Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

# O raciocínio geométrico nas provas de avaliação externa do 2º ciclo do Ensino Básico

*Paula Vieira da Silva*[1], *Leonor Santos*[2]
[1]Agrupamento de Escolas de Real – Braga, pmvsilva@netcabo.pt
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mlsantos@ie.ul.pt

**Resumo**. *Na aprendizagem da Matemática, nomeadamente na geometria, as tarefas são um aspeto preponderante do trabalho dos alunos. Estas direcionam a atenção para determinados conteúdos e aspetos específicos do processamento de informação. Neste sentido, as características das tarefas propostas nos exames nacionais podem influenciar as aprendizagens dos alunos e o trabalho dos professores*.

*Este estudo apresenta dados parcelares de uma investigação em curso, e tem como objetivo a análise das características das tarefas de geometria que constam das provas de aferição (2010 e 2011) e das provas finais do 2.º ciclo (2013), principalmente no que diz respeito aos processos cognitivos a que fazem apelo e aos que os alunos efetivamente recorrem. O estudo segue uma metodologia de natureza interpretativa. A recolha de dados recorre à recolha documental (produções dos alunos) e a entrevistas semiestruturadas gravadas em suporte áudio e vídeo*.

*De uma forma geral, os resultados obtidos da análise de três tarefas e da sua resolução evidenciaram que as capacidades de visualização quando não se encontram convenientemente desenvolvidas tornam-se impeditivas de processos cognitivos que possam desencadear a escolha de uma estratégia adequada para a resolução das tarefas*.

**Palavras-chave**: Pensamento geométrico; capacidades de visualização; avaliação externa; tarefas.

## Introdução

Em relação às aprendizagens em matemática e respetiva avaliação, enquanto dimensões inseparáveis e articuláveis, as questões envolventes vão muito além da utilização de testes e exames, apesar de estes, atualmente, serem muito valorizados pela administração do sistema educativo, e assumidos (ou percecionados) como instrumentos indispensáveis para o conhecimento do desempenho académico dos alunos, por parte dos professores, das escolas e da sociedade em geral (Ceia, Filipe & Santos, 2011).

Durante uma década, a conceção das provas de aferição, o seu grau de exigência e a forma como o conhecimento matemático foi avaliado foram aspetos que suscitaram polémica, com visibilidade, nomeadamente, na comunicação social. No cerne dessa polémica incluía-se, entre outros aspetos, a escolha do tipo de tarefas.

O nosso interesse pelas tarefas decorre de serem um aspeto determinante da aprendizagem dos alunos, na medida em que direcionam a sua atenção para conteúdos particulares e para formas específicas de processamento de informação. Se o tipo de tarefas proposto nos exames nacionais pode influenciar as aprendizagens dos alunos, também os conceitos que são valorizados podem influenciar o trabalho dos professores (e os próprios autores de livros didáticos), os quais, por sua vez, voltarão a influenciar as aprendizagens dos alunos (Boesen, Lithner & Palm, 2010).

As questões de investigação que conduziram a este estudo foram as seguintes: A que processos cognitivos fazem apelo as tarefas de geometria que constam das provas de aferição (2010 e 2011) e das provas finais do 2.º ciclo (2013)? Que processos cognitivos usam os alunos?

## Fundamentação teórica

*Pensamento geométrico e capacidades de visualização*

Numa fase inicial da história da geometria o elemento visual foi predominante. Todavia, por razões históricas e culturais, a geometria desenvolveu-se como uma área científica cujo interesse mudou das necessidades práticas para um processo de racionalização mais abstrato e global. Isto culminou na sistematização, concentrando-se o interesse sobre os aspetos concetuais da geometria.

Na conceção de Battista (2007), "a geometria é uma rede complexa e interligada de conceitos, formas de raciocínio, e sistemas de representação que é usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários" (p. 843). Para este autor, o *raciocínio geométrico* consiste, em primeiro lugar, na invenção e uso de sistemas concetuais formais para investigar a forma e o espaço. Para além disso, subjacente à maior parte do raciocínio geométrico está o raciocínio espacial. O *raciocínio espacial* é "o conjunto de processos cognitivos pelos quais as representações mentais de objetos espaciais, relações e transformações são construídas e manipuladas" (Clements & Battista, 1992, p. 420). Como tal, o raciocínio espacial é uma forma de atividade mental que torna possível a criação de imagens espaciais e permite que elas sejam manipuladas no decurso da resolução de problemas práticos e teóricos em matemática. Ou seja, é a capacidade para «ver», analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações durante a resolução de problemas. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisar imagens para responder a questões sobre elas, transformar e operar em imagens, e manter imagens ao serviço de outras operações mentais. Assim, o raciocínio espacial fornece não só o *input* para o raciocínio geométrico formal, como ferramentas cognitivas críticas para a análise geométrica (Battista, 2007).

