

Dias T³

2011/2012



ZONA NORTE

22 | OUT | 2011



T³ PORTUGAL

Estatística e Folha de Cálculo

MATERIAIS DE APOIO ÀS SESSÕES PRÁTICAS



APM

Associação de Professores
de Matemática

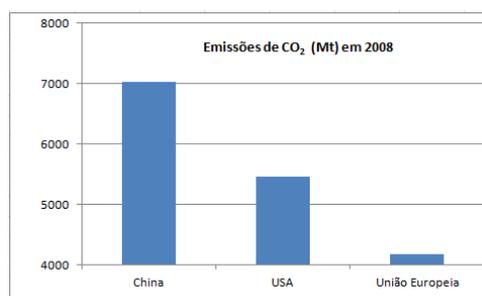
I- EMISSÕES DE CO₂ E O FUTURO DO MUNDO

Começa por abrir o ficheiro TOP 20 CO₂_PIB.

Para além de uma página introdutória, encontrarás na página 2.1 os valores de emissão de dióxido de carbono (CO₂), em megatoneladas (Mt), nos anos de 2006 e de 2008, dos 20 países "mais poluidores"*. Na página 3.1 está registado o Produto Interno Bruto (PIB) desses mesmos países, no ano 2006, em milhares de milhões de dólares (10⁹ \$USD) e os valores de emissão de CO₂ nesse mesmo ano, em megatoneladas, com arredondamento às unidades **.

1. A partir dos dados da primeira tabela, constrói um gráfico, com os valores resumidos por país (2006 e 2008), de forma a perceberes a ordem de grandeza das emissões realizadas por cada um desses países.

2. Observa o seguinte gráfico onde se pretende comparar as emissões de CO₂, em 2008, dos três "gigantes".



Que comentário te sugere o gráfico representado? No caso de o achares pouco rigoroso,

apresenta um gráfico que transmita a informação de uma forma que te pareça mais correta.

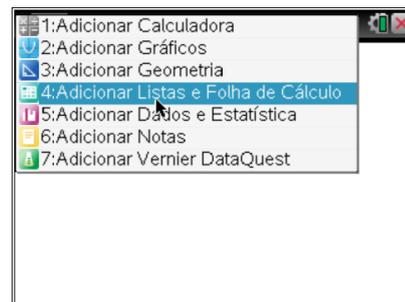
3. Identifica os cinco países com maiores emissões de CO₂ em 2008. Obtém um gráfico circular em que surjam os valores de emissão, em percentagem, efetuados pelo conjunto desses cinco países, comparados com os restantes quinze países identificados na tabela e ainda o resto do mundo.

Nota: foram emitidas, no mundo, em 2008, 29 888 Mt de CO₂.

4. Com base nos dados de 2006 e de 2008, achas que houve um esforço global para controlar as emissões de CO₂, ou apenas alguns países demonstraram essa preocupação? Calcula a variação percentual nas emissões efetuadas por cada um dos países e apresenta a informação resumida na forma gráfica e ordenada.

Como adicionar a aplicação Dados e Estatística?

Começa por te localizares na página 2.1 e abre uma página, 2.2, de *Dados e Estatística*.



Como criar gráficos - I ?

Aparece uma nova página no problema ativo (página 2.2), com uma representação gráfica predefinida do conjunto de dados.



Como selecionar na janela gráfica as variáveis pretendidas?

Na janela gráfica com o cursor no centro da imagem deves clicar em **ctrl** **menu** e selecionar a opção **3:Adicionar variável X com lista resumo**.



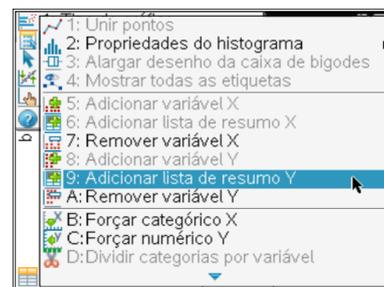
Em seguida podes selecionar a variável que te interessa representar graficamente clicando sobre as zonas de legenda.



Caso pretendas acrescentar uma nova variável, deves clicar em **menu** e selecionar **2:Propriedades do gráfico**, **9:Adicionar lista de resumo Y** e escolher a nova variável (neste caso as emissões de CO₂ em 2008).

Repara que, automaticamente, surgem dois conjuntos de barras com cores identificativas de cada uma das variáveis.

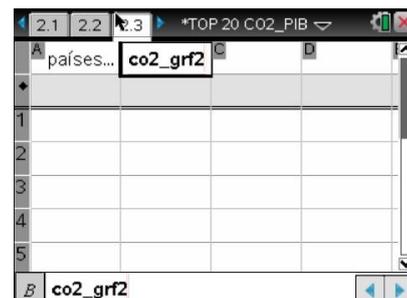
Deslocando o cursor por cima de cada uma das barras surge-te uma caixa com os dados específicos.



Como criar listas ?

Após teres adicionado ao problema uma nova página, 2.3 , com a aplicação **Listas e Folha de Cálculo**, introduz duas listas identificando os "países" representados no gráfico da página inicial e as respetivas emissões.

1. Na primeira linha escreve o nome dos campos: **países_grf2** e **co2_2008_grf2**.



Nota: precisas de definir novas variáveis com os dados resumidos, para as poderes utilizar aquando da construção do gráfico.

2. Para evitar teres que introduzir os dados, poderás copiá-los da página inicial.

2.1. na página 2.1 com recurso à tecla (⇧) e ao touchpad seleciona os dados que deverão ficar em destaque (uma coluna de cada vez).

2.2. podes copiar os dados de uma forma semelhante à utilizada noutras folhas de cálculo através da combinação de teclas (ctrl) (C).

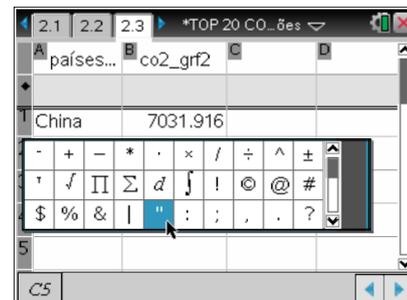
2.3. Na página 2.3 podes colar os dados, mais uma vez através da combinação de teclas (ctrl) (V).

países...	co2_2006	co2_2008
	6103.493	7031.916
	5752.289	5461.014
Europeia	3908.662	4177.817
	1510.351	1742.698
a	1564.669	1708.653

países...	co2_grf2		
China	7031.916		
USA	5461.014		
União Eu...	4177.817		

No caso de pretendes preencher à mão cada uma das células, podes encontrar os símbolos utilizados, clicando nas teclas (ctrl) (Ⓜ), surgindo um catálogo de símbolos.

Para introduzires caracteres acentuados deves, após a digitação do carácter, pressionar sucessivamente a tecla (F9).



Como criar gráficos – II ?

Cria um novo gráfico (página 2.4) com uma leitura mais fidedigna dos dados apresentados.. Segue as instruções anteriores.

Atenção com a correta identificação das variáveis.

Nota: Clicando sobre as setas associadas às caixas de edição aparece o conjunto de variáveis definidas.



