

O Projeto Problem@Web: perspetivas de investigação em resolução de problemas

Susana Carreira¹, Nélia Amado¹, Rosa Ferreira², Hélia Jacinto³, Sandra Nobre⁴ e Nuno Amaral⁵

¹Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt; namado@ualg.pt

²Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Centro de Matemática da Universidade do Porto, rferreir@fc.up.pt

³Escola Básica José Saramago e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, helia_jacinto@hotmail.com

⁴Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, sandraggnobre@gmail.com

⁵Escola Básica 2,3 Sophia Mello Breyner Andresen, nualroam@gmail.com

Resumo. *Apresentam-se as principais linhas de investigação do Projeto Problem@Web cujo propósito geral é estudar a resolução de problemas matemáticos num contexto que se estende para além da sala de aula, centrado em competições matemáticas inclusivas que decorrem através da Internet. Para cada um dos três focos de investigação – Tecnologias, Afetos e Criatividade – na resolução de problemas, é apresentada uma síntese do quadro teórico adotado, designadamente os conceitos chave, fazendo-se referência a aspetos específicos do campo empírico sempre que possível. Sacrificando o detalhe das abordagens metodológicas utilizadas, são sintetizados os resultados de investigação para cada uma das três vertentes a que o projeto se dedicou.*

Palavras-chave: Competições inclusivas; Resolução de problemas; Tecnologias; Afetos; Criatividade.

Introdução

Problem@Web¹ é um projeto de investigação na área da Educação Matemática, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Este projeto tem como objetivo geral estudar a resolução de problemas de matemática num contexto exterior à sala de aula – as competições matemáticas baseadas na Internet – entre as quais se

¹ Projeto Problem@Web (Mathematical Problem Solving: Views on an interactive web-based competition) decorre entre 12/2010 e 6/2014, com o financiamento da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008. As instituições envolvidas no projeto são o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e a Universidade do Algarve. A equipa é composta por Susana Carreira (investigadora responsável), Nélia Amado, Rosa Ferreira, Sandra Nobre, Hélia Jacinto, Nuno Amaral, Jaime Carvalho e Silva, Juan Rodriguez, Sílvia Reis e Isa Martins, dos quais três elementos são estudantes de doutoramento.

incluem os Campeonatos de Matemática SUB12[®] e SUB14[®], promovidos pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. O SUB12 e o SUB14 são campeonatos de resolução de problemas dirigidos a todos os alunos do 5.º, 6.º, 7.º e 8.º ano de escolaridade das regiões do Algarve e Alentejo e decorrem online, culminando com uma final presencial que se realiza na Universidade do Algarve.

O projeto Problem@Web estabeleceu três focos de investigação:

- (a) O pensamento e as estratégias de resolução de problemas matemáticos, os modos de representação e expressão do pensamento matemático e o uso de tecnologias digitais na atividade de resolução de problemas;
- (b) As atitudes e afetos relativos à matemática e à resolução de problemas matemáticos, tanto em contexto escolar como extraescolar, considerando alunos, pais e professores.
- (c) A criatividade manifestada na resolução de problemas matemáticos e a sua relação com o uso de tecnologias digitais;

Ao longo do desenvolvimento do projeto, foram sendo apuradas e redefinidas várias questões de investigação mais específicas que guiaram o trabalho de investigação, em diálogo permanente com os referentes teóricos adotados. Assim, foram colocadas, em cada uma das vertentes do projeto, as seguintes questões:

- a1) O que podemos saber sobre o modo como os alunos desenvolvem conceitos e fazem uso de representações matemáticas e que estratégias utilizam na resolução de problemas matemáticos?
- a2) Quais são as funções e as influências da utilização espontânea das tecnologias digitais, nomeadamente do computador, na atividade de resolução de problemas e nas formas de expressão do pensamento matemático que os alunos adotam?
- a3) Como se caracteriza a relação entre a fluência matemática e a fluência tecnológica dos alunos na sua atividade de resoluções de problemas?
- b1) Como veem os alunos a matemática envolvida na resolução de problemas em competições inclusivas, comparativamente com a matemática presente nas suas atividades regulares na aula de matemática?

b2) Como interpretam os pais, familiares e professores a relevância da participação dos jovens em competições matemáticas inclusivas, designadamente através da Internet, e que tipo de envolvimento têm pais e professores nestas atividades?

b3) Como se manifesta a procura de ajuda dos alunos numa competição matemática inclusiva e como se relaciona com o gosto pela resolução dos problemas e com a dificuldade sentida na resolução?

b4) Como se caracterizam os participantes numa competição matemática inclusiva de âmbito regional relativamente à sua relação com a matemática, com a resolução de problemas e com as tecnologias?

c1) O que podemos saber sobre a criatividade matemática expressa nas resoluções dos alunos a problemas matemáticos, do ponto de vista das estratégias que adotam?

c2) Como se relaciona a criatividade matemática dos alunos com a sua utilização de representações matemáticas na resolução de problemas, considerando em particular o modo como tiram partido do poder representacional das tecnologias digitais?

c3) Como se relaciona a criatividade matemática com a liberdade de produzir pensamento matemático e comunicação matemática?

O projeto assumiu uma abordagem metodológica de natureza eminentemente interpretativa e qualitativa, que foi complementada com a análise estatística dos dados de uma amostra intencional, provenientes de um questionário aplicado online. Os principais resultados produzidos até ao momento envolvem o tratamento de dados qualitativos, em grande parte através da análise de conteúdo de documentos digitais (mensagens de correio eletrónico e ficheiros anexados) recolhidos ao longo das duas competições matemáticas atrás referidas, mas incluem também dados provenientes de entrevistas de tipo semiestruturado a alunos, pais e professores e a observação participante, em sala de aula, no decurso de uma experiência de ensino baseada na resolução de problemas com recurso à folha de cálculo. O projeto enveredou ainda por uma metodologia de pendor etnográfico ao realizar períodos de observação e interação prolongados nas residências de alguns dos alunos e respetivas famílias, o que constituiu um dos desafios mais significativos em termos metodológicos.

