Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Desenvolver o raciocínio proporcional – Contributo de uma abordagem de ensino exploratória

Ana Isabel Silvestre
Escola Básica 2,3 Gaspar Correia, Portela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
anaisabelsilvestre@gmail.com

Resumo. *Esta comunicação apresenta um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional em alunos do 6.º ano, no âmbito de uma unidade de ensino de cunho exploratório. O estudo é uma experiência de ensino, uma forma de design research, pois procura conhecer a influência de uma unidade de ensino no desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos. Os resultados mostram que, antes da unidade de unidade de ensino, os alunos tendem a usar estratégias não-proporcionais e pré-proporcionais na resolução de problema de valor omisso e de comparação, nem sempre com sucesso. Os resultados também mostram que os alunos, no final da unidade de ensino, revelam tendência para usar estratégias proporcionais, nomeadamente a estratégia escalar na resolução de problemas de valor omisso e a estratégia funcional na resolução de problemas de comparação. Deste modo, as aprendizagens dos alunos suportam a conjetura de ensino-aprendizagem segundo a qual esta capacidade se desenvolve quando os alunos (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas de valor omisso e de comparação relativos a relações de proporcionalidade direta, problemas pseudoproporcionais e outros problemas em que se averigua a existência de proporcionalidade direta; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações*.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, Unidade de Ensino, Abordagem exploratória.

Introdução

A capacidade de raciocínio proporcional é importante não só na resolução de problemas do quotidiano mas também na aprendizagem de outras noções matemáticas e de outras áreas do saber. Porém, os alunos revelam com frequência dificuldades na resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a identificação da relação de proporcionalidade direta e o cálculo do valor omisso. A investigação sobre o raciocínio proporcional tem vindo a delinear os vários aspetos de que este se reveste, salientando a importância da compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta. Ao mesmo tempo, a investigação tem alertado para a morosidade e a forte influência da experiência escolar no seu desenvolvimento.

O trabalho de cunho exploratório (Ponte, 2005), nomeadamente envolvendo regularidades e relações no âmbito do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, é um bom quadro para desenvolver o raciocínio proporcional. De facto, este tipo de raciocínio envolve o saber estabelecer relações e comparações entre grandezas e quantidades. Esta abordagem é tida como uma alternativa ao tradicional uso da regra de três simples, que de acordo com Norton (2005) é um aspeto problemático no ensino da Matemática.

O desenvolvimento e aperfeiçoamento de unidades de ensino por investigadores é um dos processos através dos quais se podem gerar artefactos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática letiva. Ao mesmo tempo, estas unidades permitem desenvolver e testar teorias sobre o modo como os alunos aprendem em condições diferentes das que usualmente lhes são proporcionadas. Esta comunicação apresenta o percurso de aprendizagem de dois alunos, no quadro de uma unidade de ensino sobre a noção de proporcionalidade direta, de cunho exploratório com as orientações sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.

Raciocínio proporcional

Neste trabalho considero que o raciocínio proporcional envolve três aspetos principais: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais: e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (Silvestre & Ponte, 2011; Silvestre, 2012). Ao indicar estes diferentes aspetos que envolvem o raciocínio proporcional, pretendemos contribuir para uma configuração de indicadores capazes de orientar o ensino-aprendizagem, de modo a desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos.

Ser capaz de distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outras relações que não o são é um aspeto fundamental do raciocínio proporcional. Para isso, durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a relação de proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem uma relação de proporcionalidade direta mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência. Estes problemas apresentam uma relação aditiva, uma relação de proporcionalidade inversa ou outras situações em que não existe uma relação de proporcionalidade direta. A semelhança da estrutura sintática dos problemas pseudoproporcionais e de valor omisso (o tipo mais comum de problema de proporcionalidade direta) é responsável pelo evocar a proporcionalidade direta. “Uma toalha demora 20 minutos a secar. Quanto tempo demoram três toalhas a secar?” é um exemplo de um problema pseudoproporcional em que não existe relação de proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, ou seja, o número de toalhas não está relacionado de forma proporcional com o tempo de secagem.

Nas estruturas multiplicativas, isto é, nas situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou ambas as operações, Vergnaud (1983), identifica três classes, sendo uma delas o isomorfismo de medidas, que se refere a uma proporção direta simples. Neste caso, as transformações que se operam dentro ou entre variáveis mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos, como mostram a figura:

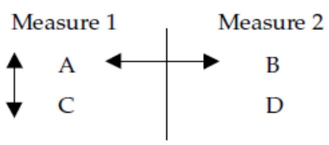


Figura 1 – Isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983)

Tendo em conta estas transformações, Stanley, McGowan e Hull (2003) argumentam que a abordagem em que os alunos “resolvem proporções” (sic) está ultrapassada e deve ser substituída por outra abordagem em que estes se envolvem em atividades que os ajudam a descobrir que a proporcionalidade é a variação mútua de duas grandezas.

