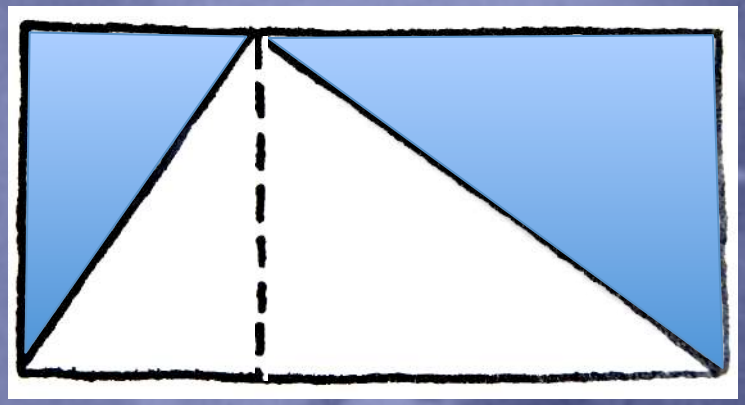
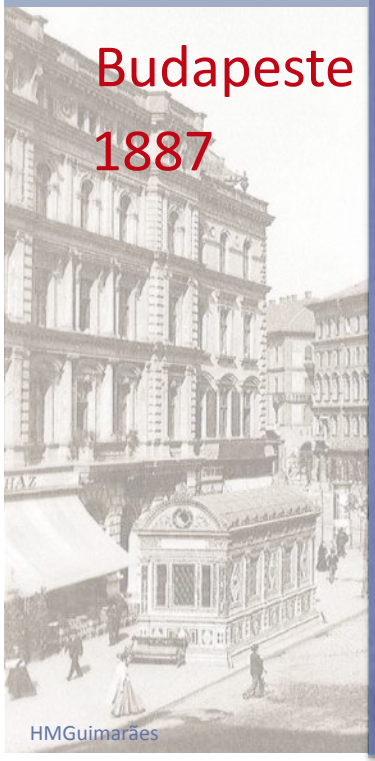
Resolução de Problemas, pois claro

Henrique Manuel Guimarães
Instituto de Educação da
Universidade de Lisboa

O triângulo, quanto deixa por 'cobrir' do rectângulo?

George Pólya
(1987-1985)





Budapeste
1887

"A Matemática não é um desporto para espectadores: não a podemos apreciar, nem aprender, sem uma participação activa."

O «Award for Distinguished Service to Mathematics» (1963)

"Homenageamo-lo pelo seu contributo na promoção de uma melhor compreensão nossa sobre a natureza da invenção matemática e pela sua influência construtiva no ensino da matemática no seu sentido mais amplo, em todos os níveis, elementares ou avançados, e à escala nacional ou internacional.

George Polya é único entre os matemáticos a combinar, durante a sua distinta carreira científica, a investigação profunda em uma frente muito ampla, com um interesse sempre presente pelo ensino da matemática."

Let Us Teach Guessing (1966)

"Em minha opinião, ensinar é dar oportunidade aos alunos de descobrir as coisas por si próprios (...); se eles realmente quiserem aprender, têm que ser eles descobrir por si."

"Eis a segunda: primeiro conjecturar, depois demonstrar; assim aconteceu com as grandes descobertas"

"A Matemática parece consistir de demonstrações, todavia não é nada bem assim. A Matemática acabada é constituída por demonstrações, mas a Matemática em construção é constituída por conjecturas."

Palo Alto

1942

1945 *How To Solve It*

1954 *Math. and Plausible Reasoning (I e II)*

1962 1963 1965 *Math. Discovery (I) Math. Methods in science Math. Discovery (II)*

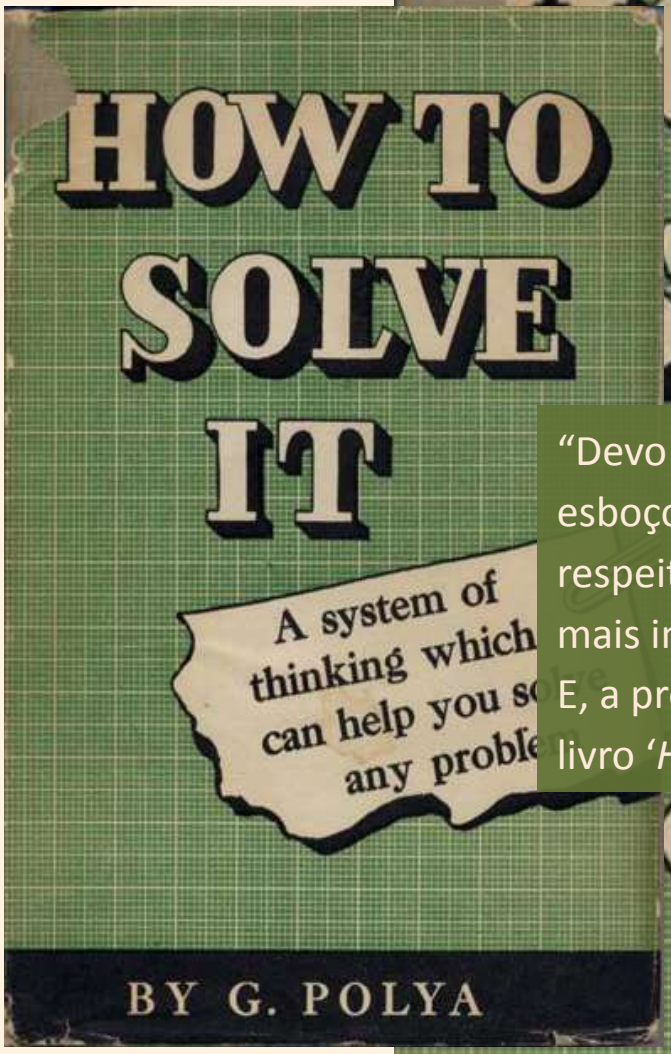
1974 *Stanford Mathematics Problem book*