Competições matemáticas inclusivas

Nos dias de hoje é amplamente reconhecido que “a sala de aula é apenas um dos locais onde a educação habita” (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich, & Taylor, 2008, p. 53). Muitos estudos internacionais revelam que os alunos também aprendem matemática fora do currículo escolar, designadamente em atividades extracurriculares, clubes de matemática, feiras de ciências, semanas da matemática, escolas de verão, em sítios da Internet e em competições matemáticas (Morris, 1987; Barbeau & Taylor, 2009; Simpkins, Davis-Kean, & Eccles, 2006, Jones & Simons, 2000). Tal aprendizagem parece exercer um efeito positivo nas atitudes dos alunos, aumentando o gosto por esta disciplina e desenvolvendo a autoconfiança; por outro lado, parece ter igualmente reflexos positivos na sociedade, em geral, na medida em que tende a envolver as famílias e os professores na promoção do interesse pela matemática. O estudo longitudinal de Simpkins et al (2006) oferece importantes resultados sobre a influência da participação das crianças em atividades extracurriculares, nas áreas de matemática e ciências, sobre as suas escolhas futuras, mostrando que essa participação contribui significativamente para a boa autoestima e o desenvolvimento do autoconceito dos jovens e para uma maior valorização destas disciplinas no seu percurso académico. Como concluem estas investigadoras, uma potencial estratégia para aumentar as futuras escolhas académicas dos jovens em matemática e ciências é incentivar o envolvimento precoce das crianças em atividades de matemática e ciências para além da escola.

Entre as múltiplas atividades que decorrem fora da sala de aula encontram-se as competições matemáticas que nas últimas décadas têm aumentado em todo o mundo. De um modo geral, as competições podem dividir-se em duas grandes categorias: exclusivas e inclusivas. São exemplos de competições matemáticas, de carácter seletivo, as conhecidas Olimpíadas Portuguesas de Matemática ou as Olimpíadas Internacionais de Matemática, que se destinam a alunos especialmente talentosos para a matemática. Muitas vezes, este tipo de competições com elevado grau de dificuldade tem ainda o objetivo de detetar novos talentos nesta área. As competições matemáticas de carácter inclusivo, geralmente abertas a todos os alunos, como o concurso Canguru Matemático ou os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14 têm vindo a ganhar terreno relativamente às anteriores. Estas novas competições inclusivas tendem a aproximar-se de atividades de enriquecimento educacional; em muitos casos decorrem através da

Internet e são dirigidas a alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas e diversos níveis de desempenho escolar a matemática (Stockton, 2012; Freiman & Applebaum, 2011).

As tecnologias na resolução de problemas

Para os objetivos deste projeto, um dos aspetos centrais das competições matemáticas SUB12 e SUB14 reside no facto de se realizarem à distância, através da Internet. Ao longo da fase de apuramento, na página web dos campeonatos, os participantes encontram cada um dos dez problemas que vão sendo propostos quinzenalmente e enviam as suas resoluções por correio eletrónico. Uma das condições primordiais para a aceitação de uma resposta submetida é que seja apresentado e explicado o processo utilizado para obter a solução. Os alunos participantes, não só têm de resolver cada problema corretamente como têm de encontrar formas de exprimir o seu raciocínio e de tornar visíveis as suas estratégias, podendo socorrer-se de todas as ferramentas digitais que tiverem ao seu dispor e que acharem úteis para elaborar a resolução do problema. Neste sentido, o campeonato dá uma valorização importante à componente comunicacional da atividade de resolução de problemas.

No quadro teórico do projeto são particularmente relevantes as teorias que permitem considerar a expressão do pensamento matemático como uma componente integrante do processo de resolução de problemas, isto é, que orientam a investigação acerca da resolução de problemas em torno da unidade *resolver-e-exprimir*. Por outro lado, importa considerar do ponto de vista teórico o que significa a expressão das ideias matemáticas dos alunos por meio de representações próprias e baseadas na tecnologia. Em suma o referencial teórico visa enquadrar o fenómeno dos alunos a resolver problemas de palavras com as suas próprias tecnologias digitais.

Os proponentes da *Perspetiva dos Modelos e Modelação* têm fornecido evidências de que os alunos são capazes de criar modelos conceptuais no decurso da elaboração de formas de pensar sobre uma situação (Lesh & Doerr, 2003a). Um pensamento produtivo sobre uma determinada situação tem como resultado um modelo conceptual da situação, que inclui *sistemas descritivos ou explicativos explícitos*. É a qualidade descritiva e explicativa do pensamento que faz com que funcione como um modelo, uma exteriorização das maneiras como os indivíduos estão a interpretar a situação e a desenvolver meios para alcançar uma solução para o problema.

Os alunos produzem ferramentas conceptuais onde se incluem sistemas descritivos ou explicativos explícitos que funcionam como modelos que revelam aspetos importantes sobre o modo como os alunos estão a interpretar as situações presentes na resolução de problemas (Lesh & Doerr, 2003b, p. 9).

