma faceta fundamental, indispensável à existência plena de um indivíduo no século XXI (Noss, 2001).

Quem são estes jovens que resolvem problemas no computador?

Várias propostas teóricas têm sido avançadas com o fim de contribuírem para uma compreensão mais profunda dos seres humanos em ação no mundo tecnológico. Consideraremos neste estudo a contribuição teórica de Borba e Villarreal (2005), apoiada nas ideias de Lévy (1990) e consistente com a perspetiva de Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), que tem por base o argumento de que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana, e de que o próprio conhecimento resulta de uma simbiose entre os seres humanos e a tecnologia com que agem. Essa estreita relação origina uma nova entidade – “humanos-com-media” – metáfora que explica como o pensamento é reorganizado na presença de tecnologias. Os autores recorrem a duas noções basilares para fundamentar esta construção teórica: por um lado, consideram a natureza social e coletiva da cognição e, por outro, assumem que a própria cognição compreende as ferramentas que fazem a mediação da produção de conhecimento. Os *media* são considerados parte constitutiva do sujeito que age, não se limitando a auxiliar ou complementar a atividade, pelo que as ferramentas tecnológicas que são usadas para comunicar, para produzir ou representar ideias matemáticas, têm influência no tipo de matemática e de pensamento matemático que resultam dessas ações. Perspetiva-se, portanto, que a introdução de uma ferramenta no sistema humanos-com-media impele modificações ao nível da atividade, isto é, o coletivo humanos-com-media altera-se consoante o tipo de *media* que o integre: diferentes coletivos originam diferentes modos de pensar e de conhecer. Por exemplo, o conhecimento matemático produzido por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquele que é produzido por humanos-com-GeoGebra (Villarreal & Borba, 2010).

Como interagem com a tecnologia?

Na origem da produção de diferentes tipos de conhecimento está o reconhecimento, pelo sujeito, das *possibilidades de ação* (*affordances*, em inglês) com a ferramenta. Esta noção, atribuída a Gibson (1979), define o conjunto de particularidades arrogadas a uma dada ferramenta tecnológica que convidam o indivíduo a executar uma ação sobre ela.

Mais recentemente, Chemero (2003) defende que "percecionar as possibilidades de ação é colocar atributos, é observar que a situação possibilita uma certa ação" (p. 187). Esta posição sustenta que as *possibilidades de ação* emergem das interações entre o agente e o próprio objeto (Chemero, 2003; Greeno, 1994). Mas, apesar de a perceção das *possibilidades de ação* ser condição prévia para que exista atividade, nem sempre a sua existência determina que essa atividade ocorra. Para Greeno (1994), dado que a expressão "possibilidades de ação" se refere a tudo o que existe no sistema, que contribui para o tipo de interação que ocorre, torna-se necessário recorrer a uma expressão que designe tudo o que existe no agente, que também contribui para essa mesma interação, e propõe as designações "capacidade" ou "aptidão". Esta relação intrínseca traduz-se numa impossibilidade de separar as *possibilidades de ação* da *aptidão* do agente, isto é, as *possibilidades de ação* e a *aptidão* não são especificáveis na ausência uma da outra.

Que conhecimento é posto em ação durante esta atividade?

Importa, pois, clarificar o que se entende por "aptidão". Até meados dos anos sessenta, perdurou uma certa ideia de que ser-se letrado, ter literacia, era possuir um conjunto de destrezas de índole técnica: ler, escrever, calcular. Bélisle (2006), tendo estudado a evolução histórica do conceito de literacia, organizou as diferentes visões em três modelos: o *modelo funcional*, o *modelo de prática sociocultural* e o *modelo de* *aquisição de poder intelectual*, segundo o qual "a literacia não só providencia os meios e as capacidades para lidar com textos escritos e números (…) mas confere um enriquecimento profundo e, eventualmente, envolve uma transformação ao nível do pensamento humano" (p. 54). Este empoderamento intelectual, associado às novas "ferramentas cognitivas", tem sido suporte para o desenvolvimento de conceitos como o de literacia tecnológica ou digital.

O projeto DigEuLit (Martin, 2006) propunha-se desenvolver um referencial teórico que permitisse a professores e alunos europeus partilhar um entendimento comum sobre o que constitui a literacia digital, que é vista como a capacidade de ter sucesso nas interações com as ferramentas eletrónicas que tornam possível o mundo do século XXI.

