Generalizar e justificar em geometria, que papel para o raciocínio espacial?

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação de Lisboa

Raciocínio espacial ou visualização???

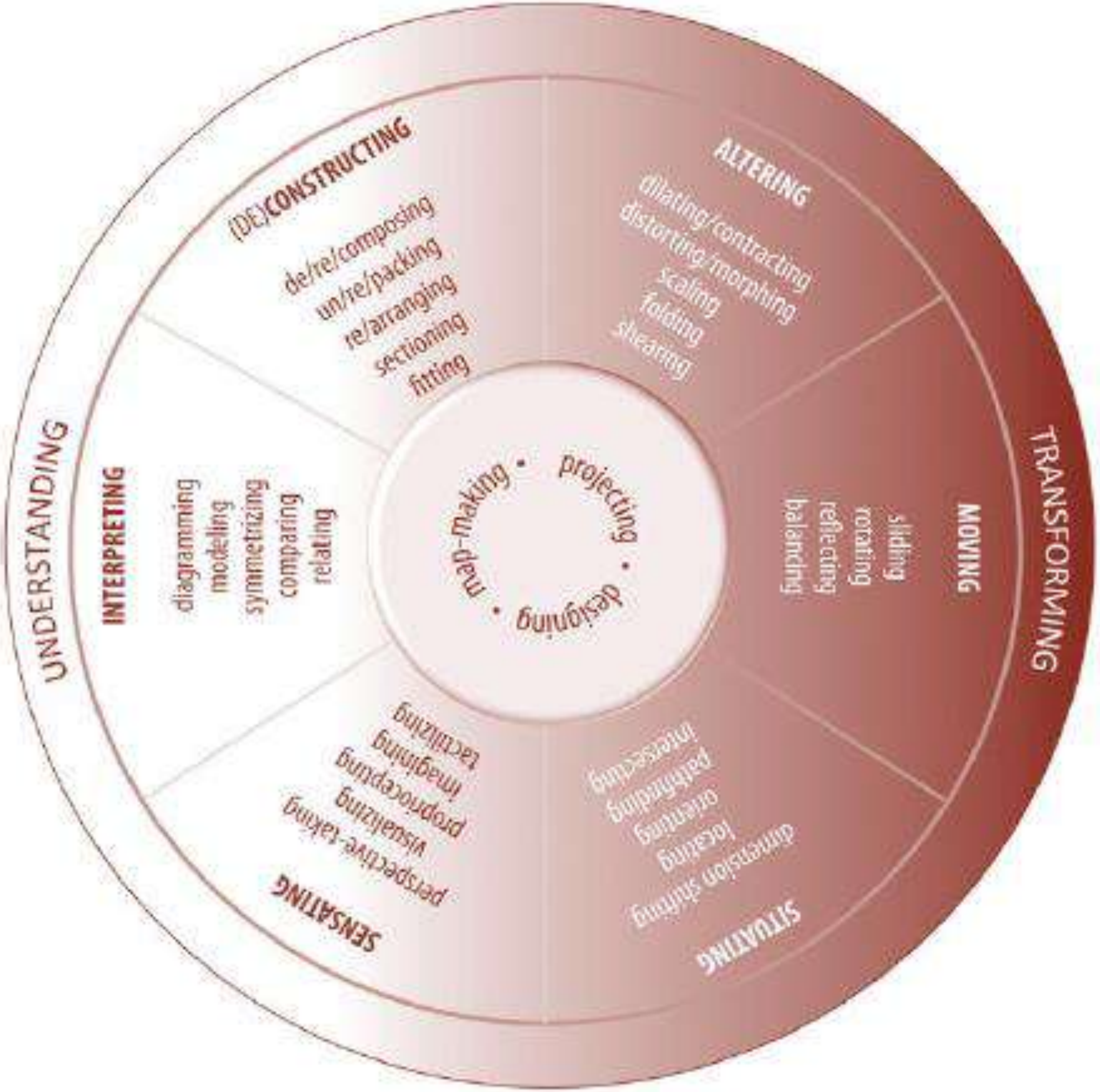
Visualização

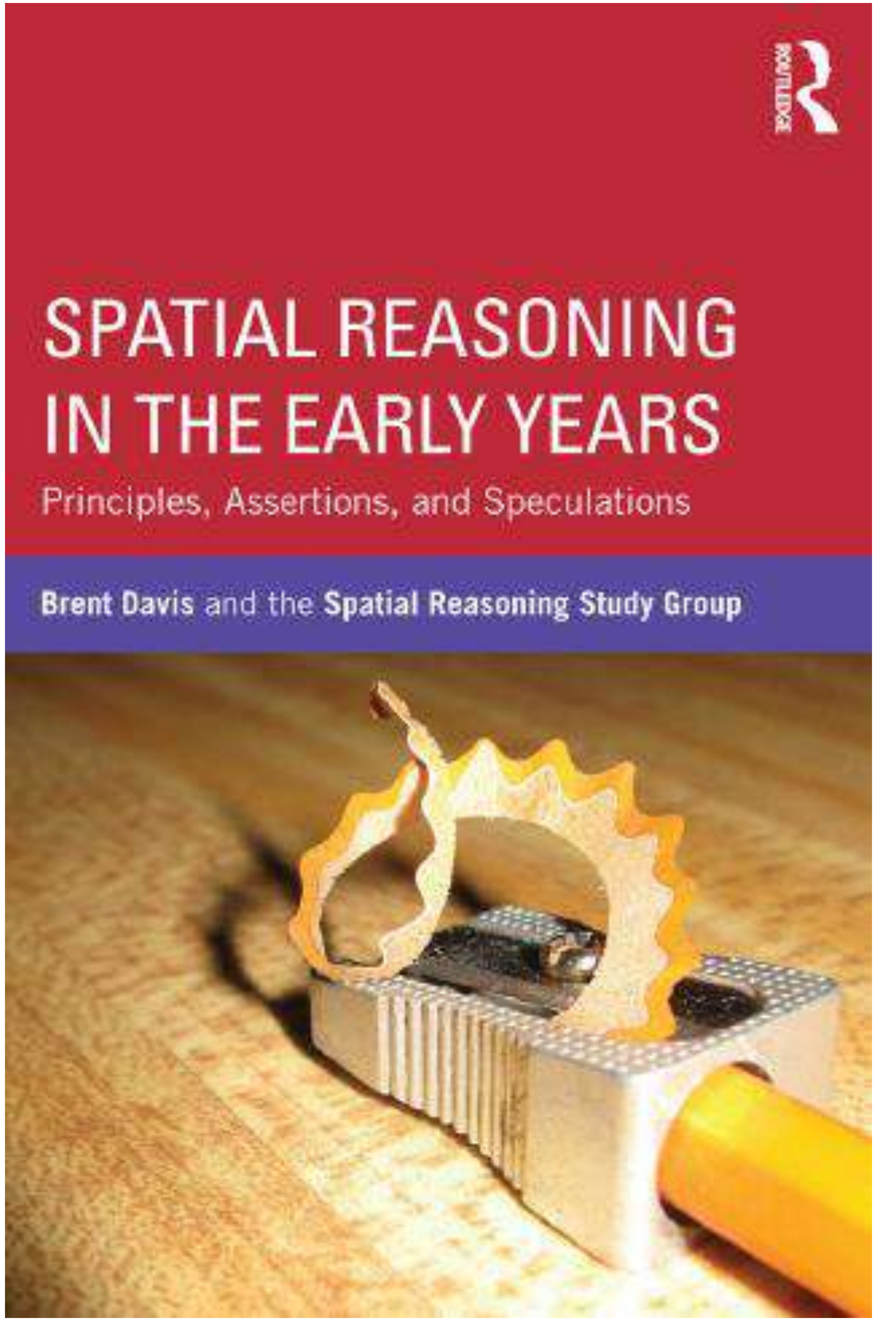
- “a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, na nossa mente, no papel ou com ferramentas tecnológicas” (Arcavi, 2003)
- todos os processos de construção e transformação de imagens visuais e mentais, bem como de representações de natureza espacial que estão implicadas na atividade de “fazer matemática” (Presmeg, 2006)
- a visualização pode apoiar o raciocínio, mas tem funções mais limitadas: representar informação para ilustrar uma afirmação ou apoiar a exploração heurística de uma situação complexa, mantendo a consciência do seu caráter subjetivo (Duval, 1998)

Raciocínio espacial ou visualização???

- Visualização é a "atividade de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, tanto mentais como físicos, desenvolvida com vista à resolução de problemas ou demonstração de propriedades" (Gutiérrez, 2006)

- Raciocínio espacial é "capacidade de 'ver', analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisá-las para responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre imagens, e manter as imagens ao serviço de outras operações mentais". (Battista, 2007)

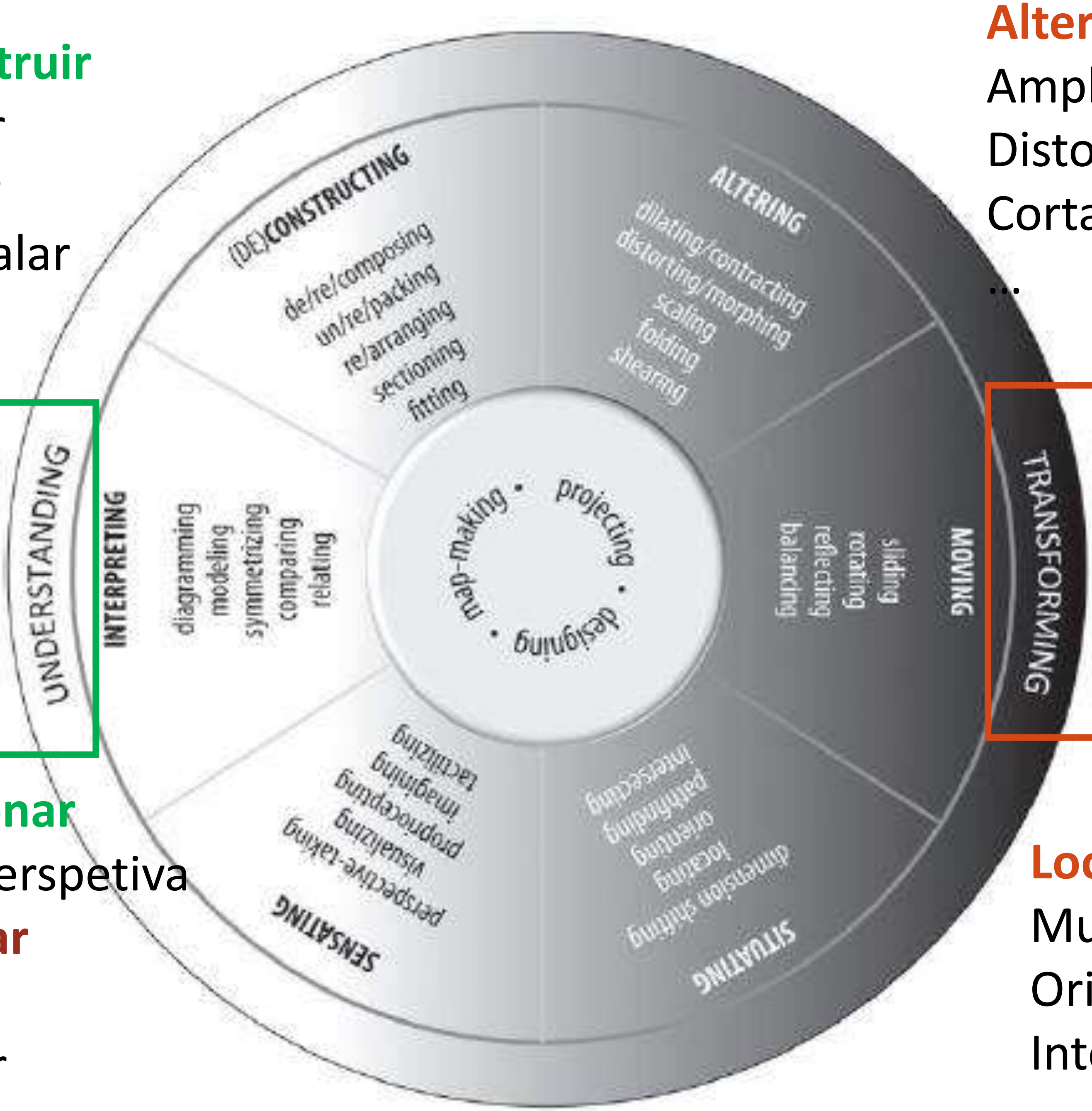

UNDERSTANDING
TRANSFORMING
(DE)CONSTRUCTING
de/re/composing
un/re/packing
re/arranging
sectioning
fitting
ALTERING
dilating/contracting
distorting/morphing
scaling
folding
shearing
MOVING
sliding
rotating
reflecting
balancing
SITUATING
dimension shifting
locating
orienting
pathfinding
intersecting
SENSATING
perspective-taking
visualizing
proprioception
imagining
tactilizing
INTERPRETING
diagramming
modeling
symmetrizing
comparing
relating
map-making • projecting • designing •


SPATIAL REASONING IN THE EARLY YEARS
Principles, Assertions, and Speculations
Brent Davis and the Spatial Reasoning Study Group

(Des)construir
Decompor
Recompor
(Des)embalar
…

Interpretar
Diagramar
Modelar
Comparar
Relacionar
…

Percecionar
Tomar perspetiva
Visualizar
Tatear
Imaginar
…



Alterar
Ampliar/Reduzir
Distorcer
Cortar
…

Mover
Rodar
Refletir
Deslizar
…

Localizar
Mudar de dimensão
Orientar
Intersetar
…

Frascos de perfume

Os frascos representados nas figuras têm algum perfume, mas apenas um deles não está meio cheio. Os frascos das figuras 1 e 2 têm o líquido exatamente a meio da altura. O frasco da figura 3 tem o líquido abaixo do meio da altura. O frasco 1 é cilíndrico e os outros dois são compostos por troncos de cone.

Todos os frascos estão representados por uma vista de frente, todos têm a mesma altura e as bases e os topos têm igual largura.

Um dos frascos não está a meio. Qual é?