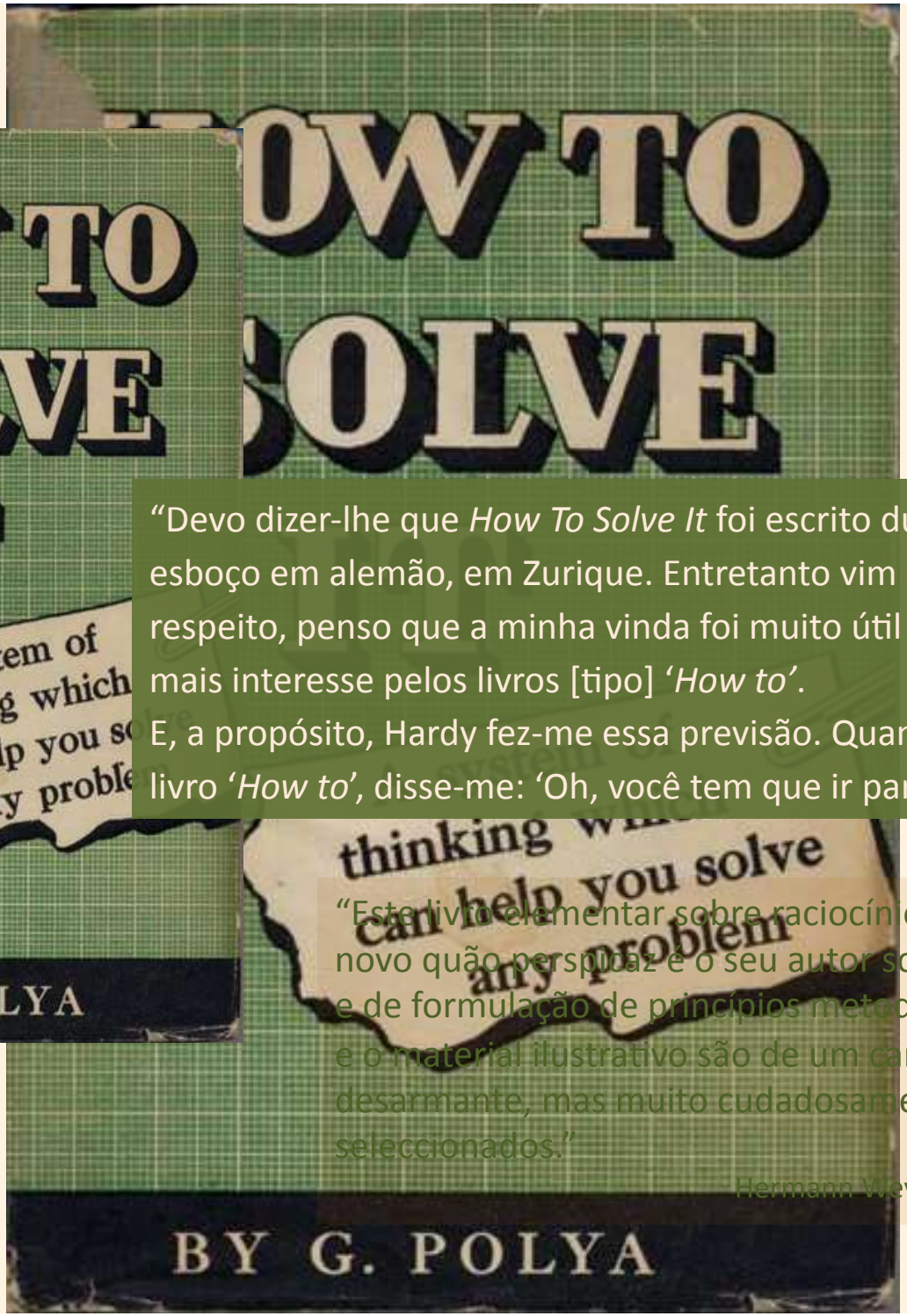
1953 Professor Emérito

1963 *Award for distin-guished service*

1977 90.º aniversário

1985 Falecimento 7 de Set.



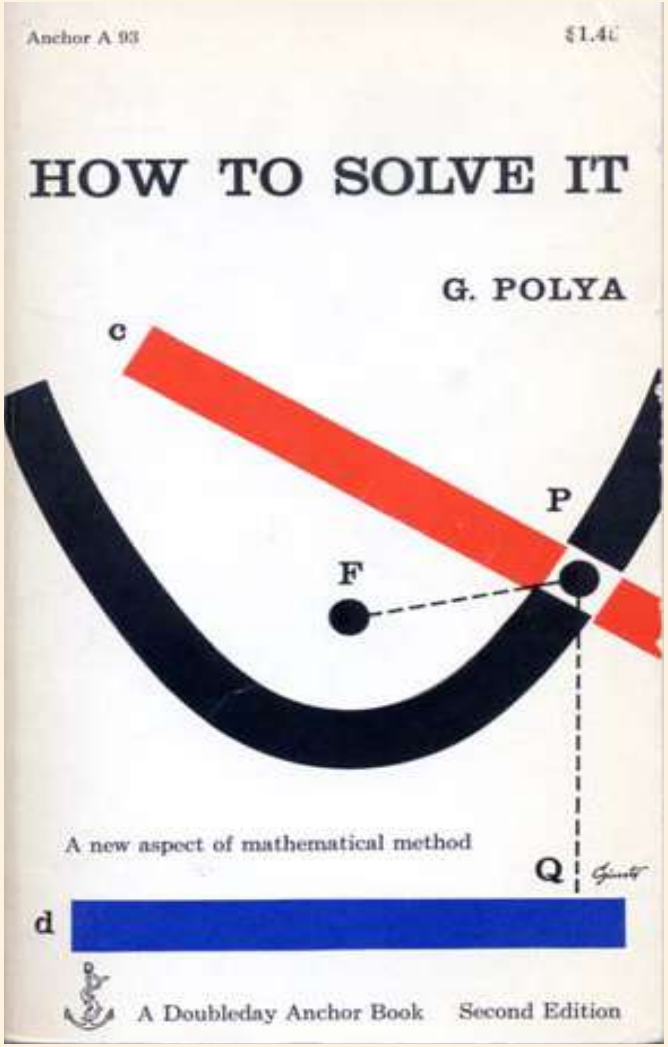


1945
1.ª edição

"Devo dizer-lhe que *How To Solve It* foi escrito duas vezes. Escrevi um esboço em alemão, em Zurique. Entretanto vim para a América e, a este respeito, penso que a minha vinda foi muito útil pois aqui, neste país, há mais interesse pelos livros [tipo] '*How to*'.
E, a propósito, Hardy fez-me essa previsão. Quando lhe falei neste [meu] livro '*How to*', disse-me: 'Oh, você tem que ir para a América'.

"Este livro elementar sobre raciocínio heurístico, mostra de novo quão perspicaz é o seu autor sobre questões de método e de formulação de princípios metodológicos. A apresentação e o material ilustrativo são de um carácter elementar desarmante, mas muito cuidadosamente pensados e seleccionados."