Neste trabalho, são usados problemas proporcionais de valor omisso, de comparação. Os primeiros apresentam três valores numéricos e pedem o quarto valor, o valor omisso. Os problemas de comparação apresentam dois ou mais pares de valores numéricos e pedem a sua comparação. Nalguns casos, o contexto destes problemas exige um julgamento qualitativo. Os problemas de comparação podem ser numéricos ou não e podem envolver um julgamento qualitativo de acordo com o respetivo contexto (por exemplo, “No recipiente A dissolveram-se 10 gramas de sal em 2 litros de água. No recipiente B dissolveram-se 20 gramas de sal em 10 litros de água. Em qual dos recipientes a água é mais salgada?”). Os problemas de comparação numérica apresentam os quatro valores numéricos da proporção e solicitam ao aluno que indique se uma das razões é maior, menor ou igual à outra. Por sua vez, os problemas de valor omisso apresentam três dos quatro valores da proporção e solicitam ao aluno que determine o valor omisso (por exemplo, “Com 3 euros compro 2 chocolates. Quantas chocolates posso comprar com 21 euros?”).

Os fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta são o contexto, os números e a estrutura numérica, as grandezas e as representações. O contexto dos problemas diz respeito ao fenómeno exposto, que pode ser um sistema físico complexo (por exemplo, a balança de braços). Os números utilizados nos problemas são mais um fator que influencia a complexidade dos problemas e, consequentemente, as dificuldades dos alunos. As grandezas discretas e contínuas são ainda outro fator com impacto na complexidade dos problemas, sendo de referir que a natureza das grandezas está estreitamente relacionada com o fenómeno descrito no contexto do problema. As grandezas têm também uma natureza extensiva (referem-se apenas uma única entidade, por exemplo, 6 livros) ou intensiva (envolvem uma razão entre duas entidades, por exemplo, 12 garrafas por caixa) que deve ser tida em consideração. Finalmente, as representações presentes no problema são igualmente um fator que influencia a complexidade dos problemas. O conhecimento por parte dos professores dos fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta permite a organização estruturada das tarefas a propor aos alunos de modo a desenvolver o seu raciocínio proporcional.

A construção de uma unidade de ensino da proporcionalidade direta

Wittmann (1998) diz que a Educação Matemática tem como cerne a construção de artefactos e a investigação dos seus efeitos em diferentes ecologias educativas. Estes artefactos incluem unidades de ensino, conjuntos coerentes de unidades de ensino e o próprio currículo. Uma unidade de ensino tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem (uma conjetura de ensino-aprendizagem), sendo constituída por uma sequência de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didáticos. A conjetura de ensino-aprendizagem, tem uma natureza eminentemente teórica, baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar (Sandoval, 2004). A unidade de ensino tem um cunho exploratório, procurando envolver os alunos em tarefas não rotineiras, em cuja resolução mobilizem os seus conhecimentos intuitivos. A conjetura de ensino-aprendizagem que lhe está subjacente assume que os alunos desenvolvem o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta (de valor omisso e de comparação), problemas pseudoproporcionais e outros em que se averigua a existência de proporcionalidade direta; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fração; razão com dois pontos). A unidade de ensino, como mostra o quadro 1, é constituída por 5 fichas de trabalho e por dois testes. A ficha de trabalho inicial apresenta aos alunos uma investigação, a segunda ficha uma exploração e as restantes três fichas são constituídas por problemas proporcionais (valor omisso e comparação) e pseudoproporcionais.

Com o teste diagnóstico pretende-se conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, antes do desenvolvimento da unidade de ensino, em particular os vários aspetos considerados neste estudo, e decidir se sobre a sua exequibilidade. O teste final pretende dar a conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos após o desenvolvimento da unidade de ensino.

Metodologia

O estudo é uma experiência de ensino, uma das forma de *design research*, que pretende conhecer a influência da unidade de ensino na capacidade de raciocínio proporcional dos alunos (Confrey, 2006). A unidade de ensino foi desenvolvida em duas turmas de uma escola da periferia de Lisboa. Estiveram envolvidas duas professoras que desenvolveram um trabalho colaborativo com a primeira autora desta comunicação.

Todas as aulas da unidade de ensino foram gravadas em vídeo. Foram também recolhidos e posteriormente analisados os registos escritos dos alunos nas diversas tarefas. Foram aplicados às turmas dois testes, um teste de diagnóstico e um teste final. Tendo em consideração a natureza do estudo, a análise de dados é essencialmente descritiva.

Quadro 1 - Planeamento da unidade de ensino.