Uma componente do raciocínio geométrico e do raciocínio matemático em geral é o *raciocínio visual* ou *visualização*. A visualização é geralmente considerada como "a capacidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre a informação visual" (Hershkowitz, 1998, p. 75). A visualização espacial é entendida pelo NCTM (2007) como sendo a “construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tridimensionais e a perceção de um objeto a partir de diferentes perspetivas, [que] constitui um aspeto essencial do raciocínio geométrico” (p. 44). Assim, considera-se que a visualização desempenha um papel muito complexo na formação dos conceitos geométricos básicos.

A visualização espacial “engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos” (Matos & Gordo, 1993, p. 13). Gutiérrez (2006), na esteira de Bishop (1989), descreveu dois processos de visualização que têm lugar ao usar imagens: a *interpretação da informação figurativa* – processo que ocorre ao tentar ler, compreender e interpretar uma imagem para extrair informação, e o *processamento visual da informação* – processo que ocorre ao converter informação não visual em imagens ou ao transformar uma imagem já formada em outra.

Por outro lado, Del Grande (1990), fundamentando-se em outros autores, selecionou sete capacidades espaciais tendo estas absoluta relevância para o estudo da matemática e da geometria em particular. Estas capacidades são: a) *Coordenação visual-motora* (“*Eye-motor coordination”*); b) *Perceção figura-contexto (“Figure-groud perception*; c) *Conservação da perceção (“Perceptual constacy”)*; d) *Perceção da posição no espaço (“Position-in-space perception”)*; e) *Perceção de relações espaciais (“Perception of spatial relationships”)*; f) *discriminação visual (“visual discrimination”)*; g) *Memória visual (“Visual memory”).*

O desenvolvimento do raciocínio geométrico há muito que se revela como uma das preocupações dos investigadores em educação matemática. Como vários autores salientam, “na atualidade o modelo de raciocínio matemático de van Hiele é o marco teórico predominante” (Gutiérrez, 2006, p. 14). Este modelo identifica cinco níveis de raciocínio sequenciais e hierarquizados no processo de aprendizagem da Geometria, englobando as formas de raciocínio mais elementar dos alunos do pré-escolar e do primeiro ciclo, até formas mais sofisticadas próprias dos matemáticos profissionais (ibidem). Tomando por referência a descrição de autores como o próprio van Hiele (1999), Mason (1998) e Gutiérrez (2006), tem-se: *Nível 1. Nível visual ou reconhecimento e visualização; Nível 2. Nível descritivo ou análise; Nível 3. Nível de Dedução Informal ou abstração; Nível 4. Dedução Formal; Nível 5. Rigor.* Esta teoria apresenta caraterísticas sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos que são bastante significativas: a sequencialidade, a linguagem e a continuidade. O aluno tem de dominar os conhecimentos e estratégias de um nível de raciocínio para avançar para o nível seguinte (Jaime, 1993).

*Avaliação do pensamento matemático*

De acordo com o NCTM (2007, p. 11), a "avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos". Portanto, a "avaliação deverá refletir a matemática que todos os alunos deverão saber e ser capazes de produzir, devendo centrar-se no conhecimento e compreensão dos alunos, bem como na sua destreza na execução de procedimentos" (idem, p. 25). Por outras palavras, "a avaliação deve espelhar importantes processos de pensamento e de aprendizagem" (Shepard, 2001, p. 1074). Tal requer que sejam usados instrumentos diversos, procurando escolher qual o mais adequado para o que em cada momento se pretende avaliar (Semana & Santos, 2010), abandonando-se o uso quase exclusivo dos tradicionais testes escritos. Como o NCTM (2007, p. 25) alerta, as "avaliações de caráter formal fornecem apenas um ponto de vista daquilo que os alunos são capazes de fazer em determinadas condições muito particulares – muitas vezes trabalhando individualmente em tarefas de «papel e lápis», com tempo limitado para as executar. Uma valorização deste tipo de avaliação poderá dar uma imagem incompleta e, por vezes, até distorcida, do desempenho dos alunos".

Ao considerarmos que o raciocínio matemático é um complexo conjunto de processos mentais, o acesso direto ao raciocínio matemático dos alunos é uma tarefa impossível. Para conhecer minimamente este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem. Assim, em relação aos alunos, somente "ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio" (NCTM, 2007, p. 76). Portanto, também, só através da análise e interpretação das representações nas produções orais e escritas dos alunos podemos avaliar o seu raciocínio matemático.