Hermann Weyl, *Mathematical Reviews*, 1948



2.ª edição (livro de bolso)

1957

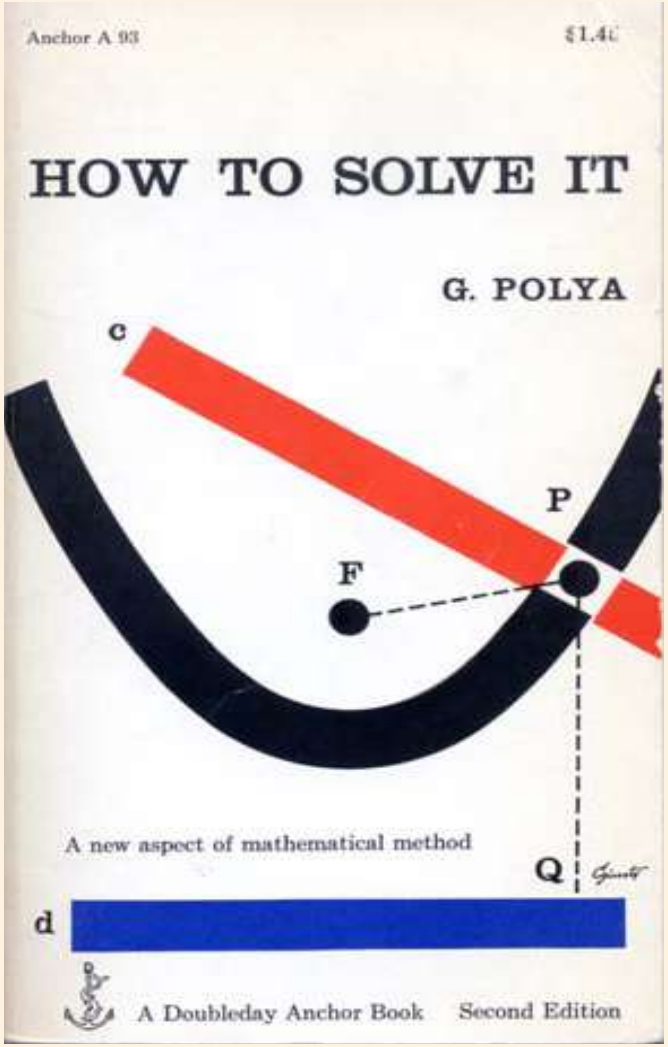
Quando esta edição estava a ser preparada para impressão, surgiu um estudo que parece ter formulado algumas observações pertinentes (...) já era bem tempo de as apresentar ao público em geral:

'a Matemática tem a dúbia honra de ser a disciplina do currículo mais impopular... Os futuros professores passam pelas escolas do ensino básico a aprender a detestar a Matemática... E regressam a estas escolas para ensinar a nova geração a detestá-la'.

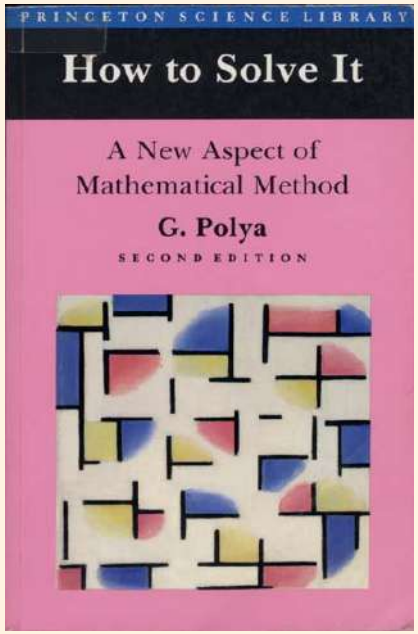
Espero que a presente edição (...) convença alguns dos seus leitores que a Matemática, para além de ser um caminho necessário para o conhecimento e profissões de engenharia, pode ser divertida e também abrir os horizontes da actividade mental do nível mais elevado.

(Do prefácio)

