

MODELOS MATEMÁTICOS NAS ELEIÇÕES E NA PARTILHA



FORMADORA:

DOLCÍNIA ALMEIDA

Informações:

- Escreva na janela do Zoom o seu nome próprio e apelido.
- Sendo um webinar, o som estará desligado e a sua intervenção deverá ser via chat.
- A presença é registada automaticamente na plataforma zoom.

Aprendizagens Essenciais Matemática – 10º Ano

	Tema	Tópicos e Subtópicos
Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS)	MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA	Modelos matemáticos nas eleições: <ul style="list-style-type: none"> - Maioria simples; - Maioria Absoluta; - Método de Borda Modelos Matemáticos na Partilha: <ul style="list-style-type: none"> - Partilha nos casos discreto (Método de Hondt e ST. <u>Lague</u>) e contínuo.
Matemática A (<u>Mat A</u>) Matemática B (<u>Mat B</u>) Matemática (Cursos Profissionais)		Modelos matemáticos nas eleições: <ul style="list-style-type: none"> - Maioria simples; - Maioria Absoluta; - Método de Borda Modelos Matemáticos na Partilha: <ul style="list-style-type: none"> - Método de Hondt - Método de St. <u>Lague</u> Modelos matemáticos em finanças: <ul style="list-style-type: none"> - Matemática nos salários - Matemática na poupança e no crédito

Maioria Absoluta

Tarefa 1

Elabore um programa em **Python** que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos.

Verifique ainda, se algum dos candidatos obteve a maioria absoluta.

A **Maioria Absoluta** é garantida quando um candidato vence com pelo menos metade dos votos mais um.

1º) Objetivo do programa – Determinar o n.º de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

2º) Etapas da construção do programa:

- Indicar qual o número de votos de cada um dos 3 candidatos

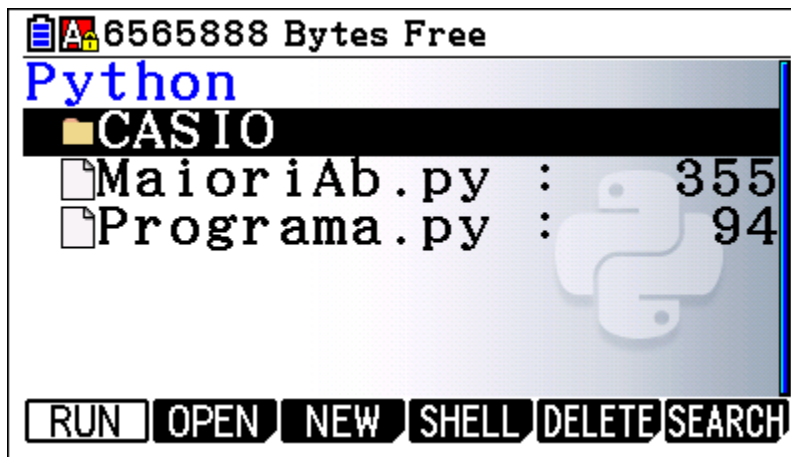
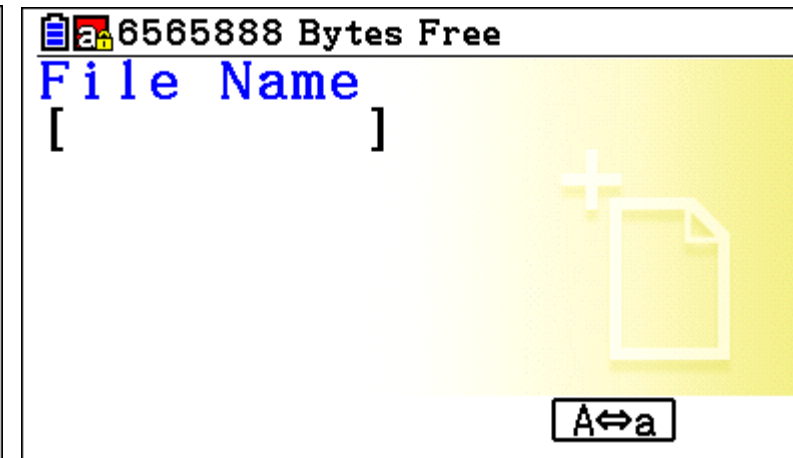
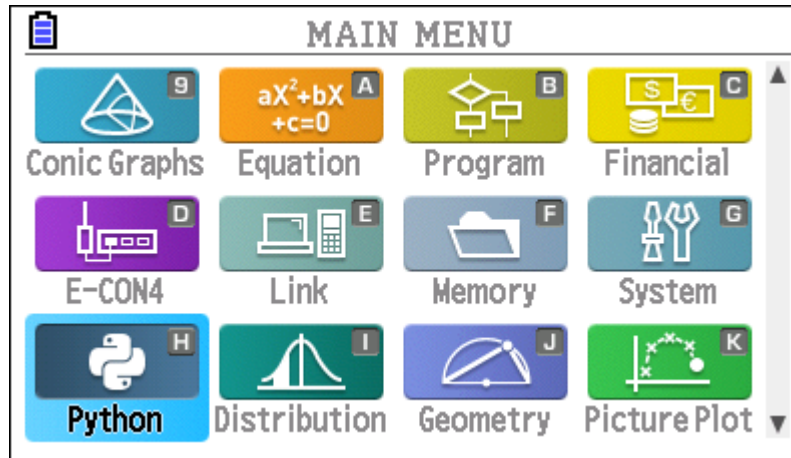
(O programa pede ao utilizador para introduzir o número de votos de A, B e C)

- Conhecer a fórmula a aplicar;

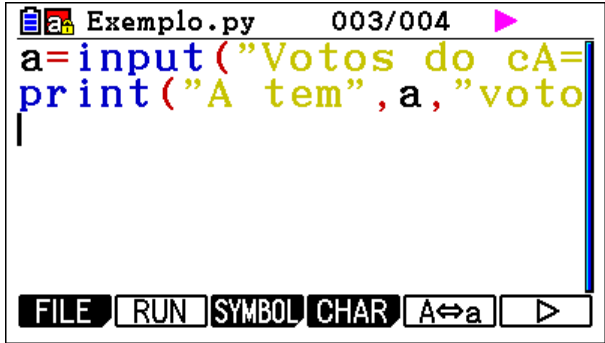
- Aplicar a fórmula;

- Mostrar os resultados

Programação em Python:



Algumas Noções Básicas:

Print("...")	Serve para introduzir mensagens de texto no ecrã que devem estar entre aspas
Input("...")	Serve para dar entrada de dados.
Exemplo: Usar o print e o input	<p>O programa pede ao utilizador para introduzir o n.º de votos do candidato A.</p> <p>Depois é apresentada a resposta "A tem a votos."</p>  <pre>Exemplo.py 003/004 ▶ a=input("Votos do cA= print("A tem",a,"voto FILE RUN SYMBOL CHAR A↔a ▶</pre>

3º) Programação em Python:

Linha	Em Linguagem Corrente	Em Python
1	Pedir o número de votos do candidato A e atribuir à variável "a" que é do tipo inteiro	<code>a = int(input('a ='))</code>
2	Pedir o número de votos do candidato B e atribuir à variável "b" que é do tipo inteiro	<code>b = int(input('b ='))</code>
3	Pedir o número de votos do candidato C e atribuir à variável "c" que é do tipo inteiro	<code>c = int(input('c ='))</code>
4	Escrever a fórmula	<code>ma = int((a + b + c)/2) + 1</code>
5	Mostrar a variável "ma", ou seja, <u>Pedir</u> o resultado que garante a maioria absoluta	<code>print ("ma =", ma)</code>
6		
7	Se "ma" \leq a	<code>if ma <= a:</code>
8	Responder que "O candidato A obteve <u>m.a.</u> com "a" votos"	<code>print ("O candidato A obteve <u>m.a.</u> com", a, "votos.")</code>
9	Ou se "ma" \leq b	<code>elif ma <= b:</code>
10	Responder que "O candidato B obteve <u>m.a.</u> com "b" votos"	<code>print ("O candidato B obteve <u>m.a.</u> com", b, "votos.")</code>
11	Ou se "ma" \leq c	<code>elif ma <= c:</code>
12	Responder que "O candidato C obteve <u>m.a.</u> com "c" votos"	<code>print ("O candidato C obteve <u>m.a.</u> com", c, "votos.")</code>
13	Senão	<code>else:</code>
14	Responder "Nenhum candidato com <u>m.a.</u> "	<code>print ("Nenhum candidato com <u>m.a.</u>")</code>

```
MaioriAb.py 001/016 ▶
a=int(input("a="))
b=int(input("b="))
c=int(input("c="))
ma=int((a+b+c)/2)+1
print('ma=',ma)

if ma<=a:
```

```
MaioriAb.py 013/016 ▶
if ma<=a:
    print("O candidato")
elif ma<=b:
    print("O candidato")
elif ma<=c:
    print("O candidato")
else:
```

```
MaioriAb.py 008/016 ◀◀
| obteve m.a. com",a,
  obteve m.a. com",b,"
  obteve m.a. com", c,
```

```
MaioriAb.py 008/016 ◀◀
a. com",a, "votos.")|
a. com",b,"votos.")
a. com", c, "votos.")
```

```
MaioriAb.py 015/016 ▶
elif ma<=b:
    print("O candidato")
elif ma<=c:
    print("O candidato")
else:
    print("Nenhum candi
```

```
MaioriAb.py 014/016 ◀◀
idato B obteve m.a. c
idato C obteve m.a. c
| candidato com m.a.)
```


Exemplo de aplicação:

Considere os resultados de uma eleição entre os candidatos A, B e C.

Candidato	A	B	C
N.º de Votos	13	16	15

Determinar o número de votos que garante a maioria absoluta
e verifique se existirá vencedor.



RUN

```
>>>from MaioriAb impo
a=13
b=16
c=15
ma= 23
Nenhum candidato com
>>>
```

RUN A↔a CHAR

Método de Hondt e de Sainte-Lague

Tarefa 2

Na Nova Zelândia, o método aplicado para a conversão de votos em mandatos é o **Método de Sainte-Lague**. Na tabela estão indicados os números de votos obtidos pelas listas de quatro partidos mais votados na eleição dos representantes de um estado neozelandês.

Partidos	A	B	C	D
N.º de Votos	23 023	13 245	12 345	2 564

Na eleição, são atribuídos 10 mandatos, correspondentes ao círculo eleitoral desse estado neozelandês. Verifique que, “Em comparação com o **método de Hondt**, o Método de **Sainte-Lague** possibilita a representação dos partidos menos votados”.

Adaptado do Manual Areal Editora, MACS _ 10º Ano

Victor D'Hondt



Hondt (1841-1901)

Foi jurista e professor de direito civil de nacionalidade Belga

Método de representação proporcional utilizado na atribuição dos lugares na Assembleia da República em **Portugal**. É também implementado em **Espanha, Holanda, Israel e Argentina**.

André Sainte-Lague



Sainte-Lague (1882-1950)

Foi um matemático francês pioneiro na área da teoria dos grafos e dos métodos de representação proporcional

Método usado na **Nova-Zelândia, Bósnia-Herzegovina, Lituânia, Kosovo e em alguns estados da Alemanha**. Na Noruega e na Suécia é usada uma variante deste método, **Método de Sainte Lague Modificado**, em que o primeiro divisor é **1,4** em vez de 1.

Procedimentos do Método de Hondt

1º Passo	Dividem-se os votos de cada lista sucessivamente por 1, 2, 3, 4, <u>5,....</u> , p (p representa o número de pessoas a eleger ou mandatos a atribuir, podendo não ser necessário dividir até p).
2º Passo	Ordenam-se os quocientes obtidos por ordem decrescente.
3º Passo	Determinam-se o número de pessoas a eleger de cada lista, seleccionando os p maiores quocientes resultantes.

Procedimentos do Método de Sainte Lague

1º Passo	Dividem-se os votos de cada lista sucessivamente por 1, 3, 5, 7, <u>9,....</u> , $2p - 1$ ($2p - 1$, representa o número de pessoas a eleger ou mandatos a atribuir, podendo não ser necessário dividir até $2p - 1$).
2º Passo	Ordenam-se os quocientes obtidos por ordem decrescente.
3º Passo	Determinam-se o número de pessoas a eleger de cada lista, selecionando os maiores quocientes resultantes.

- O objetivo da aplicação destes métodos é converter votos em mandatos.

Método de Hondt

1º) Processo:

- Na Lista 1 indicar os divisores para o método de Hondt e nas 4 listas seguintes dividir o número de votos de cada uma das listas pelos valores da lista 1.
- Com o cursor sobre a **Lista 2**, escrever a fórmula **23 023 : List 1** e assim sucessivamente

List 3 = 13245 : List 1

List 4 = 12345 : List 1 ;

List 5 = 2564 : List 1

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1			
2	2			
3	3			
4	4			
23023÷List 1				

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	23023	13245	12345	2564
2	7674.3	4415	4115	854.66
3	4604.6	2649	2469	512.8
4	3289	1892.1	1763.5	366.28
2564.				
TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ▶				

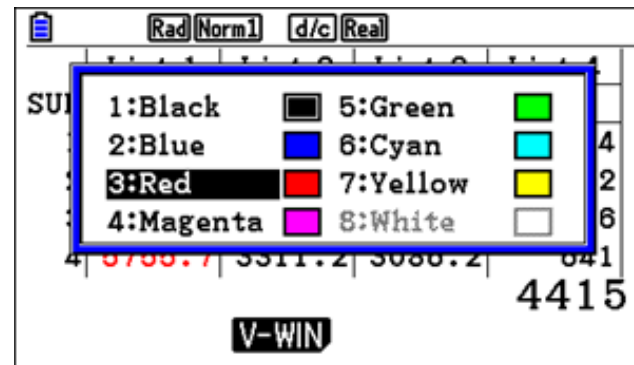
2º) Processo:

- No menu *Estatística* (**MENU** **2**), escreva os nomes das listas (A, B, C, D, E e F) na linha SUB.

Na 1ª linha insira o número de votos de cada candidato/partido.

- A seguir, coloque o cursor sobre «List 1», e escreva «Seq($\frac{23023}{x}$, x , 1,6,1)», usando as teclas **OPTN**, **F1**(LIST), **F5**(Seq).
- Proceda de modo análogo para as restantes colunas, alterando o número de votos.

- Para destacar os valores pretendidos, posicionar sobre a célula a colorir e usar a cor fazendo, não em simultâneo, primeiro tecla SHIFT e de seguida tecla 5, FORMAT.



	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	12345	2564
2	11511	6622.5	6172.5	1282
3	7674.3	4415	4115	854.66
4	5755.7	3311.2	3086.2	641
				4415

List [Lst→Mat] Dim Fill(Seq [▶]

Método de Sainte-Lague

1º) Processo:

- Na Lista 1 indicar os divisores para o método de Sainte-Lague e nas 4 listas seguintes dividir o número de votos de cada uma das listas pelos valores da lista 1.
- Com o cursor sobre a **Lista 2**, escrever a fórmula **23 023 : List 1**. e assim sucessivamente

List 3 = 13245 : List 1

List 4 = 12345 : List 1 ;

List 5 = 2564 : List 1

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1			
2	3			
3	5			
4	7			
23023 ÷ List 1				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1	23023		
2	3	7674.3		
3	5	4604.6		
4	7	3289		
13245 ÷ List 1				

Método de Sainte-Lague

1º Processo (Continuação):

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1	23023	13245	
2	3	7674.3	4415	
3	5	4604.6	2649	
4	7	3289	1892.1	

12345÷List 1

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1	23023	13245	12345
2	3	7674.3	4415	4115
3	5	4604.6	2649	2469
4	7	3289	1892.1	1763.5

12345.

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ►

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	23023	13245	12345	
2	7674.3	4415	4115	
3	4604.6	2649	2469	
4	3289	1892.1	1763.5	

2564÷List 1

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	23023	13245	12345	2564
2	7674.3	4415	4115	854.66
3	4604.6	2649	2469	512.8
4	3289	1892.1	1763.5	366.28

2564.

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ►

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
3	5	4604.6	2649	2469
4	7	3289	1892.1	1763.5
5	9	2558.1		
6				

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ►

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	23023	13245	12345	2564
2	7674.3	4415	4115	854.66
3	4604.6	2649	2469	512.8
4	3289	1892.1	1763.5	366.28

2564.

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ►

Método de Sainte-Lague

2º) Processo :

- No menu *Estatística* (**MENU** **2**), escreva os nomes das listas (A, B, C e D) na linha SUB.

Na 1ª linha insira o número de votos de cada candidato/partido.

- A seguir, coloque o cursor sobre «List 1», e escreva « $\text{Seq}\left(\frac{23023}{x}, x, 1, 9, 2\right)$ », usando as teclas **OPTN**, **F1** (LIST), **F5** (Seq).
- Proceda de modo análogo para as restantes colunas, alterando o número de votos.

		Deg	Fix0	d/c	Real
		List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D	
1	0	0	0	0	
2					
3					
4					
TOOL		EDIT	DELETE	DEL-ALL	INSERT

		Deg	Fix0	d/c	Real
		List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D	
1	0	0	0	0	
2					
3					
4					
Seq		(23023÷x, x, 1, 9, 2)			
List		Lst→Mat	Dim	Fill(Seq

		Deg	Fix0	d/c	Real
		List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D	
1	23023	0	0	0	
2	7674.3				
3	4604.6				
4	3289				
TOOL		EDIT	DELETE	DEL-ALL	INSERT

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	0	0	0
2	7674.3			
3	4604.6			
4	3289			
Seq(13245÷x,x,1,9,2)				
List Lst→Mat Dim Fill(Seq ►				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	0	0
2	7674.3	4415		
3	4604.6	2649		
4	3289	1892.1		
13245.				
TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ►				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	0	0
2	7674.3	4415		
3	4604.6	2649		
4	3289	1892.1		
Seq(12345÷x,x,1,9,2)				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	12345	0
2	7674.3	4415	4115	
3	4604.6	2649	2469	
4	3289	1892.1	1763.5	
12345.				
List Lst→Mat Dim Fill(Seq ►				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	12345	0
2	7674.3	4415	4115	
3	4604.6	2649	2469	
4	3289	1892.1	1763.5	
Seq(2564÷x,x,1,9,2)				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	12345	2564
2	7674.3	4415	4115	854.66
3	4604.6	2649	2469	512.8
4	3289	1892.1	1763.5	366.28
2564.				
List Lst→Mat Dim Fill(Seq ►				

<div> <div></div> <div>Rad Norm1 d/c Real</div> </div>				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	12345	2564
2	11511	6622.5	6172.5	1282
3	7674.3	4415	4115	854.66
4	5755.7	3311.2	3086.2	641
				4415
<div> <div>List</div> <div>Lst→Mat</div> <div>Dim</div> <div>Fill(</div> <div>Seq</div> <div></div> </div>				

<div> <div></div> <div>Deg Fix0 d/c Real</div> </div>				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	A	B	C	D
1	23023	13245	12345	2564
2	7674.3	4415	4115	854.66
3	4604.6	2649	2469	512.8
4	3289	1892.1	1763.5	366.28
				2564.
<div> <div>List</div> <div>Lst→Mat</div> <div>Dim</div> <div>Fill(</div> <div>Seq</div> <div></div> </div>				

Listas	Nº de Votos	Nº de Mandatos	
		Método de Hondt	Método de Sainte-Lague
A	23023	5	4
B	13245	3	3
C	12345	2	2
D	2564	0	1
Total		10	10

<u>Método de Hondt</u>				
<u>Partidos</u>	A	B	C	D
<u>Nº de votos</u> <u>Divisor</u>	23 023	13 245	12 345	2 564
1	23 023	13 245	12 345	2 564
2	11512	6623	6173	1282
3	7674	4415	4115	
4	5756	3311		
5	4605			
6	3837			

<u>Método de Sainte-Lague</u>				
<u>Listas</u>	A	B	C	D
<u>Nº de Votos</u> <u>Divisor</u>	23 023	13 245	12 345	2 564
1	23 023	13 245	12 345	2 564
3	7674	4415	4115	855
5	4605	2649	2469	
7	3289	1892		
9	2558			

	A	B	C	D
Mét. Hondt	5	3	2	–
Mét. S. Laguë	4	3	2	1

Método de Borda

Tarefa 3

Num conjunto de cinco Webinars de temáticas diferentes (W1, W2, W3, W4 e W5) foi proposto aos professores interessados em participar, selecionarem os mesmos por ordem de preferência.

Depois da contagem, os resultados obtidos foram os seguintes:

N.º de Votos	135	90	75	30	18	150
1.º	W 1	W 2	W 4	W 5	W 5	W 3
2.º	W 4	W 5	W 3	W 2	W 3	W 2
3.º	W 5	W 4	W 5	W 4	W 4	W 5
4.º	W 3	W 3	W 2	W 3	W 1	W 4
5.º	W 2	W 1	W 1	W 1	W 2	W 1

Indique o webinar com maior pontuação utilizando o **Método de Borda**.

Jean-Charles de Borda (1733-1799) - matemático francês que desenvolveu um método que, em vez do sistema de “uma pessoa, um voto”, dava a possibilidade ao eleitor de atribuir uma pontuação a cada candidato consoante a sua preferência.



Para além de matemático e físico, foi um engenheiro militar, oficial naval, que se distinguiu no campo da hidrodinâmica, no estudo dos movimentos oscilatórios e dos pêndulos e no aperfeiçoamento de instrumentos e métodos de navegação astronómica.

