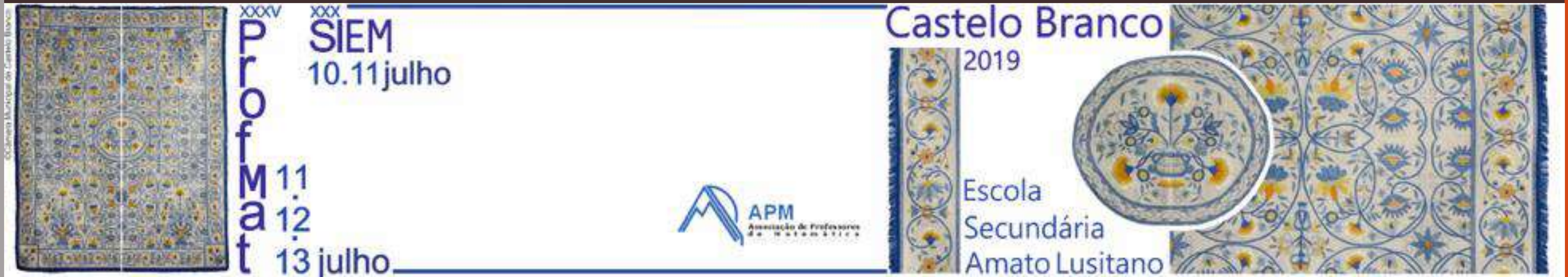
Universidade do Minho
Instituto de Educação

Antecipar estratégias e dificuldades na resolução de problemas matemáticos

Letícia Gabriela Martins | LGB.martins@hotmail.com

julho, 2019



O QUE É UM PROBLEMA?

Tarefa que se pretende resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução.

Processo de descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

Um cliente comprou num dia 2,3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1,5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?

O QUE É UM PROBLEMA?

Tarefa que se pretende resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução.

Processo de descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

O João tem metade da idade do pai. Sabendo-se que a soma das duas idades é 72, quantos anos tem o João?

PLANEAR UMA AULA

Diagrama esquemático das cinco práticas facilitadoras de uma discussão em torno de tarefas matemáticas (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008, p. 322)

Trabalho individual

Trabalho em grupo

Discussão em grupo turma

OBJETIVO DA SESSÃO

Antecipação

Antecipar dúvidas e dificuldades que podem surgir na sala de aula e possíveis estratégias para resolver o problema

PROBLEMA DO SAPO

Um sapo está no fundo de um poço com 10 metros de profundidade. Durante o dia, o sapo sobe 4 metros através da parede do poço, mas, durante a noite, e enquanto dorme, escorrega e desce 2 metros. Desta forma, quantos dias levará o sapo a atingir o cimo do poço?

* Retirado de Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IEE.

PROBLEMA DO SAPO

Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO

Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

1)

m = dia $(10 - 4m) + 2m$

dia 1 → $(10-4\times1) + 2\times1 = 8$ → falta 8 m para chegar ao topo

dia 2 → $(10-4\times2) + 2\times2 = 6$ → " 6 m " " "

dia 3 → $(10-4\times3) + 2\times3 = 4$ → " 4 m " " "

dia 4 → $(10-4\times4) + 2\times4 = 2$ → " 2 m " " "

dia 5 → $(10-4\times5) + 2\times5 = 0$ → " 0 m " " "

R: O sapo chegou ao topo ao fim de 5 dias.

PROBLEMA DO SAPO

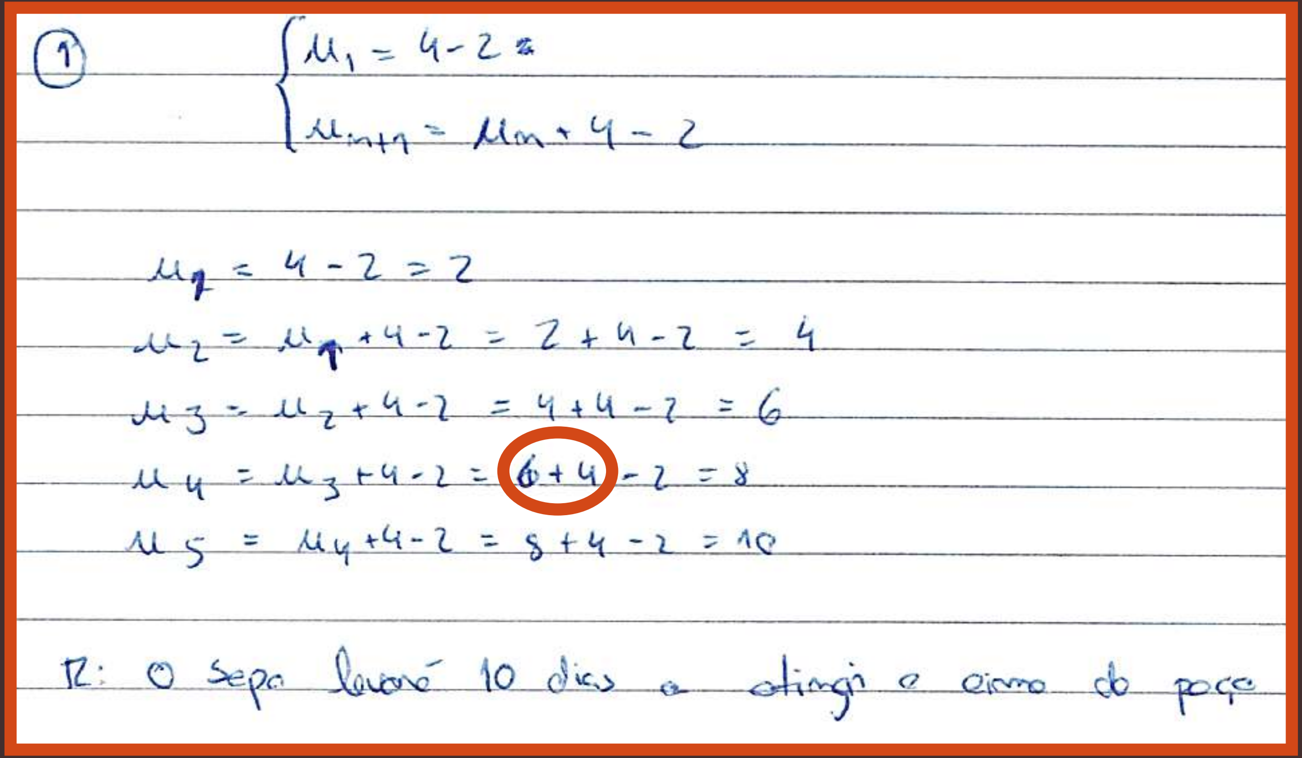
Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia


(1) $\begin{cases} u_1 = 4-2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 - 2 \end{cases}$

