

VIII ENCONTRO DIAS CASIO+

O uso da calculadora em Estatística (dados univariados)

Autor: Joaquim Rosa

03/02/2024

Join at menti.com | use code 7698 3770



Instructions

Go to

www.menti.com

Enter the code

7698 3770



Or use QR code



Resumo

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática é salientado que se deve:

- “Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos”;
- “Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas”;
- “Propor a elaboração de programas simples em Python que permitam calcular as medidas estatísticas”.

Nesta sessão prática será feita uma “viagem” pelas várias funcionalidades da calculadora no que diz respeito ao estudo de dados univariados.

Organização de dados	Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las. Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, relembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis.	Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos. Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados e salientar a importância do diagrama de extremos-e-quartis para comparar várias distribuições de dados.	Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Histograma	Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos. Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.	Salientar que o aspeto do histograma depende do número de classes considerado, da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão). Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra, respetivamente discreto ou contínuo.	
Medidas de localização	Interpretar as medidas de localização: média ($\bar{x}$), mediana (M_e), moda(s) (M_o) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.	Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.	
Medidas de dispersão	Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, s, (variância amostral s^2) na caracterização da distribuição dos dados,	Propor a elaboração de um programa simples em Python que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de	

Propriedades das medidas	relacionando-as com as representações gráficas obtidas. Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”. Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas: - Pouca resistência da média e do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade; Conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão. Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples. Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o	uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo. Promover a utilização da tecnologia para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”. Realçar a utilização enganadora da média, em casos em que existem <i>outliers</i> (dados muito diferentes do padrão dos restantes), devido à grande influência desses dados. Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados dessas medidas. Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da Direção Geral de Saúde (https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf), relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”. Promover a elaboração de um programa em <i>Python</i> para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados. Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.	
---------------------------------	--	--	--



Dias Casio+ 2024

SP 6 – Estatística

MATEMÁTICA A: 10.º ANO

TEMA: ESTATÍSTICA

SUBTEMA: DADOS UNIVARIADOS

Tarefas adaptadas Grupo trabalho professores turmas Piloto 10.º Ano Matemática A

1. Nas tabelas 1 e 2 apresentam-se alguns dados relativos aos futebolistas internacionais pela **Seleção A** de Portugal. A tabela 1 diz respeito aos jogadores que participaram no Europeu de 2016, em França (onde nos consagramos campeões europeus) e, a tabela 2, é relativa aos jogadores que representaram o nosso país no Mundial de 2022, no Qatar.

Tabela 1

Jogadores Seleção A_ Europeu de França 2016	
Nome	Idade (anos)
Eduardo	33
Anthony Lopes	25
Rui Patrício	28
Bruno Alves	34
Cédric	24
Danilo Pereira	24
Eliseu	32
José Fonte	32
Pepe	33
Raphaël Guerreiro	22
Ricardo Carvalho	38
Vieirinha	30
Adrien Silva	27
André Gomes	22
João Mário	23
João Moutinho	29
Renato Sanches	18
William Carvalho	24
Éder	28
Cristiano Ronaldo	31
Nani	29
Rafa Silva	23
Ricardo Quaresma	32

Tabela 2

Jogadores Seleção A_ Mundial do Qatar 2022		
Nome	Idade (anos)	Altura (cm)
Diogo Costa	24	187
José Sá	30	192
Rui Patrício	34	190
Diogo Dalot	23	185
João Cancelo	28	182
António Silva	19	187
Danilo Pereira	31	177
Pepe	39	188
Rúben Dias	25	187
Nuno Mendes	20	175
Raphael Guerreiro	28	170
João Palhinha	27	190
Rúben Neves	25	180
Bernardo Silva	28	173
Bruno Fernandes	28	179
João Mário	29	179
Mateus Nunes	25	183
Octávio	28	173
Vitinha	22	173
William Carvalho	30	187
André Silva	25	181
Gonçalo Ramos	21	185
Cristiano Ronaldo	37	187
João Félix	23	181
Rafael Leão	23	188
Ricardo Horta	28	173

- 1.1.** Classifique as variáveis estatísticas, apresentadas na tabela 1, quanto ao tipo (qualitativo ou quantitativo – discreto ou contínuo).
- 1.2.** Comente a seguinte afirmação: “Os jogadores da **Seleção A** presentes no Euro 2016 eram, em média, mais jovens do que os jogadores que participaram no Mundial do Qatar de 2022”.
- 1.3.** Calcule e compare o desvio padrão das idades dos jogadores que representaram a seleção nacional em 2016 e em 2022 (4 c.d.). Relativamente à idade dos jogadores, qual das seleções apresenta menor variabilidade?
- 1.4.** Considere as idades dos jogadores apresentadas nas tabelas 1 e 2.
- 1.4.1.** Construa um diagrama de caule-e-folhas paralelo das idades dos jogadores no Europeu e no Mundial.
- 1.4.2.** Utilize o diagrama de caule-e-folhas, construído em **1.4.1.**, e elabore uma pequena composição onde estabeleça comparações entre as idades dos jogadores do Europeu 2016 e do Mundial 2022.

1.5. Tal como as tabelas, os histogramas são outra forma de representar os dados estatísticos. Recorrendo à sua calculadora construa histogramas que lhe permitam responder às 3 questões.

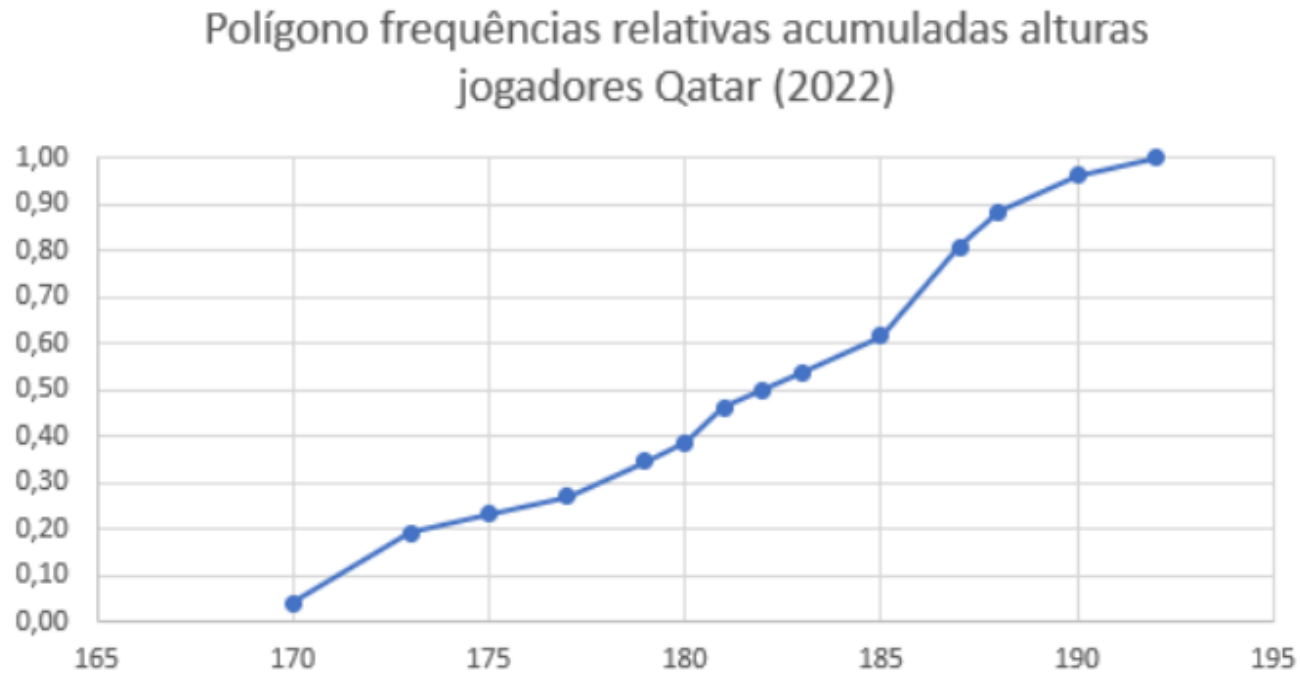
Questões:

- I. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior ou igual a 1,8 m?
- II. Quantos jogadores têm, pelo menos, 1,75 m de altura?
- III. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior ou igual a 180 cm e inferior a 187,5 cm?