Fichas de Trabalho e Testes	Descrição	Modo de trabalho	Tempo (bloco 90 minutos)
Teste inicial	- Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre os aspetos que envolvem o raciocínio proporcional.	Individual	1
Ficha 1 O coelho e a tartaruga	**- Natureza da tarefa:** Investigação **- Objetivos da tarefa:** • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Representar a informação em tabelas e gráficos. **- Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	2,5
Ficha 2 O segredo da tartaruga	**- Natureza da tarefa:** Exploração **- Objetivos da tarefa:** • Distinguir as relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são. • Experimentar vários valores invariantes (constante de proporcionalidade) e verificar que a relação de covariação se mantêm. • Explicar o significado da constante de proporcionalidade. • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado de forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). **- Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	1,5
Ficha 3 No país das tartarugas	**- Natureza das tarefas:** Problemas **- Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso e de comparação). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **- Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 4 Maratona dos coelhos e mais problemas	**- Natureza das tarefas:** Problemas **- Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de percentagem). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **- Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 5 Pista interdita a coelhos e outras histórias	**Natureza das tarefas:** Problemas **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de escala). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Teste final	- Avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos durante a unidade de ensino, relacionadas com os aspetos que envolvem raciocínio proporcional.	Individual	1

A realização da unidade de ensino

Nesta secção apresento alguns episódios da realização das tarefas na aula. Na primeira aula as professoras apresentam a tarefa da ficha de trabalho 1 (ver a figura seguinte), dizendo que se trata de uma investigação, chamam a atenção os alunos para a necessidade de realização de registos durante o trabalho para poderem fazer um relatório detalhado e dão indicações sobre a constituição dos grupos e a gestão do trabalho em grupo.

Todos os anos se realiza a corrida mais famosa do mundo. (...) O esquema mostra a prova realizada pelo coelho e pela tartaruga. (...) Investiga o terá acontecido durante a corrida.

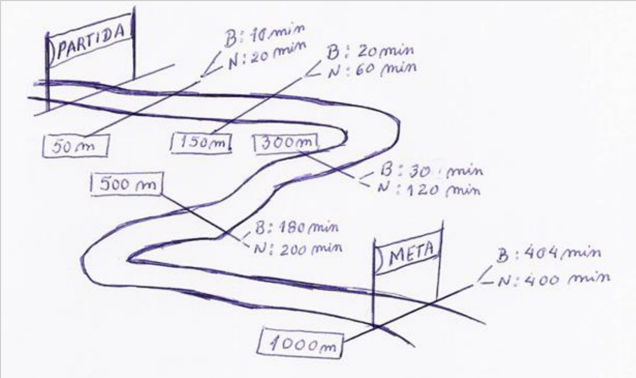


Figura 2 – Ficha de trabalho 1 (aspeto parcial)

Após receberem a ficha, os alunos levam algum tempo a formular conjeturas que reúnam o consenso da maioria dos elementos dos respetivos grupos. Este processo é demorado mas implica-os na realização de um trabalho cognitivamente exigente que requer a mobilização do seu conhecimento e que vai além da Matemática, exigindo ainda a organização das ideias para as comunicar com clareza aos outros elementos do grupo, como mostra o diálogo de um grupo da turma A.

> *Carolina*: Que a tartaruga ganhou toda a gente sabe.
>
> *Rita*: Como é que se sabe isso em Matemática?! (...)
>
> *Manuel*: [A tartaruga] ganhou a corrida porque fez menos tempo que o coelho, é normal... Olha aqui. (Aponta para o registo do tempo gasto pelo coelho.) Esse não é o problema!
>
> *Carolina*: Sim. O que é preciso saber é como é foi a corrida... Não pergunta quem ganhou a corrida!
>
> *Rita*: O coelho dormiu! (Risos) Na história foi assim...
>
> *Manuel*: E a "stora" ia pôr isso assim! Bué da fácil! (...)

> *Carolina*: Isto é uma história matemática temos é de ver os números nisto [no esquema]... (...) Olha aqui, o coelho aqui foi muito mais rápido que a tartaruga, fez 100 [minutos] e a tartaruga 200 [minutos] (...) Só depois dos 500 metros é que ele gasta mais tempo que tartaruga. Na metade do fim, dos 500 para os 1000 metros, o coelho perdeu aí. (A Júlia, o quarto elemento do grupo parece não estar a perceber e Carolina repete o que tinha dito, indicando os valores numéricos no esquema.)
>
> *Manuel*: Foi depois dos 500 metros que ele dormiu e perdeu tempo para a tartaruga. (Segue-se uma discussão sobre este argumento.) (...)
>
> *Rita*: Mas se ele dormiu não saiu do lugar! Eu acho que ele se cansou e depois foi a correr mais lento e perdeu.
>
> *Carolina*: (...) É mesmo isso! Olha aqui, [o coelho] aos 150 metros deveria ter feito 300 [minutos] e fez 200 [minutos]. (Os colegas não percebem e Carolina explica.) Aqui (aponta para os150 metros) é 50 mais 50 e mais 50 então aqui (aponta para o tempo realizado pelo coelho aos 150 metros) deveria ser 300 [minutos], 100 mais 100 e mais 100. Mas é 200 [minutos], foi muito mais rápido. (...)
>
> *Rita*: (Relevando satisfação pela sua ideia ter sido aceite.) Então o coelho perdeu porque se cansou a meio... Hum, depois do meio da corrida. Ele primeiro foi muito rápido...