Método de Borda

1º Passo	São atribuídos pontos a cada um dos candidatos, conforme a sua ordem de preferência. No caso de serem n candidatos, são atribuídos n pontos ao primeiro, n-1 pontos ao segundo, e assim sucessivamente até ao último, que recebe 1 ponto.
2º Passo	Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos.
3º Passo	Ordenam-se os candidatos de acordo com a pontuação e vence aquele que obtiver o maior número de pontos.

N.º de Votos	135	90	75	30	18	150
1.º	W 1	W 2	W 4	W 5	W 5	W 3
2.º	W 4	W 5	W 3	W 2	W 3	W 2
3.º	W 5	W 4	W 5	W 4	W 4	W 5
4.º	W 3	W 3	W 2	W 3	W 1	W 4
5.º	W 2	W 1	W 1	W 1	W 2	W 1

W 1: $5 \times 135 + 1 \times (90 + 75 + 30 + 150) + 2 \times 18 = 1056$

W 2: $1 \times (135 + 18) + 5 \times 90 + 2 \times 75 + 4 \times (30 + 150) = 1473$

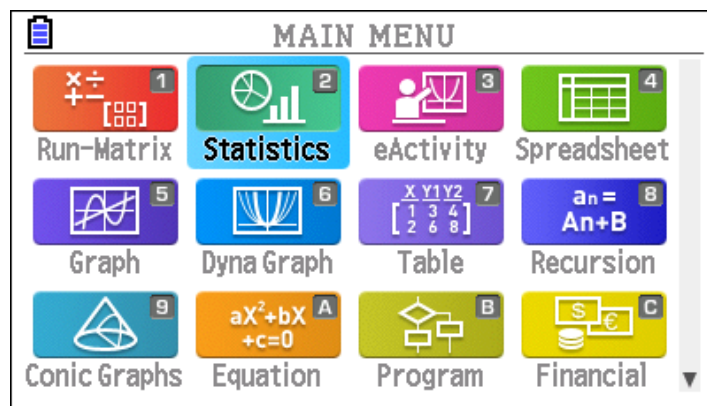
W 3: $2 \times (135 + 90 + 30) + 4 \times (75 + 18) + 5 \times 150 = 1632$

W 4: $4 \times 135 + 3 \times (90 + 30 + 18) + 5 \times 75 + 2 \times 150 = 1629$

W 5: $3 \times (135 + 75 + 150) + 4 \times 90 + 5 \times (30 + 18) = 1680$

Método de Borda

Entrar No MENU , Statistics



	Deg	Fix0	d/c	Real
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB		W1	W2	W3
1	5	135	90	150
2	4	0	180	93
3	3	0	0	0
4	2	18	75	255
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

	Deg	Fix0	d/c	Real
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB		W1	W2	W3
3	3	0	0	0
4	2	18	75	255
5	1	345	153	0
6		1056	1473	1632
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

	Deg	Fix0	d/c	Real
	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	W4	W5		
1	75	48		
2	135	90		
3	138	360		
4	150	0		
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

Para obter o total de cada uma das listas (2 à 6) no final de cada uma das listas (ultima célula de cada lista) e proceder sucessivamente,

[OPTN] [F1] [F6] [F6] [F1] [(] [SHIFT] [1] [1] [X] [SHIFT] [1] [2] [)] [EXE]

Nota – A linha de instruções anterior, permite escrever a fórmula

Sum (List 1 x List 6) que dá a pontuação total,

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	W1	W2	W3	
3	3	0	0	0
4	2	18	75	255
5	1	345	153	0
6		1056	1473	1632
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	W4	W5		
4	150	0		
5	0	0		
6	1629	1680		
7				
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

O Webinar 5 obteve a maior pontuação, igual a 1680 pontos.

Notas importantes para discutir e refletir em sala de aula:

O Webinar 5 obteve a maior pontuação, igual a 1680 pontos pelo método de Borda.

No entanto, podemos concluir que o método de Borda conduz-nos de facto a **situações paradoxais**, uma vez que se aplicarmos o método da pluralidade dos sistemas preferenciais, que consiste em analisar a pontuação obtida das primeiras preferências, o Webinar 5 apenas tem 48 pontos, correspondendo à menor pontuação de todos os restantes Webinares.

O Webinar 3 seria o vencedor pois teria 150 pontos, a maior pontuação, seguida do Webinar 1 com 135 pontos.