Responda às questões I, II e III e apresente os histogramas respetivos.

Apresente os resultados das questões I e III arredondados às unidades.

1.6. A partir do gráfico de linhas seguinte, indique, aproximadamente, o percentil da altura do jogador Nuno Mendes.



Indique, aproximadamente, o percentil da estatura do mesmo jogador, consultando a tabela,

<https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf>, que

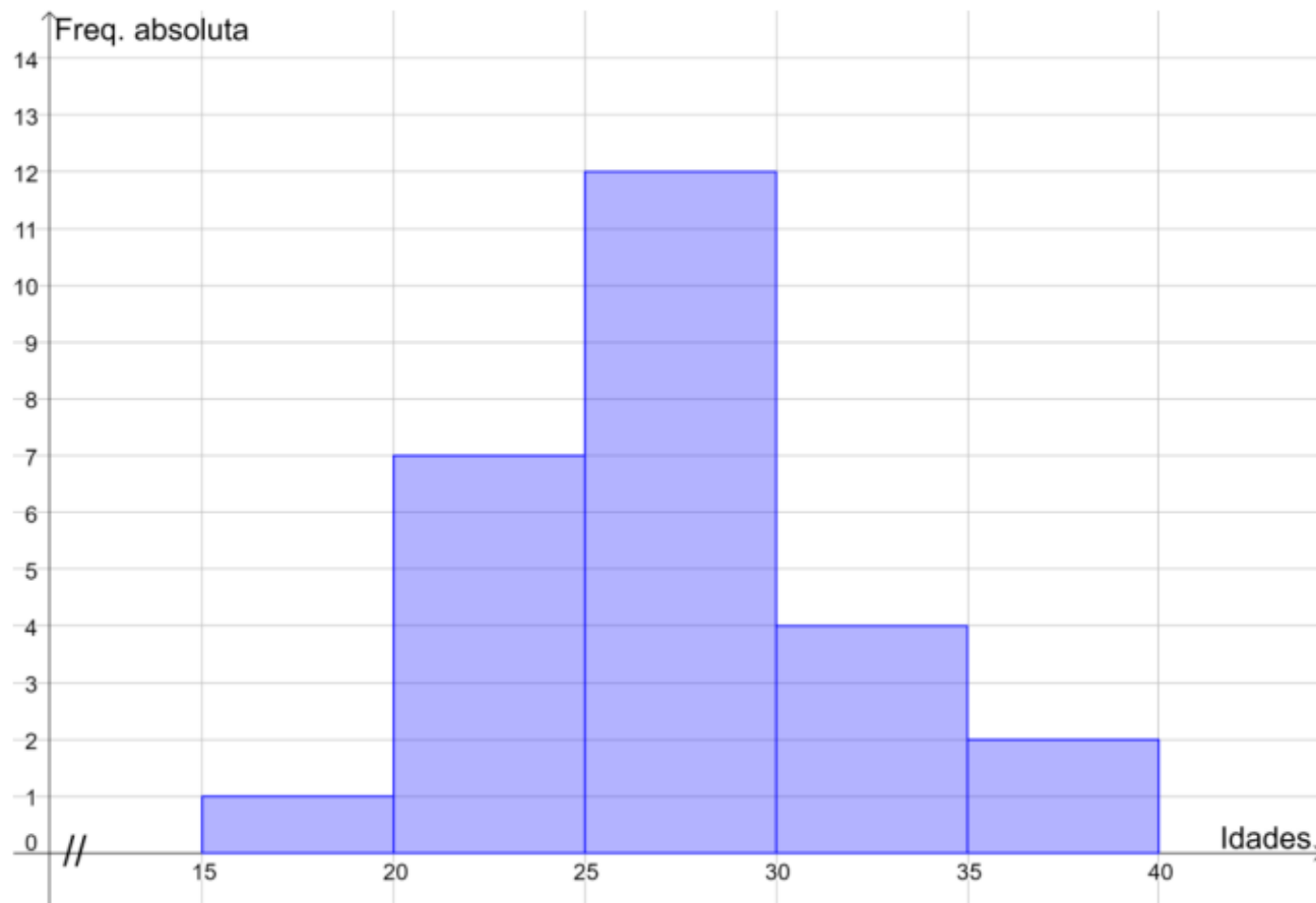
representa os percentis da altura da população portuguesa até aos vinte anos.

Compare e comente os valores obtidos.



1.7. A partir do histograma a seguir representado, com as idades dos jogadores em 2022, determine a média e o desvio-padrão. Compare com os valores obtidos nas questões 1.2 e 1.3..

Idades dos jogadores em 2022



Proposta de resolução de alguns itens tarefa 1

1.2. Comente a seguinte afirmação: “Os jogadores da Seleção A presentes no Euro 2016 eram, em média, mais jovens do que os jogadores que participaram no Mundial do Qatar de 2022”.

Aceder ao menu Estatística (*Menu 2*) e inserir os dados referentes às idades dos jogadores de 2016 e de 2022 nas listas 1 e 2, respetivamente. Na linha SUB pode ser dado nome às listas.

The image shows two parts of the TI-84 Plus calculator interface. On the left is the 'MAIN MENU' with icons for Run-Matrix, Statistics, eActivity, Spreadsheet, Graph, Dyna Graph, Table, Recursion, Conic Graphs, Equation, Program, and Financial. On the right is the 'List Editor' screen. It shows a table with columns 'List 1', 'List 2', 'List 3', and 'List 4'. The 'SUB' row is labeled 'Idade16' for List 1 and 'Idade22' for List 2. The data rows are: 1 (33, 24), 2 (25, 30), 3 (28, 34), and 4 (34, 23). The bottom of the screen shows the 'Idade16' label and a row of function keys: GRAPH, CALC, TEST, INTR, DIST, and a right arrow.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Idade16	Idade22		
1	33	24		
2	25	30		
3	28	34		
4	34	23		

Calcular as médias das listas 1 e 2 e inseri-las nas linhas 1 e 2 da lista 3. Para isso procuramos no catálogo a média (Mean)

The image shows three sequential screenshots of the TI-84 Plus calculator. The first screenshot shows the 'Catalog' screen with 'Mat' selected, and 'Mean(' highlighted. The second screenshot shows the 'List Editor' with 'Mean(List 1)' entered in the 'List 3' column for the first row. The third screenshot shows the 'List Editor' with 'Mean(List 2)' entered in the 'List 3' column for the second row. The final state of the 'List Editor' is shown in the third screenshot, with the calculated means stored in List 3: 27.869 for List 1 and 26.923 for List 2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Idade16	Idade22	médias	
1	33	24	27.869	
2	25	30	26.923	
3	28	34		
4	34	23		

A afirmação não é verdadeira. Como a média das idades dos jogadores da Seleção A, presentes no Euro 2016, é maior que a média das idades dos jogadores que participaram no Mundial do Qatar de 2022 podemos concluir que, em média, os jogadores presentes no Qatar eram mais jovens do que os jogadores presentes no euro de França.

1.3. Calcule e compare o desvio padrão das idades dos jogadores que representaram a seleção nacional em 2016 e em 2022 (4 c.d.). Relativamente às idades dos jogadores, qual das seleções apresenta menor variabilidade?

