Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O Pensamento Algébrico em contextos visuais

Marta Pinheiro[1], *Ana Barbosa*[2]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, martapinheiro@ipvc.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo. *Esta comunicação pretende descrever um estudo centrado no desenvolvimento do pensamento algébrico em contextos visuais realizado com alunos do 6.º ano de escolaridade. Procurou-se compreender os aspetos do pensamento algébrico evidenciados em contextos visuais, as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos e as suas dificuldades. Recorreu-se a um design de estudo de caso, sendo acompanhados dois alunos cujo trabalho foi enquadrado no contexto turma. Assim, foi elaborada uma proposta didática, organizada em contagens visuais, sequências de repetição e de crescimento, e problemas que envolvem a exploração de padrões. Apresentam-se alguns resultados, decorrentes da aplicação de três tarefas. De uma forma geral, os resultados evidenciaram que tarefas de exploração de padrões em contextos figurativos revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico nos três aspetos que o compõem: padrões e relações; generalização; e simbolização. Constatou-se, ainda, que tarefas desta natureza proporcionam a utilização de variadas estratégias de generalização. Os alunos que suportaram o seu raciocínio no contexto figurativo conseguiram obter mais sucesso e revelaram maior compreensão das relações entre as variáveis dependente e independente.*

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Visualização; Generalização; Proposta didática.

Introdução

A introdução do pensamento algébrico no currículo de Matemática logo a partir dos primeiros anos de escolaridade tem vindo a ser defendida por alguns autores (Kaput, 1999; NCTM, 2007). No currículo português foi concretizado com a generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) no ano letivo de 2009/2010, no qual a Álgebra foi introduzida como tema matemático no 2.º ciclo. Estamos perante uma nova visão da Álgebra, que se distancia da visão tradicional que a conotava com a resolução de equações e a simplificação de expressões algébricas, passando a ser vista como uma forma de pensamento acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007).

A exploração de tarefas que envolvam o estudo de padrões tem vindo a ser recomendada para a introdução da Álgebra nos primeiros anos (Driscoll, 1999; NCTM, 2007; Stacey & Macgregor, 2001), sendo estes considerados um importante veículo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Também as tarefas apresentadas em contextos figurativos são um bom ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Vale, Pimentel, Alvarenga & Fão, 2011b), uma vez que a visualização pode facilitar a generalização. Salienta-se que o trabalho com padrões figurativos permite desenvolver nos alunos a capacidade de generalizar e de representar relações (Orton, Orton & Roper, 1999), sendo um importante contributo para a transição da aritmética para a álgebra (Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2011a).

Atendendo às ideias explicitadas, neste estudo pretendeu-se compreender como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano de escolaridade no âmbito de contextos visuais, tendo por base as seguintes questões: 1) Que aspetos do pensamento algébrico são evidenciados em contextos visuais?; 2) Que tipo de estratégias utilizam os alunos no processo de generalização nestes contextos?; 3) Que dificuldades são evidenciadas pelos alunos nestes contextos?; 4) Que razões poderão explicar estas dificuldades?

Enquadramento teórico

O Pensamento Algébrico

Numa perspetiva de evolução, têm surgido conceções mais abrangentes acerca da Álgebra como a que apresenta Kieran (2007):

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas. (p. 5)

Ainda neste âmbito, Kaput (1999) defende que a Álgebra deve ser entendida de forma diferente da visão tradicional, considerando fundamental que o desenvolvimento do pensamento algébrico esteja acessível a todos os alunos sendo, para isso, necessária a criação de um ambiente propício na sala de aula, que lhes permita aprender com compreensão. Isto requer que os alunos tenham experiências que vão para além da aritmética e da fluência de cálculo, de modo a poderem entender a estrutura mais profunda subjacente à matemática (Blanton & Kaput, 2011).

Blanton e Kaput (2005) caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (p. 413). Segundo Kaput (2008), o pensamento algébrico apresenta dois aspetos fundamentais: a generalização e a expressão de generalizações de forma progressiva em sistemas de símbolos convencionais; e a ação sintaticamente conduzida sobre a simbolização em sistemas organizados de símbolos. Driscoll (1999) considera como fundamental ao pensamento algébrico a capacidade de identificar padrões e reorganizar dados para apresentar situações em que os valores das variáveis dependente e independente se relacionam em regras funcionais bem definidas. Assim, a generalização, a simbolização e a exploração de padrões e relações apresentam-se como aspetos fundamentais do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007; Vale et al., 2011b).

Mason (1996) afirma que a generalização é o coração da matemática. Segundo Kaput (1999) generalizar é continuar um raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos que estão em estudo, reconhecendo de forma explícita o que de semelhante existe entre eles ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco deixa de ser a situação inicial e passa a ser o padrão, o procedimento, as estruturas e a relação entre eles. Stacey (1989) identifica dois tipos de generalização: *generalização próxima*, quando se obtém o termo pretendido através da contagem ou do desenho, utilizando uma estratégia recursiva; e a *generalização distante* quando não é possível a utilização de desenhos ou da contagem sendo necessário compreender a lei de formação da sequência. É consensual entre vários autores que tarefas com padrões possibilitam o desenvolvimento da capacidade de generalizar e consequentemente o pensamento algébrico (Orton & Orton, 1999; Vale et al., 2011a) sendo assim recomendada a sua exploração como uma abordagem inicial à Álgebra. Vale et al. (2011a) consideram que "trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar" (p. 16). Já Radford (2006) sugere a exploração de padrões como atividade introdutória ao simbolismo algébrico e Vale (2011) afirma que as tarefas com padrões têm-se "revelado potenciadoras no desenvolvimento de capacidades de generalizar e em promover o pensamento algébrico e, em particular, o simbolismo que lhes está associado" (p. 186).

Relação entre a visualização e a capacidade de generalizar

Atualmente verifica-se que a visualização está a adquirir um papel central na aprendizagem da Matemática, deixando de estar conotada com um fim meramente ilustrativo, para passar a ser reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e da demonstração (Arcavi, 2003).

Rivera e Becker (2008) afirmam que, em tarefas que envolvam padrões figurativos, a perceção visual é uma das capacidades mais importantes, sendo caracterizada pelo ato de ver e distinguida entre sensorial (ver um objeto apenas como um objeto em si mesmo) e cognitiva (reconhecer factos ou propriedades relacionadas com o objeto). Aplicando estes factos ao contexto dos padrões figurativos, pode afirmar-se que quando os alunos interpretam as figuras de uma sequência como meros objetos estão a percecionar de forma sensorial, enquanto que quando são capazes de reconhecer relações nas figuras, compreendendo a estrutura do padrão, manifestam perceção cognitiva. Para Vale et al. (2011a) ver de formas diferentes pode ajudar os alunos de níveis elementares a fazer generalizações que só poderiam concretizar com uma matemática mais desenvolvida, defendendo ser primordial que os alunos compreendam a relevância da disposição visual na descoberta de estratégias de cálculo mais simples e intuitivas. O desenvolvimento do pensamento algébrico pode assim ser favorecido pela utilização de tarefas em contextos figurativos (Vale, et al., 2011a), podendo os alunos recorrer à visualização para facilitar a generalização (Mason, 1996).

