

## Desenvolvendo as representações estatísticas de alunos de 3.º ano

Isabel Velez<sup>1</sup>, João Pedro da Ponte<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,  
velez@campus.ul.pt

<sup>2</sup>Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

**Resumo.** *Este artigo tem como objetivo compreender de que forma quatro professores do 1.º ciclo trabalham as representações estatísticas no ensino-aprendizagem. Assumimos que a forma como o professor lida com as representações na sala de aula tem uma grande influência na aprendizagem dos seus alunos. Durante a realização de tarefas de OTD cabe ao professor levar os alunos a visualizar, compreender, interpretar e sistematizar a informação contida nas representações e levá-los também a desenvolver novas representações que considerem necessárias. Deve também encorajar os seus alunos a comparar as diferentes representações que possam surgir durante a discussão coletiva. A metodologia de investigação inclui a observação e gravação de aulas, distinguindo os momentos de apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização de resultados. Os resultados mostram que, durante a realização da tarefa, os professores tendem a orientar os alunos na utilização de representações formais, mas recorrem também às representações sugeridas dos alunos como ponte de ligação às representações formais.*

**Palavras-chave:** Representações; Raciocínio; Organização e tratamento de dados; Prática profissional; 1.º ciclo.

### Introdução

Cabe aos professores proporcionar aos alunos oportunidades de aprender e compreender os diferentes tipos de representações (Bishop & Goffree, 1986). O modo como os professores usam as diferentes representações matemáticas na sua prática tem um impacto fundamental na aprendizagem dos alunos (Stylianou, 2010). As representações merecem uma atenção especial na Organização e Tratamento de Dados (OTD), tema que no 1.º ciclo tem vindo a ganhar destaque em investigações nacionais e internacionais. Nas tarefas de OTD é também possível trabalhar outras representações de outros temas de Matemática, como Números e Operações.

A prática dos professores e as decisões que tomam influenciam de forma determinante a aprendizagem dos alunos. Como indicam Ponte, Nunes e Quaresma (2012), na realização de uma tarefa reconhecem-se muitas vezes os seguintes momentos principais: (i) apresentação, tendo em vista proporcionar aos alunos a compreensão da tarefa; (ii) atividade autónoma dos alunos, em que o professor circula pela sala, monitorizando o trabalho destes; e (iii) discussão coletiva, em que os alunos apresentam à turma os

resultados obtidos, e se faz uma síntese e sistematização de resultados. Nesta comunicação analisamos a prática profissional de quatro professores relativamente à forma como trabalham na sala de aula com as representações estatísticas. Analisando os momentos de apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva e síntese, pretendemos compreender de que modo os professores promovem a aprendizagem e compreensão das representações estatísticas nos seus alunos e o desenvolvimento do seu raciocínio.

### **Representações**

O NCTM (2000) refere que uma “representação” envolve o processo de representar, mas também o produto resultante desse processo. Assim, de acordo com este documento, para que os alunos compreendam verdadeiramente os diferentes conceitos matemáticos (incluindo os estatísticos) é importante que conheçam as várias representações existentes e saibam escolher a que melhor se adequa a cada situação.

O enunciado de qualquer tarefa envolve necessariamente uma ou mais formas de representação (linguagem verbal, símbolos, diagramas, etc.). Durante o trabalho autónomo, os alunos podem recorrer a outras representações. Webb, Boswinkel e Dekker (2008) distinguem três tipos diferentes de representações: informais (produzidas pelos alunos e relacionadas diretamente com o contexto em que decorre a tarefa), preformais (ainda com ligação ao contexto mas contendo alguns elementos abstratos) e formais (linguagem matemática formal). Para estes autores, os alunos começam por utilizar representações informais e, progressivamente, devem ser encorajados a recorrer cada vez mais a representações formais.