Ao invés de separarmos a fase da resolução do problema da fase de elaboração da resposta, propomos que estes são dois aspetos intimamente ligados da resolução de problemas e que essa ligação é, eventualmente, mais profunda quando o uso de ferramentas digitais está disponível para apoiar a expressão do pensamento. Portanto, as descrições, ilustrações, explicações, e todo o material incorporado no “produto final”, constituem o caminho percorrido para que o produto se torne naquilo que é.

Descrições, explicações e construções não são simplesmente processos que os alunos usam a caminho de produzir ‘a resposta’ e não são simplesmente pós-scripts que os alunos apresentam após ‘a resposta’ ter sido produzida. Estes SÃO os componentes mais importantes que são necessários nas respostas (Lesh & Doerr, 2003b, p. 3).

Borba e Villarreal (2005) defendem que as ferramentas tecnológicas não substituem nem complementam o ser humano nas suas atividades cognitivas, mas que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização do pensamento humano. Como ideia central, os autores propõem que o conhecimento já não é produzido apenas pelo sujeito, resultando, sim, de uma simbiose entre seres humanos e tecnologias – uma entidade que denominam de seres-humanos-com-media:

Pensamos que o conhecimento é produzido em conjunção com um dado medium ou tecnologia da inteligência. Por essa razão adotamos uma perspetiva teórica que dá suporte à noção de que o conhecimento é produzido por um conjunto composto por humanos-com-media ou humanos-com-tecnologias e não, como outras teorias sugerem, apenas por indivíduos ou por conjuntos somente compostos por seres humanos (Borba & Villareal, 2005, p. 23).

O acesso fácil e rápido a qualquer ferramenta tecnológica permite que os jovens desenvolvam um elevado número de competências que lhes conferem uma certa sofisticação e destreza na procura de conhecimentos em contextos que vão para além da escola. Vários autores (Tapscott, 1998; Prensky, 2006; Oblinger & Oblinger, 2005; Carreira, 2009; Carreira, Amado & Jacinto, 2011) sugerem que os jovens de hoje – nativos digitais – possuem características e modos de ação singulares que estão diretamente relacionados com as tecnologias que utilizam diariamente. Essas peculiaridades espelham-se na forma como pensam, como acedem a informações, as

absorvem e interpretam, como comunicam e, conseqüentemente, como aprendem (Oblinger & Oblinger, 2005).

A ideia da expressão do pensamento como parte integrante da resolução de problemas de matemática ganha atualmente novos contornos porque expressar o pensamento matemático implica considerar os meios para o realizar. Hegedus e Moreno-Armella (2009) acentuam a expressividade matemática como um dos aspetos nucleares dos novos ambientes tecnológicos, afirmando que há uma nova expressividade representacional disponível porque que os alunos podem tirar partido de várias funcionalidades da tecnologia, as quais permitem “formas naturais” de expressão – metáforas, registos informais e dêixis (expressões que apontam para o contexto da situação), bem como gestos e movimentos. Nos dados obtidos por Hegedus e Moreno-Armella (2009) na resolução de problemas matemáticos com tecnologias sobressaem ações que parecem estar diretamente ligadas ao uso dos recursos tecnológicos, como por exemplo, colorir de forma estratégica, usar esquemas visuais ou inserir pontos, como forma de sublinhar o sistema matemático subjacente. Nas palavras destes autores, “os alunos exprimem-se de formas vívidas, tanto informalmente como formalmente” (p. 405). É nesse sentido que parece ser mais adequado falar de um certo discurso matemático dos jovens que comunicam matematicamente com recurso a ferramentas digitais, no qual a escrita continua a ser um dos elementos, embora não o único nem necessariamente o mais evidente.

Como Stahl (2009b) nos descreve, o discurso expositivo na resolução de problemas é a narração de uma história sobre a forma como o problema foi resolvido, geralmente fornecendo um relato sequencial dos elementos essenciais que constituem o processo de resolução. No contexto de um *discurso matemático digital expositivo*, um grande número de signos, consideravelmente impulsionados pelo uso de ferramentas digitais, torna-se importante e definatório: uso da cor, linguagem natural, linguagem matemática, realces, desenhos, imagens, fotos, ícones, diagramas, etiquetas, códigos pré-simbólicos, símbolos, tabelas, caixas de texto, outputs de programas específicos (folhas de cálculo, sistemas de geometria dinâmica, programas de gráficos), e muitos outros.

Súmula de resultados

Dos resultados da investigação deste projeto, no domínio das tecnologias na resolução de problemas, conclui-se que os participantes nos campeonatos demonstram possuir

uma predisposição para a utilização de ferramentas tecnológicas na sua atividade de resolução de problemas, que se pode apelidar de “natural”, no sentido dado por Hegedus e Moreno-Armella (2009).

Os participantes mostram grande capacidade para tirar partido de ferramentas digitais de uso quotidiano e da sua expressividade representacional para dar forma e substância ao seu próprio raciocínio e à construção de uma estratégia de resolução. O computador não constitui apenas um meio para escrever a resolução mas é, acima de tudo, uma ferramenta indissociável da forma de resolução encontrada. Os participantes usam a tecnologia como uma “linguagem nativa” para pensar, agir e comunicar, refletindo uma certa imagem de “nativos digitais”, com um discurso matemático digital expositivo.

A fluência tecnológica destes jovens emerge intimamente associada às suas capacidades matemáticas, numa combinação que designamos por *fluência tecno-matemática*. O ser-se fluente numa linguagem que envolve simultaneamente capacidades tecnológicas e matemáticas pode determinar o sucesso na resolução de problemas de matemática com recurso às tecnologias. Neste contexto, a fluência tecno-matemática influencia a forma como cada concorrente é capaz de tirar partido da tecnologia para compreender, analisar e representar o problema, resolvê-lo e expressar a sua estratégia, isto é, para estruturar e desenvolver o seu pensamento matemático durante a atividade de resolução de problemas.