Calcular o desvio-padrão amostral das listas 1 e 2 e escrevê-los nas linhas 1 e 2 da lista 4. Para calcular o desvio-padrão amostral podemos usar o menu Calc (F2). Neste menu podemos obter diversas medidas estatísticas. Para efetuar este procedimento deverá pressionar, sucessivamente, as seguintes teclas:

F2 F6 SHIFT 1 1 ▼ F1 EXE F1

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Idade16	Idade22	médias	D-P am
1	33	24	27.869	0
2	25	30	26.923	
3	28	34		
4	34	23		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Idade16	Idade22	médias	D-P am
1	33	24	27.869	0
2	25	30	26.923	
3	28	34		
4	34	23		

GRAPH CALC TEST INTR DIST ▶

1-VAR 2-VAR REG SET LIST

1Var XList :List1

1Var Freq :1

2Var XList :List1

2Var YList :List2

2Var Freq :1

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Idade16	Idade22	médias	D-P am
1	33	24	27.869	0
2	25	30	26.923	
3	28	34		
4	34	23		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Idade16	Idade22	médias	D-P am
1	33	24	27.869	0
2	25	30	26.923	
3	28	34		
4	34	23		

1-VAR 2-VAR REG SET

1-Variable

$\bar{x}$ =27.8695652

Σx =641

Σx^2 =18393

σx =4.79405744

SX =4.90180252

n =23

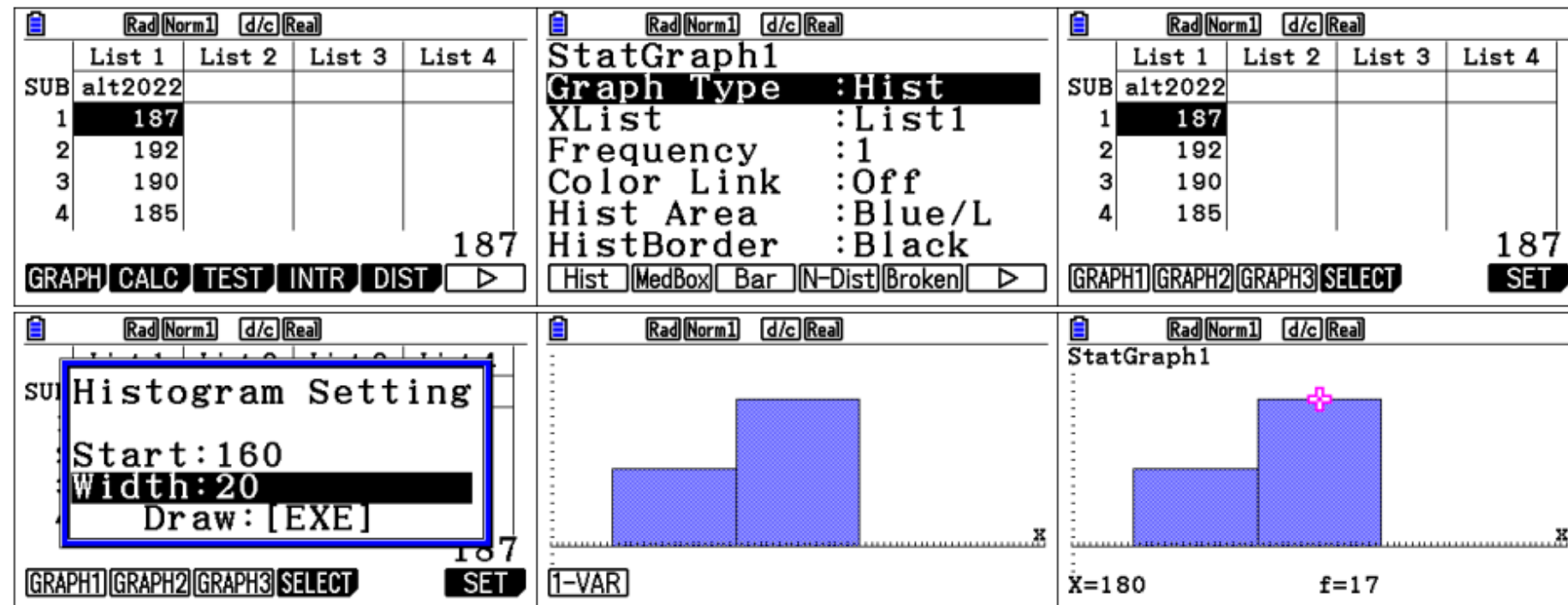
Pretendemos o desvio-padrão amostral, ou seja, SX. Basta digitar este valor na célula pretendida. Procedemos de forma idêntica para determinar o desvio-padrão da lista 2, e escrevê-lo na linha 2 da lista 4.

1.5.

- I. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior ou igual a 1,8 m?

Vamos elaborar um histograma com limite inferior da primeira classe em 160, e amplitude das classes, 20, por exemplo. Começar por inserir na lista 1 os valores das alturas. De seguida pressionar, sucessivamente, as teclas:

[F1] [F6] [▼] [F6] [F1] [▼] [▼] [F1] [EXE] [F1] [1] [6] [0] [EXE] [2] [0] [EXE] [EXE] [SHIFT] [F1] [▶]



$$\frac{17}{26} \times 100 \approx 65,38\%$$

II. Quantos jogadores têm, pelo menos, 1,75 m de altura?

Proceder de forma idêntica.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	alt2022			
1	187			
2	192			
3	190			
4	185			

187

GRAPH CALC TEST INTR DIST

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	alt2022			
1	187			
2	192			
3	190			
4	185			

187

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT SET

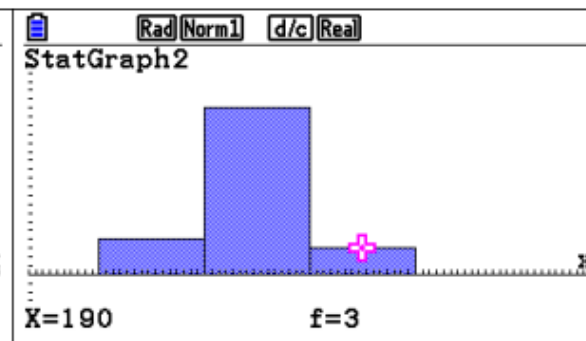
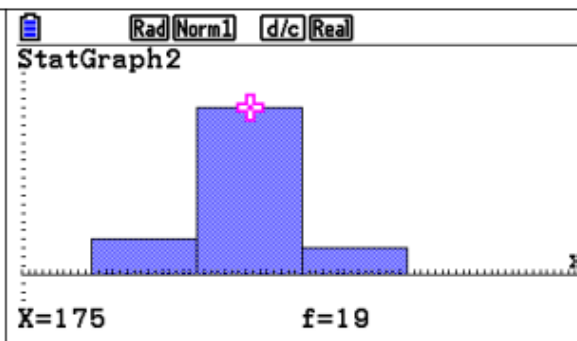
StatGraph2	
Graph Type	:Hist
XList	:List1
Frequency	:1
Color Link	:Off
Hist Area	:Blue/L
HistBorder	:Black

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3

Histogram Setting	
Start	:160
Width	:15
Draw	: [EXE]

187

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT SET



III. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior ou igual a 180 cm e inferior a 187,5 cm

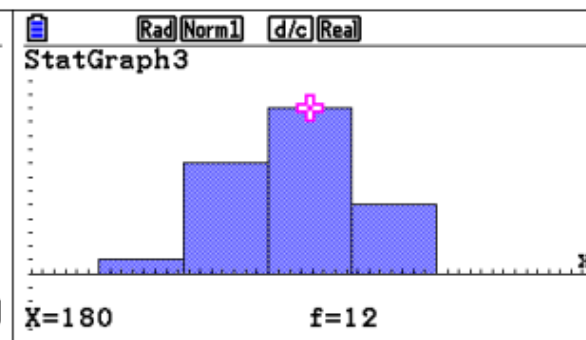
StatGraph3	
Graph Type	:Hist
XList	:List1
Frequency	:1
Color Link	:Off
Hist Area	:Blue/L
HistBorder	:Black

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3

Histogram Setting	
Start	:165
Width	:7.5
Draw	: [EXE]

