

Dias T³

2011/2012



ZONA NORTE

22 | OUT | 2011



T³ PORTUGAL

Estatística e Folha de Cálculo

MATERIAIS DE APOIO ÀS SESSÕES PRÁTICAS



APM

Associação de Professores
de Matemática

I- EMISSIONES DE CO₂ E O FUTURO DO MUNDO

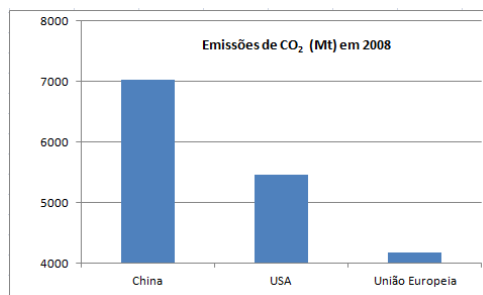
Começa por abrir o ficheiro TOP 20 CO₂_PIB.

Para além de uma página introdutória, encontrarás na página 2.1 os valores de emissão de dióxido de carbono (CO₂), em megatoneladas (Mt), nos anos de 2006 e de 2008, dos 20 países "mais poluidores"*. Na página 3.1 está registado o Produto Interno Bruto (PIB) desses mesmos países, no ano 2006, em milhares de milhões de dólares (10⁹ \$USD) e os valores de emissão de CO₂ nesse mesmo ano, em megatoneladas, com arredondamento às unidades **.

1. A partir dos dados da primeira tabela, constrói um gráfico, com os valores resumidos por país (2006 e 2008), de forma a perceberes a ordem de grandeza das emissões realizadas por cada um desses países.

2. Observa o seguinte gráfico onde se pretende comparar as emissões de CO₂, em 2008, dos três "gigantes".

Que comentário te sugere o gráfico representado? No caso de o achares pouco rigoroso, apresenta um gráfico que transmita a informação de uma forma que te pareça mais correta.



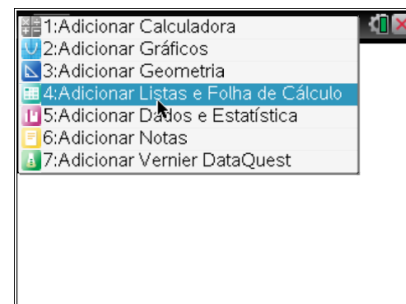
3. Identifica os cinco países com maiores emissões de CO₂ em 2008. Obtém um gráfico circular em que surjam os valores de emissão, em percentagem, efetuados pelo conjunto desses cinco países, comparados com os restantes quinze países identificados na tabela e ainda o resto do mundo.

Nota: foram emitidas, no mundo, em 2008, 29 888 Mt de CO₂.

4. Com base nos dados de 2006 e de 2008, achas que houve um esforço global para controlar as emissões de CO₂, ou apenas alguns países demonstraram essa preocupação? Calcula a variação percentual nas emissões efetuadas por cada um dos países e apresenta a informação resumida na forma gráfica e ordenada.

Como adicionar a aplicação Dados e Estatística?

Começa por te localizares na página 2.1 e abre uma página, 2.2, de *Dados e Estatística*.



Como criar gráficos - I ?

Aparece uma nova página no problema ativo (página 2.2), com uma representação gráfica predefinida do conjunto de dados.

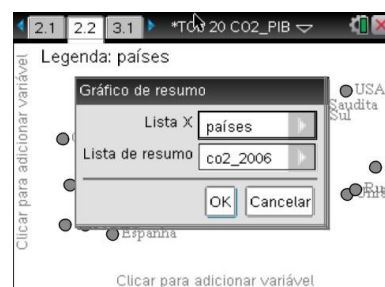


Como selecionar na janela gráfica as variáveis pretendidas?

Na janela gráfica com o cursor no centro da imagem deves clicar em **ctrl** + **menu** e seleccionar a opção **3:Adicionar variável X com lista resumo**.



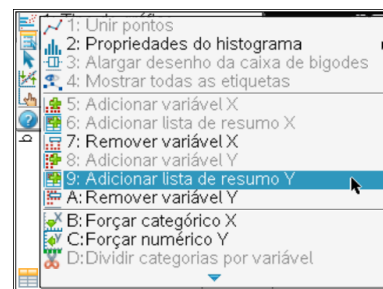
Em seguida podes seleccionar a variável que te interessa representar graficamente clicando sobre as zonas de legenda.



Caso pretendas acrescentar uma nova variável, deves clicar em **menu** e seleccionar **2:Propriedades do gráfico**, **9:Adicionar lista de resumo Y** e escolher a nova variável (neste caso as emissões de CO₂ em 2008).

Repara que, automaticamente, surgem dois conjuntos de barras com cores identificativas de cada uma das variáveis.

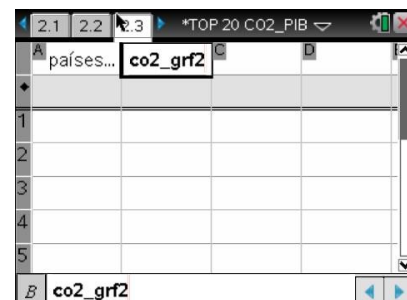
Deslocando o cursor por cima de cada uma das barras surge-te uma caixa com os dados específicos.



Como criar listas ?

Após teres adicionado ao problema uma nova página, 2.3 , com a aplicação **Listas e Folha de Cálculo**, introduz duas listas identificando os “países” representados no gráfico da página inicial e as respetivas emissões.

1. Na primeira linha escreve o nome dos campos: **países_grf2** e **co2_2008_grf2**.



Nota: precisas de definir novas variáveis com os dados resumidos, para as poderes utilizar aquando da construção do gráfico.

2. Para evitar teres que introduzir os dados, poderás copiá-los da página inicial.

países	co2_2006	co2_2008
1	6103.493	7031.916
2	5752.289	5461.014
3	3908.662	4177.817
4	1510.351	1742.698
5	1564.669	1708.653

- 2.1. na página 2.1 com recurso à tecla (⇧shift) e ao touchpad seleciona os dados que deverão ficar em destaque (uma coluna de cada vez).

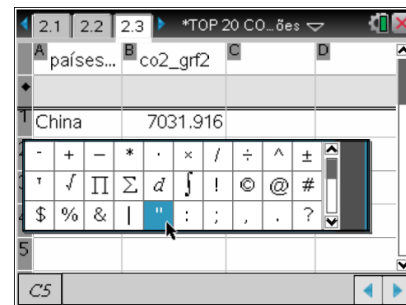
- 2.2. podes copiar os dados de uma forma semelhante à utilizada noutras folhas de cálculo através da combinação de teclas (ctrl) (C).

- 2.3. Na página 2.3 podes colar os dados, mais uma vez através da combinação de teclas (ctrl) (V).

países...	co2_grf2		
1	7031.916		
2	5461.014		
3	4177.817		
4			
5			

No caso de pretendes preencher à mão cada uma das células, podes encontrar os símbolos utilizados, clicando nas teclas (ctrl) (⌘), surgindo um catálogo de símbolos.

Para introduzires caracteres acentuados deves, após a digitação do carácter, pressionar sucessivamente a tecla (⌘).



Como criar gráficos – II ?

Cria um novo gráfico (página 2.4) com uma leitura mais fidedigna dos dados apresentados.. Segue as instruções anteriores.

Atenção com a correta identificação das variáveis.

Nota: Clicando sobre as setas associadas às caixas de edição aparece o conjunto de variáveis definidas.