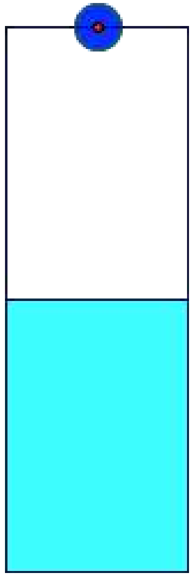


Fig. 1

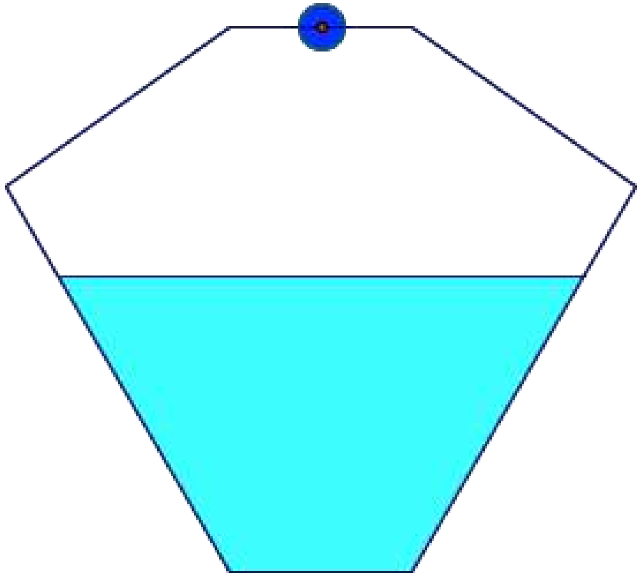


Fig. 2

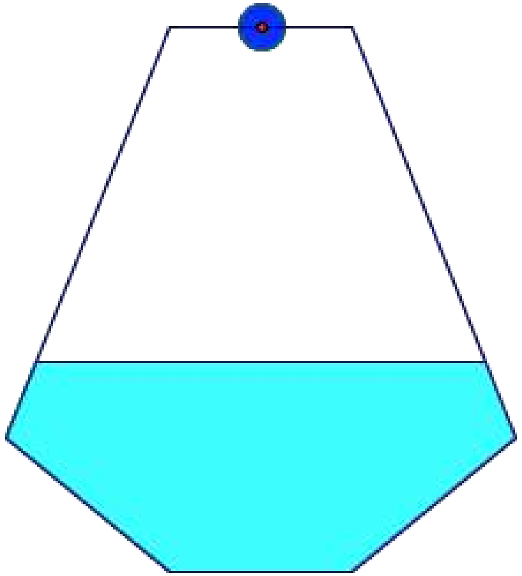
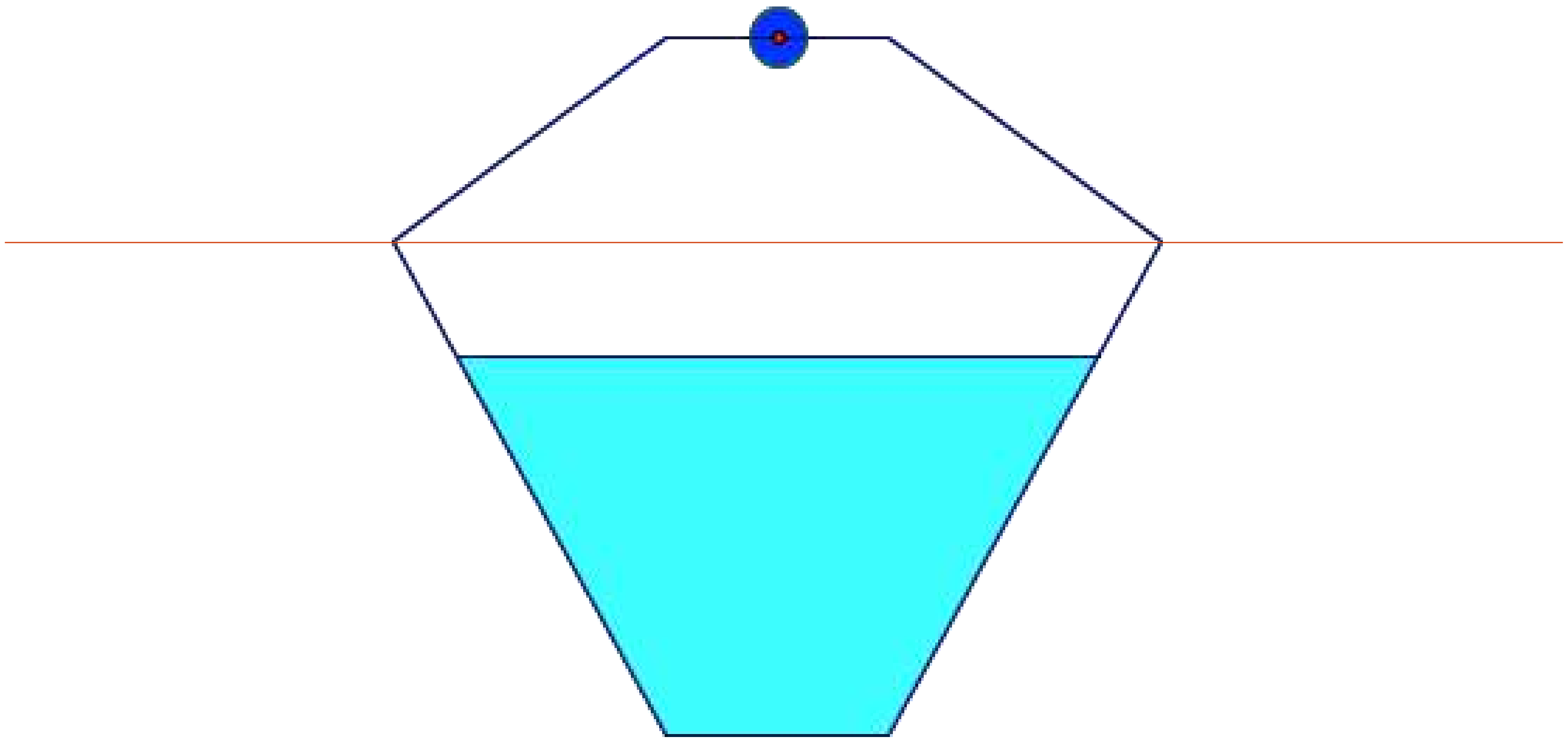


Fig. 3



Tipos de resoluções do problema

Fundamento da resolução	Operações realizadas	Correção
Com base nas relações espaciais fornecidas	Recorre à decomposição da figura e à simetria (1)	Resolução exata
	Recorre à decomposição e recomposição (1)	Resolução por aproximação
Com base em relações percecionadas	Observação (1)	Resolução sem sucesso
Com base em relações métricas	Obtenção das medidas Recurso à fórmula de volume do tronco do cone (3)	Resolução por aproximação com sucesso (2) Resolução sem sucesso (1)

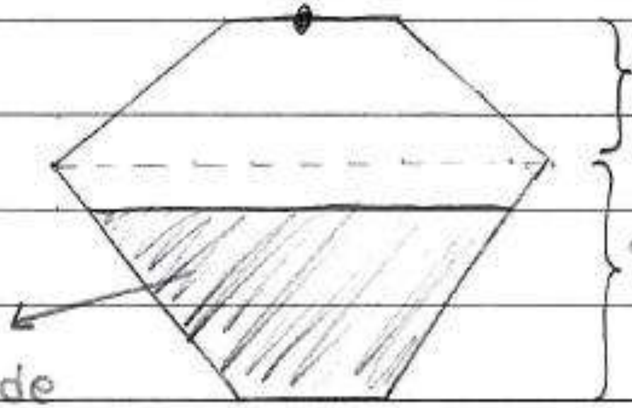
Com base na perceção

(Des)construir
Decompor

Percecionar
Visualizar

Se observarmos, verificamos que o volume da parte de baixo é maior do que o volume da parte de cima, por isso o líquido não se encontra a meio da figura, mais sim, acima da metade do volume do frasco de perfume.

fig. 1



Parte da figura com menor volume

Parte da figura com maior volume

Líquido a mais da metade da figura

fig. 2

Com base nas relações métricas

(Des)construir
Decompor

Interpretar
Relacionar

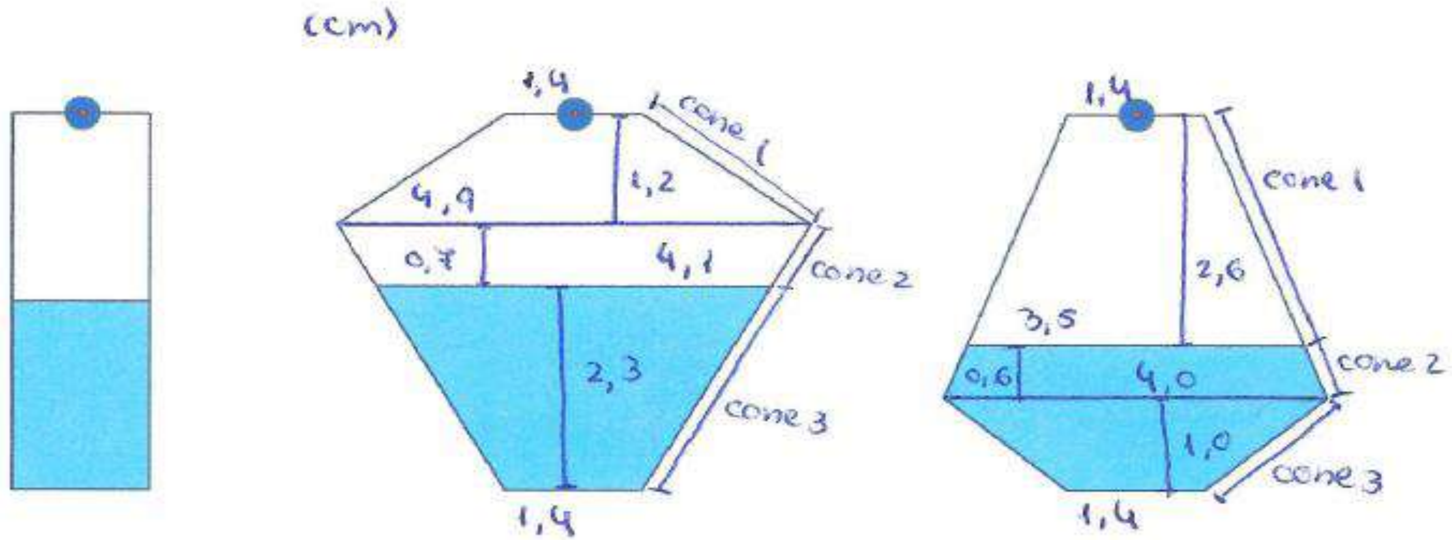


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Assim, olhando para as figuras 2 e 3 vemos que estas podem ser divididos em secções de cones. O volume de uma secção de um cone é dado por: $V = \frac{\pi \times h}{3} \times (R^2 + R \times r + r^2)$, em que h é a altura da secção, R é o raio da base maior e r é o raio da base menor da mesma secção.
Calculando os volumes temos:

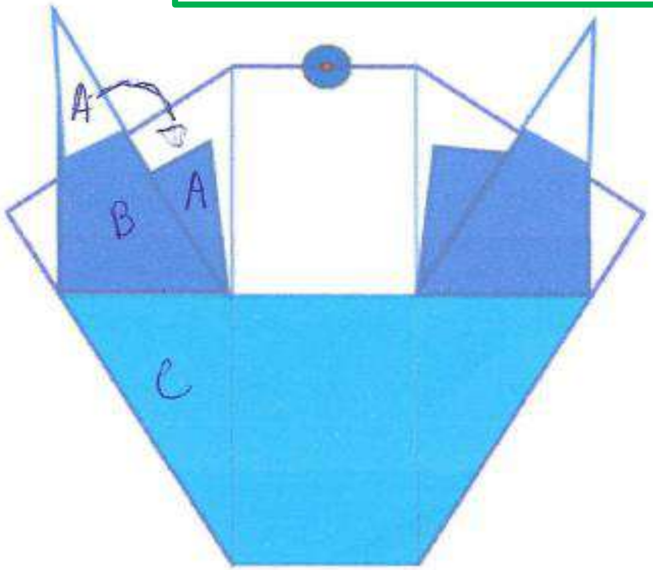
Com base na decomposição e recomposição

(Des)construir
De/Recompor

Interpretar
Comparar

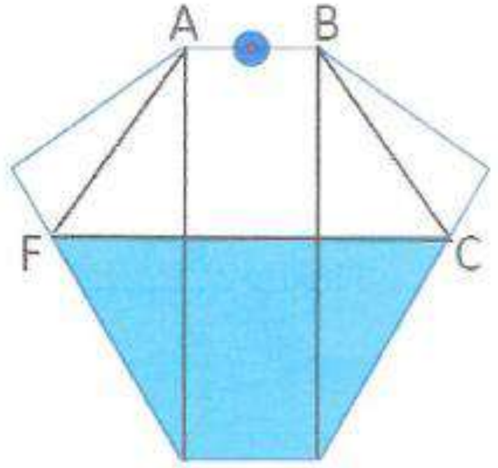
Para ver qual dos frascos não se encontrava a meio, primeiramente o grupo decidiu repartir cada uma das figuras (figura 2 e 3) como se encontra a figura 1, ou seja, um retângulo ao alto. De seguida, dividiu-se as figuras em formas geométricas, na parte onde se encontrava o líquido e depois na outra parte, colocámos essas mesmas figuras para ver se preenchia o espaço.

Assim, na figura 2 é possível visualizar que o frasco de perfume não se encontra a meio, uma vez que, após a colocação das formas geométricas este não se encontrava totalmente preenchido.