Na matemática, somente se pode aprender e resolver as tarefas propostas se compreendermos, não somente as instruções e os enunciados de uma tarefa, mas também todos os processos mentais necessários para a resolver e necessariamente saber verificar a plausibilidade da resposta encontrada. Por conseguinte, a análise e interpretação das produções escritas complementadas com as produções orais dos alunos é de elevada importância para podermos analisar os processos utilizados pelos alunos na resolução das tarefas.

As tarefas podem, também, ser categorizadas quanto ao tipo de processos necessários para as solucionar. Tais como: de *reprodução* que "demandam essencialmente a reprodução de conhecimentos praticados"; de *conexão* que se baseiem "em reprodução para a resolução de problemas que não são simplesmente rotineiros, mas que ainda envolvem contextos de certa forma conhecidos, ou que se estendem e se desenvolvem além de contextos conhecidos em grau relativamente menor". Por último, itens de *reflexão* que "demandam um certo *insight* e reflexão por parte do estudante, assim como criatividade para identificar conceitos matemáticos relevantes ou para fazer a ligação com conhecimentos relevantes para criar soluções" (OCDE, 2005, pp. 40-41).

**Metodologia**

A presente investigação, de natureza *interpretativa* (Bogdan & Biklen, 1994), visa analisar os processos de raciocínio matemáticos solicitados e utilizados pelos alunos, no âmbito da geometria, em provas de avaliação externa em Matemática.

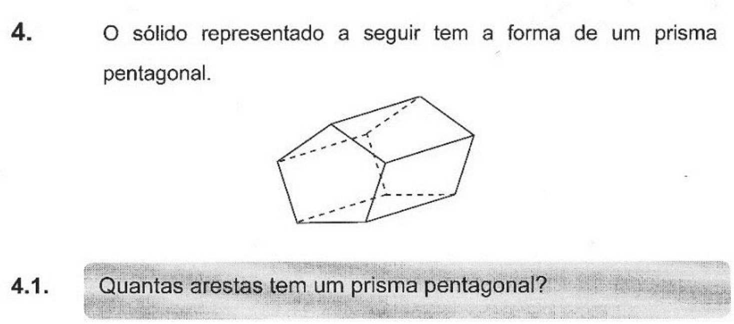
Participaram cerca de vinte e cinco alunos que terminaram o 6.º ano de escolaridade. A seleção destes alunos do sexto ano das turmas da primeira autora foi intencional e teve em conta o pressuposto de que a proximidade e confiança entre a investigadora e os participantes é mais elevada, sentindo-se, por isso, estes encorajados a expor as suas ideias num ambiente escolar que lhes é familiar. Além disso, um outro critério tido na seleção dos participantes diz respeito aos seus níveis de desempenho. O facto de os alunos manifestarem diferentes níveis de desempenho pôde permitir aceder a uma maior diversidade de estratégias de resoluções e, consequentemente, a diferentes processos de raciocínio e erros. A resolução das tarefas efetuou-se após ter sido feita a avaliação interna, o que diminui muito a probabilidade de haver fatores de interferência no estudo.

A recolha de dados para este estudo foi feita em contexto escolar, baseando-se fundamentalmente no seguinte: (i) na recolha documental (tarefas das provas de aferição relativas a 2010 e 2011 e de provas finais do 2.º ciclo de 2013 e resoluções dessas tarefas pelos alunos); e (ii) em entrevistas semiestruturadas, gravadas em áudio e vídeo. As entrevistas realizaram-se a dez alunos no dia seguinte ao da resolução das tarefas. No que refere às tarefas das provas de aferição (2010 e 2011) foram resolvidas e realizadas as entrevistas entre o final do ano letivo e o dia da prova final, por ser a altura do ano em que os alunos estão mais disponíveis e todos os conteúdos do 2.º ciclo já foram lecionados. Cada um dos dez alunos entrevistados teve perante si a ficha com a sua resolução e, após ler cada pergunta, explicou a forma como chegou à resposta.

A análise dos dados envolveu, inicialmente, a organização das informações obtidas pelas produções escritas dos alunos e pelas entrevistas efetuadas aos mesmos. Foram selecionadas três tarefas com características diferentes: a primeira da Prova de Aferição de 2010; a segunda da Prova de Aferição de 2011; e a terceira, da Prova Final de 2013. Foram tidos em consideração os seguintes domínios: a tipologia do item, os conteúdos a que a tarefa faz apelo, a situação descrita e os processos utilizados pelos alunos.

## Apresentação e análise dos dados

*Tarefa 1*


**4.** O sólido representado a seguir tem a forma de um prisma pentagonal.

**4.1.** Quantas arestas tem um prisma pentagonal?

Figura 1: Item 4.1 da Prova de Aferição de 2010

Tipo de item: Item de construção – resposta curta; Tópico: Sólidos geométricos – Identificação dos seus elementos e relação do número de arestas de um prisma com o polígono da base; Contexto: Matemático; Tarefa: Reprodução.

