

Sessão Prática 2

Estudo das MACS

Tarefa 1 – Modelo Contínuo: Função logarítmica e exponencial

A ilha de Dujal é um dos destinos de férias mais procurados pelos clientes da agência de viagens Ir&Voltar, devido à diversidade da sua flora.

Para preservar duas espécies de plantas, A e B, que, em dado momento, se encontravam em vias de extinção, foi criado, num viveiro, um projeto de reflorestação, com a duração de dois anos.

O número aproximado de plantas da espécie A e de plantas da espécie B, em centenas, existentes no viveiro, t meses após o início do projeto de reflorestação, é dado, respetivamente, pelas expressões

$$A(t) = 30 + 10 \ln(t^3 + 1) \quad e \quad B(t) = 10 + 1,26^t \quad \text{com } t \in [0, 24].$$

Assim, por exemplo, como $A(7) \approx 88,406$ centenas, o número aproximado de plantas da espécie A existentes no viveiro, sete meses após o início do projeto, é 8841.

1) Determine o valor da percentagem de aumento do número de plantas da espécie A existentes em viveiro durante os primeiros dois meses do projeto de reflorestação.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

2) Ao fim de doze meses, o número de plantas da espécie A era, aproximadamente, o _____ do número de plantas da espécie B.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

(A) triplo

(B) quádruplo

(C) quádruplo

(D) sêxtuplo

3) Determine ao fim de quantos dias, após o início do projeto, o número de plantas da espécie A era igual ao número de plantas da espécie B.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Admita que cada mês tem 30 dias.

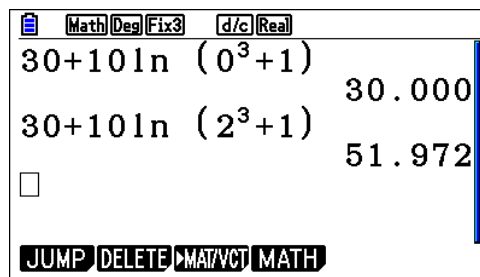
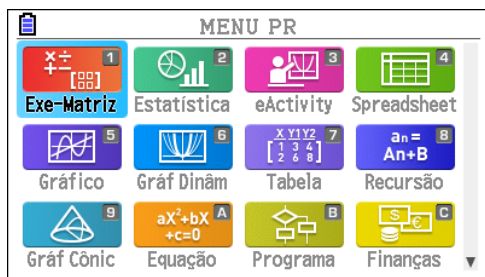
Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

Proposta de Resolução:

1) Entrar no menu Exe-Matriz (menu de cálculo) e de acordo com o modelo dado, determinar o número de plantas da espécie A, no início do projeto da reflorestação ou seja, zero meses após o início do projeto, e, dois meses após o início do projeto, como se mostra de seguida.

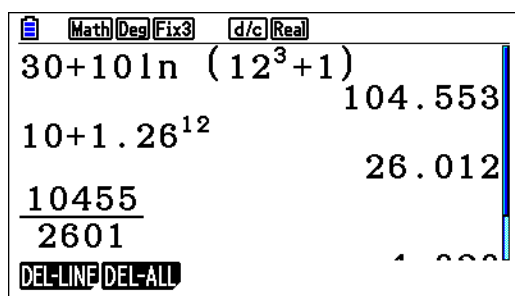


$$A(0) = 30 \text{ centenas} = 3\,000$$

$$A(2) = 51,972 \text{ centenas} \approx 5\,197$$

O aumento do número de plantas, nos primeiros dois meses do projeto foi de $5\,197 - 3\,000 = 2\,197$, correspondendo a $\frac{2197}{3000} \times 100 = 73\%$

2) Usando ainda o menu Exe-Matriz, vamos calcular os valores pretendidos correspondentes ao número de plantas de cada espécie ao fim de 12 meses.