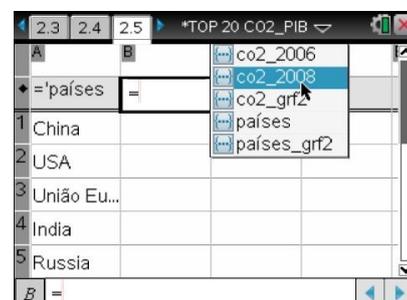
Cópia de conjuntos de dados para uma nova folha de cálculo

Cria uma nova folha de cálculo (página 2.5) e copia, dos dados iniciais, o conjunto de dados com a identificação dos países e das respetivas emissões de CO₂ em 2008.

Copiar os dados para novas colunas/listas

Faz um clique duplo na célula a cinzento (linha de fórmulas para listas) de cada uma das colunas onde pretendes introduzir os dados e, pressionando a tecla (var), seleciona as variáveis **países** e **co2_2008** para cada uma das colunas, respetivamente.

Ao clicares em (enter) são inseridos todos os dados destas duas variáveis. De seguida, seleciona as duas células a cinzento e apaga-as pressionando a tecla (del); desta forma foi removida a dependência destes dados das variáveis a eles associadas.



Como escrever uma fórmula?

Para não interferir com os dados já introduzidos, calcula a partir da coluna **D**, o valor total das emissões de cada um dos conjuntos de países: os primeiros cinco países (Top_5), Restantes 15 países do Top (Rest_15) e o resto do Mundo (Rest_Mundo). Não te esqueças de introduzir estes nomes entre aspas.

	top_pa...	top_2008
1	7031.92	Top_5
2	5461.01	Rest_15
3	4177.82	Rest_Mu...
4	1742.7	
5	1708.65	

*Nota: mais uma vez, para a construção do gráfico temos que criar novas variáveis – **top_países** e **top_2008**.*

Observa que para efetuar alguns tipos de cálculo podes utilizar funções pré-definidas (por exemplo *sum()*, *cumsum()*, *mean()*, ...) tal como acontece noutras folhas de cálculo.

	top_pa...	top_2008
1	7031.92	Top_5
2	5461.01	Rest_15
3	4177.82	Rest_Mu...
4	1742.7	
5	1708.65	

	top_pa...	top_2008
1	7031.92	Top_5
2	5461.01	Rest_15
3	4177.82	Rest_Mu...
4	1742.7	
5	1708.65	

Comprender as referências a células nas fórmulas

Numa fórmula podes incluir:

- a letra de uma coluna e o número de uma linha para uma referência relativa;
- o símbolo \$ antes da letra da coluna e/ou do número da linha para especificar uma referência absoluta;
- dois pontos (:) entre duas referências de células para especificar um intervalo de células;
- uma referência a uma variável definida anteriormente.

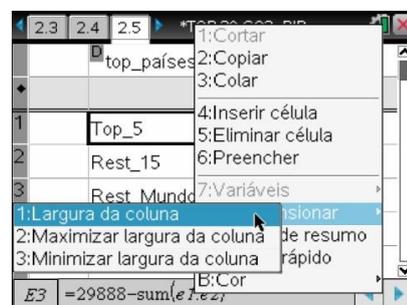
Como trabalhar com linhas e colunas de dados?

Selecionar uma coluna ou linha

1. Prime sem soltar ▲ para mover para além da célula superior da coluna; de modo análogo para selecionar a linha.
2. Para alargar uma seleção às colunas ou linhas adjacentes, prime sem soltar (⇧shift) e, simultaneamente, em ◀, ▶, ▲ ou ▼.
3. Prime (esc) para cancelar a seleção.

Redimensionar uma linha ou coluna

1. Através do menu de contexto (ctrl) (menu) seleciona **8:Redimensionar** e **1:Largura da coluna**.
2. Clica na seta de direção do Touchpad respetiva, de forma a ajustar manualmente ao tamanho pretendido.
3. Termina pressionando (enter).



Nota: Caso queiras anular a última ação realizada, podes clicar no conjunto de teclas (ctrl) (esc).

Como criar gráficos de barras e gráficos circulares?

Ainda no mesmo problema abre uma nova página de Dados e Estatística.

A partir do gráfico de resumo identifica as variáveis a representar (utiliza os elevadores para selecionar as variáveis pretendidas).



Aparece por defeito um diagrama de barras. Clicando em (ctrl) (menu) aparece a opção de construção de um gráfico circular.

Podemos associar uma etiqueta a cada sector circular através de  , opção **2:Mostrar todas as etiquetas**.



Como efetuar um cálculo a partir de variáveis já definidas ?

Cria na página inicial 2.1, na coluna D (para não interferir com os dados introduzidos), uma nova variável associada ao cálculo da variação percentual das emissões por país, entre 2006 e 2008, e que denominaremos **var_perc**.

A fórmula que nos permitirá efetuar o cálculo automático para todos os países, deve ser introduzido na célula cinzenta da coluna D.

Nota: Um processo rápido para obteres a configuração dos resultados em números decimais, será acrescentares o ponto a um dos fatores (no nosso caso podes multiplicar por 100.), indicando, dessa forma, que pretendes o resultado na forma decimal.

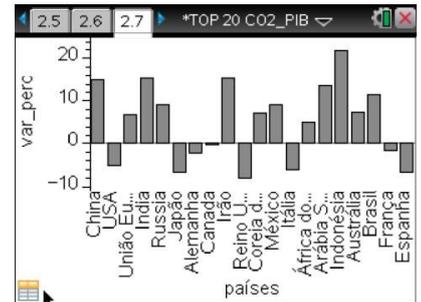
	co2_2008	var_perc
1	103.49	7031.92
2	52.29	5461.01
3	08.66	4177.82
4	10.35	1742.7

	co2_2008	var_perc
1	103.49	7031.92
2	52.29	5461.01
3	08.66	4177.82
4	10.35	1742.7
5	54.67	1708.65

Como ordenar dados num gráfico ?

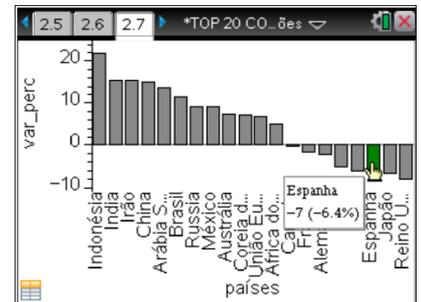
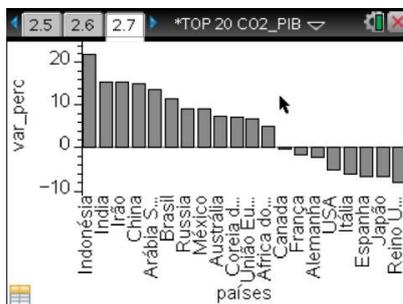
Depois de obteres o gráfico de barras da figura, podes ordenar os dados.

Depois de colocar o cursor sobre o gráfico, clica sobre **ctrl** **menu**
3:Ordenar e **2: Ordem por valores.**



Nota:

1. Recorda que podes associar a cada barra a respetiva etiqueta de forma a perceberes o valor da variação para cada país.
2. Para alterares a cor de cada barra deves seleccionar primeiro a barra clicando sobre ela e, em seguida, clicar sobre **doc** **2:Editar**, **7:Cor** e **2:Cor de preenchimento**, em seguida seleccionar a cor pretendida.