$u_1 = 4-2 = 2$

$u_2 = u_1 + 4 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

$u_3 = u_2 + 4 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$

$u_4 = u_3 + 4 - 2 = 6 + 4 - 2 = 8$

$u_5 = u_4 + 4 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$

R: O sapo levará 10 dias a atingir o cimo do poço

PROBLEMA DO SAPO

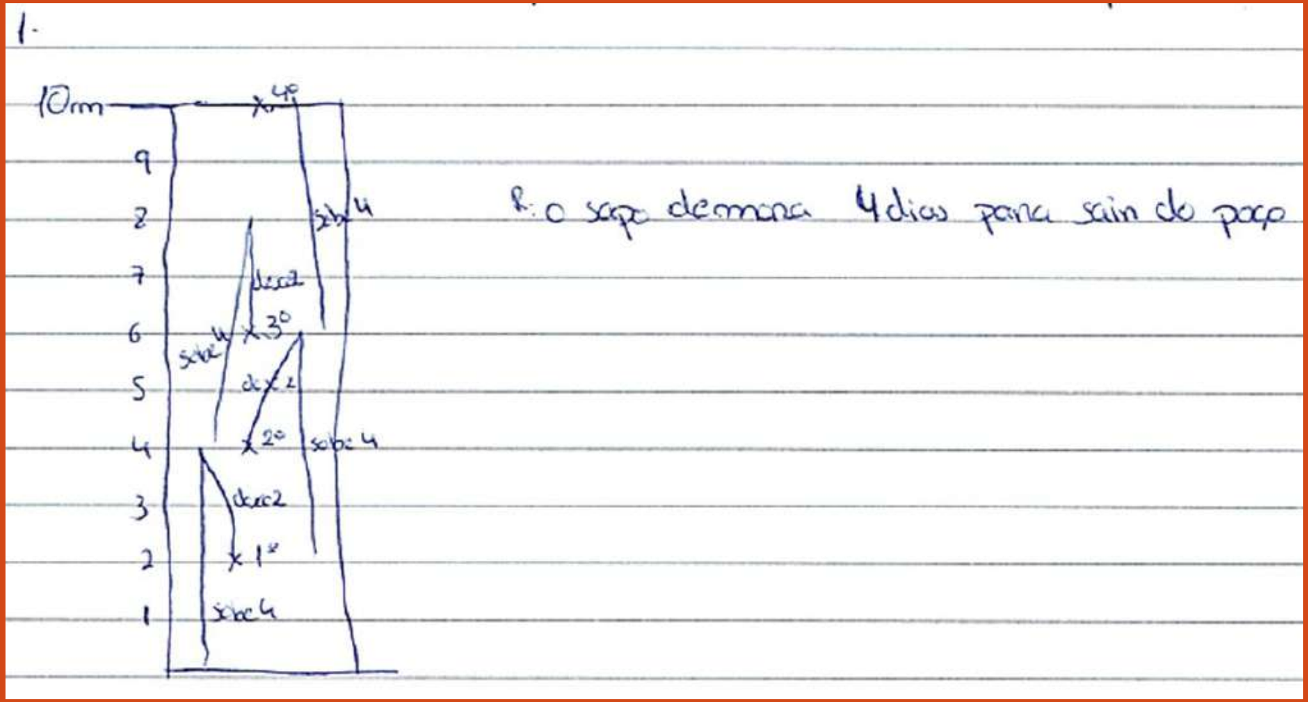
Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

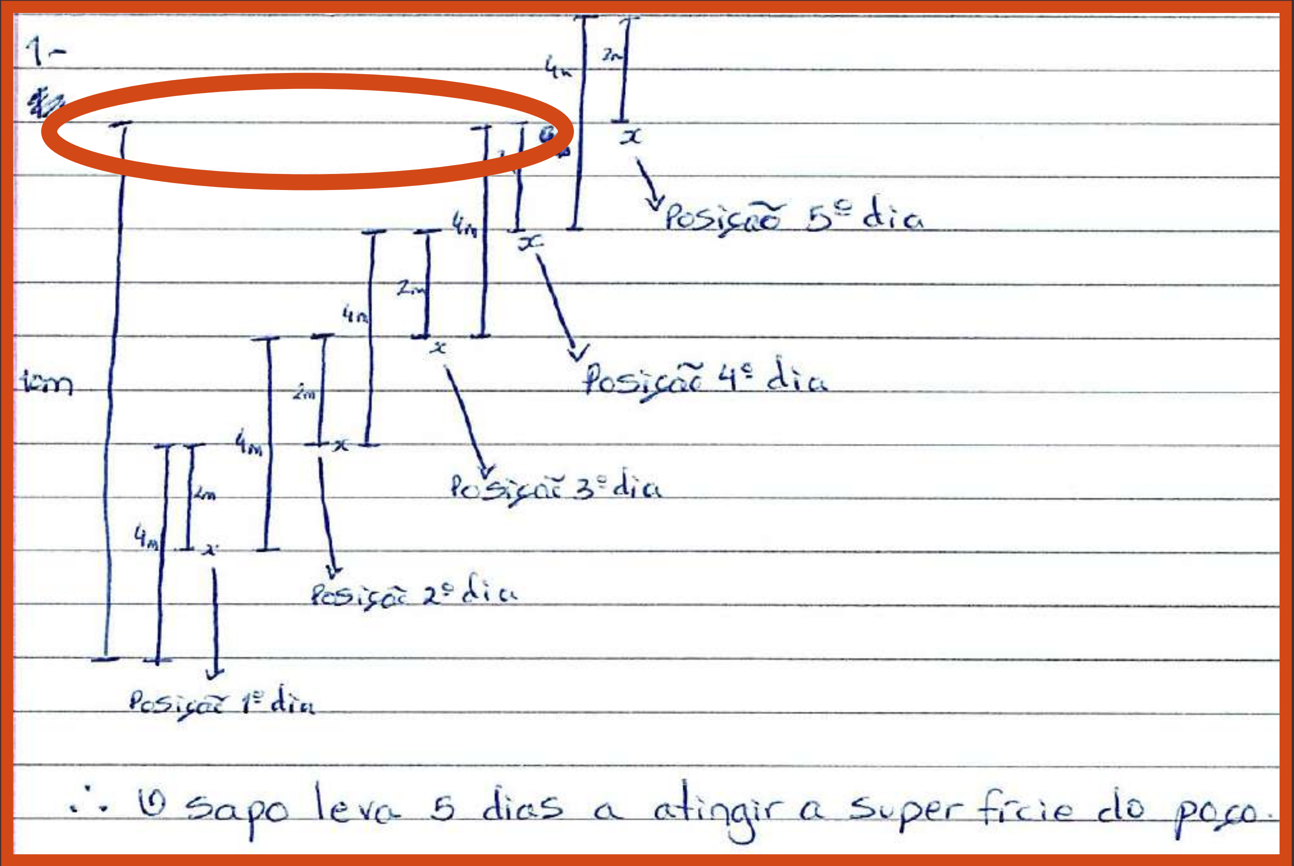
A nível de estratégia



PROBLEMA DO SAPO

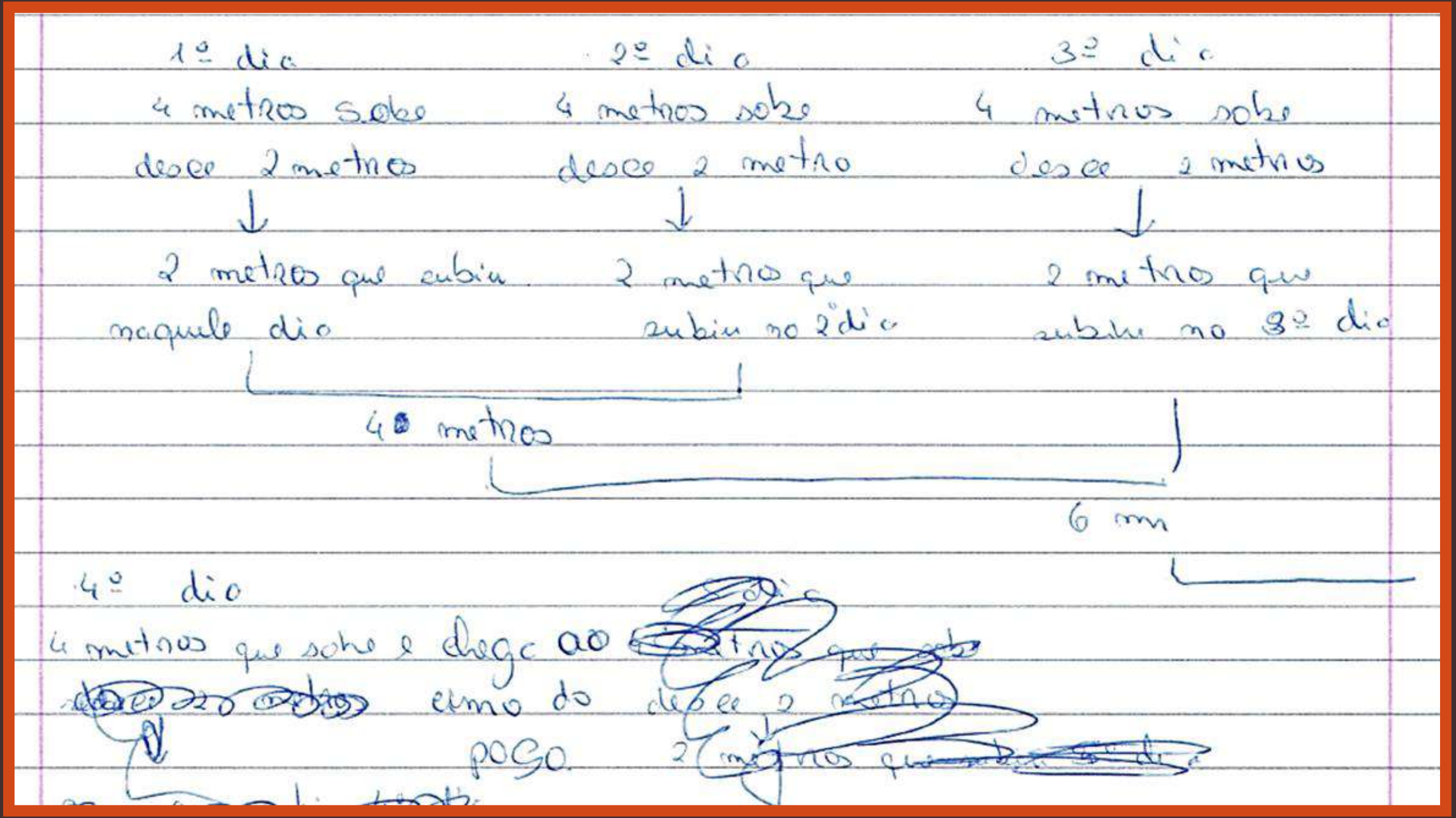
Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