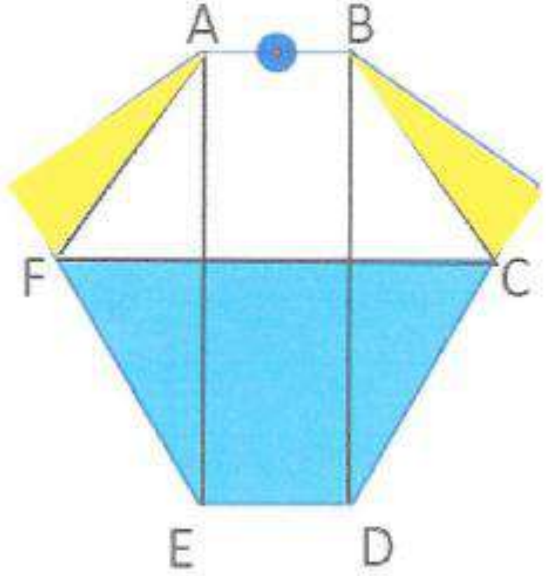
Com base na decomposição e simetria

Dividímos, deste modo, o hexágono irregular em várias partes, que são, por sua vez, polígonos: Retângulos, triângulos e trapézios. No entanto, não chegámos a nenhuma conclusão e, por isso, decidimos continuar a explorar a figura, traçando segmentos de reta.



De seguida, depois de traçar os segmentos de reta AF e BC, reparámos que a parte a azul representa metade do polígono ABCDEF:

Sendo FC um eixo de simetria, que corresponde, também, ao limite superior do líquido do frasco.



Se o frasco é composto, ainda, por uma área que corresponde aos triângulos a amarelo e como essa parte do frasco se encontra vazia, então, o frasco tem mais espaço vazio do que cheio.

Com base na decomposição e simetria

Alterar

Percecionar
Visualizar

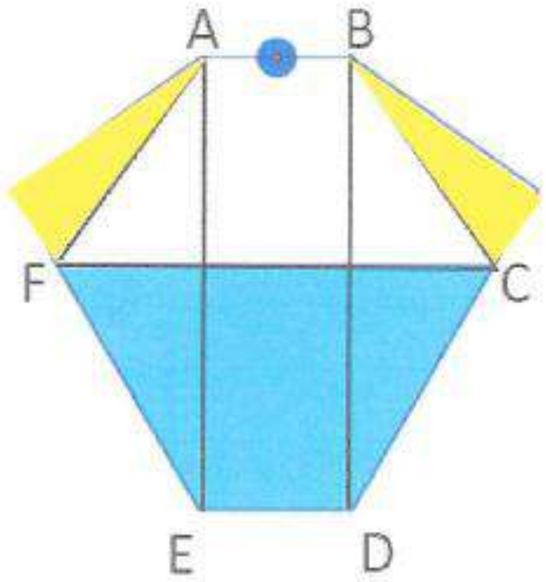
(Des)construir
De/Recompor

Interpretar
Comparar

De seguida, depois de traçar os segmentos de reta AF e BC, reparámos que a parte a azul representa metade do polígono ABCDEF:

Sendo FC um eixo de simetria, que corresponde, também, ao limite superior do líquido do frasco.

Se o frasco é composto, ainda, por uma área que corresponde aos triângulos a amarelo e como essa parte do frasco se encontra vazia, então, o frasco tem mais espaço vazio do que cheio.



Generalizar e justificar, o papel do RE

Generalizar

- identificar pontos comuns em casos diferentes
- estender uma afirmação além do domínio em que foi originada

Lannin, Ellis e Elliot (2011)

RE

- investigar famílias de configurações para encontrar regularidades e invariantes

Whiteley, Sinclair e Davis (2015)

Generalizar e justificar, o papel do RE

Justificar

- sequência lógica de afirmações, com base em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão.
- deve conter linguagem geral que demonstre que se aplica a mais do que um caso particular
- no contexto do ensino deve estar associado ao *investigar o porquê*

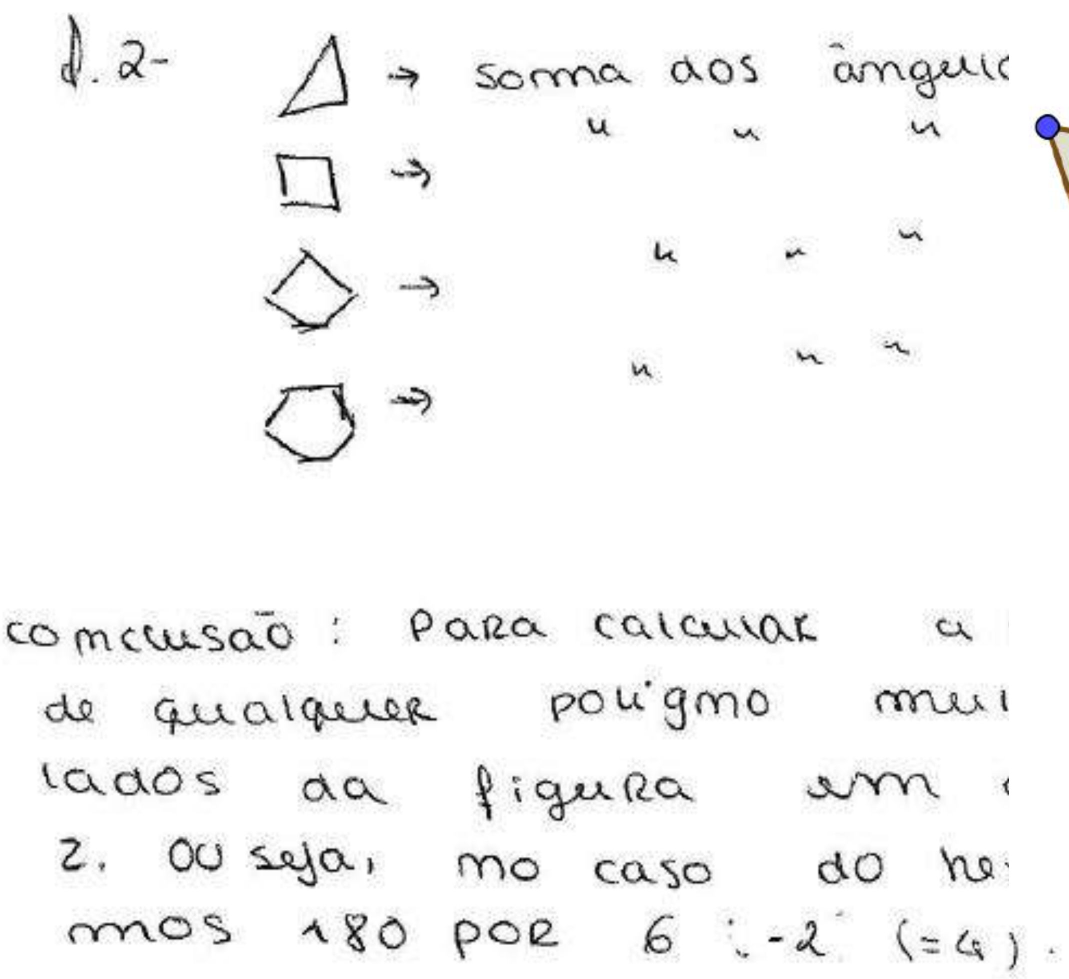
Lannin, Ellis e Elliot (2011)

RE

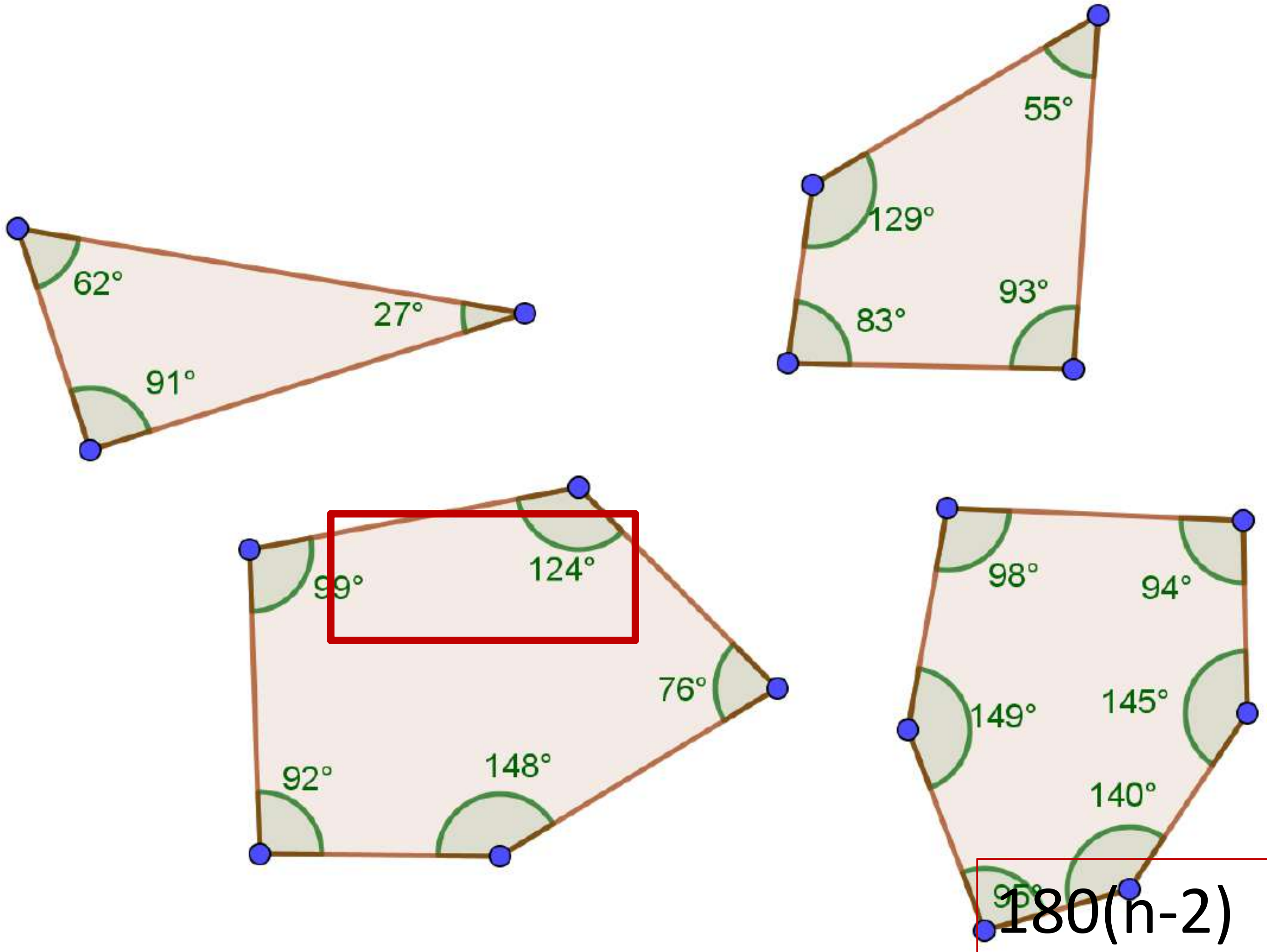
- envolve, frequentemente, explicações do *porquê*, *quando* e *como*

Whiteley, Sinclair e Davis (2015)

Generalização da soma dos ângulos internos de um polígono


1.2- → soma dos ângul
" " "
→
" " "
→
" " "
→

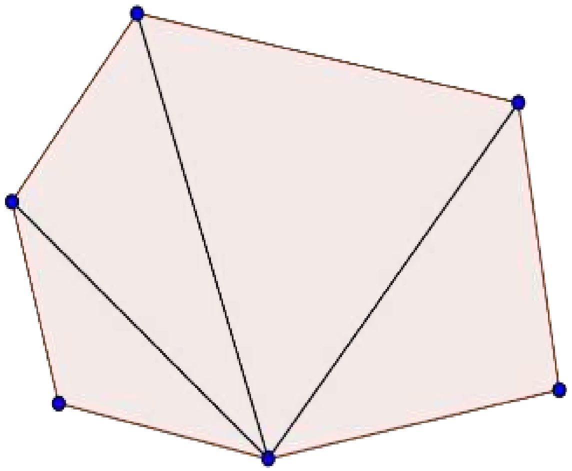
conclusão: Para calcular a
de qualquer polígono mul
lados da figura em
2. ou seja, no caso do he
mos 180 por 6 -2 (=4).