Tabela 1 – Processos da literacia tecnológica (adaptado de Martin & Grudziecki, 2006)

Processo	**Tarefa digital**
Definição	Definir claramente a tarefa ou o problema a ser resolvido, bem como as ações que, previsivelmente, serão necessárias.
Identificação	Identificar os recursos digitais necessários para resolver o problema / completar a tarefa.
Acessibilidade	Localizar e obter o recurso digital necessário.
Avaliação	Avaliar a possibilidade de concretização, a precisão e a fiabilidade do recurso digital bem como a sua relevância para a resolução do problema / tarefa.
Interpretação	Compreender o significado emanado pelo recurso digital.
Organização	Organizar e definir os recursos digitais de forma a permitir a resolução do problema / a realização da tarefa.
Integração	Aliar diferentes recursos digitais de forma a encontrar uma combinação relevante para o problema / tarefa.
Análise	Examinar recursos digitais a partir de conceitos e modelos que permitam solucionar o problema / realizar a tarefa com êxito.
Síntese	Combinar recursos digitais de novas formas para permitir solucionar o problema / realizar a tarefa.
Criação	Criar novos objetos de conhecimento, unidades de informação ou outros produtos digitais que irão contribuir para a resolução do problema / realização da tarefa.
Comunicação	Interagir de forma relevante com outros enquanto se lida com o problema / tarefa.
Disseminação	Apresentar a solução ou os produtos a outros.
Reflexão	Considerar o sucesso do cumprimento da tarefa e refletir sobre o seu próprio desenvolvimento enquanto pessoa com literacia digital.

Este referencial pressupõe que a aprendizagem é uma atividade construtiva, reflexiva e social pelo que, entre outros, a literacia digital envolve: a aquisição e a utilização de conhecimentos, técnicas, atitudes e características pessoais do indivíduo, como a capacidade de planificar, executar e avaliar ações digitais na resolução de problemas reais, e ainda a aptidão para refletir sobre o seu desenvolvimento. O *framework* desenvolvido faz emergir treze processos (Tabela 1) executados com uma ferramenta digital, sobre um qualquer recurso digital, no contexto específico de uma tarefa ou problema (Martin & Grudziecki, 2006).

Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson e Kent (2002), num estudo centrado em atividades laborais, identificaram uma interdependência entre a utilização das tecnologias da informação e os conhecimentos matemáticos dos trabalhadores que, segundo os autores, contribuía para uma transformação no tipo de capacidades matemáticas necessárias no mundo do trabalho. Esta relação de dependência constituiu a origem do termo Literacias Tecno-matemáticas (LTm), noção que envolve três aspetos essenciais: (i) o contexto em que a atividade decorre; (ii) a matemática necessária à ação e (iii) as ferramentas tecnológicas necessárias à ação (Hoyles, Noss, Kent, & Bakker, 2010). O termo Literacias Tecno-matemáticas designa o conhecimento matemático funcional mediado por ferramentas tecnológicas e está ancorado em contextos específicos de trabalho.

Metodologia de investigação

Este estudo, visando compreender a influência mútua entre conhecimento matemático e fluência tecnológica na atividade de resolução de problemas com tecnologias, segue uma abordagem naturalista que envolve técnicas qualitativas de recolha, sistematização e análise de dados (Quivy & Campenhoudt, 2008).

Reporta-se, aqui, o caso de uma concorrente, de nome fictício Jéssica, que se destacou em trabalhos anteriores (Jacinto & Carreira, 2013) por revelar à-vontade na utilização de ferramentas tecnológicas para resolver os problemas do campeonato, em particular o GeoGebra. O processo de recolha documental envolveu coligir as produções da concorrente em duas edições do Sub14, bem como todas as mensagens eletrónicas trocadas com a comissão organizadora. Realizou-se uma entrevista semiestruturada à concorrente, gravada em suporte vídeo, focando aspetos da aula de matemática e da sua participação no Sub14, incluindo um momento dedicado a relembrar algumas resoluções submetidas ao Campeonato.

Selecionaram-se para análise mais detalhada as produções da concorrente em dois problemas da edição 2011 do Sub14, que a concorrente resolveu recorrendo ao GeoGebra. Enquanto estes dados (ficheiros GGB e respetivos protocolos de construção, justificações, e-mails) foram analisados com a intenção de revelar interações entre conhecimento matemático e fluência tecnológica nas suas resoluções com o GeoGebra e outras ferramentas tecnológicas generalistas, as informações recolhidas por entrevista sustentam um enquadramento geral das características da jovem enquanto aluna, resolvedora de problemas ou utilizadora de tecnologias.