- A nível de persistência
- A nível de interpretação
- A nível de seleção de informação
- A nível de estratégia



PROBLEMA DO SAPO

Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)



A nível de persistência

A nível de interpretação

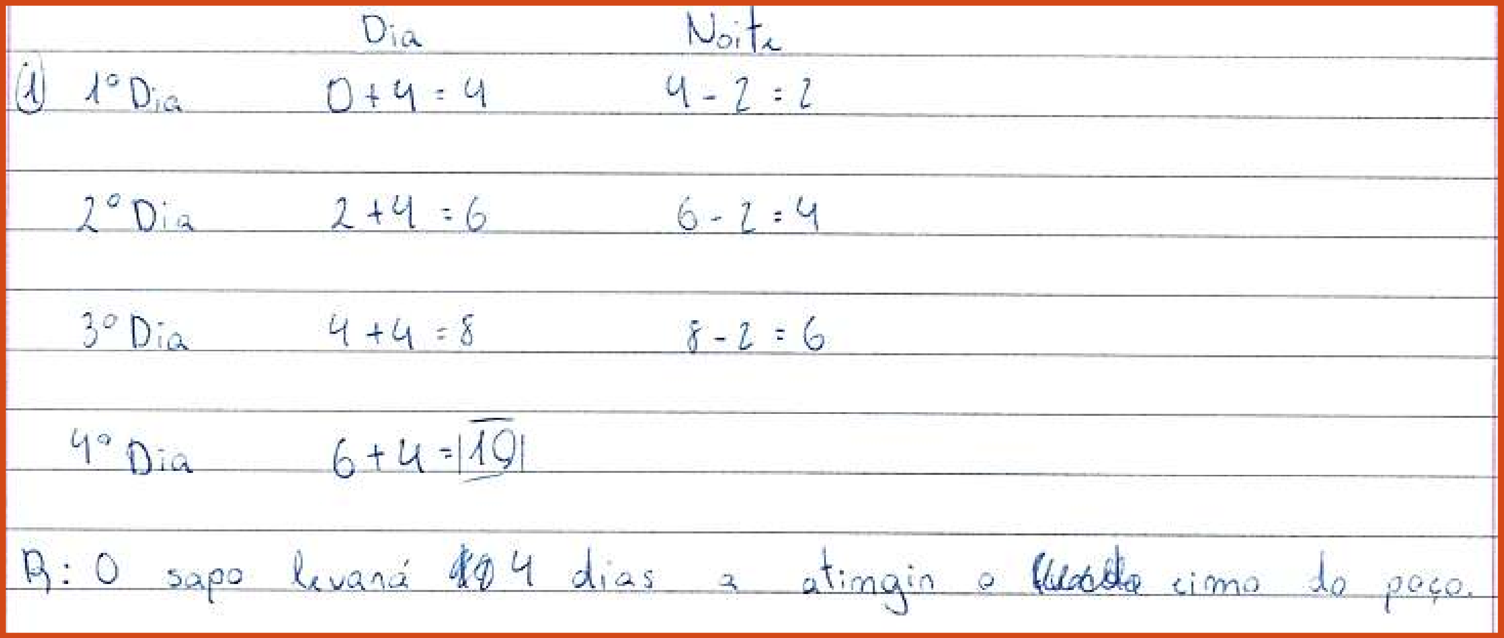
A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO

Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

- A nível de persistência
- A nível de interpretação
- A nível de seleção de informação
- A nível de estratégia

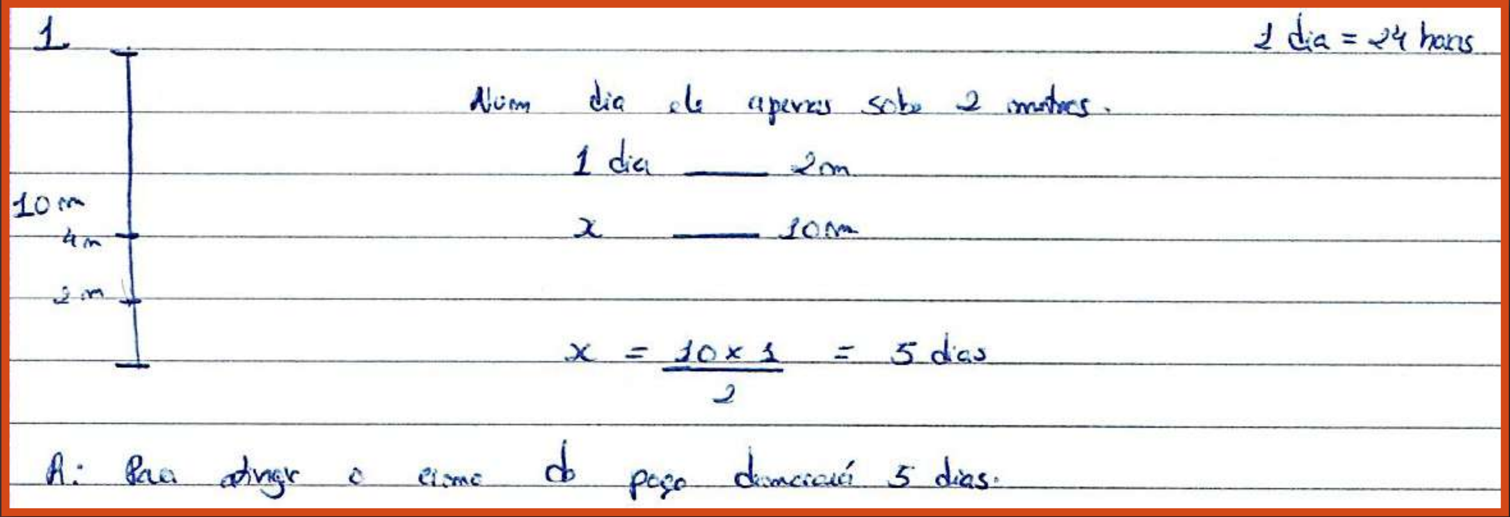


	Dia	Noite
1) 1º Dia	0+4=4	4-2=2
2º Dia	2+4=6	6-2=4
3º Dia	4+4=8	8-2=6
4º Dia	6+4=10	

R: O sapo levará ~~[illegible]~~ 4 dias a atingir o ~~[illegible]~~ cimo do poço.