Vários estudos documentam que, aquando da generalização, os alunos que suportam o seu raciocínio no contexto visual têm mais facilidade em traduzir as relações existentes e em dar significado às expressões geradas, apresentando mais sucesso nas suas justificações (Lannin, 2005; Rivera & Becker, 2008). Rivera e Becker (2008) identificam diferentes formas de generalizar com padrões lineares figurativos: *generalização construtiva* em que a figura resulta de partes não sobrepostas; e *desconstrutiva* em que a figura resulta da sobreposição de subconfigurações, sendo necessário um processo de subtração das partes sobrepostas. Vários estudos têm evidenciado que os alunos apresentam maior tendência para utilizar generalizações de tipo construtivo do que de tipo desconstrutivo (Barbosa, 2010; Rivera & Becker, 2008; Taplin, 1995). Para generalizar um padrão é necessário usar um modo de ação, ou seja, aplicar uma estratégia. São vários os estudos realizados com o objetivo de analisar e desenvolver as estratégias evidenciadas pelos alunos na generalização com recurso a padrões. Foi com base nestes estudos (e.g. Barbosa, 2010; Lannin, 2005; Sasman, Olivier, & Linchevski, 1999; Stacey, 1989) que foi elaborada a categorização utilizada nesta investigação (Anexo 1).

Proposta didática

Vale e colaboradores (2011a) apresentaram uma proposta didática, constituída por um conjunto de tarefas envolvendo padrões em contexto figurativo, com a grande finalidade de desenvolver o pensamento algébrico. Nesta proposta, tarefas, de natureza exploratória e investigativa, promovem a generalização impulsionando assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. A sequência de tarefas está estruturada em: (1) *contagens visuais*, que se dividem em tarefas de contagens visuais básicas e tarefas de contagens visuais noutros contextos; (2) *sequências de repetição e de crescimento*; e (3) *problemas com padrões*. As ideias expressas nesta proposta didática podem ser resumidas pelo esquema seguinte (figura 1):

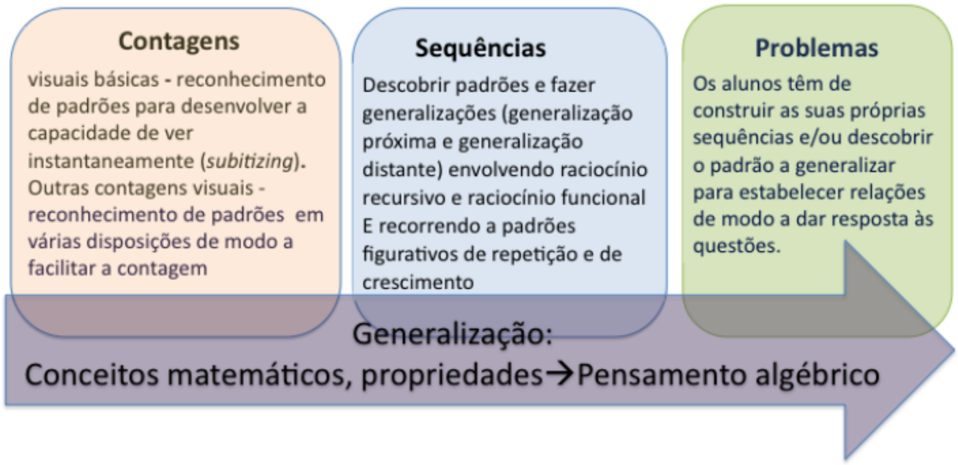


Figura 1. Ideias expressas na proposta didática (Vale et al., 2011b).

A sequência de tarefas apresentada serviu como base na formulação e sequenciação das propostas usadas neste estudo.

Metodologia do estudo

Considerando os objetivos do estudo, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa já que o foco do estudo se centrava mais nos processos do que nos resultados (Bogdan & Biklen, 1994) na medida em que se procurou compreender em profundidade a forma como os participantes desenvolveram o pensamento algébrico. Tendo em conta que se pretendia compreender um fenómeno em profundidade (Yin, 2009), recorreu-se a um *design* de estudo de caso, de natureza descritiva e interpretativa, tendo sido estudados dois alunos em contexto turma. O estudo decorreu numa turma do 6.º ano de uma Escola Básica Integrada, de uma freguesia do distrito de Braga. Tendo por base a proposta didática apresentada por Vale e colaboradores (2011a) e as orientações curriculares (ME-DGIDC, 2007), foi implementada uma sequência composta por dez tarefas, estando as mesmas organizadas em três etapas: contagens visuais, sequências e problemas de padrão (anexo 2). Salvaguarda-se que os alunos que participaram neste estudo não tinham qualquer tipo de experiência prévia com este tipo de tarefas. Estas foram implementadas seguindo a mesma dinâmica: apresentação da tarefa recorrendo a um PowerPoint, esclarecendo dúvidas; resolução individual; resposta a um questionário sobre a tarefa; e discussão da tarefa. Na fase de recolha de dados a investigadora assumiu o papel de observadora participante tendo recolhido dados de natureza descritiva. Procedeu-se a uma análise de natureza indutiva, na medida em que as categorias emergiram dos dados recolhidos assim como da revisão de literatura efetuada, levando a uma categorização dos mesmos. Para cada tarefa implementada, procedeu-se a uma análise detalhada para cada um dos alunos caso e, de uma forma mais geral, para a turma. Neste artigo apresenta-se a análise do trabalho dos alunos caso, Daniel e André, na resolução de três tarefas, tendo em conta a organização da proposta didática.

Discussão e análise das tarefas

Os berlindes do Carlos

A tarefa *Os berlindes do Carlos* (Anexo 3) inseriu-se nas contagens visuais, tendo como finalidade o reconhecimento de padrões em várias disposições. O arranjo espacial dos berlindes potencia diferentes formas de *ver* e, consequentemente, a formulação de diferentes expressões numéricas que traduzam o processo de contagem. Na sua resolução, o Daniel e o André utilizaram o *subitizing* conceptual reconhecendo a imagem (todo) como a composição de várias partes. Para calcular o número total de berlindes, ambos apresentaram várias expressões numéricas que correspondiam a diferentes formas de observar a figura.

Na resolução da primeira questão, o Daniel identificou arranjos lineares na vertical e arranjos retangulares. Na questão 2, apresentou cinco formas diferentes de contagem dos berlindes variando entre disposições retangulares e disposições lineares (figura 2).