Thomas, Mulligan e Goldin (2002) classificam as representações em icónicas (imagens que representam a realidade), pictóricas (representação da realidade através de pontos, traços, etc..) e notacionais (retas numéricas, números, tabelas). Relativamente aos gráficos, Goldin (2000) refere que a sua interpretação permite que os alunos: (i) reflitam sobre os aspetos implícitos no gráfico; (ii) levantem questões; (iii) compreendam o gráfico, através do contexto a que se refere; (iv) façam novas aprendizagens a partir da análise e discussão da informação contida no gráfico; (v) construam o seu conhecimento ao explorarem a informação contida num gráfico e o respetivo contexto; e (vi) participem em discussões mais ricas, com a apresentação das diferentes opiniões dos alunos, depois de analisarem um gráfico em grupo. Na sala de aula, quando trabalham

gráficos de barras com os seus alunos, os professores devem certificar-se que estes conseguem identificar os dois eixos (cada um dos quais representando uma variável), bem como a escala utilizada. Devem ainda perceber que cada barra simboliza uma categoria ou um valor e que a sua altura corresponde ao valor que esta representa e é proporcional à sua frequência.

O raciocínio é o processo de fazer inferências justificadas a partir de informação conhecida (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). Observando as representações utilizadas pelos alunos, os professores podem tentar compreender o modo como estes pensaram e as estratégias que utilizaram (NCTM, 2000). Também Stylianou (2011) refere que é através das representações que os alunos comunicam o seu raciocínio, permitindo aos professores compreender o percurso que seguiram na resolução de uma determinada tarefa.

### **Metodologia de investigação**

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) sobre a prática profissional de professores do 1.º ciclo relativamente ao seu trabalho com representações matemáticas. Nesta comunicação analisamos as práticas de três professores do 3.º ano e uma professora de apoio de Matemática que com eles trabalha regularmente na resolução de uma tarefa de OTD. Todos têm menos de cinco anos de serviço e trabalham em duas escolas do mesmo agrupamento nos arredores de Lisboa. Sofia trabalha com a sua turma desde o 1.º ano, Catarina começou este ano, mas foi professora de apoio na mesma escola no ano letivo anterior, Rui está com os seus alunos desde o 2.º ano e Sara é professora de apoio em Matemática ao abrigo do programa TEIP. Cada turma tem cerca de 20 alunos, a maioria dos quais nascidos em países estrangeiros (70% na África) não tendo o Português como língua materna. Os dados foram recolhidos através de gravação vídeo das aulas e analisados através de análise de conteúdo com as categorias geradas num modelo aberto (Laville & Dionne, 1999).

A tarefa foi escolhida previamente pelo grupo de quatro professores, de acordo com a avaliação que fizeram das necessidades e dificuldades dos alunos envolvidos e inclui o enunciado e um gráfico de barras (figura 1). Nas duas aulas, os professores começam por apresentar o problema, dão aos alunos algum tempo para o resolver individualmente e, finalmente, discutem os resultados coletivamente. Sara conduz a realização da tarefa junto dos alunos de Sofia e Catarina (que decidiram juntar os seus alunos na mesma

sala) e colabora na condução da aula na sala de Rui. Em cada uma das aulas, assinalamos os aspetos mais relevantes relacionados com o uso das representações.

---

Tarefa - A Andreia está a vender rifas para a escola e tem registado num gráfico o que vendeu até agora. Observa o gráfico e responde:

- 1- Quantas rifas vendeu na segunda-feira?
- 2- Quantas rifas vendeu na terça-feira?
- 3- Em que dia a Andreia vendeu mais rifas? E em que dia vendeu menos?
- 4- Quantas rifas a Andreia teria de vender para chegar às 40 rifas?
- 5- Houve algum dia em que a Andreia não vendeu rifas? Porquê?

