Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O sentido de adição e subtração de números racionais de futuros professores dos primeiros anos

Hélia Pinto[1], *C. Miguel Ribeiro*[2], *Nádia Ferreira*[3]
[1]Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, helia.pinto@ipleiria.pt
[2]Centro de Investigação sobre os Espaços e as Organizações; Universidade do Algarve, cmribeiro@ualg.pt
[3]Instituto Superior de Ciências Educativas, Odivelas, nadiadferreira@gmail.com

Resumo. *O conhecimento do professor é fundamental no processo de ensino e nas oportunidades de aprender que promove. Este conhecimento engloba, entre outros, saber responder ao tipo de questões que se espera que os (seus) alunos possam responder, mas também um conhecimento matemático que lhe permita responder a questões de porquês e enunciar problemas (de contexto real) que possam ser modelados por determinadas expressões. Para uma melhoria da formação é vital identificar, discutir e refletir as situações que sejam matematicamente (mais) críticas no conhecimento dos professores, de modo a delinear formas de a centrar onde é efetivamente necessária. Neste texto discutimos alguns resultados preliminares de um estudo sobre o conhecimento de futuros professores relativamente às componentes do sentido de adição e subtração de números racionais. Os resultados permitem-nos refletir sobre a necessidade de delinear formas que melhorem a formação de professores neste âmbito.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores, conhecimento matemático para ensinar, números racionais.

Introdução

Os números racionais configuram-se como um dos tópicos matematicamente críticos para os alunos. Esta criticidade poderá prender-se, entre outras, com a dificuldade de os alunos relacionarem o seu conhecimento sobre frações com o sentido de operação (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Kieren, 1988), ou mesmo ser fundamentada nas abordagens com que foram confrontados aquando do seu ensino (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993) pois, tal como refere Lamon (2007), por vezes “os professores lutam com as mesmas dificuldades e apresentam os mesmos mal-entendidos dos alunos" (p. 633).

O conhecimento do professor é considerado o fator crucial nas aprendizagens (e resultados) dos alunos (e.g., Nye, Konstantopoulos & Hedges (2004)). Assim, torna-se, portanto, essencial equacionar, de forma explícita, a necessidade de que a formação de professores se passe a focar mais no conhecimento do professor, nas tarefas de ensinar (entendidas aqui no sentido de Ball, Thames e Phelps (2008)) e nas situações matematicamente críticas identificadas (que podem ser tanto ao nível dos conteúdos como das capacidades transversais ou das estratégias de ensino). Esse foco contribuirá para um incremento do nível de significação das tarefas propostas (matematicamente ricas, desafiadoras e com efetivo significado) bem como possibilitando uma passagem suave (efetiva e profícua) dos alunos entre os diferentes tópicos e as diferentes etapas educativas.

Apesar de um reconhecimento das dificuldades dos alunos nos números racionais, bem como do papel do professor e do seu conhecimento nas aprendizagens dos alunos, a maioria das investigações sobre estes números tem, ainda, como foco essencial os alunos (e.g., Behr et al. (1993); Mamede e Silva (2012)) Assim, tem deixado à margem o professor e sua importância no processo de ensino, bem como o impacto que o seu conhecimento assume na promoção das aprendizagens e resultados dos alunos. O conhecimento do professor é aqui considerado, tendo em conta as suas especificidades quando comparado com o conhecimento (matemático) de outros profissionais, seguindo a concetualização do *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball et al., 2008).

Por conseguinte, conjugando as duas dimensões (dificuldades dos alunos e papel do conhecimento do professor), iniciou-se uma investigação que tem por foco último, contribuir para desenvolver o conhecimento dos (futuros) professores. Uma das dimensões desse projeto refere-se ao conhecimento que futuros professores revelam das diferentes componentes do sentido de operação, envolvendo números racionais. Neste texto iremos apresentar alguns resultados preliminares relativos ao conhecimento matemático para ensinar revelado por futuros professores, ao resolverem expressões numéricas que envolvem a adição e subtração de números racionais, na sua representação fracionária, e ao formularem problemas para essas expressões. Partindo desses resultados discutiremos alguns aspetos que sustentam a necessidade de delinear formas que permitam/conduzam a uma efetiva melhoria da formação de professores.