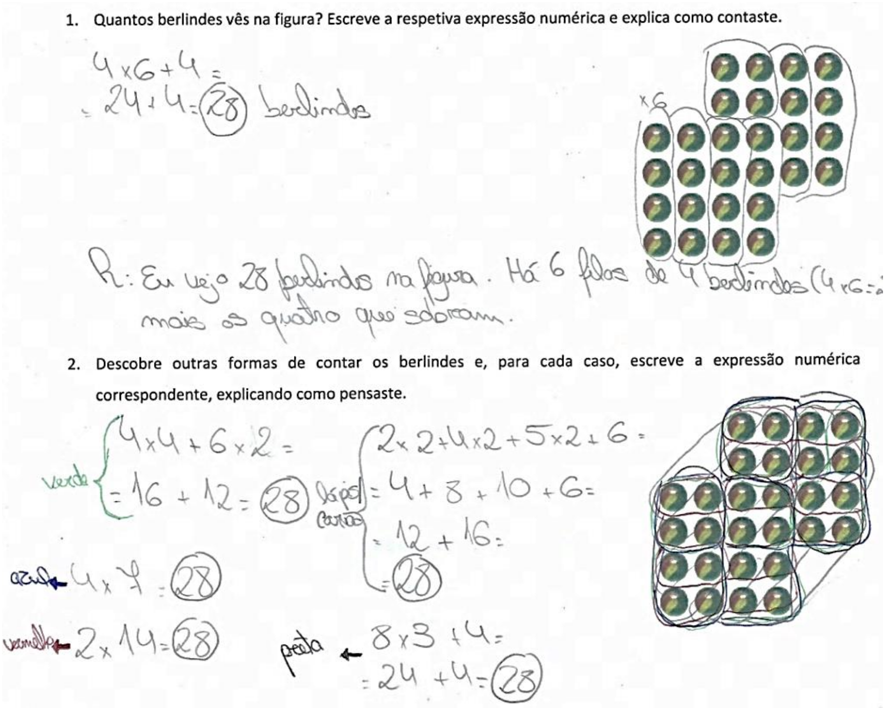


Figura 2. Resolução do Daniel nas questões 1 e 2 da tarefa *Os berlindes do Carlos*.

Na primeira abordagem, o André identificou arranjos lineares na vertical que foram agrupados formando arranjos retangulares. Na questão 2 apresentou três formas diferentes de ver o conjunto de berlindes, formando grupos com o mesmo número de elementos (figura 3).

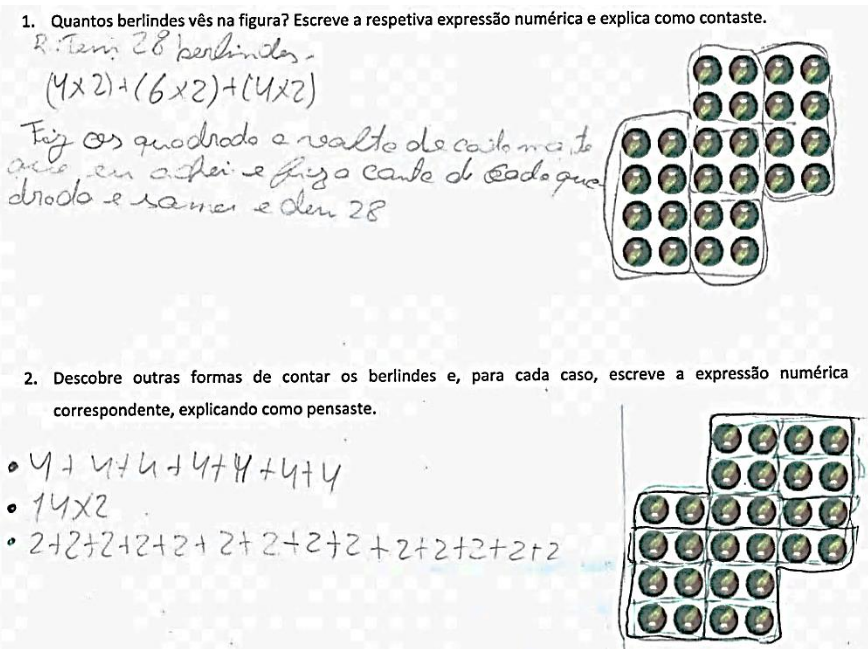


Figura 3. Resolução do André nas questões 1 e 2 da tarefa *Os berlindes do Carlos*.

Ambos os alunos concluíram que as expressões numéricas representavam o mesmo valor, sem no entanto terem referido que representam diferentes formas de contagem e de visualização da mesma figura.

Smiles

A tarefa *Smiles* (Anexo 4) insere-se nas sequências e implicava o estudo de uma sequência com um padrão figurativo de crescimento. Contemplava questões de generalização próxima e distante, incluindo a representação simbólica, e permitia múltiplas interpretações das figuras que constituíam a sequência, possibilitando o recurso a diferentes estratégias. Ao longo da tarefa, o Daniel baseou-se num raciocínio de tipo recursivo, sendo que nas questões de generalização distante associou-lhe a estratégia múltiplo da diferença com ajuste, numa tentativa de contornar a morosidade da recursão. Utilizou estratégias não visuais, suportando o seu raciocínio no contexto numérico em detrimento do contexto figurativo, o que não lhe permitiu resolver com sucesso as questões 4 e 5. Na questão 1, verificou que a diferença entre termos consecutivos era de três smiles e assim obteve o termo de ordem 4, adicionando 3 smiles ao termo anterior (figura 4).

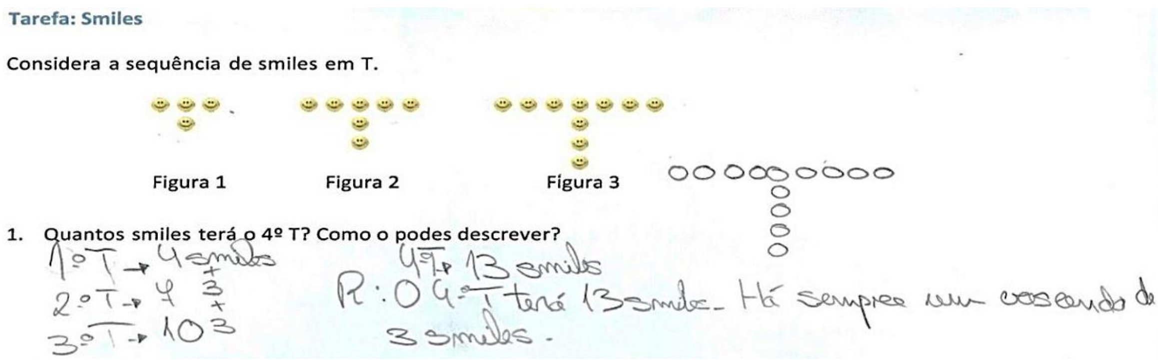
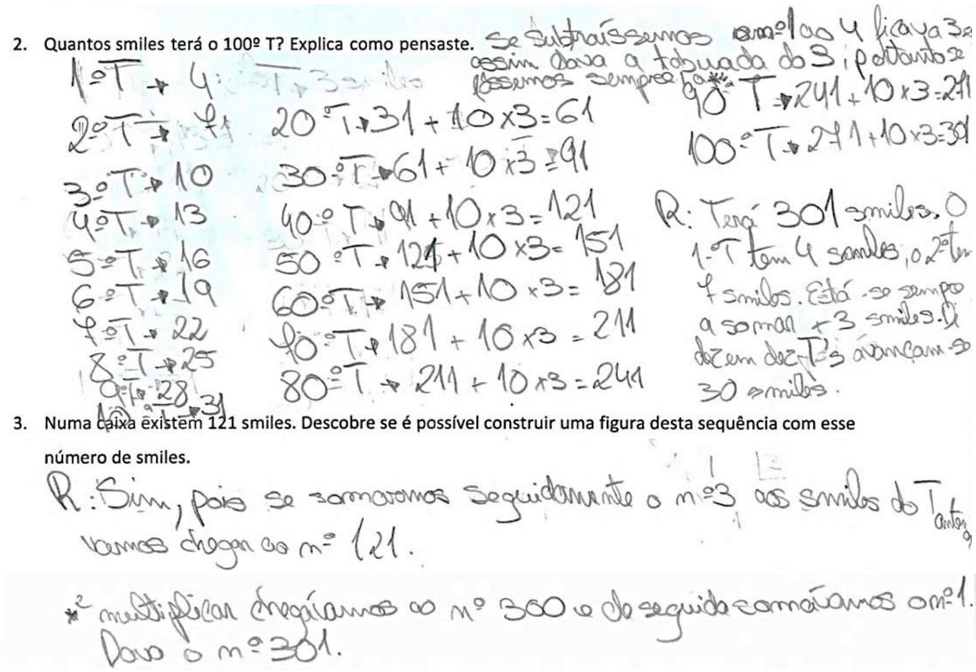


Figura 4. Resolução do Daniel na questão 1 da tarefa *Smiles*.