Os alunos deste grupo começam por analisar os valores numéricos e a conjeturar sobre o que teria acontecido na corrida, acabando por considerar que o coelho se cansou e, por isso, perdeu. É interessante verificar que Carolina recorre a uma relação de proporcionalidade direta utilizando um procedimento aditivo para explicar aos colegas porque pensa que o coelho tinha realizado até ali uma corrida rápida. É provável que esta aluna, dada a sua facilidade em realizar cálculos mentalmente, tenha verificado a existência da relação que explica na corrida a tartaruga, mas não a comunicou. Nesta turma, a professora vai passando pelos grupos, demorando-se naqueles onde nota mais dificuldades. Trata-se dos grupos em que os alunos, sem pensarem bem na tarefa, passam de imediato para o registo dos dados na folha de cálculo. Vai apelando à escrita do que pensa cada um dos elementos do grupo para que possam fazer um relatório detalhado. Relembra também que os alunos têm escrito coisas sem sentido porque não releem com atenção as respostas. Faltam 30 minutos de tempo útil da aula quando o grupo da Carolina inicia o trabalho na folha de cálculo, depois de travar as tentativas de Manuel para usar a folha de cálculo sem pensar no problema. No entanto, os alunos apenas representam os dados depois de optarem por duas tabelas verticais após alguma discussão sobre a vantagem desta escolha tendo por base a sua experiência anterior com a folha de cálculo. Discutem ainda o modo como determinar a "rapidez" do coelho em termos matemáticos. Quando faltam 10 minutos para terminar a aula, a professora diz aos grupos para guardarem o seu trabalho numa *pen drive* que fez circular na sala. Na segunda aula, os alunos continuaram o trabalho, tendo por foco a redação do relatório. A figura 2 apresenta parte dos relatórios de dois grupos da turma A, que descrevem o modo como os alunos representam os dados e as conclusões da sua investigação. A qualidade do trabalho de alguns grupos é surpreendente (é o caso do grupo de Tomás), revelando que os alunos são capazes de mobilizar conhecimentos adquiridos na realização de tarefas anteriores, de outros temas do programa. Os relatórios dos alunos constituem a base do trabalho realizado na terceira aula. Esta começou por uma discussão alargada na turma sobre o facto de, perante uma mesma situação, os personagens (coelho e tartaruga) terem tido um comportamento diferente na corrida. A maior parte dos alunos confirma a sua conjetura, isto é, o coelho correu inicialmente muito depressa, cansou-se e perdeu velocidade na parte final da corrida. Depois, a discussão foca-se na regularidade na corrida da tartaruga Nini. É particularmente interessante a forma como os alunos explicam que, no caso da Nini, os valores numéricos da distância e do tempo variam mantendo a mesma velocidade – a maioria dos alunos designa a velocidade por “ritmo” – reconhecendo a existência de variação dos pares numéricos das duas variáveis que mantêm velocidade constante (invariante).

Esta discussão é também importante para os alunos compreenderem que, utilizando estratégias diferentes, podem encontrar uma resposta coerente. Foi durante a discussão que a professora disse aos alunos que a constante que tinha identificado se designa por constante de proporcionalidade. O significado do valor da constante de proporcionalidade no contexto do problema suscita forte discussão, pois como vimos, o grupo de Carolina obtém esse valor (0,4) através da divisão do tempo pela distância, enquanto o grupo de Tomás opta pela divisão da distância pelo tempo (obtendo 2,5). Os alunos são também desafiados pela professora a averiguar a existência de outras regularidades e alguns apresentam o fator escalar que, dentro de cada variável, permite obter os valores indicados na tabela.

A apresentação da tarefa da ficha de trabalho 2 pelas professoras é semelhante à tarefa da ficha 1. Em particular, referem aos alunos a importância de irem efetuando registos sobre o modo como realizam o trabalho, não se limitando a apresentar apenas os cálculos e uma breve resposta. Após a leitura da tarefa, a maioria dos grupos mobiliza o relatório anterior onde estavam os dados necessários. Nas duas turmas, os grupos solicitam poucas vezes a intervenção das professoras, centrando-se a discussão em torno do valor da constante de proporcionalidade a escolher para que o coelho ganhasse a corrida usando a mesma estratégia que a tartaruga.

Resposta do grupo de Carolina:

Nini		
Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/Metros
50	20	0,4
150	60	0,4
300	120	0,4
500	200	0,4
1000	400	0,4

Barnabé		
Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/metros
50	10	0,2
150	20	0,133333
300	30	0,1
500	180	0,36
1000	404	0,404

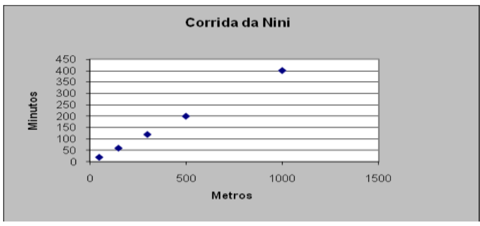
[Pela observação do esquema.] "O Barnabé até 500 metros esteve á frente. Mas dos 500 metros até á meta a Nini conseguiu vantagem de 4 minutos acabando em 1° lugar."