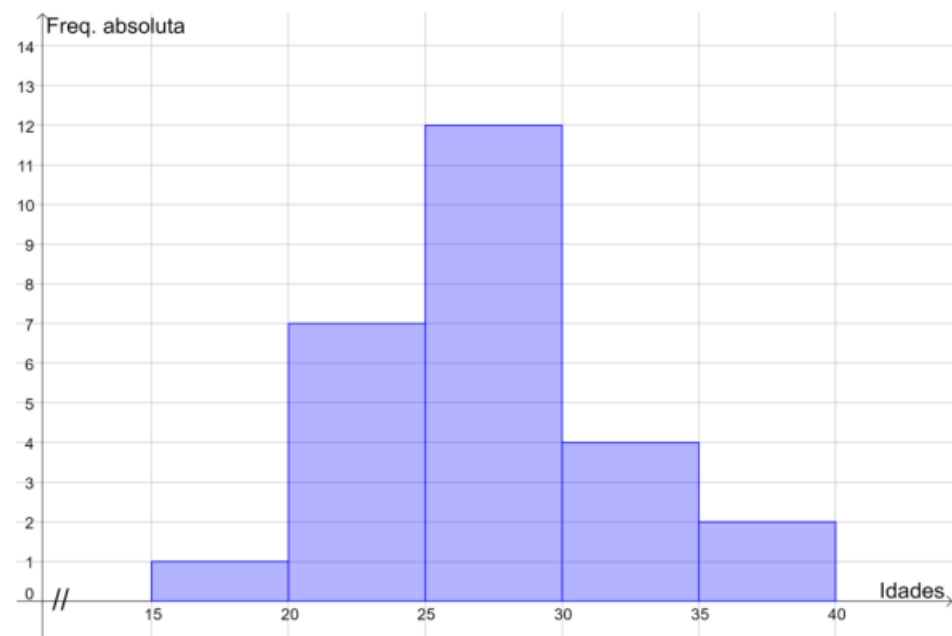
187

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT SET



1.7. A partir do histograma a seguir representado, com as idades dos jogadores em 2022, determine a média e o desvio-padrão. Compare com os valores obtidos nas questões 1.2 e 1.3..

Idades dos jogadores em 2022



Classe	Ponto médio da classe	Frequência absoluta	Desvios em relação à média	Desvios ao quadrado	Frequência vezes os desvios^2
[15,20[	17,5	1	-9,807692308	96,1908284	96,1908284
[20,25[	22,5	7	-4,807692308	23,11390533	161,7973373
[25,30[	27,5	12	0,192307692	0,036982249	0,443786982
[30,35[	32,5	4	5,192307692	26,96005917	107,8402367
[35,40[	37,5	2	10,19230769	103,8831361	207,7662722
		26			574,0384615

Podemos calcular a média e o desvio padrão tal como em 1.2.e 1.3. (considerando as marcas das classes), no entanto, vamos usar outra forma, usando as listas para construir a tabela seguinte.

Inserir as marcas das classes e a frequência absoluta nas listas 1 e 2, respectivamente. Obter a soma das frequências absolutas, e inserir na lista 3 (para aceder à soma dos elementos de uma lista deve pressionar **OPTN**).

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	soma fa	
1	17.5	1	0	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

0

GRAPH CALC TEST INTR DIST

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	soma fa	
1	17.5	1	0	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

0

LIST COMPLEX CALC HYPERBL PROB

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	soma fa	
1	17.5	1	0	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

0

List Lst→Mat Dim Fill(Seq

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	soma fa	
1	17.5	1	0	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

0

Min Max Mean Med Augment

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	soma fa	
1	17.5	1	0	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

0

Sum Prod Cuml % ΔList

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa		
1	17.5	1		
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

Sum List 2

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa		
1	17.5	1	26	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

Sum Prod Cuml % ΔList

Calcular o produto das frequências absolutas pela marca da classe e inserir na lista 4. Com o cursor sobre a lista 4, seguir os procedimentos indicados de seguida.

Rad

Norm1

d/c

Real

List 1

List 2

List 3

List 4

SUB

Marca

fa

soma fa

faxmarc

1

17.5

1

26

0

2

22.5

7

3

27.5

12

4

32.5

4

GRAPH

CALC

TEST

INTR

DIST

Rad

Norm1

d/c

Real

List 1

List 2

List 3

List 4

SUB

Marca

fa

soma fa

faxmarc

1

17.5

1

26

0

2

22.5

7

3

27.5

12

4

32.5

4

List 1

×

List 2

GRAPH

CALC

TEST

INTR

DIST

Rad

Norm1

d/c

Real

List 1

List 2

List 3

List 4

SUB

Marca

fa

soma fa

faxmarc

1

17.5

1

26

17.5

2

22.5

7

157.5

3

27.5

12

330

4

32.5

4

130

17.5

GRAPH

CALC

TEST

INTR

DIST

Na lista 5 calcular o somatório da lista 4 (ver passos anteriores para calcular a soma dos dados da lista 3) e, de seguida, calcular a média na lista 6, fazendo o quociente entre as listas 5 e 3.

Rad

Norm1

d/c

Real

List 2

List 3

List 4

List 5

SUB

fa

soma fa

faxmarc

soma L4

1

1

26

17.5

0

2

7

157.5

3

12

330

4

4

130

0

Sum List 4

GRAPH

CALC

TEST

INTR

DIST

Rad

Norm1

d/c

Real

List 2

List 3

List 4

List 5

SUB

fa

soma fa

faxmarc

soma L4

1

1

26

17.5

0

2

7

157.5

3

12

330

4

4

130

Sum List 4

Sum

Prod

Cuml

%

ΔList

Rad

Norm1

d/c

Real

List 3

List 4

List 5

List 6

SUB

soma fa

faxmarc

soma L4

média

1

26

17.5

710

0

2

157.5

3

330

4

130

List 5÷List 3

LIST

COMPLEX

CALC

HYPERBL

PROB

Rad

Norm1

d/c

Real

List 3

List 4

List 5

List 6

SUB

soma fa

faxmarc

soma L4

média

1

26

17.5

710

27.307

2

157.5

3

330

4

130

27.30769231

LIST

COMPLEX

CALC

HYPERBL

PROB

Os procedimentos anteriores ilustram a forma de obter a média aplicando a fórmula e usando as potencialidades aritméticas das listas estatísticas.

De seguida ilustramos como construir a tabela que permite obter o desvio padrão através da fórmula, ou seja, construindo a tabela ilustrada no início.

Rad Norm1 d/c Real

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa		
1	17.5	1		
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ▶

Rad Norm1 d/c Real

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	Dm	
1	17.5	1	0	
2	22.5	7		
3	27.5	12		
4	32.5	4		

GRAPH CALC TEST INTR DIST ▶

Rad Norm1 d/c Real

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	Dm	
1	17.5	1	-9.807	
2	22.5	7	-4.807	
3	27.5	12	0.1923	
4	32.5	4	5.1923	

-9.80769

GRAPH CALC TEST INTR DIST ▶

Rad Norm1 d/c Real

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	Dm	Dm^2
1	17.5	1	-9.807	0
2	22.5	7	-4.807	
3	27.5	12	0.1923	
4	32.5	4	5.1923	

GRAPH CALC TEST INTR DIST ▶

Rad Norm1 d/c Real

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	Dm	Dm^2
1	17.5	1	-9.807	0
2	22.5	7	-4.807	
3	27.5	12	0.1923	
4	32.5	4	5.1923	

List 3^2

Rad Norm1 d/c Real

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	Marca	fa	Dm	Dm^2
1	17.5	1	-9.807	96.19
2	22.5	7	-4.807	23.113
3	27.5	12	0.1923	0.0369
4	32.5	4	5.1923	26.96

96.19078314

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ▶

Rad Norm1 d/c Real

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB	fa	Dm	Dm^2	Fa×Dm^
1	1	-9.807	96.19	0
2	7	-4.807	23.113	
3	12	0.1923	0.0369	
4	4	5.1923	26.96	

List 2×List 4

Rad Norm1 d/c Real

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB	fa	Dm	Dm^2	Fa×Dm^
1	1	-9.807	96.19	96.19
2	7	-4.807	23.113	161.79
3	12	0.1923	0.0369	0.4437
4	4	5.1923	26.96	107.84

96.19078314

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT ▶

	List 3	List 4	List 5	List 6
SUB	Dm	Dm^2	FaxDm^	SomaL5
1	-9.807	96.19	96.19	0
2	-4.807	23.113	161.79	
3	0.1923	0.0369	0.4437	
4	5.1923	26.96	107.84	

Sum List 5

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	FaxDm^	SomaL5	Variânc	
1	96.19	574.03	0	
2	161.79			
3	0.4437			
4	107.84			

List 6÷25

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	FaxDm^	SomaL5	Variânc	D-P
1	96.19	574.03	22.961	0
2	161.79			
3	0.4437			
4	107.84			

√List 7

	List 3	List 4	List 5	List 6
SUB	Dm	Dm^2	FaxDm^	SomaL5
1	-9.807	96.19	96.19	574.03
2	-4.807	23.113	161.79	
3	0.1923	0.0369	0.4437	
4	5.1923	26.96	107.84	

Sum Prod Cuml % ΔList

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	FaxDm^	SomaL5	Variânc	
1	96.19	574.03	22.961	
2	161.79			
3	0.4437			
4	107.84			

22.96153846

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	FaxDm^	SomaL5	Variânc	D-P
1	96.19	574.03	22.961	4.7918
2	161.79			
3	0.4437			
4	107.84			

4.791819953

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT

	List 4	List 5	List 6	List 7
SUB	Dm^2	FaxDm^	SomaL5	Variânc
1	96.19	96.19	574.03	0
2	23.113	161.79		
3	0.0369	0.4437		
4	26.96	107.84		

Sum Prod Cuml % ΔList

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB	FaxDm^	SomaL5	Variânc	D-P
1	96.19	574.03	22.961	0
2	161.79			
3	0.4437			
4	107.84			

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT

Desvio-padrão = 4,7918

Podemos afirmar que os resultados obtidos, tanto para a média como para o desvio padrão, através do histograma não diferem muito dos valores obtidos através dos dados em tabela. Média: através dos dados em tabela 26,92 ; através do histograma 27,31. Desvio padrão: através dos dados em tabela 4,8326 ; através do histograma 4,7918.

TAREFA 2- Propriedades da média e do desvio padrão

As tabelas 1 e 2 dizem respeito aos jogadores da seleção portuguesa que estiveram presentes em ambas as competições, Europeu 2016 e no Mundial 2022 .

Tabela 1

Jogadores da seleção A França 2016	
Nome	Idade (anos)
Rui Patrício	28
Pepe	33
Raphael Guerreiro	22
Danilo Pereira	24
João Mário	23
William Carvalho	24
Cristiano Ronaldo	31

Tabela 2

Jogadores da seleção A Qatar 2022	
me	Idade (anos)
Rui Patrício	34
Pepe	39
Raphael Guerreiro	28
Danilo Pereira	30
João Mário	29
William Carvalho	30
Cristiano Ronaldo	37

1. Com base na **Tabela 1**, determine, a média e o desvio padrão com aproximação às centésimas, dos sete jogadores.
2. Qual será a média e o desvio padrão das idades desses sete jogadores em 2022, **Tabela 2**, com aproximação às décimas? Justifique a sua resposta.
3. Duplique o valor da idade de cada jogador da **Tabela 1**. Recorrendo a uma calculadora gráfica ou uma folha de cálculo, determine a média e o desvio padrão dessa distribuição. Proceda de forma análoga triplicando os valores das idades. O que observou relativamente aos valores da média e do desvio padrão, para cada uma das situações?

4. Uma forma alternativa de determinar a média e o desvio padrão das distribuições referidas na questão 3. pode ser recorrer a um programa em linguagem Python. Altere o programa seguinte por forma a determinar os valores encontrados em 3. .

```
import math
idades=[14,16,14,15,17,23]
soma=0
for i in range(6):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/6
desvios=0
for i in range(6):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=round(math.sqrt(desvios/5),3)
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Média:', media)
```

Proposta de resolução de alguns itens tarefa 2

3. Duplica o valor da idade de cada jogador da **Tabela 1**. Recorrendo a uma calculadora gráfica ou uma folha de cálculo, determine a média e o desvio padrão dessa distribuição. Proceda de forma análoga triplicando os valores das idades.

O que observou relativamente aos valores da média e do desvio padrão, para cada uma das situações?

Vamos colocar na lista 2 os valores duplicados da lista 1, ou seja, vamos usar as operações com listas:

list2= 2*List1. Começamos por colocar o cursor sobre a lista, e proceder como indica nas imagens seguintes.

		Rad	Norm1	d/c	Real
		List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	id 2016	2xlist1			
1	28	0			
2	33				
3	22				
4	24				

2xList 1|

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	id 2016	2xlist1		
1	28	56		
2	33	66		
3	22	44		
4	24	48		

56

1-VAR 2-VAR REG SET

De seguida, pressionamos F6 (SET), e indicamos a lista 2 como a lista dos valores de x.

1Var XList :List2
1Var Freq :1
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq :1

LIST

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	id 2016	2xlist1		
1	28	56		
2	33	66		
3	22	44		
4	24	48		

1-VAR 2-VAR REG 56 SET

1-Variable

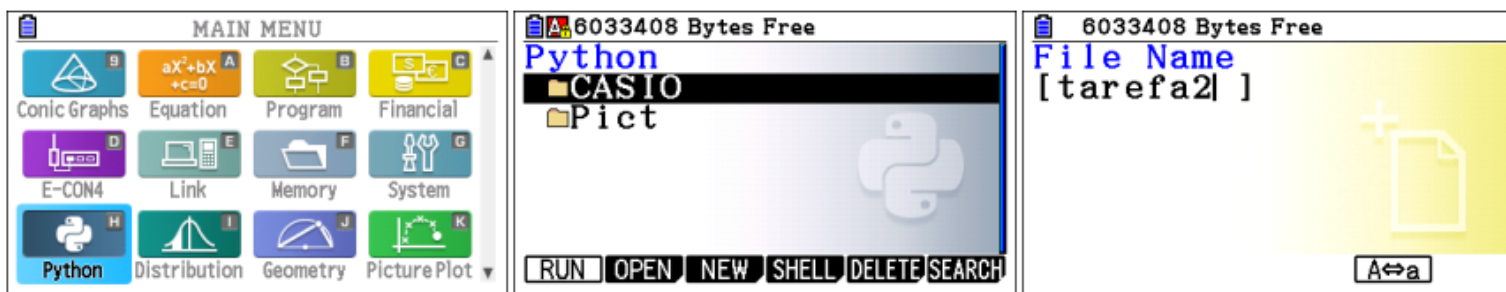
$\bar{x}$	=	52.8571428
Σx	=	370
Σx^2	=	19996
σx	=	7.91794654
sx	=	8.55235974
n	=	7

De forma análoga obtemos a média e o desvio padrão dos dados triplicados da lista 1.

4. Uma forma alternativa de determinar a média e o desvio padrão das distribuições referidas na questão 3. pode ser recorrer a um programa em linguagem Python. **Altere o programa seguinte** por forma a determinar os valores encontrados em 3. .

```
import math
idades=[14,16,14,15,17,23]
soma=0
for i in range(6):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/6
desvios=0
for i in range(6):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=round(math.sqrt(desvios/5),3)
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Média:', media)
```

Aceder ao menu Python (Menu H). Criar um programa (NEW) e atribuir nome.



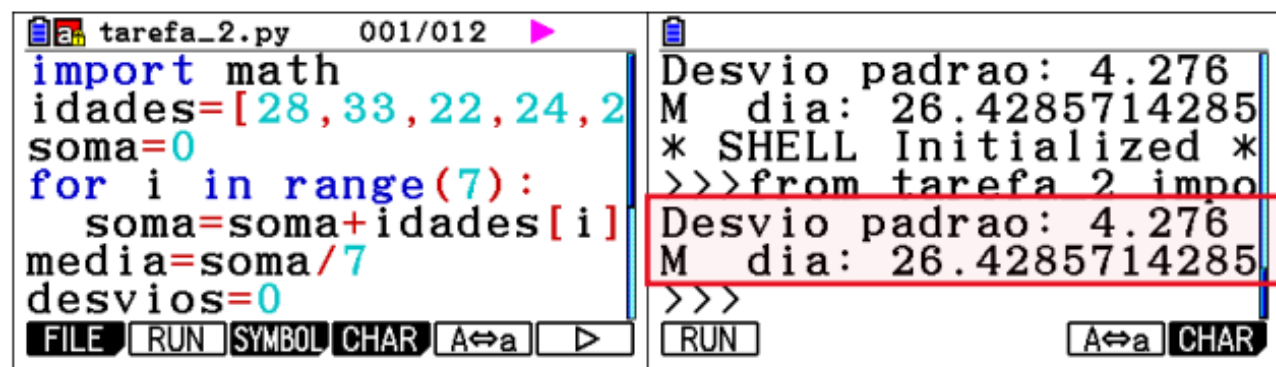
Digitar as linhas de código no editor python.



Fazer as alterações ao programa, de acordo com o solicitado.

```
import math
idades=[28,33,22,24,23,24,31]
soma=0
for i in range(7):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/7
desvios=0
for i in range(7):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=round(math.sqrt(desvios/6),3)
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Média:', media)
```

Pressionar RUN. O programa devolve a média e o desvio-padrão dos elementos da lista “Idades”.



The screenshot shows a TI-84 Plus calculator screen with a Python program loaded in the memory. The program calculates the mean and standard deviation of a list of ages. The output shows the standard deviation as 4.276 and the mean as 26.4285714285. A red box highlights the output lines.

```
tarefa_2.py 001/012 ▶
import math
idades=[28,33,22,24,23,24,31]
soma=0
for i in range(7):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/7
desvios=0
for i in range(7):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=round(math.sqrt(desvios/6),3)
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Média:', media)
```

Desvio padrao: 4.276
M dia: 26.4285714285
* SHELL Initialized *
>>>from tarefa 2 impo
Desvio padrao: 4.276
M dia: 26.4285714285
>>>

FILE RUN SYMBOL CHAR A↔a ▶ RUN A↔a CHAR

De seguida duplicar os valores da lista (e triplicar) e proceder da mesma forma.

<pre>tarefa_2.py 002/012 ▶ import math idades=[28*2,33*2,22*2] soma=0 for i in range(7): soma=soma+idades[i] media=soma/7 desvios=0</pre> FILE RUN SYMBOL CHAR A↔a ▶	<pre>Desvio padrao: 4.276 M dia: 26.4285714285 * SHELL Initialized * >>>from tarefa_2 impo Desvio padrao: 8.552 Media: 52.85714285714 >>></pre> RUN A↔a CHAR
<pre>tarefa_2.py 003/012 ▶ import math idades=[28*3,33*3,22*3] soma=0 for i in range(7): soma=soma+idades[i] media=soma/7 desvios=0</pre> FILE RUN SYMBOL CHAR A↔a ▶	<pre>Desvio padrao: 8.552 Media: 52.85714285714 * SHELL Initialized * >>>from tarefa_2 impo Desvio padrao: 12.829 Media: 79.28571428571 >>> </pre> RUN A↔a CHAR

TAREFA 3- Será que o Cristiano Ronaldo é o único outlier?

Na **tabela 1** pode observar dados referentes a alguns jogadores que representaram a Seleção Nacional A durante o apuramento para o europeu da Alemanha, disputado em 2024.

Tabela 1

Jogadores da seleção A apuramento Alemanha 2024			
Nome	Internacionalizações A	Minutos Jogados	Golos marcados
Rui patrício	107	9519	0
Digo Costa	16	1440	0
Danilo	69	4867	2
Pepe	134	11033	8
Raphael Guerreiro	64	4917	4
Ruben Dias	50	4206	2
João Cancelo	46	3609	8
Nelson Semedo	27	1943	0
Nuno Mendes	19	1191	0
Diogo Dalot	14	1171	2
António Silva	5	450	0
Gonçalo Inácio	3	203	2
Bruno Fernandes	59	3861	17
João Mário	56	2976	3
Ruben Neves	42	2309	0
Renato Sanches	32	1363	3
João Palhinha	22	923	2
Octávio	16	790	3
Vitinha	11	340	0
Matheus Nunes	11	261	1
Cristiano Ronaldo	201	15768	123
Bernardo Silva	84	5638	11
Diogo Jota	33	1787	12
João Félix	32	1700	6
Rafael Leão	21	726	3
Ricardo Horta	10	268	3
Gonçalo Ramos	8	275	6
Pedro Neto	4	186	1

1. Construa uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas da variável “Golos marcados”. Sempre que proceder a arredondamentos faça-o às milésimas.
2. Com base na tabela construída na questão 1. indique a percentagem de jogadores que:
 - 2.1. não marcou nenhum golo pela seleção;
 - 2.2. marcaram menos de dez golos.
3. Construa um gráfico de barras das frequências absolutas acumuladas dos golos marcados. Elabore três questões que possam ser respondidas recorrendo a esse gráfico. Responda a essas questões.
4. Por vezes surgem na amostra valores que se distinguem dos restantes por se diferenciarem drasticamente de todos os outros, a esses valores dá-se o nome de *outlier*.
Para cada uma das variáveis, quantitativas, apresentadas na **tabela 1**, identifique, por observação dos dados, os valores suscetíveis de se classificarem como *outlier*.
5. (Um possível aprofundamento) Existem vários critérios para identificar *outliers*. Um desses critérios consiste em averiguar se o valor está fora do intervalo:
 $[Q1 - 1,5 \times (Q3 - Q1); Q3 + 1,5 \times (Q3 - Q1)]$.

Determine os *outliers* relativos à variável “Golos marcados”, seguindo este critério.

Proposta de resolução tarefa 3

1. Construa uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas da variável “Golos marcados”. Sempre que proceder a arredondamentos faça-o às milésimas.

Começar por inserir os dados da 4.ª coluna, na lista 1 do menu estatístico (menu 2). De seguida ordenar a lis para facilitar a determinação da frequência absoluta de cada valor da variável.

The sequence of screenshots illustrates the following steps:

- Initial Data Entry:** The calculator is in the statistical menu. The 'List 1' column is labeled 'golos' and contains the values 0, 0, 2, and 8 for rows 1 through 4. The bottom menu shows 'GRAPH', 'CALC', 'TEST', 'INTR', 'DIST', and a right arrow.
- Sorting Selection:** The 'SORTASC' option is selected in the bottom menu.
- Sort Confirmation:** A dialog box appears with the text 'Sort Lists Into Ascending Order' and 'How Many Lists?: 1'.
- Select List:** A dialog box appears with the text 'Select List' and 'List No: 1'.
- Sorted Data:** The data is now sorted in ascending order. 'List 1' (golos) contains 0, 0, 0, 0. 'List 2' (golos1) contains 0, 1, 2, 3. 'List 3' (fa) contains 7, 2, 5, 5. The bottom menu shows 'SORTASC', 'SORTDES', 'TOP', and 'BOTTOM'.
- Final Table:** The final sorted data is displayed in a table format:

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	
1	0	0	7	
2	0	1	2	
3	0	2	5	
4	0	3	5	

The bottom menu shows 'SORTASC', 'SORTDES', 'TOP', and 'BOTTOM'. A small number '7' is visible in the bottom right corner of the final screenshot.

Obter a frequência absoluta acumulada na lista 4. Seguir os procedimentos indicados, começando por colocar o cursor sobre a lista 4 e pressionando a tecla OPTN:

Rad Norm1 d/c Real				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	faa
1	0	0	7	0
2	0	1	2	
3	0	2	5	
4	0	3	5	

GRAPH CALC TEST INTR DIST

Rad Norm1 d/c Real				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	faa
1	0	0	7	0
2	0	1	2	
3	0	2	5	
4	0	3	5	

LIST COMPLEX CALC HYPERBL PROB

Rad Norm1 d/c Real				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	faa
1	0	0	7	0
2	0	1	2	
3	0	2	5	
4	0	3	5	

List List→Mat Dim Fill(Seq

Rad Norm1 d/c Real				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	faa
1	0	0	7	0
2	0	1	2	
3	0	2	5	
4	0	3	5	

Min Max Mean Med Augment

Rad Norm1 d/c Real				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	faa
1	0	0	7	0
2	0	1	2	
3	0	2	5	
4	0	3	5	

Sum Prod Cuml % ΔList

Rad Norm1 d/c Real				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	golos	golos1	fa	faa
1	0	0	7	7
2	0	1	2	9
3	0	2	5	14
4	0	3	5	19

Sum Prod Cuml % ΔList

Na lista 5 vamos calcular as frequências relativas (em porcentagem). Para isso colocamos o cursor sobre a lista 5 e pressionar a tecla OPTN. Pressionar F1. Rodar a barra de ferramentas (F6) até aparecer a ferramenta %.

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB	golos1	fa	faa	fr
1	0	7	7	0
2	1	2	9	
3	2	5	14	
4	3	5	19	

LIST | COMPLEX | CALC | HYPERBL | PROB | >

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB	golos1	fa	faa	fr
1	0	7	7	0
2	1	2	9	
3	2	5	14	
4	3	5	19	

Sum | Prod | Cuml | % | ΔList | >

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB	golos1	fa	faa	fr
1	0	7	7	0
2	1	2	9	
3	2	5	14	
4	3	5	19	

Percent List 3|

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB	golos1	fa	faa	fr
1	0	7	7	25
2	1	2	9	7.1428
3	2	5	14	17.857
4	3	5	19	17.857

Sum | Prod | Cuml | % | ΔList | >

Na lista 6 obter as frequências relativas acumuladas (proceder de forma idêntica à utilizada para obter a frequência absoluta acumulada).

	Rad	Norm1	d/c	Real
	List 3	List 4	List 5	List 6
SUB	fa	faa	fr	fra
1	7	7	25	0
2	2	9	7.1428	
3	5	14	17.857	
4	5	19	17.857	
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

	Rad	Norm1	d/c	Real
	List 3	List 4	List 5	List 6
SUB	fa	faa	fr	fra
1	7	7	25	0
2	2	9	7.1428	
3	5	14	17.857	
4	5	19	17.857	
Cuml List 5,				

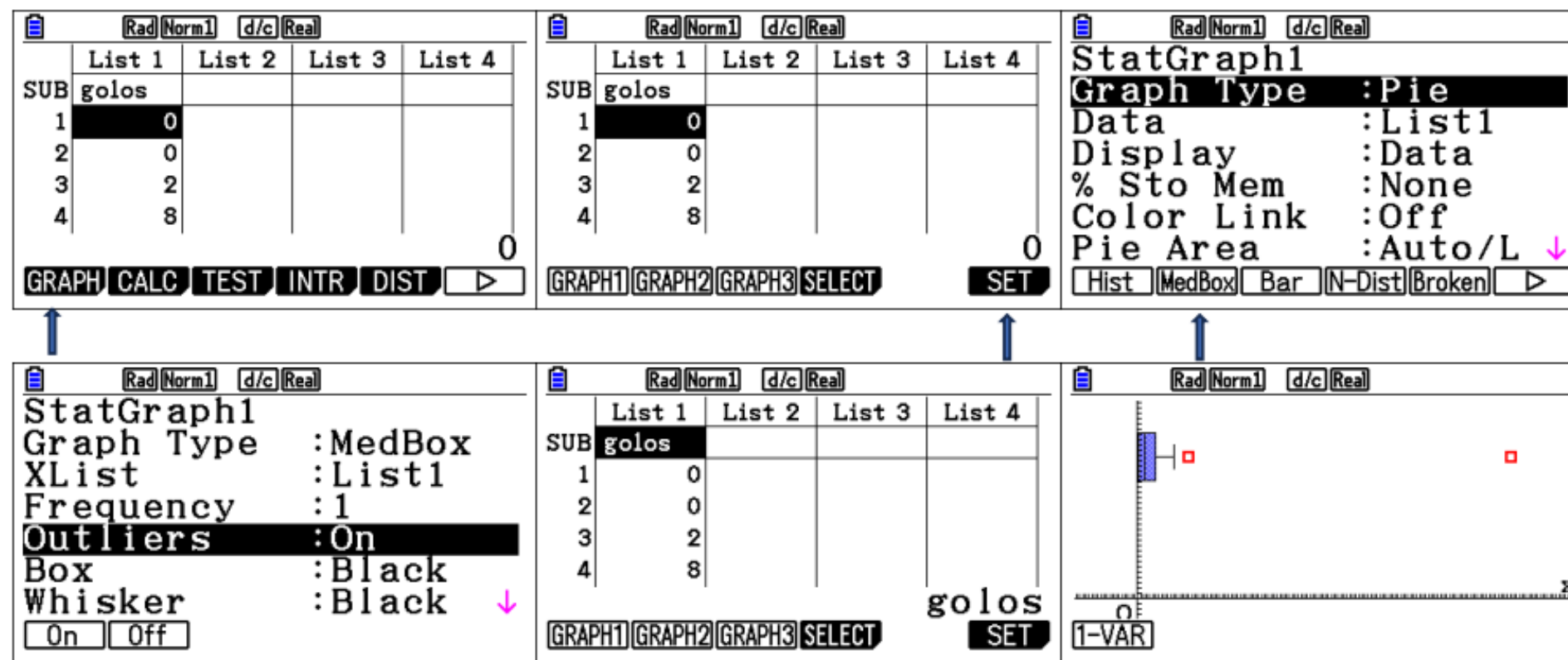
	Rad	Norm1	d/c	Real
	List 3	List 4	List 5	List 6
SUB	fa	faa	fr	fra
1	7	7	25	25
2	2	9	7.1428	32.142
3	5	14	17.857	50
4	5	19	17.857	67.857
				25
Sum Prod Cuml % ΔList ▶				

5. (Um possível aprofundamento) Existem vários critérios para identificar *outliers*. Um desses critérios consiste em averiguar se o valor está fora do intervalo: $[Q1 - 1,5 \times (Q3 - Q1); Q3 + 1,5 \times (Q3 - Q1)]$.

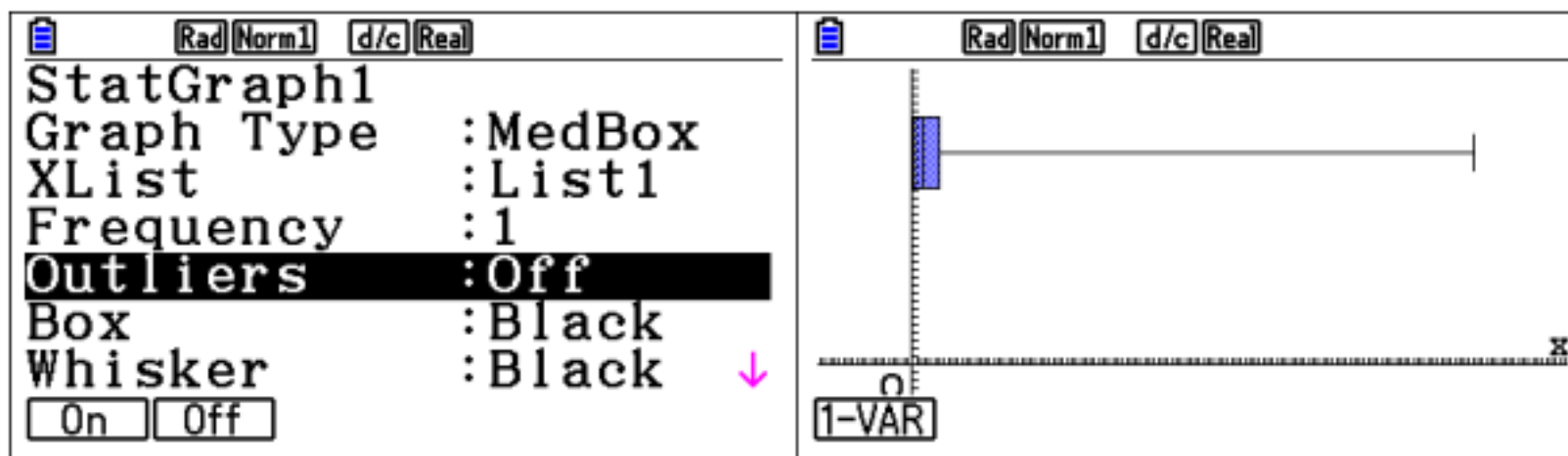
Determine os *outliers* relativos à variável “Golos marcados”, seguindo este critério.

