Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 30 DE JUNHO DE 2022

1.

A opção correta é a B, pois:

para n par, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e para n ímpar, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{-1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

Logo, $lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, sendo, portanto, convergente.

Resposta correta: (B)

2.

Seja (u_n) a progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ cuja soma dos seus cinco primeiros termos é 211.

Assim, como a soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica (u_n) é dada por:

$$u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}, \text{ vem que:}$$

$$u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\frac{2^5}{3^5}}{\frac{1}{3}} = 211 \Leftrightarrow 3u_1 \times \left(1-\frac{32}{243}\right) = 211 \Leftrightarrow 3u_1 \times \frac{211}{243} = 211 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3u_1 = \cancel{211} \times \frac{243}{\cancel{211}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{243}{3} \Leftrightarrow u_1 = 81$$

Logo, $u_5 = u_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 81 \times \frac{2^4}{3^4} = \cancel{81} \times \frac{16}{\cancel{81}} = 16$.

3.

Tem-se que $A \cap B = \emptyset$, pelo que os acontecimentos A e B são incompatíveis e portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \underset{\substack{P(\overline{B})=0{,}6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(B)=1-0{,}6 \\ \Leftrightarrow P(B)=0{,}4}}{\Leftrightarrow} 0{,}6 = P(A) + 0{,}4 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}2 .$$

Logo, $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Resposta correta: (D)

4.

Como configurações coloridas diferentes são as que diferem nas casas ocupadas pelas peças usadas ou na cor dessas peças, temos que contabilizar duas situações para responder à questão:

1. Escolher duas casas do tabuleiro das doze disponíveis para que as duas peças, da mesma cor, sejam colocadas, ou seja a partir das 12 casas, vamos formar subconjuntos de 2 elementos: ${}^{12}C_2$

e, em seguida, tendo em conta que há três cores, temos que multiplicar por 3, pois a maneira de escolher 1 cor de entre 3 é ${}^{3}C_1 = 3$, assim temos a parcela $3 \times {}^{12}C_2$.

2. A partir do conjunto das 3 cores, vamos escolher, subconjuntos de duas, o que pode ser feito ${}^{3}C_2$ maneiras. Em seguida, para cada escolha feita, temos de as colocar, ordenadamente, em 2 casas de um tabuleiro com 12 casas numeradas de 1 a 12. Como a permuta de duas cores, ente duas casas do tabuleiro, gera duas configurações diferentes, temos ${}^{12}A_2$ maneiras de as colocar, e assim temos a parcela ${}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$.

Assim, se justifica a expressão apresentada: $3 \times {}^{12}C_2 + {}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$.

5.

Seja S: "O aluno jogou semáforo" e R: " O aluno jogou Rastros".

Sabemos que, $P(S) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{R}) = \frac{1}{4}$ e $P(S|\overline{R}) = \frac{1}{5}$

Como:

- $P(S|\overline{R}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(S \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow P(S \cap \overline{R}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$

  $\Leftrightarrow P(S \cap \overline{R}) = \frac{1}{20}$

- $P(S) - P(S \cap R) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(S \cap R) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(S \cap R) = \frac{9}{20}$

	S	$\overline{S}$	
R	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{R}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Então, $P(\overline{S} \cap R) = P(R) - P(S \cap R) = \frac{3}{4} - \frac{9}{20} = \frac{3}{10}$

Logo, a probabilidade de um aluno que participou no torneio não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros é de $\frac{3}{10}$.

6.

6.1.

As coordenadas de um vetor normal, $\vec{n}$, ao plano da base são $(0,4,-3)$, por exemplo.

Se efetuarmos o produto escalar entre este vetor e um vetor normal a cada um dos planos dados pelas respetivas equações gerais em cada uma das opções, verifica-se que nas opções (A) e (B), corresponde a valores diferentes de zero, o que inviabiliza a escolha de cada uma destas duas opções.