[A professora oralmente insistiu na investigação sobre o que teria acontecido durante a corrida.] A Rita e a Carolina propuseram uma tabela com os metros percorridos e o tempo demorado do coelho e da tartaruga. Mas o Manuel disse que assim não ficava muito bem e sugeriu que ficava melhor uma tabela para cada animal." (...) " Fizemos a conta entre os números e concluímos que a Nini andou sempre ao mesmo ritmo e o Barnabé não, ou seja, acelerou depois andou mais devagar. "

Resposta do grupo de Tomás

Barnabé		
Metros	Minutos	Divisões
50	10	5
150	20	7,5
300	30	10
500	180	2,78
1000	404	2,475
Nini		
Metros	Minutos	Divisões
50	20	2,5
150	60	2,5
300	120	2,5
500	200	2,5
1000	400	2,5
2000	800	2,5

"Começámos por fazer uma tabela como nos outros trabalhos [já realizados com recurso à folha de cálculo]. Depois colocámos todos os dados dos metros que percorreram e os minutos demoraram a percorrê-los. Observámos os números com atenção e percebemos que não podemos comparar os minutos do Barnabé com os da Nini." (...) "Fizemos a divisão dos metros com os minutos e vimos que o Barnabé foi alterando a velocidade e a Nini foi sempre na mesma velocidade." (...) "Pensámos que para podermos chegar a um resultado prolongando a pista até ter 2000 metros como o Barnabé foi alterando a sua velocidade não podia continuar a manter o ritmo mas a Nini como tinha estado sempre à mesma velocidade se a pista de prolongasse conseguiria acabar ao mesmo ritmo." (...) Fizemos os gráficos como nos outros trabalhos e a professora ajudou-nos a escolher um e vimos que na Nina os pontos estão em linha."



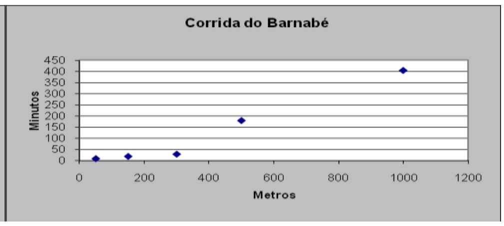


Figura 3 – Respostas de dois grupos da turma A (ficha de trabalho 1)

Durante a discussão da tarefa, na turma B, a professora procura focar a discussão no significado da constante de proporcionalidade:

> *António*: A nossa maior dúvida foi descobrir que nós é que tínhamos de escolher o valor do ritmo... Da constante da proporção, proporcionalidade, "né"?
>
> *Professora*: E como é que pensaram sobre isso?

António: Nós tínhamos feito metros por minutos [trabalho da ficha de trabalho 1] e depois deu 2,5 sempre. Metros por 1 minuto, era 2,5.

Nuno: Não! A "stora" está a perguntar porque é que era sempre o mesmo ritmo de velocidade! Era a maneira da Nini (tartaruga) correr...

António: Ah! Primeiro descobrimos que para o Barnabé ter a mesma estratégia da Nini, tinha de correr sempre da mesma maneira... E assim, não se cansava como se cansou... (...) Depois o ritmo de velocidade que tínhamos de pôr para o Barnabé, o menor do ritmo que dê para ganhar. Nós escolhermos 2,6 mas não era preciso, podia ser 2,51. (...)

Inês: (Aluna de outro grupo.) Nós escolhermos 0,3 [minutos/metro] mas antes fizemos o tempo a dividir pelos metros. (...) Para o coelho ganhar tinha de fazer menos tempo em cada metro.

Professora: Ouviram o que disse a Inês? E concordam? (...) Como é que determinaram o tempo se o coelho tivesse corrido a uma velocidade constante.

António: Posso ler (a resposta escrita no relatório)? Primeiro nós experimentámos com 3 [metro/minuto] de constante mas depois escolhemos 2,6 [metro/minuto] porque não era preciso ser... Até podia ser 2,51 [metro/minuto]. (...) Escrevemos 2,6 de constante na coluna (faz um gesto, com a mão, desenhando uma linha vertical)... Depois, como é no Excel escrevemos na linha do comando... Para fazer logo tudo, né? (...) igual, A2 barra [dividir] C2.

Professora: E o que tinham nessas colunas? Melhor, para determinar os tempos de passagem e final do Barnabé, o que é que fizeram?

António: Ham... Acho que é! Dividimos os metros [a distância], barra, pela constante. E deu! O Barnabé ganha com 384,6 (arredondado às décimas) minutos. (...) Assim, já dava para ganhar.

A ficha de trabalho 3 contém vários problemas, cada um com duas ou três alíneas. Espera-se que os alunos mobilizem o conhecimento sobre a relação multiplicativa de covariação entre variáveis e de invariância da relação entre variáveis, resolvendo problemas de valor omisso e de comparação. Paralelamente, procura-se que os alunos utilizem várias representações para desenvolverem flexibilidade na sua utilização. Apresento, como exemplo, as respostas de dois grupos da turma B a duas alíneas de um problema da ficha de trabalho (ver quadro 2).

O grupo de Dário estabelece uma relação entre variáveis e identifica 4 como constante de proporcionalidade. Utiliza esta relação para determinar o valor omisso pedido na questão *c*. Por sua vez, o grupo de Joel começa por explorar a relação de covariação entre as variáveis. Só depois explora a relação entre variáveis para identificar a constante de proporcionalidade. Este grupo, para determinar o valor omisso, opta por usar a relação dentro das variáveis. No entanto, esta estratégia revela-se problemática para responder à questão *c*. Durante a discussão do problema, a professora promove uma análise pelos alunos da eficiência do processo de resolução, em particular, no que respeita à escolha de uma estratégia que envolva números mais simples e fáceis de usar nos cálculos.