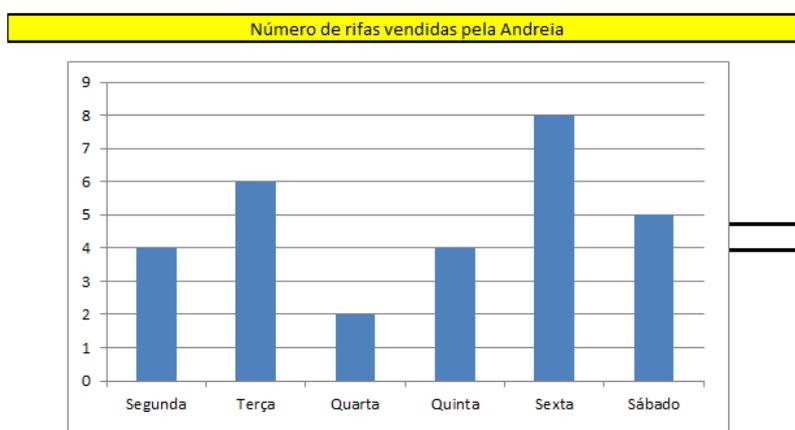


Figura 1 - Tarefa

## Aula 1

Na apresentação da tarefa, Sara pede a um aluno que leia a primeira parte do enunciado. Em seguida, enquanto anda pela sala, lê as perguntas e, por fim, tendo em conta que os alunos não levantam qualquer questão, pede-lhes que resolvam a tarefa:

Um...Quantas rifas vendeu na segunda-feira? Dois... Quantas rifas vendeu na terça-feira? Olhar para a terça-feira e ver quantas rifas a Andreia vendeu... 3... Em que dia a Andreia vendeu mais rifas? E em que dia vendeu menos? Atenção que têm duas questões! (...) Têm que justificar porquê! Podem começar a resolver...(...)

Enquanto os alunos resolvem autonomamente a tarefa, as professoras observam-nos e analisam o seu trabalho, respondem às suas dúvidas e colocam algumas questões. Até à questão 4 não parecem existir quaisquer dificuldades. Nesta questão, face ao trabalho de Daniel, Sara intervém:

Sara: Então diz-me lá como é que tu chegaste às onze rifas?

Daniel: Contei... Aqui (aponta para todo o gráfico)... Ao todo dá 29... 29 [rifas vendidas]... Dá-me 11 [rifas por vender] porque tirei 1 de 11 e coloquei [adicionei ao 29]... Fez 30... (...) Coloquei nisto aqui (aponta para todo o gráfico)... Fiquei com 30... Depois... Juntei trinta mais 10! Que dá 40!

(...)

Sara: Porque é que tu somaste tudo? Porque é que somaste as rifas todas que ela vendeu em todos os dias da semana [para obteres 29]?

Daniel: Para saber quantas rifas ela vendeu!

Perante a resposta correta de Daniel, Sara questiona-o de forma a tentar perceber o seu raciocínio. O aluno começa por descrever o processo de cálculo mental que usou  $(29+1)+10=40$ . Começa por juntar 1 a 29, obtendo 30, e depois juntar mais 10, para obter 40, deste modo, teve de juntar  $1+10$ , ou seja 11. Sara pede ainda ao aluno que explique também como obteve 29.

As professoras ficam surpreendidas com as estratégias que alguns alunos utilizam para interpretar o gráfico. Por exemplo, Nádia regista por cima de cada coluna o seu valor (figura 2), algo que Sofia, acha interessante. Para se certificar que compreendeu a intenção da aluna, pergunta-lhe o que a levou a registar os números no gráfico.

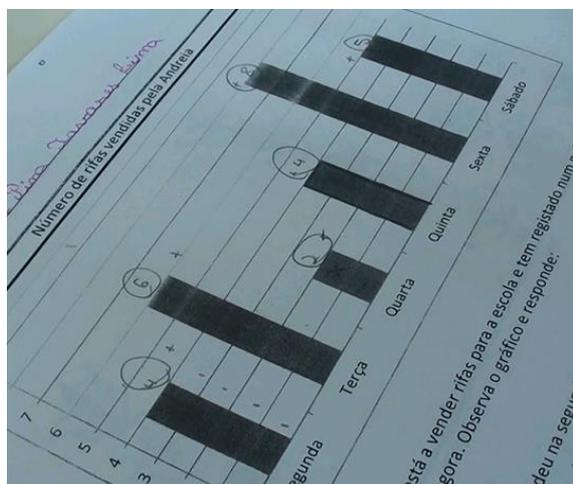


Figura 2 – Estratégia utilizada por Nádia.