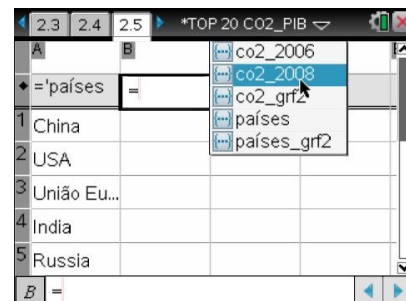
Cópia de conjuntos de dados para uma nova folha de cálculo

Cria uma nova folha de cálculo (página 2.5) e copia, dos dados iniciais, o conjunto de dados com a identificação dos países e das respetivas emissões de CO₂ em 2008.

Copiar os dados para novas colunas/listas

Faz um clique duplo na célula a cinzento (linha de fórmulas para listas) de cada uma das colunas onde pretendes introduzir os dados e, pressionando a tecla (⌘), seleciona as variáveis **países** e **co2_2008** para cada uma das colunas, respetivamente.

Ao clicares em (⌘) são inseridos todos os dados destas duas variáveis. De seguida, seleciona as duas células a cinzento e apaga-as pressionando a tecla (⌘); desta forma foi removida a dependência destes dados das variáveis a eles associadas.



Como escrever uma fórmula?

Para não interferir com os dados já introduzidos, calcula a partir da coluna **D**, o valor total das emissões de cada um dos conjuntos de países: os primeiros cinco países (Top_5), Restantes 15 países do Top (Rest_15) e o resto do Mundo (Rest_Mundo). Não te esqueças de introduzir estes nomes entre aspas.

	top_pa...	top_2008
1	7031.92	Top_5
2	5461.01	Rest_15
3	4177.82	Rest_Mu...
4	1742.7	
5	1708.65	
E1	=sum(b1:b5)	

*Nota: mais uma vez, para a construção do gráfico temos que criar novas variáveis – **top_países** e **top_2008**.*

Observa que para efetuar alguns tipos de cálculo podes utilizar funções pré-definidas (por exemplo *sum()*, *cumsum()*, *mean()*, ...) tal como acontece noutras folhas de cálculo.

	top_pa...	top_2008
1	7031.92	Top_5
2	5461.01	Rest_15
3	4177.82	Rest_Mu...
4	1742.7	
5	1708.65	
E3	=29888-sum(e1:e2)	

	top_pa...	top_2008
1	7031.92	Top_5
2	5461.01	Rest_15
3	4177.82	Rest_Mu...
4	1742.7	
5	1708.65	
E3	=29888-sum(e1:e2)	

Compreender as referências a células nas fórmulas

Numa fórmula podes incluir:

- a letra de uma coluna e o número de uma linha para uma referência relativa;
- o símbolo \$ antes da letra da coluna e/ou do número da linha para especificar uma referência absoluta;
- dois pontos (:) entre duas referências de células para especificar um intervalo de células;
- uma referência a uma variável definida anteriormente.

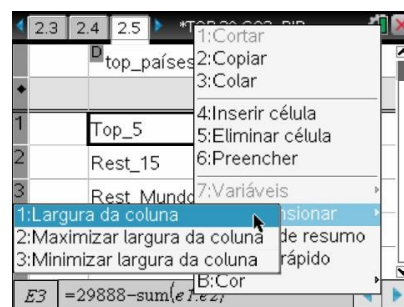
Como trabalhar com linhas e colunas de dados?

Selecionar uma coluna ou linha

1. Prime sem soltar **▲** para mover para além da célula superior da coluna; de modo análogo para selecionar a linha.
2. Para alargar uma seleção às colunas ou linhas adjacentes, prime sem soltar **(shift)** e, simultaneamente, em **◀**, **▶**, **▲** ou **▼**.
3. Prime **(esc)** para cancelar a seleção.

Redimensionar uma linha ou coluna

1. Através do menu de contexto **(ctrl)** **(menu)** seleciona **8:Redimensionar** e **1:Largura da coluna**.
2. Clica na seta de direção do *Touchpad* respetiva, de forma a ajustar manualmente ao tamanho pretendido.
3. Termina pressionando **(enter)**.



*Nota: Caso queiras anular a última ação realizada, podes clicar no conjunto de teclas **(ctrl)** **(esc)**.*



Como criar gráficos de barras e gráficos circulares?

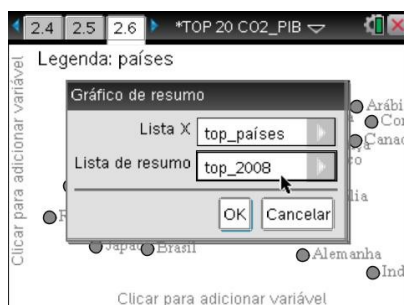
Ainda no mesmo problema abre uma nova página de Dados e Estatística.

A partir do gráfico de resumo identifica as variáveis a representar (utiliza os elevadores para selecionar as variáveis pretendidas).



Aparece por defeito um diagrama de barras. Clicando em **(ctrl)** **(menu)** aparece a opção de construção de um gráfico circular.

Podemos associar uma etiqueta a cada sector circular através de  , opção **2:Mostrar todas as etiquetas**.



Como efetuar um cálculo a partir de variáveis já definidas ?

Cria na página inicial 2.1, na coluna D (para não interferir com os dados introduzidos), uma nova variável associada ao cálculo da variação percentual das emissões por país, entre 2006 e 2008, e que denominaremos **var_perc**.

A fórmula que nos permitirá efetuar o cálculo automático para todos os países, deve ser introduzido na célula cinzenta da coluna D.

Nota: Um processo rápido para obtêres a configuração dos resultados em números decimais, será acrescentares o ponto a um dos fatores (no nosso caso podes multiplicar por 100.), indicando, dessa forma, que pretendes o resultado na forma decimal.

	2.1	2.2	2.3	*TOP 20 CO2_PIB
	006	co2_2008	D	var_perc
				=('co2_2008'-'co2_2006')/('co2_2006')*100.
1	03.49	7031.92		
2	52.29	5461.01		
3	08.66	4177.82		
4	10.35	1742.7		

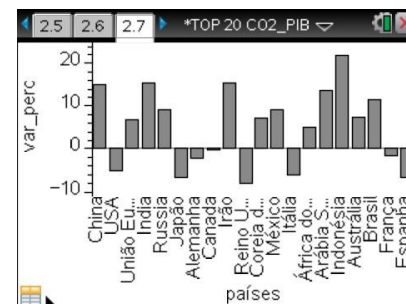
	2.1	2.2	2.3	*TOP 20 CO2_PIB
	006	co2_2008	D	var_perc
				=('co2_2008'-'co2_2006')/('co2_2006')*100.
1	03.49	7031.92		15.2113
2	52.29	5461.01		-5.06364
3	08.66	4177.82		6.88612
4	10.35	1742.7		15.3836
5	54.67	1708.65		9.2022
E3				

Como ordenar dados num gráfico ?


Depois de obtêres o gráfico de barras da figura, podes ordenar os dados.