$$A(12) = 30 + 10 \ln(12^3 + 1)$$

$$A(12) \approx 104,553 \text{ centenas}$$

$$A(12) \approx 10\,455$$

$$B(12) = 10 + 1,26^{12}$$

$$B(12) \approx 26,012 \text{ centenas}$$

$$B(12) \approx 2\,601$$

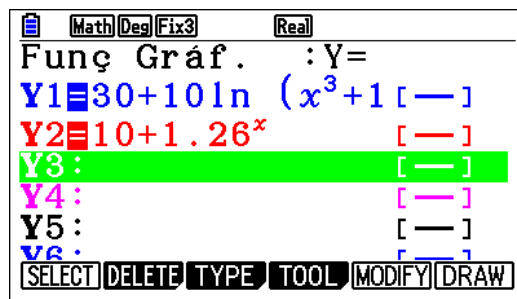
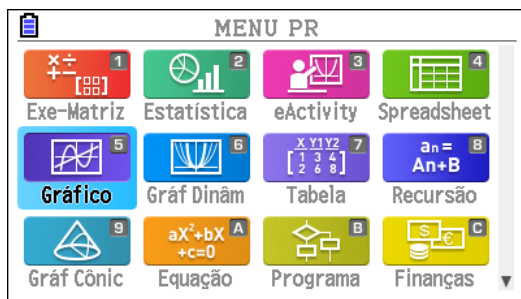
Calculando a razão entre os valores obtidos,

$$\frac{A(12)}{B(12)} \text{ obtém-se } 4, \text{ aproximadamente.}$$

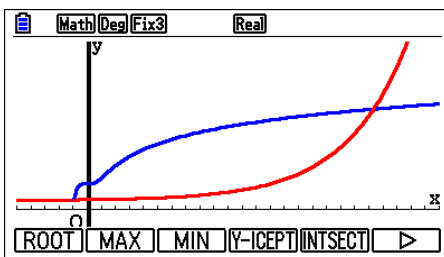
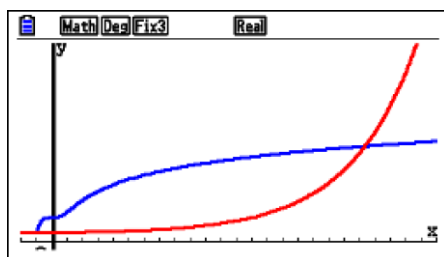
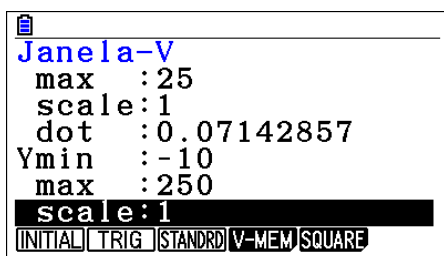
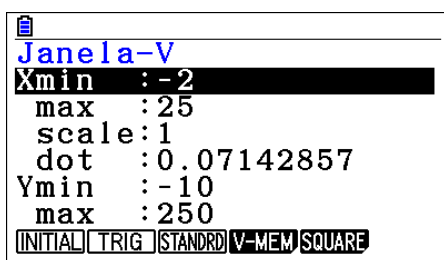
Conclui-se assim que $A(12) \approx 4 \times B(12)$.

Resposta: **Opção B** → “O quádruplo”

3) Entrar no MENU Gráfico da calculadora gráfica para representar os modelos da variação do número de plantas das espécies A e B para os valores de x a variar entre 0 e 24, como se mostram reproduzidos nas imagens seguintes.



Importante – Verificar os valores do domínio e contradomínio da calculadora gráfica usando as funcionalidades da mesma.