PROBLEMA DO SAPO

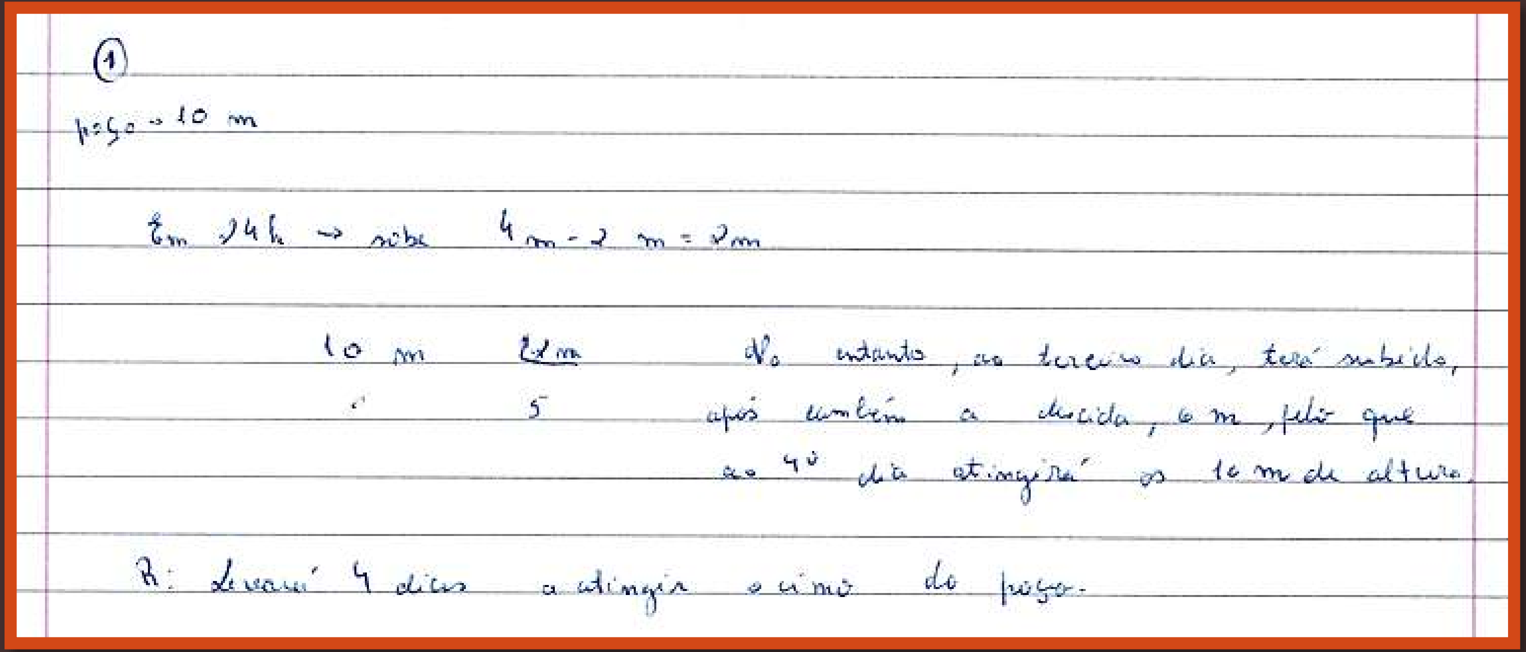
Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)



- A nível de persistência
- A nível de interpretação
- A nível de seleção de informação
- A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO

Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)


(1)

poço → 10 m

Em 24h → sobe 4 m - 2 m = 2m

10 m 2 m No entanto, ao terceiro dia, terá subido,

5 após também a descida, 6 m, pelo que

ao 4º dia atingirá os 10 m de altura.

R: Levará 4 dias a atingir o cimo do poço.

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

Estávamos oito pessoas na sala. O Gilberto cumprimentou toda a gente. A Isabel cumprimentou seis pessoas e a Beta cinco. A Gui cumprimentou quatro e o Manuel três. O Rogério cumprimentou duas pessoas e a Alcina, apenas uma. Quem é que eu cumprimentei?

O cumprimento é uma ação recíproca entre duas pessoas?

*Retirado de Viana, J. P. (2012). Eu e mais sete pessoas na sala. In Viana, J. P., Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia (p. 96). Lisboa: Clube do autor.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

G → I; B, G, M, R, A, "Eu" → 7 pessoas

I → B; G; M; R; A; "Eu" → 6

B → G; M; R; A; "Eu" → 5

G → M; R; A; "Eu" → 4

M → R; A; "Eu" → 3

R → A; "Eu" → 2

A → "Eu" → 1

Ix "Eu"

R: O "Eu" quando é cumprimentado também cumprimenta, portanto visto que estão 8 pessoas na sala, mas nenhum déles se cumprimenta a si próprio o "Eu" acaba por cumprimentar 7 pessoas.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

3.
1 Gilberto → 8
2 Isabel → 6
3 Beta → 5
4 Gui → 4
5 Manuel → 3
6 Rogério → 2
7 Alcina → 1
8. Eu

R: Eu não cumprimentei nenhuma, segundo o meu raciocínio todos os outros é que me cumprimentaram, fui a primeira a chegar à sala.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

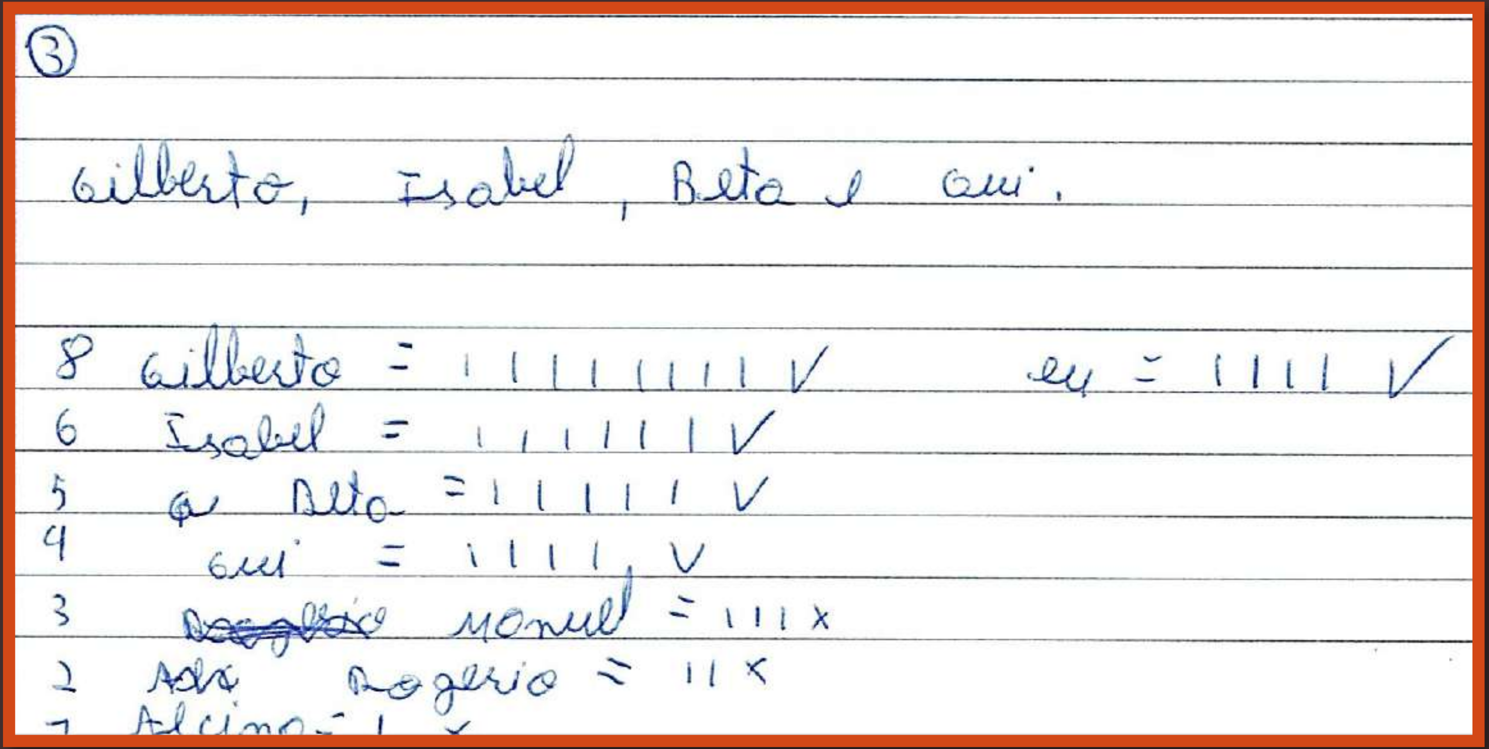
	G♂	I	B	G♀	M	R	A	Eu
G♂		X	X	X	X	X	X	X
I	X		X	X	X	X	X	X
B	X	X		X	X	X	X	X
G♀	X	X	X					
M	X	X	X					
R	X	X	X					
A	X	X	X					
Eu	X	X	X					

R: Ao ser cumprimentado por todos, Eu cumprimento todos ~~eu~~ também. Na verdade toda a gente acaba por cumprimentar toda a gente. Eu não tomo a iniciativa de cumprimentar ninguém, depois porque, ~~…~~ sendo o último, fui já cumprimentado por todos.

Por exemplo, o Gilberto, ao cumprimentar toda a gente, faz com que, depois os outros não tenham que o cumprimentar a ele. Se tal acontecesse, estariam a cumprimentar pela segunda vez.

R: Ao ser cumprimentado por todos, Eu cumprimento todos ~~eu~~ também. Na verdade toda a gente acaba por cumprimentar toda a gente. Eu não tomo a iniciativa de cumprimentar ninguém, depois porque, ~~…~~ sendo o último, fui já cumprimentado por todos.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS


③

Gilberto, Isabel, Beta e Gui.