Quadro 2 - Problema da ficha 3 e resoluções de dois grupos

Por causa do tamanho das carapaças existem uma regra na atribuição de tocas. Na tabela estão representados alguns dados recolhidos em cinco veredas.

Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

a) Será possível saber o número de tartarugas que existe em cada toca? Explica como pensaste.

Resposta do grupo de Dário:

Número de tocas		Número de tartarugas
2	×4	8
6	×4	24
8	×4	32
30	×4	120
50	×4	200

$\frac{8}{2} = 4$ São 4 porque é a relação entre Número de tocas e Número de tartarugas.

Resposta do grupo de Joel:

Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

×3, ×4, ×15, ×25

Sim... 8:2=4 24:6=4 32:8=4 120:30=4 200:50=4 Cada toca tem 4 tart.

c) Quantas tocas serão necessárias para colocar 44 tartarugas? E 400 tartarugas?

Resposta do grupo de Dário:

tartarugas	tocas
4	1
44	11
400	100

Resposta do grupo de Joel:

1 toca = 4 tart.

Tocas	Tart.
11	44
100	400

×9,0909090909 ×9,090909091

Percursos de aprendizagem de dois alunos

Problemas pseudoproporcionais. Antes da unidade de ensino os alunos resolveram um problema pseudoproporcional (ver o quadro 3) que não envolve uma relação de proporcionalidade direta, inversa ou aditiva.

Quadro 3 – Problema pseudoproporcional do teste inicial e resoluções de Carolina e Manuel

A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a secar. Quanto tempo 3 toalhas demoram a secar?	
Carolina	1 toalha 30 minutos 2 toalhas 60 minutos 3 toalhas 90 minutos R: se tivesse 3 toalhas a enxugar demorava 90 minutos.
Manuel	3 toalhas demorariam ~~a enxugar~~ 90 minutos a enxugar 30 min 30 min + 30 min 90 minutos ou 30m × 3m = 90m

Carolina e Manuel resolvem incorretamente este problema pois consideram a existência da relação de proporcionalidade direta no fenómeno descrito no problema. Carolina os usa incorretamente a estratégia de composição aditiva dos valores numéricos referentes ao número de toalhas e ao tempo. Manuel usa duas estratégias, na primeira estratégia o aluno usa um procedimento aditivo e na segunda estratégia usa um procedimento multiplicativo. A escrita em linguagem matemática e natural é a representação usada pelos alunos. Carolina usa também a representação tabular porque dispões os dados na forma de uma tabela elementar.

No final da unidade de ensino foi apresentado, entre outros, um problema pseudoproporcional (ver o quadro 4) semelhante aquele que foi apresentado no teste inicial e que também não apresenta relação aditiva, de proporcionalidade direta ou inversa.

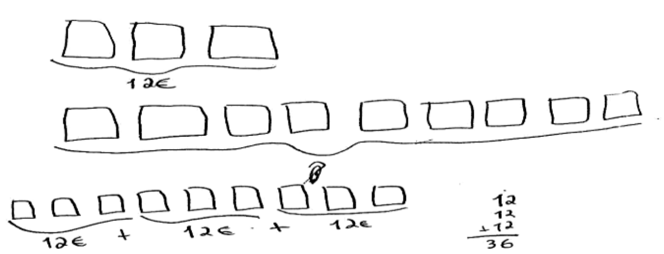
Quadro 4 – Problema pseudoproporcional do teste final e resoluções de Carolina e Manuel

Se uma camisola demora 20 minutos a secar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos a secar?
Carolina R: Não, ~~porque~~ porque estão no estendal 1 camisolas ou 5 demorão o mesmo tempo
Manuel R: Não, porque as camisolas enxugam ao mesmo tempo

Os dois alunos respondem corretamente ao problema pseudoproporcional e as suas estratégias envolvem a explicação baseada no fenómeno descrito no problema. Nestas mostram que não existe relação de proporcionalidade direta. As estratégias envolvem essencialmente a representação escrita simbólica (linguagem materna).

Problemas de valor omisso. Um dos problemas da primeira entrevista (ver quadro 5) apresenta um fenómeno do quotidiano (compra de bens) e números inteiros múltiplos de 3.