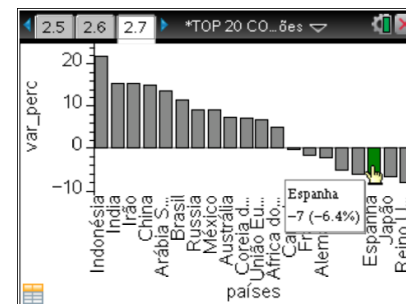
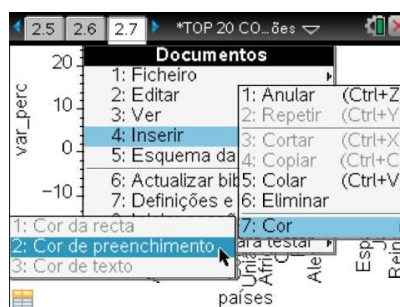
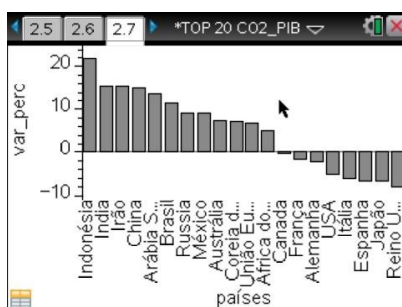
Depois de colocar o cursor sobre o gráfico, clica sobre  

3: Ordenar e **2: Ordem por valores**.



Nota:

1. Recorda que podes associar a cada barra a respetiva etiqueta de forma a perceberes o valor da variação para cada país.
2. Para alterares a cor de cada barra deves seleccionar primeiro a barra clicando sobre ela e, em seguida, clicar sobre  **2: Editar**, **7: Cor** e **2: Cor de preenchimento**, em seguida seleccionar a cor pretendida.



(*) e (**) Os dados utilizados foram adaptados dos sites:

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_carbon_dioxide_emissions

http://www.google.com/publicdata?ds=wb-di&met=ny_gdp_mktp_cd&idim=country:PRT&dl=pt-PT&hl=pt-PT&q=piB

Ratio entre o PIB e as Emissões de CO₂

- Como podemos observar nas atividades anteriores, as emissões de CO₂, apresentam diferenças significativas de país para país, devido, entre outros fatores, à sua dimensão e grau de desenvolvimento.

Vamos introduzir uma nova variável, "Produto Interno Bruto (PIB) por emissões de CO₂", que denominaremos de `pib_p_co2`, e que utilizaremos para poder comparar a distribuição de emissões de CO₂, e cuja unidade será dólares por tonelada.

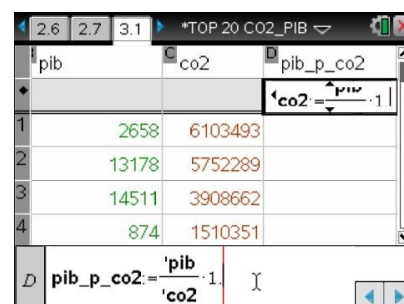
- Esta variável representa o *ratio* entre o PIB e as emissões de dióxido de carbono, e permite identificar os países mais eficientes em termos de emissões, i.e. aqueles que produzem mais riqueza por tonelada CO₂ emitido.
1. Determina os parâmetros estatísticos mais habituais (valor médio, mediana, desvio padrão e quartis) desta nova variável e interpreta-os.
 2. Confirma, graficamente, se existe enviesamento da distribuição (no caso da média > mediana - enviesamento para a direita, ...). Compara, numa mesma página (alterando o esquema de página), o histograma e o diagrama de extremos e quartis, e analisa como se reflete o enviesamento nos dois tipos de gráficos.
 3. Com base no histograma anterior, agrupa os dados em classes, em que cada classe terá uma amplitude de 1 dólar por tonelada.

Como introduzir uma coluna com dados calculados ?

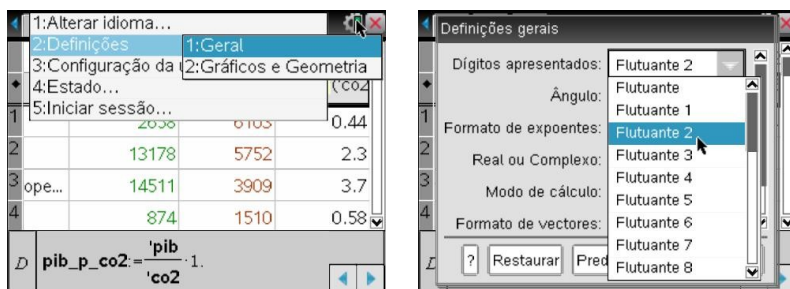
No caso concreto, a tabela com os dados do PIB e das emissões de CO₂, em 2006, está na página 3.1.

Acrescenta uma nova variável na coluna D, denominada **pib_p_co2**, onde serão calculados os *ratios* entre o PIB e as emissões para cada um dos países.

Poderás reduzir o número de dígitos apresentados, clicando no canto superior direito da janela (ícone da esquerda), e selecionando nas definições gerais, a opção do número de dígitos significativos pretendidos.



	pib	co2	pib_p_co2
1	2658	6103493	
2	13178	5752289	
3	14511	3908662	
4	874	1510351	



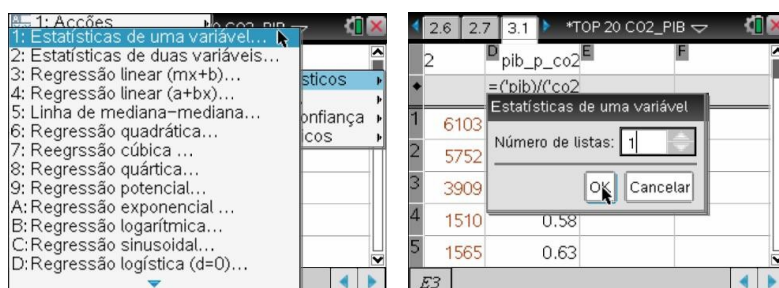
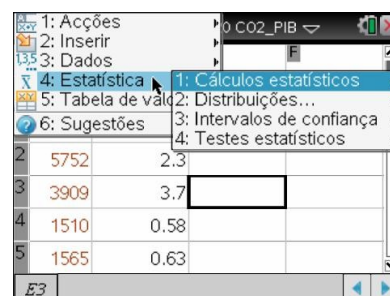
Como utilizar os dados de uma tabela para análise estatística?

Podes obter, na própria Folha de cálculo, um resumo dos parâmetros estatísticos associados a uma variável.

Em **menu 4: Estatística**, acede à opção **1: Cálculos estatísticos**, **1: Estatística de uma variável**.

Nota:

1. Poderás calcular a estatística de mais do que uma variável, identificando o número de listas sobre as quais serão efetuados os cálculos.



2. Observa que podes definir em que coluna pretendes que comecem a aparecer os resultados dessa análise.

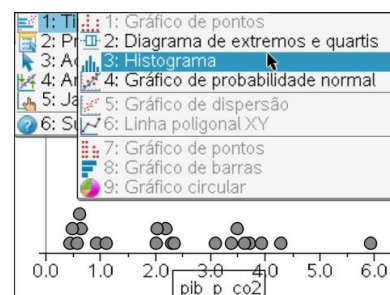
Como construir Histogramas ?

1. Insere uma nova página de Dados e Estatística.
2. Selecciona a variável que pretendes ver representada através de um histograma.



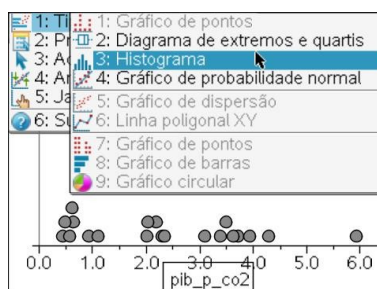
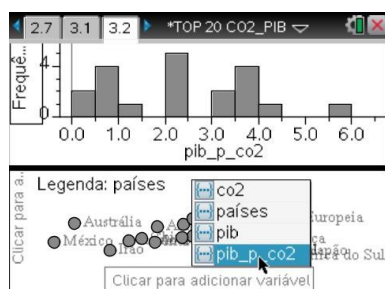
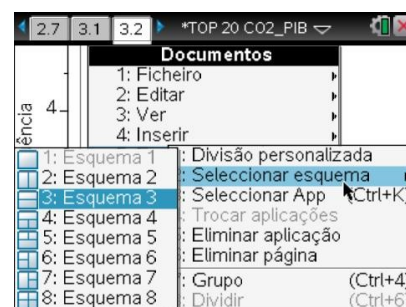
3. Clica em **1:Tipo de gráfico e 3:Histograma**.