8 Gilberto = I I I I I I I I ✓ eu = I I I I ✓
6 Isabel = I I I I I I ✓
5 a Beta = I I I I I ✓
4 Gui = I I I I ✓
3 ~~[illegible]~~ Manuel = I I I x
2 ~~Ada~~ Rogerio = I I x
1 Alcino = I x

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

Gilberto | I | B | G | M | R | A | E | → 7

Isabel | G | B | G | M | R | E | → 6

Beta | G | I | G | M | E | → 5

Gui | G | I | B | E | → 4

Manuel | G | I | B | → 3

Rogério | G | I | → 2

Alcina | G | → 1

∴ Eu cumprimentei o Gilberto, a Isabel, a Beta e a Gui.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

(3) 8 pessoas

Gilberto → 7 - 7
Isabel → 6 - 1
Beta → 5 - 1
Gui → 4 - 1
Manuel → 3 - 1
Rogério → 2 - 1
Alcina → 1 - 1
Eu

~~Gilberto → 6~~
Isabel → 5 - 5
Beta → 4 - 1
Gui → 3 - 1
Manuel → 2 - 1
Rogério → 1 - 1
Eu -

Cumprimentei o Gilberto.
Não cumprimentei a Alcina.

Cumprimentei a Isabel
Não cumprimentei o Rogério.

Beta → 3 - 3
Gui → 2 - 1
Manuel → 1 - 1
Eu

Cumprimentei a Beta
Não cumprimentei o Manuel

Gui → 1 - 1
Eu

Cumprimentei o Gui

R: Cumprimentei o Gilberto, a Isabel, a Beta e o Gui

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

Gilberto — Toda a gente

Eu — Gilberto
Isabel
Beta
Gui

Manuel — Gilberto
Isabel
Beta

Rogénio — Gilberto
Isabel

Isabel — Gilberto
Eu
Gui
Manuel
Rogénio
Beta

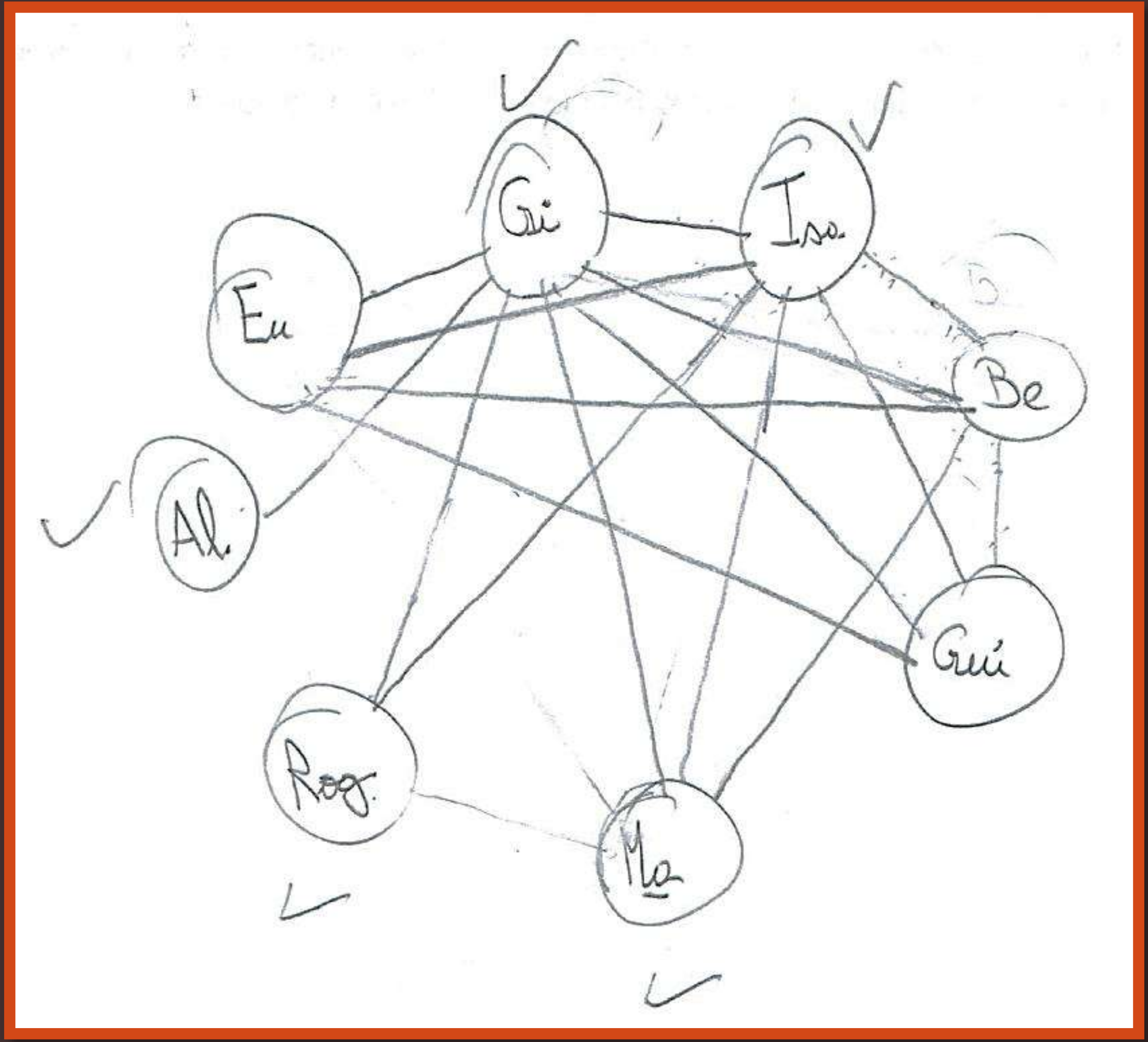
Alcina — Gilberto

Beta — Gilberto
Isabel
Eu
Gui
Manuel

Gui — Gilberto
Isabel
Beta
Eu

R: Eu cumprimentei o Gilberto, a Isabel, a Beta e a Gui.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

"*Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.*"

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com *n* cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

*Adaptado de Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2013). Cortes na piza (ensino secundário) – caso multimédia. In Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática. Disponível em: http://p3m.ie.ul.pt/caso-4-cortes-na-piza-ensino-secundario

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

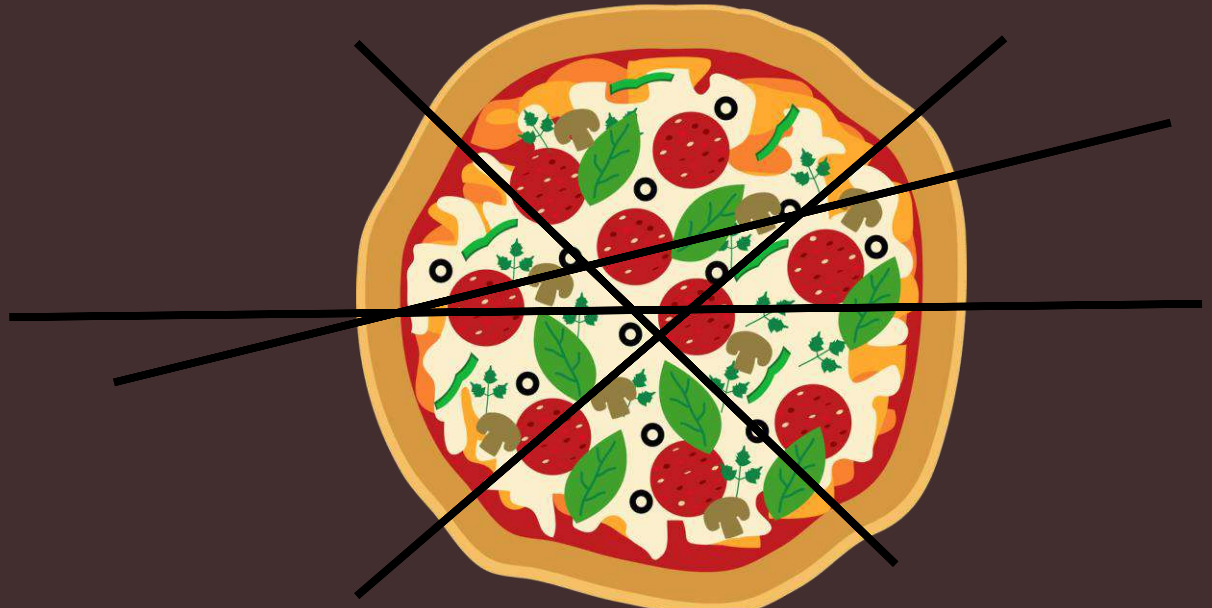
Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

“*Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.*”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com *n* cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Antecipação



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

"*Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.*"

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Antecipação

Estratégia: construção de figuras conjugada com a tentativa e erro até se aperceberem da existência de um padrão

Dificuldades: cortes que passam no centro da pizza

Discussão: apresentação feita por ordem crescente de resultados

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

"*Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.*"

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com *n* cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Monitorização

30 minutos inicialmente estabelecidos → 50 minutos

"as fatias têm de ter a mesma forma geométrica?"

