Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Criatividade matemática e flexibilidade de representação na resolução de problemas para além da sala de aula

Nuno Amaral[1], *Susana Carreira*[2]
[1]EB 2,3 das Naus, Lagos, nualroam@gmail.com
[2]Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Nesta comunicação pretende-se examinar a criatividade matemática associada à flexibilidade de representação, a partir de resoluções produzidas por participantes no Campeonato de Matemática SUB12 a um dos problemas da edição 2012/2013. Procurámos evidências da relação entre a criatividade expressa nas resoluções e a flexibilidade representacional manifestada, numa atividade que decorre para além da sala de aula, tendo em conta que os ambientes escolares são muitas vezes restritivos para o desenvolvimento da criatividade matemática. Concluiu-se que a representação tabular, sendo claramente apropriada para a compreensão do problema e para a construção da respetiva solução, assumiu elementos específicos e distintivos num dado espetro de resoluções, permitindo afirmar que cada participante fez criativamente uma utilização própria e flexível desta forma particular de representação matemática*.

Palavras-chave: criatividade; resolução de problemas; flexibilidade representacional; representações matemáticas; competição matemática.

Criatividade matemática para além da sala de aula

A criatividade pressupõe a manifestação de ideias ou produtos originais e inovadores adequados ao contexto e cultura onde o fenómeno se manifesta (Starko, 2010) e deve ser entendida através das habilidades e prontidão de qualquer indivíduo para criar algo de novo (Gusev & Safuanov, 2012).

Neste estudo, a criatividade é entendida, na atividade de resolução de problemas de matemática, no sentido em que desta resultam resoluções originais, diferentes e perspicazes, no contexto específico em que a atividade decorre (isto é, com alunos de determinado nível etário, para além da sala de aula, no âmbito de uma competição matemática). A criatividade traduz-se, nesse contexto, na originalidade de produtos únicos e novos, do ponto de vista de quem os constrói, diferentes dos restantes quando comparados com os demais, num determinado grupo alvo, e perspicazes na revelação do pensamento matemático que conduziu à solução, de forma clara, compreensível e esclarecedora para quem examina a resolução (por ex., o professor, os colegas, o leitor a quem se dirigem).

A criatividade é uma característica inerente ao saber matemático e embora seja, muitas vezes, associada à genialidade ou a habilidades excecionais, ela pode ser amplamente estimulada na população escolar em geral (Mann, 2005; Pelczer & Rodríguez, 2011; Silver, 1997). A criatividade dos alunos nem sempre é visível em sala de aula. No entanto, defendemos que os alunos têm imensas capacidades latentes de inovação, pensamento criativo e formas alternativas de ver as coisas que precisam de ser estimuladas para se revelarem. Por isso, é importante um clima que inclua atividades e tarefas criativas, designadamente que suscitem desafio e curiosidade, cujas resoluções estimulem o raciocínio e a comunicação matemática e em que seja dada liberdade de resolução e expressão. Devem ser atividades e tarefas pensadas, não só com o propósito de estimular os alunos com melhor desempenho em matemática, mas também aqueles que têm potencial matemático e que se veem impedidos de manifestarem as suas capacidades em contextos curriculares restritivos, centrados em regras formais e algoritmos (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2011). A liberdade de trabalhar matematicamente é fundamental, uma vez que a criatividade se evidencia quando os alunos têm a possibilidade de encontrar e utilizar os seus próprios métodos de resolução (Pehkonen, 1997). Pode ter-se todos os recursos necessários para pensar de forma criativa mas sem um ambiente favorável, gratificante e promotor de ideias novas, é muito difícil ou praticamente impossível a qualquer indivíduo exibir a criatividade que tem dentro de si (Sternberg, 2007).

As atividades de resolução de problemas, para além da sala de aula, de que é exemplo o Campeonato de Matemática SUB12®, destacam-se pelas oportunidades de realização do potencial intelectual e criativo dos alunos e pelo importante papel que desempenham no apoio à educação matemática dos jovens em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009). Oferecem circunstâncias para o desenvolvimento do poder matemático dos alunos, para além daquelas que existem no contexto escolar, tendo em conta os níveis de aptidão de cada um. São contextos que permitem, não apenas estimular as capacidades de resolução de problemas, comunicação e raciocínio, como também atrair os alunos para a matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2009). Disponibilizam o tempo de que os alunos precisam para o desenvolvimento da criatividade matemática que, muitas vezes, não existe na sala de aula. Prestam um serviço importante à educação matemática e a um grande número de alunos promissores, com potencial talento matemático, constituindo um complemento natural ao trabalho realizado na escola (Koichu & Andzans, 2009).

Nesta perspetiva, as competições matemáticas surgem como parceiros da escola, ou seja, como promotores de uma aprendizagem paralela e complementar àquela que é intencionada pelo currículo escolar.

Flexibilidade de representação e criatividade na resolução de problemas

Conhecer e lidar com representações e ser capaz de representar matematicamente, constitui uma competência que aumenta a capacidade de pensar matematicamente (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). O acesso a uma variedade de representações e a capacidade de as pôr em funcionamento contribui para o desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos (Berthold & Renkl, 2005; Harries, Lopez, Reid, Barmby & Suggate, 2008) e para fortalecer o raciocínio matemático (Ponte & Velez, 2011).

As representações não são produtos estáticos, na medida em que refletem o processo de raciocínio e o conhecimento utilizado pelos alunos na construção de relações ou de conceitos matemáticos (Steele, 2008). Podem ser caraterizadas como construções inerentes à descrição de conceitos, através de componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos e simbólicos, que retratam aspetos dos conceitos e que, ao mesmo tempo, permitem interpretar, comunicar e discutir ideias (Tripathi, 2008).

Os alunos que são capazes de recorrer a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, são mais inclinados a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009). A flexibilidade de representação é uma caraterística dos alunos que fazem escolhas adequadas de representações matemáticas, tendo em conta as tarefas em mão (Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009). No entanto, as tarefas, só por si, não definem a flexibilidade de representação, pois o conhecimento e o domínio representacional também devem ser tomados em conta (Nistal et al, 2009). Nesta investigação, entende-se a flexibilidade de representação como a capacidade de selecionar, combinar, usar e adaptar representações úteis, de acordo com as caraterísticas dos problemas a resolver.

As representações matemáticas são centrais na resolução de problemas e a sua construção, de acordo com o conhecimento matemático dos alunos, é uma etapa crucial do processo de resolução (Stylianou, 2008). O conhecimento matemático, conjugado com a liberdade para pensar profundamente e construir representações, permitem que os alunos testem e explorem com mais detalhe as suas próprias representações e estabeleçam conexões significativas, de modo a que os problemas façam sentido para si (Benko & Maher, 2006). Dar espaço para que os alunos possam construir as suas representações aumenta o sucesso na resolução de problemas, proporciona o desenvolvimento de métodos próprios de resolução e leva a que considerem e apreciem representações alternativas (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000).

A facilidade de utilização e adaptação de múltiplas representações e a habilidade de alternar entre diversas representações é parte de uma variabilidade cognitiva que permite resolver problemas com maior rapidez e precisão (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Cada forma de representação exprime elementos do raciocínio utilizado, subjacente à escolha da estratégia e à forma da sua comunicação (Preston & Garner, 2003). Quando os alunos são pensadores flexíveis, desenvolvem representações geralmente muito ricas (Steele, 2008). À medida que refletem sobre as suas ações, as suas representações podem evoluir para versões cada vez mais sofisticadas.

Os ambientes que possibilitam o uso de múltiplas representações e que promovem esse uso de forma flexível, como por exemplo o SUB12, são considerados eficazes em privilegiar a compreensão de noções matemáticas. Neste contexto, a liberdade para usar múltiplas representações permite que os alunos as escolham e explorem, de acordo com o seu grau de experiência e de conhecimento (Ainsworth, 1999). Incentivar sistematicamente os alunos a usarem várias representações, pode aumentar a consciência de que há uma diversidade de representações possíveis na resolução de um problema (Friedlander & Tabach, 2001). Por outro lado, encorajar os alunos a refletir ativamente sobre a adequação de representações específicas para situações particulares, é um meio para o desenvolvimento da flexibilidade de representação (Nistal et al., 2009).

Campo empírico e procedimentos metodológicos

O Campeonato de Matemática SUB12 (para alunos de 5.º e 6.º ano), promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, inclui duas fases distintas: a fase de apuramento, que é constituída por 10 problemas e decorre através da Internet; e a fase final, na qual os alunos finalistas participam num torneio presencial. Na fase de apuramento, de janeiro a junho, quinzenalmente, os participantes têm acesso aos problemas publicados no website do campeonato e enviam as suas resoluções por e-mail ou através de um formulário de resposta disponível na página, podendo enviar ficheiros em anexo. O presente estudo tem como objetivo investigar a relação entre a flexibilidade de representação e a criatividade matemática, fixando-se num tipo particular de representação matemática, a tabela, utilizada por participantes no Campeonato, num dos problemas da fase de apuramento.

A incidência num tipo específico de representação – a representação tabular – justifica-se pelo problema proposto, que envolve uma contagem sistemática associada a uma sequência de números naturais. Embora este problema tenha sido resolvido por diversos processos pelos participantes no campeonato, é claro que a representação tabular constitui uma representação adequada que apoia a obtenção da solução, sobretudo no caso de resolvedores que não dispõem de um conhecimento mais sofisticado, como cálculo combinatório ou progressões aritméticas, por exemplo. Por outro lado, interessou-nos saber em que sentido a construção de uma tabela pode ser original e revelar flexibilidade representacional, uma vez que, à partida, a noção de tabela parece relativamente inocente e, quase poderia dizer-se, indiscutível. Tendo em conta que o nosso propósito é compreender a criatividade matemática à luz dos parâmetros originalidade e flexibilidade de representação, optámos por considerar uma amostra de resoluções de 9 participantes em que a representação matemática essencial para solucionarem o problema foi a tabela. O pequeno número de resoluções consideradas foi intencional, na medida em que quisemos perceber como, num conjunto reduzido de produções do mesmo "género" (i.e., centradas na utilização de tabelas), se distinguem variações e particularidades que podemos relacionar com originalidade (dentro da identidade do tipo geral de representação tabular) e com flexibilidade (face à intencionalidade e à estruturação colocada na construção de cada tabela). O objetivo não se traduz numa avaliação ou medição da criatividade matemática dos 9 participantes ou das suas produções; pretende-se, antes, dar corpo a uma visão qualitativa e relativa da presença da criatividade matemática. Em certo sentido, pretendemos estudar a criatividade inclusiva (do pequeno-c, em vez do grande-C) que nos deixe ver a diversidade na aparente uniformidade (Beghetto & Kaufman, 2009).

> Tradicionalmente, os estudiosos da criatividade têm-se centrado em resultados criativos classificados como Grande-C (eminente) ou pequeno-c (quotidiano). A criatividade Grande-C centra-se em exemplos de rasgos de grande expressão criativa (por exemplo, o teorema de Pitágoras, a poesia de

Dickinson, as composições de Mozart). Em contraste, a criatividade pequeno-c concentra-se mais na criatividade da vida quotidiana, acessível a quase toda a gente (Runco & Richards, 1998). Um exemplo de criatividade do dia-a-dia poderia ser a forma criativa com que alguém organiza as plantas e flores no seu jardim, um arranjo que recebe elogios de amigos e familiares (Beghetto & Kaufman, 2009, p. 40).

Este estudo integra-se num paradigma interpretativo de investigação, adotando uma abordagem qualitativa, uma vez que nos interessa compreender o fenómeno da criatividade matemática no contexto em que ele acontece, privilegiando-se essencialmente os produtos enviados pelos participantes no campeonato por via eletrónica. Na investigação qualitativa os dados são geralmente descritivos e a fonte direta é o ambiente natural em que se produzem. Neste caso, os dados foram obtidos a partir das resoluções de alguns participantes, a um problema da fase de apuramento, que foram publicadas na página web do SUB12 (http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/).

Análise de dados

O problema considerado não exige a aplicação de conteúdos curriculares específicos (Fig. 1). Deste modo, os participantes tiveram de conceber e pôr em prática as suas próprias estratégias e representações para resolver o problema. A situação colocada no problema das chaves e dos cadeados apela a um raciocínio indutivo, na medida em que é preciso testar, uma a uma, cada chave em todos os cadeados para saber qual o cadeado que lhe corresponde. O problema refere ainda uma situação limite (a pior das hipóteses) em que só se encontra o par chave-cadeado na última tentativa, quando todos os cadeados, menos um, já foram testados e rejeitados. O raciocínio indutivo pode sugerir uma ordenação das chaves, v_1, v_2, …, v_{20}, e dos cadeados, d_1, d_2, …, d_{20}, e uma estratégia que estabelece todos os testes feitos com a chave v_1 (em 19 cadeados), com a chave v_2 (em 18 cadeados), etc., considerando que só o último cadeado combinará com a chave que está a ser testada. Assim, trata-se de pensar organizadamente no número de testes que irá ser realizado com cada chave e isso permitirá chegar ao total de testes: a soma dos primeiros 19 números naturais.

Problema7: Fechado a cadeado

Numa gaveta temos 20 cadeados e 20 chaves. Cada chave abre um e um só cadeado mas não sabemos que chave corresponde a cada cadeado. Para associar cada chave ao cadeado que lhe corresponde teremos de proceder por tentativas. Suponhamos então que uma tentativa significa experimentar uma chave num cadeado.
Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

Figura 1: Problema 7 do SUB12, edição 2012/13.

