

# Promover o raciocínio matemático na sala de aula



**Joana Mata-Pereira**

**U LISBOA**

UNIVERSIDADE  
DE LISBOA

**ie**

Instituto de Educação

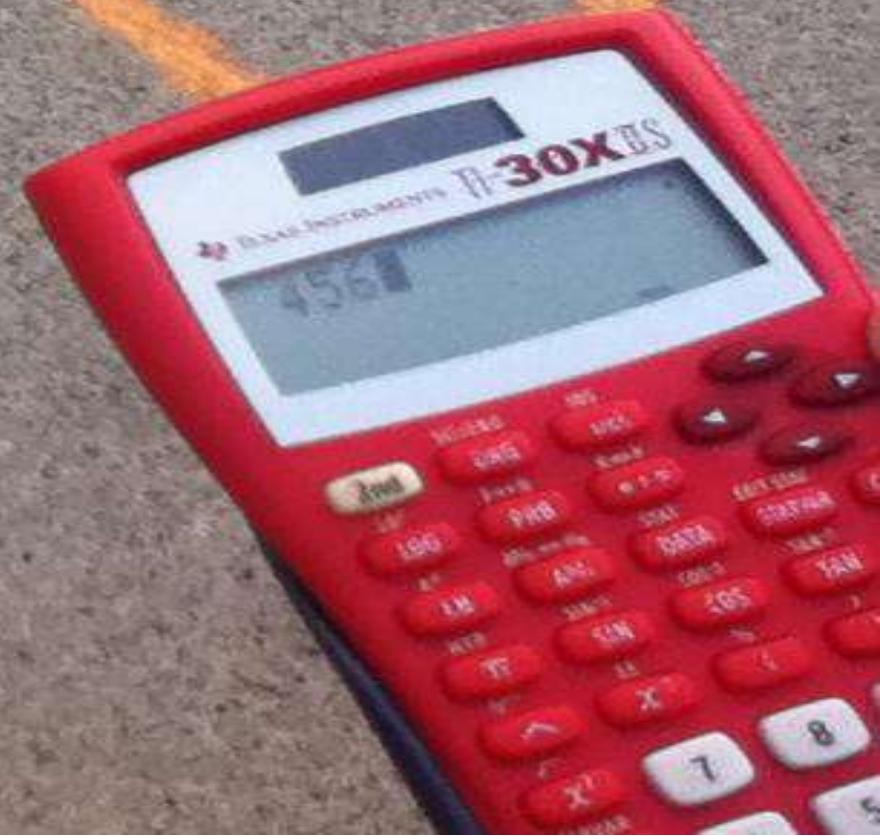


**O que  
desenvolve o  
raciocínio**

1

2

3



$$\log_2 y + \log_2 y = 2 \log_2 2 + \dots$$

$$\log_2 y^2 = \dots$$

8 Solve the equation  $2 + \log_3 (x - 1) = \log_3 x$ .

$$2 + \log_3 (x - 1) = \log_3 x$$

$$\log_3 3^2 + \log_3 (x - 1) = \log_3 x$$

$$\log_3 9(x - 1) = x$$

$$A(x) \cdot x'(t) + d f(t) \quad (1.1)$$

$$x_i(t) = 0 \quad (i=1, \dots, n_0), \quad x_i(t) = 0 \quad (i=n_0+1, \dots, n) \quad (1.2)$$

$$f_i \in BV([a, b], \mathbb{R}), \quad A = (a_{ie})_{i,e=1}^n, \quad a_{ie} \in BV([a, b], \mathbb{R})$$

$$[a, b], [c, d] \subset [a, b], \quad a_{ii} \in BV_{loc}([a, b], \mathbb{R}) \quad (i=n_0+1, \dots, n)$$

$$x' + q_1(t) x \quad (1)$$

$$x' + q_2(t) x \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = p_k(t)x + q(t) \quad (2u)$$