O resultado de acertos obtidos a nível nacional nesta tarefa foi de 68,5% e neste estudo foi de 86,7%.

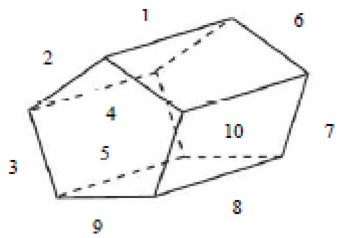
*Processos utilizados pelos alunos*

> Aluno A: Um prisma pentagonal tem 15 arestas, porque a base é 5, a outra base também é 5 e as faces são 5 também.
>
> Professora: E então?
>
> Aluno A: Tem 15 arestas.

Assim como este aluno, os alunos B, E, G, H e J utilizaram este método de contagem das arestas. Apesar de saberem que o número de arestas de cada base e o das arestas laterais ser sempre 5 não evidenciaram conhecer a propriedade dos prismas que relaciona o número de arestas com o número de lados do polígono da base. Estes alunos utilizaram um método de contagem que lhes permitiu ter uma margem de sucesso muito maior do que se fizessem uma contagem aleatória. Metade dos alunos entrevistados utilizou este método e nenhum deles falhou a contagem.

Contudo, um ou outro aluno procedeu à contagem das arestas, uma a uma, tal como ilustrado pelo aluno C:

> Aluno C: Eu escrevi 12, porque contei 1,2,3, …, 12 (o aluno conta aleatoriamente as arestas na figura como mostra o esquema seguinte).
>
> Aluno C: Acho que contei estas duas vezes (o aluno considera que uma vez que o número que está registado na ficha não é igual ao que obteve nesta contagem é porque contou duas vezes duas arestas).




> Professora: Será que o número de aresta que contou está correto? Conte outra vez as arestas.
>
> Aluno C: 1,2,3, …, 10 (o aluno volta a fazer uma contagem incompleta das arestas e por outra ordem de forma aleatória sem fazer qualquer marcação na figura e desta vez obteve 10 arestas).

O aluno D, apesar de contar de forma aleatória as 15 arestas, não conta duas vezes nenhuma ou deixa de contar alguma, isto é, consegue com sucesso contar o número exato de arestas do prisma pentagonal.

Os alunos F e I aplicaram uma propriedade dos prismas, a qual nos diz que o número de arestas de um prisma é igual ao triplo do número de lados do polígono da base.

Aluno I: 15, porque as arestas de um prisma são sempre o número de lados da base vezes três.

Professora: Então?

Aluno I: O pentágono tem 5 lados e vezes 3 dá 15.

Neste domínio, estes dois alunos encontram-se num nível mais avançado do pensamento geométrico, relativamente aos outros acima referidos. Dos dez alunos entrevistados, estes dois foram os únicos a utilizar esta propriedade da família dos prismas.

*Tarefa 2*

**20.** O presente que a Matilde comprou para a avó vem numa caixa. A caixa tem a forma de um cilindro, com $20\,\mathrm{cm}$ de altura e bases de $30\,\mathrm{cm}$ de diâmetro.

A Matilde comprou $2{,}5\,\mathrm{m}$ de fita para decorar a caixa como mostra a figura.

A fita cruza no centro da base e no centro da tampa da caixa.

Com a fita, a Matilde vai fazer também um nó e um laço no cimo da caixa.

Quantos centímetros de fita sobram para a Matilde fazer o nó e o laço?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ______________________________ cm.

Figura 2: Item 20 da Prova de Aferição de 2011

Tipo de item: Item de construção – Resposta aberta; Tópico: Sólidos geométricos – Resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos e elementos do círculo; Contexto: Vida privada; Tarefa: Conexão.

O resultado de acertos obtidos a nível nacional nesta tarefa foi de 16 % e na amostra deste estudo foi de 11%.

*Processos utilizados pelos alunos*

O aluno A não tinha resolvido a tarefa.

Professora: Agora que já leu novamente o enunciado o que é que deveria ter feito?

Aluno A: Tinha que fazer o volume.

Professora: Porquê o volume?

Aluno A: Para saber quanto… (o aluno hesita e não responde).

Professora: Sem olhar mais para o enunciado, diga o que é que a Matilde tem que fazer?

> Aluno A: Hum! Ah! Tem que pôr fita à volta da caixa.
>
> Professora: Onde é que a Matilde vai colocou a fita?
>
> Aluno A: Aqui (o aluno aponta para a fita que se vê nas duas alturas e na fita que se vê no diâmetro da tampa).
>
> Professora: Quanto é esta medida aqui? (aponto para a fita que fica na altura do cilindro).

O aluno, mesmo lendo o enunciado mais prolongadamente, não revela identificar as medidas da fita que fica na altura e no tampo da caixa.