O número de barras apresentadas no gráfico, depende do número de dados e da distribuição dos respetivos pontos. Mais à frente verás como podes alterar essas definições.



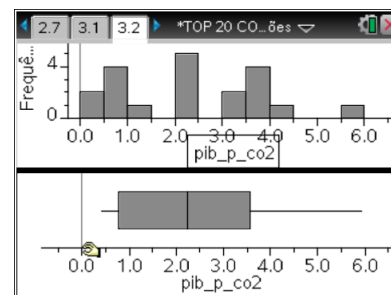
Como alterar esquema de página para visualização simultânea de mais do que uma aplicação ?

1. Clica em **5:Esquema de página, 2:Selecionar esquema** e, no caso presente, selecciona **3:esquema 3**.
2. Clica na área vazia e selecciona **5:Adicionar Dados e Estatística**.
3. Selecciona mais uma vez a variável **pib_p_co2**
4. Clica em **1:Tipo de gráfico e 2:Diagrama de extremos e quartis**.



Notas:

1. Para poder realizar uma leitura comparativa dos dois gráficos deves colocar a mesma escala nos eixos dos xx. Para isso, podes arrastar o cursor após o colocares sobre uma das origens, observares a sua alteração para o ícone \leftrightarrow realizando um clique longo e arrastando. Efetua o mesmo tipo de ação na outra extremidade, de forma a ficares com a mesma escala nos dois gráficos.



2. Explora os dados nas barras do histograma, ou no diagrama de extremos e quartis, passando o cursor sobre cada uma das barras para ver as informações respetivas.

Como representar graficamente um determinado valor (por exemplo a média) ?

Podes representar, num gráfico já existente, um determinado valor, por exemplo, o valor médio num histograma. Este valor aparecerá como uma reta vertical na área de trabalho.

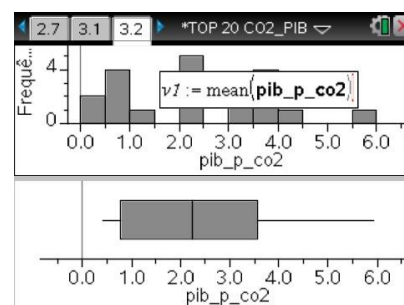
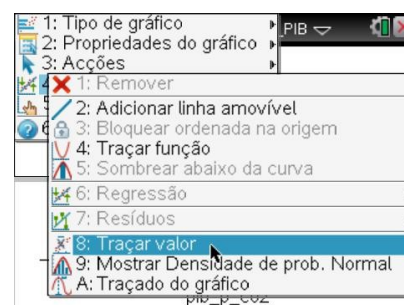
Clica sobre o histograma da página 3.2 para ficar ativo.

No **menu 4: Analisar**, seleciona **8: Traçar valor**.



Aparece uma caixa de texto com uma expressão predefinida na área de trabalho.

Escreve o valor que pretendes representar graficamente e prime **(enter)**. No exemplo seria a média do PIB por megatonelada de emissões de CO₂ e ficaria **v1:= mean(PIB_p_co2)**.

Se necessário, clica na reta para ver o respetivo valor.

**Notas:**

1. Podes observar todas as variáveis disponíveis clicando na tecla **(var)**.

2. Para remover a reta desenhada, seleciona-a e, no menu contexto  , clica sobre **1:Remover valor desenhado**.

Como agrupar dados num histograma ?


Podes agrupar os dados modificando as definições das barras do histograma.

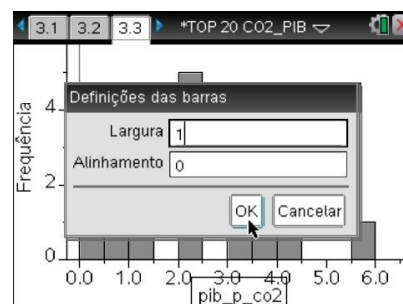
Abre uma nova folha de Dados e Estatística e começa por representar, o histograma anterior.

Agrupar os dados em classes, em que cada classe terá uma amplitude de 1 unidade (\$USD/t).



Para modificar as barras do histograma

Clica em  **2:Propriedades do gráfico, 2:Propriedades do histograma** e seleciona 2: **Definições das barras**.





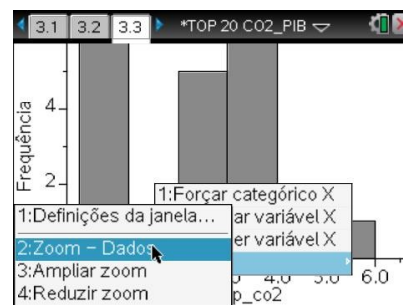
Surge uma caixa de diálogo:

1. Escreve os valores para definir a largura e o alinhamento (valor para início da construção das barras que representam os dados do histograma).

2. Clica em OK.

3. Poderá ser necessário efetuar um reajuste da janela. Para isso, a maneira mais rápida é através do menu de contexto

 , **4:Zoom** e **2:Zoom-Dados**.




Emissão de CO₂ vs PIB - Distribuição bidimensional

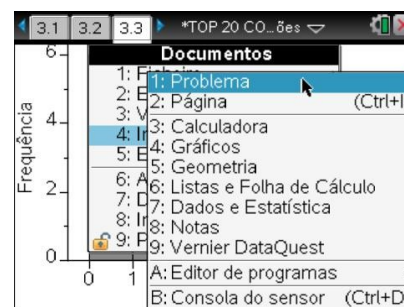
1. Abre uma folha de cálculo num novo problema e copia os dados do PIB e das emissões de CO₂ de cada um dos países, em 2006, para esta nova folha.
2. Representa, através de um diagrama de dispersão, a relação entre o PIB e a emissão de CO₂. Que comentário te sugere a observação do diagrama?
3. Calcula, na tua folha de cálculo, a equação da reta de regressão que relaciona CO₂ com o PIB e classifica o tipo de correlação existente com base no valor do coeficiente de correlação linear.
4. A partir do gráfico de dispersão observa se existe algum *outlier* (valor com grande resíduo). Para isso representa, graficamente, os quadrados dos resíduos e verifica se algum ponto tem, claramente, um quadrado do resíduo substancialmente maior que os restantes pontos.
5. Recorre a uma página da Calculadora para estimar a emissão de CO₂ na Península Ibérica (o PIB de Portugal, em 2006, foi de 201 milhares de milhões de dólares).

Nota: o valor das emissões de CO₂ na Península Ibérica, em 2006, foi de 412 kt.

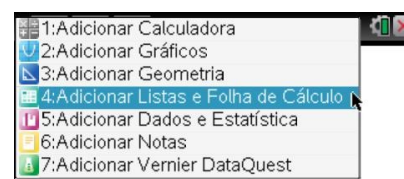
Como abrir um novo problema ?

Clica em  **4:Inserir, 1:Problema** e seleciona a aplicação desejada (neste caso uma folha de cálculo).

Nota: ao inserires um problema todas as variáveis até aí definidas não ficam associadas ao novo problema.