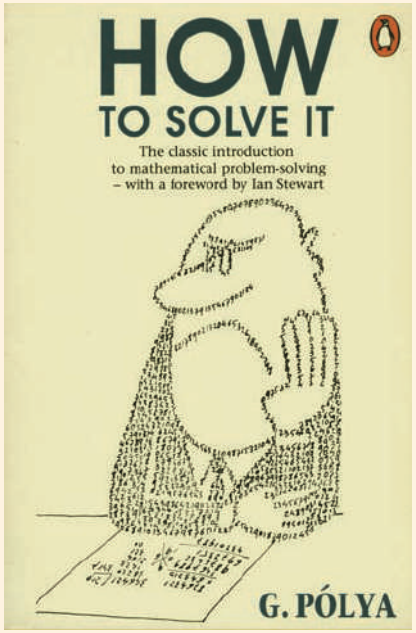
1957



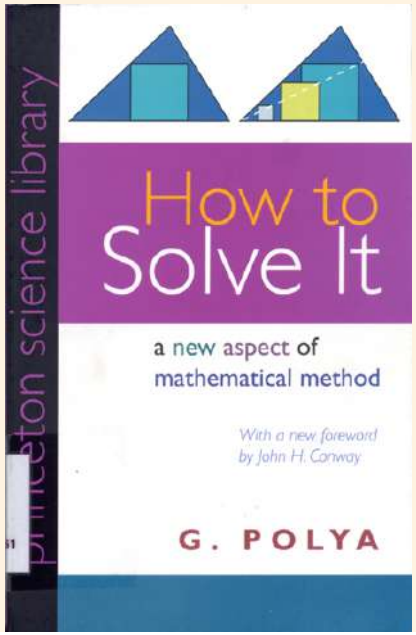
1971



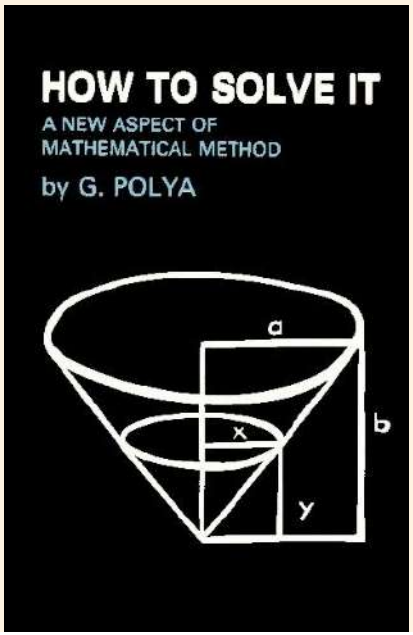
1990



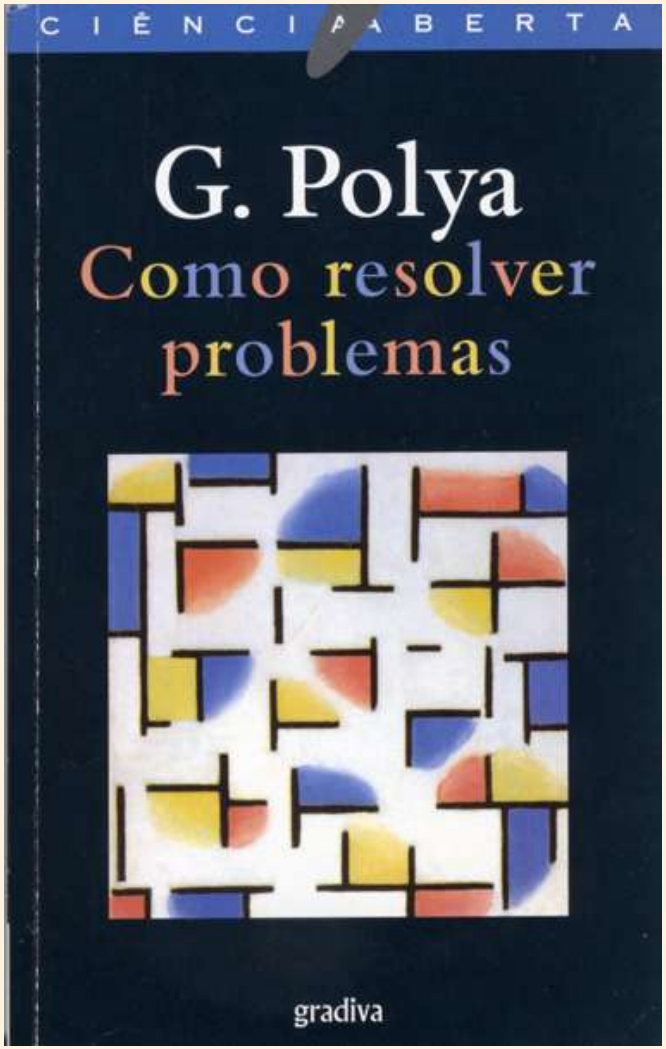
2004



2009



2003



No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos, mas permitir que os alunos não resolvam problemas de outro tipo é indesculpável.

O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam qualquer coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não.

O que é um problema

Como resolver problemas

A importância da resolução de problemas

O que é um problema?

"Um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta, ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis."

[M. Kantowsky, 1977]

"Um problema é uma tarefa para a qual o indivíduo ou o grupo que com ela se confronta quer ou precisa de encontrar uma solução [e] não há procedimento prontamente acessível que garanta ou determine, completamente, a solução."

[F. Lester, 1983]

**Tarefa a que nos interessa responder ou realizar,
e não dispomos previamente de uma
estratégia completa para o fazer**

HOW TO SOLVE IT

First.

You have to *understand* the problem.

Second.

Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a *plan* of the solution.

Third.

Carry out your plan.

Fourth.

Examine the solution obtained.

UNDERSTANDING THE PROBLEM

- *What is the unknown? What are the data? What is the condition?*
- Is it possible to satisfy the condition? Is the condition sufficient to determine the unknown? Or is it insufficient? Or redundant? Or contradictory?
- Draw a figure. Introduce suitable notation.
- Separate the various parts of the condition. Can you write them down?

DEVISING A PLAN

- Have you seen it before? Or have you seen the same problem in a slightly different form?
- *Do you know a related problem?* Do you know a theorem that could be useful?
- *Look at the unknown!* And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown.
- *Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it?* Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?
- Could you restate the problem? Could you restate it still differently? Go back to definitions.
- If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem? A more general problem? A more special problem? An analogous problem? Could you solve a part of the problem? Keep only a part of the condition, drop the other part; how far is the unknown then determined, how can it vary? Could you derive something useful from the data? Could you think of other data appropriate to determine the unknown? Could you change the unknown or the data, or both if necessary, so that the new unknown and the new data are nearer to each other?
- Did you use all the data? Did you use the whole condition? Have you taken into account all essential notions involved in the problem?

CARRYING OUT THE PLAN

- Carrying out your plan of the solution *check each step.* Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?

LOOKING BACK

- Can you *check the result?* Can you check the argument?
- Can you derive the result differently? Can you see it at a glance?
- Can you use the result, or the method, for some other problem?

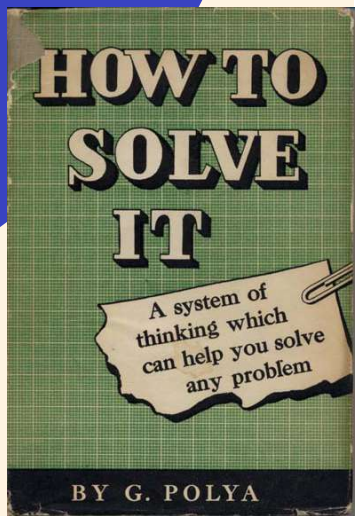
G. Pólya

Compreender o problema

Conceber um plano

Executar o plano

Análise retrospectiva



Compreender o problema

Conceber um plano

Executar o plano

Análise retrospectiva

Interpretar o enunciado (verbal, simbólico, figurativo, gráfico...)

Identificar as várias partes do problema

Qual é a questão ou o quê que é pedido?

Quais são os dados?

Qual a relação entre o que é dado e o que é pedido?

A questão pode ser formulada de outra maneira?

É possível satisfazer a relação entre o que é dado e o que é pedido?

O que é necessário? Falta algum dado? Há dados a mais?

Desenhar um esquema, uma figura

Registar os dados e o que é pedido

Usar uma notação adequada

Compreender o problema

→ Conceber um plano

Executar o plano

Análise retrospectiva

Estabelecer um encadeamento entre os dados e o que é pedido

Organização O que podemos usar dos dados? Como dispor os [dados?...

Representações Qual a notação adequada? Que esquemas ou dia-[gramas usar? Que tabelas? Que gráficos?

Cálculos Que tipo de cálculos ou construções vão ser necessários? [Em que sequência?

Argumentação Que explicação ou justificação é necessária? Que (tipo [de) demonstração?

Conhece um problema análogo ou relacionado?

Ajudaria decompor o problema?

Ou usar um problema mais simples?

É possível reformular o problema?

Foi usado tudo o que é dado?

Compreender o problema

Conceber um plano

→ Executar o plano

Estabelecer um encadeamento entre os dados e o que é pedido

Análise retrospectiva

Elaborar as representações As expressões simbólicas, os esque-[mas ou diagramas, as tabelas, os gráficos...

Realizar os cálculos Numéricos, algébricos, construções geométricas

Elaborar os argumentos Explicativos, justificativos, demonstrativos...

Verificar cada um dos passos

Consegue mostrar a correcção de cada passo?

Compreender o problema

Conceber um plano

Executar o plano

Examinar e resolução e o resultado → Análise retrospectiva

Verificar

Podemos verificar o resultado? Podemos verificar o raciocínio?

Variar

Podemos obter o resultado de um modo diferente?

O que acontece se fizermos variar os dados? E se a incógnita for outra?