A professora lê, mais uma vez, em voz alta o enunciado e indica ao aluno na figura a que partes da fita correspondem as medidas indicadas no enunciado.

> Professora: E agora? Como fazia?
>
> Aluno A: Se este é 20 (o aluno indica a altura do cilindro) estes dois são 40, com mais os de trás são 80 cm. Se o de cima é 30, os dois são 60. Os dois de cima são 60, com mais os dois de baixo são 120. Então tinha que somar tudo para ver se me dava 2,5 ou se me dava menos, que era para depois ver quantos centímetros sobravam.
>
> Aluno B: Eu calculei o volume do cilindro.
>
> Professora: Porque calculou o volume?
>
> Aluna B: Porque, normalmente, quando o enunciado tem a altura e o diâmetro de um cilindro é para calcular o volume.

No caso dos alunos A, B, C, E e J, o facto do enunciado se referir à altura do cilindro e ao diâmetro da base e da figura ser um cilindro, foi motivo suficiente para que fossem induzidos a calcular o volume do cilindro ou a área do círculo.

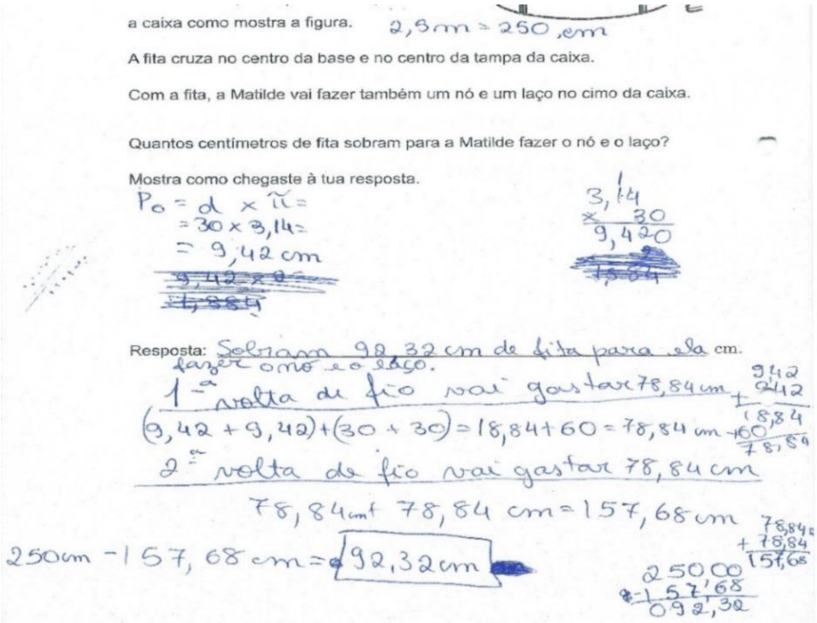
Contudo, os alunos A e J não conseguiram sem a ajuda da investigadora *interpretar a informação figurativa* e *efetuar o processamento visual da informação* (Gutiérrez, 2006), isto é, relacionar os dados do enunciado com os elementos da figura, mesmo com várias leituras do enunciado. Este facto parece ser um obstáculo à escolha de uma estratégia adequada para a resolução do problema. No entanto, após a explicação da relação entre os dados do enunciado e os elementos da figura, os alunos não só prontamente apresentam uma estratégia adequada, como efetuam mentalmente todos os cálculos necessários.

Já o aluno D, apesar de não apresentar uma estratégia completa, através da entrevista demonstrou saber como calcular acertadamente quanto sobrava de fita para o nó e para o laço:

> Aluno D: Fiz 4 vezes a altura que dá 80 cm e 4 vezes o diâmetro que dá 120 cm. Depois somei 120 com 80 que dá 200.
>
> Professora: Não falta fazer mais nada?
>
> Aluno D: Quantos centímetros de fita faltam à Matilde para fazer o nó e o laço. Faltava tirar… quanto é que faltava para a fita acabar.
>
> Professora: Quanto é que a Matilde comprou de fita?
>
> Aluno D: (O aluno volta a ler o enunciado antes de responder) 2,5 m de fita.
>
> Professora: E então?
>
> Aluno D: Tinha que passar para cm e ver quanto é que faltava.
>
> Professora: E quanto faltava?
>
> Aluno D: Hum… A 250 tiro 200 e dá 50 cm.

No caso do aluno F, parece haver também indução por parte dos dados do enunciado. Ou seja, o aluno calculou o perímetro do círculo mesmo não tendo uma explicação para a opção que fez. Contudo, neste caso, o aluno conseguiu transpor, em parte, a informação do enunciado para a figura ao perceber que a medida da altura da caixa correspondia também à medida da fita lá colocada.