Procedimentos da Calculadora Gráfica com um exemplo de valores a atribuir para a Janela de Visualização:

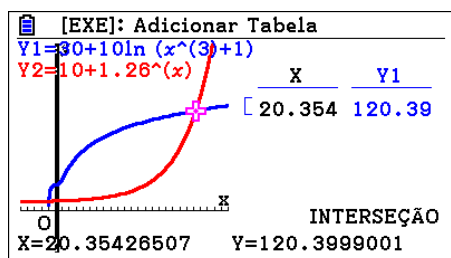
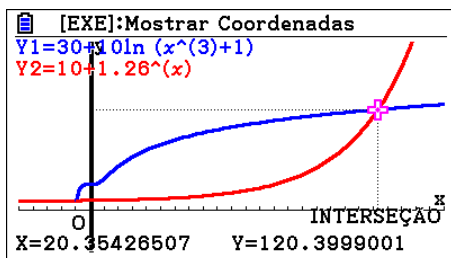
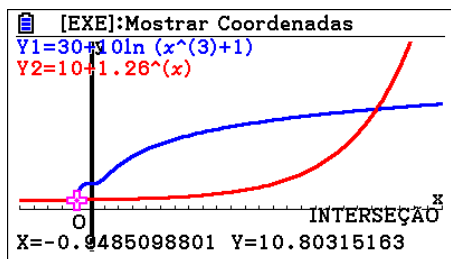
SHIFT F3 (V-Window)
(←) 2 EXE 2 5 EXE 1 EXE (▼)
(←) 1 0 EXE 2 5 0
EXE 1 EXE EXE F6 (DRAW)

Nota – Para regressar ao menu anterior executa-se a tecla **EXIT**

Para determinar os valores aproximados do ponto de interseção deve primeiro obter a representação gráfica e utilizar as seguintes funcionalidades da calculadora:

F5 (G-Solv) F5 (INTSECT) F5 EXE (▶)

(passa ao ponto de interseção cuja abcissa é positiva).

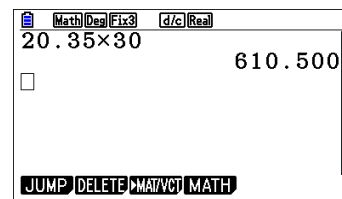


Considerando que o valor de x é positivo, o ponto tem de coordenadas (20,35; 120,4).

Nota - Como nem sempre o ponto aparece pouco visível, podemos recorrer à visualização do gráfico e tabela em simultâneo.

Basta alterar em **F2** **SHIFT** **MENU** **▼** para “G to T” em Dual Screen.

Ao fim de 20,35 meses o número de plantas das duas espécies é igual. Isto é, correspondendo às unidades, ao fim de $20,35 \times 30 \approx 611$ dias.



Tarefa 2 – Distribuição Normal

Admita que uma população de jovens com 18 anos de idade realiza um teste de QI cujos resultados seguem uma distribuição normal de valor médio 100 e desvio padrão 15.

Recorrendo à calculadora:

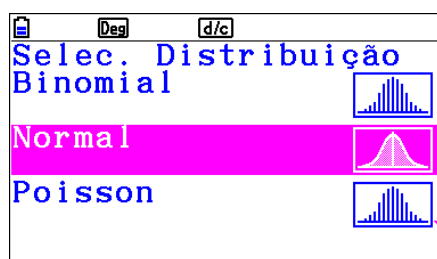
- 1) Represente graficamente as situações seguintes e estime a percentagem de jovens que têm um QI:
 - a) Entre 110 e 119 (*inteligência acima da média*);
 - b) Superior ou igual a 120 (*inteligência superior ou muito superior*).
- 2) Estime o intervalo de QI centrado na média, que contém aproximadamente 77% da população;

Proposta de Resolução:

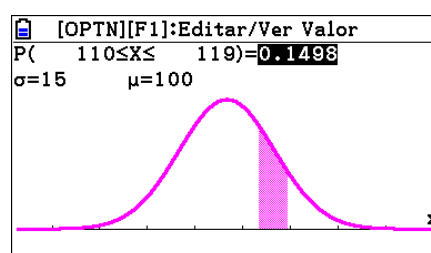
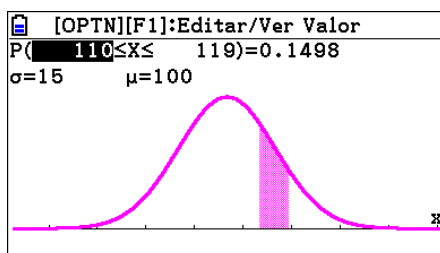
1º Processo (Apenas para a Calculadora fx-CG50)

- 1) Entre no Menu Distribuição da calculadora gráfica e executar.