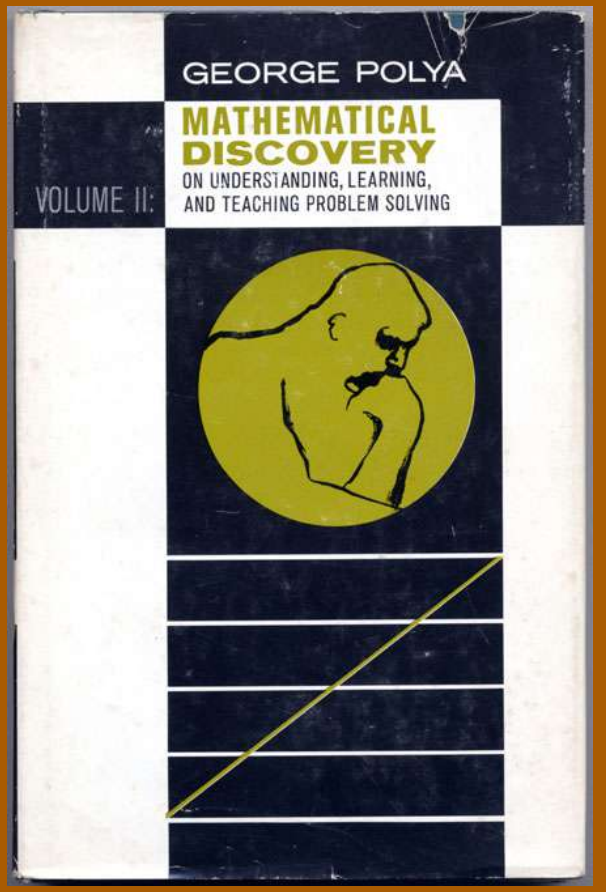
Outros problemas

Podemos usar o resultado obtido ou o processo seguido em outros [problemas?

E se ?. . .

A DESCOBERTA MATEMÁTICA

Sobre a compreensão, a aprendizagem e o ensino da resolução de problemas



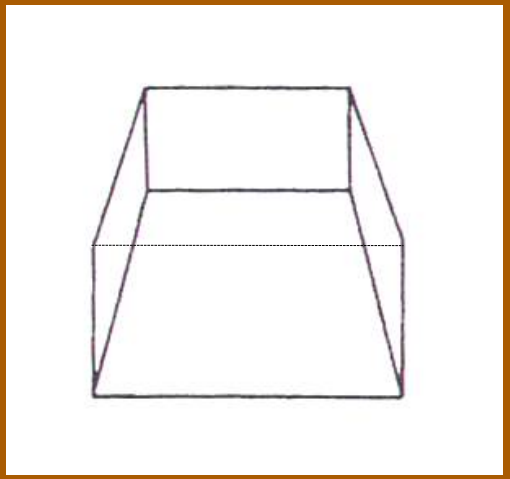
1962
1965

Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do ser humano: resolver problemas pode ser encarada como a actividade humana mais característica.

O objectivo deste trabalho é compreender esta actividade, propor meios para a ensinar e, por fim, melhorar a capacidade de resolver problemas do leitor.

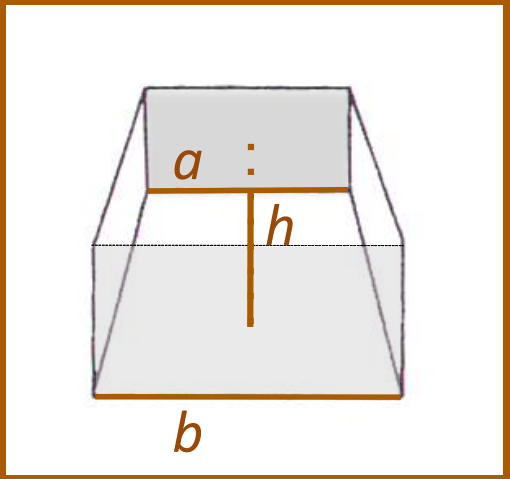
Um problema

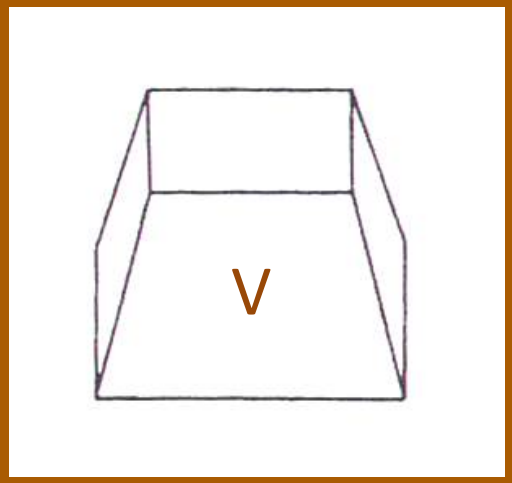
Determinar o volume V do tronco de uma pirâmide recta de base quadrangular. É dado a altura *h* do tronco da pirâmide, o comprimento *a* de um lado da sua base superior, o comprimento *b* de um lado da base inferior.



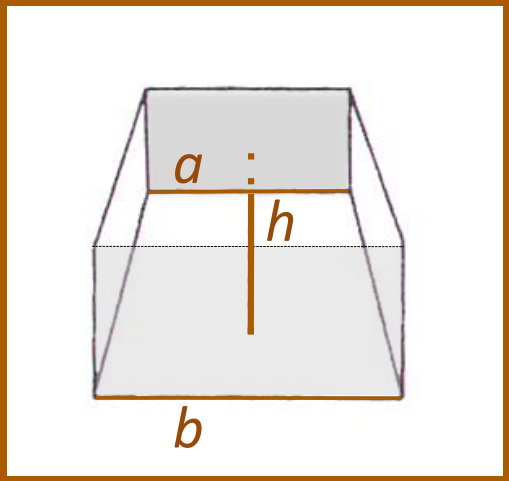
Um problema

Determinar o volume V do tronco de uma pirâmide recta de base quadrangular. É dado a altura *h* do tronco da pirâmide, o comprimento *a* de um lado da sua base superior, o comprimento *b* de um lado da base inferior.

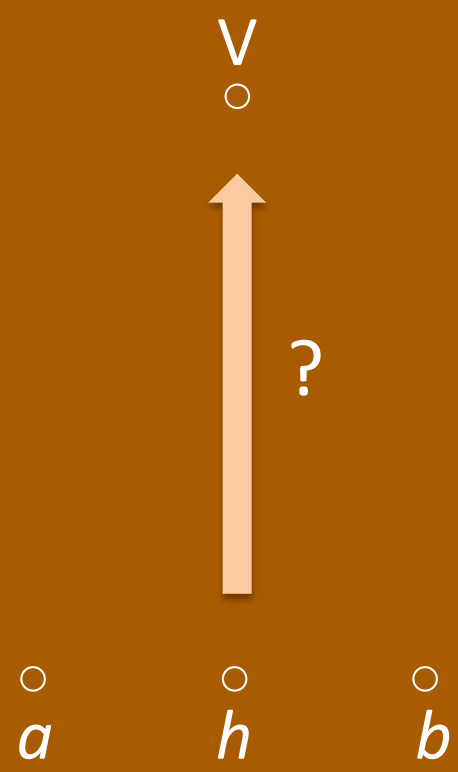




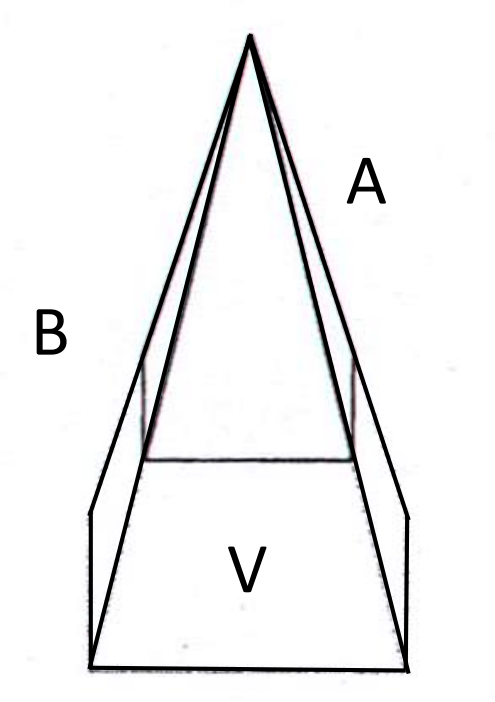
O que é pedido?