> Aluno F: Eu fiz o perímetro do círculo que me deu…
>
> Professora: Porque é que calculou o perímetro do círculo?
>
> Aluno F: Para depois… Eu fiz a primeira volta e depois a segunda volta.
>
> Professora: A fita vai ser colocada à volta da tampa?
>
> (…)
>
> Professora: Porque é que decidiu calcular o perímetro do círculo?
>
> Aluno F: Para saber quanto ia gastar aqui (o aluno aponta para o diâmetro da tampa).
>
> Professora: Será que essa medida não é referida no enunciado?
>
> Aluno F: (lendo novamente o enunciado) Pois diz. Não sei porque fui calcular o perímetro!
>
> Professora: Adicionou o perímetro 2 vezes e depois 30 mais 30 e depois multiplicou por 2. Porquê estes cálculos?
>
> Aluno F: Não sei por que calculei o perímetro, mas acho que já sei por que adicionei 30 mais 30. Porque é 30 daqui (a aluna aponta para uma altura e para a outra) e depois tinha que fazer outra vez 30 mais 30 da parte de trás. Bastava fazer 20 mais 20, mais 20, mais 20, mais 20, mais 30, mais 30, mais 30, mais 30 e depois subtrair aos 250 cm os 200 cm.



a caixa como mostra a figura. 2,5m = 250 cm

A fita cruza no centro da base e no centro da tampa da caixa.

Com a fita, a Matilde vai fazer também um nó e um laço no cimo da caixa.

Quantos centímetros de fita sobram para a Matilde fazer o nó e o laço?

Mostra como chegaste à tua resposta.

$P_o = d \times \pi =$
$= 30 \times 3{,}14 =$
$= 9{,}42$ cm

3,14 × 30 = 9,420

Resposta: Sobram 92,32 cm de fita para ela fazer o nó e o laço. cm.

1.ª volta de fio vai gastar 78,84 cm

(9,42 + 9,42) + (30 + 30) = 18,84 + 60 = 78,84 cm

2.ª volta de fio vai gastar 78,84 cm

78,84 cm + 78,84 cm = 157,68 cm

250cm − 157,68 cm = $\boxed{92{,}32\text{cm}}$

Figura 3: Resposta do aluno F ao item 20.

Os alunos G, H e I, não demonstraram qualquer dificuldade em associar a informação escrita no enunciado à informação contida na imagem e optar por uma estratégia de resolução com sucesso, como ilustra a explicação dada pelo aluno H:

> Aluno H: Nós sabemos que … aqui o diâmetro é 30 cm e a altura é 20 cm. Os 20 cm de altura vai ser o comprimento da fita a passar por aqui (o aluno aponta para um pedaço de fita na altura) e aqui vai ser 30 cm e é o comprimento que a fita vai gastar a passar por aqui (o aluno aponta para o diâmetro do tampo da caixa). Então fiz o perímetro que é 20+30+20+30 …
>
> Professora: Ou seja, o número de vezes que a fita passa na altura e no diâmetro da caixa.
>
> Aluno H: Sim. 30x4 e 20x4. Então, deu 120 cm+80 cm, que dá 200 cm. Depois 2,50m dá 250cm porque transformei e depois 250cm menos 200cm. Os 250cm do total da fita e 200cm da fita do perímetro e deu 50cm. Portanto, sobram 50cm para fazer o nó e o laço.

*Tarefa 3*

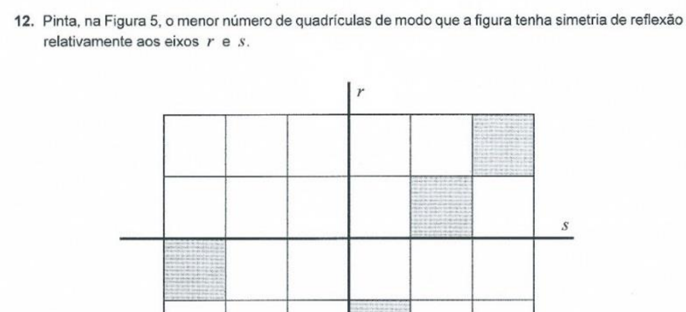



Figura 4: Item 12 da Prova Final de 2013

Tipo de item: Item de construção – Resposta curta (complemento); Tópico: Reflexão, rotação e translação – Construção do transformado de uma figura através da composição de duas isometrias de reflexão de eixo vertical e horizontal; Contexto: Matemático; Tarefa: Conexão.

O resultado de acertos obtidos na amostra deste estudo foi 53% e o resultado a nível nacional nesta tarefa ainda não é conhecido.