Sofia (para a aluna): Porque é que meteste aqui estes números?

Nádia: Porque...Porque...Porque...

Sofia: Porquê? Diz amor? Explica só porque é que fizeste?

Nádia: Para ver... Para ver o resultado que eu queria...

Sofia: E porque é que puseste ali o quatro?

Nádia: Para não me esquecer que é quatro!

Nádia recorre a uma representação numérica que traduz a sua interpretação do significado de cada coluna, colocando em cima de cada coluna o número que corresponde à quantidade que simboliza. Aparentemente a tradução da representação estatística numa representação numérica é a forma que encontra para melhor ler e comparar o valor de cada coluna.

Na discussão coletiva, Sara pede aos alunos que apresentem as suas respostas em cada pergunta.

Sara: Andreza... Quantas rifas vendeu na terça-feira?

Andreza: Vendeu 6...

Sara: Na terça-feira vendeu 6 rifas... Alguém colocou um número de rifas diferente?

Alunos: Não...

Sara: Porque é que tu disseste que eram 6 rifas Andreza? (...) Como é que tu viste que eram 6?

Andreza: Conteí...

Sara: Contaste, e então... Como é que tu contaste?

Andreza: Conteí estes... (aponta para a coluna)

Sara: OK... Quem é que contou de outra maneira?

Ana: Eu! Eu fiz assim... Segunda feira... É 4... Para vir para aqui, para terça, sobra 2. 4 mais 2 dá 6!

Sara: Dá seis... Alberto... Diz lá...

Alberto: Fiz de 2 em 2...

Sara: Foste de 2 em 2... Quem é que contou de outra maneira o número de rifas? Quem é que olhou logo para o gráfico e viu que eram 6? (...)

Inês: Eu fiz pela linha do gráfico... (...) Tinha calhado no 6...

Sara: Foste até... Continuaste a seguir a linha, foi? E viste que tinha calhado no número 6... Muito bem!

Alberto: Mas está certo?!?

Sara: Sim, está certo... Eu só queria saber como é que vocês chegaram ao 6... (escreve a resposta correta no quadro)

Na discussão coletiva vários alunos dão exemplos como encontraram o resultado (comparando com outras colunas, contando de um em um). Sara procura várias formas de encontrar o valor 6 e destaca o aluno que fez a leitura do gráfico tendo em conta a linha orientadora que liga a coluna à escala no eixo das ordenadas. Os alunos ficam surpreendidos ao se aperceberem que todas as respostas estavam corretas. A partir da segunda pergunta, Sara deixa de confirmar a resposta dos alunos, respondendo-lhes

sempre “Porquê?”, o que os torna mais participativos e mais motivados para querer responder.

A resposta à segunda parte da terceira pergunta “E em que dia vendeu menos [rifas]?” gera alguma polémica nos alunos pois alguns dizem que a resposta é “domingo” e outros respondem “quarta-feira”. Sara intervém:

Fernando: Foi no domingo...

Sara: Porquê, Fernando?!

Fernando: Porque não está o domingo!

Sara: Porque não está ali o domingo... Mas nos dias em que ela vendeu rifas... Ela no domingo não vendeu nenhuma rifa... Mas nos dias em que ela vendeu rifas, qual foi o dia em que ela vendeu menos? Eu não quero saber os dias em que ela não vendeu... Quero saber os dias... Qual foi o dia em que ela vendeu menos, dos dias em que ela vendeu...

Turma: Quarta-feira...

Sara: Quarta-feira... Então se nós considerarmos os dias em que ela vendeu... A quarta-feira foi o dia em que ela vendeu menos rifas... Mas se nós considerarmos os dias da semana todos, qual foi o dia em que vendeu menos rifas?

Turma: Domingo...

À semelhança do que fez nas questões anteriores, a professora pede aos alunos que justifiquem a sua resposta. O facto de domingo não constar no gráfico deixa os alunos confusos, sem saber se devem ter em conta esse dia da semana. Sara opta por considerar ambas as respostas como aceitáveis. Ao fazer isto, pretende que os alunos compreendam que, a mesma tarefa pode ter diferentes formas de chegar ao mesmo resultado e vários resultados possíveis conforme a interpretação do enunciado. Na pergunta seguinte, os alunos continuam muito participativos:

Sara: Vinte e nove... E depois como é que tu chegaste ao 11... Deolinda...

