Nome______________________________ Número____ Turma ___

Trabalho de Projeto

Modelação e Interpolação de Curvas Reais com Polinómios e Splines

Este trabalho permite compreender como a matemática é utilizada para modelar formas e fenómenos reais, unindo rigor analítico e aplicações tecnológicas.
Através da CG-50 e dos métodos de interpolação trabalhados, pretende-se que os alunos desenvolvam competências de investigação, experimentação e análise crítica, essenciais na Matemática e em áreas como engenharia, design ou ciências da computação.

Fases do Trabalho de Projeto

1. QUESTÃO

Pergunta central:

Como podemos representar matematicamente uma curva que passa por pontos conhecidos de forma suave e contínua, e qual o método mais adequado — regressão, polinómios interpoladores e splines?

Questões secundárias:

- O que significa *interpolar*? Qual a diferença entre interpolação e regressão?
- Porque é importante "ligar pontos" de forma suave em contextos reais (gráficos, engenharia, design)?
- Quais as vantagens e limitações de cada método?

2. PLANO

Organização do trabalho:

- **Grupos:** 3 a 5 alunos.
- **Duração total:** 5 aulas
- **Produto final:** relatório escrito + apresentação (oral ou vídeo).

Cronograma (sugestão):

Aula	Etapas principais	Produtos esperados
1	Definição do problema e recolha de dados (pontos)	Questão e plano de trabalho
2 e 3	Construção do polinómio interpolador	Tabelas, código Python, gráficos
4	Estudo de *splines*	Comparação de métodos
5	Revisão, conclusões e apresentação	Relatório e exposição

3. PESQUISA

Fontes primárias:

- Dados experimentais ou coordenadas recolhidas de uma forma real (temperaturas, perfil de montanha, estrada, asa, etc.).

Conhecimentos a consolidar:

- Conceitos de interpolação;
- Fórmula de Lagrange e método de Newton.
- Conceito e estrutura de *splines* cúbicas.

4. Produção

- Escolher entre **5 e 8 pontos** representativos de um fenómeno ou forma real;
- Regressão;
- Polinómio Interpolador (Método de Newton ou Lagrange);
- *Splines* Cúbicas;
- Comparação dos Métodos.

5. Revisão

- Rever e validar os cálculos realizados;
- Confirmar a coerência entre os dados e os resultados obtidos;
- Corrigir eventuais erros de interpolação ou interpretação;
- Melhorar a clareza e a apresentação do relatório;
- Solicitar **feedback ao professor** antes da entrega final.

6. Apresentação

Formas de apresentação

- **Relatório escrito** (6 a 10 páginas) com:
  - Introdução e objetivos.
  - Metodologia (etapas do trabalho).
  - Resultados e análise comparativa.
  - Conclusões e recomendações.
  - Anexos (programas e tabelas).
- **Apresentação oral ou vídeo** (3 a 5 minutos):
  - Demonstração dos cálculos e gráficos realizados através da tecnologia utilizada..
- **Poster ou cartaz** (A3 ou digital):
  - Comparação visual entre regressão, polinómio interpolador ou *Splines*.

7. Avaliação

Critérios de avaliação

Domínio	Aspetos a avaliar	Peso (%)
Conhecimento matemático	Correção dos conceitos e aplicação das fórmulas.	**30%**
Aplicação prática	Adequação dos dados e interpretação dos resultados.	**20%**
Tecnologia e pensamento computacional	Implementação correta e eficaz dos programas.	**15%**
Reflexão crítica	Comparação entre métodos e análise dos erros.	**20%**
Comunicação e apresentação	Clareza, criatividade e qualidade visual.	**15%**

Trabalho de Projeto - Proposta 1

Modelação e Interpolação de Curvas Reais com Polinómios e Splines.