*Processos utilizados pelos alunos*

O aluno H faz a reflexão, em primeiro lugar, segundo o eixo horizontal e, em segundo lugar, segundo o eixo vertical. Por último, completa o esquema para que a figura seja simétrica segundo os dois eixos:

> Aluno H: Então, eu primeiro vi….Relativamente ao eixo *s* (eixo horizontal) e como já estavam pintados estes (a aluna aponta para os quadradinhos 1 e 2), também se dobrasse, este (1) ia sobrepor-se a este quadradinho (1') e este (2) ia sobrepor-se a este (2'), então pintei este. Aqui pintei este (3') porque se iria sobrepor a este (3) e aqui (4) também pintei este (4'). Depois, relativamente ao eixo r (a aluna faz o gesto com a mão indicando a reflexão da esquerda para a direita) este aqui (2) ia se sobrepor a este (2''). Depois, este aqui (1) ia se sobrepor a este (1''). Este (4) ia se sobrepor a este 4'' e como tinha pintado aqui (4') tinha que pintar aqui (4'''), porque era dos dois lados. Este aqui (1''') porque também era dos dois lados para se sobrepor e como já tinha pintado este (1') ia se sobrepor a este (1'''). Depois, este (2'') que se vai sobrepor a este (2''') e falta este (3) que se vai sobrepor a este (3'') e depois a este (3''').

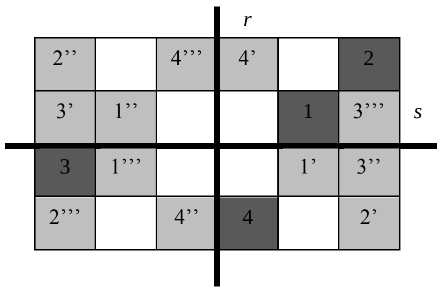



Figura 5: Esquema simplificativo do processo utilizado pelo aluno H

Mais sete dos alunos entrevistados fazem as reflexões completas, fazendo primeiramente segundo um dos eixos e só depois segundo o outro.

Cerca de um quarto dos alunos fizeram a reflexão somente segundo o eixo vertical, alegando que não perceberam que tinham que fazer a reflexão sobre o outro eixo. E, também, perto de um quarto dos alunos pintaram algumas quadrículas a mais ou deixam por pintar outras, fazendo a reflexão segundo os dois eixos só que de uma forma aleatória, como ilustra a explicação dada pelo aluno A:

> Aluno A: Esta (1) se fizesse a reflexão vai para aqui (1’).
>
> Professora: Relativamente a que eixo?
>
> Aluno A: Ao eixo s. Esta também (2), se fizermos aqui ela tomba para aqui (2’).

O aluno vai apontando os quadradinhos e respetivas imagens tentando demonstrar o seu processo.

> Aluno A: Esta (3) tomba para ali (3’). Esta (4) também tomba para ali (4’).
>
> O aluno não termina as reflexões segundo o eixo *s* e faz a reflexão de 4 segundo o eixo *r*.
>
> Aluno A: Acho que esta (2’) também tombava.

O aluno mostra-se confuso mesmo para demonstrar as reflexões dos outros quadradinhos por ele pintados.

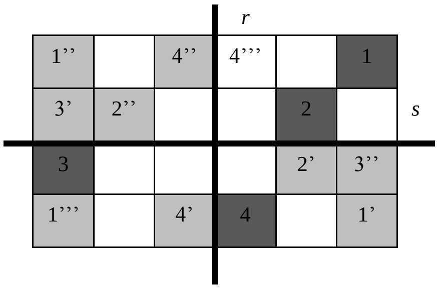



Figura 6: Esquema simplificativo do processo utilizado pelo aluno A

**Conclusões**

Na primeira tarefa, os alunos recorreram pelo menos a dois processos para obter o número de arestas do prisma pentagonal. Em qualquer um deles, a primeira fase consistiu no processo de *interpretação da informação figurativa* (Gutiérrez, 2006) para o reconhecimento na figura do elemento aresta. Em seguida, os caminhos foram distintos: (A) contagem direta na figura das arestas visíveis representadas por segmentos de reta contínuos e das arestas invisíveis representados por segmentos de reta descontínuos; ou (B) após o reconhecimento de que a base do prisma representado era um pentágono, passagem à utilização de uma propriedade dos prismas, a qual diz que o número de arestas de um prisma é igual ao triplo do número de lados do polígono da base. O primeiro conjunto de processos cognitivos é caraterístico do nível 1 (*visual ou reconhecimento e visualização*) do modelo de van Hiele. Neste nível os alunos descrevem as figuras geométricas com base no seu aspeto físico e espacial. Apesar de identificarem os elementos das figuras geométricas e algumas propriedades básicas, o significado que lhes atribuem é mais físico do que matemático. O segundo conjunto de processos cognitivos é caraterístico do nível 2 (*descritivo ou análise*). Neste nível já compreendem propriedades de figuras de uma mesma família, generalizando-as a essa família (van Hiele, 1999).