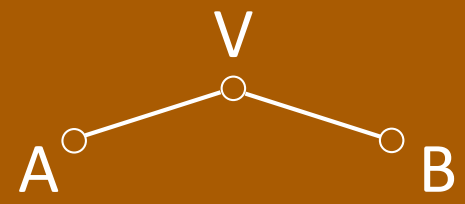
O que é dado?



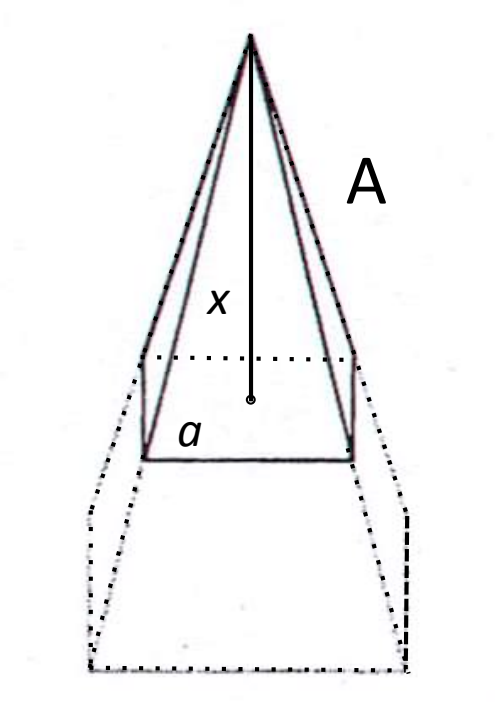
Um problema relacionado?



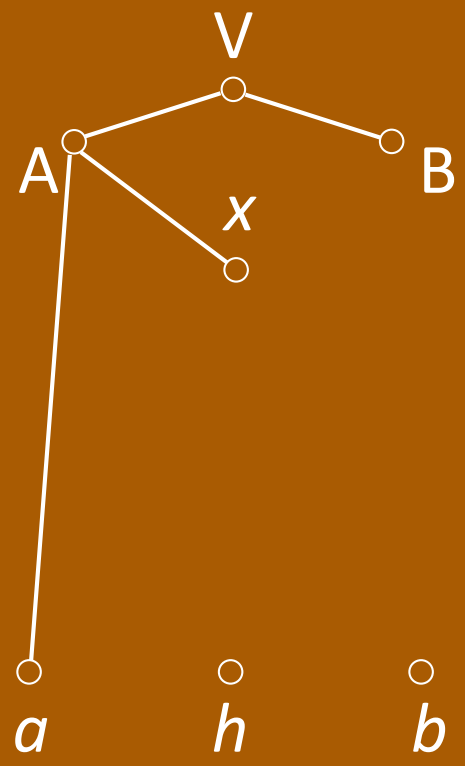
$V = B - A$



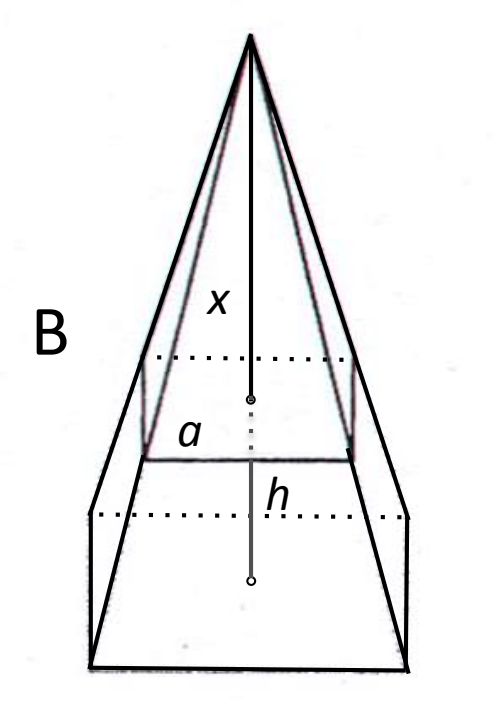
Como obter A?



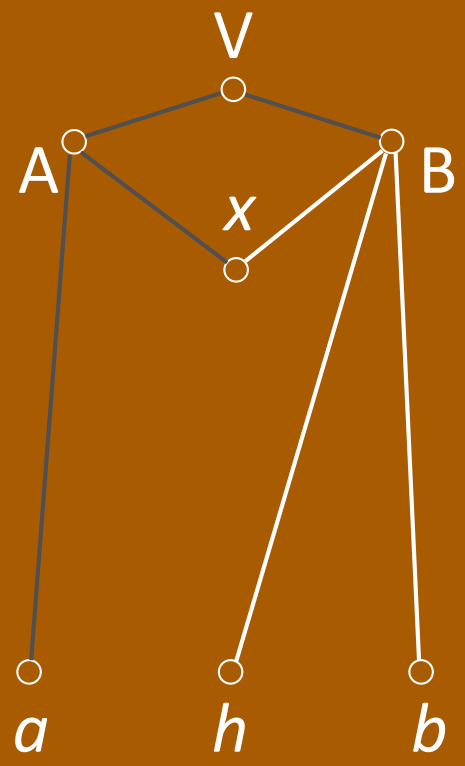
$$A = a^2\, x / 3$$



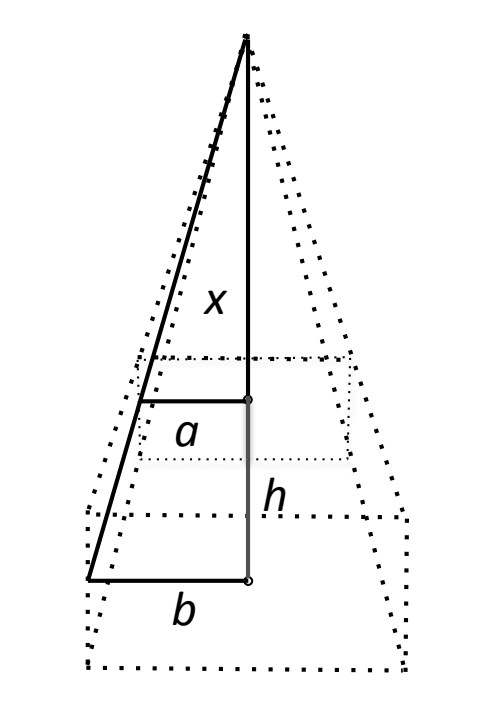
Como obter B?