Os dados provenientes desta diversidade de fontes foram organizados e analisados à luz das perspetivas teóricas discutidas, para ilustrar o caso "Jéssica a resolver problemas com o GeoGebra" e assim obter uma maior compreensão de como incorpora conhecimentos matemáticos e fluência tecnológica na resolução destes problemas.

Jéssica a resolver problemas com o GeoGebra

A Jéssica participou em duas edições do Sub14, durante os seus 7.º e 8.º anos. Sempre demonstrou muito empenho, quer na disciplina de Matemática, quer no Campeonato. Na escola gosta de ter boas notas e esforça-se para isso, embora reconheça que tem algumas facilidades. Não gosta muito de trabalhar em grupo, mas não se importa de ajudar os colegas quando precisam. No Campeonato o seu desempenho é exemplar: responde sempre dentro do prazo estabelecido, prima pela clareza, completude e correção das suas respostas, e orgulha-se disso.

Embora não seja habitual resolver problemas do género dos do Sub14 nas aulas, nem tampouco utilizar tecnologias para além da calculadora, desenvolveu um gosto muito particular pelos desafios e pela utilização de algumas ferramentas, como o GeoGebra. Este interesse foi motivado pela professora de Matemática, de quem gosta muito, porque a incentiva a participar em inúmeras atividades e já a acompanhou à Universidade do Algarve a uma final do Sub14. É muito autónoma, na escola e em casa, mas não se inibe de procurar ajuda sempre que enfrenta alguma dificuldade. Para resolver alguns problemas do Sub14, a Jéssica contou com ajuda da professora que lhe fazia perguntas sobre o problema ou dava dicas, mas nunca lhe dizia a resposta diretamente. Ocasionalmente, pesquisou na Internet sobre alguns conteúdos que ainda não tinha dado nas aulas, mas que imaginava serem úteis para resolver determinado problema.

Segundo a Jéssica, a sua professora também utilizava com bastante regularidade o GeoGebra como forma de ilustrar alguns aspetos dos conteúdos que lecionava.

> J: Como já disse usamos muito as tecnologias. Nós temos o quadro de… de caneta, e depois temos o quadro interativo. E utilizamos muito. Quando estivemos a dar geometria e isometrias utilizámos muito o GeoGebra.
>
> I: Quando dizes "utilizam", é a professora que faz?
>
> J: Exatamente. E nós vemos.

Esta utilização frequente, embora centrada na professora, incentivou a concorrente a instalar o programa no seu computador pessoal e a explorá-lo em casa, com calma.

Parece gostar bastante dos problemas de geometria porque, numa primeira reflexão, pode usar o GeoGebra para aperfeiçoar o arranjo gráfico das suas resoluções. A propósito da sua resolução do Problema 5 da edição 2012, a Jéssica afirma:

> J: "Eu acho que fui direitinha ao GeoGebra. Sabia que era qualquer coisa de geometria, pronto! (…) vi que formava um triângulo, que isto formava um triângulo e que pondo assim de uma maneira muito simples era só fazer a área toda disto tudo e tirar a área do triângulo, que era fácil: base vezes altura sobre dois. E depois assim… «Ah, boa! Geometria! Vou por isto tudo direitinho!» [e aponta com orgulho para as suas construções em GeoGebra]."

Os seus instrumentos de trabalho são, por norma, o computador (mas raramente imprime o enunciado), um bloco de notas, muitas canetas coloridas e uma calculadora.

> J: Aaa… normalmente é sempre primeiro bloco de notas e caneta, depois o Word e depois vou sempre a… vou sempre ao GeoGebra ou a outro programa para adicionar ao Word, para ficar assim um trabalho mais completo.
>
> E: Mas… só vais quando já resolveste?
>
> J: Sim, mas… também depende. Se o GeoGebra ou outro programa me ajudar a perceber melhor o problema, então vou primeiro a esse programa e depois é que apresento no Word.
>
> E: Ok, então também usas enquanto ainda não chegaste à solução…
>
> J: Sim, por exemplo, num dos quadrados que é esse [Problema 5] eu fui primeiro ao GeoGebra para perceber bem como é que aquilo era, e depois é que descobri "Ah, aquilo faz um triângulo e depois é só tirar a área do triângulo". Aí tive que ir primeiro ao GeoGebra para perceber melhor.