Quadro 5 – Problema de valor omisso da primeira entrevista e resoluções de Carolina e Manuel

A Margarida comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros. Quanto custam 9 livros?
Carolina: Se fossem 6 livros era o do dobro do dinheiro, 24. E se fossem 9 livros era 24 mais 12 euros. 3 livros - 12 € 6 livros - 24 € 9 livros - 36 € R: 9 livros eram 36 €. Então também podia fazer os 12 euros a dividir por 3 e dava o preço de cada livro. E depois somava os euros.
Manuel 

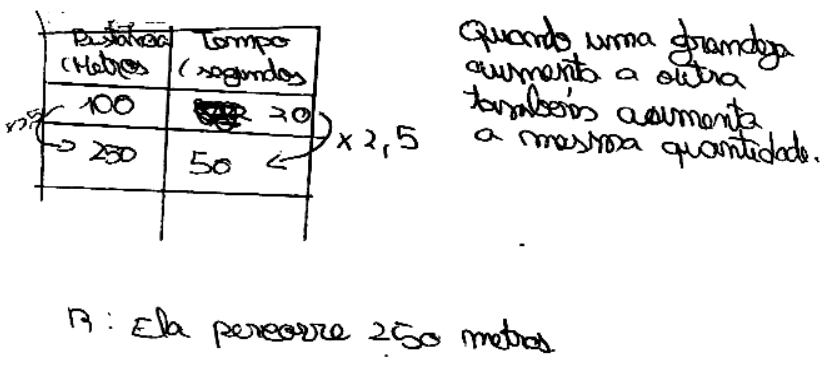
Inicialmente Carolina usa a estratégia de composição, recorrendo a procedimentos multiplicativos e aditivos, para determinar o valor omisso. Carolina comunica esta estratégia em linguagem oral complementada pela representação visual e a linguagem matemática e natural escrita. Posteriormente, a aluna apresenta oralmente outra estratégia que envolve o cálculo da razão unitária e a adição sucessiva até ser determinado o valor omisso. Por seu lado, Manuel revela conhecer o contexto do problema e responde corretamente. A estratégia do aluno conjuga elementos pictóricos dos livros e o procedimento aditivo, isto é, adição do preço de três conjuntos de 3 livros. Na resolução do problema o aluno usa a representação oral, a visual e a escrita (linguagem matemática).

A questão do teste final (ver o quadro 6) é um problema que descreve um fenómeno do quotidiano estudado durante a unidade de ensino. Os números apresentados no problema são inteiros, o valor omisso pedido é não inteiro e os fatores escalar e o funcional são, respetivamente, não inteiro e inteiro.

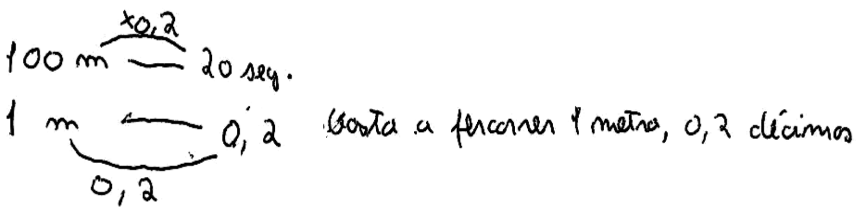
Quadro 6 – Problema de valor omisso do teste final e resoluções de Carolina e Manuel

A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos a uma velocidade constante. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos?

Carolina



Manuel



Carolina representa os dados numa tabela e utiliza a divisão para determinar o valor omisso, mostrando de forma clara o uso da estratégia escalar. Não é possível saber como é calculado o fator escalar mas tendo em consideração os números envolvidos a aluna deve tê-lo feito mentalmente (100:1=100). No entanto, escreve um erro quando explica a diminuição dos valores numéricos das variáveis ao dividir por 100, pois a centésima parte de 100 não é a mesma quantidade que a centésima parte de 20. A aluna deveria ter escrito que as variáveis diminuem na mesma proporção. A estratégia da aluna envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natura escrita.

O registo do Manuel mostra a estratégia funcional, isto é, calcula o fator funcional que usa para determinar o valor omisso indicando os procedimentos de cálculo. Durante a entrevista o aluno revelou ter realizado todos os cálculos na calculadora. A representação visual (tabela) e a escrita (linguagem matemática e natural) são usadas pelo aluno na resolução do problema.

Problemas de comparação. Um dos problemas do teste inicial (ver o quadro 7) descreve um fenómeno que os alunos do 6.º ano já presenciaram pelo menos nas aulas de Educação Física. Os números apresentados no problema são inteiros e múltiplos de 2 e a razão entre o tempo e a distância é, em ambos os caso, inteira. Por se tratar de um problema com contexto, os alunos têm de fazer um julgamento qualitativo sobre a velocidade das atletas.

Quadro 7 – Problema de comparação do teste inicial e resoluções de Carolina e Manuel

A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?	
Carolina	Sara → 8 voltas em 32 minutos Maria - 2 voltas em 10 minutos, ou seja 5 minutos em cada volta 3 voltas em 15 minutos 4 voltas em 20 minutos 5 voltas em 25 minutos 6 voltas em 30 minutos 7 voltas em 35 minutos →8 voltas em 40 minutos R: Quem correu mais depressa foi a Sara.
Manuel	Quem correu mais depresa, foi a Sara. Sara 8 voltas em 32 minutos Maria 2 voltas em 10 minutos $8 - 2 = 6$ $10 \times 6 = 60$

Carolina usa a estratégia de composição e responde corretamente. Tendo como referência o par numérico dos dados da atleta Maria, a estratégia parece centrar-se apenas na adição sucessiva de uma e cinco unidades que correspondem, respetivamente, ao número de voltas e ao tempo. Quando fixa o número de voltas (8) compara os tempos das atletas e conclui que a Sara é a mais veloz por demorar menos tempo.