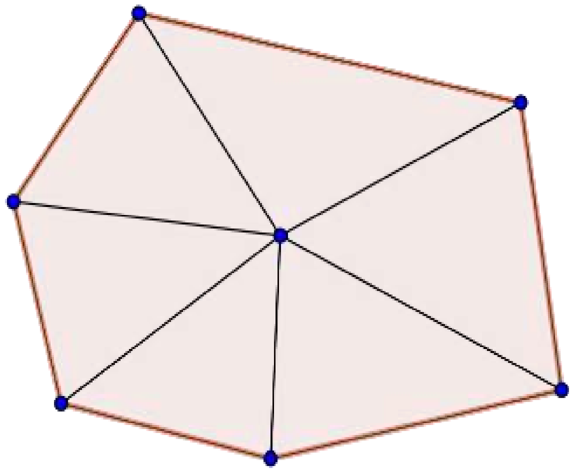


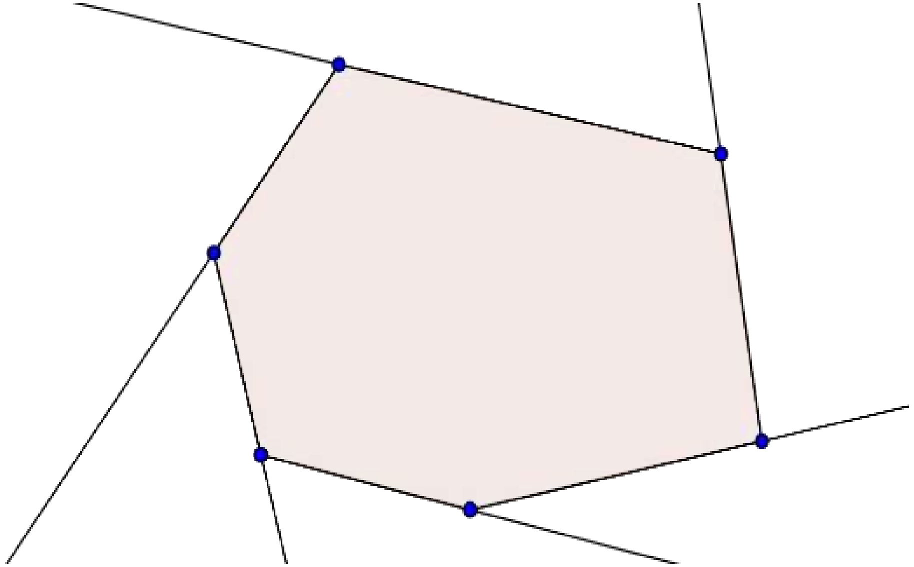
180(n-2)

Justificação da soma dos ângulos internos de um polígono

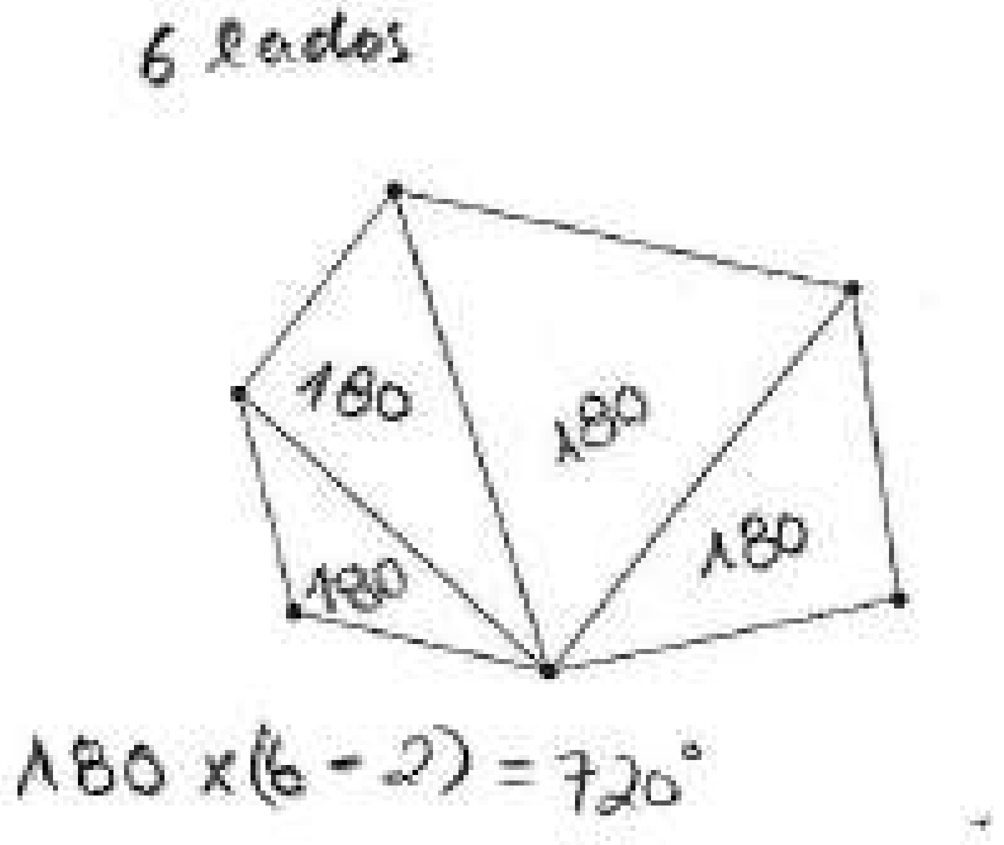
… Usa uma das figuras e completa a justificação recorrendo ainda a outras relações que já tenhas estabelecido.







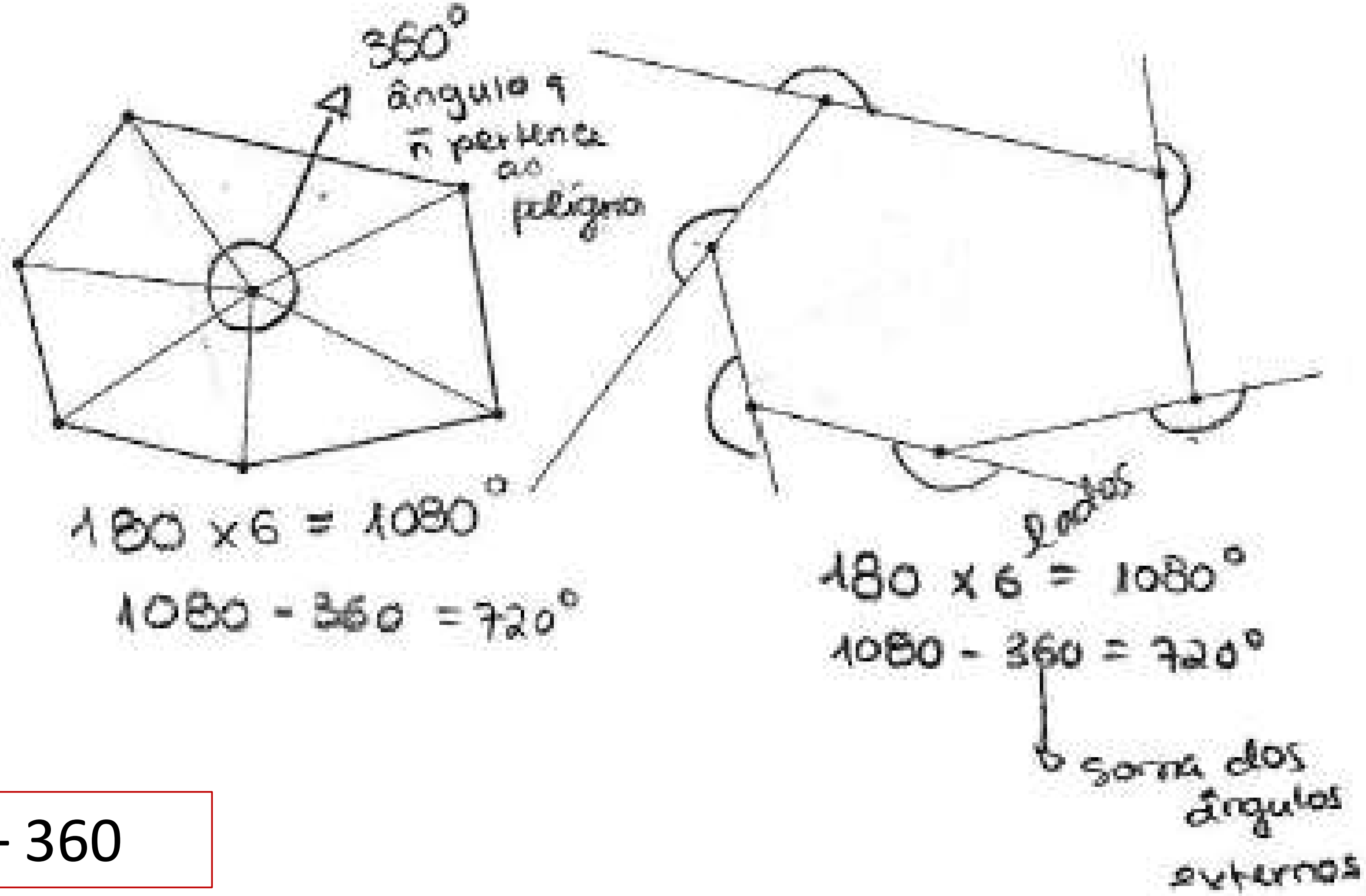
Justificação da soma dos ângulos internos de um polígono



$\boxed{180(n-2)}$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º conseguimos descobrir a soma dos ângulos internos do polígono. Neste caso, conseguimos dividir este polígono em 4 triângulos, ou seja, se multiplicarmos 180 por 4 obtemos a soma dos ângulos internos do polígono.

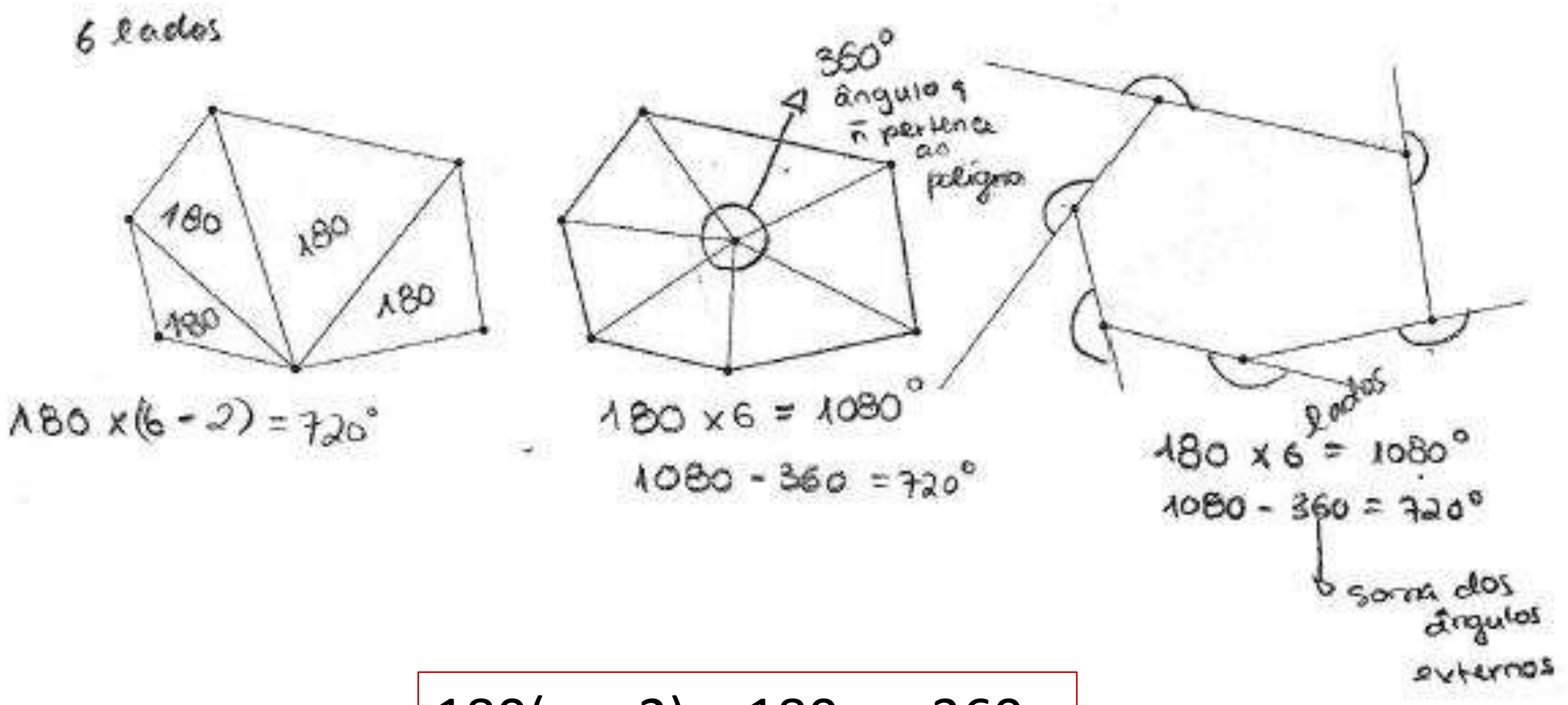
Justificação da soma dos ângulos internos de um polígono