A Jéssica parece, assim, reconhecer outras potencialidades do GeoGebra além do embelezamento da resolução, nomeadamente, o facto da manipulação da construção lhe permitir "perceber bem" o problema. Embora identifique casos esporádicos em que isso acontece, este papel do GeoGebra está patente noutras resoluções.

O problema "Um quadrado dividido"

Na figura está representado um quadrado que foi dividido em 14 quadrados representados a amarelo, de dimensões diferentes e inteiras, e 1 rectângulo representado a branco, também de dimensões inteiras. O rectângulo branco tem 30464 cm² de área.

Qual é a área do quadrado grande?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

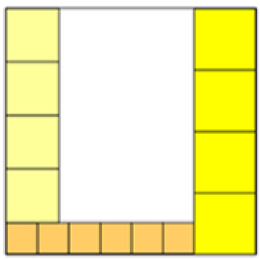


Figura 1 – Enunciado do problema 9, edição 2011

O ficheiro enviado pela Jéssica contém uma representação da figura do enunciado do problema e um pequeno texto que apresenta, simultaneamente, uma legenda para melhor interpretação da sua construção e a resolução do problema com a determinação da área pedida (Figura 6). O protocolo de construção revela que este trabalho requereu um total de 195 passos, sendo os dois últimos a inserção de uma imagem com quatro parágrafos de descrição (do exterior) e a inserção de texto com a resposta final (no GeoGebra).

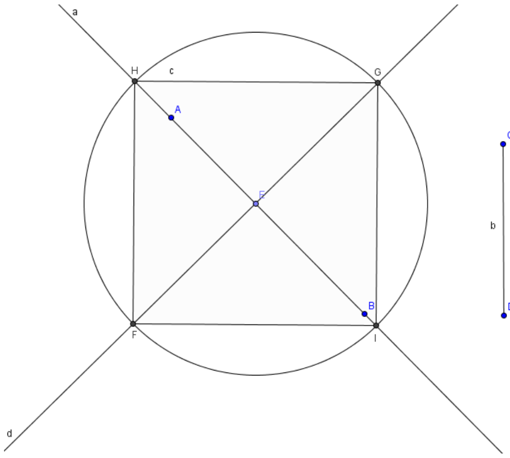


Figura 2 – Construção do quadrado inicial

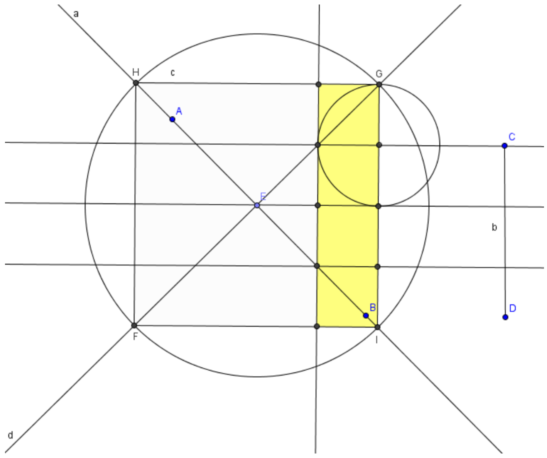


Figura 3 – Construção dos quadrados à direita

Em traços gerais, a Jéssica começa por representar o quadrado maior que sustenta a construção: desenha duas retas perpendiculares e uma circunferência com centro no ponto de interseção dessas retas e com um raio de comprimento definido pelo segmento CD (portanto, variável). Em seguida dedica-se à construção dos quatro quadrados à direita: marca pontos médios, constrói uma circunferência e, através de retas paralelas, perpendiculares e suas interseções, constrói os quatro polígonos regulares (Figura 3).

Quanto à construção dos quadrados inferiores (Figura 4), a Jéssica começa por marcar o ponto médio, R. Seguidamente utiliza uma reflexão do vértice I relativamente à reta vertical que passa por F'$_1$ para obter o ponto I', e designa o ponto médio do segmento I'F'$_1$ por S. Constrói então uma circunferência de centro R, a passar por I', e designa U à sua interseção com FI. Encontra V, o ponto médio de FU. Continua com a construção de retas paralelas, circunferências com determinado centro e raio, e determina interseções até concluir a representação dos quadradinhos inferiores. De forma análoga, constrói os quatro quadrados em falta no lado esquerdo (Figura 5).