$$l_k(x) = 0$$

$$p_k \Rightarrow p$$

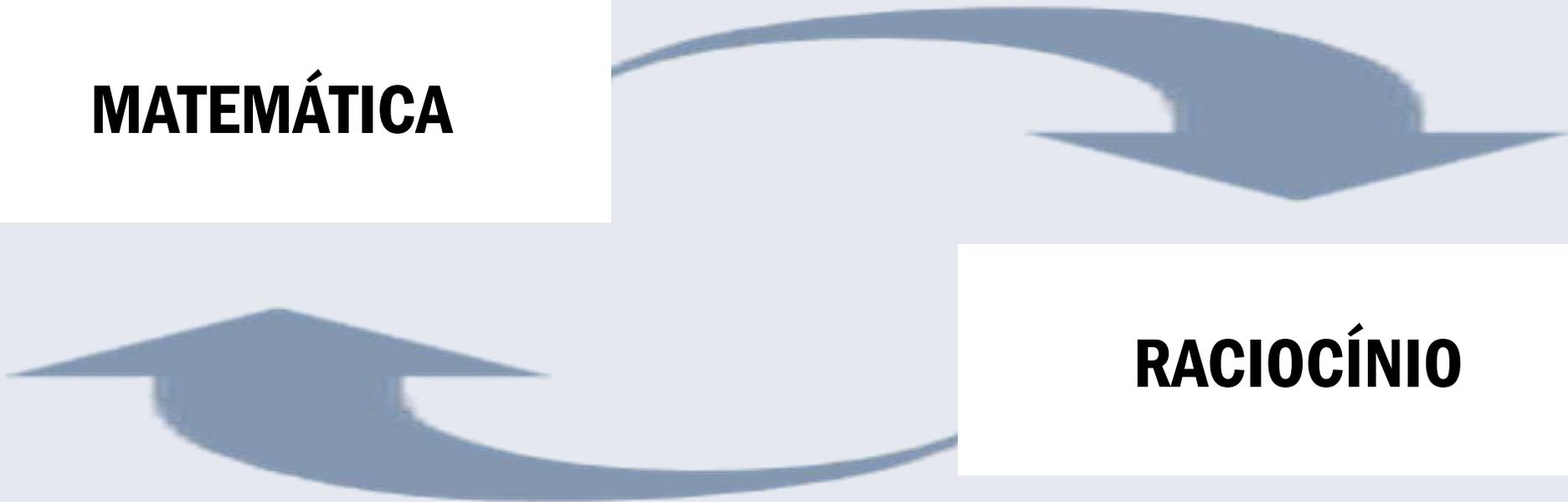
$$q \Rightarrow q$$

$$l_k \Rightarrow l$$

$$(x \rightarrow \infty)$$

**MATEMÁTICA**

**RACIOCÍNIO**



# RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Raciocinar matematicamente consiste em  
fazer inferências justificadas

**Indutivas**

**Abdutivas**

**Dedutivas**

Formular  
questões

**Generalizar**

Classificar

**Justificar**

Conjeturar

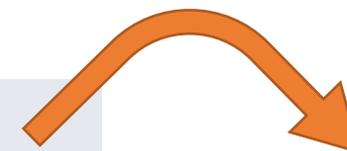
Exemplificar

Demonstrar

Raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas



**RACIOCÍNIO  
MATEMÁTICO**



**Sala de aula**

**Tarefas**



**Ações do professor**



## Tarefas



- Problemas
- Tarefas de exploração e investigação
- Níveis de desafio diferentes

## Ações do professor



- Questionamento



## Tarefas



- Problemas
- Tarefas de exploração e investigação

- Promissoras para promover o raciocínio matemático dos alunos  
(e.g., Azevedo, 2009; Francisco & Maher, 2011; Henriques, 2010; Ponte & Quaresma, 2016)
- Promovem a formulação, teste e justificação de generalizações  
(Azevedo, 2009)
- Contribuem para que os alunos compreendam a necessidade de justificar conjeturas  
(Henriques, 2010)

## Tarefas



- Problemas
- Tarefas de exploração e investigação
- Níveis de desafio diferentes

- Nem todas as tarefas devem ser de nível elevado  
(e.g., Brodie, 2010)
  - Tarefas desafiantes pois o desafio incita o raciocínio matemático
  - Tarefas com um nível de desafio baixo, tanto para consolidação, como para um envolvimento fácil na atividade de sala de aula  
(Brodie, 2010)