$\boxed{180n - 360}$

$\boxed{180n - 360}$

Justificação da soma dos ângulos internos de um polígono



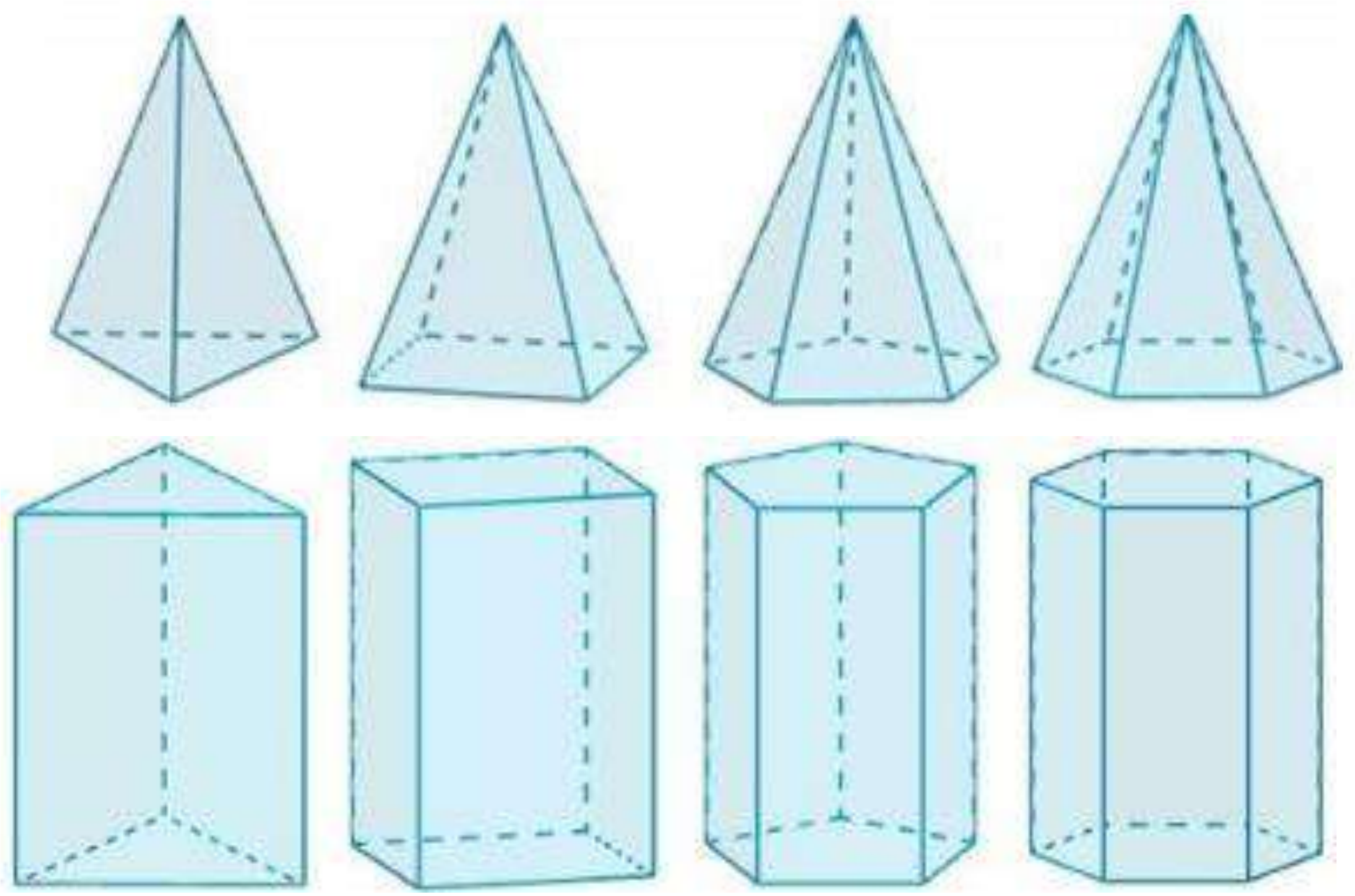
(Des)construir
Decompor

Interpretar
Relacionar

Percecionar
Visualizar

$$180(n - 2) = 180n - 360$$

Generalizar e justificar com classes de sólidos



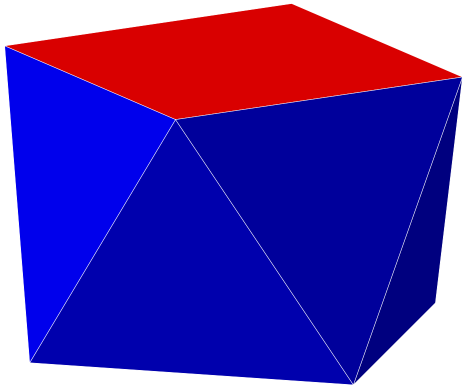
$2n$

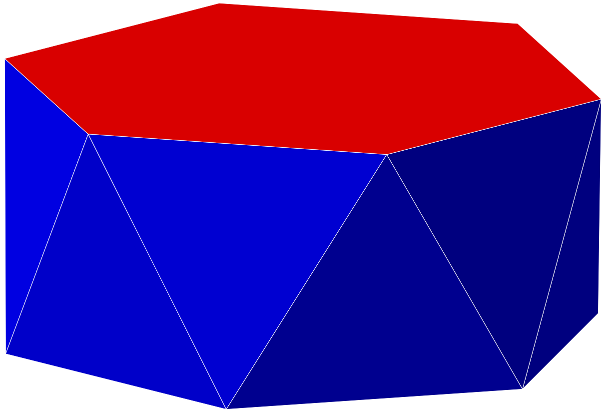
"Porque é sempre par"

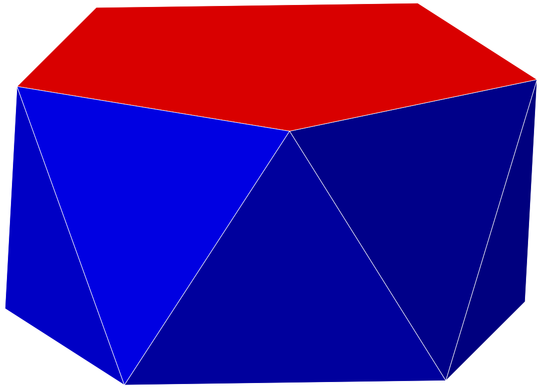
$3n$

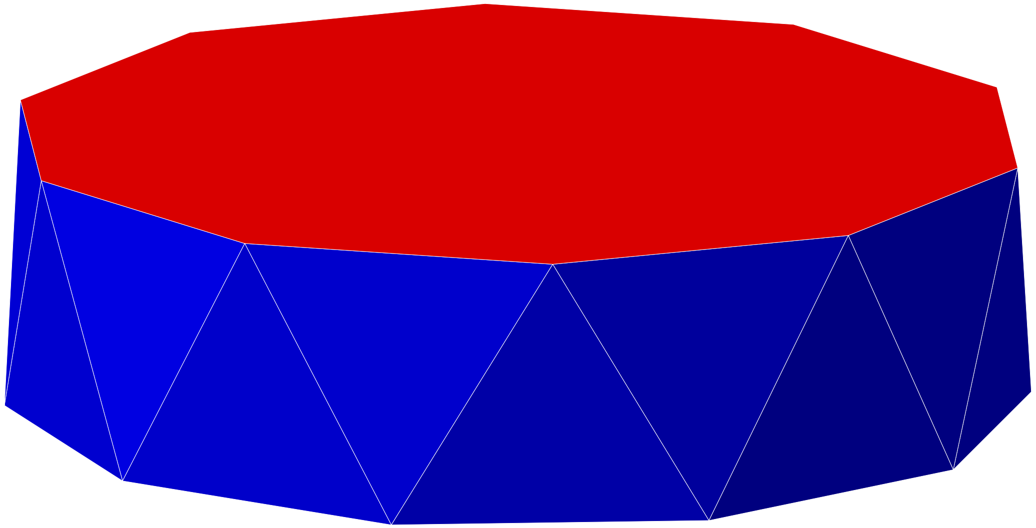
"Porque é sempre o triplo"

Generalizar e justificar com classes de sólidos

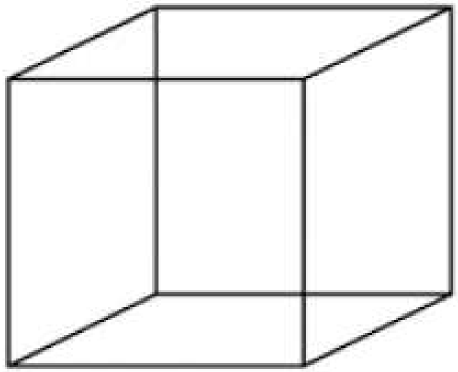




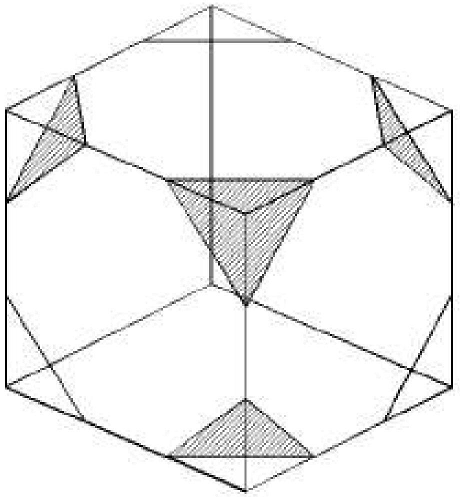


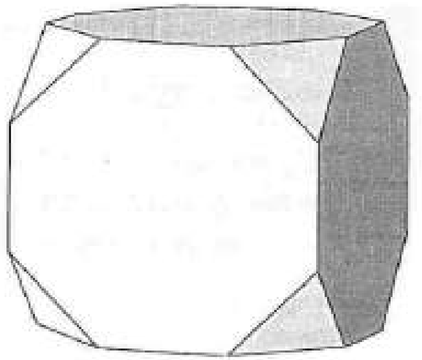


Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*

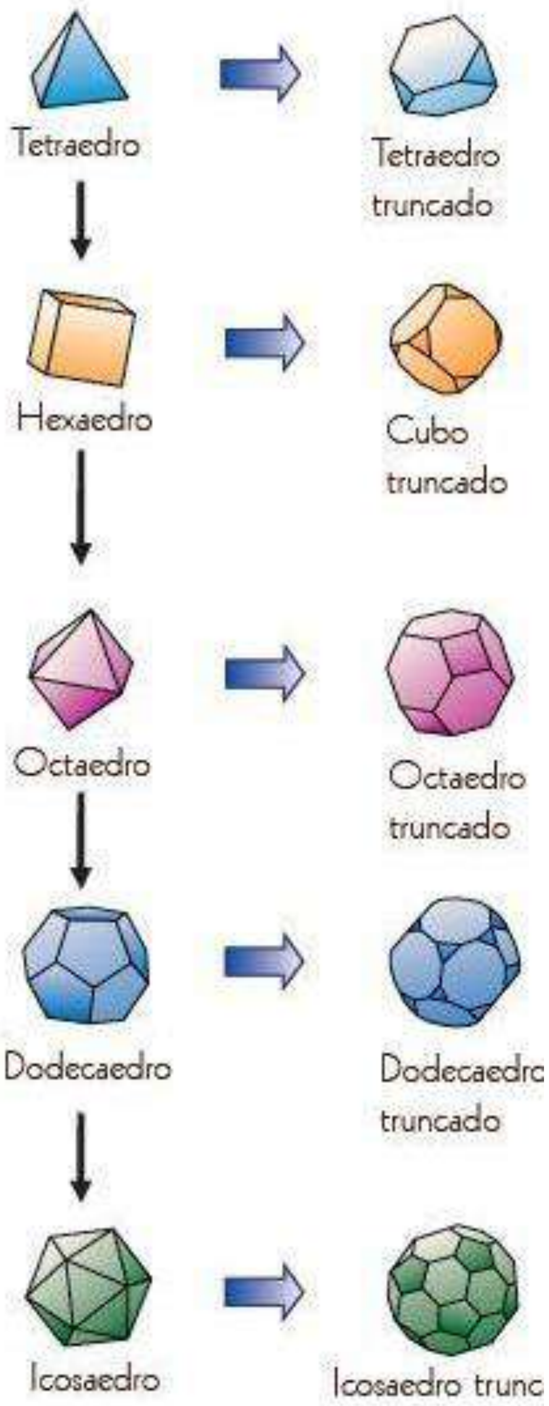


Cubo





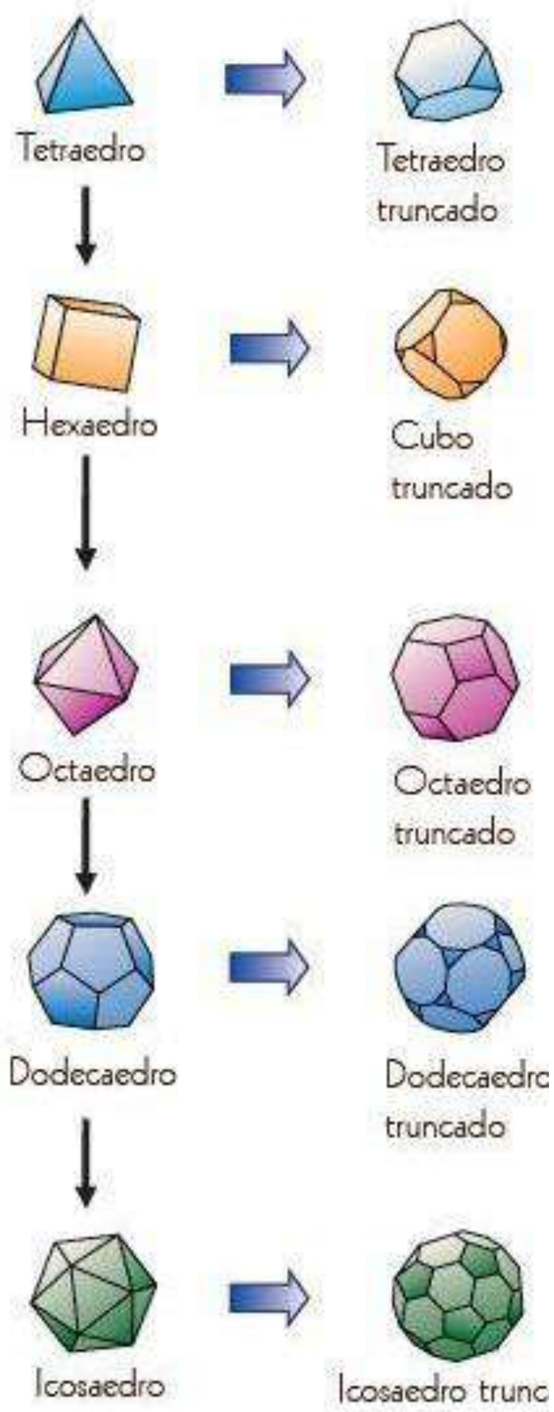
Cubo truncado



Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*

3. Estabelece as seguintes relações e procura justificá-las.
   a. Qual a relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado?
   b. E entre o número de faces?
   c. E de arestas?

https://geometra.es/solidos-arquimedianos/

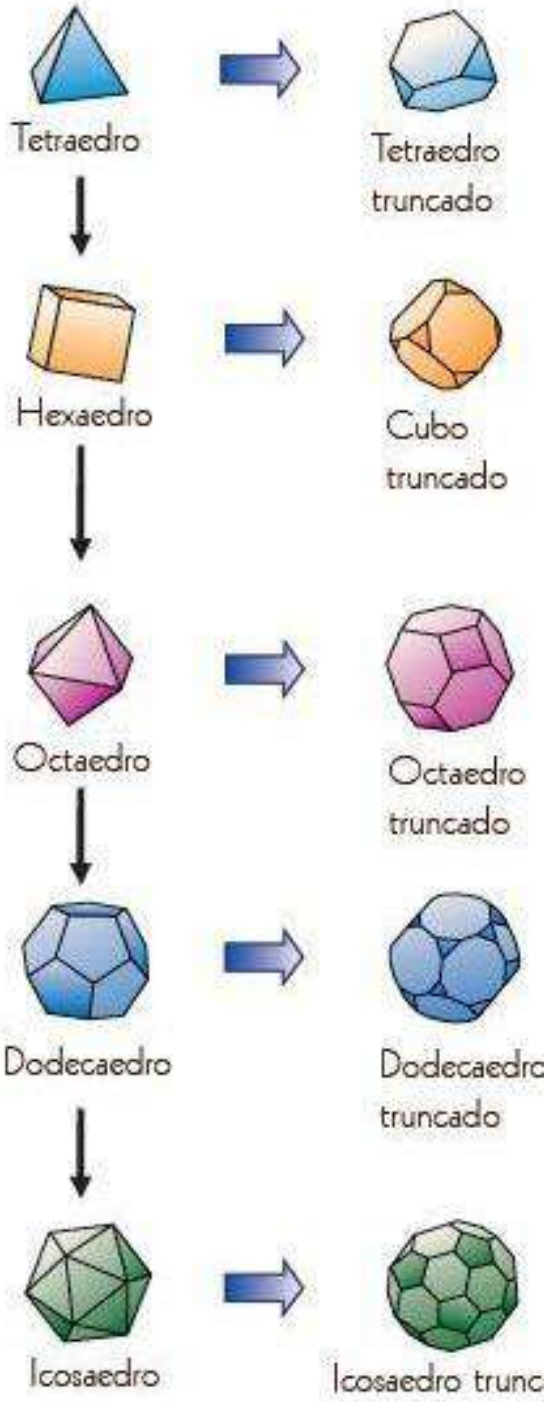


Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*

Número de arestas dos sólidos platónicos antes e depois de truncar

	cubo	tetraedro	octaedro	icosaedro	dodecaedro
Sólido original	12	6	12	30	30
Sólido truncado	36	18	36	90	90