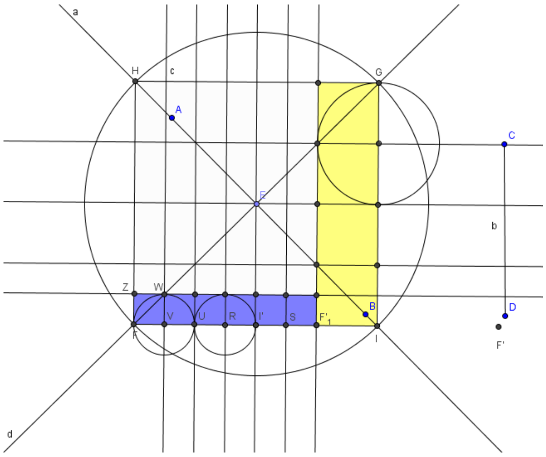


Figura 4 – Construção dos quadrados inferiores

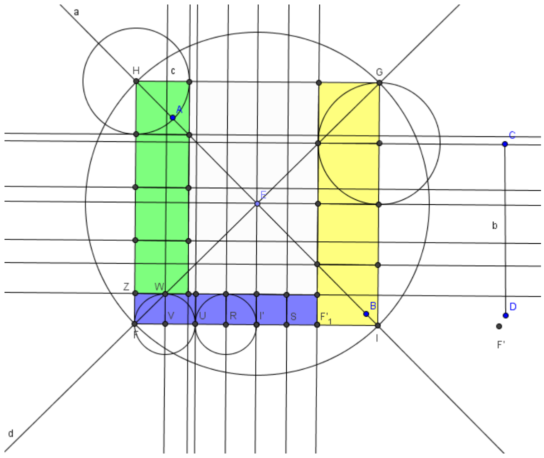


Figura 5 – Construção dos quadrados à esquerda

Em seguida destaca alguns aspetos do seu trabalho, colorindo polígonos e acrescentando quadradinhos exteriores ao quadrado inicial e algumas circunferências, em baixo à esquerda, que permitem identificar visualmente as relações entre os diversos comprimentos (Figura 6). À direita, acrescenta uma legenda que ajuda a interpretar a sua produção e a quantificar as relações referidas. Posteriormente, define como incógnita a medida do lado do quadradinho azul e, recorrendo às relações identificadas, estabelece que esse valor desconhecido é a solução da equação $4{,}25x \times 7x = 30264$. Com esse valor, determina o comprimento do lado do quadrado maior e, em seguida, a sua área.

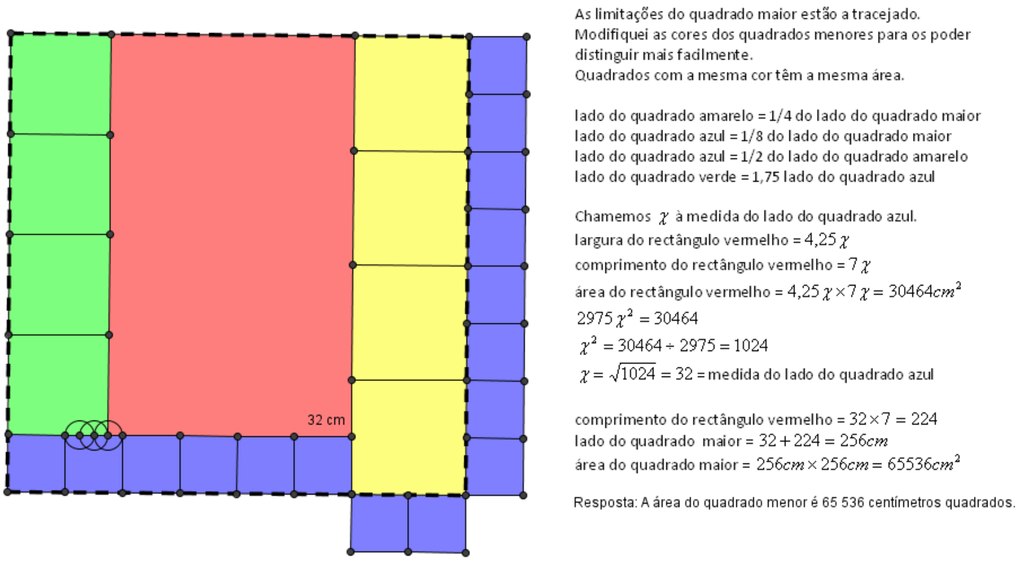
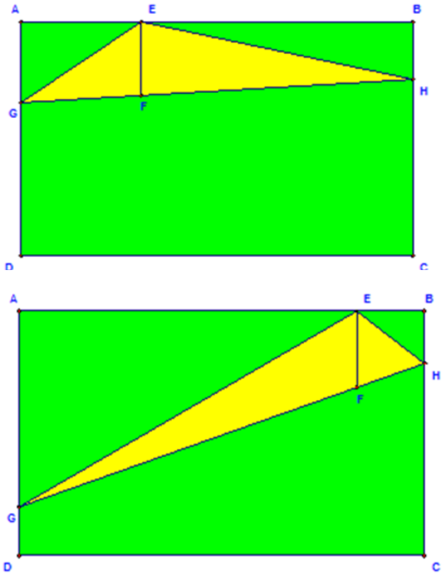