Nota – Caso não tenha este MENU na sua calculadora fx-CG50, basta atualizar a máquina através da página da Casio.

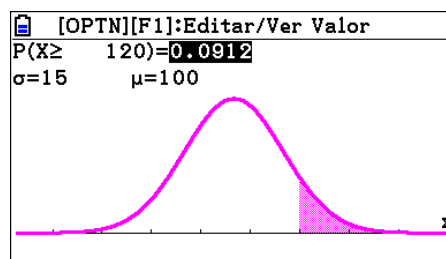
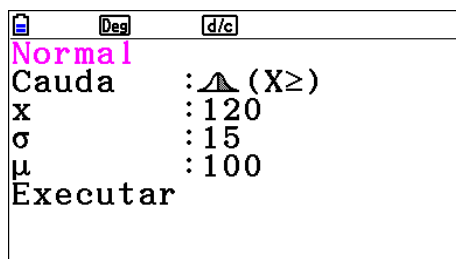


a) Para introduzir os extremos do intervalo, valor médio e desvio padrão, pressione **[F2]**, obtendo de seguida os resultados seguintes.



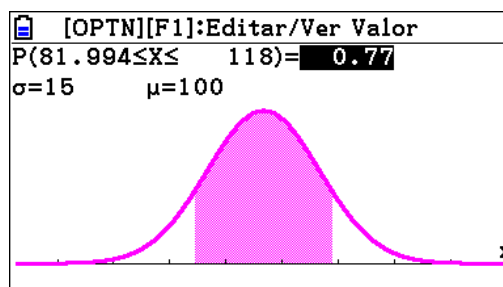
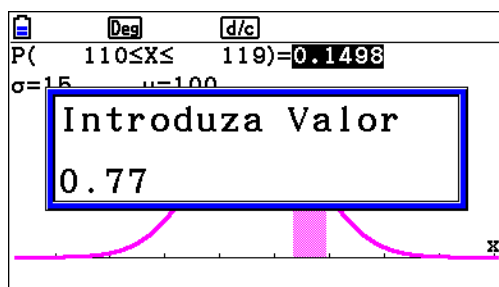
A percentagem de jovens com um QI entre 110 e 119 é aproximadamente 15%.

b) Pressionar **[F3]** para usar o modelo adequado a esta alínea e introduzir o valor 120.



A percentagem de jovens com um QI superior ou igual a 120 é aproximadamente 9%.

2) Usando o modelo da questão anterior, alínea a, posicionar o cursor sobre o valor obtido da probabilidade e escrever o valor da probabilidade 0,77 e executar com a tecla **[EXE]**.



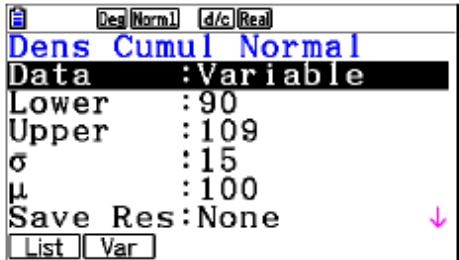
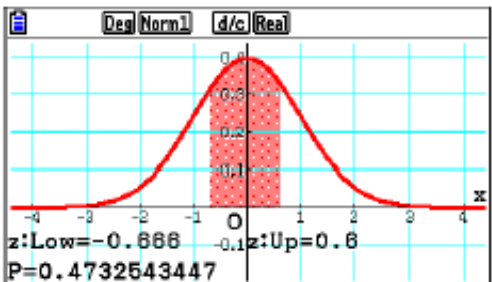
De observar que se alteram os extremos do intervalo após introduzir o valor 0,77 que corresponde a 77%.

O intervalo de QI, centrado na média e que contém 77% da população, é [82, 118].