Para encontrar o 100.º T descobriu o termo de ordem 10, continuando a sequência, e, para contornar a morosidade desta estratégia, encontrou valores para termos cuja ordem fosse um múltiplo de 10 até obter o 100.º termo. Para determinar o 20º adicionou-lhe o número de smiles correspondente ao número de vezes que se regista a diferença, procedendo da mesma forma até obter o 100º termo (figura 5). A estratégia utilizada na questão 2 permitiu-lhe também descobrir se seria possível construir uma figura com 121 smiles, (figura 5), não tendo, por isso, mostrado reversibilidade de pensamento. Com esta resolução o aluno encontrou uma regra que lhe permitiu descobrir o número de smiles para qualquer figura. Contudo, não a valorizou e não a utilizou em questões posteriores.



2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste.

1º T → 4
2º T → 7
3º T → 10
4º T → 13
5º T → 16
6º T → 19
7º T → 22
8º T → 25
9º T → 28
10º T → 31

20º T → 31 + 10 × 3 = 61
30º T → 61 + 10 × 3 = 91
40º T → 91 + 10 × 3 = 121
50º T → 121 + 10 × 3 = 151
60º T → 151 + 10 × 3 = 181
70º T → 181 + 10 × 3 = 211
80º T → 211 + 10 × 3 = 241

90º T → 241 + 10 × 3 = 271
100º T → 271 + 10 × 3 = 301

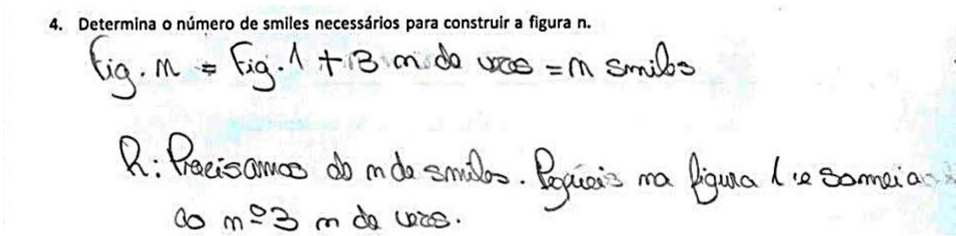
R: Terá 301 smiles. O 1º T tem 4 smiles, o 2º tem 7 smiles. Está-se sempre a somar + 3 smiles. De dez em dez T's avançam 30 smiles.

3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.

R: Sim, pois se somarmos seguidamente o nº 3 aos smiles do T anterior vamos chegar ao nº 121.

Figura 5. Resolução do Daniel nas questões 2 e 3 da tarefa *Smiles*.

Na questão 4 revelou dificuldades na manipulação simbólica e não conseguiu encontrar uma expressão algébrica que permitisse calcular o número de smiles da figura n, possivelmente porque na resolução das questões anteriores teve por base o raciocínio recursivo (figura 6).



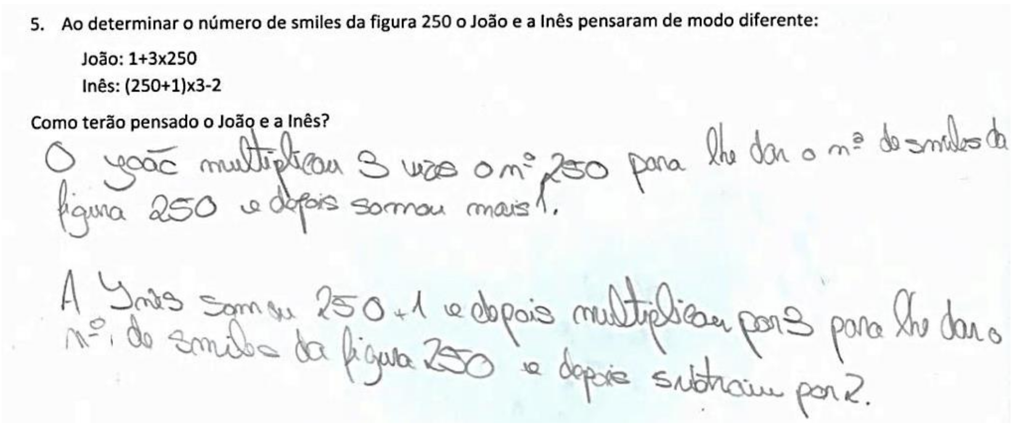
4. Determina o número de smiles necessários para construir a figura n.

Fig. n = Fig. 1 + 3 n de vezes = n smiles

R: Precisamos de n de smiles. Pegávamos na figura 1 e somávamos o nº 3 n de vezes.

Figura 6. Resolução do Daniel na questão 4 da tarefa *Smiles*.

O Daniel demonstrou dificuldades na visualização e no trabalho em contexto figurativo já que na questão 5 não conseguiu interpretar o significado das expressões numéricas apresentadas (figura 7).


5. Ao determinar o número de smiles da figura 250 o João e a Inês pensaram de modo diferente:

João: 1+3x250

Inês: (250+1)x3-2

Como terão pensado o João e a Inês?

O João multiplicou 3 vezes o nº 250 para lhe dar o nº de smiles da figura 250 e depois somou mais 1.

A Inês somou 250+1 e depois multiplicou por 3 para lhe dar o nº do smiles da figura 250 e depois subtraiu por 2.

Figura 7. Resolução do Daniel na questão 5 da tarefa *Smiles*.

Pelo contrário, o André baseou o seu raciocínio no contexto figurativo, utilizando uma estratégia de natureza visual, a explícita, quer na generalização próxima, quer na generalização distante. O aluno aplicou uma regra representativa da relação entre as variáveis dependente e independente, baseando-se na forma como visualizou as figuras, descobrindo uma expressão numérica que lhe permitiria calcular o número de smiles para um termo de qualquer ordem. O aluno identificou um smile no centro e três grupos com o mesmo número de smiles à volta, o que corresponde a uma generalização construtiva, resultante da decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas, (figura 8).