Figura 6 – Aspeto final da resolução do problema

O problema "A marcação do canteiro"

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva retangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do retângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH].

No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do retângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!

Figura 7 – Enunciado do problema 6, edição 2011

A Jéssica também recorre ao GeoGebra para simular a construção do relvado retangular e do canteiro triangular (Figura 8). Começa por representar dois pontos, A e B, e a reta que passa por eles, designada por *a*, que servirá de suporte ao lado direito do retângulo. Marca um ponto C sobre essa reta, mas fora do segmento AB, e uma reta *b*, perpendicular à reta *a* que passa por C. Sobre esta reta marca o ponto D e por ele traça a reta *c* que é perpendicular a *a*. Em seguida marca o ponto E sobre a reta inicial *a* e por ele fez passar uma reta perpendicular a *a*, designada por *d*. Encontra então os pontos F, G e H, resultantes da interseção de várias retas.

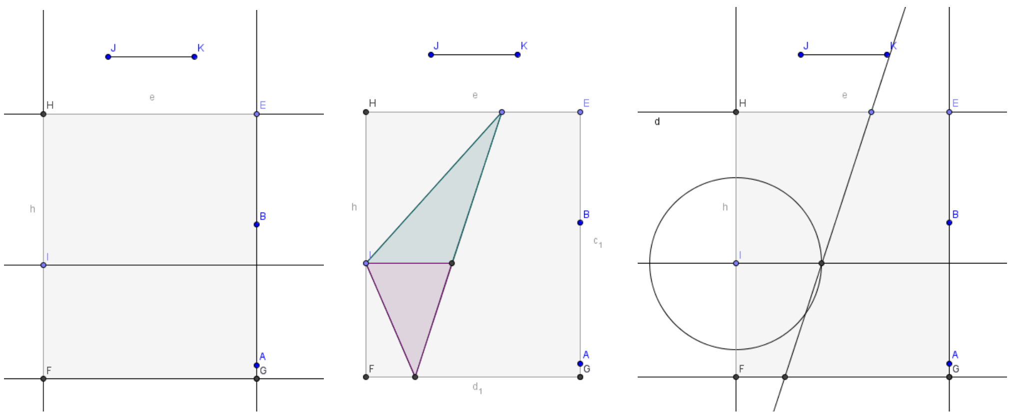


Figura 8 – Três fases da construção

Em seguida constrói o quadrilátero EHFG, usando as Ferramentas de Polígono, o ponto I sobre o segmento HF, e por I faz passar uma perpendicular a HF, ou seja, a reta *f*.

O próximo passo da concorrente leva-a a construir um seletor: marca dois pontos, J e K, fora do retângulo, e constrói o segmento JK. Regressa agora à construção e desenha uma circunferência com centro no ponto I e com raio de comprimento igual ao do segmento JK. Ao ponto de interseção da circunferência com a reta *f*, interior ao retângulo, chama L, e constrói também o segmento LI, a que corresponde a "vara". Sobre o segmento HE marca o ponto M, e por L e M traça a reta *j*. Ao ponto de interseção de *j* com o segmento DC chama N. Em seguida, constrói o triângulo NIM, o triângulo ILM e o triângulo ILN, alterando a cor do seu preenchimento.