Num contexto de resolução de problemas matemáticos para além da escola, os alunos fazem uso de matemática e de pensamento matemático que não é apenas impulsionado pelo currículo ou pelo conhecimento matemático escolar; distinguem entre o tipo de problemas da sala de aula e o tipo de problemas dos campeonatos, atribuindo aos últimos características que entroncam na construção de modelos conceptuais: encontrar um meio de pensar produtivamente acerca da situação, integrando elementos descritivos e explicativos na sua abordagem ao problema.

É comum observar-se uma ampla gama de resoluções para cada problema que ilustra a liberdade de escolher a abordagem, a estratégia ou as representações matemáticas que melhor servem os propósitos de cada um ao resolver-e-exprimir os problemas.

Entre os diversos recursos disponíveis no computador, a folha de cálculo mostra uma crescente adesão dos participantes (nas sucessivas edições dos campeonatos que foram acompanhadas) em problemas que envolvem pensamento numérico e algébrico,

revelando indícios claros de processos de transição da aritmética para a álgebra, como é apontado por diversos estudos (Haspekian, 2005; Friedlander, 1998). Assim, obtiveram-se várias resoluções que tiram partido da folha de cálculo em problemas que tipicamente são associados a sequências numéricas, equações e inequações, sistemas de equações, e, de um modo geral, em problemas que envolvem variáveis e relações numéricas (múltiplos, divisores, proporcionalidade direta e inversa, potências, etc.). Experiências realizadas em sala de aula, a partir da resolução de problemas propostos nos campeonatos, mostram que a folha de cálculo permite ajudar os alunos na construção de modelos conceptuais informais, fortemente marcados pela linguagem própria da ferramenta tecnológica, que o professor pode usar com sucesso na aprendizagem de métodos algébricos formais e mesmo de linguagem algébrica simbólica.

Em problemas de raciocínio analítico (comumente designados por problemas lógicos) revelam um aparente à vontade no uso de raciocínio condicional, sendo muito rara a ocorrência das falácias documentadas na investigação sobre os raciocínios silogísticos mais comuns. Embora exibam modelos de conceptualização do problema com diferentes graus de robustez para a obtenção expedita de uma solução, identificam nitidamente as condicionantes impostas e ativam frequentemente o raciocínio por redução ao absurdo. O recurso a tabelas e diagramas é com frequência utilizado como veículo de organização do raciocínio dedutivo e simultaneamente de expressão da forma de raciocínio do tipo “se... então...”.

Num outro tipo de problemas, em que está presente a covariação, isto é, relações entre variáveis tais como tempo e distância (por exemplo, problemas que envolvem movimento) verificou-se que os alunos raramente se aproximam das resoluções algébricas (tipicamente usadas pelos peritos). Pelo contrário, encontram formas de resolução-e-expressão muito centradas em representações visuais, em que predominam esquemas, diagramas, imagens, setas, linhas, ícones, etc., correspondendo a uma maneira de “reproduzir” a natureza dinâmica da situação – a variação ao longo do tempo. Algumas destas representações contêm uma evidência clara da simbiose “alunos-com-computador” (Borba & Villareal, 2005) e mereceram a designação de “quasi-dinâmicas”. Além destas, sobrevém uma outra categoria de resoluções igualmente abundantes, de natureza essencialmente descritiva e muito apoiada na linguagem verbal; a estas foi atribuída a qualificação de “narrativas”, por descreverem

essencialmente por palavras o movimento ou outro tipo de variação dinâmica, ao longo de uma sequência de instantes de tempo.

Aspetos afetivos na resolução de problemas

Desde a década de 70 do século XX que os investigadores em educação matemática discutem aspetos relacionados com os afetos. Em 1989, McLeod & Adams dão um importante contributo para esta área de investigação com o seu trabalho “Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective”. As ideias destes autores saíram reforçadas quando, em 1996, num contexto de investigação em neurociências, Damásio destaca a relação entre cognição, metacognição e afetos. Zan, Brown, Evans & Hannula (2006) consideram que um dos problemas mais relevantes na investigação sobre os afetos em matemática reside em compreender a relação entre os afetos e a cognição.

O projeto Problem@Web, ao assumir como principal objetivo estudar a resolução de problemas matemáticos desafiantes, propôs-se analisar os aspetos afetivos que rodeiam esta competição. O conceito de *competição inclusiva*, mais do que o elemento competitivo, e a ideia de *desafio matemático moderado* são conceitos chave que estruturam o referencial teórico do projeto.

Um problema matemático desafiante envolve um forte apelo afetivo, curiosidade, imaginação e criatividade, resultando, assim, num problema que dá gosto e prazer resolver, independentemente de a resolução ser ou não fácil de alcançar (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdnyakov, & Stedøy, 2009). A predisposição para resolver uma tarefa pode ser menor quando as expectativas acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil). Os desafios matemáticos moderados parecem ser aqueles que melhor conseguem levar os alunos a tentar explicar as suas estratégias, a avaliar possíveis abordagens e a apreciar várias formas de resolução. Numa palavra, uma característica marcante de um desafio matemático moderado é persuadir a pessoa a tentar (Turner & Meyer, 2004). Embora reconhecendo o carácter relativo dos desafios matemáticos moderados, há indicadores que sustentam que estes desafios favorecem o desenvolvimento de afetos positivos. Porém, outras condições devem gravitar em torno dos desafios moderados, entre as quais um ambiente social que promova sentimentos de satisfação e autoconfiança, bem como de apreço pela matemática (Schweinle, Turner &

Meyer, 2006), desencorajando a comparação social e realçando o valor e importância das tarefas desafiantes (Schweinle, Berg & Sorenson, 2013).