## Tarefa - Sequências

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

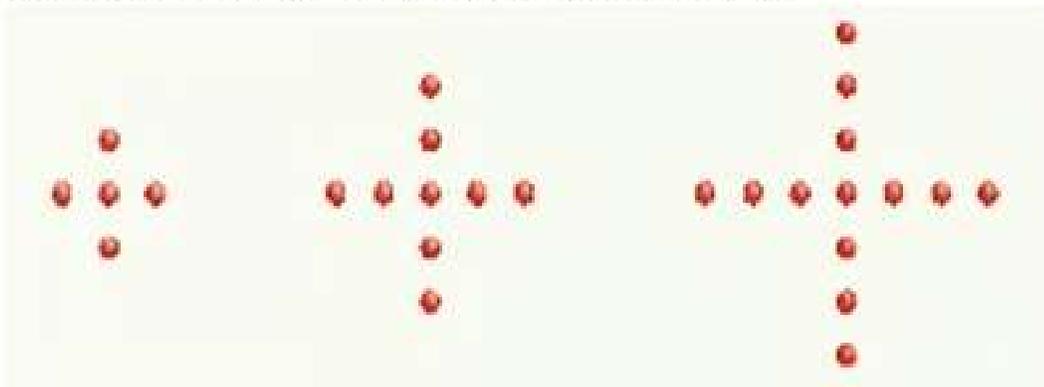


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura  $n$ .

- Problemas
- Tarefas de exploração e investigação
- Níveis de desafio diferentes

## Ações do professor



### Aspetos da prática do professor que promovem discussões produtivas:

- Apoio no pensamento dos alunos para avançar ideias matemáticas importantes

(Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008)

- Filtrar as ideias dos alunos e focar a sua atenção nas ideias fundamentais e nos processos matemáticos

(Sherin, 2002)

- Desafiar matematicamente os alunos

(Potari & Jaworski, 2002)

- Explorar desacordos

(Wood, 1999)

## Ações do professor



## Aspectos da prática do professor que promovem discussões produtivas:

- Apoio no pensamento dos alunos para avançar ideias matemáticas importantes  
(Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008)
- Filtrar as ideias dos alunos e focar a sua atenção nas ideias fundamentais e nos processos matemáticos  
(Sherin, 2002)
- Desafiar matematicamente os alunos  
(Potari & Jaworski, 2002)
- Explorar desacordos  
(Wood, 1999)

## Ações do professor



### Modelo de ações do professor:

- antecipar respostas dos alunos
- monitorizar as respostas
- selecionar alunos para apresentarem as suas respostas
- sequenciar as respostas
- estabelecer conexões entre respostas de alunos e ideias matemáticas centrais.

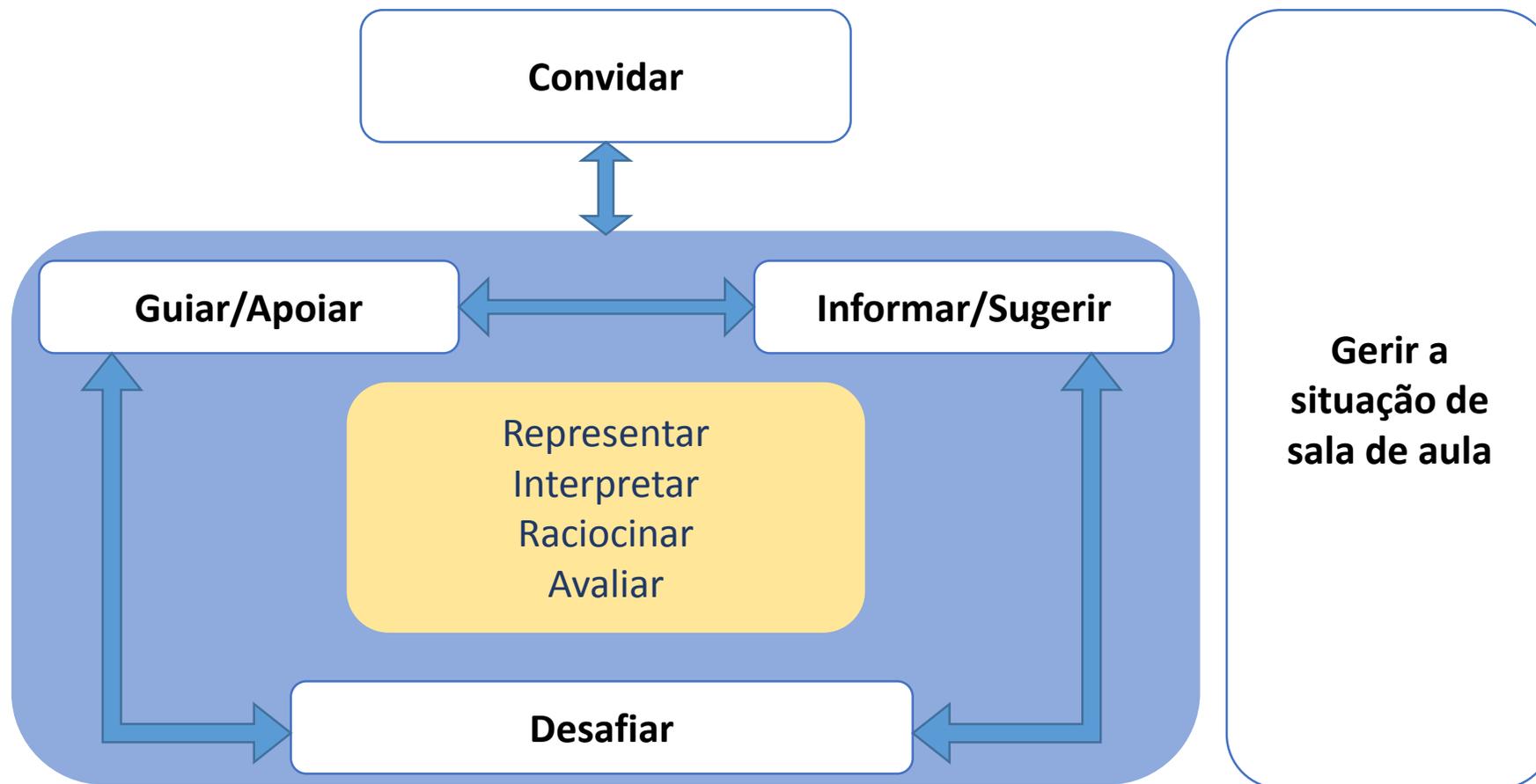
(Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008)