1. O que é o polinómio interpolador de Newton

Dado um conjunto de pontos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, existe **um e só um** polinómio $p(x)$ de grau ≤ n que passa por todos esses pontos.
A forma de Newton desse polinómio utiliza as chamadas *diferenças divididas* para calcular os coeficientes, e permite escrever o polinómio como:

$$p(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Aqui $a_0 = y_0$ e os a_k são as diferenças divididas de ordem k definidas a partir dos dados.
Vantagens desta forma: se mais tarde se acrescentar um novo ponto (x_{n+1}, y_{n+1}), pode-se obter o polinómio de grau n+1 apenas acrescentando um termo à expressão, sem ter de recomputar tudo.

2. Como se obtêm os coeficientes (diferenças divididas)

De modo simplificado:

- $a_0 = y_0$.
- $a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.
- $a_2 = \dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$.
- E assim por diante para ordens superiores.
  Esta definição permite construir os a_k de forma recursiva.
  Depois introduzem-se no polinómio de Newton a forma geral acima.

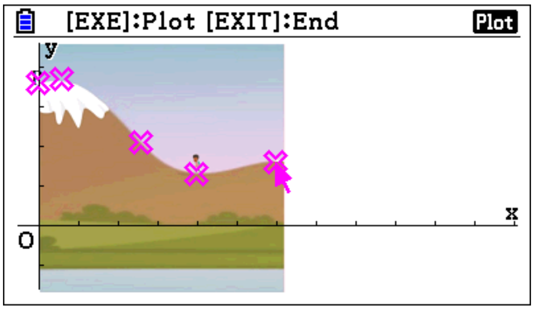
- **Modelação do Perfil de uma Montanha – Regressão, Polinómios Interpoladores e Splines;**

O contorno de uma montanha (perfil) pode ser representado através de pontos obtidos de um mapa topográfico, de uma fotografia ou de medições reais.

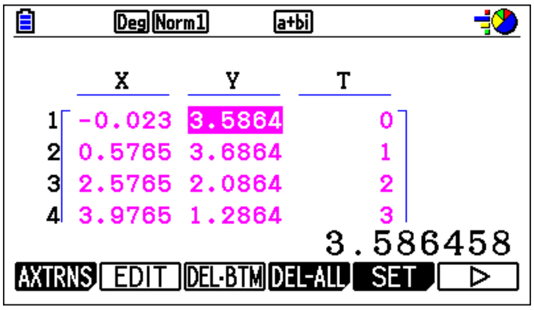
Fases:

Escolha da montanha e recolha dos pontos	Imagem / tabela de coordenadas
Construção do polinómio interpolador	Spreadsheet CG-50
Representação	Comparação gráfica

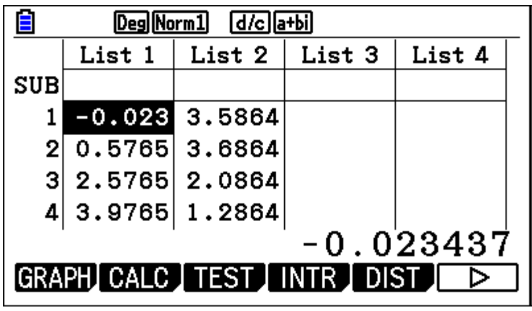
Representar no MENU Picture plot e obter cinco postos

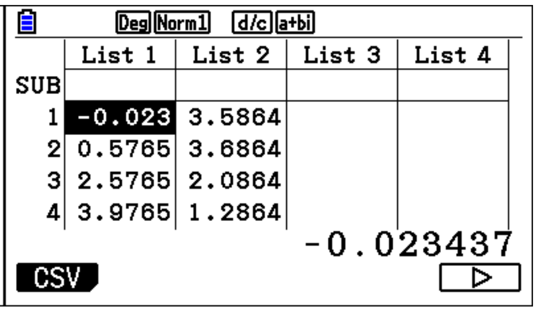


Guardar na lista 1e na lista 2, os valores de X (abcissa, distância na horizontal e Y (ordenada, distância na vertical, altitude), respetivamente.