A inclusão tem igualmente em vista promover a satisfação e o prazer na resolução de desafios matemáticos moderados – diminuindo a frustração, dando reforço positivo e encorajando a persistência. “Níveis ótimos de desafio, rodeados por apoio afetivo e motivacional, podem proporcionar contextos muito propícios a sentimentos de satisfação, prazer, eficácia e valorização da matemática por parte dos alunos” (Schweinle et al., 2006, p. 289). Consideramos que os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14 constituem verdadeiros contextos de natureza inclusiva que propiciam aos alunos sentimentos diversos como a satisfação, o sucesso pessoal, o gosto pela resolução de problemas e pela matemática, entre outros.

O feedback dado pela organização a cada uma das resoluções dos alunos parece ser um aspecto chave no domínio dos afetos. A cada participante que envia a resolução de um problema é dada uma resposta personalizada quer a resposta esteja, ou não, correta. Se o problema está corretamente resolvido e é explicado o processo de resolução, é dado um elogio, por exemplo, “Parabéns pela tua resposta”, “Gostámos muito do teu processo de resolução”, “Contamos com a tua participação”. Se a resposta está incompleta ou incorreta, a mensagem vai no sentido de oferecer uma pista ao aluno para encontrar a forma de chegar à solução. Por exemplo, pode destacar-se um dado do problema a que o participante não deu atenção, colocar-se uma questão desafiadora, encorajando sempre o participante a corrigir e reenviar a resposta correta. Os participantes sabem que é permitido solicitar ajuda e são encorajados a fazê-lo, quer seja aos seus pais e professores ou à própria organização.

Súmula de resultados

A troca de mensagens entre a organização e os participantes, decorrente do envio sistemático de feedback às resoluções enviadas pelos alunos, promove o surgimento de afetos positivos, que se revelam determinantes para o sucesso dos participantes nos campeonatos, designadamente aumentando a persistência e a vontade de participação.

A ajuda que os alunos podem procurar e receber de diferentes fontes (pais, familiares, professores, amigos ou colegas e organização do campeonato) contribui positivamente para o sucesso ao longo da fase de apuramento e para um sentimento de realização; ao mesmo tempo, influencia positivamente a quantidade e diversidade de alunos que

decidem participar na competição. Do ponto de vista quantitativo, é de salientar que os dados obtidos por meio de um questionário, para a região do Algarve, revelam que perto de um terço dos participantes (cerca de 31%) são alunos que obtiveram classificações escolares a matemática de nível 3 ou inferior. De um prisma não quantitativo, é de referir, por exemplo, que os campeonatos registaram a participação bem-sucedida de alunos com necessidades educativas especiais.

As duas principais fontes de ajuda a que os alunos recorrem para a resolução dos problemas propostos são os pais e os professores, em percentagens bastante próximas. Este resultado revela que os campeonatos têm uma chegada considerável ao meio familiar dos jovens e que as escolas não são indiferentes à sua realização. O envolvimento parental tem aliás contornos muito interessantes neste tipo de atividade para além da escola, sendo claros os testemunhos de pais sobre a influência positiva da mesma nas atitudes dos jovens, designadamente como forma de responsabilização, de fortalecimento de atitudes de perseverança, e no desenvolvimento da autoconfiança.

A participação nos campeonatos tem um efeito fortemente integrador para alunos com diferentes desempenhos escolares e para alunos com necessidades educativas especiais. A participação desenvolve o sentimento de autoconfiança nos alunos, promove e reforça os laços entre participantes e familiares, nomeadamente no que se refere à visão da matemática.

Os participantes apreciam positivamente os desafios quando sentem uma dificuldade reduzida ou mediana na sua resolução. A complexidade de um problema ou um grau de dificuldade demasiado elevado parece estar associada a um menor grau de apreciação, levando a emoções menos positivas. Alguns dos problemas associados a conteúdos temáticos tipicamente mais complexos na matemática escolar (como é o caso da geometria), geram menor grau de apreciação. Ao invés, os problemas de raciocínio analítico recebem tendencialmente uma apreciação bastante positiva.

Existem igualmente relações interessantes entre o gosto pela resolução de problemas, reportado pelos participantes, e a noção de desafio matemático moderado. O gosto aparece fortemente associado a uma dificuldade de calibre médio e inclusive ao sentimento de que o problema foi fácil de resolver, mostrando que mesmo os alunos com maior facilidade (e eventualmente com melhor desempenho em matemática) apreciam a resolução de problemas que não apresentam uma forte dificuldade. Este

resultado é ademais concordante com o que outros estudos vêm documentando (Turner & Meyer, 2004; Schweinle et al., 2006).