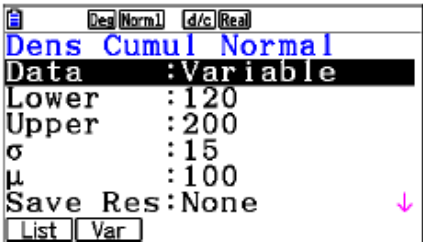
2º Processo:

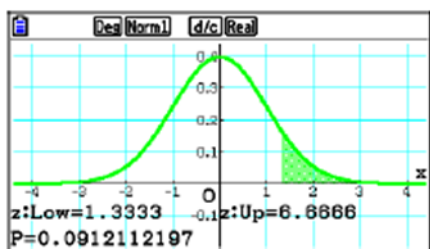
Nas calculadoras de versões anteriores, os procedimentos são os seguintes:

a) entre 90 e 109;

	No menu <i>Estatística</i> (MENU 2), pressione F5(DIST) F1(NORM) F2(Ncd). Coloque o cursor sobre «Data» e pressione F2(Var). Indique o limite inferior (<i>lower</i>), o limite superior (<i>upper</i>), o desvio-padrão e o valor médio. Coloque o cursor sobre «Executar» e pressione F6(DRAW).
	A percentagem de jovens com um QI entre 90 e 109 é aproximadamente 47%.

b) superior ou igual a 120 (*inteligência superior ou muito superior*).

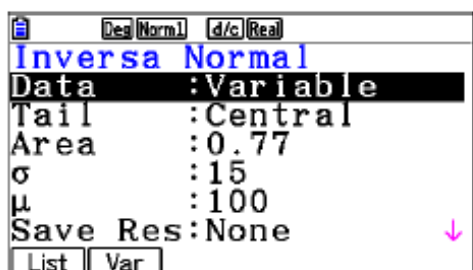
	Pressione EXIT para regressar ao ecrã de configuração. Neste caso, para o limite superior, considere um valor elevado (por exemplo, 200).



A percentagem de jovens com um QI superior ou igual a 120 é aproximadamente 9%.

2. Estime:

a) o intervalo de QI centrado na média, que contém aproximadamente 77% da população;



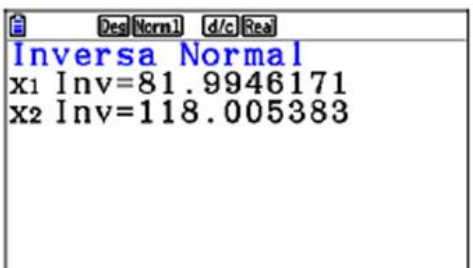
Pressione **EXIT** **EXIT** para regressar às listas.

Seguidamente, carregue em **F5** (DIST) **F1** (NORM) **F3** (InvN).

Coloque o cursor sobre «Tail» e pressione **F3** (CENTRAL).

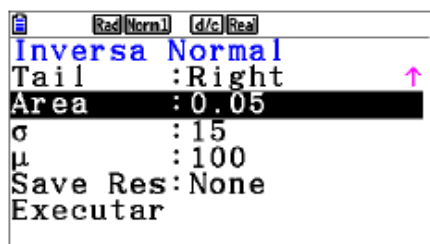
Depois, coloque o cursor sobre «Area», escreva «0.77» e pressione **EXE**.

Por fim, coloque o cursor sobre «Executar» e pressione **F1** (CALC).



O intervalo de QI, centrado na média e que contém 77% da população, é [82, 118].

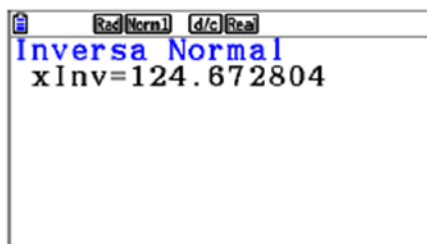
b) o QI a partir do qual se encontra apenas 5% da população.



Pressione **EXIT** para regressar ao ecrã de configuração.

Coloque o cursor sobre «Tail» e pressione **F2** (RIGHT).