Números racionais, operações e conhecimento do professor

Os números racionais são um dos tópicos em que os alunos revelam dificuldades e onde, portanto, apresentam um sucesso reduzido (e.g., Monteiro & Pinto (2006)). Estas dificuldades relacionam-se, também, com o facto de ser um tema complexo, tanto no aspeto matemático como pedagógico (Lamon, 2007).

Deste modo, o trabalho com números racionais e respetivas operações implica um conhecimento matemático por parte do professor, quer ao nível das componentes do sentido de número racional, quer ao nível das componentes do sentido de operações com números racionais, bem como das situações que potenciam/limitam o desenvolvimento dos referidos sentidos por parte dos aprendentes.

A designação “sentido” implica que se veja o aluno como um pensador, uma pessoa capaz de compreender os domínios matemáticos. Por conseguinte, a referida expressão está associada a um ensino-aprendizagem da Matemática com “sentido”, ou seja, promovendo a compreensão (e.g., Huinker (2002); McIntosh, Reys & Reys (1992); NCTM (2000) e Slavit (1999)). Assim, sentido de número e sentido de operação são semelhantes, na medida em que representam uma maneira de pensar, em vez de um corpo de conhecimentos a ser transmitidos. Segundo Huinker (2002) desenvolver estes sentidos requer uma construção a longo prazo, de uma compreensão flexível dos números, operações e suas relações. Refere que a manipulação prematura de símbolos promove equívocos entre conceitos e procedimentos e contextos reais dos alunos. Porém, considera que se for desenvolvida uma base conceptual para o sentido de número racional e o sentido de operação, os alunos aprendem significativamente, podendo criar algoritmos apropriados para números racionais.

Dado o foco deste artigo importa clarificar sentido de operação, que de acordo com Slavit (1999) é a capacidade de usar operações em pelo menos, um conjunto de objetos matemáticos. O autor salienta que o referido sentido envolve vários tipos de conceções flexíveis que podem ser inter-relacionadas pelo aluno, nomeadamente a estrutura subjacente à operação, suas propriedades, seu uso, suas relações com outras operações e estruturas matemáticas, suas generalizações e as várias formas e contextos em que as operações podem existir. Com base em Huinker (2002), McIntosh, Reys e Reys (1992) e Slavit (1999), Pinto (2011) apresenta um modelo para caraterizar o sentido de operação, que requer o desenvolvimento integrado de quatro componentes, nomeadamente (i) estar familiarizado com diferentes significados e contextos das operações – significados que são essencialmente os mesmos dos números naturais, mas requerem algumas adaptações e cuidados na contextualização das operações, tendo em atenção que existem algoritmos diferentes (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010). Assim, a adição continua a significar “juntar/combinar” e “acrescentar” e a subtração a significar “retirar”, “comparar” e “completar”, alterando apenas as quantidades envolvidas e a(s) forma(s) como estas se encontram expressas (nestes casos são um quociente entre uma parte e um todo e antes eram cardinais ou ordinais); (ii) ter flexibilidade no uso das propriedades das operações – que requer o desenvolvimento de capacidades de cálculo, como o uso de factos operacionais básicos (compor e decompor números), entre outras estratégias de cálculo baseadas nas propriedades das operações; (iii) ser razoável na análise de processos e resultado – que requer o desenvolvimento da capacidade de conhecer o efeito de uma operação sobre um par de números, entre outras; e (iv) usar símbolos e linguagem matemática formal com significado – que requer o desenvolvimento da capacidade de formular problemas, entre outras.

Conforme referido, de acordo com Pinto (2011), o modelo apresentado para caraterizar o sentido de operação requer o desenvolvimento integrado das suas quatro componentes. Assim, os alunos revelam sentido de operação ao evidenciarem conhecimento simultâneo das referidas componentes.

