Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 28 DE JUNHO DE 2023

1.

Tem-se que:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(e^{1}\right)^{2}=e^{2}.$$

Resposta correta: (C)

2.

Seja (u_n) a sucessão que dá o comprimento do $n-$ésimo segmento de reta da linha poligonal. Assim, u_1 é o comprimento do primeiro segmento de reta, isto é $u_1=\overline{AB}$. Como cada segmento de reta, à exceção do primeiro, tem mais 2 cm do que o anterior, isto é, $u_{n+1}=u_n+2 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, vem que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Além disso, prosseguindo a construção da linha até ao centésimo segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com 104 metros de comprimento, o que quer dizer que a soma dos 100 primeiros termos de (u_n) é 10400, dado que 104 metros correspondem a 10400 centímetros. Portanto:

$$S_{100}=10400 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_{100}}{2}\times 100=10400 \underset{u_{100}=u_1+99\times 2}{\Leftrightarrow} \frac{u_1+u_1+99\times 2}{2}=104 \Leftrightarrow \frac{2u_1+198}{2}=104 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2u_1+198=104\times 2 \Leftrightarrow 2u_1=208-198 \Leftrightarrow 2u_1=10 \Leftrightarrow u_1=5$$

Logo, o comprimento do segmento de reta $[AB]$ é 5 cm.

3.

Para estudar a função f quanto ao sentido das concavidades e ponto de inflexão do seu gráfico, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f :

$$\begin{aligned}f''(x) &= (-2x)' e^{1-x^2} + (-2x)(1-x^2)' e^{1-x^2} = \\ &= -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = \\ &= -2e^{1-x^2} + 4x^2 e^{1-x^2} = \\ &= e^{1-x^2}(4x^2-2)\end{aligned}$$

Determinemos agora os zeros da segunda derivada da função f :

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2}=0}_{Eq.\ impossível\ em\ \mathbb{R}} \vee 4x^2-2=0 \Leftrightarrow 4x^2=2 \Leftrightarrow x^2=\frac{2}{4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{4}} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Elaborando um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	+	+	+	+	+
$4x^2-2$	+	0	−	0	+
f''	+	0	−	0	+
Gráfico de f	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e tem pontos de inflexão em $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e em $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1.

A função g é contínua em $x=1$ se, e só se, $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} g(x) = g(1)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

- $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} = 4\times \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$ (indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$).

  Fazendo uma mudança de variável do tipo: $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$, tem-se que $x \to 1^-$ logo $y \to 0^-$

  Assim,

  $$4\times \lim_{x\to1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = 4\times \lim_{y\to0^-} \frac{y}{e^{y}-1} = 4\times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}}_{\textit{limite notável}}} = 4\times\frac{1}{1} = 4$$

  pelo que: $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = 4$ (1)

- $g(1) = 7\times 3^{1-1} - 3 = 4$ (2)

- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(7\times 3^{x-1} - 3\right) = 4$. (3)

Por (1), (2) e (3) conclui-se que $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} g(x) = g(1)$.

Logo, g é contínua em $x=1$.

4.2.

Comecemos por notar que, para $x \in \left[1,+\infty\right[$, $x-1 \geq 0$, então $3^{x-1} \geq 1$ e portanto, $7\times 3^{x-1} - 3 \geq 4$, isto é no intervalo $\left[1,+\infty\right[$ tem-se que $g(x) > 0$.

Seja então, $x \in \left[1,+\infty\right[$ tal que:

$$\begin{aligned}
\log_3\left(g(x)\right) = x + \log_3(2) &\Leftrightarrow \log_3\left(7\times 3^{x-1} - 3\right) = \log_3 3^x + \log_3(2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log_3\left(7\times 3^{x-1} - 3\right) = \log_3\left(3^x \times 2\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 7\times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 7\times 3^{x-1} - 3^x \times 2 = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{7}{3}\times 3^x - 3^x \times \frac{6}{3} = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 3^x = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3^{-1}\times 3^x = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = 2 \in \left[1,+\infty\right[
\end{aligned}$$

Assim, $C.S. = \{2\}$.

5.

5.1.

Considerando _ D A F _ _ _ _ _ _

Calculando o número de grupos ordenados dos três jovens, temos $3!$ grupos. E por cada um destes grupos, existem $8!$ ordenações possíveis dos 10 jovens, correspondendo à ordenação dos restantes 7 jovens e de um destes grupos, considerando a ordem relevante. Assim, o número de formas diferentes de dispor os 10 jovens na fila é:

$$3! \times 8! = 241920 .$$

Resposta correta: (B)

5.2.

Sejam os acontecimentos A: "Praticar surf" e B: "Praticar Skate".

Sabemos que, $P(A) = 0{,}65$, $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}20$ e $P(B|A) = \frac{4}{5}$, ou seja, $P(B|A) = 0{,}80$.