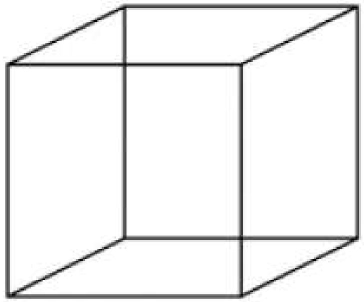
https://geometra.es/solidos-arquimedianos/



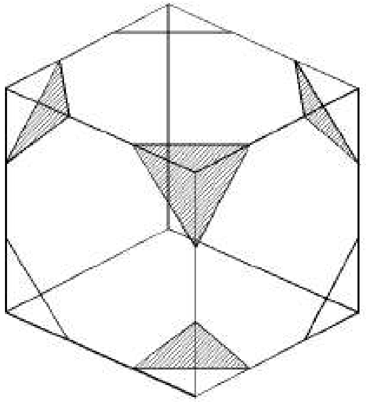
Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*

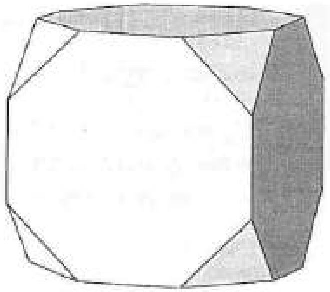
C. nº de arestas + (nº de vértices x nº de arestas que conver-
gem em cada vértice) = nº de arestas após truncação

$$A = Ao + Vo \times A_{\text{convergentes num vértice}}$$



Cubo

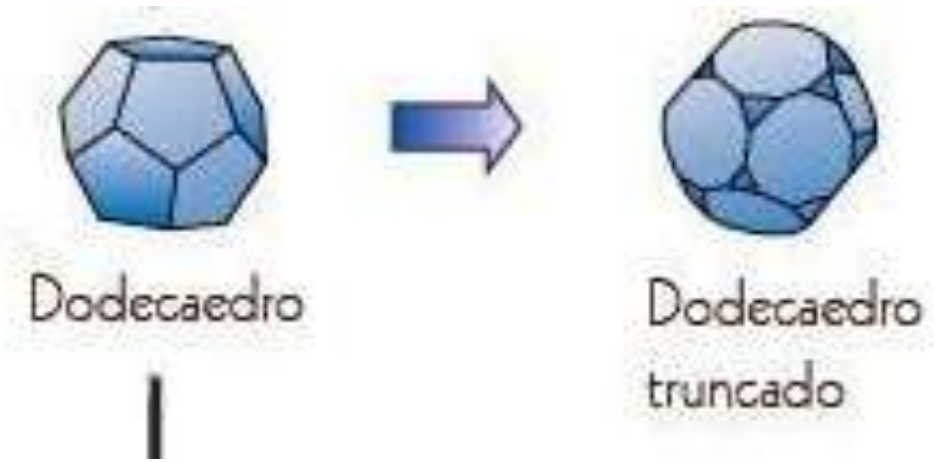




Cubo truncado

Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*

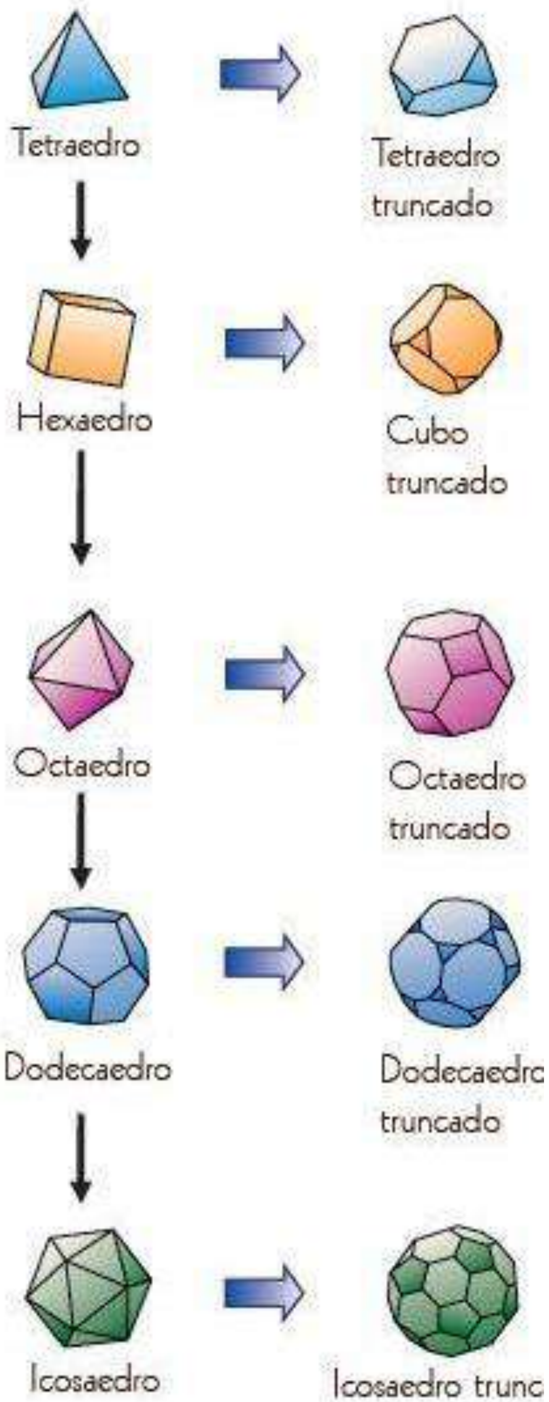
A = Ao + Vo × Aconvergentes num vértice

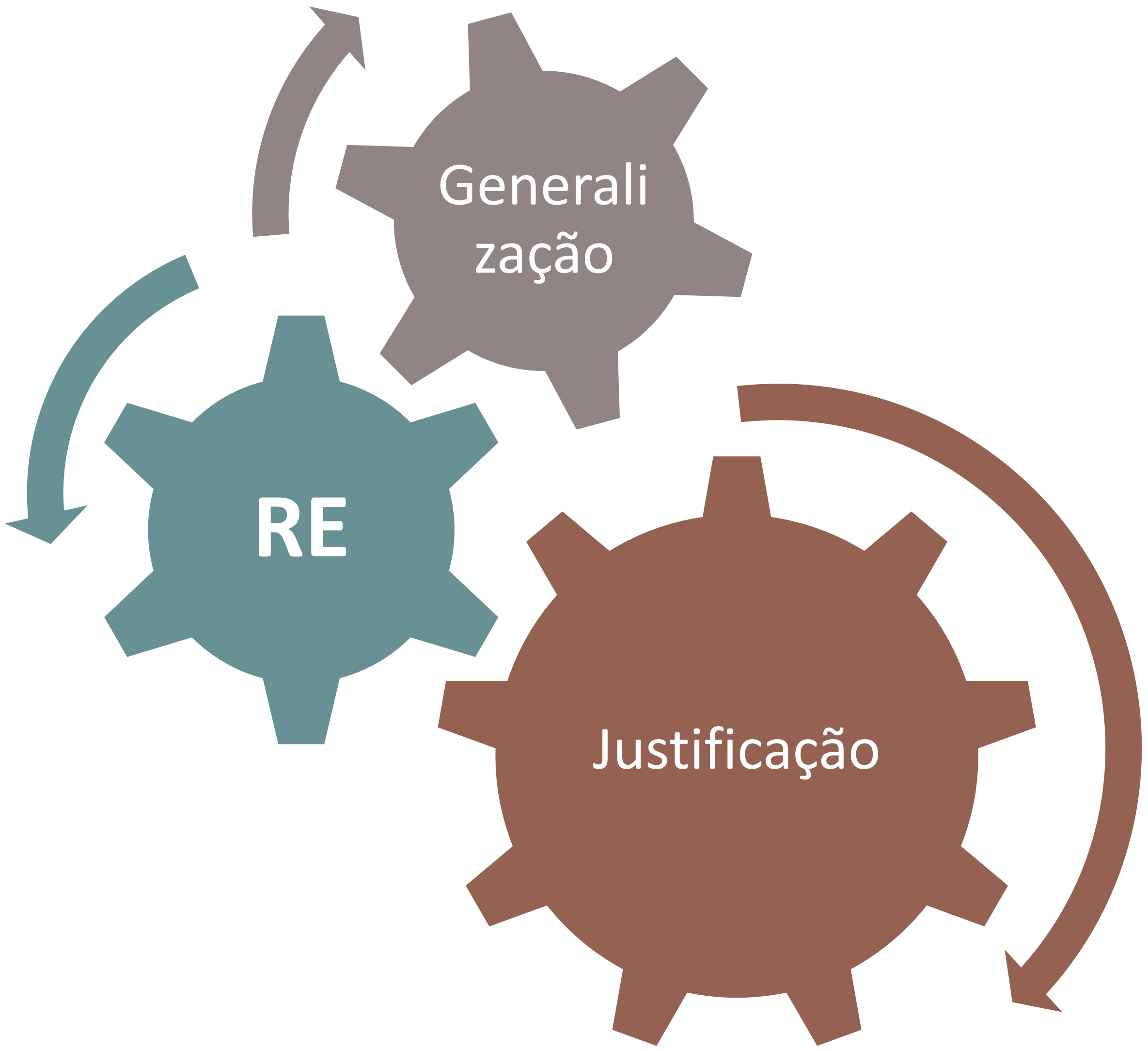


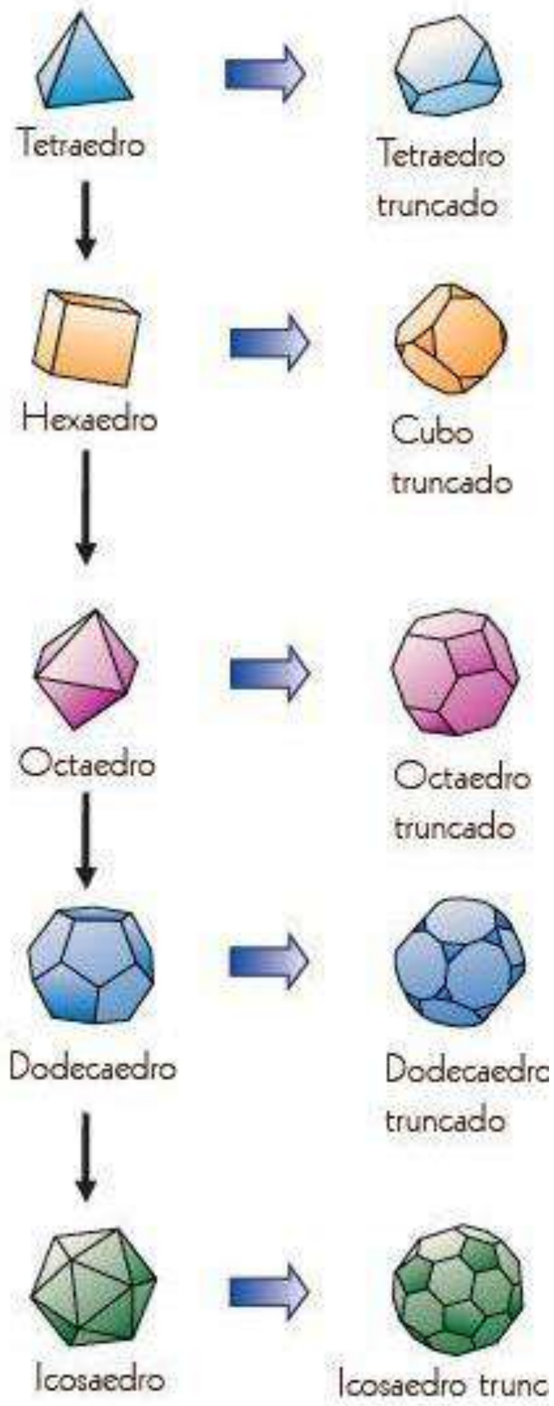
Então são 90?! Não pode ser! Número de vértices, são 20. É 20 vezes 3 mais 30. Percebes porquê? As [arestas] já existentes [30], e depois é o número de vértices que é 20, vezes o número de arestas que converge num vértice.

Então é 90.

Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*







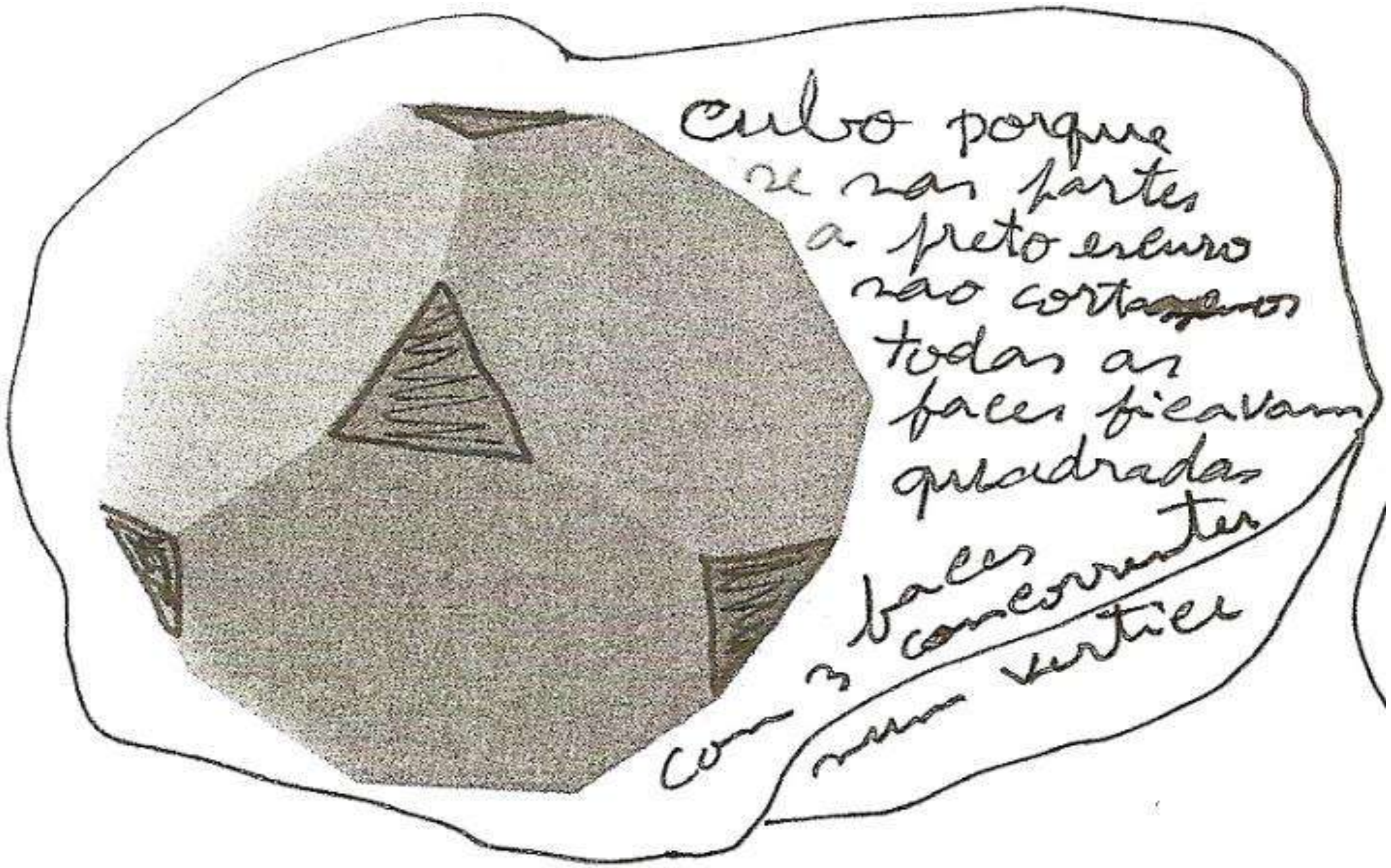
Tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*

(Des)construir
Seccionar

Percecionar
Visualizar

Interpretar
Relacionar

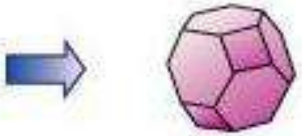
RE noutros níveis de ensino



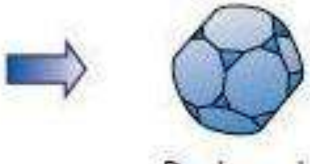
?

Tetraedro truncado

Cubo truncado



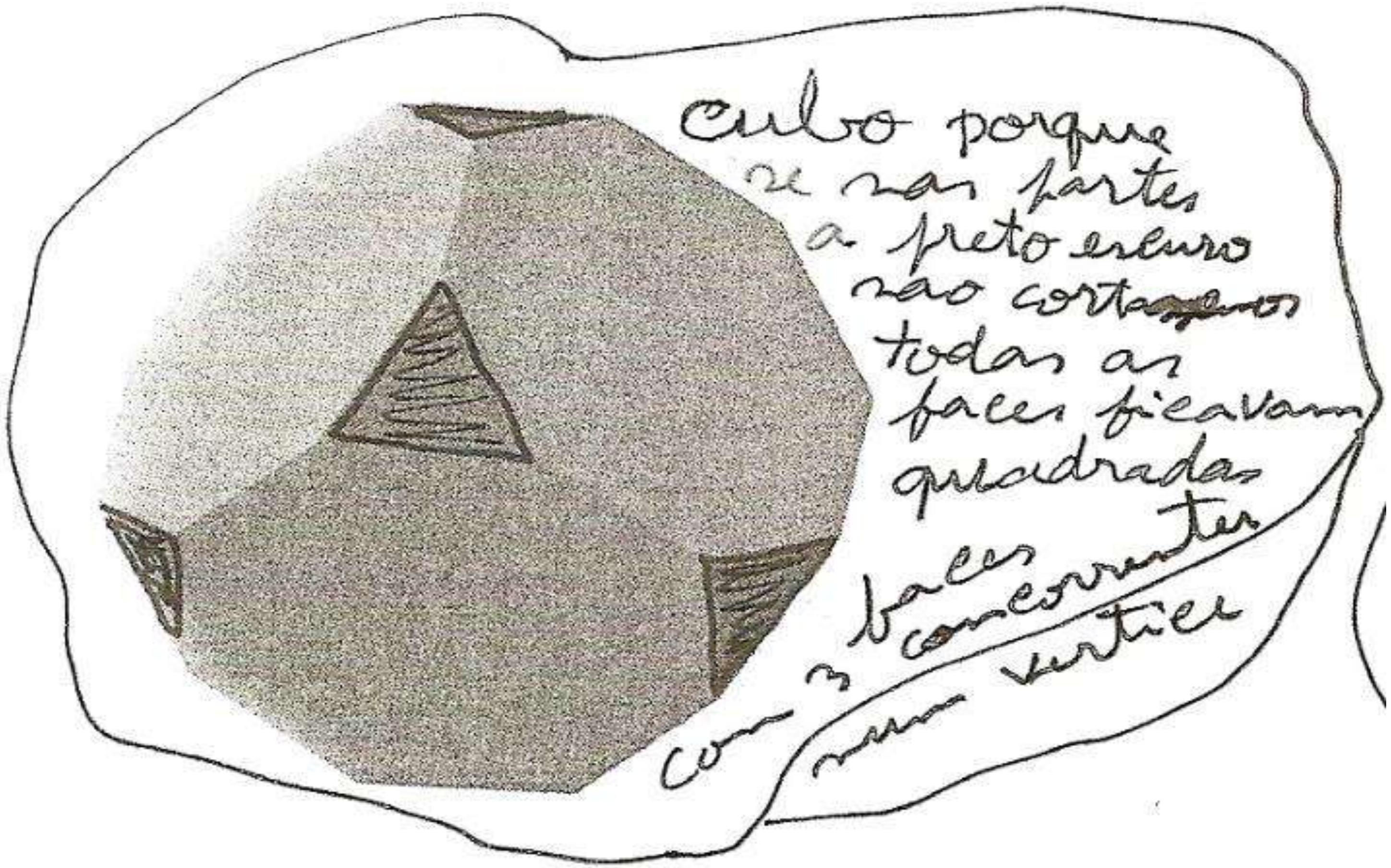
Octaedro truncado



Dodecaedro truncado

Icosaedro trunc

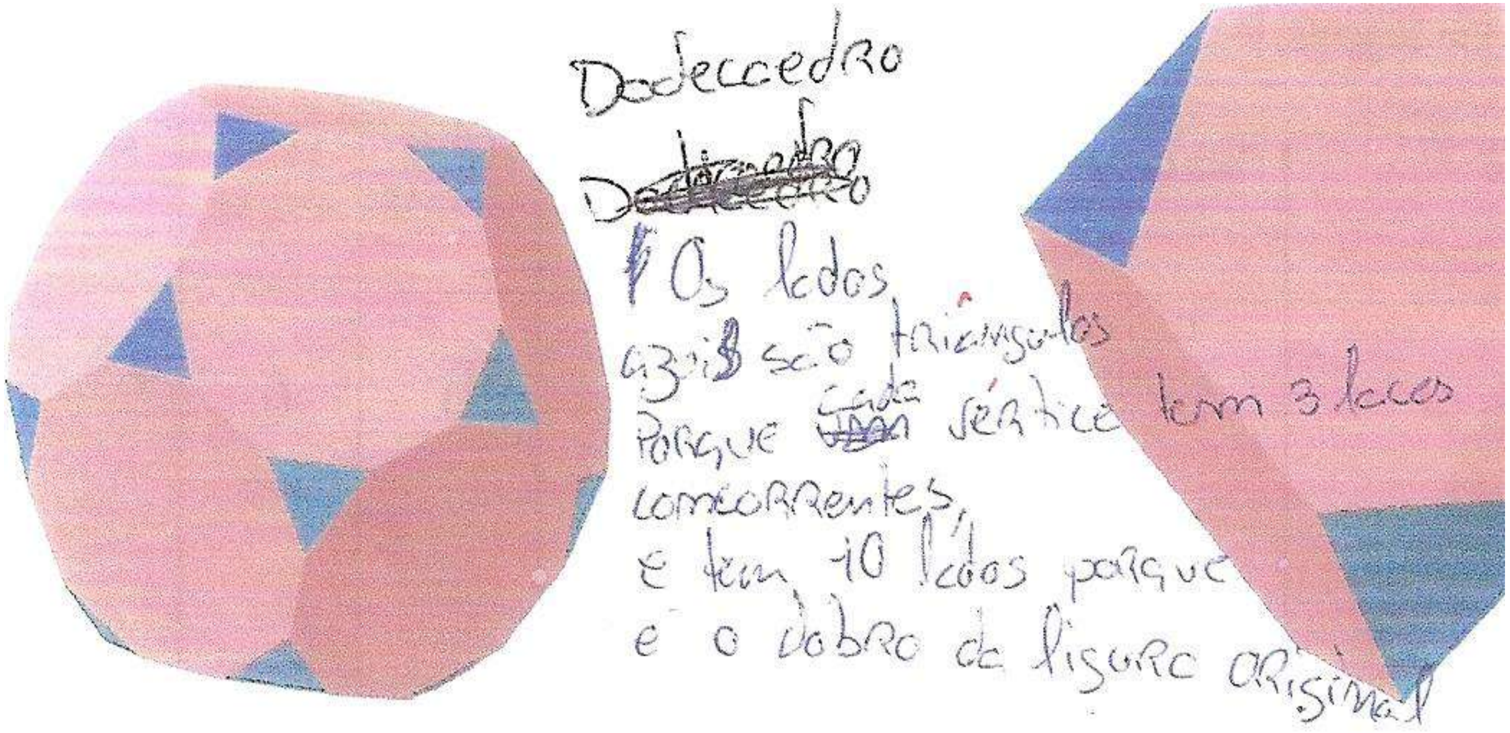
RE noutros níveis de ensino



Cubo porque se nas partes a preto escuro não cortássemos todas as faces ficavam quadradas com 3 faces concorrentes num vértice

7.º ano

RE noutros níveis de ensino

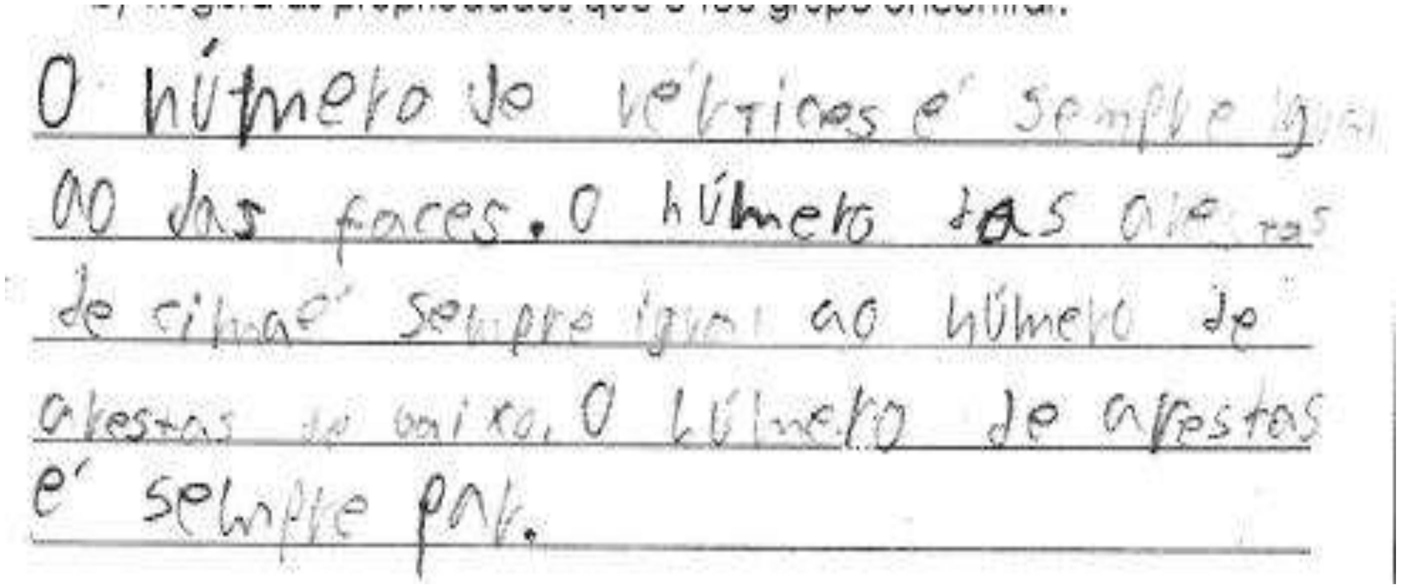


Dodecaedro. Os lados azuis são triângulos porque cada vértice tem 3 lados concorrentes e tem 10 lados porque é o dobro da figura original

7.º ano

RE noutros níveis de ensino

Sobre as pirâmides


O número de vértices é sempre igual ao das faces. O número das arestas de cima é sempre igual ao número de arestas de baixo. O número de arestas é sempre par.