Deolinda: Pus... Contei... 29... Mais... Quanto dava para chegar ao 40...

Sara: Foste ao 29 e viste quanto é que chegava para... Quanto é que faltava para chegar às 40 rifas. Deu-te 11, não é? (aluna acena que sim com a cabeça). Muito bem!

Alberto: Oh professora, eu fiz de outra forma!

Alunos: Eu também! Também eu!

Sara: Alberto...(fala para a turma) Um de cada vez, se faz favor!

Alberto: Eu fiz quarenta... Hum... Onde é que está? (procura na sua folha de trabalho) Eu pus 40 menos 11... Para certificar que se é verdadeiro... Eu fiz a conta e deu-me 29...

Sara: Qual foi a operação que tu fizeste?

Alberto: 40 menos 11...

Sara: Então tu fizeste... 40 menos 11... Mas como é que tu chegaste aos 11? Lembraste-te? Assim de repente? (sorri)

Alberto: Nãooooo! (ri-se) Primeiro fiz a conta... 40 menos 29... E depois eu pensava que estava errado... Então eu fiz...

Sara: Então foste confirmar, não é? Foste fazer 40 menos 11 para ver se dava os 29... É isto?

Alberto: Sim!

Nesta parte da discussão, os alunos já tinham concluído que o resultado correto era “11 rifas” e apresentam as várias estratégias que utilizaram para encontrar a solução. A maioria recorre à estratégia de “contar de um em um”, contabilizando os elementos entre 29 e 40. Sara considera esta estratégia válida, mas procura que um dos alunos (Alberto) indique a representação formal que utilizou. Entretanto, outros colegas referem que calcularam  $40 - 11 = 29$  (e a professora regista este cálculo no quadro), mas, depois de questionados, chegam à conclusão que determinaram o resultado 11 utilizando a estratégia referida inicialmente. No final da discussão, Alberto é o primeiro aluno que refere a representação formal ( $40 - 29 = 11$ ) e a professora regista no quadro o seu cálculo.

Depois da discussão de todas as questões, Catarina intervém e decide falar um pouco sobre o gráfico de barras da tarefa:

Catarina: Então e pensam que a Andreia fez o gráfico todo bem?

Turma: Aaa... Não...

Catarina: Porquê?

Danilo: Porque falta... Porque ela esqueceu-se de... Domingo!

Catarina: Mesmo não vendendo no domingo... Temos aqui o 0, não temos? Se ela não vendeu no domingo, ela teria na mesma que ter registado o quê? O domingo! Só não punha o quê? Uma coluna! Mas, para o gráfico estar completo (...) tinha que ter o domingo, certo? Sim? Percebido? Mesmo que não se venda... Vamos supor que estamos a registar a quantidade de fruta que nós comemos por semana... Se eu não comer fruta num dia da semana, eu não vou deixar de registar, certo?

Catarina considera que deve sistematizar com os alunos algumas das convenções dos gráficos de barras (existência do zero no eixo das coordenadas, importância de registar no gráfico toda a informação), levando assim os alunos a desenvolverem o sentido crítico em relação à representação utilizada. Para isso, estabelece a ligação com uma situação real da sala de aula (na turma regista-se diariamente o consumo de fruta ao

lanche) para que os alunos compreendam que mesmo quando um valor é igual a 0, é possível registá-lo no gráfico de barras.