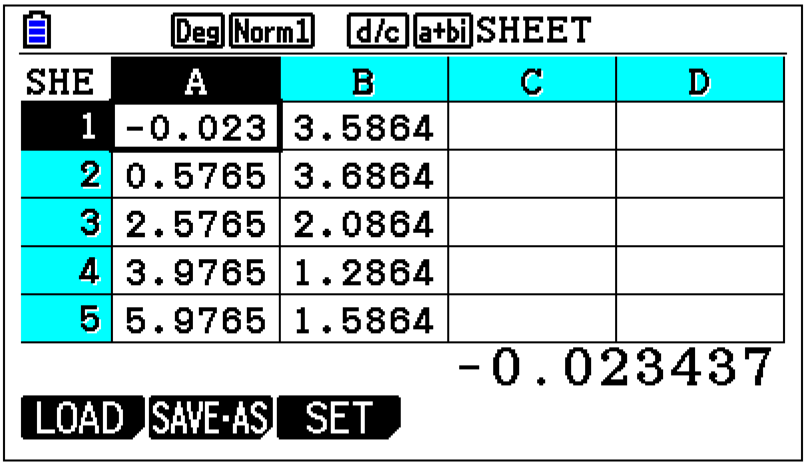


Ir ao MENU Estatística e Guardar como CSV





Colar no MENU Spreadsheet



SHE	A	B	C	D
1	-0.023	3.5864		
2	0.5765	3.6864		
3	2.5765	2.0864		
4	3.9765	1.2864		
5	5.9765	1.5864		

-0.023437

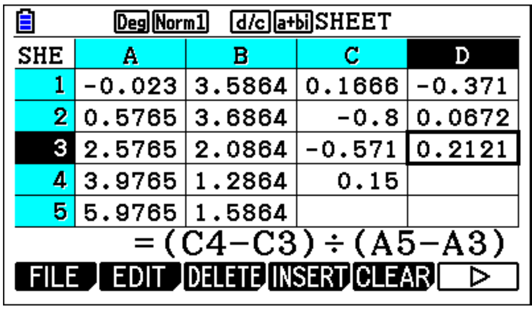
LOAD SAVE·AS SET

Aplicar o método das diferenças divididas para obter o polinómio interpolador de Newton:

Criar as colunas C, D, E e F para as ordens 1, 2, 3 e 4.

Diferenças de primeira ordem diferença no ***x*** uma unidade, de segunda ordem, no ***x***, duas e assim sucessivamente ...

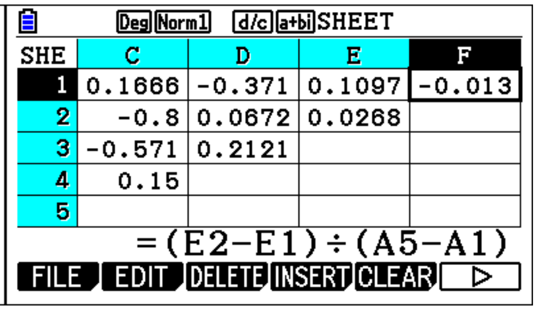
(Nota: editar para copiar e colar células)



SHE	A	B	C	D
1	-0.023	3.5864	0.1666	-0.371
2	0.5765	3.6864	-0.8	0.0672
3	2.5765	2.0864	-0.571	0.2121
4	3.9765	1.2864	0.15	
5	5.9765	1.5864		

=(C4−C3)÷(A5−A3)

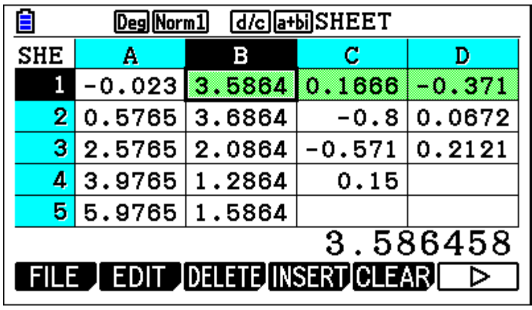
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▷



SHE	C	D	E	F
1	0.1666	-0.371	0.1097	-0.013
2	-0.8	0.0672	0.0268	
3	-0.571	0.2121		
4	0.15			
5				

=(E2−E1)÷(A5−A1)

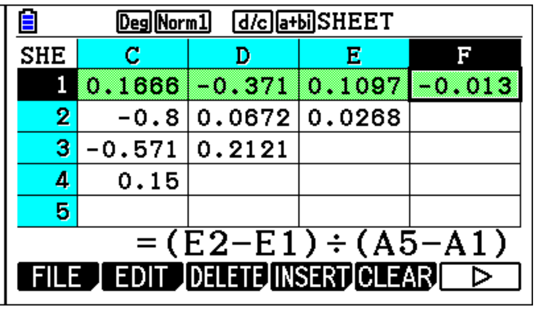
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▷



SHE	A	B	C	D
1	-0.023	3.5864	0.1666	-0.371
2	0.5765	3.6864	-0.8	0.0672
3	2.5765	2.0864	-0.571	0.2121
4	3.9765	1.2864	0.15	
5	5.9765	1.5864		

3.586458

FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▷

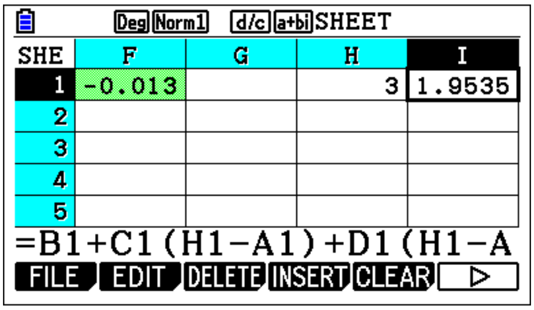


SHE	C	D	E	F
1	0.1666	-0.371	0.1097	-0.013
2	-0.8	0.0672	0.0268	
3	-0.571	0.2121		
4	0.15			
5				

=(E2−E1)÷(A5−A1)

FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▷

Calcular o valor numérico do polinómio:

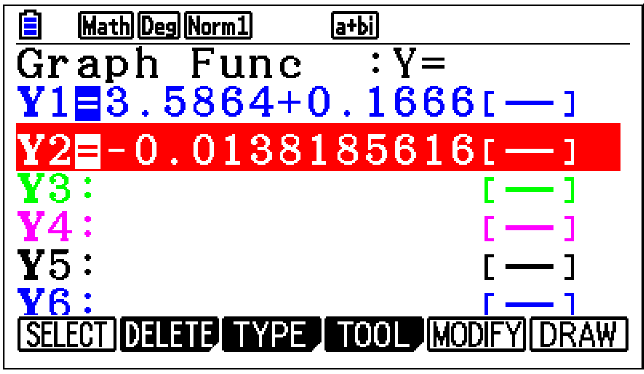


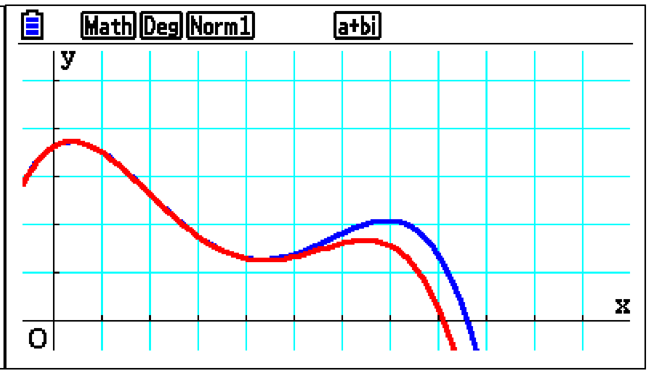
SHE	F	G	H	I
1	-0.013		3	1.9535
2				
3				
4				
5				

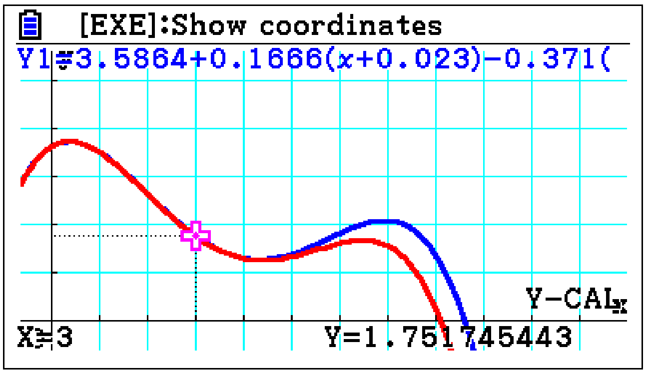
=B1+C1(H1−A1)+D1(H1−A

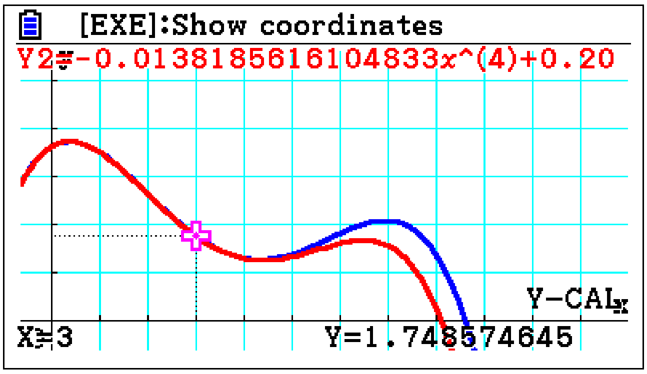
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▷

Representação do polinómio interpolador e da regressão:

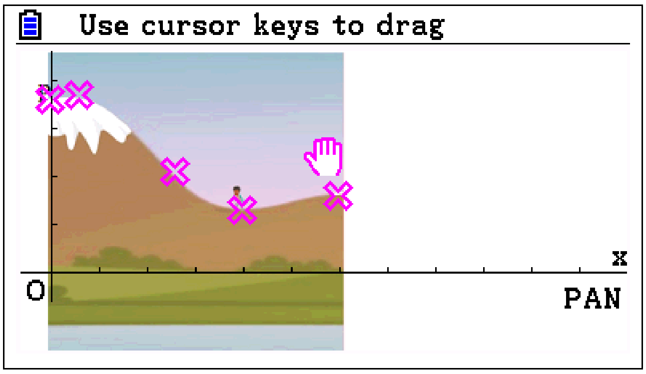


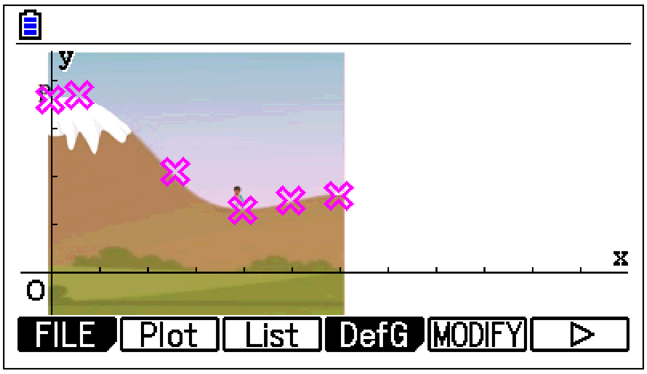


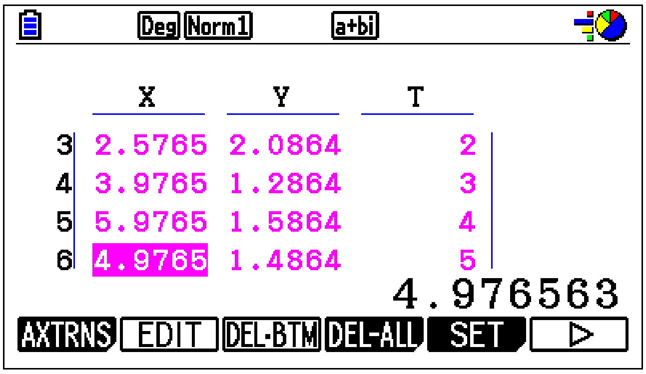


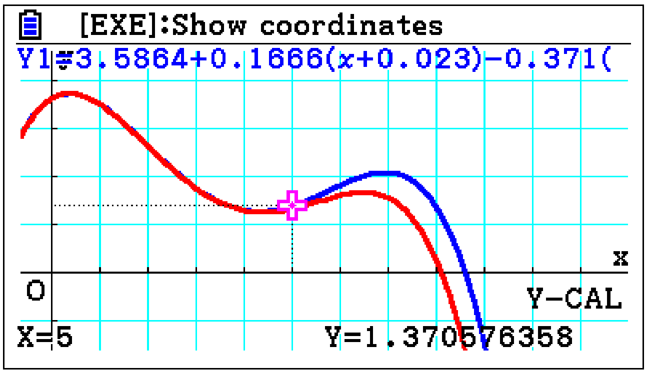


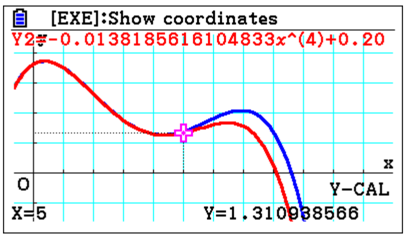
Valor pelo picture plot



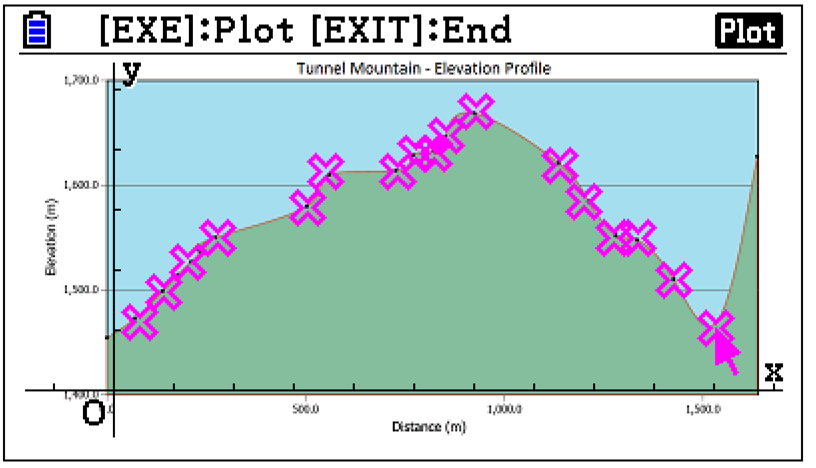






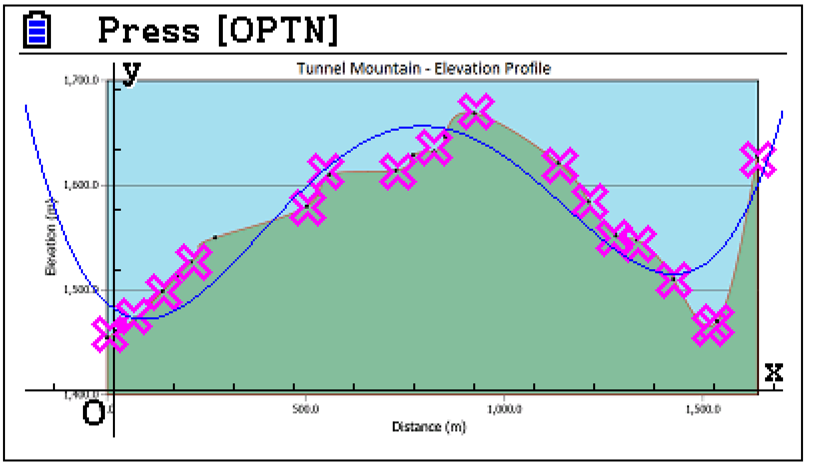


Modelação Tunel Mountian Canadá

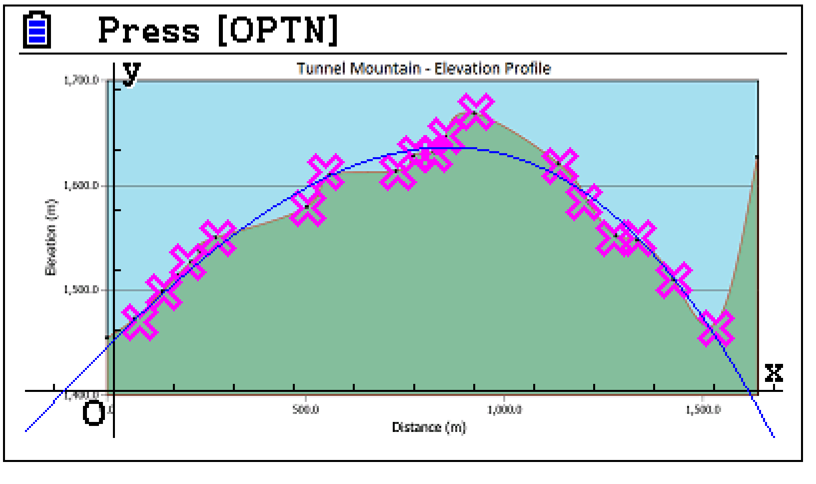


Como é visível abaixo nenhum modelo polinomial disponível nas regressões da calculadora, se adequa de forma minimamente satisfatória.

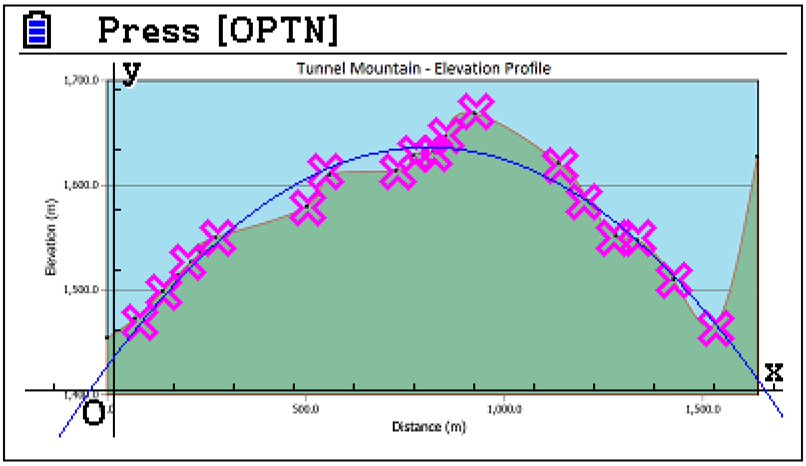
Regressão: polinómio de grau 4



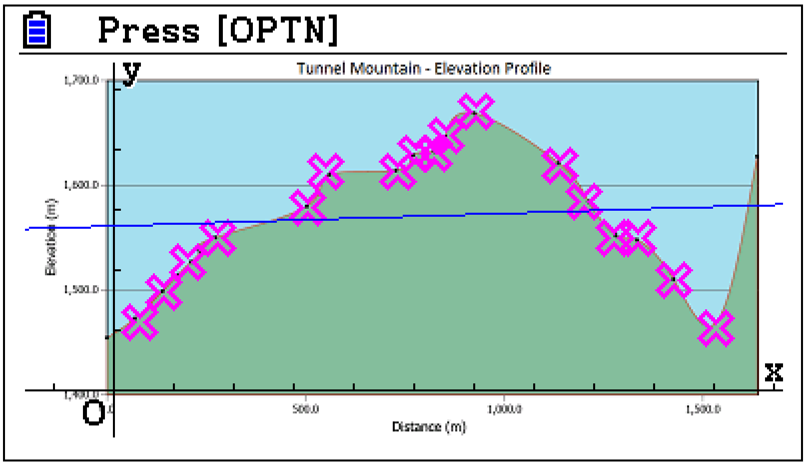
Regressão: polinómio de grau 3



Regressão: polinómio de grau 2



Regressão: linear



Modelo com Splines cúbicas (funções por ramos):

O primeiro ramo será a regressão usando os primeiros quatro pontos, o segundo ramo será a regressão usando o quarto, quinto, sexto e sétimo ponto, e assim sucessivamente.