Depois, coloque o cursor sobre «Area», escreva «0.05» e pressione **EXE**.



Apenas 5% da população tem um QI superior a 125.

Tarefa 3 - Regressão Linear

Na tabela seguinte, apresenta-se o número de habitantes de Pontes de Cima entre 1980, ano do início da contagem, e 2010, ano do último registo conhecido. Considere que $t = 0$ corresponde ao ano 1980, sendo t o número de anos que decorrem a partir do início da contagem.

Ano	t	Número de habitantes (N)
1980	0	650
1985	5	940
1990	10	1380
1995	15	1999
2000	20	2373
2005	25	2712
2010	30	5526

A Joana é aluna da escola secundária desta localidade. Ao estudar os dados apresentados na tabela anterior, constatou que, tendo em conta apenas os valores de N correspondentes a $t = 0, 5, 10, 15$ e 20 , um modelo matemático que se ajusta bem a esses pontos é $y = a \times t + b$ (sendo y o número de habitantes e t , o número de anos que decorrem a partir do início da contagem, em 1980).

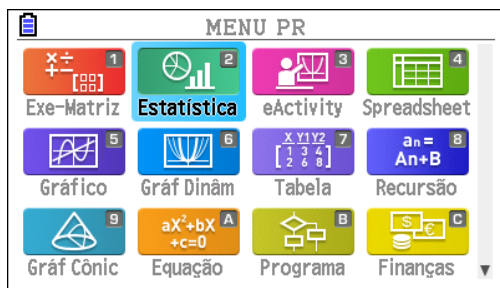
Determine o valor aproximado do crescimento anual do número de habitantes da localidade, de acordo com o modelo apresentado pela Joana.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Retirado e adaptado do Exame Nacional de MACS 2013, 2ª Fase.

Proposta de Resolução:

Entre no **MENU Estatística** da calculadora gráfica e introduza os valores de $t = 5, 10, 15$ e 20 na lista 1 e, o número de habitantes na lista 2 como a seguir se indica.



	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0			
2	5			
3	10			
4	15			

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	650		
2	5	940		
3	10	1380		
4	15	1999		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
3	10	1380		
4	15	1999		
5	20	2373		
6				

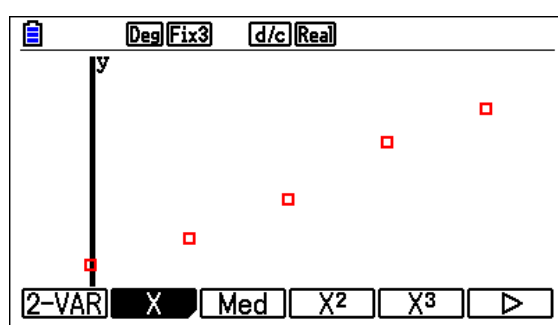
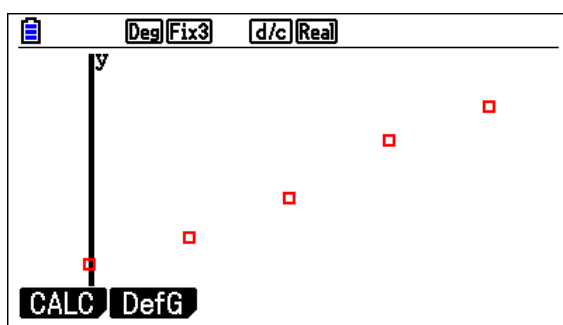
Para determinar a regressão na forma $y = ax + b$ seguir os seguintes passos, partindo da representação do diagrama de dispersão ou gráfico de pontos designado na calculadora por Scatter.