### Ações do professor na condução de discussões matemáticas:

- *Eliciting actions* – levar os alunos a apresentar os seus métodos
- *Supporting actions* – apoiar a compreensão concetual dos alunos
- *Extending actions* – ir além do pensamento inicial dos alunos

(Cengiz, Kline, & Grant, 2011)

# Ações do professor



(Adaptado de Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013)

# Tarefa - Sequências

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

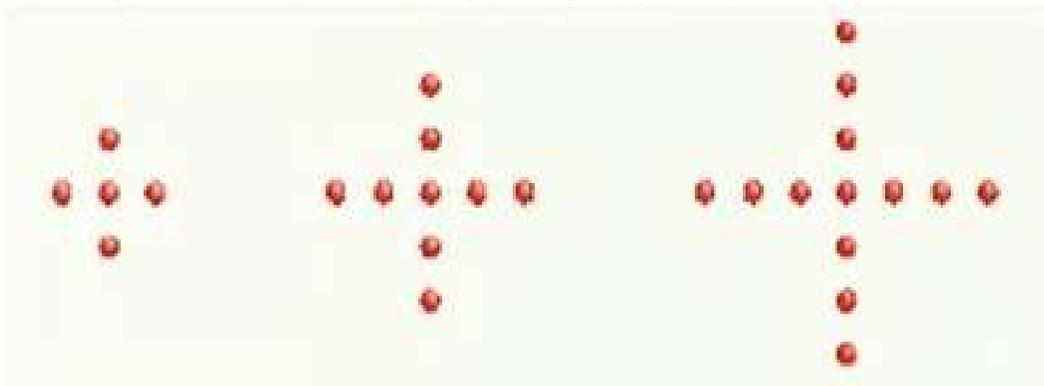


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura  $n$ .

## Participantes

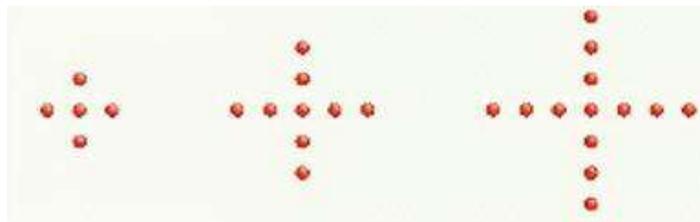
*Turma 8.º ano*

- Ambiente de trabalho produtivo, mas com disparidade significativa entre grupos de alunos

## Situação

- Discussão coletiva sobre uma tarefa de introdução ao tópico das sequências

### 1.3 Existirá alguma figura com 86 pontos?



*Professora:* Lê. Explica-me. O que é que tu conseguiste fazer com a Marisa? **Convidar**

...