## **Aula 2**

Na turma de Rui, é este professor que dinamiza a realização da tarefa, e Sara é corresponsável pela sua exploração com os alunos. Na apresentação da tarefa, Rui pede a um aluno que leia o enunciado e faz uma breve explicação:

Rui: Então... A Andreia tem estado a vender rifas para a escola... Tá? (...)  
Nesse gráfico de barras... Ela tem registado o que vendeu até agora... Se vocês olharem para lá... Cá em baixo... Temos os dias da semana, não temos? Então... Ela em cada dia da semana regista o número de rifas que vende... Se vocês virem, do lado esquerdo têm um número... Certo? Então agora temos aí algumas perguntas para a interpretação desse gráfico e vamos... (...) Resolvê-las sozinhos e vamos... Ver aqui no quadro... Quais é que foram as soluções que vocês fizeram... Porque há várias soluções... Várias maneiras de chegar aos resultados... Está bem?

O professor identifica aspetos importantes da representação gráfica – os eixos das abcissas (“Cá em baixo... Temos os dias da semana”) e das ordenadas (“o número de rifas que vende (...) do lado esquerdo”). Para além disso, reforça a ideia de que há diferentes formas de resolução, relembrando os alunos de que podem existir diferentes estratégias para chegar ao resultado.

Durante o trabalho autónomo, os dois professores percorrem a sala de aula, analisando e comentando o trabalho da turma. Nos primeiros minutos, alguns alunos, consideram a tarefa difícil e recorrem ao professor para que este lhes diga como devem resolver a tarefa (“Professor não sei! O que é que é para fazer?”, “Professor... É difícil!!”). Perante esta situação, Rui decide dar-lhes algum tempo para que releiam o enunciado da tarefa (“Não sabes? Pensa um pouco e lê...”, “Tens que pensar... Já leste, não já?”, “É difícil? Se fosse fácil não era para vocês!”). Outros tentam que o professor lhes indique a representação que devem utilizar, mas Rui prefere que sejam eles a fazer essa escolha:

Bartolomeu: Professor na [pergunta] quatro é para fazer o quê? Desenhos?

Rui: Se quiseres fazer um esquema...Fazer desenhos... Podes fazer! Desde que respondas à[s] pergunta[s] [da tarefa]...

Há também alunos que conseguem encontrar a solução correta. Nesses casos, para além do reforço positivo (“Isso mesmo!”), Rui questiona-os para perceber como chegaram ao resultado (“Como é que chegaste a este número? Fizeste alguma conta? Como é que tu pensaste?”).

Na discussão coletiva desta tarefa, o professor pede a Leonardo que explique como descobriu a solução do problema. Durante o trabalho autónomo, apercebeu-se que este aluno descobriu a resposta correta, contando pelos dedos e que consegue justificar, sem dificuldades, como encontrou o resultado.

Leonardo: Primeiro, fui ao gráfico... Eu vi... Quantos, quantas rifas se tinham vendido durante uma semana... Eu fui lá...

Rui: Como é que viste? Como é que viste quantas rifas ela vendeu durante a semana?

Leonardo: contei... Somei! contei... Aqui (aponta para o gráfico)

Rui: Contaste o quê? Diz lá!

Leonardo: contei... Aaaa... Quantas rifas que ela vendeu durante a semana...

Rui: Mas como é que eu sei as rifas que ela vendeu durante a semana?

Leonardo: Eu fui somar...

Rui: Foste somar... O quê?

Leonardo: Sim... Fui somar as rifas [vendidas em cada dia]...

Rui: Os vários dias da semana... Ficaste a saber quantas é que ela tinha vendido nessa semana... E depois? O que é que fizeste?

Leonardo: Depois... Deu 29 a conta... Depois fui contar e, para a Andreia ter 40 rifas... Faltavam mais onze...

Durante a explicação do aluno, Rui antevê uma explicação um pouco resumida, reduzida a “vi quantas rifas se tinham vendido” e questiona-o para que justifique como encontrou o número 29 e por que razão somou o valor de todas as colunas do gráfico de barras. Apesar de perceptível para si, o professor considera que a explicação de Leonardo não é muito clara para os colegas e sistematiza a informação desta etapa. Depois de ouvir a explicação do aluno, Rui pede-lhe que registre a sua estratégia no quadro (figura 3a) e questiona-o um pouco mais:

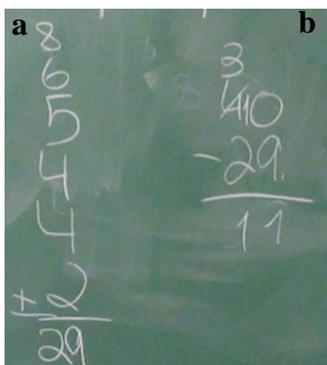


Figura 3: Representações utilizadas por Leonardo

Leonardo: Depois contei pelos dedos... Aaaaa... Até chegar ao 40...