(*) e (**) Os dados utilizados foram adaptados dos sites:

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_carbon_dioxide_emissions

http://www.google.com/publicdata?ds=wb-di&met=ny_gdp_mktp_cd&idim=country:PRT&dl=pt-PT&hl=pt-PT&q=piB

Ratio entre o PIB e as Emissões de CO₂

- Como podemos observar nas atividades anteriores, as emissões de CO₂, apresentam diferenças significativas de país para país, devido, entre outros fatores, à sua dimensão e grau de desenvolvimento.

Vamos introduzir uma nova variável, "Produto Interno Bruto (PIB) por emissões de CO₂", que denominaremos de `pib_p_co2`, e que utilizaremos para poder comparar a distribuição de emissões de CO₂, e cuja unidade será dólares por tonelada.

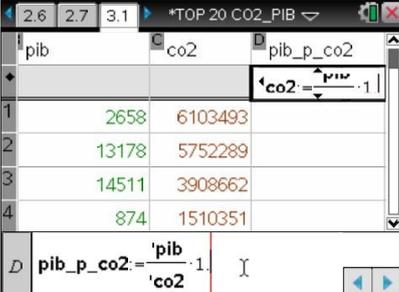
- Esta variável representa o *ratio* entre o PIB e as emissões de dióxido de carbono, e permite identificar os países mais eficientes em termos de emissões, i.e. aqueles que produzem mais riqueza por tonelada CO₂ emitido.
1. Determina os parâmetros estatísticos mais habituais (valor médio, mediana, desvio padrão e quartis) desta nova variável e interpreta-os.
 2. Confirma, graficamente, se existe enviesamento da distribuição (no caso da média > mediana - enviesamento para a direita, ...). Compara, numa mesma página (alterando o esquema de página), o histograma e o diagrama de extremos e quartis, e analisa como se reflete o enviesamento nos dois tipos de gráficos.
 3. Com base no histograma anterior, agrupa os dados em classes, em que cada classe terá uma amplitude de 1 dólar por tonelada.

Como introduzir uma coluna com dados calculados ?

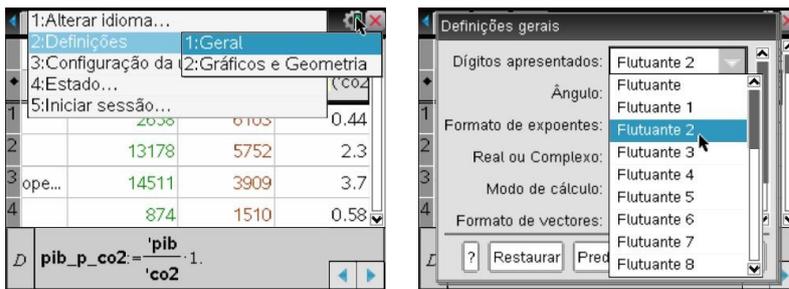
No caso concreto, a tabela com os dados do PIB e das emissões de CO₂, em 2006, está na página 3.1.

Acrescenta uma nova variável na coluna D, denominada **pib_p_co2**, onde serão calculados os *ratios* entre o PIB e as emissões para cada um dos países.

Poderás reduzir o número de dígitos apresentados, clicando no canto superior direito da janela (ícone da esquerda), e selecionando nas definições gerais, a opção do número de dígitos significativos pretendidos.



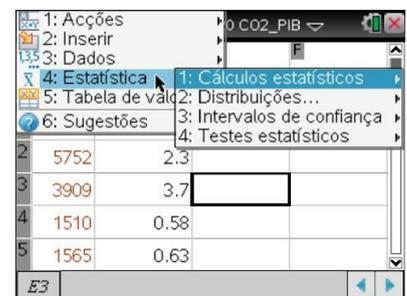
	pib	co2	pib_p_co2
1	2658	6103493	
2	13178	5752289	
3	14511	3908662	
4	874	1510351	



Como utilizar os dados de uma tabela para análise estatística?

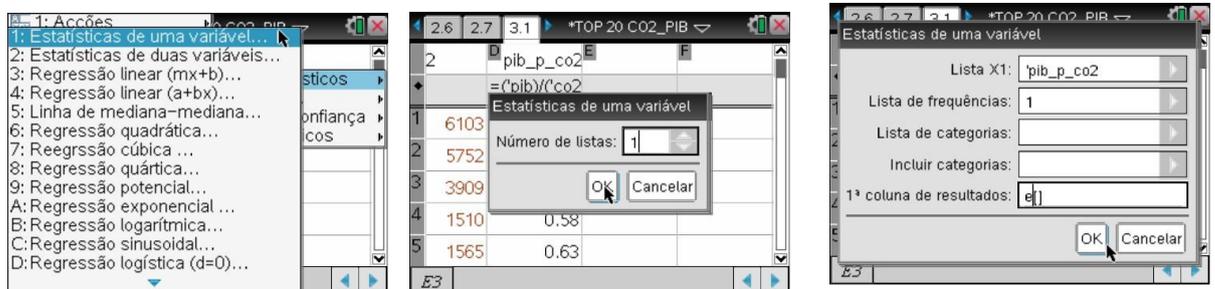
Podes obter, na própria Folha de cálculo, um resumo dos parâmetros estatísticos associados a uma variável.

Em **(menu) 4:Estadística**, acede à opção **1:Cálculos estatísticos, 1: Estatística de uma variável**.



Nota:

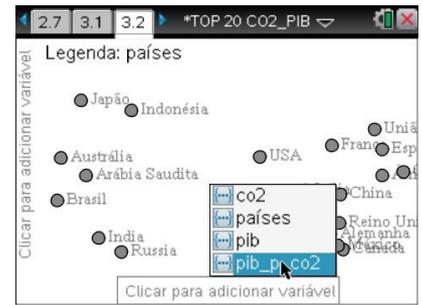
1. Poderás calcular a estatística de mais do que uma variável, identificando o número de listas sobre as quais serão efetuados os cálculos.



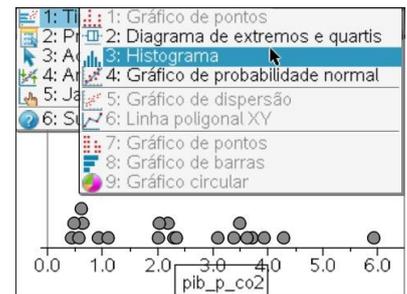
2. Observa que podes definir em que coluna pretendes que comecem a aparecer os resultados dessa análise.

Como construir Histogramas ?

1. Insere uma nova página de Dados e Estatística.
2. Selecciona a variável que pretendes ver representada através de um histograma.



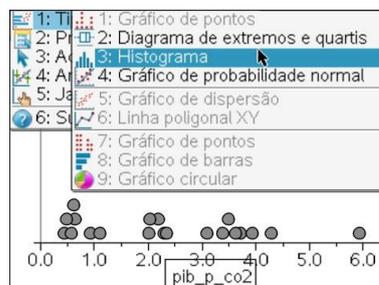
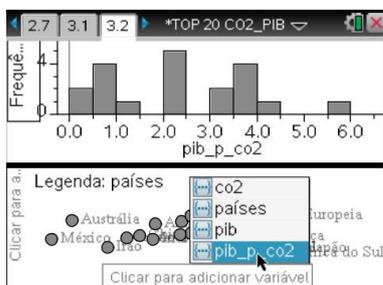
3. Clica em **1:Tipo de gráfico e 3:Histograma**.