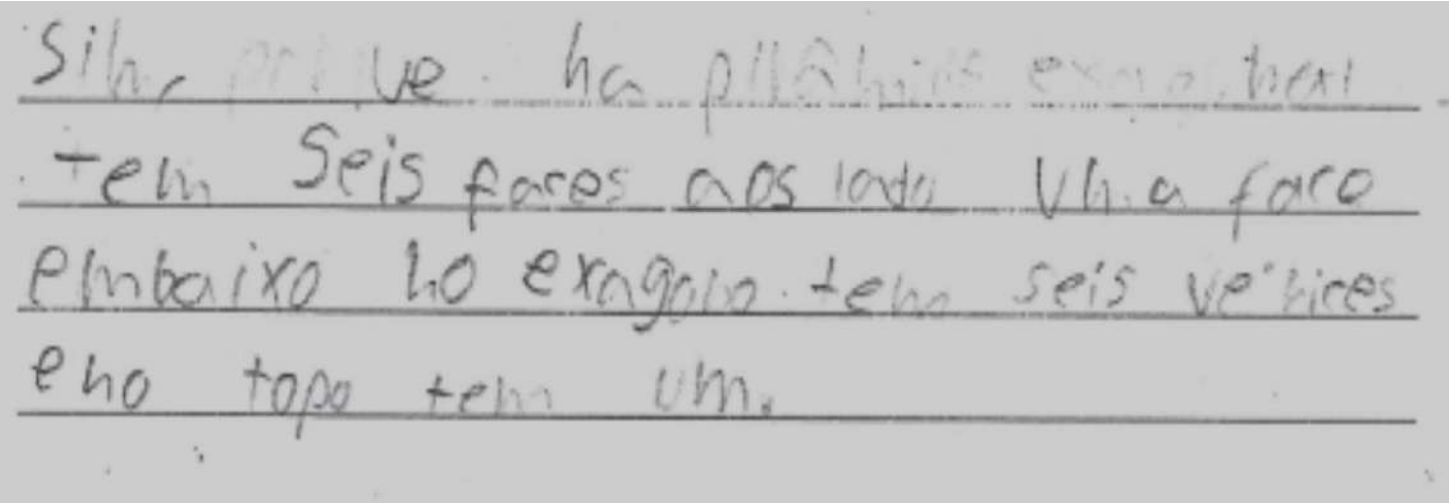
A resposta apresentada numa aula de 2.º ano de Cristina Morais

O número de vértices é sempre igual ao das faces. O número das arestas de cima é sempre igual ao número de arestas de baixo. O número de arestas é sempre par.

2.º ano

RE noutros níveis de ensino

Sobre a igualdade entre o nº de faces e vértices



Sim porque na pirâmide hexagonal tem seis faces ao lado uma face em baixo no hexágono tem seis vértices e no topo tem um.

2.º ano

A resposta apresentada numa aula de 2.º ano de Cristina Morais

RE noutras outras áreas

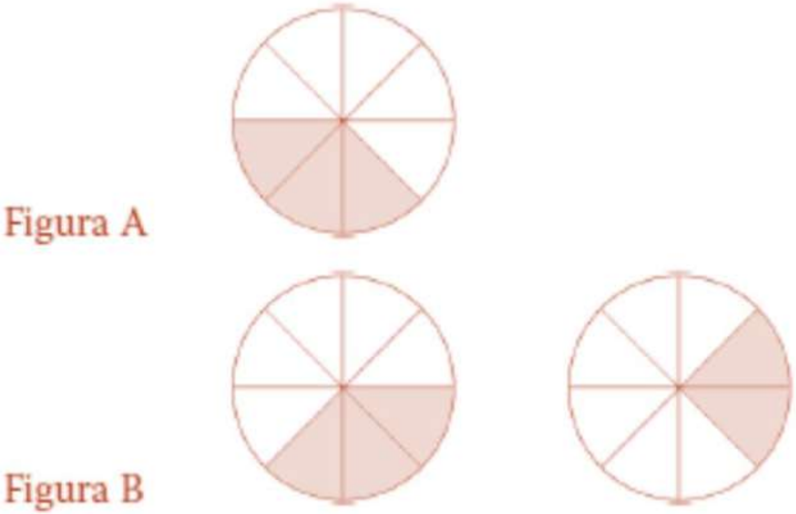
- Constitui um ponto de acesso, uma primeira oportunidade de participar na atividade matemática

Goldenberg, Cuoco e Mark (1998)

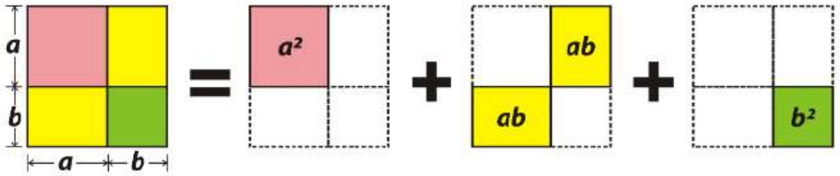
- correlação positiva entre a capacidade de raciocinar espacialmente e o desempenho em matemática e nas disciplinas STEM

Whiteley et al. (2015)

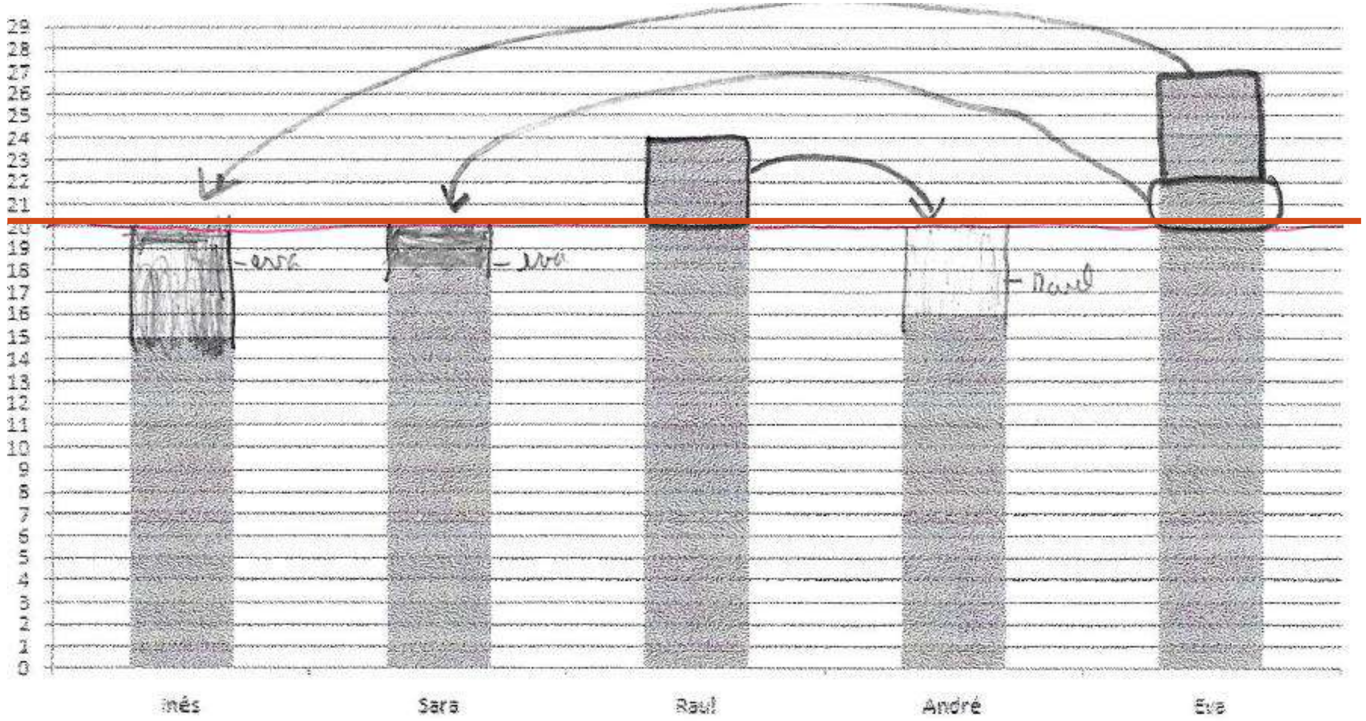
RE noutras outras áreas



Veloso, G. (2017)

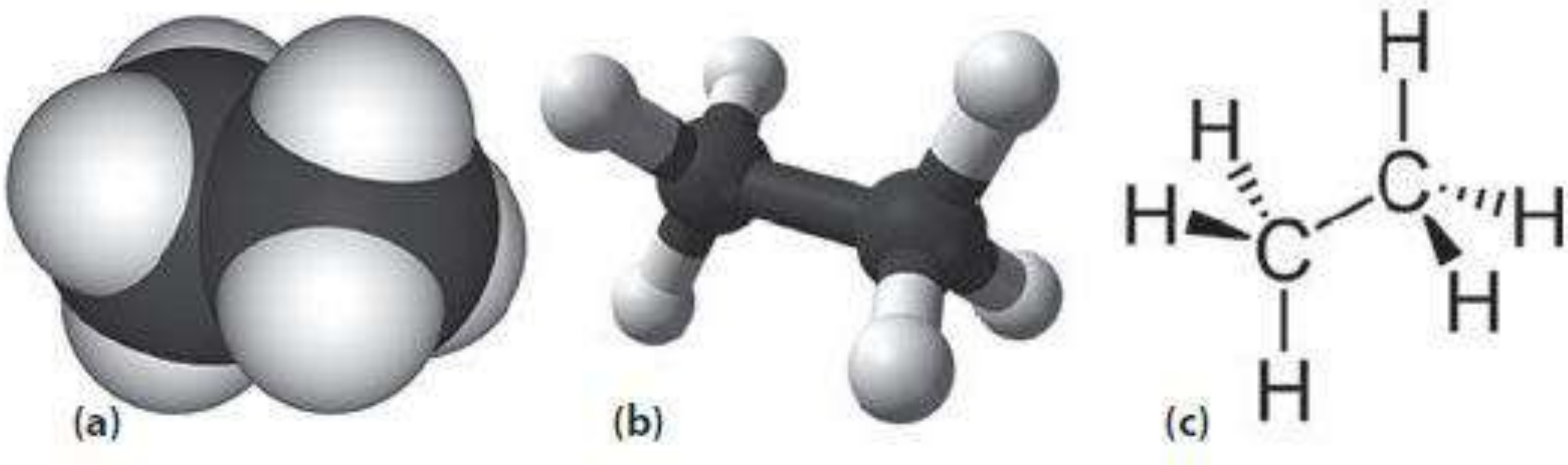


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



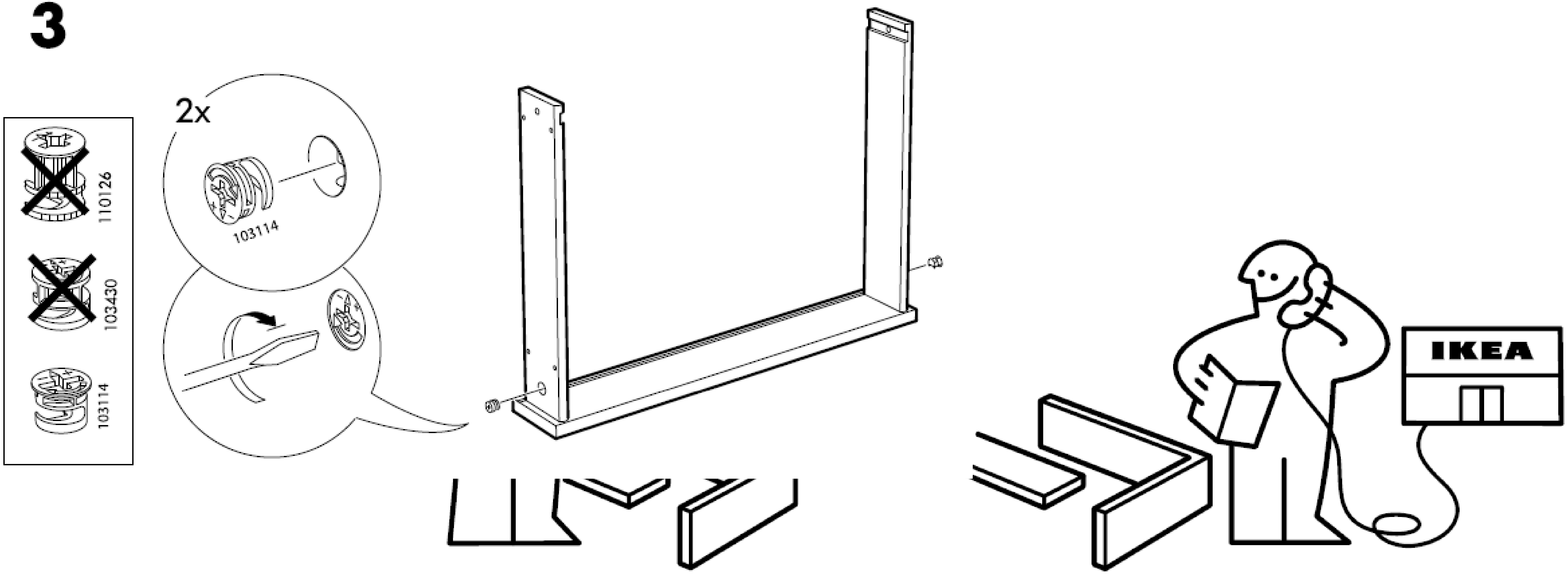
Gregório, M. (2014)

RE noutras outras áreas



Três representações de uma molécula de etano, Francis e Whiteley (2015)

RE noutras outras áreas



RE noutras outras áreas

Concluindo…

- RE na compreensão de conceitos e resolução de problemas
- RE na realização de generalizações e justificações
- RE na construção e interpretação de representações
- “espacializar o currículo” (SRSG, 2015)
- Raciocínio espacial … para responder a questões… (Battista, 2007)

https://www.youtube.com/watch?v=7ZVyNjKSr0M

Steve McCurry

Obrigada!


XXXIV
ProfMat
11
12
13 julho
XXX
SIEM
10.11 julho
APM
Castelo Branco
2019
Escola
Secundária
Amato Lusitano

Justificação da soma dos ângulos internos de um polígono