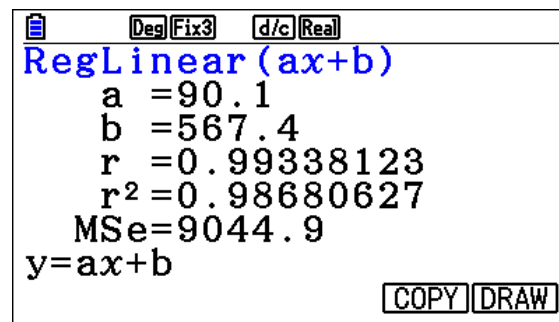
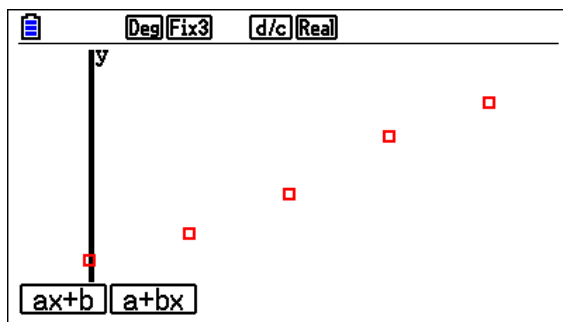
Para determinar a regressão na forma, $y = ax + b$, seguir os procedimentos ao lado, partindo da representação do diagrama de dispersão ou gráfico de pontos designado na calculadora por Scatter.

F1 (GRAPH) → **F6** (SET para definir o tipo de gráfico - Scatter) **EXE** **F1** (GRAPH1) → **EXE** → **F1** (CALC) → **F2** (X para representar o modelo Linear) → **F1** ($ax + b$).

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	650		
2	5	940		
3	10	1380		
4	15	1999		

StatGraph1
Graph Type : Scatter
XList : List1
YList : List2
Frequency : 1
Mark Type : ☐
Color Link : Off
GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3





A equação da reta é $y = 90x + 567$.

Tratando-se de um modelo linear, a variação anual é dada pelo declive da reta, logo tem-se uma variação de 90 habitantes por ano.

Tarefa 4 – Intervalo de confiança para a proporção

Com o intuito de saber qual dos três destinos turísticos, Caraíbas, Dubai ou Maldivas, seria o mais pretendido pelos seus clientes, a responsável pelo marketing da agência de viagens Ir&Voltar selecionou, ao acaso, alguns dos clientes da agência, e estes indicaram o seu destino favorito de entre os destinos referidos.

Na Tabela seguinte, estão registadas as preferências indicadas pelos clientes selecionados.

Destino	Caraíbas	Dubai	Maldivas
N.º de Clientes	125	400	100

A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito, em vez das Caraíbas ou das Maldivas, considerando a amostra de clientes constituída pela responsável do marketing, é 0,075264.

Determine o nível de confiança desse intervalo.

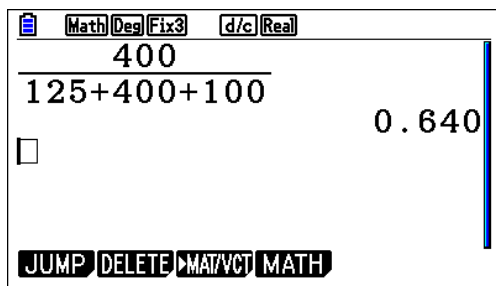
Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

Retirado e adaptado do Exame Nacional de MACS 2022, 1ª Fase.

Proposta de Resolução:

O número de inquiridos, ou seja, a dimensão da amostra é 625 ($n = 125 + 400 + 100$).

A proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito relativa a esta amostra é igual a 0,64 como mostram os cálculos seguintes.



Considerando o intervalo de confiança para a proporção e que a amplitude deste é igual a 0,075264 tem-se a equação seguinte:

$$2z \sqrt{\frac{0,64(1 - 0,64)}{625}} = 0,075264$$

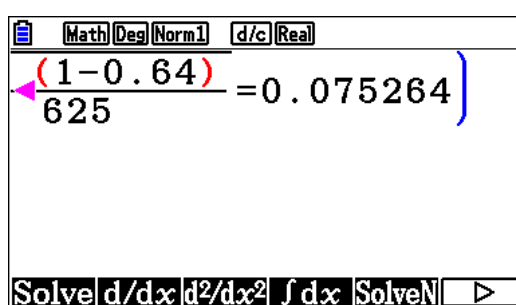
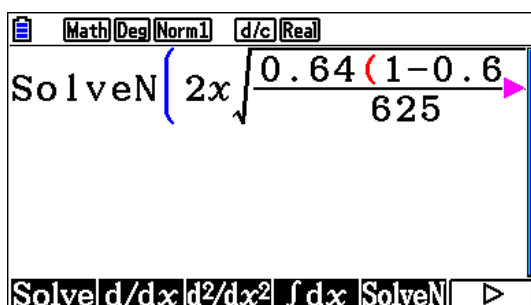
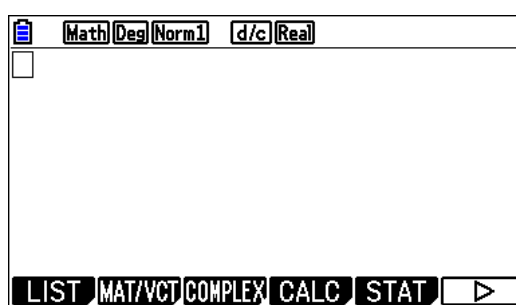
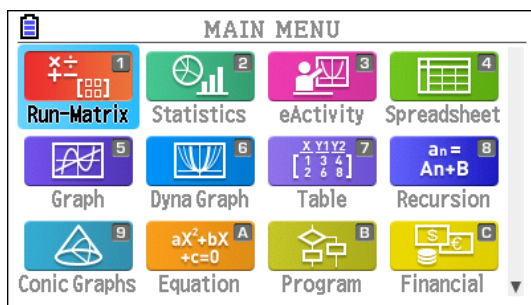
$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

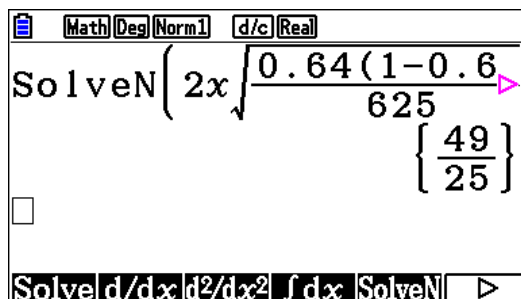
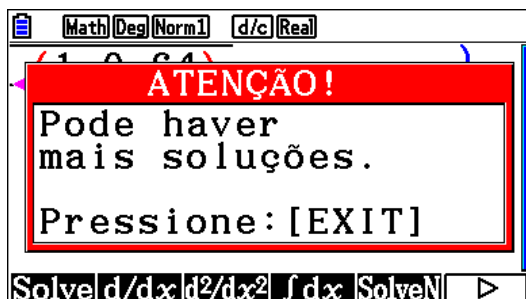
$$2z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Vamos resolver a equação anterior na calculadora para determinar o valor de z.

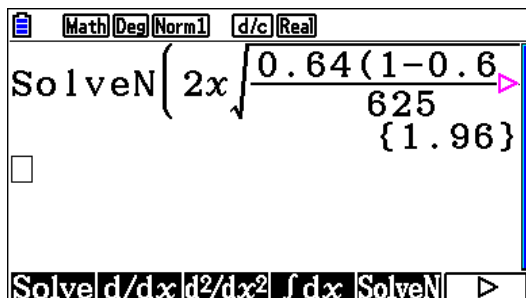
Equação → $2 \times z \sqrt{\frac{0,64(1 - 0,64)}{625}} = 0,075264$

No **MENU EXE-Matriz** usar as opções com **OPTN** e de seguida **CALC** (F4). Como a equação pode admitir mais que uma solução utilizar **SolveN** (F5), escrever a equação, executar **EXE** e **EXIT** (quando surgir a mensagem da calculadora) como se mostra nas imagens seguintes.





Pressione a tecla **[S/D]** para obter a dízima correspondente como mostra a imagem seguinte.



$z = 1,96$

O valor de z obtido corresponde a um nível de confiança de 95 %.

Formulário

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576