$$B = b^2 (x+h) / 3$$

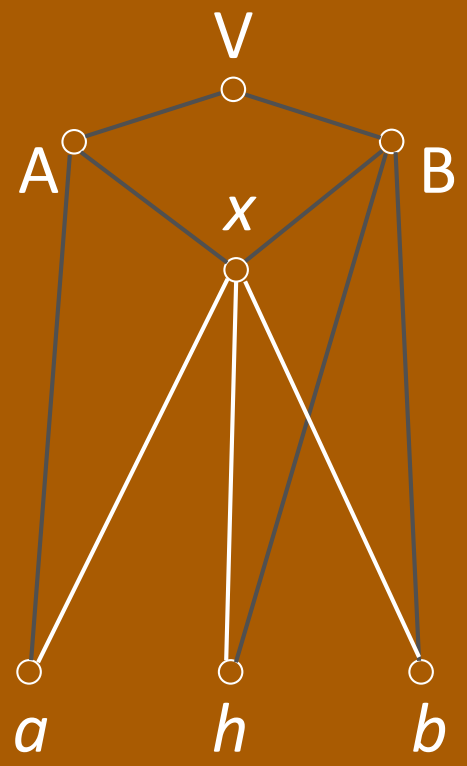


Como obter *x* ?



$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

$$x = \frac{a\,h}{b - a}$$



$A = a^2 x / 3$

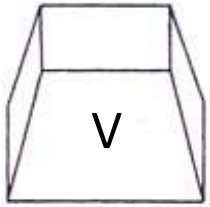
$$x = \frac{ah}{b - a}$$

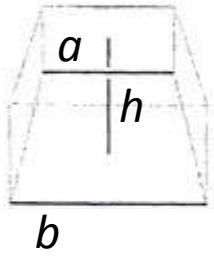
$B = b^2 (x+h) / 3$

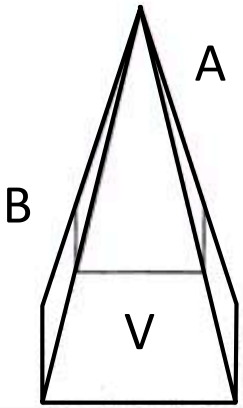
$$A = \frac{a^3 h}{3 (b - a)}$$

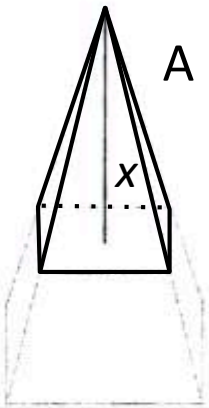
$$B = \frac{b^3 h}{3 (b - a)}$$

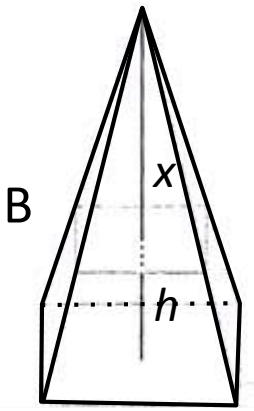
$$V = B - A = \frac{b^3 - a^3}{b - a} \frac{h}{3}$$

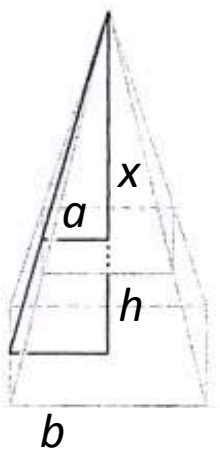






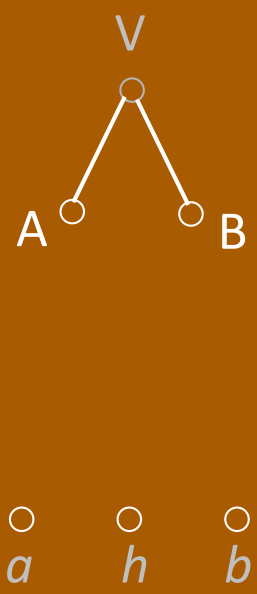






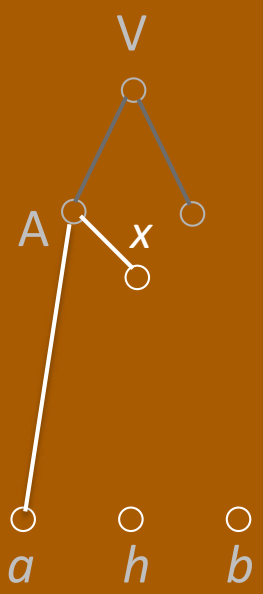
O que é pedido?

O que é dado?



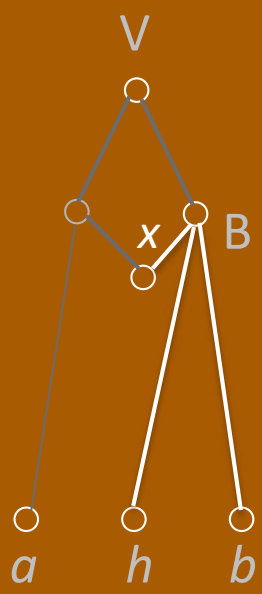
$V = B - A$

Um problema relacionado?



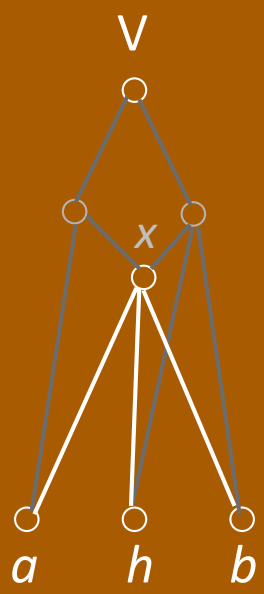
$A = a^2 x / 3$

Como obter A?