O uso de ferramentas comuns, disponibilizadas pelo computador (Word, Excel, PowerPoint), a que muitos participantes recorrem na resolução dos problemas é revelador das capacidades e competências destes alunos – matemáticas e tecnológicas (Jacinto & Carreira, 2008). O recurso ao computador conjuga dois aspetos poderosos – por um lado, é um meio de tornar a comunicação eficiente e, por outro, acentua o poder da visualização e organização da informação na atividade matemática dos alunos, o que se torna evidente nas formas de representação propostas. Desta forma, a comunicação matemática é destacada para primeiro plano, tendo por base formas eficazes de representação de ideias e processos matemáticos.

As resoluções apresentadas pelos participantes (ver Anexo) mostram que compreenderam o problema, uma vez que identificaram a informação importante e o objetivo a atingir. Foram capazes de definir e aplicar um plano, escolher uma estratégia e selecionar as representações e os recursos digitais adequados à sua execução. No que diz respeito ao raciocínio matemático produzido, as resoluções mostram a explicação dos processos e resultados, através de deduções formais e informais, expressas nas representações utilizadas.

As resoluções selecionadas associam e combinam a tabela, como elemento central, com representações icónicas, designadamente imagens, e representações simbólicas, em particular relacionadas com números e expressões numéricas, conjugadas com linguagem natural, na descrição e registo do processo desenvolvido. Em cada caso, a combinação das representações utilizadas é reveladora do modelo conceptual que está na base da solução do problema.

Em todas as resoluções, o recurso a tabelas funciona essencialmente para organizar a informação e transformá-la, de modo a revelar regularidades e a gerar uma imagem (ou modelo) da situação. No entanto, cada tabela é única, revelando diferenças significativas ao nível da forma, organização e representação da informação e evidenciando caraterísticas do raciocínio próprias de quem a construiu.

Na resolução 1, (ver Anexo) o participante recorreu a ícones representativos de cadeados e chaves, combinados com representações simbólicas, traduzidas em sequências de números naturais, por ordem decrescente, organizados numa tabela de três colunas. A primeira coluna refere-se a cadeados e indica o número de cadeados a testar; a segunda coluna refere-se a chaves e indica o número de chaves por testar; a terceira coluna refere-se ao número de tentativas atribuídas a cada caso, usando ícones representativos de cadeados-com-chave. A justificação dada por palavras – "a última chave pertence ao último cadeado" – repete-se sucessivamente após a indicação do número de tentativas e é um elemento importante para justificar o número total de tentativas.

A resolução 2 (ver Anexo) revela uma tabela com duas colunas, ainda que esta tabela tenha um caráter eminentemente gráfico. Na verdade, a primeira coluna é preenchida por uma sucessão de ícones representativos de cadeados excluídos (com a letra X a vermelho) seguida de uma outra sucessão de cadeados aprovados (com a letra V a verde), num total de 20 cadeados. De uma linha para a seguinte, diminui um cadeado excluído e aumenta um cadeado aprovado. Na coluna 2, representam-se as tentativas falhadas (correspondentes ao número de cadeados excluídos), gerando uma sequência de números naturais por ordem decrescente. Ao lado da tabela, é dada a explicação da racionalidade da mesma e do modo como esta permitiu obter o total de tentativas.

No conjunto das resoluções 3, 4, 5 e 6, (ver Anexo) a organização da informação representada nas tabelas é semelhante, tratando-se agora de tabelas de dupla entrada. Numa das dimensões são representadas as chaves e, na outra, os cadeados. Nas células das tabelas a informação registada tem diferentes sentidos e propósitos. A tabela da resolução 3 indicia o teste de cada chave (numerada) em cada um dos cadeados (numerados) e assume que o par é encontrado na última tentativa. Assim, a organização dos pares é indicada pelos elementos da diagonal, preenchidos a negrito (chave 1 - cadeado 20, chave 2 - cadeado 19, …, chave 20 - cadeado 1). A tabela pode ser lida ao longo de cada uma das duas entradas (por linhas ou por colunas). A tabela da resolução 4 tem uma estrutura idêntica mas assinala com um X cada combinação falhada entre a chave *p* e o cadeado *q*. Assim, ficam registadas as tentativas falhadas e a solução do problema é obtida, contando-se o número de células marcadas com um X. Numa coluna adicional é colocado o número de tentativas falhadas (por cada cadeado testado) e, por fim, é calculado o total. A tabela 5 usa uma ideia análoga à anterior mas recorre à cor vermelha para registar as tentativas falhadas e à cor verde (com um V) para indicar a tentativa que tem sucesso. Todas estas tabelas recorrem a alguma forma de representação visual traduzida por destaques com cores, letras ou ícones. A tabela da resolução 6, igualmente de dupla entrada, inscreve em cada célula o número de tentativas falhadas, à medida que estas se vão sucedendo, tendo em conta que a última tentativa em cada sequência foi a que teve sucesso. Assim, a função da tabela usada na resolução 6 é a de realizar a contagem ininterrupta de tentativas falhadas. É de notar que, nesta tabela, as duas dimensões não são legendadas (colunas ou cadeados), parecendo evidenciar o facto de que estas são comutáveis, pois é indiferente considerar-se cada uma das chaves a testar os vários cadeados ou cada um dos cadeados a testar as várias chaves. Neste caso, sobressai uma estratégia de contagem sistemática em vez de uma estratégia de adição do número de tentativas feitas até acontecer cada emparelhamento.

Observando as resoluções 7, 8 e 9, (ver Anexo) percebe-se que os participantes usam uma maior quantidade de texto para explicar a forma como organizaram a informação representada nas suas tabelas. Em todas elas, é facilmente compreensível a estratégia e o raciocínio utilizado para chegar à solução do problema, devido à forma como explicitam o significado da tabela construída. As resoluções 7 e 8 apresentam tabelas com uma estrutura idêntica à das tabelas usadas nas resoluções 1 e 2. No entanto, dispensam elementos figurativos e concentram-se no registo do número de tentativas (por cada chave testada nos vários cadeados). A tabela da resolução 9 destaca-se das anteriores por introduzir a ideia de soma acumulada, isto é, na coluna destinada ao número de tentativas, vai sendo feita a adição de todas as tentativas falhadas nos ensaios anteriores.

Em todas as resoluções (à exceção da tabela que funciona como ferramenta de contagem), bastou aos participantes adicionarem sucessivamente o número de tentativas ensaiadas, para cada caso, para responderem à questão colocada no problema.

Conclusões

De uma forma geral, tendo em conta o contexto e a pequena amostra selecionada, todas as resoluções revelam originalidade, uma vez que não há duas formas de representação tabular que se possam considerar iguais, dada a singularidade visível em cada uma delas (Starko, 2010). Combinam representações simbólicas, icónicas e verbais, unindo estes elementos representacionais a um dispositivo central – a tabela – para organizar e representar informação. Recorrem a imagens, destaques com cores e outro tipo de inscrições, revelando estratégias interessantes e próprias de quem as produziu (Preston & Garner, 2003). É facilmente reconhecida a flexibilidade de representação, através da forma como a tabela é construída e moldada, em cada caso, ajustando-se e adaptando-se aos propósitos de cada indivíduo para resolver o problema, resumindo o raciocínio feito e permitindo reconstruí-lo de forma clara. Para além da subtileza específica de cada uma das tabelas, a flexibilidade de representação começa pela adequação das representações tabulares utilizadas pelos participantes, revelando o seu domínio de conhecimento matemático para a resolução do problema (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). As formas de representação escolhidas e transportadas para o contexto do problema revelam também um evidente sentido estético na expressão das resoluções, o que constitui uma caraterística de alunos matematicamente criativos.

Resolver problemas, para além da sala de aula, usando as ferramentas tecnológicas disponibilizadas pelo computador, estimula os participantes a procurar formas eficazes e simultaneamente interessantes de comunicarem as suas resoluções, contribui para a riqueza das representações que produzem e para o desenvolvimento da sua criatividade matemática (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Parece evidente que as tecnologias usadas têm valor pedagógico na resolução de problemas de matemática, exibindo o desenvolvimento de competências tecnológicas, associadas à representação, inovação e criatividade, não se traduzindo numa utilização trivial das tecnologias (Jacinto & Carreira, 2008).

As tecnologias usadas permitiram aos participantes recorrer a formas de representação eminentemente visuais, como as cores, as imagens e os destaques, para darem corpo ao seu raciocínio matemático. A criatividade matemática pode, portanto, ser encarada de um ponto de vista micro-analítico, isto é, a forma como diferentes indivíduos dão corpo e fazem uso de uma estrutura tabular – uma representação geralmente vista como genérica ou indiferenciada – para resolverem e exprimirem o seu pensamento matemático, constitui uma importante evidência de originalidade e de flexibilidade representacional. Em geral, parece resultar da análise apresentada que aquilo que é novo, único e diferente, em cada uma das resoluções apresentadas, não se resume a simples detalhes superficiais mas reveste-se de sentido matemático e está associado à capacidade de cada um de criar e reinventar a representação tabular e, portanto, à sua flexibilidade representacional.

A interação entre a tecnologia, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, parece igualmente ter influência na promoção de resoluções matemáticas pessoais, inventivas e distintivas. Este fenómeno está em sintonia com as características do Campeonato de Matemática SUB12, uma vez que possibilita aos participantes a liberdade de usar os seus próprios processos e recursos, nomeadamente, digitais.

Referências bibliográficas

Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & Education*, *33*, 131-152.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009). Do we all have multicreative potential?. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 39-44.

Benko, P. & Maher, C. A. (2006). Students constructing representations for outcomes of experiments. In J. N. H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-143), Prague, Czech Republic: PME.

Berthold, K. & Renkl, A. (2005). Fostering the Understanding of Multi-Representational Examples by Self-Explanation Prompts. In B. G. Bara, L. Barsalou & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the CogSci* (pp. 250-255). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Freiman, V. & Lirette-Pitre, N. (2009). Building a virtual learning community of problem solvers: example of CASMI community. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 245-256.

Friedlander, A & Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The Roles of Representation in School Mathematics* (pp.173-185). Reston, Virginia: NCTM.

Gusev, V. & Safuanov, I. (2012). Fostering Creativity of Pupils in Russia. In *ICME 12 – Pre-Proceedings* (pp. 1513- 1518), Seoul, South Korea.

Harries. T., Lopez, P., Reid, H., Barmby, P. & Suggate, J. (2008). Observing children's inductive reasoning processes with visual representations for multiplication. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, p. 268). Morelia, México: PME.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 553-540.

Jacinto, H. & Carreira, S. (2008). "Assunto: resposta ao problema do Sub14" – A Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 434-446). Secção de Educação Matemática da SPCE.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). Does Mathematical Creativity Differentiate Mathematical Ability? In M, Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1056-1065). University of Rzeszów, Poland.

Koichu, B. & Andzans, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R. A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 286-307). Rotterdam: Sense Publishers.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. (Tese de Doutoramento não publicada), University of Connecticut, USA.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa de NCTM, 2000).

Nistal, A. A., Dooren, V., Clarebout, G., Helen, J. & Verschaffel (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(3), 627-636.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 63-67.

Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity Assessment In School Settings Through Problem Posing Tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *8*(1&2), 383-398.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim do GEPEM*, *59*, 53-68.

Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(1), 38-43.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 88-100). Rotterdam: Sense.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 75-80.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the Classroom: Schools of Curious Delight*. New York: Routledge.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*, 97-110.

Sternberg, R. (2007). Creativity as a Habit. In A-G. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 3-25). Singapore: World Scientific.

Stylianou, D. (2008). Representation as a cognitive and social pratice. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, p. 289-296). Morelia, México: PME.

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

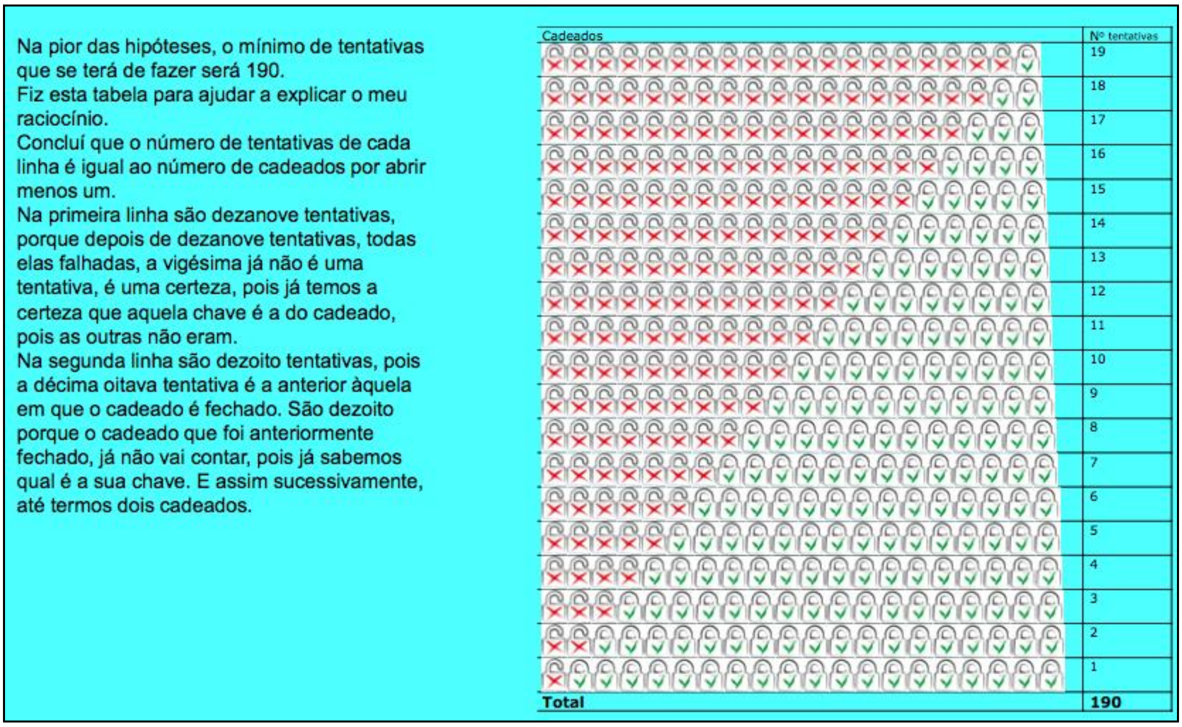
Reconhecimento

Este trabalho teve o apoio e foi desenvolvido no âmbito do projeto de investigação Problem@Web – Projeto n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

ANEXO

Resoluções de participantes com representação tabular

Resolução 1



Resolução 2

Primeiro pensámos em experimentar as chaves para cada um dos cadeados. No primeiro descobrimos que teríamos de experimentar pelo menos 19 chaves para ter a certeza que a chave era a certa. No segundo teriam de se experimentar 18 chaves e era sempre assim. Depois de somarmos todas as tentativas descobrimos que seriam precisas 190 tentativas para descobrir todas as chaves e cadeados.

	Cadeados																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chaves	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	**3**		
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**			
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	**5**				
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	**6**					
	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	**7**						
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	**8**							
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	**9**								
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**									
	11	11	11	11	11	11	11	11	11	**11**										
	12	12	12	12	12	12	12	12	**12**											
	13	13	13	13	13	13	13	**13**												
	14	14	14	14	14	14	**14**													
	15	15	15	15	15	**15**														
	16	16	16	16	**16**															
	17	17	17	**17**																
	18	18	**18**																	
	19	**19**																		
	20																			
Tentati-vas	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Resolução 3

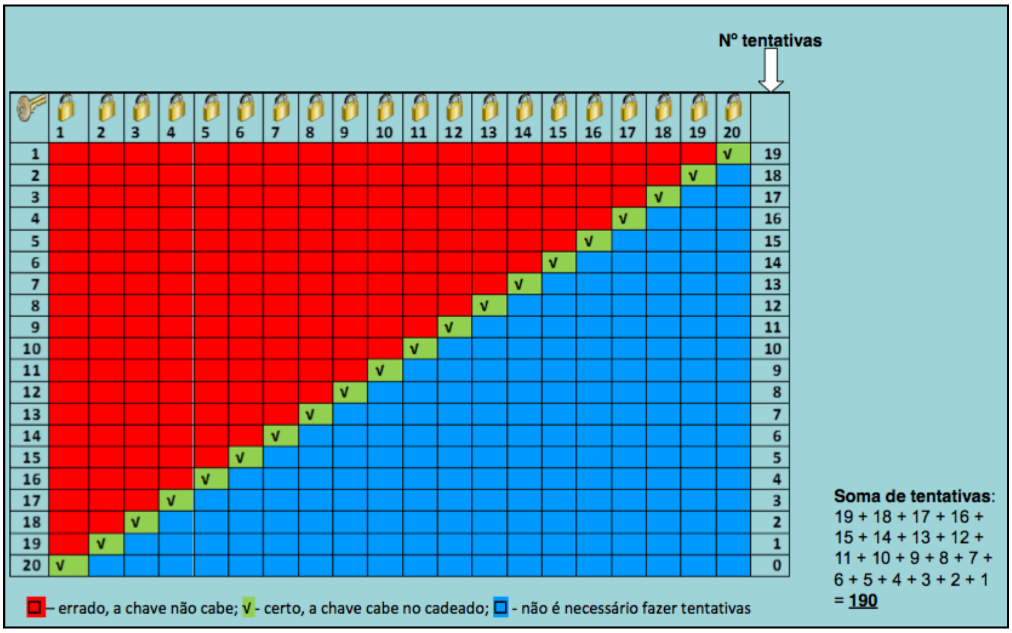
T= tentativas

Chaves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Cadeados																					
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		19 T
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			18 T
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				17 T
4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					16 T
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						15 T
6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X							14 T
7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								13 T
8	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X									12 T
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X										11 T
10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											10 T
11	X	X	X	X	X	X	X	X	X												9 T
12	X	X	X	X	X	X	X	X													8 T
13	X	X	X	X	X	X	X														7 T
14	X	X	X	X	X	X															6 T
15	X	X	X	X	X																5 T
16	X	X	X	X																	4 T
17	X	X	X																		3 T
18	X	X																			2 T
19	X																				1 T
20																					0 T

19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 190 T

Resposta: Na pior das hipóteses, o mínimo de tentativas são 190.

Resolução 4



Resolução 5

1. Li e compreendi
2. Dados: 20 cadeados e 20 chaves.
Cada chave abre um cadeado
3. Questão: Na pior da hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

4. Tabela:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	X
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	X	X
3	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	X	X	X
4	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	X	X	X	X
5	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	X	X	X	X	X
6	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	X	X	X	X	X	X
7	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	X	X	X	X	X	X	X
8	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	X	X	X	X	X	X	X	X
9	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	146	147	148	149	150	151	152	153	154	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	155	156	157	158	159	160	161	162	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
13	163	164	165	166	167	168	169	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
14	170	171	172	173	174	175	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	176	177	178	179	180	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
16	181	182	183	184	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
17	185	186	187	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
18	188	189	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
19	190	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
20	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5. Contagem: 190

6. Resposta: 190 tentativas.

Resolução 6

Inicialmente, tenho 20 chaves para 20 cadeados.
Vou numerar as chaves de 1 a 20.
Para a chave nº1 tenho 20 cadeados, dos quais 19 estão errados e só um está certo.
Por isso, na pior das hipóteses faço 19 tentativas para a chave nº1, sendo que depois destas tentativas a associo ao cadeado correto.
A chave nº2 já só tem 19 cadeados ao dispor, pelo que faço 18 tentativas para chegar ao cadeado certo, e assim sucessivamente, como está indicado nesta tabela:

chaves	tentativas	cadeados
1ª	19	20
2ª	18	19
3ª	17	18
4ª	16	17
5ª	15	16
6ª	14	15
7ª	13	14
8ª	12	13
9ª	11	12
10ª	10	11
11ª	9	10
12ª	8	9
13ª	7	8
14ª	6	7
15ª	5	6
16ª	4	5
17ª	3	4
18ª	2	3
19ª	1	2
20ª	0	1

Resposta:
Para associar todas as chaves aos respetivos cadeados, assim, são precisas 190 tentativas, no total (1+2+3+4+5+....+18+19).

Resolução 7

1.- Para resolver o problema, recolhi o número de cadeados. Depois vi que a pior das hipóteses para descobrir a chave correspondente a um cadeado, em 20 cadeados, era 19 tentativas falhadas;
2.- Para abrir o 2º cadeado tinha de fazer a mesma coisa com 19 cadeados e na pior das hipóteses tinha de fazer 18 tentativas e assim sucessivamente.
3 - Até ficar com dois cadeados, e na pior das hipóteses fiz apenas 1 tentativa falhada.
Depois somei tudo, dando 190 tentativas.
4 - Somei com o computador, mas outra das maneiras de o fazer era :
19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =
= (19 + 1) + (18 + 2) + (17 + 3) + (16 + 4) + (15 + 5) + (14 + 6) + (13 + 7) + (12 + 8) + (11 + 9) + 10 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 10 =
= 20 x 9 + 10 =
=180 + 10=
= 190

Cadeados	Máximo de tentativas
20	19
19	18
18	17
17	16
16	15
15	14
14	13
13	12
12	11
11	10
10	9
9	8
8	7
7	6
6	5
5	4
4	3
3	2
2	1
1	

Resolução 8

1.Li enunciado até o perceber.
2.Quando fui lendo, tirei os seguintes dados:
-Há 20 cadeados e 20 chaves, baralhados;
-Cada chave só corresponde a um cadeado;
3.Expermentar uma chave é o mesmo que fazer uma tentativa;
4.Quero saber: "Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?".
5.Por ser mais fácil, comecei a trabalhar com um número pequeno de chaves e igual ao número de cadeados.
6.Fui aumentando o número de chaves e de cadeados e organizei tudo numa tabela.
7.A tabela fica assim.

Chaves e cadeados	Tentativas	Soma das Tentativas
1	0	0
2	1	1
3	2+1	3
4	3+2+1	6
5	4+3+2+1	10
6	5+4+3+2+1	15
7	6+5+4+3+2+1	21
8	7+6+5+4+3+2+1	28
9	8+7+6+5+4+3+2+1	36
10	9+8+7+6+5+4+3+2+1	45
11	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	55
12	11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	66
13	12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	78
14	13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	91
15	14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	105
16	15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	120
17	16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	136
18	17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	153
19	18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	171
20	19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	190

8.Em resumo, a resposta ao problema é : O mínimo de tentativas que terei de fazer para ter a certeza que cada chave descobriu o seu cadeado são 190 tentativas.

Resolução 9