Porém, para que os alunos possam desenvolver os referidos sentidos é essencial que o professor prepare e desenvolva tarefas com esse intuito, assumindo o seu conhecimento um papel central na preparação e implementação de tais tarefas (e.g., Charalambous, (2008) e Ribeiro e Carrillo (2011)). Este conhecimento do professor pode ser considerado sob distintas perspetivas, sendo que a maioria destas encontra a sua génese nos trabalhos de Shulman e colegas (e.g., Shulman (1986)). De entre esses trabalhos destacamos a concetualização do *mathematical knowledge for teaching* – MKT (Ball et al., 2008). Complementar ao conhecimento do conteúdo matemático, às especificidades deste, e sustentado nele – considerando os subdomínios definidos por Ball e colegas (Ball, et al., 2008) – de modo a dar corpo às tarefas de ensinar de forma a que os alunos entendam o que fazem e porque o fazem a cada momento, é também importante um conhecimento didático do conteúdo. Este conhecimento permite operacionalizar a prática letiva tornando o conhecimento matemático acessível aos outros (alunos), mas esse tornar acessível apenas se poderá efetivar se o professor for detentor de um sólido e amplo conhecimento do conteúdo, considerando-o integrado nos três subdomínios considerados no MKT (Cf. Figura 1). Esta concetualização considera os domínios do conhecimento do conteúdo e didático do conteúdo subdivididos, cada um deles, em três subdomínios. Pelo contexto específico do trabalho que temos vindo a desenvolver, aqui abordamos apenas o domínio do conhecimento do conteúdo e, em particular, os subdomínios do *common e specialized content knowledge*. Esta opção tem em consideração também o facto de que apenas sendo detentores de um amplo e sólido conhecimento do conteúdo, na perspetiva que o encaramos e, portanto, de forma compreensiva, será possível ao professor, desenvolver os subdomínios do conhecimento didático do conteúdo (Baumert et al., 2010).

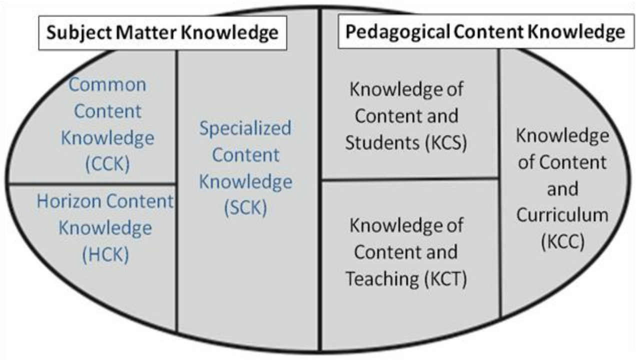

Figura 1. Domínios do MKT (Ball et al., 2008)

O *Common Content Knowledge* (CCK) corresponde a um conhecimento matemático que nos permite saber fazer – na ótica do utilizador. Corresponde ao conhecimento de um qualquer indivíduo com alguma formação matemática e que lhe permite, entre outros, encontrar respostas corretas para determinada operação ou resolver problemas do seu contexto laboral. Associa-se, também, entre outros, a um conhecimento que permite reconhecer respostas algebricamente incorretas e usar notações matemáticas corretas. Associado aos números racionais corresponde, por exemplo, a saber determinar o resultado correto de (3/8+1/2) e, portanto, a identificar como incorreto o resultado de 4/10. No âmbito da enunciação de problemas, relaciona-se, também com o conhecimento que permite identificar como sem sentido/significado o enunciado "O João tinha 3/8 de um berlinde, depois ganhou mais meio berlinde. Com quantos berlindes ficou?".

O *Specialized Content Knowledge* (SCK), complementar do CCK, corresponde a um aspeto do conhecimento especificamente associado à atuação docente e que se associa, entre outros, ao entender os porquês subjacentes a determinada resolução, à atribuição de sentido aos erros dos alunos, ao avaliar ideias alternativas e explicações matemáticas, ao usar representações matemáticas distintas para uma mesma noção (conhecendo em profundidade os porquês da possibilidade de navegar frutiferamente entre elas – Ribeiro, 2011) e na precisão (e adequação) da linguagem matemática utilizada na prática. Corresponde, assim, e no contexto deste trabalho, por exemplo, a um conhecimento que permite atribuir sentido aos motivos matemáticos (complementares a um saber calcular o mínimo múltiplo comum – *mmc*) que levam a que para adicionar duas quantidades representadas por frações tenhamos de ter essas quantidades representadas sob uma mesma unidade dividida num mesmo número de partes (atribuição de sentido ao *mmc* num contexto de adição de frações). Em termos de enunciação de problemas, será expetável que um professor que tenha a intenção de permitir aos seus alunos a possibilidade de entenderem o que fazem e porque o fazem, detenha também um conhecimento relativo aos sentidos das operações e das suas especialidades envolvendo quantidades inteiras ou não.