(...) Primeiro eu contei, né? Depois eu fui fazer uma conta para ver se estava certo.

Rui: Qual?

Leonardo: Fiz... 29 mais 11!

Rui: Fizeste 29 mais 11. Mas porque contaste o 11 pelos dedos. Então e se eu não quisesse chegar até ao 40? E se eu quisesse chegar até ao 100?

Leonardo: Eu ia fazer uma conta na mesma!

Rui: Qual?

Leonardo: 100 mais 29!

(ao alunos começam a discutir qual a operação que devem utilizar)

Catarina: A diferença é menos!

Rui: Ora! A diferença é menos! Ouviram o que a Catarina disse?

Alunos: Siiimmm!

Rui: A diferença é menos! Então faz lá a conta... (...)

O aluno escreve  $40 - 29$  e resolve (figura 3b)

Rui: Estás a ver? Também descobrimos que era onze mas não contamos pelos dedos... Estás a ver? Porque se fossem 400, ou 500, ou 1000 ou um número qualquer... Eu não posso estar a contar pelos dedos até 1000... Senão nunca mais lá chego e pelo caminho vou-me esquecer e vou-me baralhar e vou-me enganar... Por isso é que temos que saber a conta que temos que fazer para chegar a um resultado...

Quando o professor pergunta a Leonardo se é possível resolver o problema de outro modo (pretende uma representação mais formal), o aluno responde que fez uma conta “para ver se estava certo”. Da mesma forma, outros colegas utilizam a representação simbólica para aferir o resultado, mas Rui pretende que o façam como estratégia de resolução e não apenas como forma de aferição. Assim, traduz para uma linguagem natural o significado de “ $29 + 11$ ” e desafia os alunos a encontrar a representação simbólica que permite resolver o problema sem “contar pelos dedos”.

No final Rui sistematiza a informação e explica aos alunos a importância do recurso a representações simbólicas. Entretanto, Sara apercebe-se que outro aluno utilizou uma estratégia de cálculo diferente das que foram apresentadas e dá essa informação ao colega:

Rui: Carlos explica lá...

Carlos: Eu fiz os vinte e nove... Depois vinte e nove, mais dez... Deu 39... Depois mais um... Deu 40...

Sara: (...) Somou o 10 e chegou ao 39... Depois para o 40 só lhe faltava um... Então 10 mais 1... São 11... Ele fez mentalmente... Não foi? Também é uma estratégia! Em vez de estar a contar pelos dedos... Ele já sabia... Ele tem dez dedos... Se somasse dez... Ia logo ter 39. Para [chegar] ao 40, além das dez tinha que... Ainda faltava uma... Ele já não precisa de usar os dedos para contar mais dez...

Rui considera que a estratégia de Carlos é diferente da dos outros alunos (foi o único que recorreu ao cálculo mental) e pede-lhe que explique o que fez. Carlos refere que calculou mentalmente o resultado final, descrevendo cada um dos passos do seu raciocínio. Sara sente necessidade de explicitar um pouco mais a sua estratégia de forma a torná-la mais perceptível para a turma. Para isso, estabelece uma ligação entre a explicação de Leonardo (que utilizou os dedos das mãos) e a de Carlos, valorizando o cálculo mental.