O número de barras apresentadas no gráfico, depende do número de dados e da distribuição dos respetivos pontos. Mais à frente verás como podes alterar essas definições.

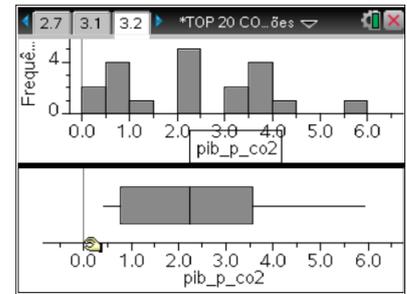
Como alterar esquema de página para visualização simultânea de mais do que uma aplicação ?

1. Clica em **5:Esquema de página, 2:Selecionar esquema** e, no caso presente, selecciona **3:esquema 3**.
2. Clica na área vazia e selecciona **5:Adicionar Dados e Estatística**.
3. Selecciona mais uma vez a variável **pib_p_co2**
4. Clica em **1:Tipo de gráfico e 2:Diagrama de extremos e quartis**.



Notas:

1. Para poder realizar uma leitura comparativa dos dois gráficos deves colocar a mesma escala nos eixos dos xx. Para isso, podes arrastar o cursor após o colocares sobre uma das origens, observares a sua alteração para o ícone \leftrightarrow realizando um clique longo e arrastando. Efetua o mesmo tipo de ação na outra extremidade, de forma a ficares com a mesma escala nos dois gráficos.



2. Explora os dados nas barras do histograma, ou no diagrama de extremos e quartis, passando o cursor sobre cada uma das barras para ver as informações respetivas.

Como representar graficamente um determinado valor (por exemplo a média) ?

Podes representar, num gráfico já existente, um determinado valor, por exemplo, o valor médio num histograma. Este valor aparecerá como uma reta vertical na área de trabalho.

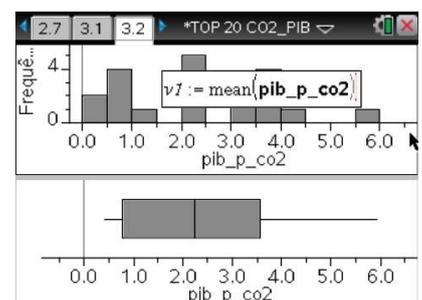
Clica sobre o histograma da página 3.2 para ficar ativo.

No  4: **Analisar**, seleciona **8: Traçar valor**.

Aparece uma caixa de texto com uma expressão predefinida na área de trabalho.

Escreve o valor que pretendes representar graficamente e prime . No exemplo seria a média do PIB por megatonelada de emissões de CO₂ e ficaria **v1 := mean(pib_p_co2)**.

Se necessário, clica na reta para ver o respetivo valor.



Notas:

1. Podes observar todas as variáveis disponíveis clicando na tecla .

2. Para remover a reta desenhada, seleciona-a e, no menu contexto  , clica sobre **1:Remover valor desenhado**.

Como agrupar dados num histograma ?

Podes agrupar os dados modificando as definições das barras do histograma.

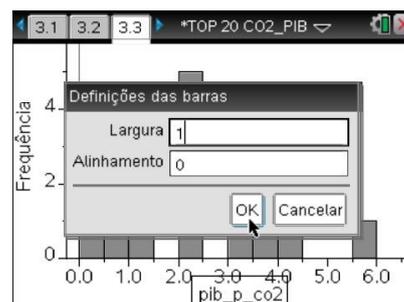
Abre uma nova folha de Dados e Estatística e começa por representar, o histograma anterior.

Agrupar os dados em classes, em que cada classe terá uma amplitude de 1 unidade (\$USD/t).



Para modificar as barras do histograma

Clica em  **2:Propriedades do gráfico, 2:Propriedades do histograma** e seleciona **2:Definições das barras**.



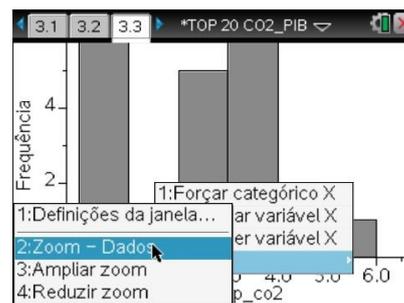
Surge uma caixa de diálogo:

1. Escreve os valores para definir a largura e o alinhamento (valor para início da construção das barras que representam os dados do histograma).

2. Clica em OK.

3. Poderá ser necessário efetuar um reajuste da janela. Para isso, a maneira mais rápida é através do menu de contexto

 , **4:Zoom** e **2:Zoom-Dados**.



Emissão de CO₂ vs PIB - Distribuição bidimensional

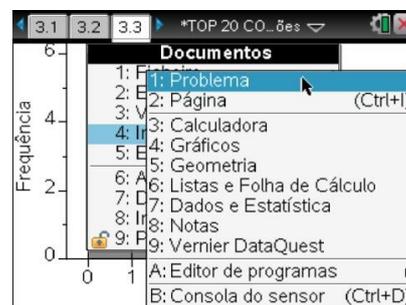
1. Abre uma folha de cálculo num novo problema e copia os dados do PIB e das emissões de CO₂ de cada um dos países, em 2006, para esta nova folha.
2. Representa, através de um diagrama de dispersão, a relação entre o PIB e a emissão de CO₂. Que comentário te sugere a observação do diagrama?
3. Calcula, na tua folha de cálculo, a equação da reta de regressão que relaciona CO₂ com o PIB e classifica o tipo de correlação existente com base no valor do coeficiente de correlação linear.
4. A partir do gráfico de dispersão observa se existe algum *outlier* (valor com grande resíduo). Para isso representa, graficamente, os quadrados dos resíduos e verifica se algum ponto tem, claramente, um quadrado do resíduo substancialmente maior que os restantes pontos.
5. Recorre a uma página da Calculadora para estimar a emissão de CO₂ na Península Ibérica (o PIB de Portugal, em 2006, foi de 201 milhares de milhões de dólares).

Nota: o valor das emissões de CO₂ na Península Ibérica, em 2006, foi de 412 kt.

Como abrir um novo problema ?

Clica em  **4:Inserir**, **1:Problema** e seleciona a aplicação desejada (neste caso uma folha de cálculo).

Nota: ao inserires um problema todas as variáveis até aí definidas não ficam associadas ao novo problema.

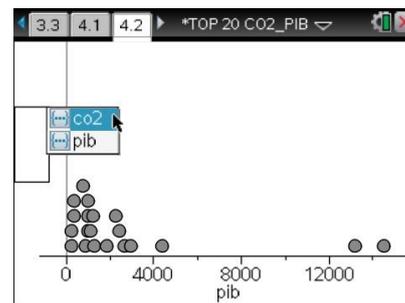


Copia os valores do PIB e das emissões de CO₂ da página **3.1**, para a folha de cálculo do novo problema (página **4.1**).



Como criar um gráfico de dispersão ?

Inserir uma página de Dados e Estatística, 4.2 e construir o gráfico de dispersão. Selecionar, em cada um dos eixos, a variável que pretendes ver representada.



Como obter uma regressão linear ?