A criatividade na resolução de problemas

Na sequência dos dois focos de investigação apontados antes, a criatividade surge de forma natural. Algumas características do funcionamento destas competições, entre as quais se destaca um período de tempo dilatado para a elaboração das respostas, a possibilidade de utilizar todos os recursos disponíveis ou o carácter voluntário da participação são fatores que promovem o surgimento da criatividade matemática. Embora o termo criatividade seja, muitas vezes, associado exclusivamente aos alunos excepcionais e especialmente dotados, é cada vez maior o número de investigadores a defender a tese de que criatividade pode e deve ser estimulada na população escolar em geral (Silver, 1997; Mann, 2005; Pelczer & Rodríguez, 2011). É bastante comum a crítica de que o ensino da matemática descarta o potencial criativo dos estudantes, não promovendo oportunidades de desenvolvimento das suas habilidades nem ocasiões que lhes permitam apreciar a beleza da matemática (Mann, 2006). Vários autores defendem a necessidade de criar novos espaços, onde exista um clima que inclua atividades e tarefas criativas que estimulem os alunos, na medida em que os imperativos curriculares oficiais tornam quase inexecutável esta oportunidade (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2011). A necessidade de um ambiente favorável ao surgimento da criatividade é reforçada por Sternberg (2007), ao alegar que mesmo dispondo de todos os recursos necessários para pensar de forma criativa, será difícil ou mesmo impossível a qualquer indivíduo exibir a criatividade que tem dentro de si se não tiver um ambiente estimulante e promotor de ideias novas.

No projeto aqui apresentado, assumimos o pressuposto de que os alunos em qualquer idade têm potencial criativo e podem progredir na realização desse potencial se tiverem oportunidades adequadas. Consideramos ainda que uma das formas de alimentar a criatividade é permitir que os alunos tenham autonomia para pensar por si próprios, mesmo em temas que ainda não sabem na íntegra. A liberdade de trabalhar matematicamente é, portanto, fundamental, pois a criatividade floresce quando os alunos têm a possibilidade de encontrar e usar seus próprios métodos de resolução de problemas e de se envolver realmente com a matemática (Pehkonen, 1997). Em harmonia com estes pressupostos, os campeonatos SUB12 e SUB14 valorizam

igualmente todas as estratégias utilizadas com sucesso pelos alunos na resolução dos problemas, sublinhando e aprovando a sua diversidade (por exemplo, através da publicação na página web de uma amostra de respostas enviadas a cada problema com o intuito de mostrar vários processos de abordar e resolver o problema); além disso, é tornado explícito nas regras de participação que os participantes podem recorrer a qualquer estratégia e, por último, são frequentes os problemas que aparentemente não se “encaixariam” no grau de escolaridade dos alunos, por se poderem “rotular” como problemas de combinatória ou de sistemas de três equações, por exemplo. Neste sentido, é óbvia a concepção subjacente de que os alunos conseguem encontrar formas próprias de abordar e pensar produtivamente sobre os problemas (isto é, de criar modelos conceptuais, provavelmente contextualizados e situados, de uma situação, os quais contêm as estruturas cognitivas fundamentais de conceitos matemáticos mais desenvolvidos).

A clareza, simplicidade, concisão, estrutura, robustez, inteligência e surpresa, são fatores que contribuem para o apelo estético de uma solução (Koichu, Katz & Berman, 2007). Embora a relação entre a criatividade e a beleza de uma solução matemática seja complexa, a mente matemática tende a procurar elegância em produtos e processos que regra geral vão para além dos algoritmos (Leikin, 2009). Neste sentido, é relevante contextualizar a criatividade matemática dos alunos no campo da resolução de problemas, atendendo ao seu conhecimento e experiência em matemática e reconhecendo como válidos e importantes as suas próprias estratégias e métodos para resolver os problemas apresentados.

As perspetivas que enfatizam o desenvolvimento da criatividade também atribuem grande importância à construção de ferramentas que permitam a sua avaliação e, até certo ponto, a sua medição (Leikin, 2009). Para a caracterização da criatividade dos alunos na resolução de problemas, a investigação que iniciámos baseou-se na construção de um quadro provisório de análise desenvolvido com base no estudo de Guerra (2007), cujo objetivo era avaliar a criatividade no contexto da formação de professores de matemática. Os indicadores de nível mais geral, neste quadro de análise, referem-se às três dimensões da criatividade – fluência, flexibilidade e originalidade – que permitirão reconhecer o potencial criativo no processo de resolução de problemas (Silver, 1997). Contudo, foi desde logo ensaiada a tentativa de associar a estas dimensões elementos específicos da resolução de problemas, tais como: a novidade na

estratégia ou no tipo representação matemática, a flexibilidade representacional e ainda a capacidade de comunicação associada à fluência de utilização de conceitos e procedimentos, à exploração de ideias matemáticas e à organização do raciocínio efetuado. Com efeito, o modelo psicométrico da criatividade matemática, legado por Guilford, parece revelar algumas insuficiências e não colhe total consenso nos investigadores nesta área, designadamente por estabelecer um paralelismo muito estreito entre criatividade e pensamento divergente (Mann, 2009; Lin & Cho, 2011).

Uma das opções que o projeto tem vindo a fazer na investigação da criatividade matemática dos alunos na resolução de problemas é a de dividir a atenção entre as representações matemáticas e as estratégias apresentadas pelos participantes. A aposta nas representações tem em mente o facto de que estas são centrais na resolução de problemas (Stylianou, 2008), porque constituem ferramentas vitais para registar, analisar, tratar e comunicar conceitos, métodos e ideias matemáticas (Preston & Garner, 2003). Os alunos que são capazes de recorrer a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, são mais propensos a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009). A flexibilidade de representação é ainda uma característica dos alunos que fazem escolhas adequadas de representações matemáticas matemática, tendo em conta as tarefas em mão (Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009). E uma das facetas associadas à criatividade, quer em matemática, quer noutros domínios, é a qualidade final de um trabalho. Ora, a liberdade de comunicação matemática dada aos participantes nos campeonatos para exprimirem o seu modo de resolução dos problemas, bem como a forma como eles aproveitam essa liberdade, projeta-se na criatividade das resoluções que apresentam. A utilização que fazem de ferramentas comuns disponibilizadas pelo computador evidencia capacidades e competências, matemáticas e tecnológicas, dos participantes na resolução dos problemas (Jacinto & Carreira, 2008). O recurso ao computador congrega dois aspetos poderosos – por um lado, é um meio de tornar a comunicação eficiente e, por outro, acentua o poder da visualização e a organização do pensamento matemático dos alunos.