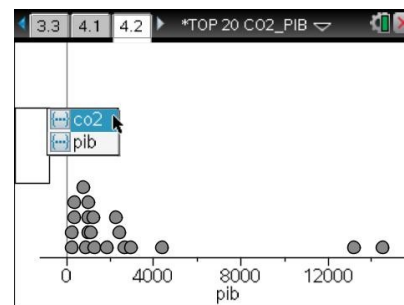


Copia os valores do PIB e das emissões de CO₂ da página 3.1, para a folha de cálculo do novo problema (página 4.1).



Como criar um gráfico de dispersão ?


Insere uma página de Dados e Estatística, 4.2 e constrói o gráfico de dispersão. Seleciona, em cada um dos eixos, a variável que pretendes ver representada.



Como obter uma regressão linear ?

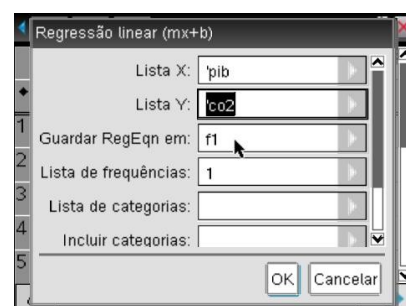
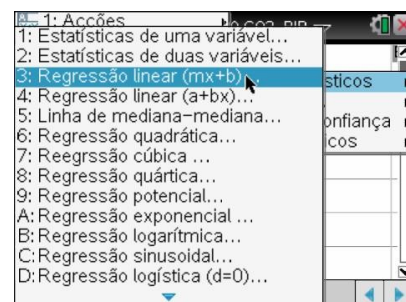
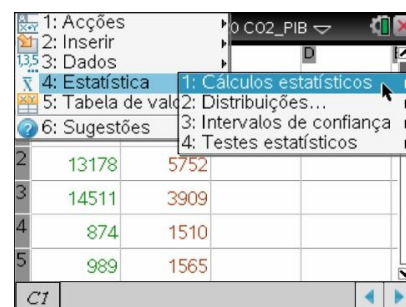
Para calcular a equação de uma qualquer regressão e os respetivos parâmetros, precisas que os dados estejam inseridos numa folha de cálculo. Volta por isso à página 4.1.

Regressão Linear

Prime  e seleciona **4:Estatística, 1:Cálculos estatísticos** e **3:Regressão linear (mx+b)**.

Surgirá uma nova janela onde deverás indicar a variável independente e a variável dependente, em que função deverá ser guardada a expressão analítica da regressão e ainda, em que colunas da folha de cálculo devem ser inseridos os resultados da regressão.

Por defeito, a equação da regressão ficará guardada na primeira função vazia, neste caso em **f1**.

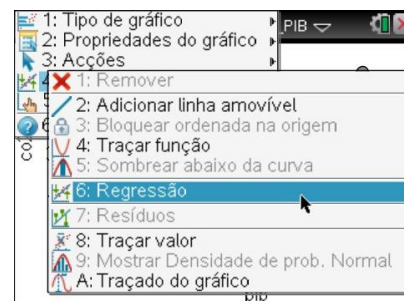


Como obter a representação gráfica da reta de regressão ?

A representação pretendida pode ser obtida em duas das aplicações da *TI-nspire*, na aplicação Gráficos e na aplicação Dados e Estatística. Vamos optar pela aplicação Dados e Estatística.

Voltando à página de Dados e Estatística, 4.2, prime **(menu)** e seleciona **4:Analisar, 6:Regressão e 1:Mostrar linear (mx+b).**

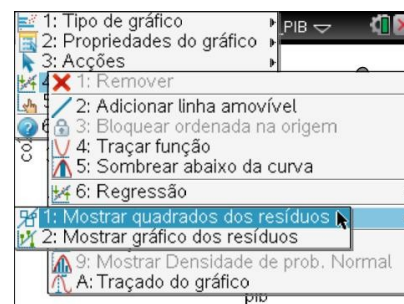
Surgirá a representação gráfica da regressão linear das variáveis PIB e CO₂, bem como a respetiva equação.



Como obter a representação gráfica dos quadrados dos resíduos ?

A partir do gráfico de dispersão observa se existe algum *outlier* (valor com grande resíduo). Para isso constrói, nesse mesmo gráfico, os quadrados dos resíduos, começando por clicar em **(menu)** e selecionando a opção **4:Analisar, 7:Resíduos e 1:Mostrar quadrados dos resíduos.**

Desta forma, visualizas, facilmente, se existem, ou não, *outliers* na distribuição em estudo.



Como estimar valores a partir da regressão ?

A partir do momento em que se calculou uma dada regressão e esta foi guardada como função, suponhamos em **f1**, pode-se fazer todos os cálculos possíveis com funções: cálculo de imagens ou objetos, extremos, zeros, ... Alguns destes cálculos podem ser feitos em várias das aplicações da *TI-nspire*, desde que no mesmo problema!

Por exemplo, na aplicação calculadora, basta escreveres, na linha de comando, **f1(1233+201)** e pressionares a tecla **(enter)**, obtendo a estimativa para o valor total de emissões de CO₂ (em Mt), na Península Ibérica. Podem também utilizar-se as funcionalidades de uma página de Gráficos para obter valores de interesse, desde que a representação esteja feita numa página de Gráficos.



Nota:

PIB de Espanha(2006): 1233
milhares de milhões de \$USD

PIB de Portugal(2006): 201
milhares de milhões de \$USD

Emissões de CO₂(2006) na
Península Ibérica: 412 kt

II - O RAPA E A LEI DOS GRANDES NÚMEROS NA CX

Iremos simular uma experiência vulgar quando se inicia o estudo das probabilidades:

*Lançar um rapa muitas vezes e verificar a frequência de saída de cada uma das faces : **Rapa, Tira, Põe e Deixa.***



Pretende-se gerar os resultados da experiência aleatória e obter um gráfico da frequência relativa da saída de cada face.

1. Abre um novo documento com uma página de Listas e Folha de Cálculo.

Na primeira coluna, que designamos por **d**, são gerados os números inteiros aleatórios entre um e quatro, a que associamos cada uma das faces do rapa.

A instrução a escrever na linha das fórmulas, para a simulação de 300 lançamentos é:

seq(randint(1,4),x,1,300)

A	d	B
		=seq(randint(1,4),x,1,300)
1		4.
2		4.
3		1.
4		3.
5		2.
6		3.
7		1.
8		2.
9		4.
10		1.
11		4.
A	d:=seq(randint(1,4),x,1,300)	

B	faces	C	fa	D	fr	E
					=fa/(300.)	
1	r		60		0.2	
2	t		87		0.29	
3	d		75		0.25	
4	p		78		0.26	
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
C1	=countif(d,1)					


As colunas seguintes registam os valores de uma vulgar tabela de frequências absolutas e relativas.