"as fatias têm de ser triangulares?"

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

"*Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.*"

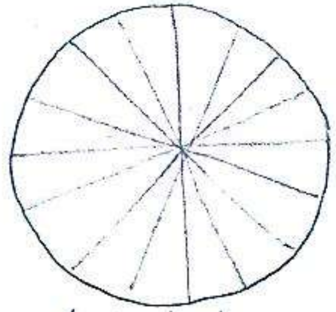
1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Seleção

Sequenciação

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Isto tudo caso as fatias sejam setores circulares.

$1 \to 16$

$\underline{2 \to 2n}$

8 cortes $\longrightarrow$ 16 fatias

9 cortes $\longrightarrow$ 18 fatias

10 cortes $\longrightarrow$ 20 cortes

n cortes $\longrightarrow$ 2n cortes

$$n \longrightarrow +\infty$$

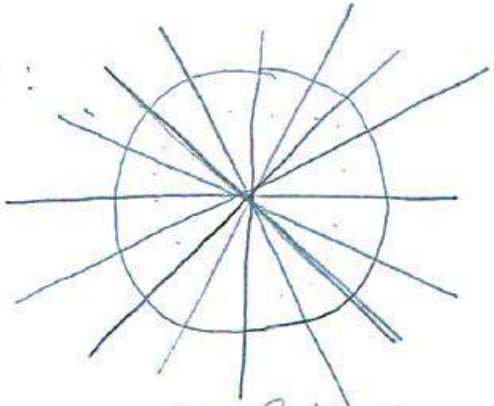
$$2 \times \infty = +\infty$$

$\therefore$ visto que só obtem sempre o dobro do nº dos cortes em fatias então n sendo o numero de cortes 2n será o numero fatias.

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

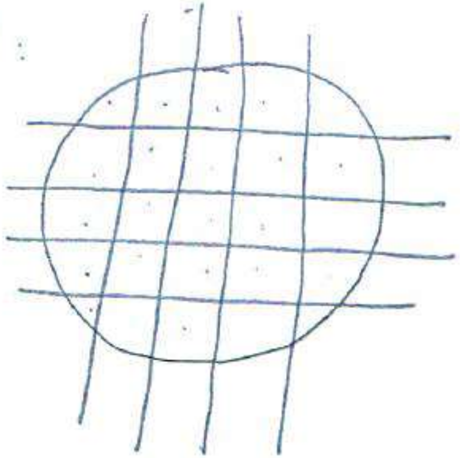
1- Por tentativa/erro:

1ª Resolução:



16 fatias

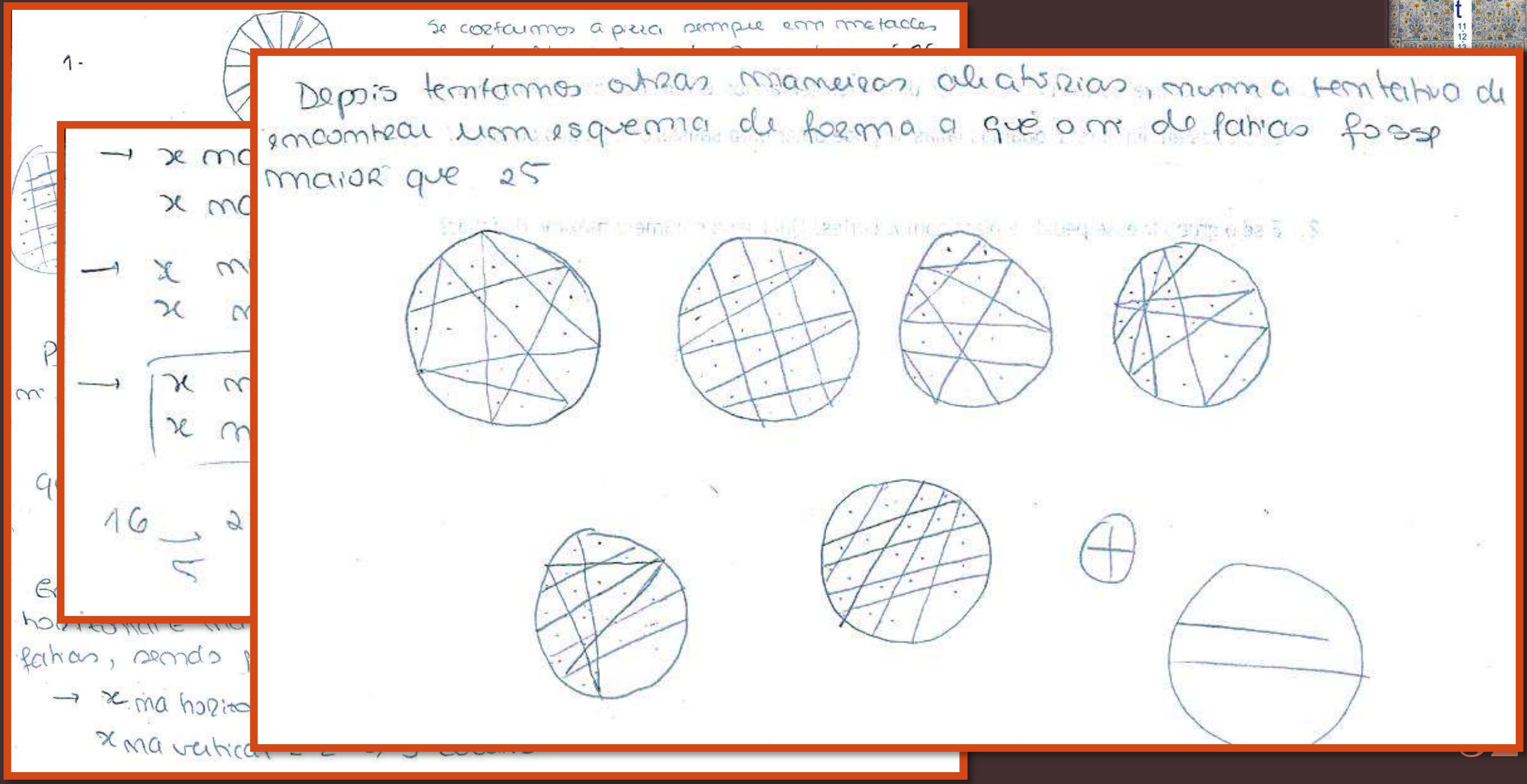
2ª Resolução:



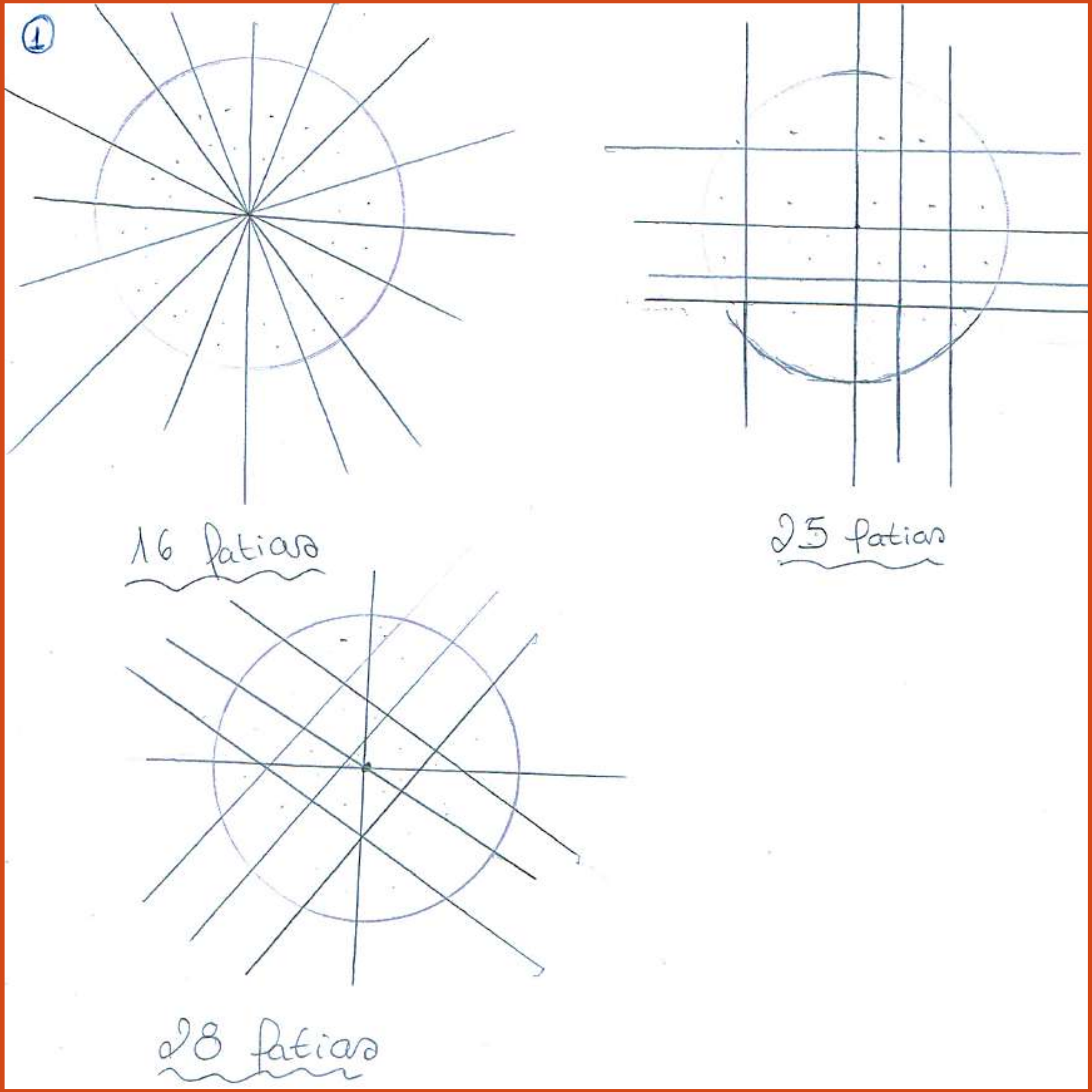
25 fatias

Inicialmente, pensamos em cortar as fatias de forma habitua sendo cada fatia um setor circular e obtemos 16 fatias. Depois pensamos em fazer cortes na horizontal e na vertical o que nos deu um total de 25 fatias. Pensamos, portanto que com 8 cortes conseguim obter um número máximo de fatias, 25 fatias

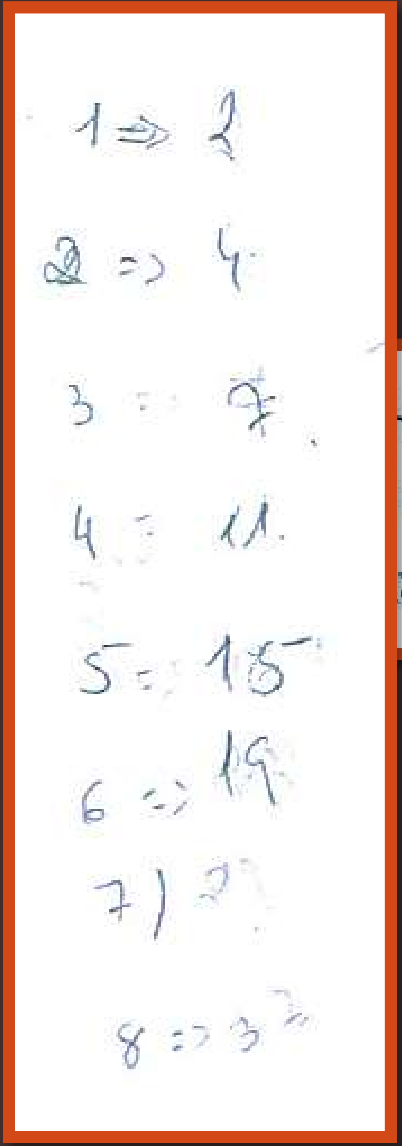
PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