Considerando que este conhecimento matemático para ensinar pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004) – e, portanto, aprendido, é fundamental aceder às áreas onde os professores (atuais e futuros) apresentam mais dificuldades, de modo a que formação se possa focar onde é, efetivamente, necessária (Ribeiro & Carrillo, 2011). O desenvolvimento destes aspetos poderá ser potenciado com a confrontação e vivência de situações similares às que se espera que os (futuros) professores possam vir a facultar aos seus alunos (e.g., Magiera, van den Kieboom & Moyer (2011)), discutindo-as e encarando-as como ponto de partida para o desenvolvimento de um tal conhecimento.

Metodologia

Tendo por intuito explícito obter informações que nos permitam concetualizar formas para contribuir, de modo efetivo, para a melhoria da formação de professores facultada nas nossas instituições, concetualizamos um projeto que tem como um dos seus objetivos aceder e desenvolver o MKT de (futuros) professores dos Primeiros Anos. Este texto é um dos resultados desse projeto no âmbito dos números racionais, no sentido de efetuar uma contextualização e de definir um ponto de partida acedendo ao *estado da arte* relativamente a alguns dos aspetos do conhecimento matemático dos futuros professores.

O estudo combina uma metodologia quantitativa com um estudo de caso instrumental (Stake, 2005) tendo sido aplicado um conjunto de tarefas a futuros professores dos Primeiros Anos nas nossas Instituições no ano letivo de 2012/2013. Estas tarefas envolvem um conhecimento sobre números racionais e operações com estes números, que qualquer aluno do 6.º ano deveria estar em condições de resolver, considerando o que se encontra explícito no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Esta escolha tem também por base o facto de pretendermos discutir, posteriormente, com os estudantes, o conhecimento matemático para ensinar idealmente envolvido numa plena compreensão e posterior exploração em contexto de sala, de modo a que os futuros professores possam ser confrontados com situações similares às que esperamos possam facultar aos seus alunos (na linha do que refere Magiera et al. (2011)).

Estas tarefas foram respondidas individualmente por um conjunto de 56 estudantes no âmbito de Unidades Curriculares em três contextos distintos – tanto em termos de Unidades Curriculares distintas (sendo os autores deste texto os docentes de cada uma delas) como em termos da fase de formação em que se encontravam (1.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo e do 2.º Ciclo do Ensino Básico; 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica; 1.º ano do Mestrado em ensino do 1º. Ciclo). Esta diversidade de contextos foi propositada uma vez que não se pretende (nesta fase do trabalho) comparar as formações ou os níveis dos estudantes, mas sim obter uma mais ampla compreensão dos aspetos em análise, sendo essa diversidade encarada como mais um elemento de riqueza para um maior entendimento sobre os possíveis motivos que sustentam as dificuldades identificadas.

Aqui, por uma questão de gestão de espaço disponível, focamo-nos apenas nas respostas dos estudantes de duas das IES (correspondendo a 29 futuros professores) e discutimos, em concreto, uma das tarefas (com duas alíneas). Nesta foram fornecidas duas expressões numéricas (1- (3/8 + ½); 4–3 3/7) e solicitou-se aos estudantes que calculassem cada uma delas e formulassem um problema (com contexto real) que pudesse ser resolvido por cada uma das referidas expressões numéricas.

A análise efetuada centra-se na discussão e reflexão sobre os possíveis porquês associados às dificuldades nas componentes do sentido de operação evidenciadas pelos futuros professores aquando do cálculo das expressões numéricas apresentadas e formulação de problemas envolvendo as mesmas. Estas dificuldades são encaradas, por um lado, como uma oportunidade de aprendizagem e, por outro, como mais uma forma de contribuir para uma maior clarificação relativamente ao conteúdo do conhecimento matemático para ensinar e da sua especificidade.

Alguns resultados

Dos estudantes cujas produções aqui discutimos (29), apenas nove tentaram calcular o resultado das expressões apresentadas (e nem sempre corretamente) e, destes, apenas sete efetivamente tentaram formular problemas que consideraram puderem ser resolvidos pelas expressões fornecidas.

Para o cálculo de uma mesma expressão os estudantes apresentaram diferentes respostas revelando, algumas delas, desconhecimento sobre como adicionar e subtrair números racionais (considerado CCK). Houve, por exemplo, estudantes para quem a subtração à unidade de uma determinada quantidade diferente de zero, não os impediu de obterem uma quantidade igual à unidade (Figura 2). Revelam desconhecer o efeito da operação sobre um par de números racionais diferentes de zero e por conseguinte, falta de razoabilidade na análise de processos e resultados, evidenciando, assim, dificuldades nesta componente do sentido de operação (Pinto, 2011).

$$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1^{\times 4}}{2_{\times 4}}\right) = 1-\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\right) = \frac{1^{\times 8}}{1_{\times 8}}-\frac{7}{8} = 8-7=1$$

Figura 2. Produção evidenciando desconhecimento do efeito da subtração sobre um par de números racionais

Houve ainda estudantes a revelarem pouca familiaridade com numerais mistos, evidenciando dificuldades em conectar esta representação de números racionais, com a representação em fração (Figura 3, abaixo). Por conseguinte, manifestaram dificuldades em recorrerem a factos operacionais básicos, que se repercutem na falta de flexibilidade no uso das propriedades das operações, mais uma das componentes identificadas por Pinto (2011) para caraterizar o sentido de operação. Estes estudantes também evidenciaram desconhecimento do efeito da operação sobre um par de números racionais, ou seja, falta de razoabilidade na análise de processos e resultados.

$$4-3\frac{3}{7} = 4-\frac{6}{7} = \frac{28}{7}-\frac{6}{7} = \frac{22}{7}$$

Figura 3. Produção evidenciando desconhecimento de factos operacionais básicos, bem como do efeito da operação sobre um par de números racionais

Outros estudantes, apesar de terem evidenciado algum entendimento de numeral misto, já que o consideraram corretamente como representando uma adição entre a parte inteira e a parte decimal, revelaram desconhecimento relativamente ao que se entende por subtrair – que quando subtraem este numeral têm de subtrair quer a parte inteira, quer a parte fracionária (Figura 4, abaixo). Assim, e ao contrário do que seria expectável, subtraem a parte inteira e adicionam a parte fracionária – revelando mais uma vez, desconhecimento de factos operacionais básicos, bem como do efeito da operação sobre um par de números racionais e por conseguinte, dificuldades respetivamente na flexibilidade no uso das propriedades das operações e na razoabilidade na análise de processos e resultados.

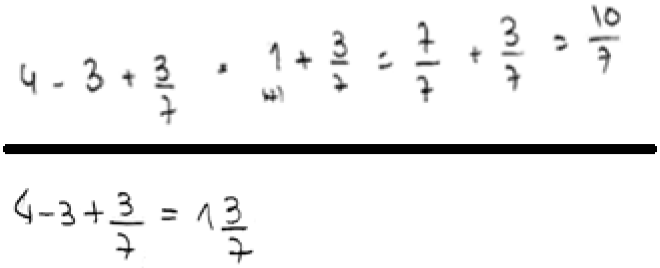

Figura 4. Produções evidenciando desconhecimento relativamente à subtração de quantidades representadas em numeral misto

Dos sete estudantes que criaram enunciados, alguns optaram por “simplificar” a situação de partida e o enunciado do problema proposto, considerava uma expressão equivalente à apresentada, assumindo a unidade dividida já num mesmo número de partes – dividida em oito fatias (Figura 5).

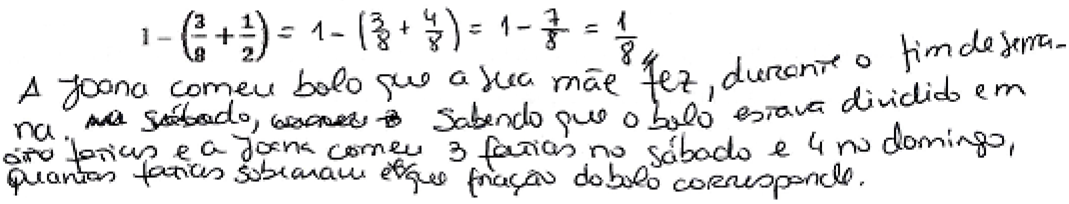

Figura 5. Produção de um enunciado para uma expressão equivalente à apresentada

Esta opção revela, por um lado, uma boa estratégia de resolução de problemas pois, se o que estava a criar dificuldades se prendia com o facto de existirem duas divisões diferentes do todo – considerando aqui a fração como parte-todo, então uma forma de solucionar o problema seria a de considerar uma sua representação equivalente. Porém, revela, por outro lado, dificuldades em relacionar símbolos com ações e conhecimentos informais, que pode decorrer da pouca familiaridade com os diferentes significados e contextos das operações de adição e subtração de números racionais. Deste modo, fica condicionada, também, a sua capacidade (conhecimento) de enunciar problemas que possam ser resolvidos por expressões numéricas dadas (algo que corresponde a um dos conteúdos do SCK do professor), e por consequência, a sua capacidade de usar símbolos e linguagem matemática formal com significado, outra das componentes identificadas por Pinto (2011) para caraterizar o sentido de operação.

Outro dos estudantes considerou uma unidade discreta (berlindes) e, uma vez que dividiu a unidade em oito partes iguais, assumiu que cada uma dessas partes correspondia a 20 berlindes (Figura 6).

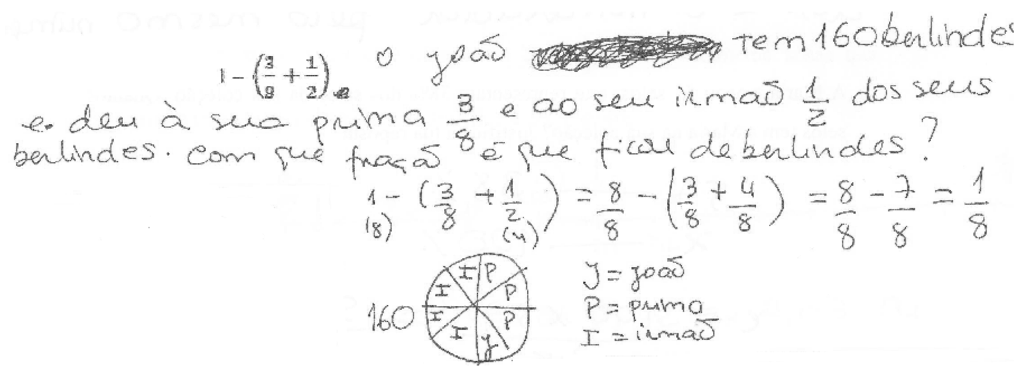

Figura 6. Produção de um enunciado com recurso à unidade discreta e à representação pictórica

Porém o recurso à unidade discreta parece ter sido apenas uma forma de auxiliar o seu raciocínio, dado que ao elaborar o enunciado para a expressão não teve em linha de conta a unidade considerada "(…). Com que fração ficou de berlindes?", sendo esta completamente irrelevante para o contexto do problema enunciado. De salientar ainda, que este foi o único estudante que recorreu a uma representação pictórica para a resolução do problema, o que parece ter-lhe permitido atribuir sentido às diferentes etapas dos procedimentos que efetuou.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e faz parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), financiado pelo Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. NY: NCTM.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd IGPME* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, México: PME.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hilbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. VII, pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

McIntosh, A., Reys, J., & Reys, E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8, 44.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, to appear.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ribeiro, C. M. (2011). Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 4, pp. 41-48). Ancara, Turquia: PME.

Ribeiro, C. M., & Guerreiro, P. (em preparação). Quando os alunos elaboram e resolvem problemas envolvendo racionais – o que podemos aprender também para a formação de professores.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Alemanha: PME.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J., & Silver, E. A. (2009). Problem posing in mathematics learning: Establishing a theoretical base for research. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd IGPME* (Vol. 1, pp. 299). Thessaloniki: PME.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.