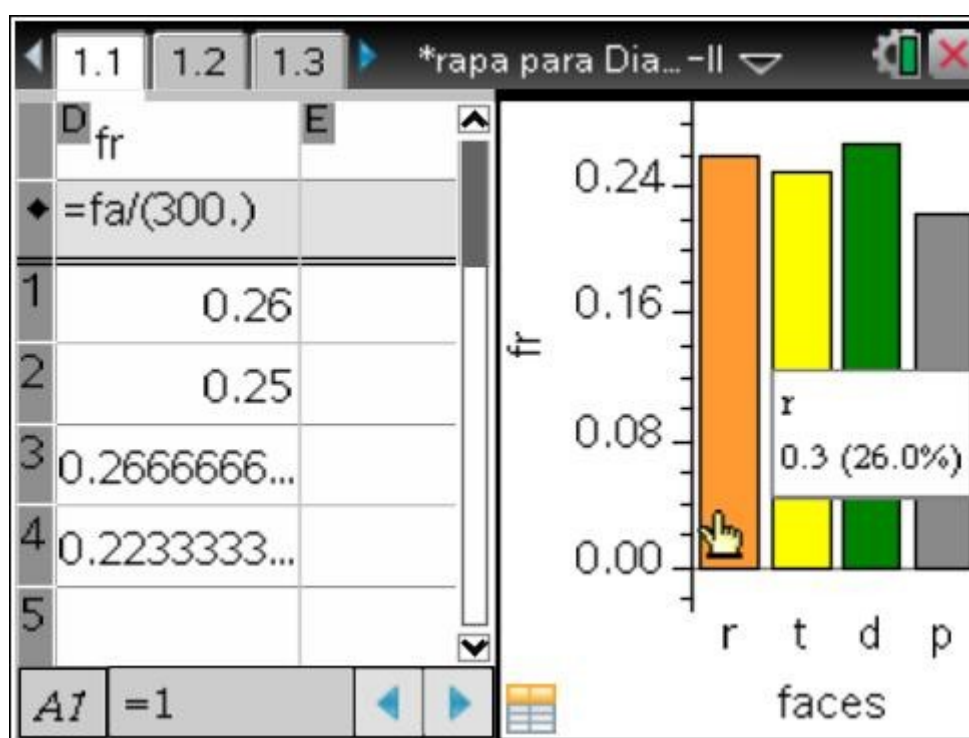
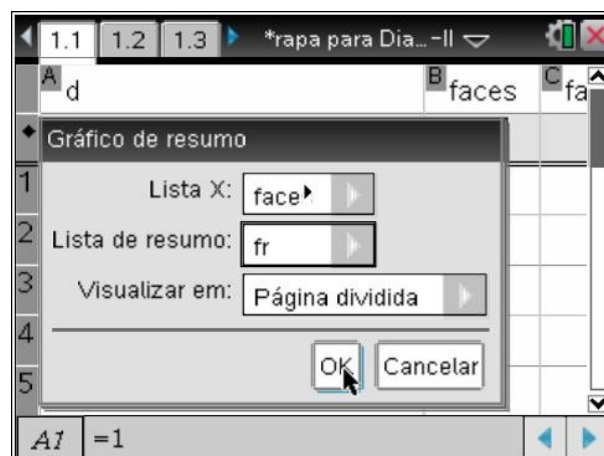
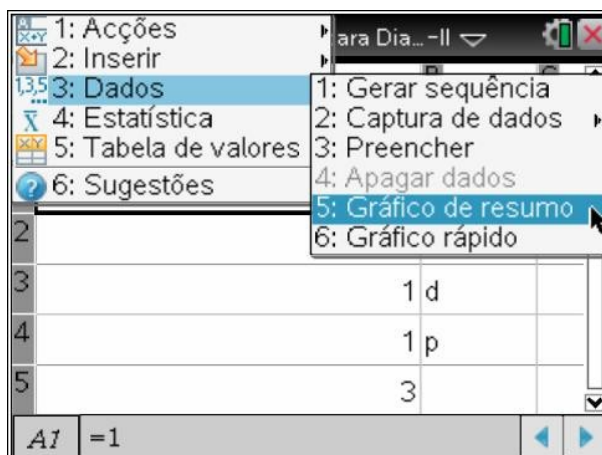
Na célula C1 contamos o número de vezes que saiu a face Rapa: **countif(d,1)**

De igual modo procedemos para as outras faces.

Para gerar uma nova simulação teclamos **Ctrl R**

2. Constrói um gráfico de barras da frequência relativa da saída de cada face.

A partir da tecla  acede depois aos sucessivos menus.



III-MÉDIA E MEDIANA: DA PARTE PARA O TODO!!!

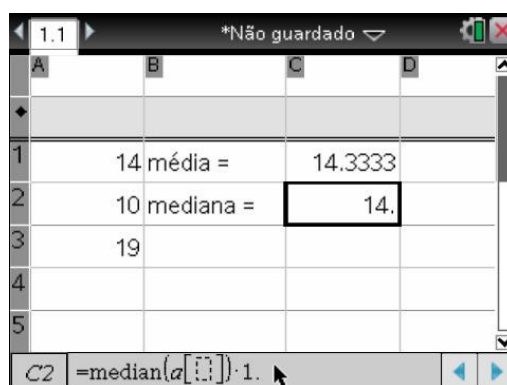
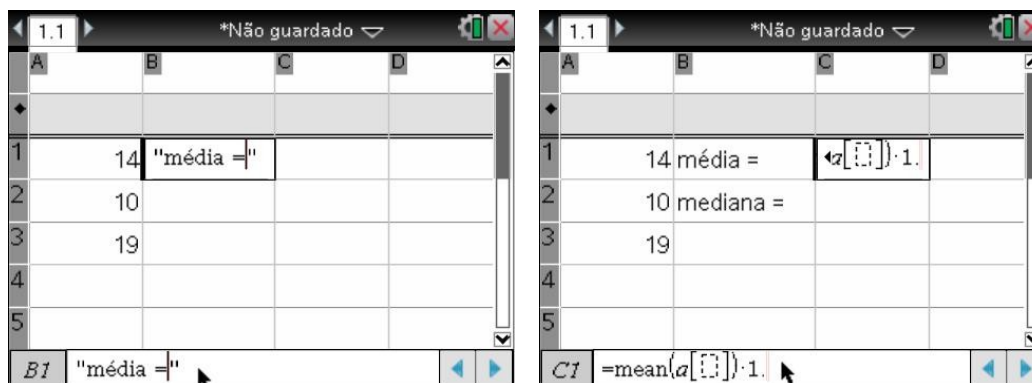
A média e a mediana são duas das medidas estatísticas mais conhecidas e utilizadas pelos nossos alunos. No entanto, a ênfase é normalmente dada ao cálculo das medidas em detrimento de um trabalho mais aprofundado ao nível da interpretação, das propriedades e do conhecimento da relação entre elas.

Esta tarefa consiste numa pequena investigação em torno da média e da mediana. O trabalho em grupo enriquecerá a natureza investigativa e reflexiva desta tarefa, pelo que todos os elementos do grupo terão uma participação importante e deverão ter em consideração as indicações que se seguem.

1. Abre um novo documento com uma página de *Listas e Folha de Cálculo* e coloca 3 dados quantitativos discretos (números naturais), diferentes dos apresentados nas figuras abaixo, tais que a sua média seja superior à sua mediana.

Não partilhes, para já, estes dados no grupo.

Nota: Embora a obtenção destas medidas, com 3 dados, seja simples, utiliza as funcionalidades que podes observar nas figuras abaixo como forma de automaticamente verificares se a condição é satisfeita.



2. Considera que todos os elementos do teu grupo têm um conjunto de 3 dados cuja média é superior à mediana.

Sem conheceres esses dados, podes afirmar que no conjunto de todos os dados do teu grupo a média continuará superior à mediana?

Nota: Nesta fase, cada elemento do grupo deve formular a sua resposta. Posteriormente, ainda sem partilhar os dados de cada um, devem discutir as respostas surgidas no grupo.

3. Na tua folha de cálculo e na coluna dos teus dados, acrescenta os dados dos restantes elementos do teu grupo.

Verifica se neste novo conjunto de dados a média se mantém superior à mediana.

	A	B	C	D
1	14	média =	122.167	
2	10	mediana =	89.5	
3	19			
4	320			
5	210			

4. Indica dois conjuntos de 3 dados discretos de modo que em cada um deles a média seja superior à mediana, mas no total dos 6 dados tal não acontece.