Como

$$P(B|A) = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{0{,}65} = 0{,}8 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}65 \times 0{,}8 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}52$$

temos

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,52	0,13	0,65
$\overline{A}$	0,20	0,15	0,35
Total	0,72	0,28	1

Assim,

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28} .$$

5.3.

Se n representar o número de jovens com 13 anos então, $70 - n$ representa o número de jovens com 14 anos.

Considerando o acontecimento X : "Selecionar dois jovens com idades distintas", temos que: $P(X) = \frac{16}{35}$.

Número de casos possíveis é dado por ${}^{70}C_2$, ou seja, escolher 2 alunos de um grupo de 70.

Número de casos favoráveis é dado por exemplo ${}^{n}C_1 \times {}^{70-n}C_1$, ou seja, escolher 1 aluno de 13 anos e 1 aluno de 14 anos.

Logo,

$$P(X)=\frac{16}{35} \Leftrightarrow \frac{{}^{n}C_1 \times {}^{70-n}C_1}{{}^{70}C_2}=\frac{16}{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(70-n)}{{}^{70}C_2}=\frac{16}{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(70-n)}{2415}=\frac{16}{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 35\times\left(70n-n^2\right)=16\times 2415 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2450n-35n^2-38640=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2-70n+1140=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=24 \vee n=46$$

Como o número de jovens com 13 anos é inferior ao número de jovens com 14 anos, podemos concluir que neste grupo há 24 jovens com 13 anos.

6.

6.1.

As retas OD e AC são paralelas, pelo que, sendo $\vec{u}(0,4,3)$ um vetor diretor de AC, então $\vec{u}$ é também vetor diretor de OD, assim como qualquer vetor colinear com este. Das opções apresentadas, apenas um dos vetores é colinear com $\vec{u}$, o vetor $\vec{v}\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, dado que $\vec{u}=2\vec{v}$. Assim, eliminamos as opções **C** e **D**.

Das opções **A** e **B**, a única a que contém o ponto $O(0,0,0)$ é a opção B, dado que:

$$(0,0,0)=(0,-4,-3)+k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=-4+2k \\ 0=-3+\frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 4=2k \\ 3=\frac{3}{2}k \end{cases} \begin{cases} 0=0 \\ 0=-4+2k \\ 0=-3+\frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

Resposta correta: (B)

6.2.

O ponto C é o ponto de intersecção da reta AC com o plano BCE.

Como o ângulo ACB está inscrito numa semicircunferência, vem que $A\hat{C}E = 90^{\circ}$, pelo que a reta AC é perpendicular o plano BCE e, portanto, um vetor normal a BCE é $\vec{u}(0,4,3)$.

Logo, $BCE: 4y + 3z + d = 0$.

Como $E(0;12,5;0)$, dado que $\overline{OE} = 12,5$, vem que:

$$4 \times 12,5 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50 \Rightarrow BCE: 4y + 3z - 50 = 0$$

Sabendo que a equação da reta AC pode ser definida por: $(x,y,z) = (10,0,0) + k(0,4,3),\ k \in \mathbb{R}$ então, um ponto genérico desta reta é do tipo $(10,\ 4k,\ 3k)$.

Substituindo este ponto genérico na equação do plano BCE, temos que k é:

$$4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \Leftrightarrow 16k + 9k = 50 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = 2$$

De onde se conclui que $C(10,\ 4 \times 2,\ 3 \times 2)$, ou seja, $C(10,8,6)$.

7.

Consideramos as coordenadas dos pontos P e Q em função de α.

Assim, temos que: $Q(2\cos\alpha,\ 2\operatorname{sen}\alpha)$ e $P(2\cos\alpha,\ -2\operatorname{sen}\alpha)$

Considerando os vetores $\overrightarrow{OQ}(2\cos\alpha,\ 2\operatorname{sen}\alpha)$ e $\overrightarrow{OP}(2\cos\alpha,\ -2\operatorname{sen}\alpha)$ e sabendo que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$, então:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3 &\Leftrightarrow (2\cos\alpha,\ -2\operatorname{sen}\alpha) \cdot (2\cos\alpha,\ 2\operatorname{sen}\alpha) = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - 4\operatorname{sen}^2\alpha = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4\cos(2\alpha) = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

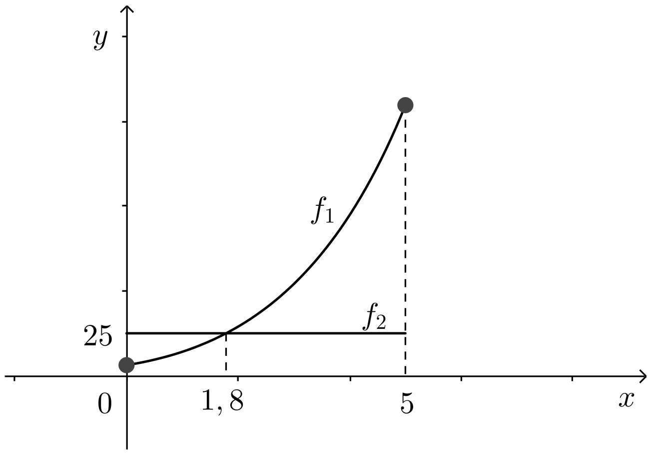
8.