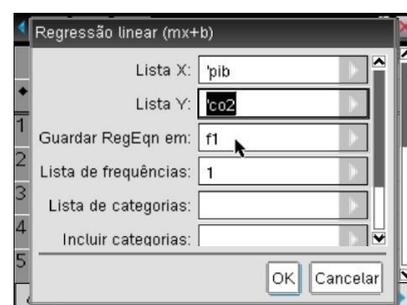
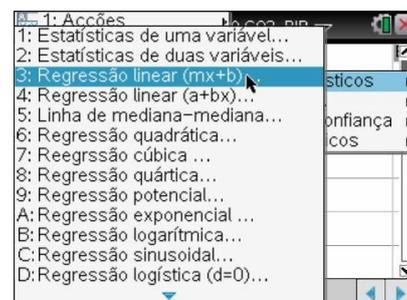
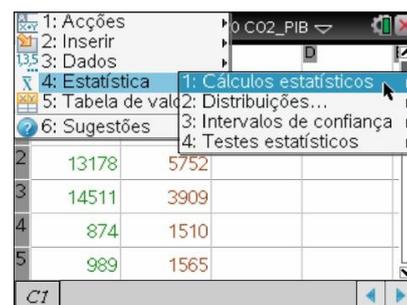
Para calcular a equação de uma qualquer regressão e os respetivos parâmetros, precisas que os dados estejam inseridos numa folha de cálculo. Volta por isso à página 4.1.

Regressão Linear

Prime  e seleciona **4:Estatística**, **1:Cálculos estatísticos** e **3:Regressão linear (mx+b)**.

Surgirá uma nova janela onde deverás indicar a variável independente e a variável dependente, em que função deverá ser guardada a expressão analítica da regressão e ainda, em que colunas da folha de cálculo devem ser inseridos os resultados da regressão.

Por defeito, a equação da regressão ficará guardada na primeira função vazia, neste caso em **f1**.

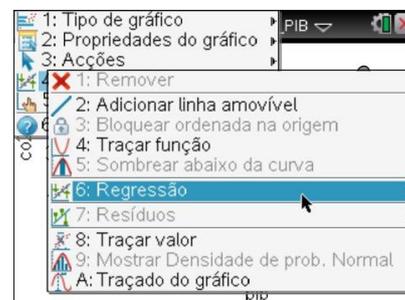


Como obter a representação gráfica da reta de regressão ?

A representação pretendida pode ser obtida em duas das aplicações da *TI-nspire*, na aplicação Gráficos e na aplicação Dados e Estatística. Vamos optar pela aplicação Dados e Estatística.

Voltando à página de Dados e Estatística, 4.2, prime (menu) e seleciona **4:Analisar**, **6:Regressão** e **1:Mostrar linear (mx+b)**.

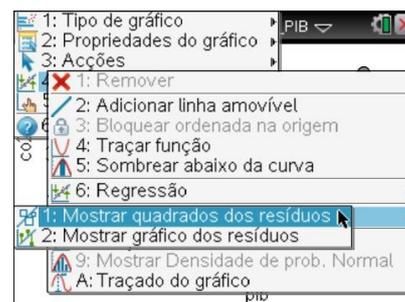
Surgirá a representação gráfica da regressão linear das variáveis PIB e CO₂, bem como a respetiva equação.



Como obter a representação gráfica dos quadrados dos resíduos ?

A partir do gráfico de dispersão observa se existe algum *outlier* (valor com grande resíduo). Para isso constrói, nesse mesmo gráfico, os quadrados dos resíduos, começando por clicar em (menu) e selecionando a opção **4:Analisar**, **7:Resíduos** e **1:Mostrar quadrados dos resíduos**.

Desta forma, visualizas, facilmente, se existem, ou não, *outliers* na distribuição em estudo.



Como estimar valores a partir da regressão ?

A partir do momento em que se calculou uma dada regressão e esta foi guardada como função, suponhamos em **f1**, pode-se fazer todos os cálculos possíveis com funções: cálculo de imagens ou objetos, extremos, zeros, ... Alguns destes cálculos podem ser feitos em várias das aplicações da *TI-nspire*, desde que no mesmo problema!

Por exemplo, na aplicação calculadora, basta escreveres, na linha de comando, **f1(1233+201)** e pressionares a tecla (enter), obtendo a estimativa para o valor total de emissões de CO₂ (em Mt), na Península Ibérica. Podem também utilizar-se as funcionalidades de uma página de Gráficos para obter valores de interesse, desde que a representação esteja feita numa página de Gráficos.



Nota:

PIB de Espanha(2006): 1233
milhares de milhões de \$USD

PIB de Portugal(2006): 201
milhares de milhões de \$USD

Emissões de CO₂(2006) na
Península Ibérica: 412 kt

II - O RAPA E A LEI DOS GRANDES NÚMEROS NA CX

Iremos simular uma experiência vulgar quando se inicia o estudo das probabilidades:

Lançar um rapa muitas vezes e verificar a frequência de saída de cada uma das faces : **Rapa, Tira, Põe e Deixa.**



Pretende-se gerar os resultados da experiência aleatória e obter um gráfico da frequência relativa da saída de cada face.

1. Abre um novo documento com uma página de Listas e Folha de Cálculo.

Na primeira coluna, que designamos por **d**, são gerados os números inteiros aleatórios entre um e quatro, a que associamos cada uma das faces do rapa. A instrução a escrever na linha das fórmulas, para a simulação de 300 lançamentos é:

seq(randint(1,4),x,1,300)

A	d	B
		=seq(randint(1,4),x,1,300)
1		4.
2		4.
3		1.
4		3.
5		2.
6		3.
7		1.
8		2.
9		4.
10		1.
11		4.
A		d:=seq{randint(1,4),x,1,300}

B	faces	C	fa	D	fr
					=fa/(300.)
1	r		60		0.2
2	t		87		0.29
3	d		75		0.25
4	p		78		0.26
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
C1		=countif(d,1)			

As colunas seguintes registam os valores de uma vulgar tabela de frequências absolutas e relativas.