Nota: Utiliza as ferramentas da tua unidade portátil para fazeres experimentações, conforme figura ao lado. Observa que o exemplo da figura não satisfaz o solicitado.

	A	B	C	D	E
	cjto1	cjto2	dados	média	mediana
1	14	320	cjto1:	14.3333	14
2	10	210	cjto2:	230.	210
3	19	160	Todos:	122.167	89.5
4					
5					

5. Considera agora 3 dados quantitativos discretos na forma:

$$n; n; n + 1 \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Investiga o que acontece relativamente à relação entre a média e a mediana quando se associam dois grupos de dados desta forma.

6. Continua...

IV-RESSALTOS DE UMA BOLA – Modelação com recolha de dados

Num jogo de basquetebol entre o Benfica e o FC Porto, um jogador larga a bola no momento em que o treinador pede um tempo de desconto. Um professor de ciências, que está a assistir ao jogo, fixa os olhos na bola que ressalta sucessivamente e observa que, em cada ressalto, esta sobe cada vez menos. Durante o movimento da bola, ocorrem transformações e transferências de energia. Como a energia total do sistema (bola) não se conserva, a bola não sobe até à altura de que caiu.

Vem-lhe, então, à cabeça um turbilhão de ideias para explorar o MOVIMENTO com os seus alunos e pensa nalgumas questões a colocar:

1. *Afinal, qual será o modelo matemático que melhor descreve o movimento desta bola?*
2. *Haverá alguma relação entre a altura da queda da bola e a altura do respetivo ressalto, no movimento? E entre a velocidade de aproximação da bola no instante do impacto no solo e da velocidade de afastamento?*
3. *Será que ocorrem transformações ou transferências de energia durante este movimento?*

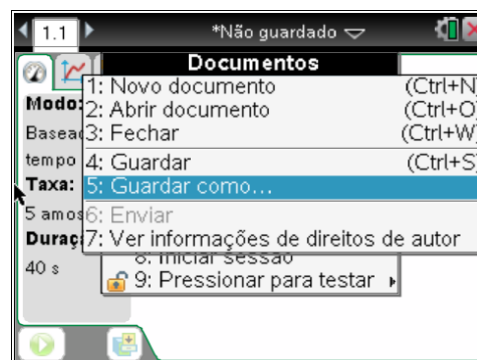
Para percebermos melhor o fenómeno, vamos estudar o movimento fazendo uma experiência concreta, usando os instrumentos de recolha de dados: aplicação Dataquest da TI_Nspire e um sensor de movimento, que mede a posição da bola ao longo do tempo.

Materiais

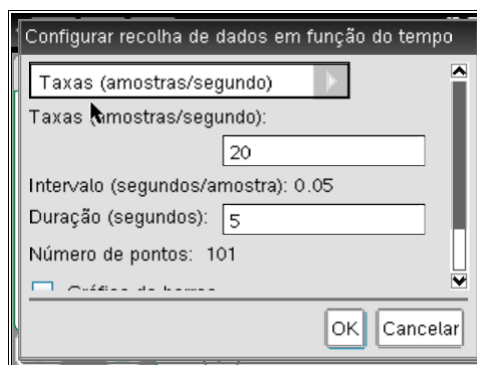
- Unidade portátil TI-Nspire com SO 3.0
- Sensor de movimento ou CBR2
- Lab Cradle ou cabo com USB
- Bola de futebol, basquete ou outras

Recolha de dados

1. Ligar a unidade portátil no botão **ON** e em documentos escolher **1: NOVO**
 - a) Nas aplicações escolher **7: ADICIONAR VERNIER DATAQUEST**.
 - b) Deslocar o cursor até ao cimo do ecrã onde diz “**NÃO GUARDADO**”.
 - c) Selecionar **1:FICHEIRO** e de seguida **5: GUARDAR COMO**.
 - d) Selecionar a **PASTA** e escrever em **NOME DO FICHEIRO** o nome pretendido para a atividade experimental e clicar em **GUARDAR**.
- 2- Configurar os parâmetros da recolha
 - a) Em **MENU**, seleccionar **1:EXPERIÊNCIA**.
 - b) Selecionar **8: CONFIGURAÇÃO DE RECOLHA**.
 - c) Digitar em **TAXAS (AMOSTRAS/SEGUNDO)** 20 e em **DURAÇÃO(SEGUNDOS)** 5.
 - d) Pressionar em **OK**.



1



2

3 – Montagem experimental

- Ligar o CBR2 (ou sensor do movimento) à unidade portátil através dum cabo mini USB.
- Se ouvir um sinal sonoro intermitente no sensor este estará pronto a funcionar, caso contrário premir TRIGGER no CBR2.
- Posicionar o sensor (ou preso num suporte) de modo a que fique aproximadamente a **1,5 m** do solo e colocar a bola a cerca de **0,5 m** do mesmo.
- Colocar o cursor da máquina no ícone que aparece no canto inferior esquerdo e pressionar para iniciar a recolha. De imediato deixar cair a bola de maneira a que o seu movimento se processe por baixo do CBR. Recuar quando largar a bola.
- Os gráficos deverão ser como os da figura 2.

4- Como o gráfico mostra a posição da bola em relação ao sensor temos de realizar uma operação para mostrar a posição em relação ao solo.

- Em **(menu)**, seleccionar **4:ANALISAR** → **5: ESTATÍSTICA** → **1:BOLA VOLEI.POSIÇÃO** e ENTER e obter o valor máximo (ver figura 3).
- Em **(menu)**, seleccionar **2:DADOS** → **3:NOVA COLUNA CALCULADA**.
- Dar o nome à coluna, registar as unidades e na caixa EXPRESSÃO escrever o valor máximo obtido em a) menos a coluna Posição (ver figura 4) e pressionar **OK**.
- Proceder do mesmo modo, para termos o gráfico simétrico da velocidade (na caixa de expressão digitar $(-1)*Velocidade$).
- Os gráficos deverão ter agora o aspeto da figura 5. Para isso, posicionar cursor em cima da variável dependente, pressionar **(ctrl)(menu)** e seleccionar a nova coluna calculada.

Nota: Antes de realizar nova recolha de dados, não esquecer de guardar a atual (se interessar) pressionando o ícone da direita no canto inferior esquerdo.



1. Qual será o modelo matemático que melhor descreve o movimento desta bola?

Para escolher o modelo que melhor se ajusta à curva, pode optar-se pelo ajuste automático ou pelo manual, cujos processos se exemplificam em seguida:

1.1. Modelação – ajuste automático

Podemos analisar agora, qualquer zona do gráfico, correspondente a zona de movimento ascendente, descendente ou movimento de um ressalto na totalidade.

a) Para seleccionar uma zona do gráfico, posicionar o cursor na posição inicial desejada, pressionar **(ctrl)** e arrastar até à posição final. A zona seleccionada fica de cor cinzenta (ver figura 1).

b) Em **(menu)**, seleccionar **4: ANALISAR** → **6: AJUSTE DA CURVA** → escolher a variável e de seguida a função de ajuste (ver figura 2).

c) Na caixa de detalhes, são mostrados os valores dos parâmetros da regressão (ver figura 3). Podemos realizar múltiplas regressões (nos dois gráficos) e na caixa de detalhes são diferenciados como *Ajustar1*, *Ajustar2*, ..., em cores diferentes para cada gráfico.

1.2. Modelação – ajuste manual

a) Registrar as coordenadas do vértice da parábola a modelar. Para isso, posicionar o cursor no vértice e registar os valores, visíveis na janela de detalhes.