A equação que permite resolver o problema é $a(t+3)-a(t)=25$ (ou uma equivalente).

Considerando $f_1 = a(x+3)-a(x)$ e $f_2 = 25$, determinamos o ponto de interseção dos gráficos das duas funções com o auxilio da calculadora gráfica.

Como $t \in [0, 8]$ então, $t+3 \leq 8$ logo $t \leq 5$.

Assim, obtemos a seguinte representação gráfica:



Logo o instante a partir do qual, durante 3 segundos, o foguete percorre $25m$ é $1{,}8s$.

9.

(I) "*O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$*".

A proposição é falsa pois, a afirmação "$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x + 1 \right) = 0$" é equivalente à afirmação "a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$", pelo que não existe assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

(II) "$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$".

Pelo facto de a função g ser diferenciável, podemos concluir que é contínua, em particular é contínua em $x = 1$, isto é, existe o $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Assim, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1)$.

Como a reta r é tangente ao gráfico de g, sabemos que a ordenada do ponto de abcissa 1 pode ser determinada a partir do cálculo: $2 \times 1 - 1 = 1$; isto é, $g(1) = 1 \neq 2$.

Logo a proposição é falsa.

(III) "$f''(x) < g''(x),\ \forall x \in \left]0,+\infty\right[$"

A proposição é falsa pois sabemos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima, isto é, $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geq 0$ e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo, isto é, $\forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ g''(x) \leq 0$ o que implica que $f''(x) \geq g''(x),\ \forall x \in \left]0,+\infty\right[$.

10.

Sabendo que:

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ pois $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$

$\arg(w) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8}$

Logo

$$\arg(w \times z) = \arg(w) + \arg(z) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{8}$$

A opção correta é a C.

Resposta correta: (C)

11.

Simplifiquemos w:

$$w = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i^{16\times i}}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2}{-i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Como $\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ e, sendo $\arg(w) = \theta$, $\theta \in 2^{\circ}Q$ temos que:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$, pelo que $\arg(w) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

$$z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\}$$

$$k = 0 \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)} = cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$R: \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \ e \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

12.
12.1.
Tem-se que:

$$f'(x)=\left(\operatorname{sen}(2x)+x\right)'=2\cos(2x)+1=2\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)+1=2\left(1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)+1=$$

$$=2\left(1-2\operatorname{sen}^2 x\right)+1=2-4\operatorname{sen}^2 x+1=3-4\operatorname{sen}^2 x$$

Resposta correta: (D)

12.2.
Pretende-se mostrar que a equação $f(x)=-x+2$ tem pelo menos uma solução em $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$, ou seja:

$$\exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[:f(c)=-c+2\Leftrightarrow\exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[:f(c)+c-2=0$$

Seja g definida em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ por $g(x)=f(x)+x-2=\operatorname{sen}(2x)+x+x-2=\operatorname{sen}(2x)+2x-2$

- g é contínua em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ pois resulta de operações elementares entre funções contínuas no seu domínio.
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)+2\times\frac{\pi}{6}-2=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}-2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}-2\approx-0,09\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$
- $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)+2\times\frac{\pi}{3}-2=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}-2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}-2\approx0,96\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$

Logo, como $g\left(\frac{\pi}{6}\right)<0<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy:

$$\exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[:g(c)=0\ \Leftrightarrow\exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[:f(c)+c-2=0$$

Fica assim provado que o gráfico da função f e a reta r se intersetam pelo menos uma vez num ponto de abcissa pertencente a $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$.

13.

Seja P o ponto de tangência e x a sua abcissa.

Como P é ponto de tangência, temos $f'(x)=a \Leftrightarrow 2ax+b=a \Leftrightarrow x=\dfrac{a-b}{2a}$

e também

$$ax^2+bx=ax+b \Leftrightarrow ax^2+(b-a)x-b=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(b-a)\pm\sqrt{(b-a)^2+4ab}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab+a^2+4ab}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{a-b\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{a-b\pm\sqrt{(a+b)^2}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\left(\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|\right)}{\Leftrightarrow} x=\frac{a-b\pm(a+b)}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{a-b+a+b}{2a} \vee x=\frac{a-b-a-b}{2a} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{b}{a}$$

Se $x=1$ então, $1=\dfrac{a-b}{2a} \Leftrightarrow 2a=a-b \Leftrightarrow a=-b$.

Se $x=-\dfrac{b}{a}$ então, $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a-b}{2a} \Leftrightarrow -2b=a-b \Leftrightarrow a=-b$

Logo, substituindo a por $-b$ e x por 1 na equação da reta $y=ax+b$ obtemos:

$y=a+b \Leftrightarrow y=-b+b \Leftrightarrow y=0$

Assim, as coordenadas do ponto de tangência são $(1,0)$.

FIM