Na segunda tarefa, só 11% dos alunos conseguiram escolher uma estratégia completa e adequada para a sua resolução. No entanto, também cerca de 16% apresentam uma estratégia adequada e completa de resolução, mas cometeram pequenos erros. Perto de um quarto dos alunos não desenvolveu qualquer trabalho. Uma outra parte dos alunos (16%) tentou calcular o volume do cilindro, e os restantes adotaram procedimentos que não se adequam à resolução da tarefa. A resolução da tarefa exigia uma leitura atenta e cuidadosa do enunciado e uma interpretação minuciosa da figura que acompanhava o enunciado. Ao analisar a figura os alunos tinham que *percecionar as relações espaciais* e *discriminar visualmente* (Del Grande, 1990) os vários pedaços de fita, uma vez que os quatro que estão num plano horizontal têm a mesma medida e os quatro que estão num plano vertical também têm a mesma medida. Nesta tarefa, alguns alunos não evidenciaram estas duas capacidades, o que os impediu de apresentar uma estratégia válida. Bastou que se fizesse a correspondência entre as medidas assinaladas no enunciado e a fita representada na figura para que referissem qual a estratégia a adotar. A resolução desta tarefa implicava que os alunos estivessem no nível 3 (*dedução informal ou abstração*) do modelo de van Hiele, isto é que reconhecessem as relações de implicação que ligam as propriedades das figuras geométricas (van Hiele, 1999).

Na terceira tarefa, os alunos entrevistados que completaram a figura acertadamente fizeram-no primeiramente segundo um dos eixos, e só depois segundo o outro. Esta estratégia permite um maior sucesso na concretização da tarefa. Alguns alunos só fizeram a reflexão segundo o eixo vertical, umas vezes por má leitura do enunciado e da figura, outras por inabilidade para concluir a tarefa. Nesta tarefa, é necessário que os alunos sejam capazes de *percecionar as relações espaciais* (Del Grande, 1990), isto é, identificar corretamente as relações existentes entre os vários quadradinhos pintados e os eixos de simetria. A resolução desta tarefa implica que os alunos estejam no nível 3 (dedução informal ou abstração) do modelo de van Hiele. Neste nível os alunos usam as propriedades da composição de duas isometrias (Jaime, 1993).

Em síntese, nestas três tarefas deveriam ter sido convocadas diferentes capacidades espaciais associadas a diferentes representações. No entanto, nem sempre isso aconteceu. Quando não se encontram convenientemente desenvolvidas, estas capacidades tornaram-se impeditivas de processos cognitivos que pudessem desencadear a escolha de uma estratégia adequada para a resolução das tarefas. Contamos que este estudo, tal como o seu desenvolvimento, ao fornecer elementos de análise para uma compreensão mais profunda do tipo de conhecimentos e capacidades matemáticos a mobilizar nas questões de provas externas, venham ajudar os professores a uma intervenção pedagógica de apoio aos seus alunos mais fundamentada.

## Referências bibliográficas


Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester, *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-907). Reston VA: NCTM.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 75-89.

Bogdan, & Biklen. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Ceia, M., Filipe, A., & Santos, C. (2011). Provas de aferição e exames: a qualidade das questões de álgebra. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 149-171). EIEM 2011.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spacial Reasoning. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nova York: Macmillian Publishing Co.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37(6)*, 14-20.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometria. In P. Flores, F. Ruiz, & M. Fuente, *Geometría para el siglo XXI* (pp. 14-58). Andaluzia: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas e Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Hershkowitz, R. (1998). About Reasoning in Geometry. In C. Mammana, & V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 29-37). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrias del plano. La evaluacion del nível de razonamiento. (Tese de Doutoramento).* Universidade de Valência : Retirado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf e acedido em Março de 2012.

Mason, M. (1998). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. In *Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and Applications* (pp. 4-8). Boston: McDougal Littell/Houghton-Mifflin.

Matos, J. M., & Gordo, M. d. (1993). Visualização espacial: algumas atividades. *Educação e Matemática*, 13-17.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

OCDE. (2005). *Aprendendo para o Mundo de Amanhã: Primeiros resultados do PISA 2003.* São Paulo: Moderna Ltda.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

Semana, S., & Santos, L. (2010). Written report in learning geometry: explanation and argumentation. *CERME6*, (pp. 766-775). Lyon, France.

Shepard, L. (2001). The role of classroom assessment. In V. Richardson, *Handbook of research on teaching* (pp. 1066-1101). Washington: American Educational Research Association.

van Hiele, P. (1999). Developing geometric Thinking Through Activities That Begin With Play. *Teaching children Mathematic's, 5(6)*, 310-316.