### **Conclusão**

Os professores apresentam a tarefa num enunciado em linguagem verbal (com uma introdução e cinco questões) e com um gráfico de barras. Os alunos interpretaram individualmente sem dificuldade a informação dada no gráfico de barras, no contexto apresentado. Na resolução da quarta pergunta os alunos recorrem a diferentes representações para encontrar uma solução e evidenciam-se algumas dificuldades. Os professores optam por não intervir neste momento da aula, preferindo fazê-lo na discussão coletiva. Trata-se de uma decisão com implicações importantes, pois uma intervenção precoce corre o risco de tornar a tarefa demasiado fácil para os alunos, mas, uma intervenção tardia pode levá-los a desmotivar-se e a desistir. Ainda nesta fase, os alunos de Rui questionam-no várias vezes sobre as representações que devem utilizar mas o professor deixa-os escolher a representação que consideram mais adequada à situação. Na quarta pergunta, esta liberdade na escolha da representação mais adequada gera um leque variado de representações por parte dos alunos. Alguns recorrem a contagens de um em um (utilizando os dedos, fazendo desenhos e esquemas), outros utilizam o cálculo mental e alguns usam representações formais na forma de cálculo vertical. Curiosamente, alguns dos alunos que utilizam representações ativas e icónicas na resolução da pergunta recorrem ao cálculo vertical como forma de aferir se a sua resposta está correta ( $40-11=29$ ).

A discussão coletiva surge como o momento mais importante da realização da tarefa. É nesta fase que os professores analisam as soluções apresentadas, recorrem às diferentes

representações dos alunos e questionam-nos para que justifiquem o seu raciocínio. Sara sente necessidade de traduzir o enunciado da tarefa para linguagem natural, mas, por outro lado, quando os alunos explicam como encontraram a solução de uma questão, faz o processo inverso. Questiona-os de forma a expor todas as representações e estratégias que observou durante a exploração da tarefa, procurando que refiram as representações e estratégias que privilegia (cálculo vertical e utilizar as linhas do gráfico para o interpretar). Por sua vez, Rui, na discussão da quarta pergunta, também valoriza as representações dos alunos, que referem três estratégias aditivas diferentes com recurso a representações ativas e icónicas (contagem pelos dedos, desenho e cálculo mental), Procura que os alunos compreendam que apesar das representações serem diferentes as estratégias são semelhantes. Rui e Sara reservam para o final da discussão coletiva, a participação dos alunos que utilizaram a representação formal  $40 - 29 = 11$ , e que transcrevem para o quadro, reforçando a ideia de que estas representações são mais eficazes, principalmente quando é necessário recorrer a números maiores.

Ao longo das aulas os professores promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos, nomeadamente durante o momento de trabalho autónomo e na discussão, quando procuram que os alunos expliquem e justifiquem o seu raciocínio. Sara recorre maioritariamente a perguntas envolvendo “Como” e “Porquê” e Rui pede também aos alunos que especifiquem melhor o seu raciocínio.

Na questão 4, apesar de a maioria dos alunos apresentarem estratégias de resolução informais, Sara e Rui procuram que os alunos compreendam que o conseguiriam fazer através de uma estratégia mais formal, envolvendo a subtração ( $40 - 29 = 11$ ) proposta por um aluno em cada sala e pedem-lhes que expliquem como chegaram ao resultado final. Enquanto Sara recorre ao “Como” (“Mas como é que tu chegaste aos onze?”), Rui prefere tornar a tarefa mais difícil (“E se eu quisesse chegar até ao cem?”) incitando a turma a encontrar outra estratégia. Na discussão coletiva da sala de Rui, depois de um aluno apresentar a representação formal ( $40 - 29 = 11$ ), o professor reforça as vantagens de o fazer (Por isso é que temos que saber a conta que temos que fazer para chegar a um resultado...). A forma como os professores questionam os alunos leva-os a justificar o seu raciocínio. Ao terem que explicar como resolveram a questão os alunos são levados a repensar no seu processo de resolução.

As ações dos professores têm assim um papel crucial na aprendizagem dos alunos. As suas decisões relativamente à forma como questionam os alunos, ao modo como

conduzem os diversos momentos da aula e a liberdade que dão aos alunos na escolha das representações revelam-se determinantes.

## Referências

- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Goldin, G. A. (2000). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.
- NCTM (2000). *Principles and norms of school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), 213-221.
- Stylianou, D. A. (2011). The process of abstracting in students' representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17(1), 8-12.
- Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 117-133.
- Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 110-113.