A explicação enviada pela Jéssica completa a construção e permite acompanhar o seu raciocínio (Figura 9). A jovem reconhece que a área do canteiro triangular coincide com o valor escolhido para comprimento do lado do retângulo. Obtém esse resultado a partir da manipulação da variável "altura" de cada um dos triângulos obtidos da decomposição do canteiro triangular pelo segmento que representa a vara.

Resposta:
O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2

Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.

Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.

Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

Figura 9 - Excerto da resolução enviada pela Jéssica por e-mail

Discussão

A fluência tecnológica identificada anteriormente nas produções dos concorrentes do Sub14 era bastante visível ao nível da comunicação dos seus processos de resolução dos problemas. Mais recentemente, emergiu um conjunto de evidências que mostram como essa sofisticação tecnológica permeia também outras fases da resolução de problemas. Nestas produções desta concorrente sobressai a elevada complexidade das construções, mas estas não se limitam a ilustrar as situações descritas nos enunciados ou a complementar os cálculos apresentados. A análise das ações detalhadas da Jéssica com o GeoGebra revela a importância da construção na compreensão do problema e no deslindar de uma estratégia que lhe permita vir a obter a solução pretendida.

Este caso ilustra a complexidade da simbiose que Borba e Villarreal (2005) descrevem, pois as estratégias de resolução dos problemas revelam uma concorrente "a pensar com o GeoGebra". Jéssica revela várias outras características dos "humanos-com-media": por um lado, mostra alguma indiferença relativamente ao papel que as tecnologias desempenham na sua atividade de resolução de problemas, embora goste de mostrar que conhece a linguagem própria da era digital e que é capaz de usar uma multiplicidade de ferramentas, aprendizagens motivadas na Escola mas que decorreram sobretudo à sua conta, muito para além da sala de aula.

A concorrente reconhece e responde a uma grande diversidade de convites para a ação com o GeoGebra, pois é nessa relação simbiótica entre a utilização de conceitos matemáticos, favorecida pela representação visual, que vai compreendendo os problemas e deslindando um caminho para a sua resolução. Esta fluência em lidar com a ferramenta é revelada pela perceção daquilo que é capaz de fazer no GeoGebra, ou seja, marcar pontos, desenhar retas paralelas ou perpendiculares a outras, circunferências com determinado centro e raio, encontrar pontos médios de segmentos, fixar distâncias e transportá-las para outras construções, dividir um segmento em partes iguais, determinar a reflexão de um ponto relativamente a uma reta, usar um seletor para fazer variar o comprimento de um segmento, arrastar e explorar famílias de figuras. Curiosamente, a Jéssica opta sempre por não recorrer às ferramentas de medida. Nestes seus trabalhos, o GeoGebra assume o papel de ferramenta-para-pensar e não de ferramenta-para-calcular, pelo que as suas resoluções só ficam completas com a inclusão de uma justificação detalhada, onde explica o seu raciocínio e indica os cálculos que julga necessários. Na primeira resolução, parece ser a própria atividade de construção que lhe permite "ver as relações" entre os lados dos vários tipos de quadrados. Já no segundo problema parece ter sido a construção rigorosa, suportada pela possibilidade de uma total manipulação das dimensões dos entes geométricos, o que leva a uma visão mais abrangente do problema proposto, estendendo as várias condições e permitindo uma generalização da solução.

Tal como a teoria sustenta, é o reconhecimento das potencialidades de ação da ferramenta em estreita articulação com as aptidões da concorrente que geram atividade. Essa articulação envolve, pois, dois tipos de conhecimento: o matemático e o tecnológico, que se influenciam e inter-relacionam, pelo que nesta atividade de resolução de problemas de matemática com o GeoGebra é possível identificar vários dos processos que Martin e Grudziecki (2006) sugeriram para caracterizar a literacia digital, e que aqui se propõem como base para descrever a literacia tecno-matemática desta concorrente.

Numa primeira abordagem a estes problemas, a Jéssica começa por detetar o tema matemático envolvido, Geometria, o que remete para a identificação de um repertório matemático associado, e imediatamente reconhece o GeoGebra como o recurso digital imprescindível à resolução (*identificação*), ferramentas estas – matemáticas e GeoGebra – que já são do seu conhecimento e, portanto, às quais tem acesso garantido (*acessibilidade*), não só porque lhe permitem uma elevada precisão e fiabilidade (*avaliação*), mas também porque consegue executar determinados procedimentos e compreendê-los no âmbito do problema (*interpretação*). Tanto a atividade que a concorrente relatou como a que foi observada sugerem que a compreensão em extensão do problema e a decisão sobre o conjunto de ações que serão necessárias à sua resolução (*definição*) têm início aqui, mas não se esgotam nesta etapa.

A esta fase de "observação e decisão", segue-se a de "produção da solução". A concorrente organiza então diferentes recursos materiais, como o bloco de notas, canetas coloridas, calculadora, GeoGebra, Word, Paint, e-mail, e diversos recursos matemáticos, por exemplo, propriedades de retas paralelas ou perpendiculares, de circunferências e suas representações, determinação de áreas ou manipulação de uma expressão algébrica, e combina-os de forma relevante à criação e desenvolvimento da estratégia (*organização*, *integração* e *análise*). A partir dessa construção e da própria manipulação da construção, a Jéssica cria novos objetos de conhecimento, por exemplo, uma estratégia, uma representação, um modelo conceptual (*criação*), podendo interagir com a professora, a mãe ou a equipa do Sub14 de forma relevante para a resolução (*comunicação*). Tal como a jovem refere, e as resoluções evidenciam, a sua compreensão do problema aprofunda-se durante esta etapa de realização de construções e aquando da sua manipulação.

A última fase diz respeito ao "reportar" da atividade ou do processo de resolução dos problemas a outros de relevo, neste caso, a equipa do Sub14. Esse relato é composto pelo trabalho em GeoGebra e por uma explicação detalhada dos procedimentos: na primeira solução destaca-se uma pequena legenda, a representação das relações entre os lados dos quadrados e os cálculos necessários à solução; na segunda solução destaca-se o texto escrito, onde a Jéssica explica o seu raciocínio e prova que a área do canteiro triangular se mantém, independentemente da posição da vara (*disseminação*). O último processo mencionado por Martin e Grudziecki (2006), *reflexão*, não emerge imediatamente da análise das produções da concorrente embora o facto de as ter enviado para a equipa do Sub14 seja indicador de que considera que cumpriu a tarefa com sucesso.

O *framework* concebido para explicar a literacia tecnológica oferece grandes potencialidades para clarificar a literacia tecno-matemática na atividade de resolução de problemas com tecnologias, que constitui um conceito operacional para descrever a inter-relação entre o sujeito e a tecnologia, permitindo explicitar o que ocorre no sistema humanos-com-media na resolução de problemas matemáticos. Trabalhos futuros debruçar-se-ão sobre o aperfeiçoamento deste conceito e prosseguirão no apuramento da adaptação do *framework* aqui utilizado.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 – "Resolução de Problemas de Matemática: perspectivas sobre uma competição interactiva na web - Sub12&Sub14", e pela Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/73363/2010, da FCT.

Referências

Barbeau, E. J., & Taylor, P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Bélisle, C. (2006). Literacy and the Digital Knowledge Revolution. In A. Martin, & D. Madigan (Eds.) *Digital Literacies for Learning* (pp. 51-67), London: Facet.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York, NY: Springer.

Chemero, A. (2003). An outline of a theory of affordances. *Ecological Psychology*, *15*(2), 181–195.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. Em R. Shaw & J. Bransford (Eds.) *Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Greeno, J. (1994). Gibson's Affordances. *Psychological Review*, 101(2), 336-342.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker. A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies.* London: Routledge.

Hoyles, C., Wolf, A., Molyneux-Hodgson, S., & Kent, P. (2002). *Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council*. Relatório do Projeto. Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012a). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web-based mathematical competition. *International Congress on Mathematics Education - ICME 12*, pp. 2933-2942. Seoul: ICMI.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012b). Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com tecnologias. Em H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), *Atas do XXIII SIEM*, pp. 677-691. Coimbra: APM. ISBN: 978-972-8768-53-9.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). Beyond-school mathematical problem solving: a case of students-with-media. Em A. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the IGPME*, Vol. 3, pp. 105-112. Kiel, Germany: PME.

Lévy, P. (1990). *As Tecnologias da Inteligência. O Futuro do Pensamento na Era da Informática.* Lisboa: Instituto Piaget.

Martin, A. (2006). A European framework for digital literacy. *Digital Kompetanse*, 2, 151-161.

Martin, A., & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and Tools for Digital Literacy Development. *Innovation in Teaching And Learning in Information and Computer Sciences*, *5*(4), 249 -267.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 21-46.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Villarreal, M., & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, *42*(1), 49-62.