$B = b^2 (x+h) / 3$

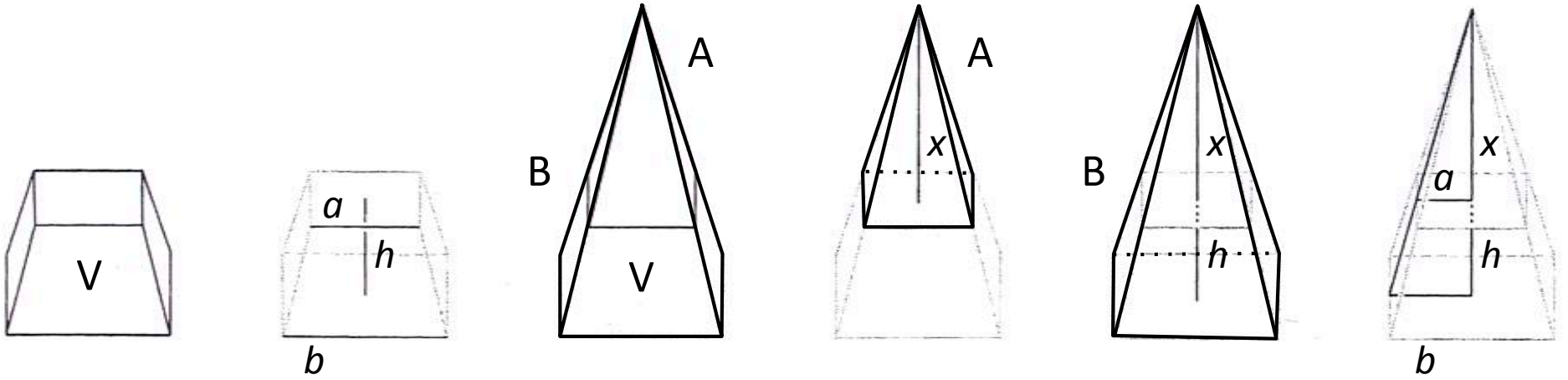
Como obter B?



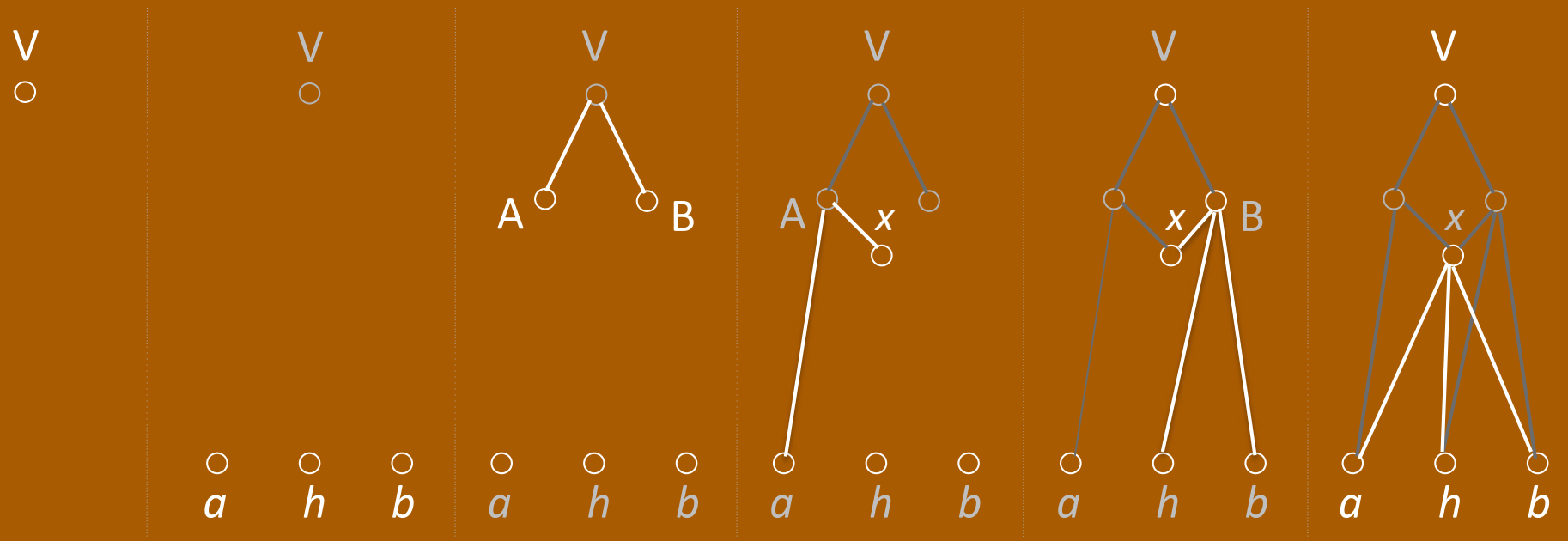
$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$

Como obter x?

Nível imagético



Nível relacional

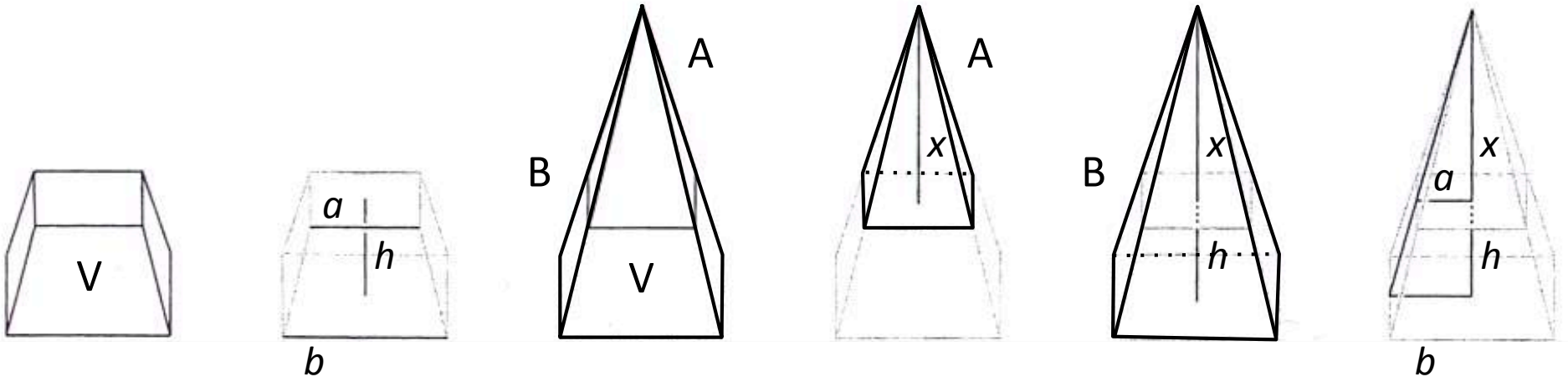


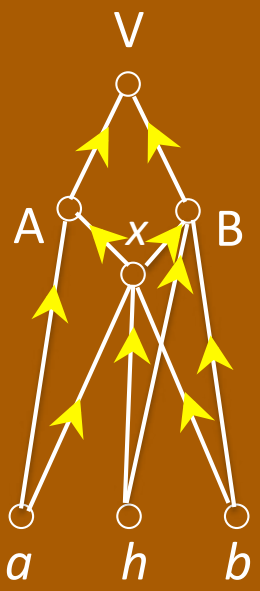
Nível matemático

$V = B - A$ $\quad A = a^2\, x / 3$ $\quad B = b^2\,(x+h) / 3$ $\quad \dfrac{x}{x+h} = \dfrac{a}{b}$

Nível heurístico

O que é pedido? | O que é dado? | Um problema relacionado? | Como obter A? | Como obter B? | Como obter *x*?





Dos dados ao pedido

A PONTE construída

trabalho completado