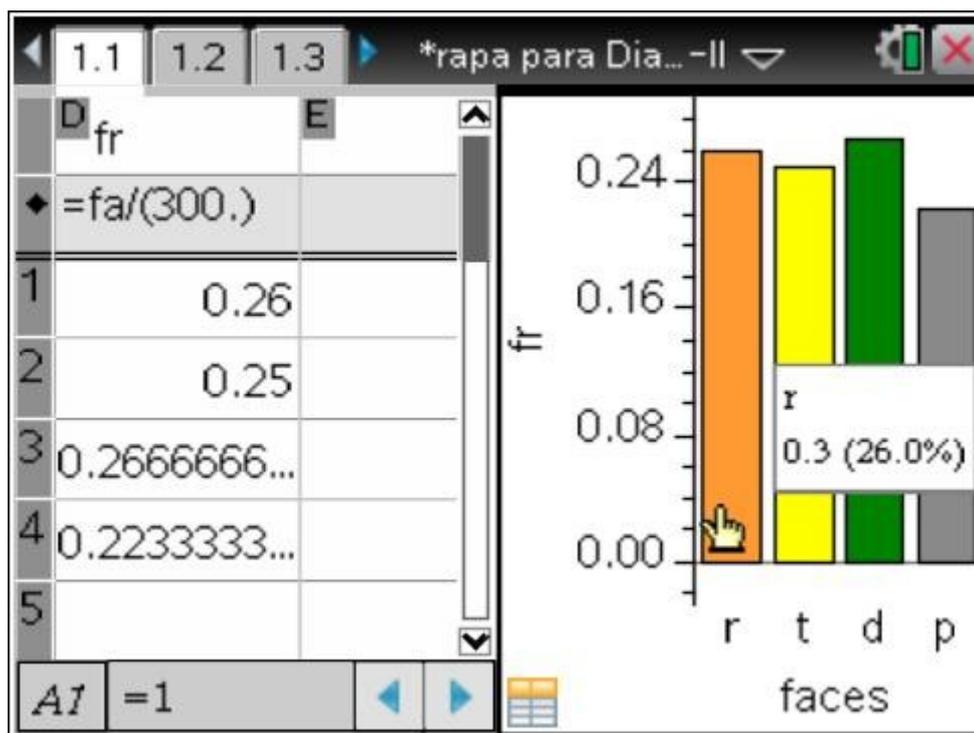
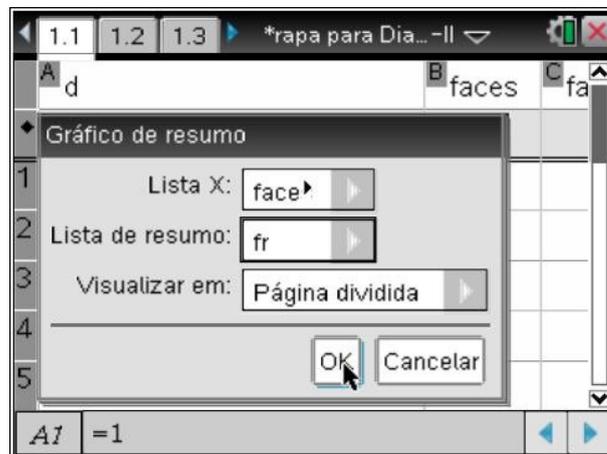
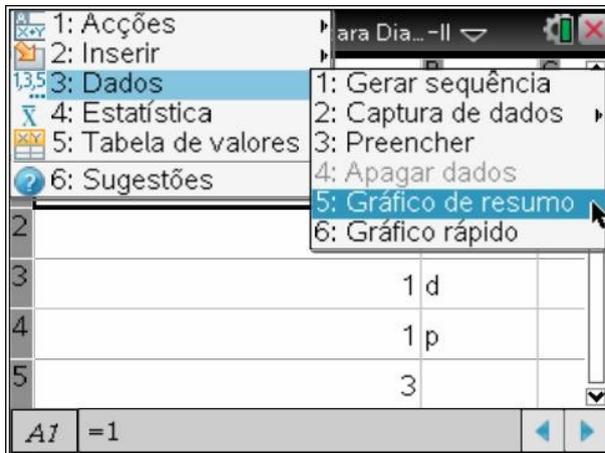
Na célula C1 contamos o número de vezes que saiu a face Rapa: **countif(d,1)**

De igual modo procedemos para as outras faces.

Para gerar uma nova simulação teclamos **ctrl R**

2. Constrói um gráfico de barras da frequência relativa da saída de cada face.

A partir da tecla  acede depois aos sucessivos menus.



III-MÉDIA E MEDIANA: DA PARTE PARA O TODO!!!

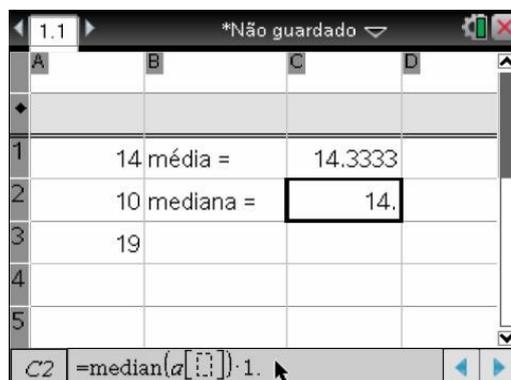
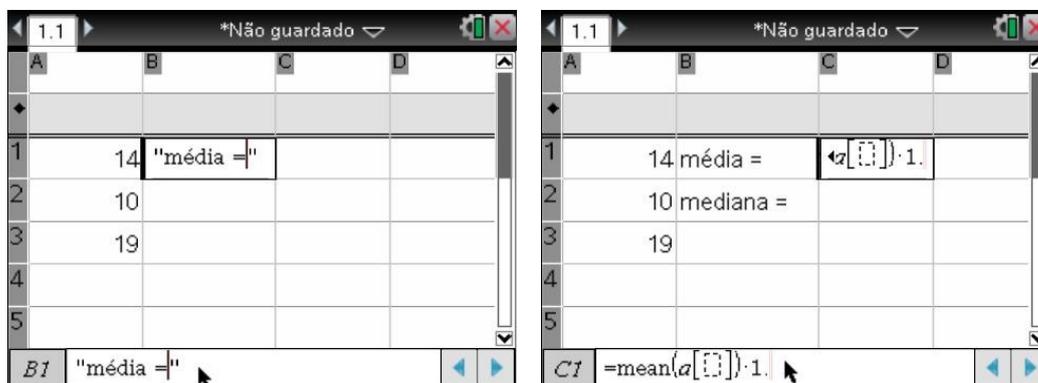
A média e a mediana são duas das medidas estatísticas mais conhecidas e utilizadas pelos nossos alunos. No entanto, a ênfase é normalmente dada ao cálculo das medidas em detrimento de um trabalho mais aprofundado ao nível da interpretação, das propriedades e do conhecimento da relação entre elas.

Esta tarefa consiste numa pequena investigação em torno da média e da mediana. O trabalho em grupo enriquecerá a natureza investigativa e reflexiva desta tarefa, pelo que todos os elementos do grupo terão uma participação importante e deverão ter em consideração as indicações que se seguem.

1. Abre um novo documento com uma página de *Listas e Folha de Cálculo* e coloca 3 dados quantitativos discretos (números naturais), diferentes dos apresentados nas figuras abaixo, tais que a sua média seja superior à sua mediana.

Não partilhes, para já, estes dados no grupo.

Nota: Embora a obtenção destas medidas, com 3 dados, seja simples, utiliza as funcionalidades que podes observar nas figuras abaixo como forma de automaticamente verificares se a condição é satisfeita.



2. Considera que todos os elementos do teu grupo têm um conjunto de 3 dados cuja média é superior à mediana.

Sem conheceres esses dados, podes afirmar que no conjunto de todos os dados do teu grupo a média continuará superior à mediana?

Nota: Nesta fase, cada elemento do grupo deve formular a sua resposta. Posteriormente, ainda sem partilhar os dados de cada um, devem discutir as respostas surgidas no grupo.

3. Na tua folha de cálculo e na coluna dos teus dados, acrescenta os dados dos restantes elementos do teu grupo.

Verifica se neste novo conjunto de dados a média se mantém superior à mediana.

	A	B	C	D
1	14	média =	122.167	
2	10	mediana =	89.5	
3	19			
4	320			
5	210			

4. Indica dois conjuntos de 3 dados discretos de modo que em cada um deles a média seja superior à mediana, mas no total dos 6 dados tal não acontece.

Nota: Utiliza as ferramentas da tua unidade portátil para fazeres experimentações, conforme figura ao lado. Observa que o exemplo da figura não satisfaz o solicitado.

	A	B	C	D	E
				média	mediana
1	14	320	cjto1:	14.3333	14
2	10	210	cjto2:	230.	210
3	19	160	Todos:	122.167	89.5
4					
5					

5. Considera agora 3 dados quantitativos discretos na forma:

$$n; n; n + 1 \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Investiga o que acontece relativamente à relação entre a média e a mediana quando se associam dois grupos de dados desta forma.

6. Continua...

IV-RESSALTOS DE UMA BOLA – Modelação com recolha de dados

Num jogo de basquetebol entre o Benfica e o FC Porto, um jogador larga a bola no momento em que o treinador pede um tempo de desconto. Um professor de ciências, que está a assistir ao jogo, fixa os olhos na bola que ressalta sucessivamente e observa que, em cada ressalto, esta sobe cada vez menos. Durante o movimento da bola, ocorrem transformações e transferências de energia. Como a energia total do sistema (bola) não se conserva, a bola não sobe até à altura de que caiu.

Vem-lhe, então, à cabeça um turbilhão de ideias para explorar o MOVIMENTO com os seus alunos e pensa nalgumas questões a colocar:

1. *Afinal, qual será o modelo matemático que melhor descreve o movimento desta bola?*
2. *Haverá alguma relação entre a altura da queda da bola e a altura do respetivo ressalto, no movimento? E entre a velocidade de aproximação da bola no instante do impacto no solo e da velocidade de afastamento?*
3. *Será que ocorrem transformações ou transferências de energia durante este movimento?*

Para percebermos melhor o fenómeno, vamos estudar o movimento fazendo uma experiência concreta, usando os instrumentos de recolha de dados: aplicação Dataquest da TI_Nspire e um sensor de movimento, que mede a posição da bola ao longo do tempo.

Materiais

- Unidade portátil TI-Nspire com SO 3.0
- Sensor de movimento ou CBR2
- Lab Cradle ou cabo com USB
- Bola de futebol, basquete ou outras

Recolha de dados

1. Ligar a unidade portátil no botão **ON** e em documentos escolher **1: NOVO**

a) Nas aplicações escolher **7: ADICIONAR VERNIER DATAQUEST**.

b) Deslocar o cursor até ao cimo do ecrã onde diz “**NÃO GUARDADO**”.

c) Selecionar **1:FICHEIRO** e de seguida **5: GUARDAR COMO**.

d) Selecionar a **PASTA** e escrever em **NOME DO FICHEIRO** o nome pretendido para a atividade experimental e clicar em **GUARDAR**.

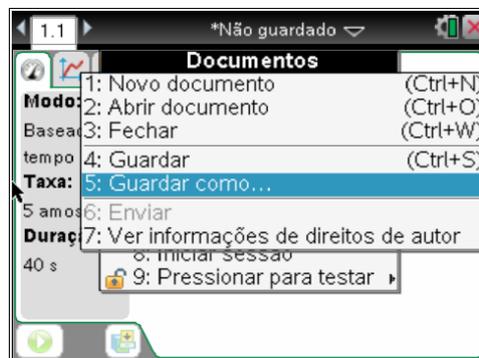
2- Configurar os parâmetros da recolha

a) Em **MENU**, seleccionar **1:EXPERIÊNCIA**.

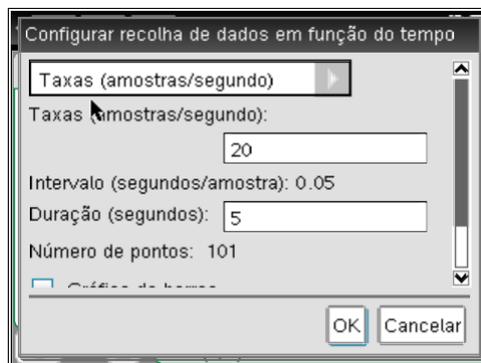
b) Selecionar **8: CONFIGURAÇÃO DE RECOLHA**.

c) Digitar em **TAXAS (AMOSTRAS/SEGUNDO)** 20 e em **DURAÇÃO(SEGUNDOS)** 5.

d) Pressionar em **OK**.



1



2

3 – Montagem experimental

- Ligar o CBR2 (ou sensor do movimento) à unidade portátil através dum cabo mini USB.
- Se ouvir um sinal sonoro intermitente no sensor este estará pronto a funcionar, caso contrário premir TRIGGER no CBR2.
- Posicionar o sensor (ou preso num suporte) de modo a que fique aproximadamente a **1,5 m** do solo e colocar a bola a cerca de **0,5 m** do mesmo.
- Colocar o cursor da máquina no ícone que aparece no canto inferior esquerdo e pressionar para iniciar a recolha. De imediato deixar cair a bola de maneira a que o seu movimento se processe por baixo do CBR. Recuar quando largar a bola.
- Os gráficos deverão ser como os da figura 2.

4- Como o gráfico mostra a posição da bola em relação ao sensor temos de realizar uma operação para mostrar a posição em relação ao solo.

- Em **(menu)**, seleccionar **4:ANALISAR** → **5: ESTATÍSTICA** → **1:BOLA VOLEI.POSIÇÃO** e ENTER e obter o valor máximo (ver figura 3).
- Em **(menu)**, seleccionar **2:DADOS** → **3:NOVA COLUNA CALCULADA**.
- Dar o nome à coluna, registar as unidades e na caixa EXPRESSÃO escrever o valor máximo obtido em *a)* menos a coluna Posição (ver figura 4) e pressionar **OK**.
- Proceder do mesmo modo, para termos o gráfico simétrico da velocidade (na caixa de expressão digitar $(-1)*\text{Velocidade}$).
- Os gráficos deverão ter agora o aspeto da figura 5. Para isso, posicionar cursor em cima da variável dependente, pressionar **(ctrl)(menu)** e seleccionar a nova coluna calculada.

Nota: Antes de realizar nova recolha de dados, não esquecer de guardar a atual (se interessar) pressionando o ícone da direita no canto inferior esquerdo.



1. Qual será o modelo matemático que melhor descreve o movimento desta bola?

Para escolher o modelo que melhor se ajusta à curva, pode optar-se pelo ajuste automático ou pelo manual, cujos processos se exemplificam em seguida:

1.1. Modelação – ajuste automático

Podemos analisar agora, qualquer zona do gráfico, correspondente a zona de movimento ascendente, descendente ou movimento de um ressalto na totalidade.

a) Para selecionar um zona do gráfico, posicionar o cursor na posição inicial desejada, pressionar **(ctrl)** e arrastar até à posição final. A zona selecionada fica de cor cinzenta (ver figura 1).

b) Em **(menu)**, selecionar **4: ANALISAR** → **6: AJUSTE DA CURVA** → escolher a variável e de seguida a função de ajuste (ver figura 2).

c) Na caixa de detalhes, são mostrados os valores dos parâmetros da regressão (ver figura 3). Podemos realizar múltiplas regressões (nos dois gráficos) e na caixa de detalhes são diferenciados como *Ajustar1*, *Ajustar2*, ..., em cores diferentes para cada gráfico.

1.2. Modelação – ajuste manual

a) Registrar as coordenadas do vértice da parábola a modelar. Para isso, posicionar o cursor no vértice e registrar os valores, visíveis na janela de detalhes.