*Duarte:* Nós fizemos 86 que é o número de pontos.

*Professora:* Sim...

*Duarte:* A dividir por quatro, menos um.

*Professora:* Assim? Só fala o Duarte. **Guiar**

*Duarte:* Foi, 86 menos um a dividir por quatro.

*Professora:* Assim Duarte? Está bom para ti? Não sei se é isto, estou a perguntar, é isto? É isto? **Desafiar**

*Duarte:* Primeira.

*Professora:* [Um aluno intervém.] Espera, espera, deixa-o concluir. Explica.

*Diogo:* Vai dar a mesma coisa.

...

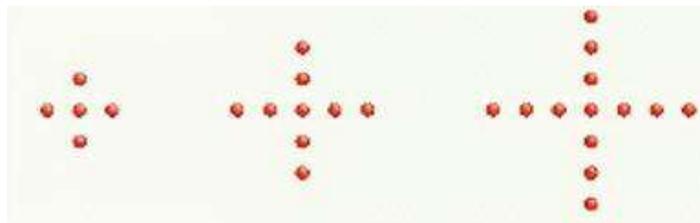
*Professora:* Só para perceber, Diogo. Não tem mal dizer que é a mesma coisa, só quero perceber. Para ti isto é a mesma coisa? **Apoiar**

*Diogo:* Sim, porque se nós pusermos um sobre... Não, não, não é nada a mesma coisa . . . Só se fosse menos quatro.

$$\frac{86 - 1}{4}$$
$$\frac{86}{4} - 1$$



### 1.3 Existirá alguma figura com 86 pontos?



*Professora:* Duarte, perdi-me, explica-me.

*Duarte:* É isso.

Desafiar

*Professora:* Mas é isto, o que é isto?

*Duarte:* Então, é o número de pontos que é 86 . . . Depois subtraímos um que é o ponto do meio . . . E depois a dividir por quatro que é o que vai sempre aumentando.

Guiar

*Professora:* Este quatro é sempre o que vão aumentando?

*Duarte:* Não, é o número de lados.

*Professora:* Ah, o número de lados. Quanto é que deu Duarte?

Guiar

*Duarte:* 21,25.

*Professora:* E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?

*Duarte:* Que não existe nenhuma.

*Professora:* Porquê?

Desafiar

Justifica

*Duarte:* Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.

*Professora:* Número inteiro. Este número não é inteiro.

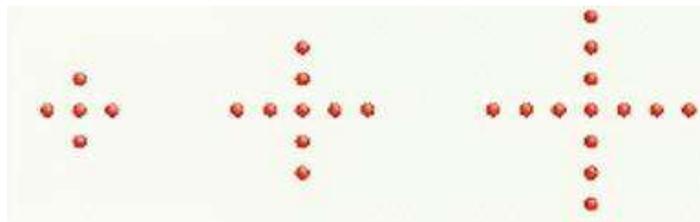
Informar

$$\frac{86 - 1}{4}$$

$$\frac{86-1}{4}=21,25$$



### 1.3 Existirá alguma figura com 86 pontos?



#### APÓS A DISCUSSÃO DA QUESTÃO 1.4

*Joaquim:* Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.

*Professora:* Então diz.

*Joaquim:* Nós fizemos... Nós justificámos que não era múltiplo de 4.

*Professora:* Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Desafiar

*Bianca:* Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas... Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos um, que é o ponto central.

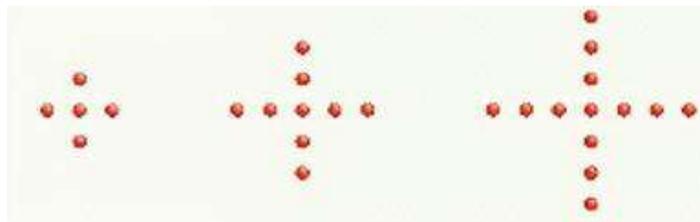
*Professora:* Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu

Desafiar

Justificar



### 1.3 Existirá alguma figura com 86 pontos?



*Bianca:* O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.

Desafiar

*Professora:* Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?

Justificar

*Bianca:* Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.

*Professora:* Sim ou não, Guilherme?

*Guilherme:* Acho que sim, porque o do meio nunca... Era como se estivéssemos a cortar o do meio.

*Professora:* Aqui era como se estivessem a cortar o do meio . . . A soma destes quatro braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos quatro braços com o ponto central.