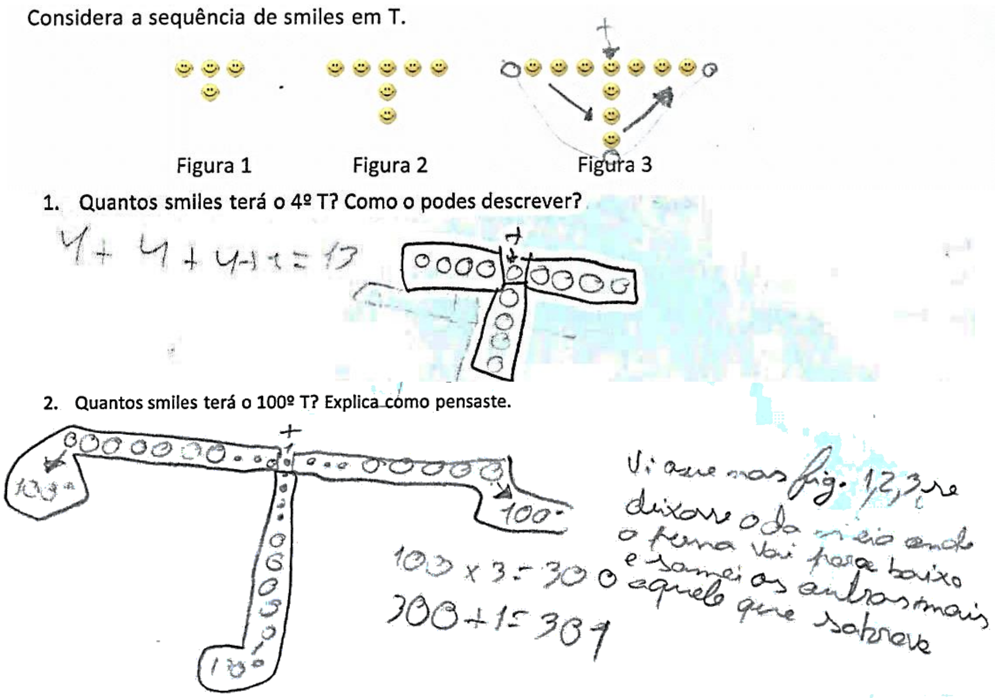

Considera a sequência de smiles em T.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Quantos smiles terá o 4º T? Como o podes descrever?

4 + 4 + 4+1 = 13

2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste.

100 100 100

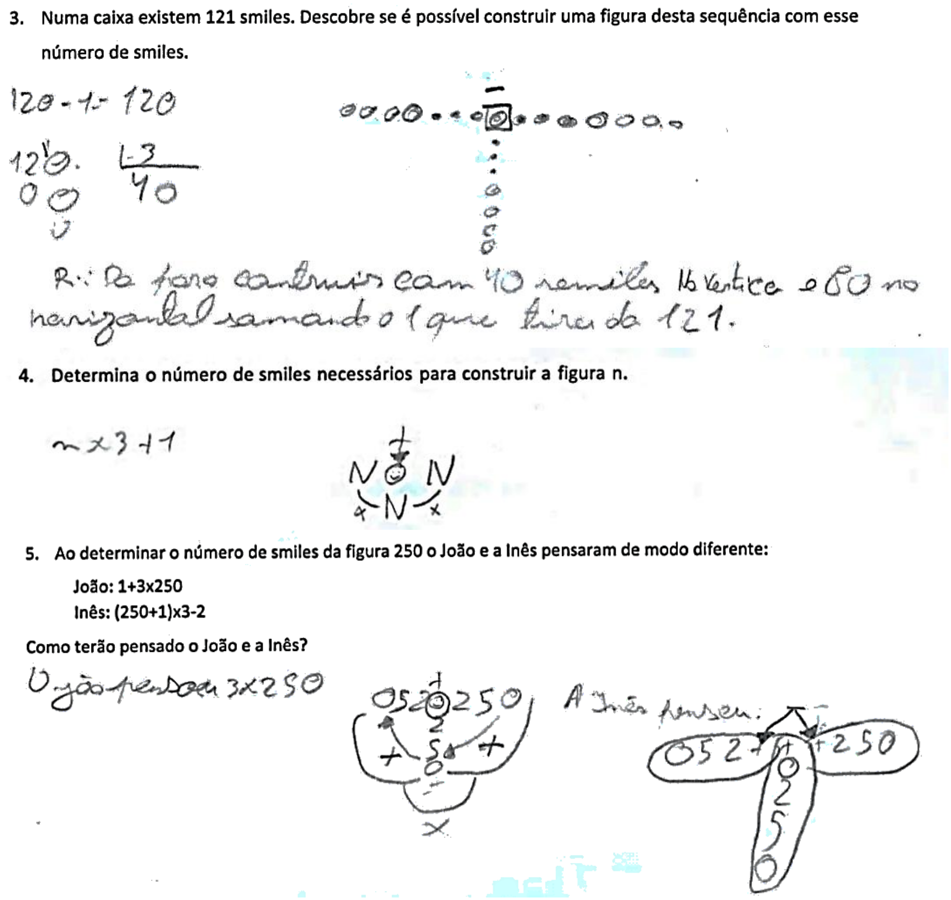
100 x 3 = 300

300 + 1 = 301

Vi que nas fig. 1,2,3 e deixei o do meio onde a perna vai para baixo e somei os outros mais aquele que sobrava

Figura 8. Resolução do André nas questões 1 e 2 da tarefa *Smiles*.

Na questão 3, foi capaz de aplicar a regra descoberta, usando o raciocínio inverso, revelando reversibilidade de pensamento (figura 9). Na resolução da questão 4 o André formulou uma expressão algébrica que traduzia a generalização algébrica (figura 9).



3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.

120 - 1 - 120

R: Da para construir com 40 smiles na vertical e 80 na horizontal somando o 1 que tira da 121.

4. Determina o número de smiles necessários para construir a figura n.

n x 3 + 1

5. Ao determinar o número de smiles da figura 250 o João e a Inês pensaram de modo diferente:

João: 1+3x250

Inês: (250+1)x3-2

Como terão pensado o João e a Inês?

O João pensou 3x250

A Inês pensou:

Figura 9. Resolução do André nas questões 3, 4 e 5 da tarefa *Smiles*.

Na questão 5, conseguiu dar significado às expressões numéricas apresentadas, fundamentando o seu raciocínio através de esquemas, quer na que representava a generalização construtiva (1+3×250), quer na representava a generalização desconstrutiva ((250+1)×3-2) (figura 9).

A moldura

A tarefa *A moldura* (Anexo 5) faz parte dos problemas com padrões e tem como principal objetivo a exploração de uma sequência que não é evidenciada de forma explícita, contemplando questões de generalização próxima e generalização distante. Ao contrário da tarefa *Smiles,* o Daniel visualizou a estrutura do padrão e identificou relações entre as variáveis dependente e independente, baseando o seu raciocínio no contexto figurativo. Utilizou uma estratégia de natureza visual, a explícita, quer em questões de generalização próxima (questões 1 e 2) quer nas de generalização distante (questão 3). Identificou em cada moldura quatro conjuntos com o mesmo número de azulejos, correspondente às dimensões do quadrado, subtraindo posteriormente os azulejos sobrepostos (os cantos da moldura), correspondendo assim a uma generalização de natureza desconstrutiva, sendo a única vez que utilizou uma estratégia desta natureza.