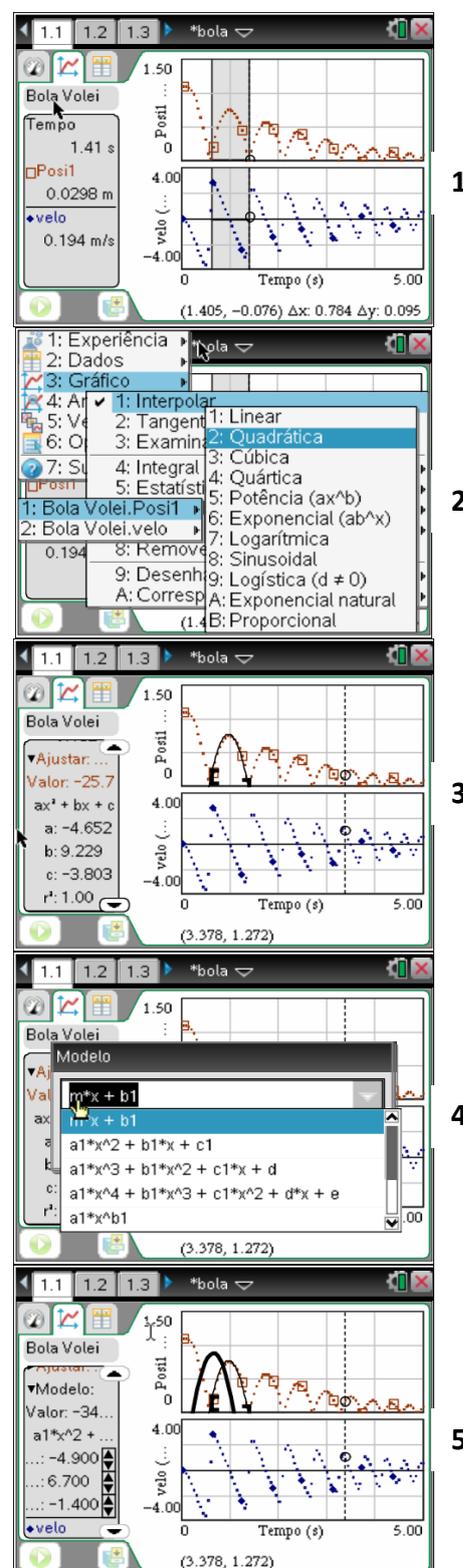
b) Em **(menu)**, selecionar **4: ANALISAR** → **7: MODELO** → escolher o gráfico e de seguida introduzir o modelo $a(x-b)^2+c$ (ver figura 4).

c) Introduzir os valores das coordenadas do vértice em **b** e **c**. Escolher um valor para o parâmetro **a** e pressionar **OK**. Na caixa de detalhes, são mostrados controlos de cursores para ajustar esses parâmetros (ver figura 5). Atribuir valores a **a**, de modo a encontrar uma parábola que se ajuste à parábola obtida na recolha de dados.

Nota: Poderemos realizar as regressões na aplicação Dados e Estatística, pois o DataQuest cria variáveis lista, relativas às colunas de dados.

1.3. Questões:

1. Qual o significado físico do parâmetro **a**?
2. Que relações existem entre os gráficos de posição e de velocidade?



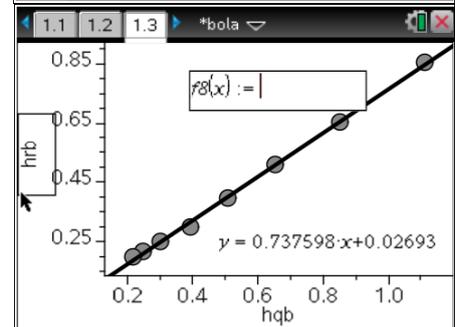
2. Haverá alguma relação entre a altura da queda da bola e a altura do respetivo ressalto, no movimento? E entre a velocidade de aproximação da bola no instante do impacto no solo e da velocidade de afastamento?

Descrevem-se em seguida alguns procedimentos para recolha das alturas e das velocidades, que permitam a análise pretendida:

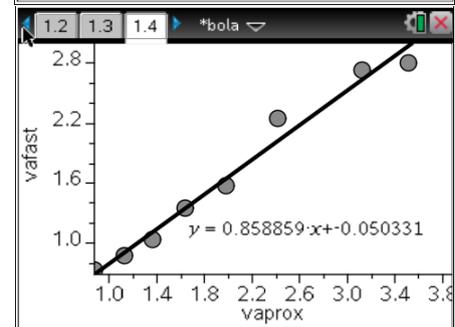
- a) Registrar os valores dos máximos de cada uma das parábolas. Para isso, deslocar o cursor para o máximo da primeira parábola. Registrar a altura da bola correspondente a esse ponto. Repetir o processo para os máximos das outras parábolas.
- b) Registrar os valores das velocidades da bola imediatamente antes de colidir com o solo ($v_{aproximação}$) e imediatamente após ($v_{afastamento}$). Para isso, no gráfico de velocidade, deslocar convenientemente o cursor e registrar o valor da velocidade de aproximação (o máximo da velocidade no sentido negativo) e da velocidade de afastamento (o máximo da velocidade no sentido positivo do ressalto seguinte).
- c) Abrir uma aplicação Listas e Folha de Cálculo e introduzir os valores registados nas alíneas anteriores: (1) da altura do queda, h_Q , e da altura do ressalto, h_R e (2) da $v_{aproximação}$, v_{aprox} , e da $v_{afastamento}$, v_{afast} , (na figura 1, pág. 4, estão as 4 listas da experiência efetuada).
- d) Divida cada altura do ressalto pela respetiva altura da queda. O que verifica?
- e) Divida cada valor da $v_{afastamento}$ pelo valor respetivo da $v_{aproximação}$. O que verifica?
- f) Abra uma aplicação Dados e Estatística. Construa os gráficos da $h_{ressalto}$, em função da h_{queda} e da $v_{afastamento}$ em função da $v_{aproximação}$
- g) Em (menu), seleccionar **4:ANALISAR** → **6: REGRESSÃO** e escolher as curvas de ajuste.
- h) Que relação parece existir entre os dois declives **m** e **e** das retas de ajuste?

	A hq	B hr	C vprox	D vafast
1	1.106	0.775	3.51	2.8
2	0.775	0.582	3.13	2.73
3	0.582	0.437	2.41	2.25
4	0.437	0.332	1.98	1.58
5	0.332	0.254	1.64	1.35

1



2



3

Nota

Durante o movimento da bola, ocorrem transformações e transferências de energia. Como a energia total do sistema (bola) não se conserva, a bola não sobe até à altura de que caiu. Se a bola fosse idealmente elástica, subiria até à altura da queda. Se não tivesse nenhuma elasticidade, não subiria. A dissipação de energia (e a elasticidade) pode estimar-se quando se relaciona com o valor do coeficiente de restituição, que é definido por:

$$e = \frac{V_{afast.}}{V_{aprox}}$$

onde $V_{afast.}$ é a velocidade de afastamento e $V_{aprox.}$ a velocidade de aproximação (na colisão com o solo). O valores de **e** estão compreendidos entre **0** (quando a bola não sobe, $V_{afast.} = 0$ m/s) e **1** (quando a bola atinge a altura da queda, $V_{afast.} = V_{aprox.}$).