Ao colocarmos, por seu turno, o foco nas estratégias de resolução de problemas, outra possibilidade que surge é a de olhar para a criatividade matemática como parte integrante da competência de resolução de problemas. Um estudo recente (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013) propõe um modelo que considera a criatividade matemática como uma subcomponente da aptidão matemática, numa linha

que contraria a ideia de que a aptidão matemática é uma condição para a criatividade. Ao invés, admite-se que se os alunos são capazes de enfrentar situações matemáticas fluentemente, de forma flexível, com perspicácia e originalidade, então eles serão competentes para usar conhecimento matemático apropriado na resolução de problemas. E neste sentido, a competência de resolução de problemas passa pela capacidade de gerar uma estratégia eficiente que conduza à solução.

Tem sido repetidamente sustentada por vários autores a ideia de que a criatividade é um conceito bipartido: implica simultaneamente originalidade e eficácia (Runco & Jaeger, 2012; Selter, 2009; Aldous, 2007). Como propõe Aldous (2007), uma definição simplificada de criatividade seria: a produção de algo novo e eficaz. Assim, para a criatividade se manifestar, ambas as qualidades – novidade e utilidade – têm de estar presentes. Aquilo que é novo e original mas que não revela utilidade, ajuste ou adequação ficará vedado a ser reconhecido como criativo. Portanto, a ideia de novidade eficaz pode corresponder tão-somente a uma forma bem-sucedida de resolução de um problema de matemática (Aldous, 2007). Por outro lado, o autor salienta que a produção de uma novidade eficaz tem de ser vista relativamente ao sujeito que a cria. Se um indivíduo produz uma solução eficaz para um problema, que outros poderão ter resolvido anteriormente mas que é um problema novo para o indivíduo em causa, então a criatividade do indivíduo considera-se expressa. Deste modo, a definição de criatividade na resolução de problemas de matemática não se restringe ao caso de uma descoberta eminente mas inclui realizações mais modestas e quotidianas como as que surgem com alunos em idade escolar, ao resolverem problemas que são novos para eles.

Súmula de resultados

Um dos sinais presentes em muitas das resoluções dos participantes nos campeonatos que constituiu um ponto de partida para uma análise da sua criatividade matemática foi o fator surpresa emergente nas suas produções. Com efeito, um grande número de resoluções, nos mais variados problemas propostos, tem impacto pela sua originalidade mas também pela engenhosidade visível no modo como os alunos delinearam e expressaram uma forma de obter a resposta.

A originalidade e a eficácia aliam-se de modos particularmente relevantes em problemas que tipicamente são considerados como estando para além dos conhecimentos escolares dos jovens. Nestes problemas, em especial, surgem estratégias

de resolução que mostram formas produtivas de pensar matematicamente e que não requerem o conhecimento da matemática formal que se associa a tais problemas. O efeito surpresa transparece igualmente, em muitos casos, na utilização inventiva de ferramentas tecnológicas de uso comum (Word, PowerPoint, Paint, Excel...), sendo muito evidente a adequabilidade da ferramenta ao propósito de lidar com o problema. A título de exemplo, referimos o caso da utilização dos diagramas disponíveis nas ferramentas “SmartArt” do Word ou do PowerPoint para a construção de um esquema em árvore, num problema do SUB12 que envolveu a determinação do número de combinações possíveis de cores, tamanhos e acabamento numa fábrica de *jeans*.

No que se refere ao uso de representações matemáticas, o valor criativo das soluções passa, em grande medida, pela forma acentuam a clareza na comunicação do processo de resolução.

Resolver problemas, usando as ferramentas tecnológicas disponibilizadas pelo computador, estimula os participantes a procurar formas eficazes e simultaneamente interessantes de resolver-e-exprimir, contribuindo para a riqueza das representações que produzem. Parece evidente que as tecnologias usadas têm valor de originalidade e eficácia na resolução de problemas de matemática, denotando que as competências tecnológicas dos participantes não se limitam a uma utilização trivial das tecnologias mas estão associadas à expressividade e à criatividade.

As tecnologias digitais permitem aos participantes recorrer a formas eminentemente visuais, como o desenho, as cores, os esquemas, as imagens, as tabelas e os destaques, para produzir e comunicar o seu pensamento matemático. Tirando partido destas ferramentas, os participantes têm a possibilidade de fazer matemática, de trabalhar ao seu próprio ritmo e no seu próprio discurso matemático digital. Este fenómeno parece estar associado às características dos campeonatos, uma vez que estes dão aos participantes a liberdade de usarem os seus próprios processos de resolução, quer recorrendo ao conhecimento matemático que já possuem, quer à sua experiência e à sua capacidade de dar sentido às situações e de pensar produtivamente sobre elas.

Em termos da criatividade das estratégias, importa referir que alguns dos professores entrevistados no decurso da investigação revelaram ter ficado surpreendidos com muitas das abordagens dos seus alunos a alguns dos problemas que estes resolveram e enviaram no decurso do campeonato. Alguns referiram nunca ter pensado em

determinadas estratégias produzidas pelos alunos. Igualmente presente nessas entrevistas foi o reconhecimento da grande diversidade de estratégias espelhada na seleção de respostas que são regularmente publicadas na página web dos campeonatos.