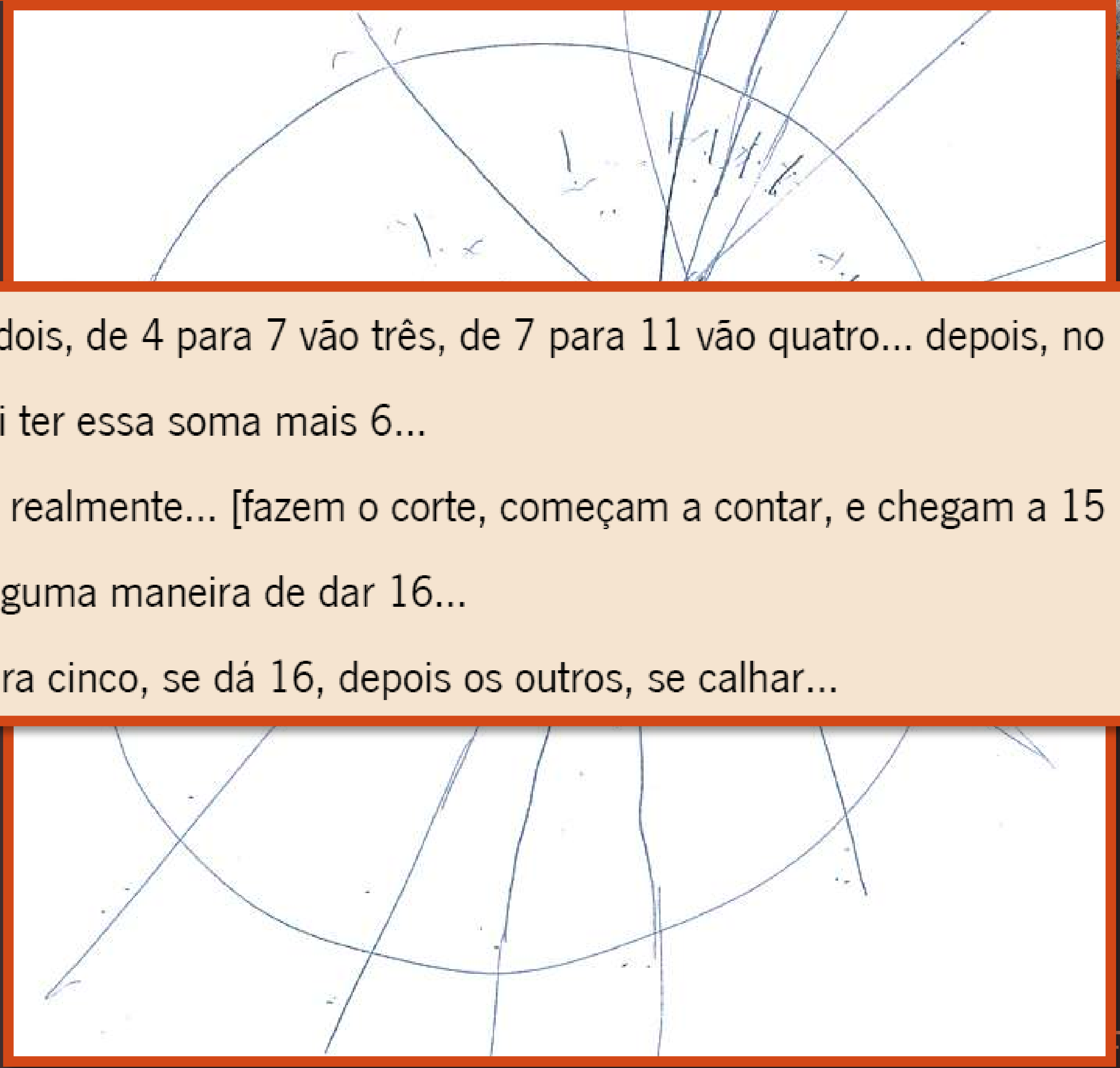


PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



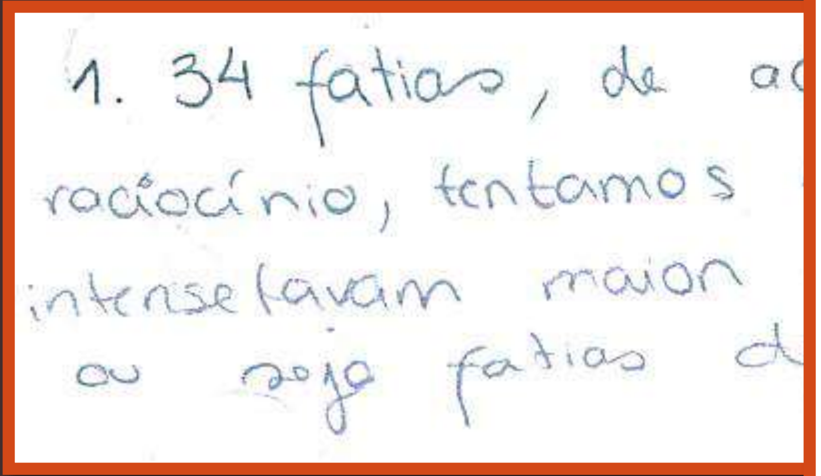


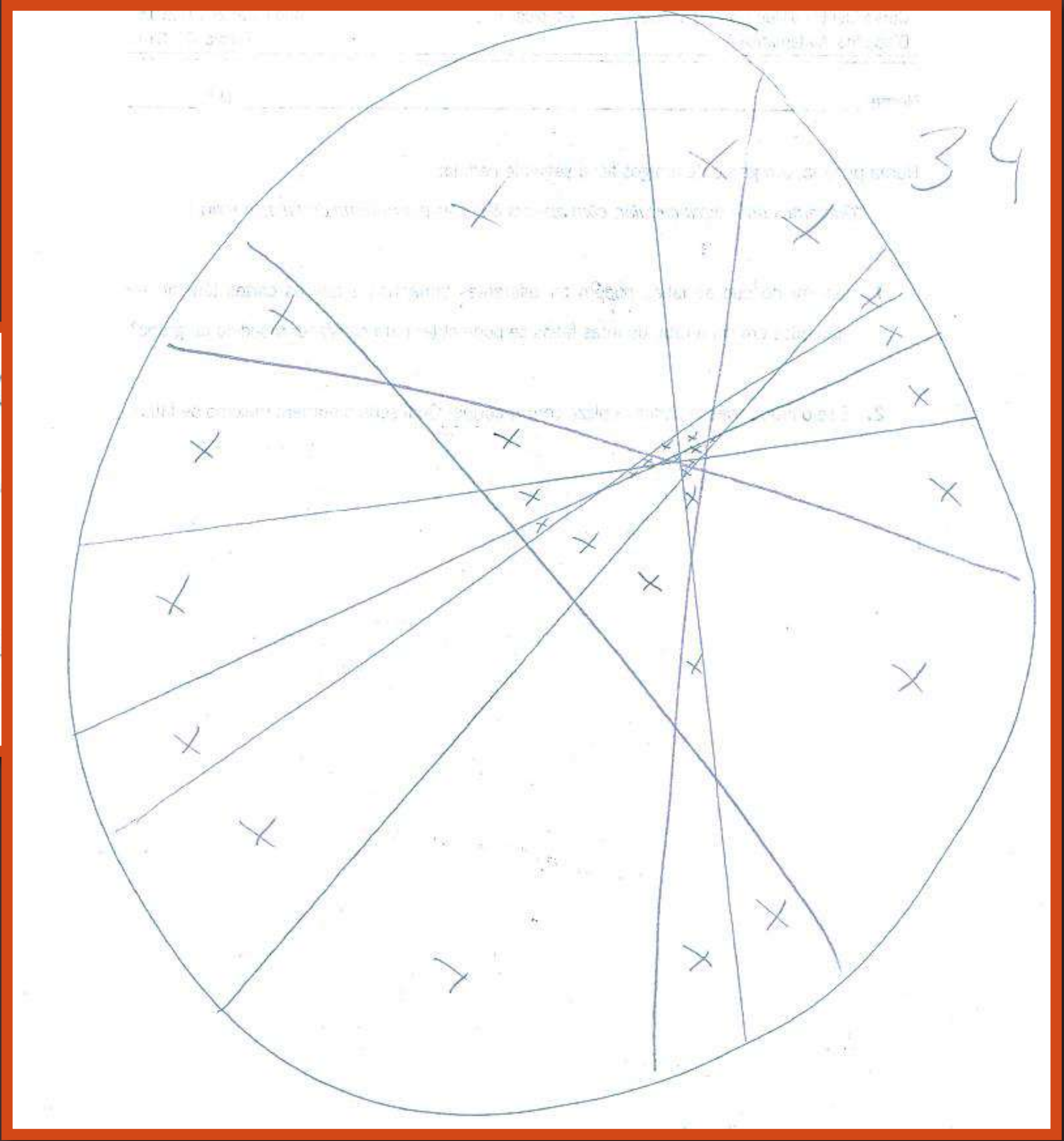
A22: Olha aí... de 2 para 4 vão dois, de 4 para 7 vão três, de 7 para 11 vão quatro... depois, no quinto, vão ter 11+5, o sexto vai ter essa soma mais 6...

A14: Deixa-me ver se vão cinco, realmente... [fazem o corte, começam a contar, e chegam a 15 fatias]. Provavelmente haverá alguma maneira de dar 16...

A22: Se conseguíssemos ver para cinco, se dá 16, depois os outros, se calhar...

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

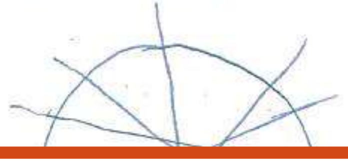

1. 34 fatias, de a
raciocínio, tentamos
intersetavam maior
ou seja fatias d



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

1º passo

Começamos por fazer um desenho para nos ajudar a perceber quantas fatias conseguimos obter com 1 corte.



$\boxed{\text{1 pizza} - \text{1 fatia}}$

1º corte → 2 fatias +1

2º corte → 4 fatias +2

3º corte → 7 fatias +3

4º corte → 11 fatias

5º corte → 16 fatias

(...)

Apercebemos

do que o número

ii) $u_n = \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

Seja u_n o nº de fatias e n o nº do corte

Assim sendo, por cada corte vai haver um aumento do número de fatias igual ao número do corte.

(...)

5º corte → 16 fatias +6

6º corte → 22 fatias +7

7º corte → 29 fatias +8

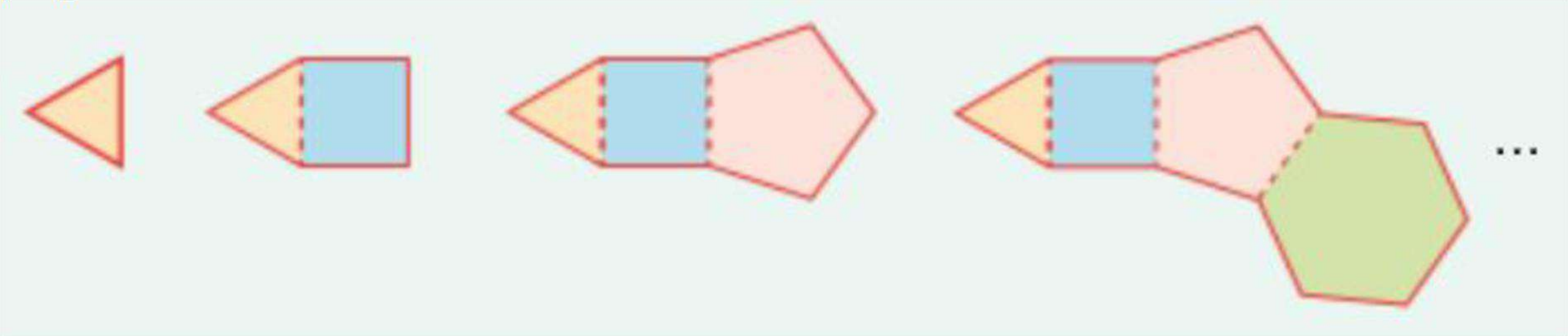
8 corte → 37 fatias

R: Com 8 cortes conseguimos um máximo de 37 fatias.

$$\frac{n(n+1)}{2}+1$$

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

10. Na figura estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência infinita de polígonos.



Admite que o padrão de construção se mantém. O termo de ordem n, sendo $n \geq 2$, obtém-se do anterior juntando-lhe um polígono regular com $n+2$ lados. Seja (u_n) a sucessão em que o termo geral representa o número de lados do polígono de ordem n.

10.1. Indica os valores correspondentes a u_4, u_5 e u_6.

10.2. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética? Justifica.

10.3. Sabe-se que: $u_1 = 3 \wedge \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n + 1$.

Mostra, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

"*Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.*"

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com *n* cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Conexão

- Acesso às estratégias, ideias e dificuldades
- Desenvolveram capacidades de resolução de problemas
- Aplicaram conhecimentos aprendidos sobre PIM

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Obrigada pela atenção!

Antecipar estratégias e dificuldades na resolução de problemas matemáticos

Letícia Gabriela Martins | LGB.martins@hotmail.com

julho, 2019