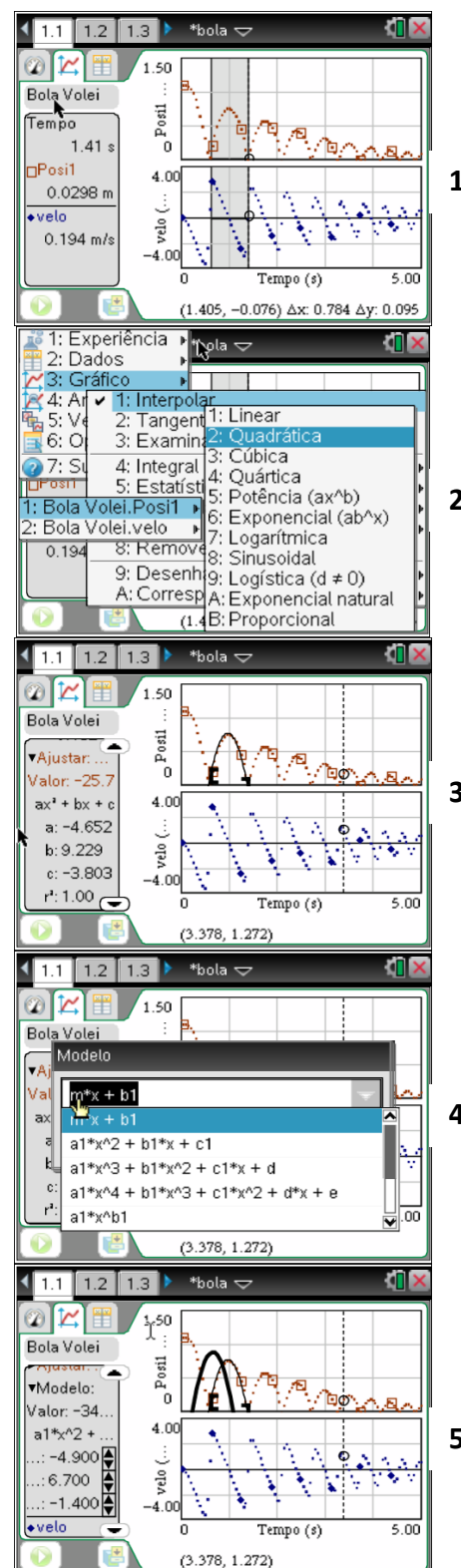
b) Em **(menu)**, seleccionar **4: ANALISAR** → **7: MODELO** → escolher o gráfico e de seguida introduzir o modelo $a(x-b)^2+c$ (ver figura 4).

c) Introduzir os valores das coordenadas do vértice em **b** e **c**. Escolher um valor para o parâmetro **a** e pressionar **OK**. Na caixa de detalhes, são mostrados controlos de cursores para ajustar esses parâmetros (ver figura 5). Atribuir valores a **a**, de modo a encontrar uma parábola que se ajuste à parábola obtida na recolha de dados.

Nota: Poderemos realizar as regressões na aplicação Dados e Estatística, pois o DataQuest cria variáveis lista, relativas às colunas de dados.

1.3. Questões:

1. Qual o significado físico do parâmetro **a**?
2. Que relações existem entre os gráficos de posição e de velocidade?



2. Haverá alguma relação entre a altura da queda da bola e a altura do respetivo ressalto, no movimento? E entre a velocidade de aproximação da bola no instante do impacto no solo e da velocidade de afastamento?

Descrevem-se em seguida alguns procedimentos para recolha das alturas e das velocidades, que permitam a análise pretendida:

a) Registrar os valores dos máximos de cada uma das parábolas. Para isso, deslocar o cursor para o máximo da primeira parábola. Registrar a altura da bola correspondente a esse ponto. Repetir o processo para os máximos das outras parábolas.

b) Registrar os valores das velocidades da bola imediatamente antes de colidir com o solo ($v_{aproximação}$) e imediatamente após ($v_{afastamento}$). Para isso, no gráfico de velocidade, deslocar convenientemente o cursor e registrar o valor da velocidade de aproximação (o máximo da velocidade no sentido negativo) e da velocidade de afastamento (o máximo da velocidade no sentido positivo do ressalto seguinte).

c) Abrir uma aplicação Listas e Folha de Cálculo e introduzir os valores registados nas alíneas anteriores: (1) da altura do queda, h_Q , e da altura do ressalto, h_R e

(2) da $v_{aproximação}$, v_{aprox} , e da $v_{afastamento}$, v_{afast} , (na figura 1, pág. 4, estão as 4 listas da experiência efetuada).

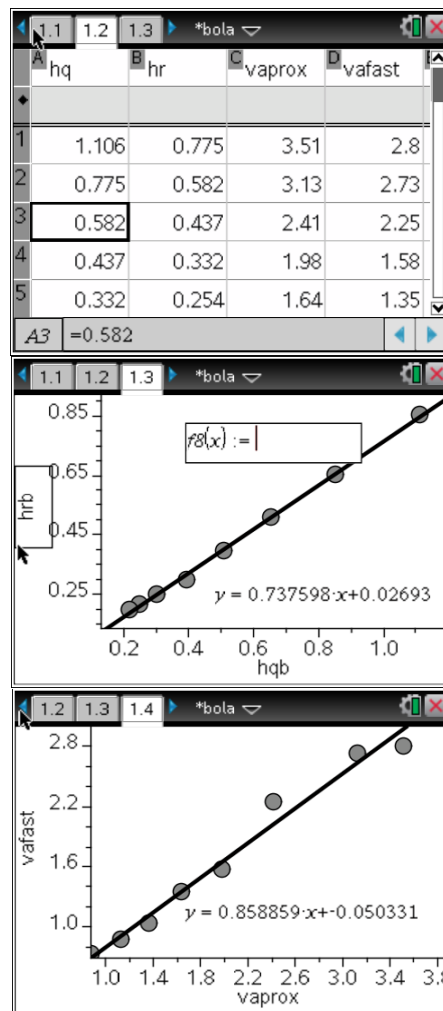
d) Divida cada altura do ressalto pela respetiva altura da queda. O que verifica?

e) Divida cada valor da $v_{afastamento}$ pelo valor respetivo da $v_{aproximação}$. O que verifica?

f) Abra uma aplicação Dados e Estatística. Construa os gráficos da $h_{ressalto}$, em função da h_{queda} e da $v_{afastamento}$ em função da $v_{aproximação}$

g) Em (menu), seleccionar **4:ANALISAR** → **6: REGRESSÃO** e escolher as curvas de ajuste.

h) Que relação parece existir entre os dois declives **m** e **e** das retas de ajuste?



Nota

Durante o movimento da bola, ocorrem transformações e transferências de energia. Como a energia total do sistema (bola) não se conserva, a bola não sobe até à altura de que caiu. Se a bola fosse idealmente elástica, subiria até à altura da queda. Se não tivesse nenhuma elasticidade, não subiria. A dissipação de energia (e a elasticidade) pode estimar-se quando se relaciona com o valor do coeficiente de restituição, que é definido por:

$$e = \frac{V_{afast.}}{V_{aprox}}$$

onde $V_{afast.}$ é a velocidade de afastamento e $V_{aprox.}$ a velocidade de aproximação (na colisão com o solo). Os valores de **e** estão compreendidos entre **0** (quando a bola não sobe, $V_{afast.} = 0$ m/s) e **1** (quando a bola atinge a altura da queda, $V_{afast.} = V_{aprox.}$).