Vamos, em primeiro, exemplificar, outra forma de determinar os quartis a partir da construção do diagrama de extremos e quatis.

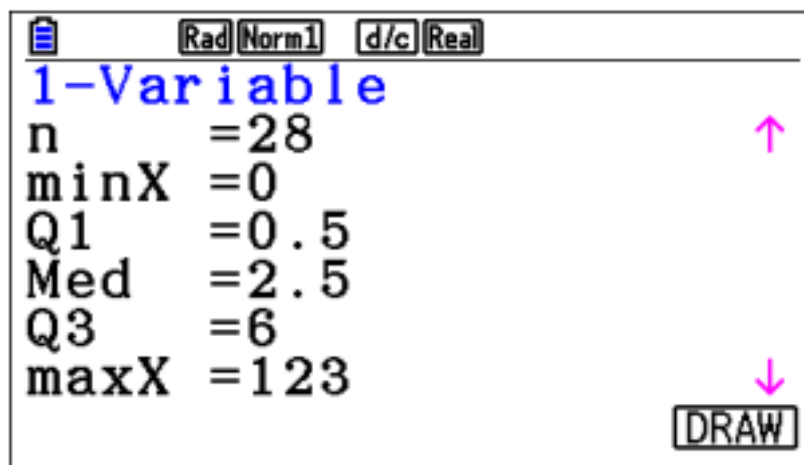
Inserir os dados na lista 1, e obter o diagrama de extremos e quartis.



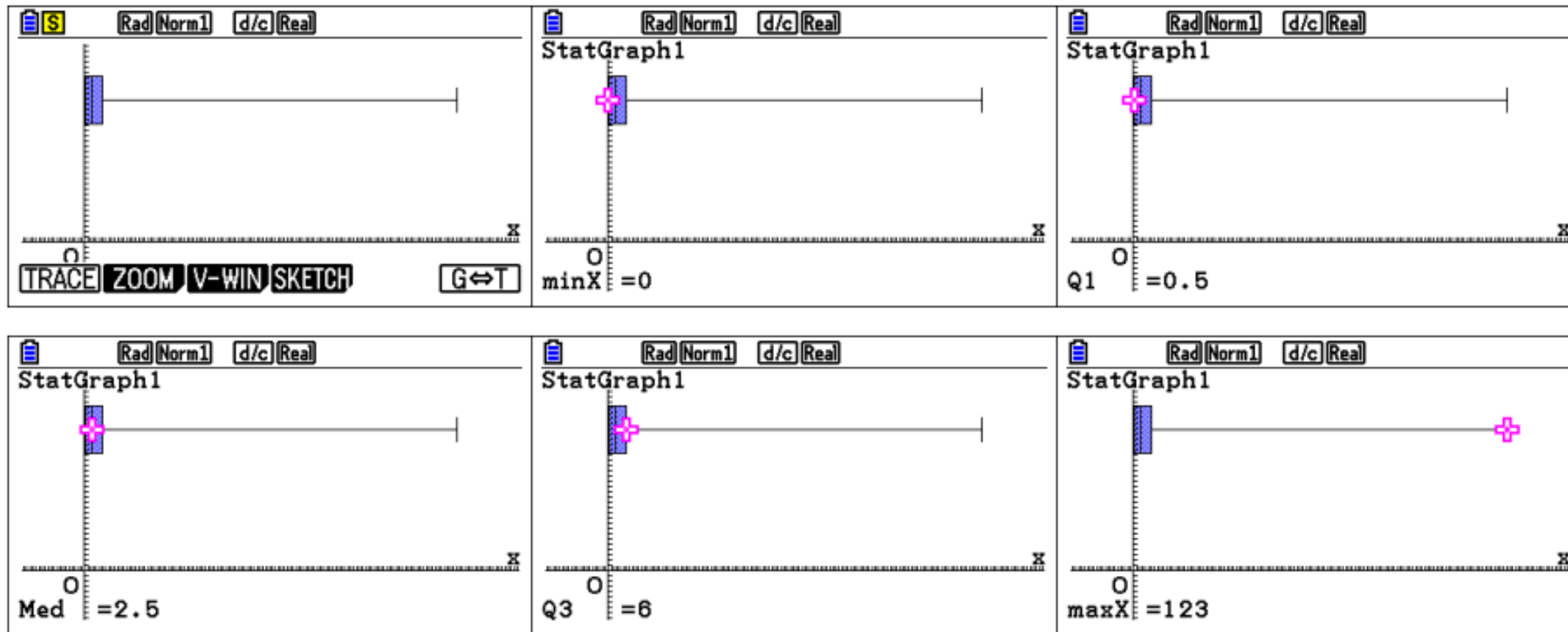
Nota: Diagrama sem identificação de outliers:



Podemos observar os valores dos quartis pressionando F1(1-var):

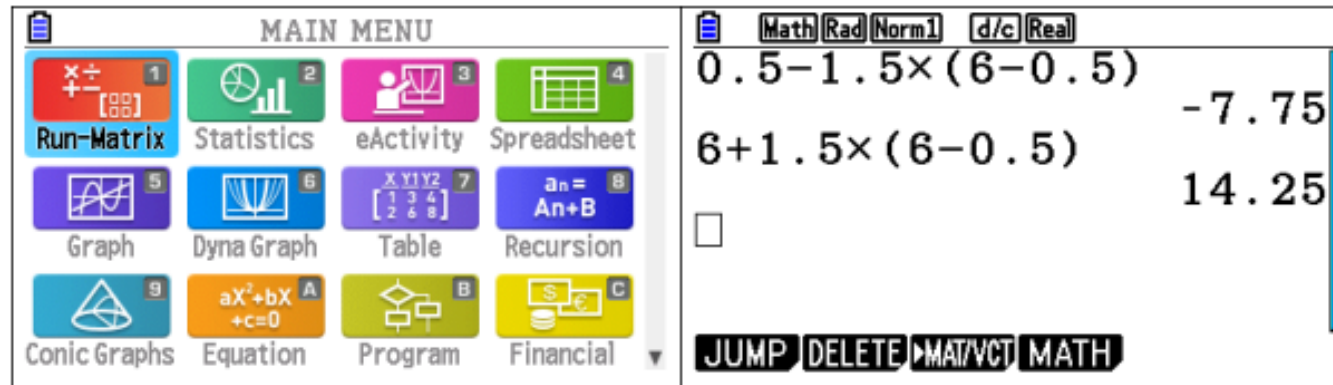


ou, pressionando a tecla SHIFT, seguido de F1 (trace), e utilizar o cursor para visualizar os valores do mínimo, Q1, Q2, Q3 e máximo, da distribuição.



No menu RUN, podemos calcular o limite inferior e superior do intervalo

$$[Q1 - 1,5 \times (Q3 - Q1); Q3 + 1,5 \times (Q3 - Q1)]$$



O intervalo obtido é : $[-7,75 ; 14,25]$

Observando a **tabela 1**, última coluna, número de golos verificamos que, segundo este critério apresentado, os únicos valores que não estão contidos no intervalo $[-7,75 ; 14,25]$ são o 17 e o 123. Logo, são *outliers* 17 golos marcados e 123 golos marcados.

Link avaliação: <https://forms.gle/M6EfHvGxVjRWBvDZ7>

Questões?

AGRADECEMOS A VOSSA PRESENÇA!