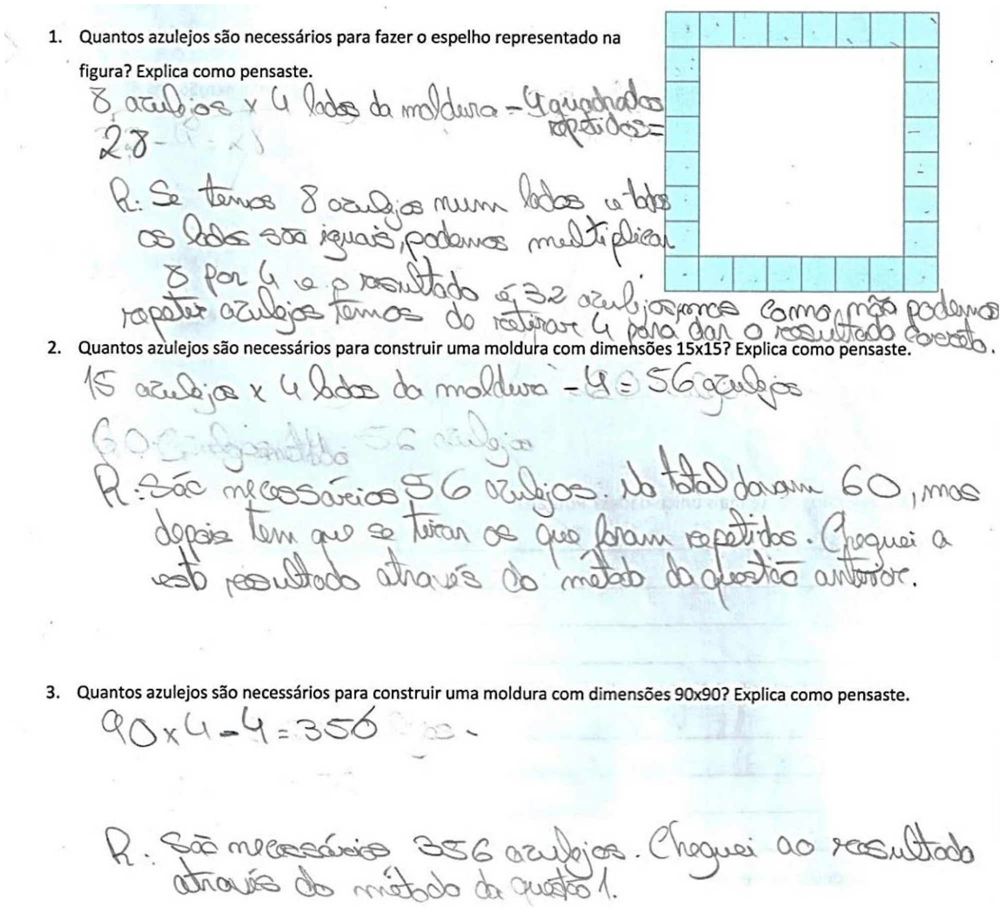
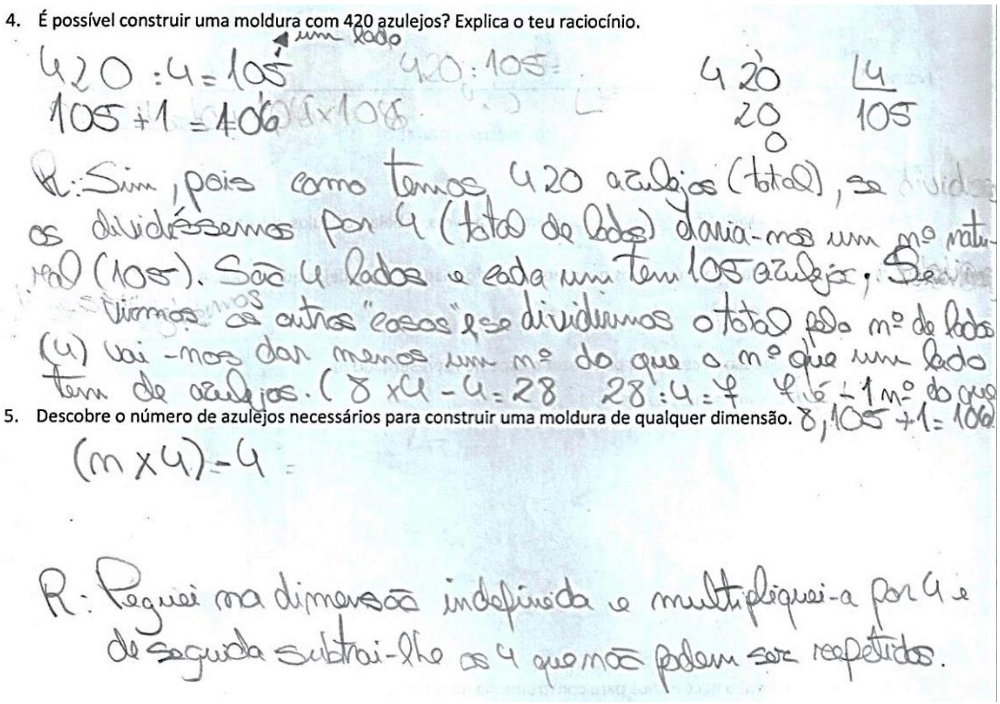


Figura 10. Resolução do Daniel nas questões 1, 2 e 3 da tarefa *A Moldura*.

Verifica-se que o contexto figurativo foi preponderante no sucesso da resolução desta tarefa. A análise do padrão figurativo permitiu ao aluno compreender a sua estrutura e deduzir uma regra que lhe permitiu descobrir o número de azulejos da moldura. Na questão 4 o Daniel não foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente, não revelando reversibilidade no pensamento. Contudo, conseguiu resolver de forma correta esta questão, recorrendo à estratégia explícita e baseando o seu raciocínio nas resoluções das questões anteriores (figura 11).


4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.

um lado

420 : 4 = 105 420 : 105 = 420 | 4

105 + 1 = 106 106 x 106 20 105

0

R: Sim, pois como temos 420 azulejos (total), se os dividíssemos por 4 (total de lados) daria-nos um nº natural (105). São 4 lados e cada um tem 105 azulejos; Vimos os outros "casos" e se dividirmos o total pelo nº de lados (4) vai-nos dar menos um nº do que o nº que um lado tem de azulejos. (8 x 4 − 4 = 28 28 : 4 = 7 7 é −1 nº do que 8, 105 + 1 = 106

5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.