Para alguns problemas foram analisadas as estratégias usadas em resoluções inovadoras e eficazes, em busca das suas características mais salientes. Assim, com base num problema que envolveu frações e proporções, surgiram algumas características que permitiram descrever de forma global as principais estratégias: simplificação; esquematização; aplicação de conceitos intuitivos; redução da quantidade de variáveis; tradução entre diferentes representações numéricas. As estratégias assim distinguidas permitiram concluir que a criatividade matemática na resolução do referido problema parece fortemente associada a tendências como a da procura da simplicidade, o pensar com figuras, a agilidade conceptual, a intuição, o sentido prático e a sagacidade.

Referências bibliográficas

- Aldous, C. R. (2007). Creativity, problem solving and innovative science: Insights from history, cognitive psychology and neuroscience. *International Education Journal*, 8(2), p. 176-186.
- Barbeau, E. & Taylor, P. (Eds.). (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.
- Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. New York, NY: Springer.
- Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos “nativos digitais” com os “manipulativos virtuais”. *Quadrante*, XVIII (1-2), p. 53-85.
- Freiman, V. & Applebaum, M. (2011). Online Mathematical Competition: Using Virtual Marathon to Challenge Promising Students and to Develop Their Persistence. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(1), p. 55-66.
- Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological Environments beyond the Classroom. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). New York, NY: Springer.
- Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, 91(50), p. 382-383.
- Guerra, E. (2007). *Creatividad y desarrollo profesional docente en matemáticas para la educación primaria*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Barcelona, Barcelona).
- Haspekian, M. (2005). An ‘instrumental approach’ to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), p. 109-141.
- Hegedus, S. J. & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, p. 399-412.

- Jacinto, H. & Carreira, S. (2008). “Assunto: resposta ao problema do Sub14” – A Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 434-446). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2011). Home technologies: how do they shape beyond-school mathematical problem solving activity? In M. Joubert, A. Clark-Wilson, & M. McCabe (Eds.), *Proceedings of ICTMT 10* (pp. 159-164). University of Portsmouth, Portsmouth, UK.
- Jones, K. & Simons, H. (2000). The Student Experience of Online Mathematics Enrichment. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 103-110). Hiroshima, Japão: PME.
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). Does Mathematical Creativity Differentiate Mathematical Ability? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1056-1065). University of Rzeszów, Poland.
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 45, p. 167-181.
- Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadjevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom – Sources and Organizational Issues. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.
- Koichu, B., Katz, E. & Berman, A. (2007). What is a beautiful problem? An undergraduate students’ perspective. In J. Woo, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 109-113). Seoul, Korea: PME.
- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 130-144). Rotterdam: Sense Publishers.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (Eds.). (2003a). *Beyond Constructivism – Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a Model and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism – Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lin, C-Y. & Cho, S. (2011) Predicting Creative Problem-Solving in Math From a Dynamic System Model of Creative Problem Solving Ability. *Creativity Research Journal*, 23(3), p. 255-261.
- Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. (Tese de Doutorado, University of Connecticut, USA).
- Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30 (2), p. 236-260.
- Mann, E. L. (2009) The Search for Mathematical Creativity: Identifying Creative Potential in Middle School Students. *Creativity Research Journal*, 21(4), p. 338-348.

- McLeod, D. & Adams, V. M. (1989). (Eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*. New York, NY: Springer.
- Morris, R. (Ed.). (1987). *Studies in mathematics education – Out-of-school mathematics education*. Paris: Unesco.
- Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, p. 627-636.
- Oblinger, D. & Oblinger, J. (2005). Educating the Net Generation. EDUCAUSE. <http://www.educause.edu/educatingthenetgen>. [Acedido em 18 de Julho de 2009].
- Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 29(3), p. 63-67.
- Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity Assessment In School Settings Through Problem Posing Tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 8(1-2), p. 383-398.
- Prensky, M. (2006). *Don't bother me, Mom, I'm learning! How computer and video games are preparing your kids for 21st century success and how you can help!*. St. Paul, MN: Paragon House.
- Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(1), p. 38-43.
- Runco, M. A. & Jaeger, G. J. (2012). The Standard Definition of Creativity. *Creativity Research Journal*, 24(1), p. 92-96.
- Schweinle, A., Berg, P. J., & Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*. (Published online: May 2013). DOI:10.1080/01443410.2013.785049.
- Schweinle, A., Turner, J., & Meyer, D. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *Journal of Educational Research*, 99(5), p. 271-293.
- Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, p. 619-625.
- Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 88-100). Rotterdam: Sense.
- Silver, E. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 29(3), p. 75-80.
- Simpkins, S. D., Davis-Kean, P. E., & Eccles, J. S. (2006). Math and Science Motivation: A Longitudinal Examination of the Links Between Choices and Beliefs. *Developmental Psychology*, 42(1), p. 70-83.
- Stahl, G. (2009). Interactional Methods and Social Practices in VMT. In G. Stahl (Ed.), *Studying Virtual Math Teams* (pp. 41-55). New York, NY: Springer.
- Sternberg, R. (2007). Creativity as a Habit. In A. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 3-25). Singapore: World Scientific.
- Stockton, J. C. (2012). Mathematical Competitions in Hungary: Promoting a Tradition of Excellence & Creativity. *The Mathematics Enthusiast*, 9(1-2), p. 37-58.

- Stylianou, D. (2008). Representation as a cognitive and social practice. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, p. 289-296). Morelia, México.
- Tapscott, D. (1998). *Growing up digital: The rise of the Net generation*. New York: McGraw-Hill.
- Turner, J. & Meyer, D. (2004). A Classroom Perspective on the Principle of Moderate Challenge in Mathematics. *The Journal of Educational Research*, 97(6), p. 311-318.
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), p. 113-121.