Informar



# Equações do 1.º grau

## Participantes

*Turma 7.º ano*

- Ambiente de trabalho produtivo,

## Situação

- Momento de síntese sobre um princípio de equivalência
- Discussão sobre o número de soluções de uma equação linear, com um foco específico nas equações sem solução

## Síntese do princípio de equivalência da multiplicação

**Professora:** Vá, registrar aí o princípio de equivalência da multiplicação, que diz que, se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros da equação por um mesmo número, a... Qualquer número? Ou tenho que fazer aqui alguma salvaguarda? Se multiplicarmos ou dividirmos os membros da equação pelo mesmo número, a minha questão é, por qualquer número? Ou haverá algum número que eu tenha que excluir?

Desafiar

**Clara:** Zero.

Desafiar

**Professora:** Porquê?

Justificar

**Gabriel:** Porque é neutro, é neutro! É o elemento neutro.

Guiar

**Professora:** Calma, é o elemento neutro de que operação?

**Vários alunos:** Da adição.

...

**Clara:** Stôra, não sei porquê mas, depois da stôra ter escrito isso [princípio de equivalência da multiplicação] acho que... Fiquei com a sensação de que nem todas as equações têm solução.

Generalização inesperada



$$0x = 18$$

## Generalizações sobre o número de soluções de uma equação

**Leonardo:** Mas isto vai continuar a dar infinitas soluções.

Generalização

**Professora:** Será? **Desafiar**

**Leonardo:** Ai, não é, não é, não vai dar para todos os números.

**Professora:** Não vai dar para todos os números? **Desafiar**

...

**Leonardo:** Não, porque nenhum número vezes zero dá 18! . . . Então, isto não é uma igualdade numérica falsa? É, não é? Isto é uma igualdade numérica falsa, porque qualquer número vezes zero vai dar zero.

**Professora:** E portanto... **Guiar**

**Gustavo:** Esta não tem solução stôra. . . É impossível.

...

**Leonardo:** Então quer dizer que há equações sem solução.

Generalização

**Clara:** Stôra, lembra-se daquela aula em que eu tinha... Aquilo que nós tínhamos do princípio de equivalência da multiplicação, que eu disse que... Porque eu ouvi falar do zero e era...

Informar

**Professora:** Exatamente, foi por causa do zero. Por isso é que perguntei porque é que a tinha levado a pensar. Foi quando eu falei no zero que a Clara fez essa observação. . .



# Promover o raciocínio matemático na sala de aula

## A CONCLUIR...



### Propor tarefas que incluam

- 1) uma diversidade de questões com diferentes graus de desafio, com ênfase em problemas e questões exploratórias, mas também exercícios;
- 2) questões que incentivem a formulação de generalizações;
- 3) questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução;
- 4) questões que permitam uma variedade de processos de resolução.

# Promover o raciocínio matemático na sala de aula

## A CONCLUIR...



Ações na sala de aula que incluam:

- a) Apoiar ou desafiar os alunos a justificar ou apresentar justificações alternativas;
- b) Apoiar ou informar os alunos para identificar justificações válidas ou inválidas, enfatizando o que as valida;
- c) Desafiar ou apoiar os alunos na partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique;
- d) Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização;
- e) Desafiar os alunos a ir além do pedido na tarefa.

# Promover o raciocínio matemático na sala de aula

## A CONCLUIR...

O desenvolvimento do raciocínio matemático é um processo que decorre ao longo do tempo. Esta capacidade deve incluir a paciência intelectual necessária para uma compreensão parcial e a confiança que, com ações futuras, o conhecimento irá avançar.

# Promover o raciocínio matemático na sala de aula



**Joana Mata-Pereira**

**[jmatapereira@ie.ulisboa.pt](mailto:jmatapereira@ie.ulisboa.pt)**

**U LISBOA**

UNIVERSIDADE  
DE LISBOA

**ie** Instituto de Educação

## Imagens com licença

“People, human, person and school” by @neonbrand on Unsplash

["Audience"](#) by [thinkmedialabs](#) is licensed under [CC BY-NC 2.0](#)

["01 calculator"](#) by [Tracey Mahler](#) is licensed under [CC BY 2.0](#)

["DSC03635"](#) by [nicholaschan](#) is licensed under [CC BY-NC-ND 2.0](#)

["DSC\\_4823p"](#) by [Milan Tvrđý](#) is licensed under [CC PDM 1.0](#)