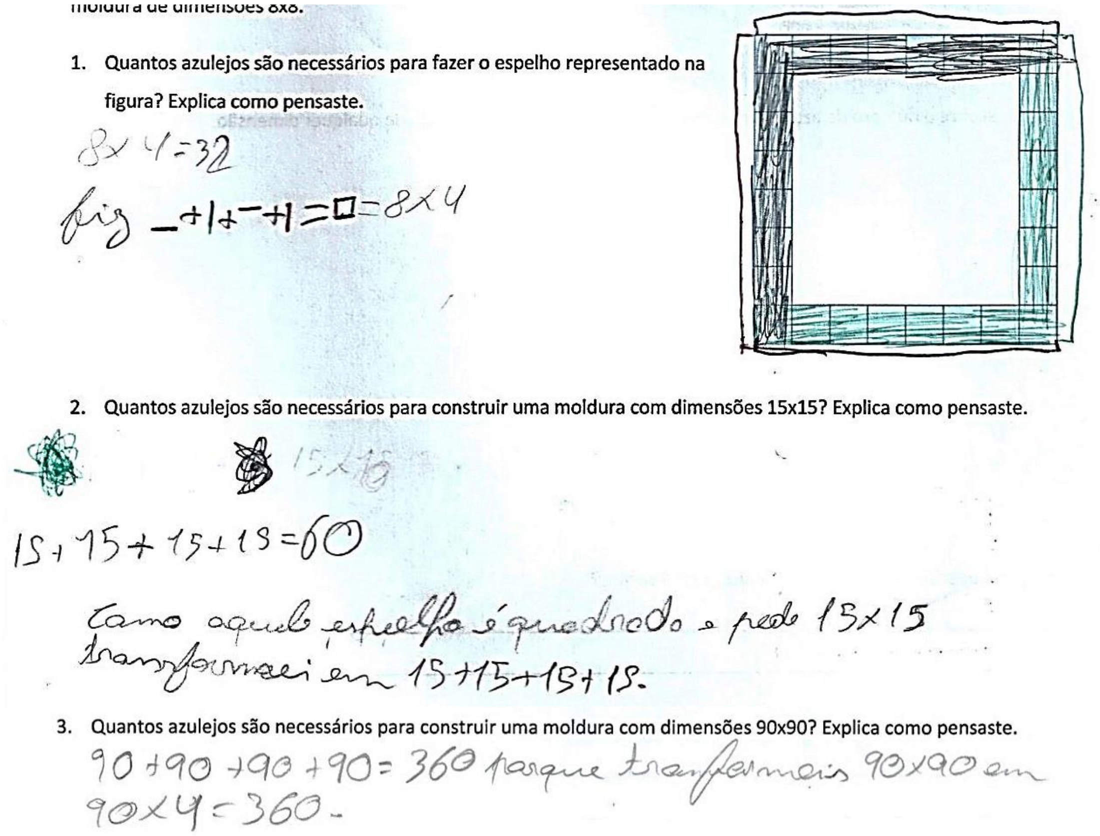
(n x 4) − 4

R: Peguei na dimensão indefinida e multipliquei-a por 4 e de seguida subtraí-lhe os 4 que não podem ser repetidos.

Figura 11. Resolução do Daniel nas questões 4 e 5 da tarefa *A Moldura*.

O Daniel conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a generalização (questão 5), revelando evolução na manipulação simbólica (figura 11).

Tal como o Daniel, o André utilizou sempre a estratégia explícita, quer nas questões de generalização próxima (questão 1 e 2) quer nas de generalização distante (questão 3). O aluno aplicou uma regra que entendeu ser representativa da relação entre as variáveis dependente e independente, baseando-se numa generalização construtiva, já que identificou a moldura composta por quatro grupos com o mesmo número de azulejos, correspondente às dimensões do quadrado. Contudo, essa regra não correspondia ao contexto apresentado pois calculava apenas o perímetro e não apresentava a subtração dos azulejos que já tinham sido contemplados, revelando dificuldades na generalização descontrutiva assim como na análise da estrutura do padrão (figura 12).



moldura de dimensões 8x8.

1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.

8×4=32

fig _+|+_+|=□=8×4

2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.

15×15

15+15+15+15=60

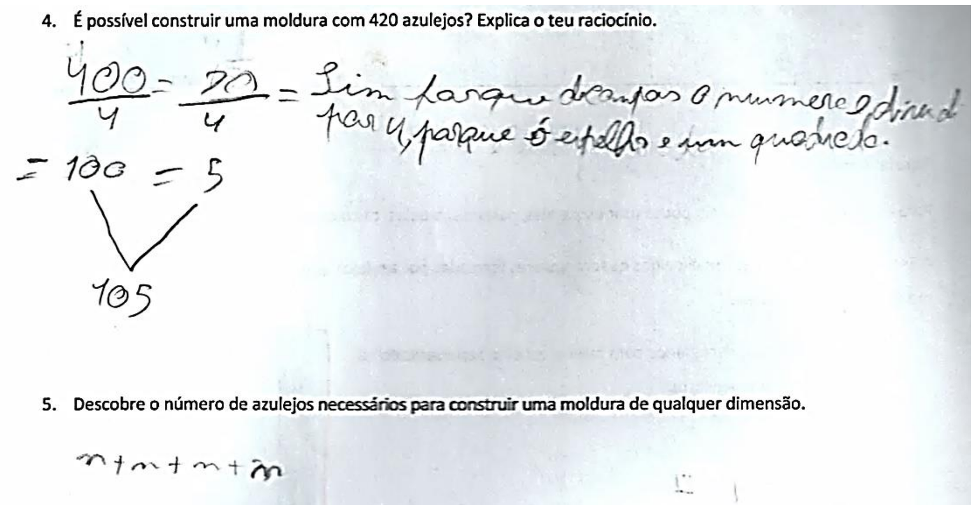
Como aquele espelho é quadrado e pede 15×15 transformei em 15+15+15+15.

3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.

90+90+90+90=360 porque transformei 90×90 em 90×4=360.

Figura 12. Resolução do André nas questões 1, 2 e 3 da tarefa *A Moldura*.

Na questão 4, o André foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente revelando reversibilidade no pensamento, recorrendo à estratégia explícita. Contudo, como essa regra não estava certa, o que não permitiu obter conclusões corretas (figura 13).



4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.

$\frac{400}{4} = \frac{20}{4} =$ Sim porque dividimos o numero e dividi por 4, porque o espelho é um quadrado.

= 100 = 5

105

5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.

n+n+n+n

Figura 13. Resolução do André na questão 4 e 5 da tarefa *A Moldura*.

Na questão 5, conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a regra descoberta nas questões anteriores (figura 14) a qual, contudo, não correspondia ao contexto apresentado.

Conclusões

A análise do trabalho dos alunos caso evidencia que a exploração de padrões em contextos visuais propicia o desenvolvimento do pensamento algébrico. Estes alunos revelaram capacidade de explorar padrões e de estabelecer relações entre as variáveis, generalizando e apresentando a expressão algébrica que traduzia essa generalização. É de salientar a importância do contexto figurativo no seu desempenho: na análise da estrutura do padrão, recorrendo à perceção cognitiva, reconhecendo a existência de relações e revelando compreender a estrutura do padrão (Rivera & Becker, 2008); na generalização porque reconheceram, de forma explícita, o que existia de semelhante em termos específicos da sequência, tendo conseguido estender esse raciocínio a termos distantes (Kaput, 1999); na simbolização em que a expressão algébrica traduzia a forma de ver a figura, revelando compreender as relações simbólicas apresentadas, manipulando com maior facilidade esses símbolos (Rivera & Becker, 2008). Salienta-se ainda que, em questões de generalização distante, quando basearam o seu raciocínio no contexto figurativo, obtiveram mais sucesso do que quando se basearam no contexto numérico. Assim, verificou-se que a visualização constituiu um meio facilitador da generalização e do desenvolvimento do pensamento algébrico (Barbosa, 2010; Mason, 1996).

Verifica-se que os alunos recorreram a diversas estratégias (e.g. subitizing conceptual, recursiva, múltiplo da diferença, explícita), sugerindo que tarefas desta natureza propiciam o recurso a múltiplas estratégias (Barbosa, 2010; Lannin, 2005; Rivera & Becker, 2008). Apresentaram preferência por estratégias de generalização de tipo construtivo em detrimento das de tipo desconstrutivo, (Barbosa, 2010; River & Becker, 2008), revelando maior facilidade em questões de generalização próxima.

Apesar de serem capazes de interpretar o contexto figurativo apresentado, os alunos caso, na tarefa de contagens visuais, frequentemente trocaram a ordem dos fatores nas multiplicações. Revelaram dificuldades em estabelecer totalmente um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica que poderá ser explicado por uma forte habituação à manipulação dos números sem um contexto figurativo associado. Verificou-se maiores dificuldades em questões de generalização distante nomeadamente em questões que envolviam reversibilidade de pensamento. Estas dificuldades podem estar relacionadas com o facto de estas questões se basearem na relação entre as variáveis, exigindo uma boa compreensão das relações numéricas.

Esta investigação permitiu verificar que o pensamento algébrico pode ser explorado desde cedo, através de tarefas que envolvam a exploração de padrões, e que uma abordagem de natureza figurativa facilita o seu desenvolvimento de forma sustentada. Assim, tarefas em contextos figurativos revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico baseado na generalização de padrões tal como defendiam Vale et al. (2011a). Concluiu-se que este tipo de tarefas promove a utilização de diversas estratégias, podendo ser de natureza visual ou não visual. Foi notório que os alunos que suportaram o seu raciocínio no contexto figurativo conseguiram ser mais bem sucedidos e relevaram uma maior compreensão das relações existentes entre as variáveis dependente e independente, conseguindo explicar e justificar as regras apresentadas e expressar relações generalizadas em termos explícitos (Rivera & Becker, 2005).

Apesar de terem surgido dificuldades na manipulação simbólica, os resultados do estudo sugerem vantagens na utilização de tarefas que envolvem a exploração de padrões em contexto figurativo, como atividades introdutórias ao simbolismo algébrico (Radford, 2006), tendo-se revelado potenciadoras do desenvolvimento do simbolismo associado ao pensamento algébrico, fomentando a transição do pensamento numérico para o algébrico (Vale et al. 2011b).

Referências bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215-241.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Dissertação de Doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom pratice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, a Global Dialogue from Multiple Perspectives Advances in Mathematics Education* (pp. 5-24). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers, grades 6-8.* Porstmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI*(1), 5-26.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordretch, The Netherlands: Kluwer.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassel.

Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and Pratical Contexts and the Perception of Pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassel.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, pp. 2-21. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*, 65-82.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education, 4*, pp. 161-168. Haifa, Israel: Technion Printing Center.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice.* New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & L. Rosamund (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vale, I. (2011). *Resolução de Tarefas com Padrões em Contextos Figurativos: exemplos de sala de aula.* Obtido em 9 de Janeiro de 2012, de Gterp: http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2011a). *Padrões em matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico.* Lisboa: Texto Editores.

Vale, I., Pimentel, T., Alvarenga, D., & Fão, A. (2011b). *Uma proposta didática envolvendo padrões (Material de apoio ao PMEB).* Obtido em 15 de setembro de 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/071_Tarefas_Padroes.pdf

Yin, R. (2009). *Case study research: design and methods* (4th Ed.). Los Angeles: Sage.

Anexo 1

Planificação das tarefas aplicadas em cada sessão

Sessões		Tarefas	Tempo
1.ª Sessão	Contagens visuais	Qual tem mais estrelas? Dados Os grãos de café	1 bloco de 90'
2.ª Sessão	Contagens visuais	Os berlindes do Carlos A coleção de moedas	1 bloco de 90'
3.ª Sessão	Sequências – padrões de repetição	Nenúfares e rãs	1 bloco de 90'
4.ª Sessão	Sequências – padrões de crescimento	Smiles	1 bloco de 90'
5.ª Sessão	Sequências – padrões de crescimento	Os Z's	1 bloco de 90'
6.ª Sessão	Problemas com padrões	Os lugares	1 bloco de 90'
7.ª Sessão	Problemas com padrões	A moldura	1 bloco de 90'

Anexo 2

Categorias e indicadores de análise

Categorias de análise			Descrição
Estratégias de contagem	Contagem um a um		O aluno conta cada elemento.
	Subitizing percetual		O aluno reconhece o número de imediato sem usar outro processo matemático.
	Subitizing conceptual		O aluno reconhece uma disposição padronizada de um número como a composição das partes que formam um todo.
Estratégias de generalização	Contagem		O aluno desenha a figura e conta os seus elementos.
	Recursiva		O aluno continua a sequência, baseando-se nos termos anteriores para construir os seguintes.
	Tentativa e Erro		O aluno testa valores na regra descoberta anteriormente até verificar as condições pretendidas.
	Parte unidade	Sem ajuste	O aluno recorre à proporcionalidade direta e utiliza uma parte ou termo da sequência como unidade, multiplicando-a para encontrar valores mais distantes.
		Com ajuste	O aluno recorre à proporcionalidade direta e utiliza uma parte ou termo da sequência como unidade multiplicando-a para encontrar valores mais distantes fazendo um ajuste do resultado.
	Múltiplo da diferença	Sem ajuste	O aluno usa múltiplos da diferença entre termos consecutivos sem ajustar o resultado.
		Com ajuste	O aluno usa múltiplos da diferença entre termos consecutivos fazendo um ajuste do resultado baseando-se no contexto
	Explícita		O aluno identifica a regra de construção da sequência permitindo-lhe o cálculo imediato de qualquer termo, sendo dado o número de ordem
Natureza das estratégias	Não visuais		As imagens apresentadas/criadas não são fundamentais para encontrar a solução do problema.
	Visuais		As imagens apresentadas/criadas são fundamentais para encontrar a solução do problema.
	Mistas		Evidencia o recurso às imagens apresentadas/criadas mas numa perspetiva de facilitação do cálculo.
Nível de generalização	Próxima		O termo é descoberto rapidamente através de uma abordagem recursiva ou recorrendo a desenhos.
	Distante		Não é possível a utilização de desenhos ou de uma abordagem recursiva, sendo necessário identificar a lei de formação.
Tipo de generalização	Construtiva		A regra surge da identificação de partes não sobrepostas que formam a figura inicial.
	Desconstrutiva		A regra surge da identificação de partes que se sobrepõem, sendo necessário subtrair esses elementos.

Anexo 3

Os berlindes do Carlos

1. Quantos berlindes vês na figura? Escreve a respetiva expressão numérica e explica como contaste.
2. Descobre outras formas de contar os berlindes e, para cada caso, escreve a expressão numérica correspondente, explicando como pensaste.
3. O que podes concluir ao analisares as diferentes expressões numéricas que obtiveste?

Anexo 4

Smiles

Considera a sequência de smiles em T.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Quantos smiles terá o 4º T? Como o podes descrever?
2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste.
3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.
4. Determina o número de smiles necessários para construir a figura n.
5. Ao determinar o número de smiles da figura 250 o João e a Inês pensaram de modo diferente:

   João: 1+3x250
   Inês: (250+1)x3-2

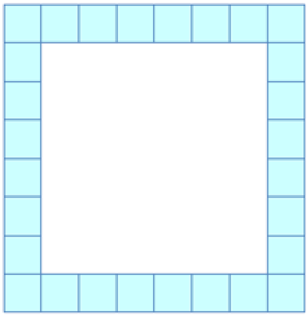
   Como terão pensado o João e a Inês?

Anexo 5

A moldura

Para explicares o teu raciocínio podes usar esquemas, palavras, tabelas, cálculos, desenhos…

A Esmoldura faz molduras em espelhos quadrangulares formadas por azulejos quadrados. A figura representa uma moldura de dimensões 8x8.



1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.
2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.
3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.
4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.
5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.