A estratégia de Manuel mostra um erro de interpretação e deste modo a resposta está correta mas partindo de um pressuposto incorreto. No primeiro procedimento de cálculo determina a diferença do número de voltas das duas atletas. No segundo procedimento de cálculo determina o produto do tempo de 2 voltas de Maria (10 minutos), pela diferença de voltas das atletas, o que representa o tempo (60 minutos) de 12 voltas. Contudo, o aluno parece pensar que 60 minutos é o tempo referente a 6 voltas de Maria pelo que, a Sara é a mais veloz das duas pois só precisa demora 32 minutos a percorrer 8 voltas. O aluno usa a linguagem matemática e natural escrita na resolução do problema.

Na terceira entrevista foi apresentado um problema sobre mistura de tintas (ver o quadro 8), um fenómeno analisado durante a unidade de ensino e que requer julgamento qualitativo. Os números apresentado no problema são números inteiros e não inteiros e as razões são números não inteiros.

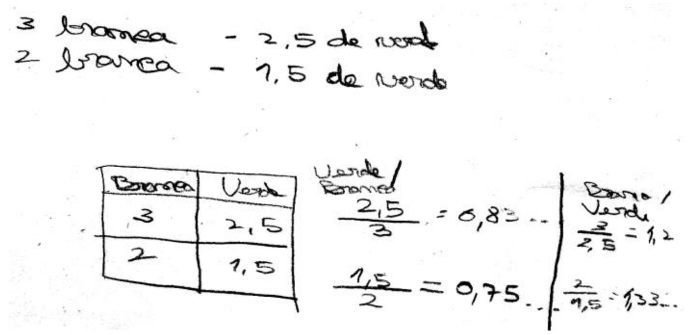
Carolina usa a estratégia funcional na resolução correta do problema que considera difícil. A estratégia implica várias representações, isto é, duas tabelas (uma elementar e outra mais elaborada) e as razões (verde:branco e branco:verde) na forma de fração e decimal, parecendo este processo fundamental para a aluna compreender de forma aprofundada o problema e decidir os procedimentos a realizar. A aluna mostra compreender o significado das razões e que a não existência de constante de proporcionalidade implica a diferença no tom de verde das tintas. A estratégia da aluna envolve a representação oral pois trata-se de uma entrevista, a visual (tabelas) e a escrita simbólica.

Manuel averigua a relação invariante entre a quantidade de tinta branca e verde que diz não existir. No entanto, não revelou ser capaz de usar esse conhecimento para indicar que as tintas têm uma tonalidade diferentes. O principal motivo da dificuldade do aluno parece ser o contexto do problema que envolve tintas e o fenómeno da sua diluição.

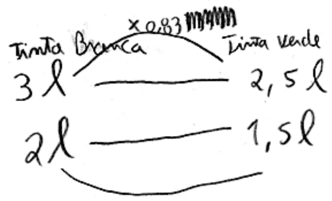
Quadro 8 – Problema comparação da terceira entrevista e as resoluções de Carolina e Manuel

A Carolina e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a Carolina preparou a tinta e misturou 3 litros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês misturou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

Carolina: Não sei se sei explicar bem. A mistura da Carolina, a minha, [mistura] é mais verde porque tem mais tinta verde para 1 litro de tinta branca**.**



Manuel: Eu não sei explicar como na aula. (Passa algum tempo.) Estes com tintas são muito difíceis, os problemas.



Conclusão

A unidade de ensino desenvolveu o raciocínio proporcional dos alunos, tendo estes melhorado o seu desempenho nos três aspetos com que caracterizamos esta capacidade matemática. Assim, os alunos melhoram o seu desempenho na distinção das relações proporcionais daquelas que o não são. Na resolução de problemas, em particular, nos de valor omisso, passam a usar estratégias multiplicativas, revelando uma melhor compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade Por fim, ampliaram o seu conhecimento sobre representações utilizando-as de forma flexível A tabela é a representação que mostram preferir na resolução de problemas de valor omisso enquanto na resolução de problemas de comparação mostram preferência pela tabela e pela razão (com dois pontos), esta última representação, já por eles usada antes da unidade de ensino.

A conjetura de ensino-aprendizagem que presidiu à elaboração d a unidade de ensino revelou-se propiciadora de aprendizagem significativa, permitindo mobilizar o conhecimento que os alunos já têm, aprofundando-o do ponto de vista matemático, envolvendo-os na generalização de regularidades e relações.

Referências

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Norton, S.J. (2005). The construction of proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the IGPME* (Vol. 4, p. 17-24). Melbourne: PME.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist*, *39*(4). 213-223.

Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocinio proporcional: Trajetórias de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the IGPME* (Vol. 4, pp. 185-192). Ankara: PME.

Stanley, D., McGowan, D., & Hull, S. H. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, *11*, 9-11.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-124). New York, NY: Academic Press.

Wittmann, E. C. (1998) Mathematics education as a 'design science'. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer.