Cálculo mental com números racionais: uma oportunidade para discutir aritmética e álgebra

Castelo Branco, 12 de julho de 2019

Renata Carvalho

Associação de Professores de Matemática

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@campus.ul.pt

APM Associação de Professores de Matemática

U LISBOA UNIVERSIDADE DE LISBOA

ie Instituto de Educação

$$12 + 4 = \square$$

$$12 + \square = 16$$

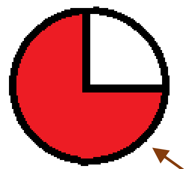
$$16 = \square + 12$$

$$\square + 0{,}4 = 0{,}16 + 0{,}5$$

$$\frac{1}{4} \div \square = \frac{1}{2}$$

Números, operações e suas relações

$$\frac{3}{4}$$

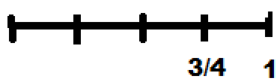


$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$1 - \frac{1}{4}$

75%

$3 \times \frac{1}{4}$



$0{,}75$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

Metade de $\frac{3}{2}$

$\frac{6}{8}$

(Carvalho, 2016; Brocardo, 2011)

Ideias-chave para a aprendizagem dos números

- **Compreender os números**
  - O que são…
  - Como se representam com objetos, dígitos ou na reta numérica,
  - Como se relacionam uns com os outros,
  - Como fazem parte de sistemas que têm estruturas e propriedades,
  - Como é que se usam números e operações para resolver problemas.
- **Desenvolver o sentido do número**
  - Capacidade de decompor números naturalmente,
  - Usar números particulares como referência, como 100 ou ½,
  - Usar as relações entre as operações aritméticas para resolver problemas,
  - Compreender o sistema decimal de posição,
  - Estimar,
  - Compreender os números (*Make sense of numbers*),
  - Reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números.

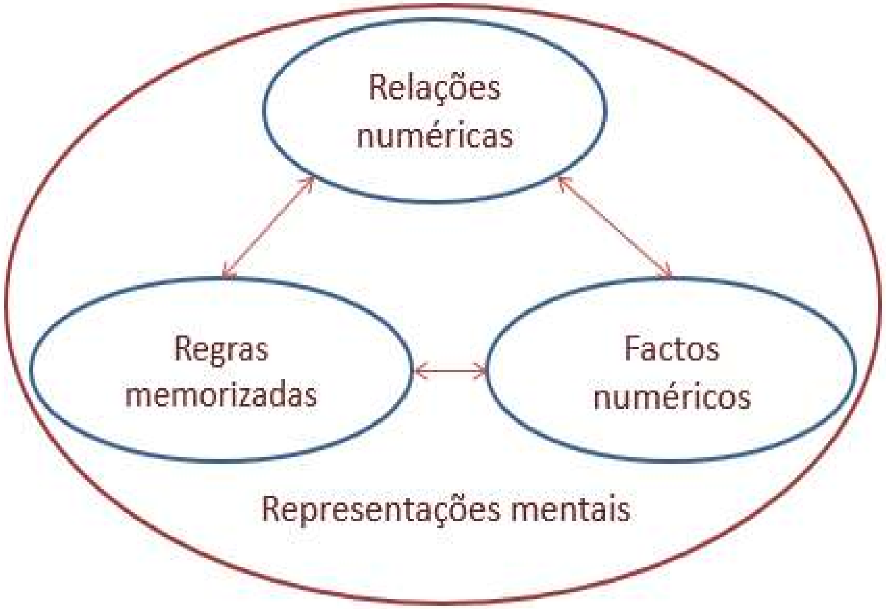
Principles and Standards (NCTM, 2000)

Ideias-chave para a aprendizagem dos números

- **Desenvolver a fluência computacional**
  - Conhecer as tabuadas (adição, subtração, multiplicação e divisão),
  - Usar métodos eficientes e rigorosos para calcular (eventualmente, combinações de estratégias mentais e de papel e lápis),
  - Ser capaz de explicar os seus métodos, compreender que existe sempre uma diversidade de métodos,
  - Ser capaz de estimar e de julgar a razoabilidade dos resultados.

Principles and Standards (NCTM, 2000)

Estratégias de cálculo mental



(Empson, Levi & Carpenter, 2010; Heirdsfield, 2011; Johnson-Laird , 1990)

Pensamento relacional envolve o uso das propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver um problema tendo em conta o seu contexto.

(Empson, Levi & Carpenter, 2010)

$12 + 4 = \square$

$12 + \square = 16$

$16 = \square + 12$

Preparar o cálculo mental com números racionais

- Importância dos contextos

$$\frac{1}{4} \div \_\_ = \frac{1}{2}$$

$$2{,}4 \div \frac{1}{2}$$

Uma tina tem de capacidade 22,5l . Quantos baldes de 1/2 são necessários encher para despejar por completo a tina?

- Diferentes representações dos números racionais

$$20\%\ de\ 50 \qquad 2{,}4 \div \frac{1}{2}$$

- Antecipação de estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais

$$2{,}4 \div \frac{1}{2} \qquad 0{,}7 + \_\_ = 1 \qquad 20\%\ de\ 50$$

- Antecipação de erros dos alunos (de cálculo e concetuais)

Cálculo mental na sala de aula

- **Dez tarefas de cálculo mental;**
  - Expressões com e sem valor em falta e situações contextualizadas;
  - Diversas representações dos números racionais (fração, decimal, percentagem);
  - Números de referência;
  - Relações numéricas.

- **Dinâmica:**
  - PowerPoint temporizado;
  - 15 segundos para resolver cada expressão;
  - 20 segundos para resolver cada situações contextualizadas;
  - Discussão coletiva;
  - Realização da tarefa (entre 30 e 90 minutos).

Estratégias de cálculo mental com números racionais

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - ? = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Rogério: Temos a metade de um bolo. Comíamos metade [deste bolo] e ficamos só com um quarto. Então é metade menos $\frac{1}{4}$.

Se $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ **então** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

Relação entre expressões

Rui: $\frac{1}{2}$ equivale a 50 cêntimos e $\frac{1}{4}$ a 25 cêntimos. Fica 25 cêntimos.

Mudança de representação

Propriedade da subtração

$$\frac{1}{3}\,de\,\frac{1}{3}$$

Maria: ….eu pus em número 0,111111

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}\,de\,\frac{1}{3}}$$

Maria: A mim deu $\frac{1}{9}$, só que eu pus em número 0,111111 . . . $\frac{1}{3}$ é igual a 0,33333. Mas depois 0,33333 a dividir por 3 é igual a 0,11111 porque isto é tipo a tabuada do 11, como 11 vezes 1, 11 vezes 2, 11 vezes 3. Aqui é ao contrário é a dividir por 3 que dá 11.

Mudança de representação

Relação entre operações

$$\mathbf{\frac{1}{4}} \div ? = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Ana: Como eu sei que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ dá pus $\frac{1}{4}$ pus logo $\frac{1}{2}$.

$$\text{se } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ então } \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Relação entre expressões

Gonçalo: Deu-me $\frac{1}{2}$. Eu fiz por porcentos . . . Vi $\frac{1}{4}$ é 25% e $\frac{1}{2}$ é 50. Então dividi . . . Eu fiz $\frac{1}{4}$a dividir por $\frac{1}{2}$ que é $25 \div 50$.

Mudança de representação

Propriedade da divisão

$$\mathbf{1,9 - 0,50}$$

Rui: 1 euro e 90 tirei . . . 10 cêntimos e no 50 menos 10 cêntimos. Então 1 euro e 80 menos 40. 1 euro e 40.

$$\text{se } 1{,}9 - 0{,}5 = (1{,}9 - 0{,}1) - (0{,}5 - 0{,}1)$$

então

$$1{,}8 - 0{,}40 = 1{,}40$$

Propriedade da invariância do resto

$4{,}2\times0{,}2 = 0{,}84$

"Eu sei que 0,2 é equivalente a $\frac{1}{5}$, se for $\frac{1}{5}$ é a dividir por 5. Dá 8,4"

$4{,}2\times0{,}2=4{,}2\times\frac{1}{5}$

$4{,}2\times\frac{1}{5}=4{,}2\div5$

Mudança de representação

Mudança de operação

$4{,}2=\frac{42}{10}$

$\frac{42}{10}=\frac{40}{10}+\frac{2}{10}$

"Fiz 8×5. O 2 tenho que somar… Tenho que acrescentar casas decimais (…) até encontrar um número que multiplicado por 5 dê 2… é o 20…Dá 0,4"

$\frac{40}{10}\times10\div5=?\times5=40$

$\frac{2}{10}\times100\div5=?\times5=20$

$(\frac{40}{10}\times10\div5)+(\frac{2}{10}\times100\div5)$

Mudança de representação

Decomposição

Propriedades das operações

$$4,2 \times 0,2$$

$$42 \times 2 \times 0,1 \times 0,1$$

$$84 \times 0,1 \times 0,1$$

$$8,4 \times 0,1$$

$$0,84$$

$$\mathbf{0,82 \div ? = 1,64}$$

Ivo: A mim deu-me... 5 décimas. Eu vi logo... Que 164 era o dobro de 82. Por isso, como era a dividir só podia ser 0,5.

Mudança de representação	Relação entre números	Relação entre operações

$$\mathbf{5\%\ \boldsymbol{de}\ ? = 3}$$

João: Então punha 3 berlindes dentro de um saco. Esse valia 5[%]. Depois ia buscar, ia buscar mais 95 sacos e enchia-os todos com 3 berlindes. Não, enchia 20 sacos cada um com 3 berlindes porque 5 vezes 20 dava o 100%. E depois fui contar os berlindes. 3 mais... Fiz 3 vezes 20.

Relação
parte-todo

A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0,75l$ de refresco?

Ricardo: $\frac{1}{8}$ é um copo e 75% é $\frac{6}{8}$. . . $\frac{6}{8}$ é 6 copos.

Mudança de representação

Frações equivalentes

Para aprender Aritmética é necessário pensar sobre Aritmética de forma relacional

Pensamento relacional facilita o desenvolvimento do pensamento algébrico, minimizando erros e equívocos

Aritmética **Pensamento relacional** Álgebra

O pensamento relacional **não** se centra na realização de cálculos elaborados, ou conhecimento de truques de cálculo ou na memorização das propriedades dos números e das operações, mas sim no **raciocínio e na compreensão**.

(Empson, Levi & Carpenter, 2010)

Transição da Aritmética para a Álgebra com foco no pensamento relacional

- Foco em relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica;
- Foco nas operações e suas inversas e na ideia relacionada de operar/não operar;
- Valorizar a representação e a resolução e não apenas a resolução;
- Compreender números e letras e não apenas os números;
- Compreensão do sinal de igual enquanto relação de equivalência;
- Diversidade de contextos de aprendizagem;
- Valorizar o uso de expressões de valor em falta;
- Promover discussões matemáticas na sala de aula.

(Carpenter et al., 2003; Carvalho, 2016; Ponte et al. , 2009; Kieran, 2004)

Desenvolvimento do pensamento relacional

- Promove o aparecimento de **estratégias pessoais** que surgem em função da **compreensão** que cada criança tem dos números e das operações e onde esta usa relações numéricas para estabelecer novas relações para efetuar cálculos;
- Contribui para o desenvolvimento de conhecimentos acerca da **generalização das propriedades** dos números e das operações tornando-as mais explícitas – *pensamento algébrico*:
    - Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível
    - Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico
    - Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1.º ciclo.
- É a base para a aprendizagem da Álgebra nos níveis de escolaridades seguintes atenuando erros e equívocos dos alunos.

(Carpenter et al., 2003; Carvalho, 2016; Ponte et al. , 2009; Kaput & Blanton, 2005; Kieran, 2004)

Cálculo mental com números racionais: uma oportunidade para discutir aritmética e álgebra

Obrigada!

Renata Carvalho

Associação de Professores de Matemática

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@campus.ul.pt