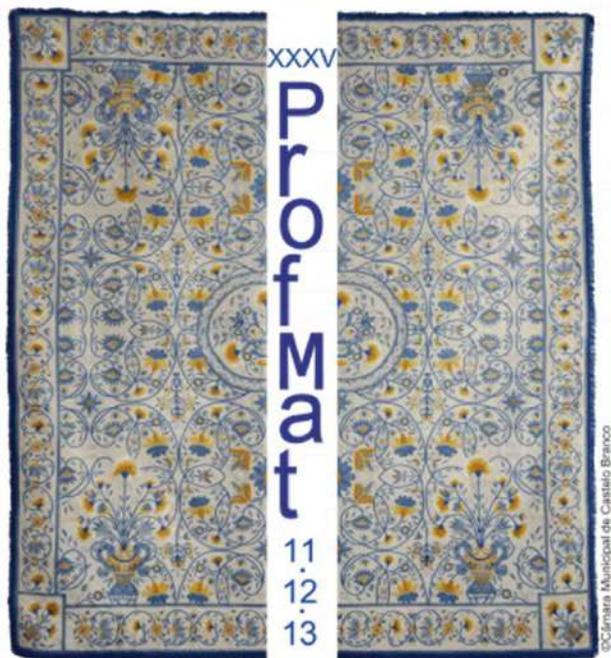


Encontro Nacional de Professores de Matemática



XXX **SIEM** 10.11 julho Castelo Branco 2019  
Seminário de Investigação em Educação Matemática Escola Secundária Amato Lusitano

Associação de Professores de Matemática  APM

## Abordagem visual na resolução de problemas geométricos

**Teresa Bixirão Neto**  
[teresaneto@ua.pt](mailto:teresaneto@ua.pt)

**cidtff**  
centro de investigação  
Didática e Tecnologia na Formação de Formadores

# Plano de Apresentação

1. Pensamento geométrico

2. Problemas geométricos

Composição e decomposição de objetos

Rodar objetos

Modelos e relações espaciais

3. Discussão

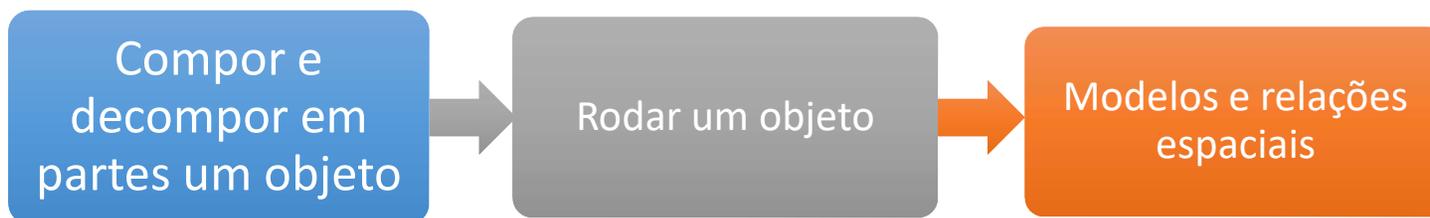
# Pensamento geométrico

Processos de visualização  
(Duval, 1998)

Paradigmas geométricos  
(Parzysz & Jore, 2009 )

Competência geométrica  
(Kuzniak, A., Richard,R. &  
Michael, P., 2018)

Problemas geométricos

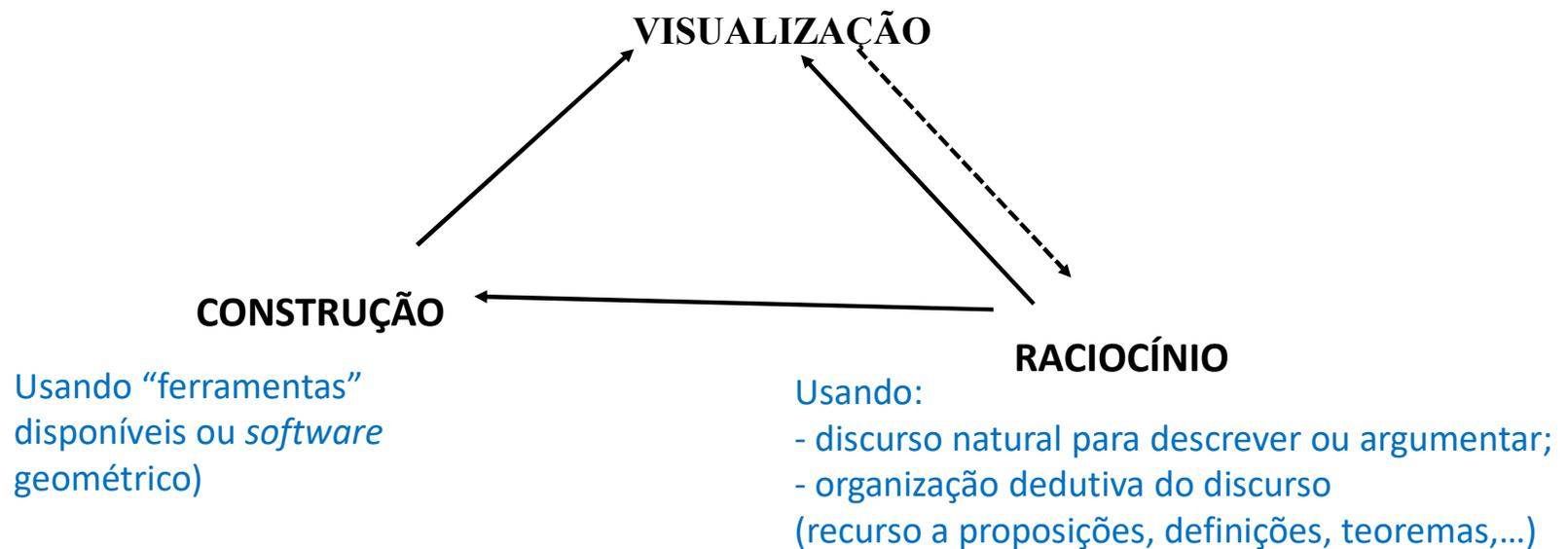


## Duval (1998) refere três espécies de processos cognitivos que cumprem funções epistemológicas específicas

A visualização é um apoio intuitivo à argumentação (definições, proposições, axiomas, teoremas).

A visualização pode iludir ou ser impossível.

Identificação de formas ou figuras no seu todo e configurações em 2D ou 3D



## Paradigmas geométricos (Parzysz & Jore, 2009 )

	<b>Geometrias não axiomáticas</b>		<b>Geometrias axiomáticas</b>	
Tipo de geometria	Concreta (G0)	Gráfico-espacial (G1)	Proto-axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objectos	físicos		teóricos	
Argumentação	Natureza perceptiva		Natureza hipotético-dedutiva	

# Competência geométrica

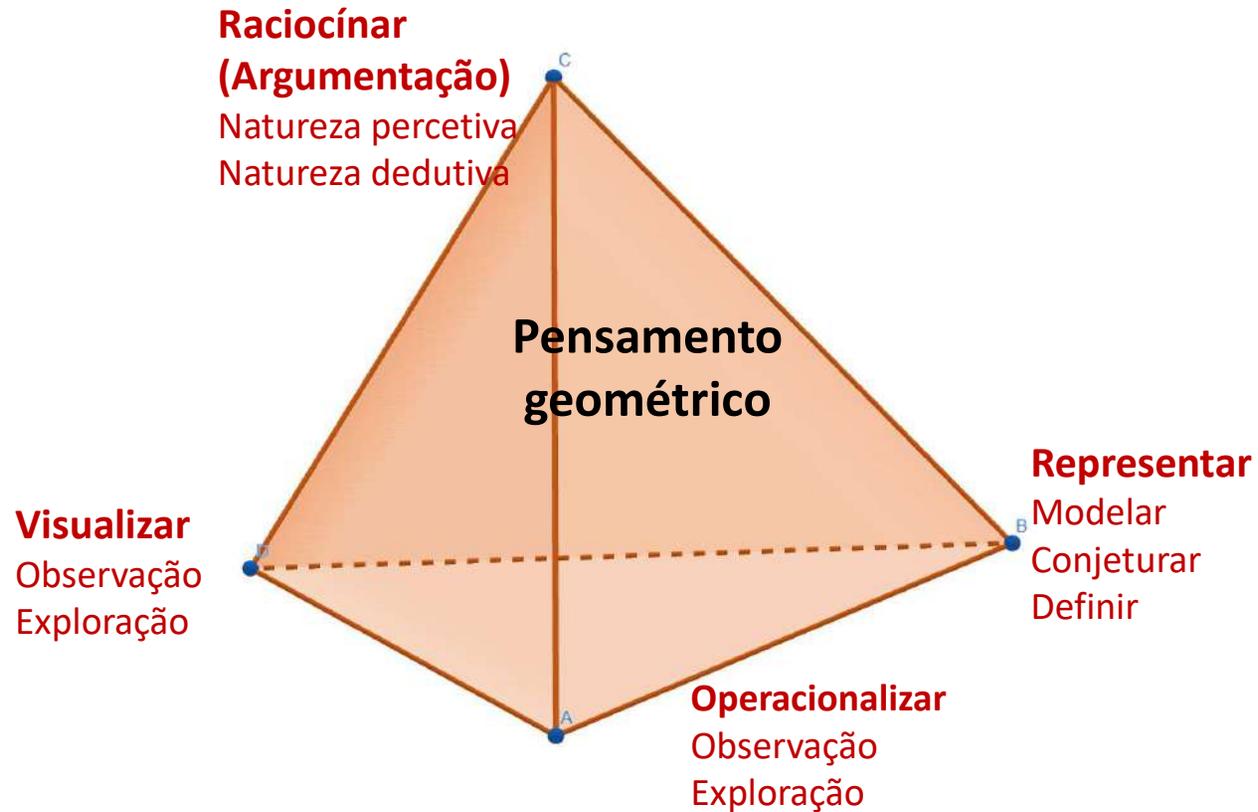
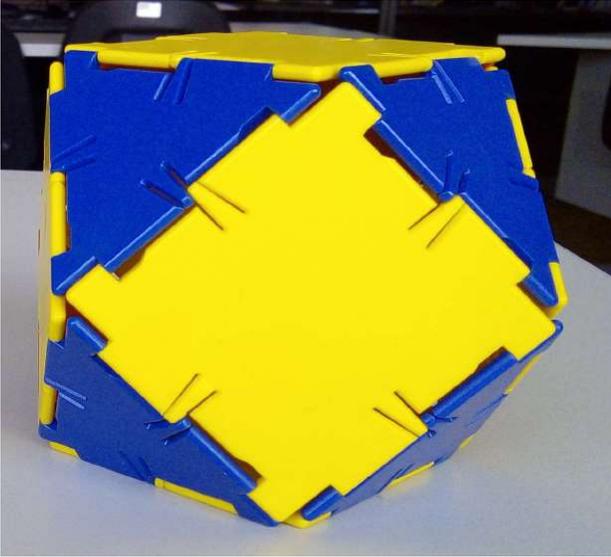
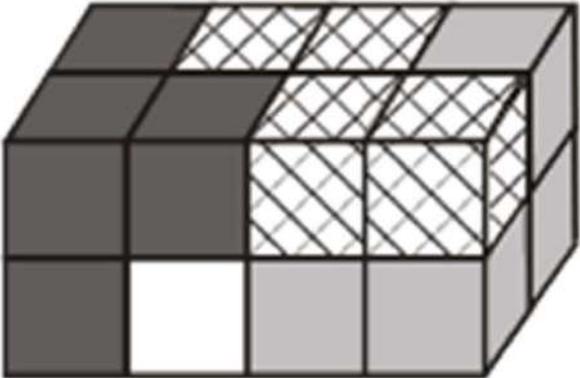
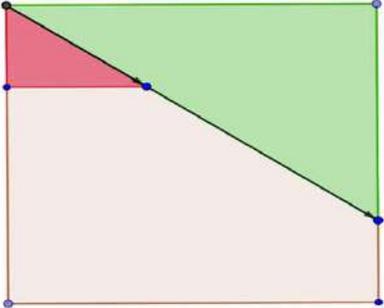


Figura - Competências geométricas (adaptado de Kuzniak, A., et al., 2018)  
*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*



PROBLEMAS

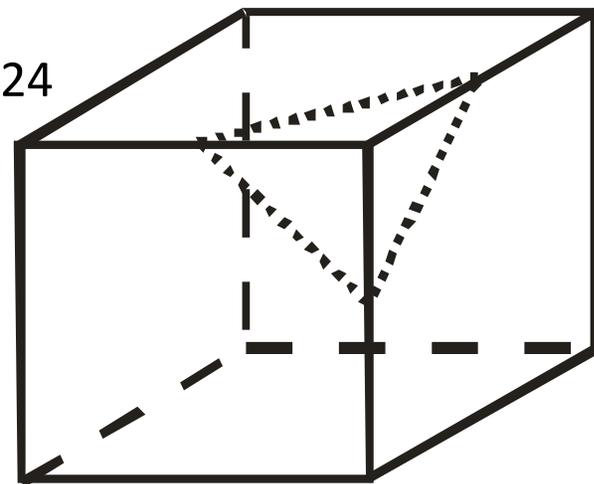


**Problema 1:** Cortam-se todas as esquinas de um cubo de 2 cm de lado como se indica na figura, a uma distância de 1 cm de cada vértice e sobre cada aresta. Quantos vértices tem o sólido obtido?

1.1.

- a) 6      b) 8      c) 12      d) 18      e) 24

1.2. Justifique a sua resposta.



## Solução esperada

c) 12

O corte é feito pelo ponto médio das arestas, o novo sólido terá tantos vértices quantas as arestas do cubo. Como o cubo tem 12 arestas, o novo sólido (cuboctaedro) terá 12 vértices.

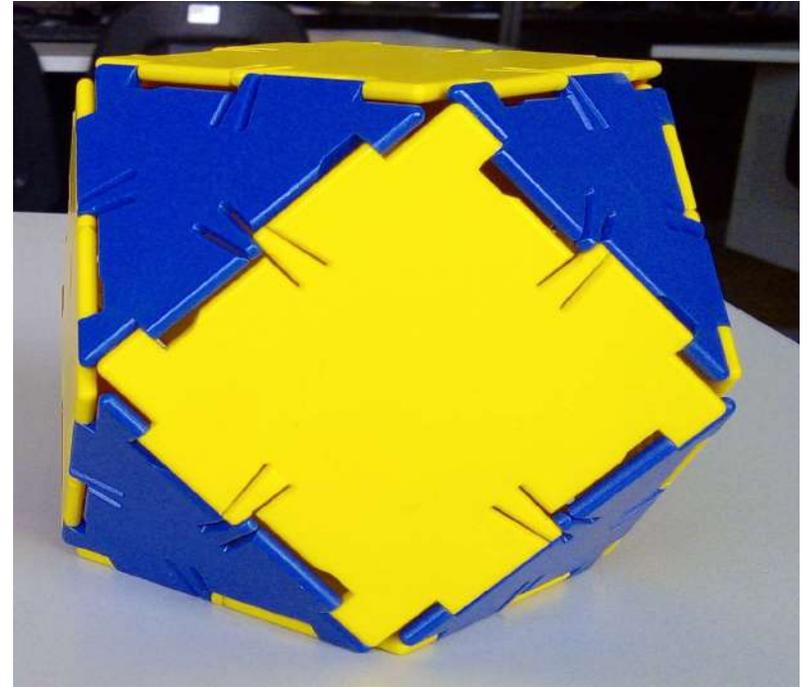


Figura – Modelo do cubo truncado em Polydron

## Estudo empírico (algumas notas)

Elevada percentagem de respostas erradas.

OPÇÃO e)

Não consideram que sendo o corte realizado no ponto médio da aresta terão que excluir os pontos coincidentes.

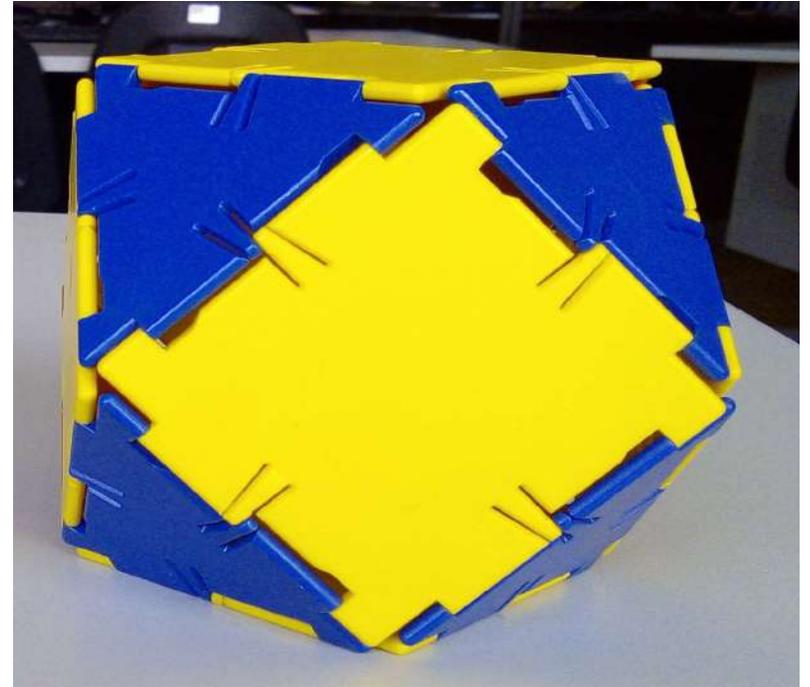


Figura – Modelo do cubo truncado em *Polydron*

## Aplicação de um questionário (Problema 1, questão 1 do questionário – 24 participantes)

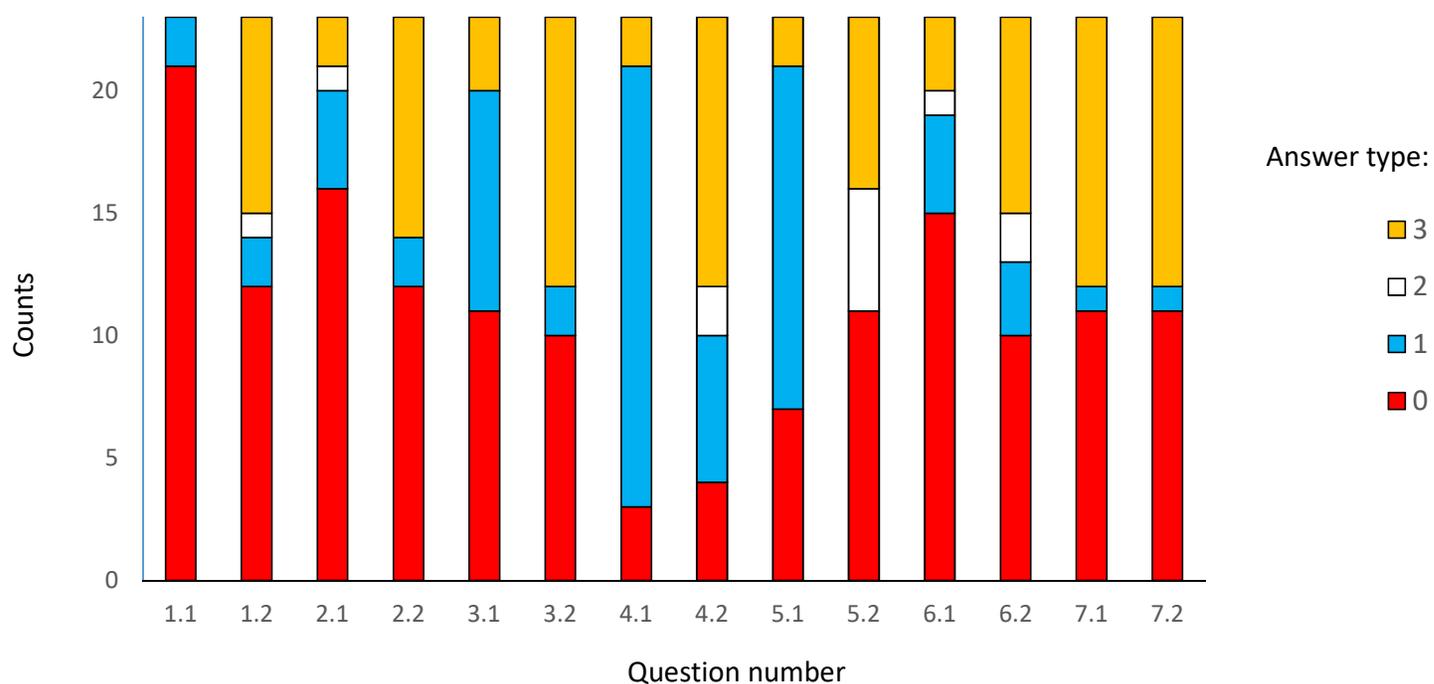
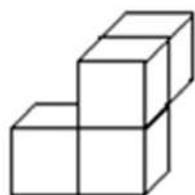


Figura - Resultados de aplicação de um questionário a 24 Professores

3 - Não apresenta resposta; 1 – Resposta correta; 0 – Resposta errada

Justificação – Códigos: 2- justificação correta; 1 – justificação parcialmente correta

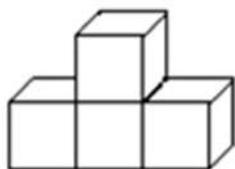
**Problema 2:** Forma-se um paralelepípedo retângulo usando 4 peças, cada uma delas formada por 4 cubos (ver a figura da direita). Três das peças vêm-se por completo; a branca só parcialmente. Qual das 5 peças seguintes é a branca?



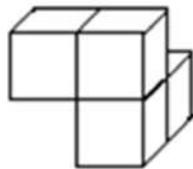
(A)



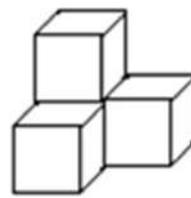
(B)



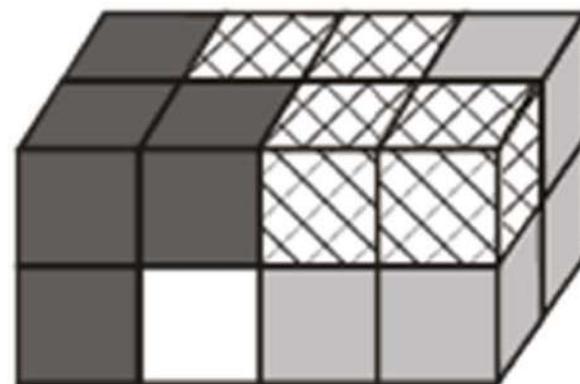
(C)



(D)



(E)



Justifique a sua resposta.

## Solução esperada

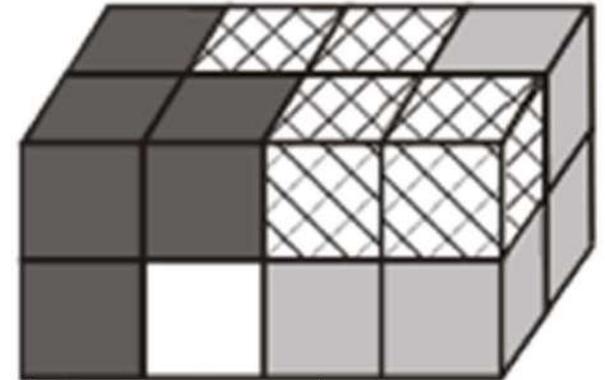
1- Observar o paralelepípedo, os cubos pequenos que o formam.

2- Observar que a parte superior do retângulo está completamente coberta por peças coloridas e uma delas é tracejada.

3- Observar os cubos que vemos na parte inferior – primeira camada (4 em frente e o da esquina traseira direita). Só um deles (dos que estão em frente) é branco.

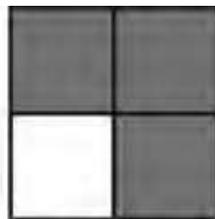
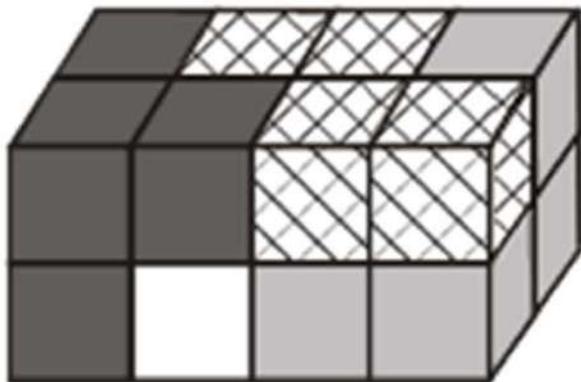
4- “Visualizar mentalmente” os cubos que não são visíveis na figura.

5- Girar 90º a figura da alínea c derrubando-o para frente. Mova-o para caber no paralelepípedo, para comprovar (mentalmente) que é a solução.

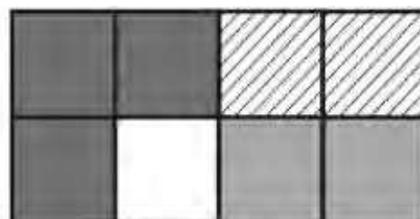


Elevada percentagem de respostas erradas. OPÇÃO (E)

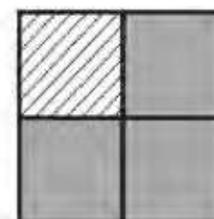
# Decomposição por projeção ortogonal



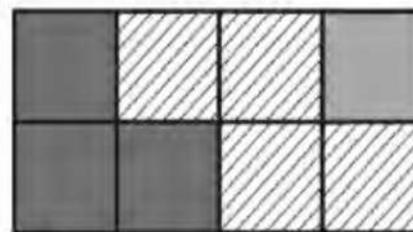
Vista lateral esquerda



Vista frontal

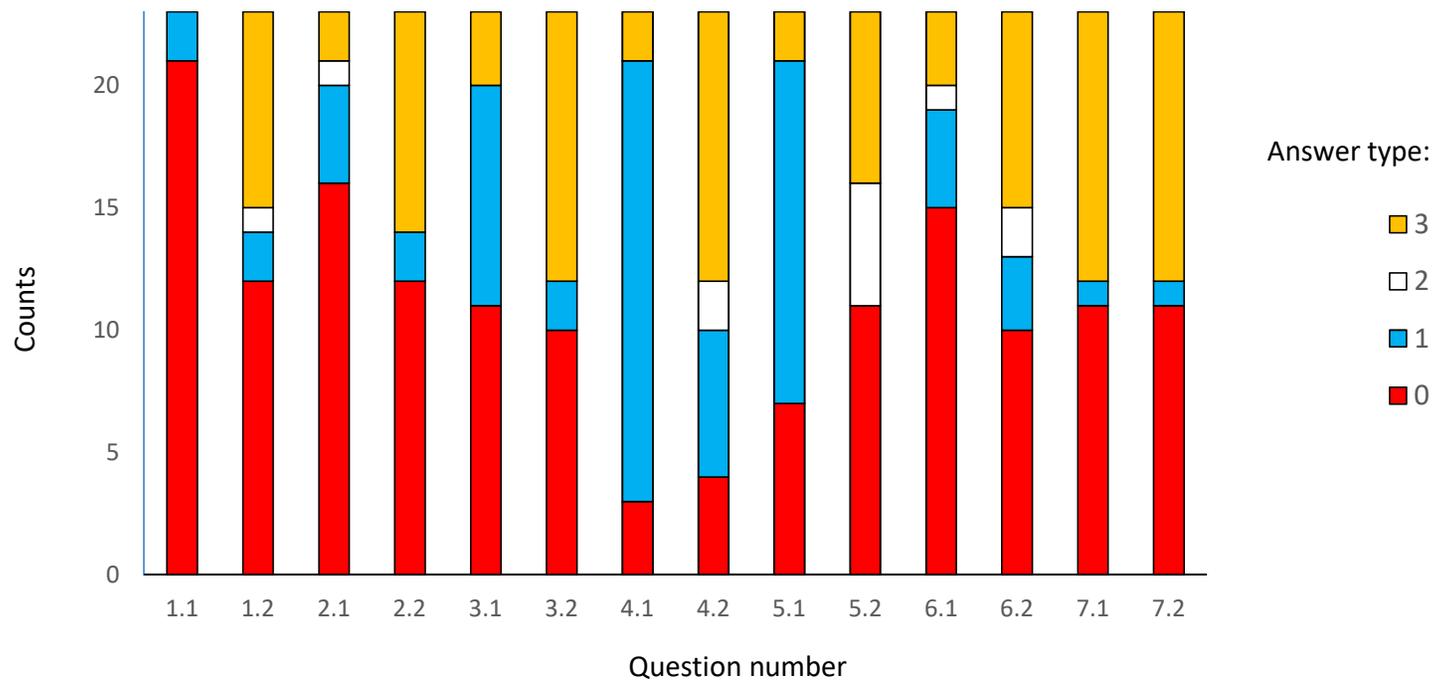


Vista lateral direita



Vista superior

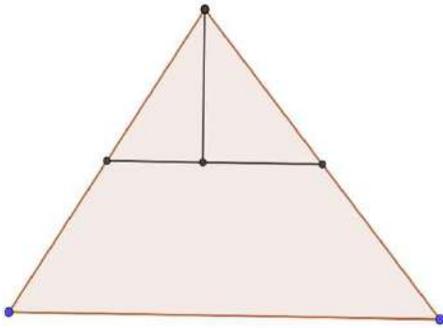
## Resultados de aplicação de um questionário (Problema 2, questão 3 do questionário)



3 - Não apresenta resposta; 1 – Resposta correta; 0 – Resposta errada  
Justificação – Códigos: 2- justificação correta; 1 – justificação parcialmente correta

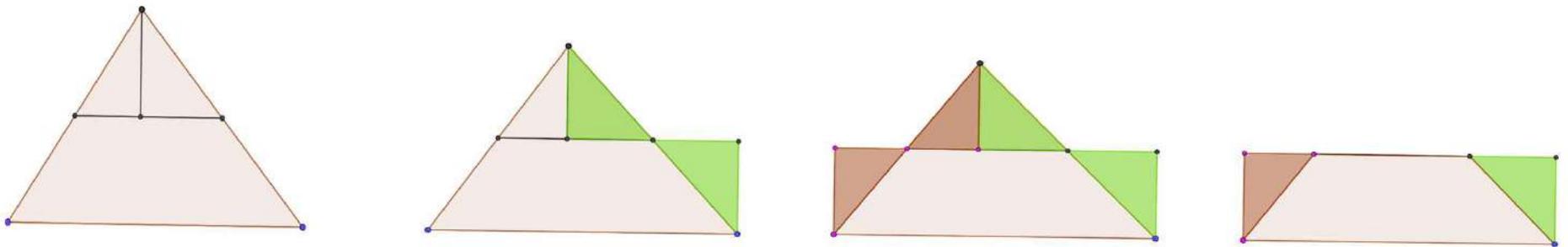
### Problema 3: Decomposição de polígonos

a) Decompor o triângulo num retângulo com a mesma área.



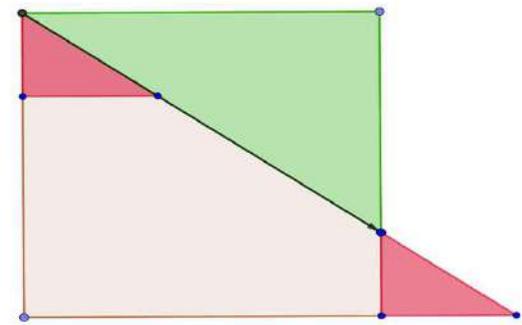
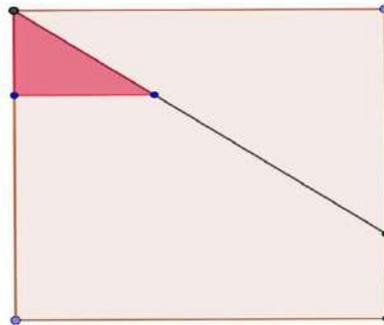
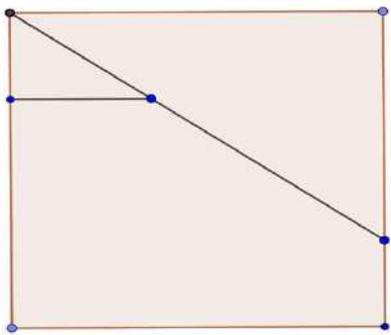
## Solução

Decompor o triângulo num retângulo com a mesma área.

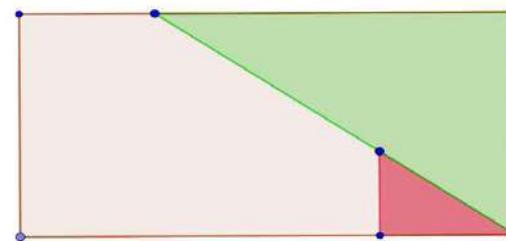
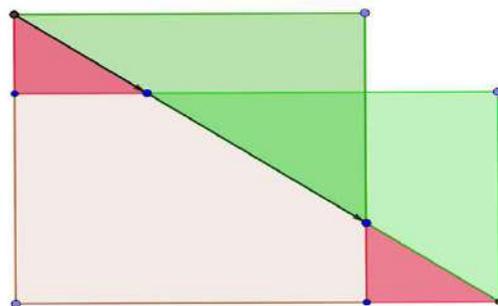
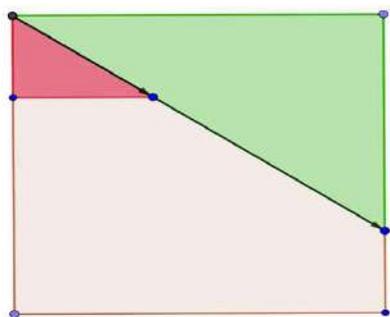


### Problema 3: Decomposição de polígonos

b) Decompor um retângulo noutro retângulo

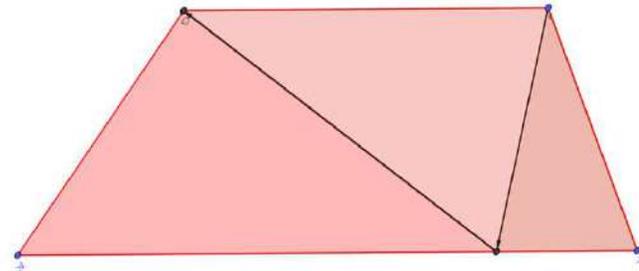
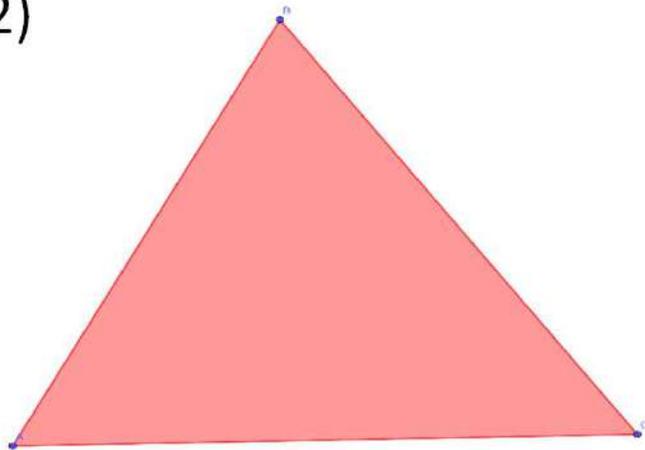


Decompor um retângulo noutro retângulo

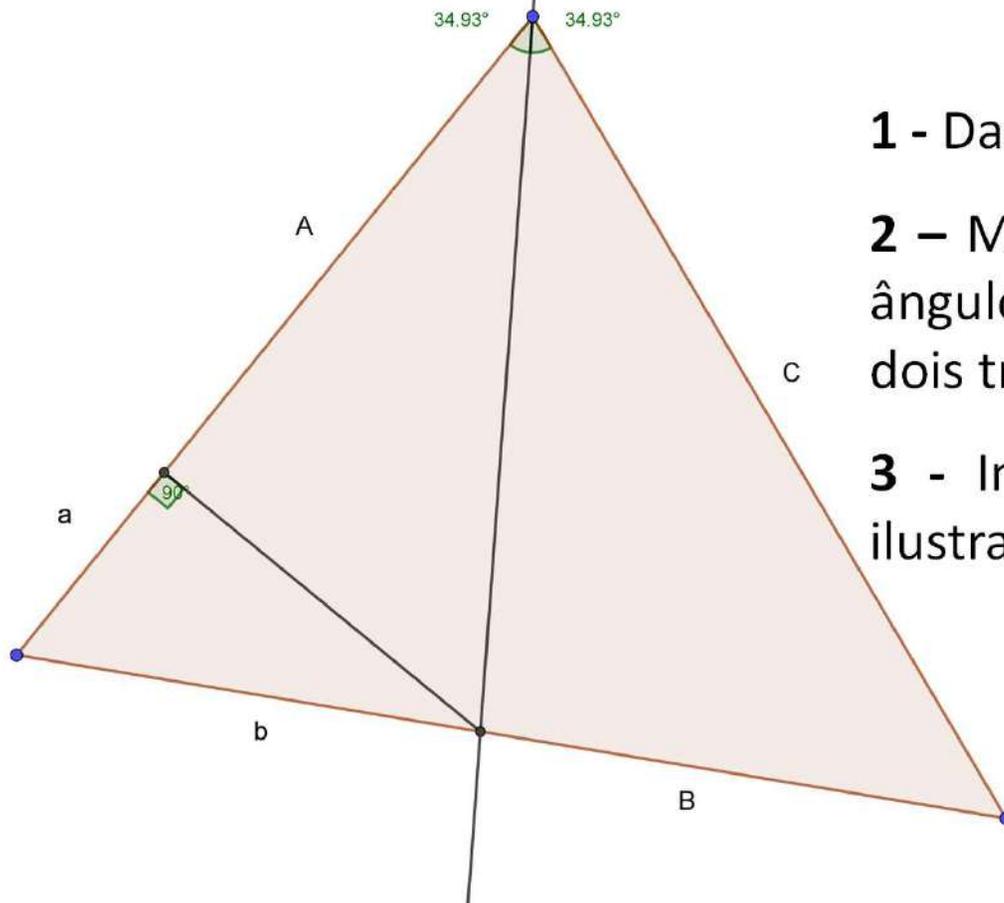


**Problema 3:** Decomposição de polígonos - Recurso ao GeoGebra e/ou construção em papel

c) Decomposição de um triângulo num trapézio com a mesma área e o mesmo perímetro – figuras isoparamétricas (adaptado de Apostol, T., & Mnatsakanian, M. 2012)



## Solução esperada + Procedimentos

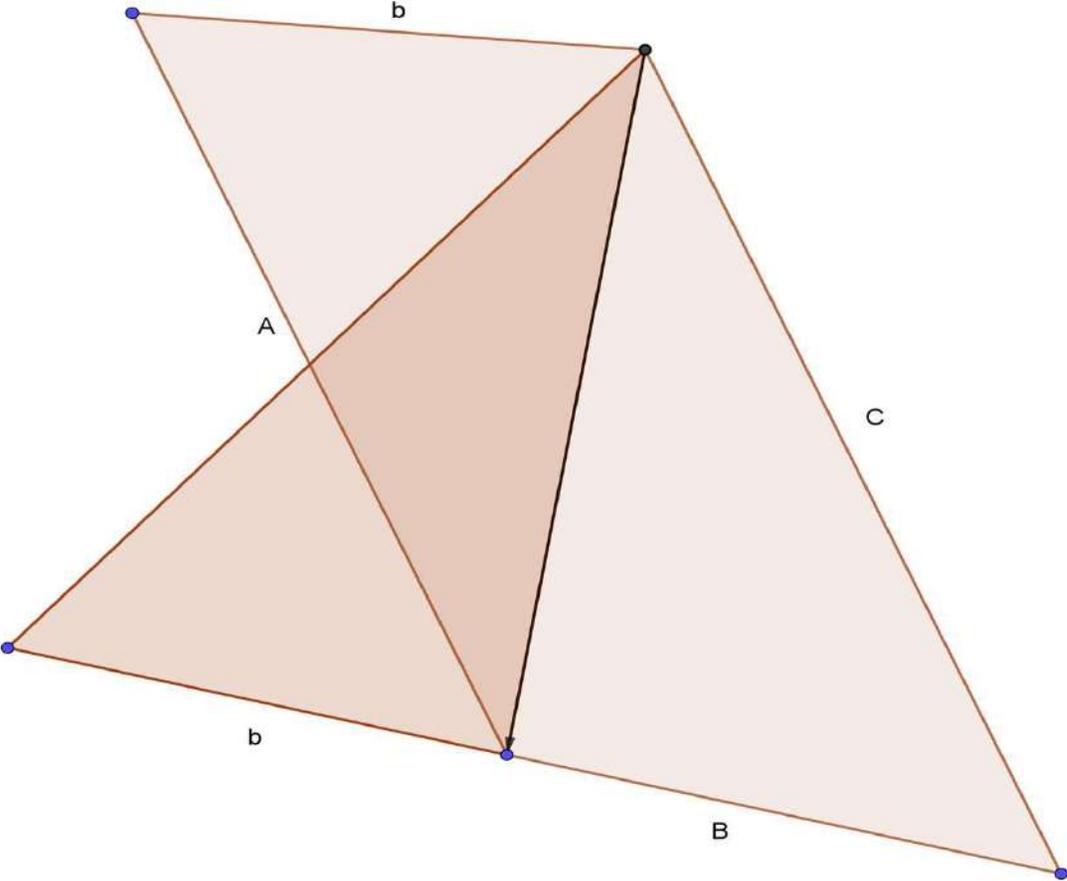


**1** - Dado um triângulo qualquer:

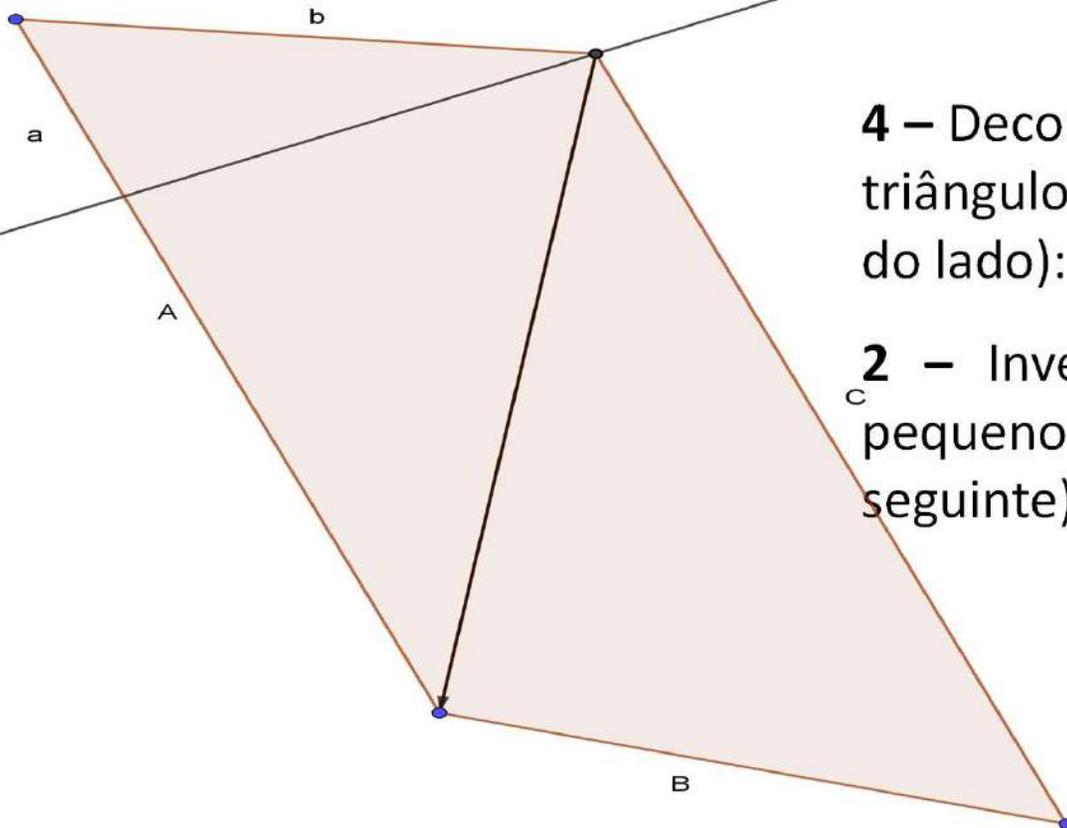
**2** - Marca-se o ângulo bissetor de um dos ângulos internos do triângulo e obtém-se dois triângulos;

**3** - Inverter um desses triângulos (como ilustra a figura seguinte)

# Solução esperada - Procedimentos



## Solução esperada - Procedimentos



**4** – Decompor o triângulo invertido em dois triângulos retângulos (como mostra a figura do lado):

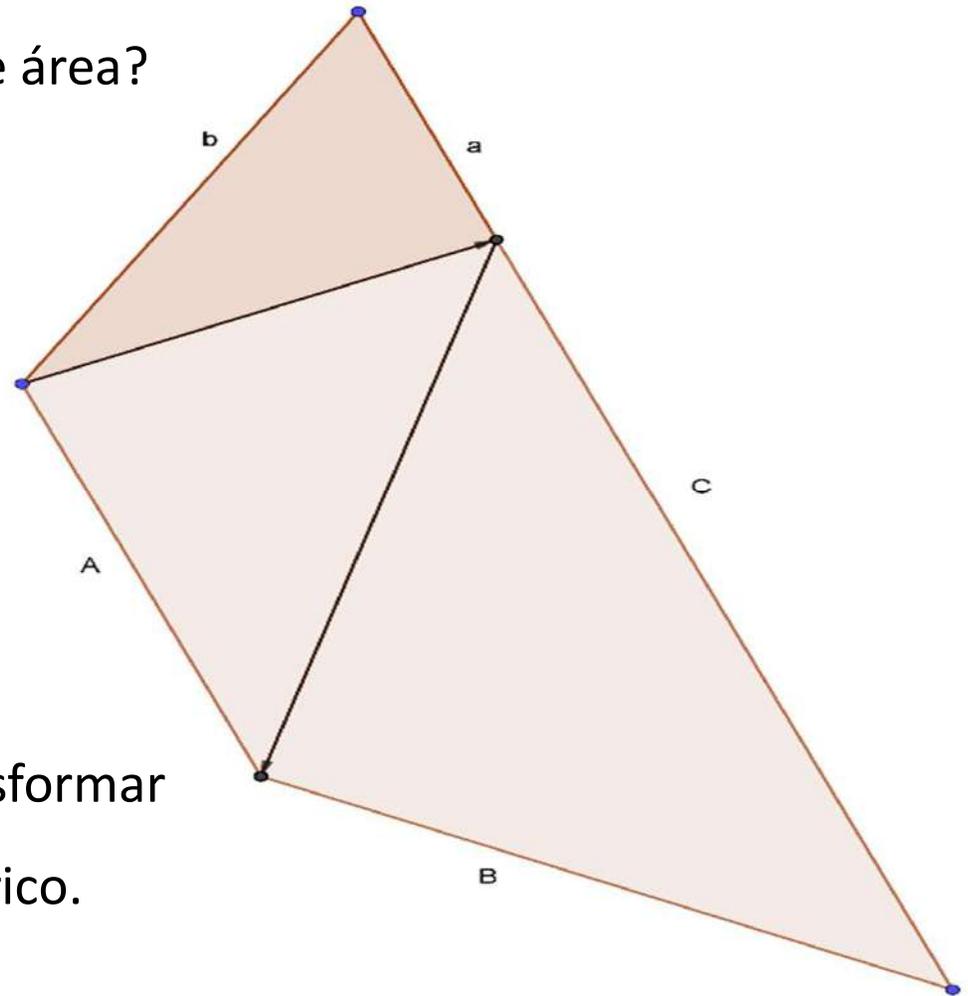
**2** – Inverter o triângulo retângulo mais pequeno e obter um trapézio (ver figura seguinte).

**Problema**: Decomposição de polígonos - Recurso ao GeoGebra

Os polígonos têm o mesmo perímetro e área?

A verificação poderá ser realizada com recurso ao GeoGebra.

**Observação**: A construção em papel ajudou a identificar as transformações geométricas a realizar no GeoGebra para resolver o problema, ou seja, transformar um triângulo num trapézio isoparamétrico.



# **Abordagem visual na resolução de problemas geométricos**

**Recurso a ambientes de Realidade Aumentada (RA)**

**EXEMPLO**

# EduPARK e Formação Inicial de Futuros Profissionais em Educação uma relação de simbiose

<http://edupark.web.ua.pt/>



# O que é o EduPARK?

O EduPARK é um projeto de investigação e desenvolvimento, com início em junho de 2016, cujo laboratório educativo é o Parque Infante D. Pedro.



- App interativa com guiões/jogos educativos, articulados com o Currículo Nacional, para alunos e professores, desde o Ensino Básico ao Superior e turistas
- Valorizar os espaços verdes, a história e a botânica do Parque
- Apelar à preservação do património dos parques citadinos e às atitudes de conservação ambiental e estilos de vida sustentáveis
- Personagem que guia o jogo e dá feedback educativo: a macaca do EduPARK



## Recurso a ambientes de **Realidade Aumentada (RA)**

Conceito de RA define-se como uma tecnologia que permite a sobreposição, composição e visualização de objetos virtuais em ambientes do mundo real, em tempo real.

Marcador RA: depósito

Instruções: Dirijam-se até ao Depósito de Água ou Torreão e apontem a câmara à placa "**Mãe de Água**".

**Questão: Escolha Múltipla**

**Pergunta:** Em que sólidos distintos pode ser decomposto o Torreão? (selecionem todas as que se aplicam)

**Opções:**

**cilindro**

**prisma octagonal**

**semiesfera**

**esfera**



0

Feedback positivo: Conhecem bem os sólidos geométricos! O Torreão pode ser decomposto em prisma octagonal, cilindro e semiesfera.

Feedback negativo: Ora bolas! Cliquem em RA e apontem de novo a câmara à placa "Mãe de Água". O Torreão pode ser decomposto em prisma octagonal, cilindro e semiesfera.

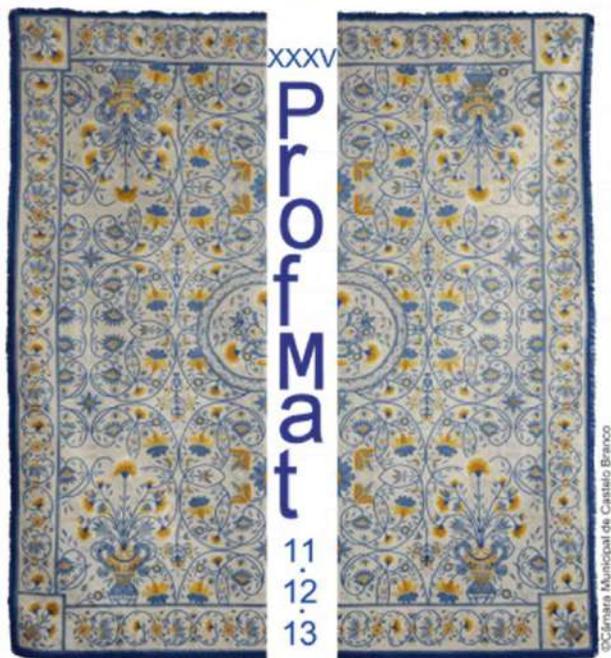




## Referências Bibliográficas

- Apostol, T., & Mnatsakanian, M. (2012). *New Horizons in Geometry*. Mathematical Association of America. doi:10.5948/9781614442103
- Gonzato, M., Godino, J. D. & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23, (3), 5-37.
- Kuzniak, A., Richard, P. R. & Michael, P. (2018). FROM GEOMETRICAL THINKING TO GEOMETRICAL WORKING COMPETENCIES. In Dreyfus, Artigue, Potari, Prediger, Kenneth (Eds.), *DEVELOPING RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION - Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 01- 20). London, England: Routledge.
- Parzysz, B. & Jore, F. (2002): What is geometry for French pre-service elementary schoolteachers ?, in *Proceedings of the 26th PME Conference I*: 218.
- 2

Encontro Nacional de Professores de Matemática



XXX **SIEM** 10.11 julho Castelo Branco 2019  
Seminário de Investigação em Educação Matemática Escola Secundária Amato Lusitano

Associação de Professores de Matemática  APM

Obrigada pela vossa atenção |

Discussão...

**Teresa Bixirão Neto**  
[teresaneto@ua.pt](mailto:teresaneto@ua.pt)