Nas opções (C) e (D), o produto escalar entre o vetor $\vec{n}$ considerado e vetores perpendiculares a cada um dos planos tem como resultado o valor zero, bastando para tal ver qual dos planos contem o ponto de coordenadas $(1,2,-1)$.

Substituindo $(1,2,-1)$ na equação do plano temos $3y+4z=8$ obtemos $6-4=8$ que é falso.

Substituindo $(1,2,-1)$ na equação do plano temos $x+3y+4z=3$ obtemos $1+6-4=3$ que é verdadeiro. Assim, esta é a opção correta.

Resposta correta: (D)

6.2.

Comecemos por calcular as coordenadas do ponto A que são do tipo $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$.

Como A pertence ao plano da base do cone tem-se que $4y=16$, isto é, $y=4$.

Conclui-se que as coordenadas do ponto A são $(0, 4, 0)$ e, sendo assim, uma equação vetorial da reta AV é dada por: $(x, y, z)=(0, 4, 0)+k(0, 4, -3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Como as coordenadas de V são do tipo $(x, y, z)=(0, 4, 0)+k(0, 4, -3)$, $k \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$(0, 0, z)=(0, 4, 0)+k(0, 4, -3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=4+4k \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

Conclui-se que $V(0, 0,3)$.

A distância de A a V, que corresponde à altura do cone, é dada por: $\overline{AV}=\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}=5$.

Sendo assim, tem-se que o volume do cone, V_c, é $V_c=\frac{A_b \times \overline{AV}}{3}=\frac{\pi \times 3^2 \times 5}{3}=15\pi\,(u.v.)$.

7.

Da equação da circunferência retira-se que o centro, C, tem de coordenadas $(-2, 1)$ e raio 3.

Sabe-se que o comprimento do arco AB é 2π, logo, $2\pi=\alpha \times 3$, isto é, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, em que $\alpha = A\hat{C}B$

Tem-se que:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \times \cos\alpha = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=9 \times \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{9}{2}$$

Conclui-se que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}=-\frac{9}{2}$.

8.

8.1.

A função f é contínua em $x = 2$ se e só se $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe.

f é contínua em $x = 2$ se, e só se, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)} \right),$$

(indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$)

Fazendo a mudança de variável: $y = x-2 \Leftrightarrow x = y+2$ como $x \to 2^-$ então $y \to 0^-$.

Assim,

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)} \right) = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right)}_{\textit{limite notável}} \times \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x+2} \right) = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Por (1) e (2) concluímos que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = \frac{1}{4}$

Logo, f é contínua em $x = 2$

8.2.

Para estudar a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos no intervalo $]-\infty, -2]$, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de f nesse intervalo:

$$\left(\frac{e^{2-x}}{x+2} \right)' = \frac{-e^{2-x}(x+2) - e^{2-x} \times 1}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2}$$

Determinemos, agora, os zeros da derivada no intervalo considerado:

$$\frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow e^{2-x}(-x-3) \wedge (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{e^{2-x} = 0}_{\textit{equação impossível}} \vee -x-3 = 0 \right) \wedge (x+2)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \neq -2$$

x	$-\infty$	-3		-2
$e^{2-x}(-x-3)$	+	0	-	n.d.
$(x+2)^2$	+	+	+	n.d.
Sinal de f'	+	0	-	n.d.
Variação de f	↗	Máx.	↘	n.d.

Conclusão:

- A função f é estritamente crescente em $]-\infty, -3]$ e estritamente decrescente em $[-3, -2[$.
- A função f tem um máximo relativo para $x = -3$, que é $f(-3) = \frac{e^5}{-1} = -e^5$.

9.

9.1.

Considerando que o ponto mais próximo do solo é equidistante dos dois postes e considerando a base do poste esquerdo como origem de um referencial, a distância procurada é a distância entre a origem e o ponto de coordenadas $(5,\ h(5))$.

Calculando $h(5)$, temos:

$h(5) = 6{,}3(1+1) - 7{,}6 = 5$

Assim, a distância entre os pontos de coordenadas $(0,\ 0)$ e $(5,\ 5)$ é: $d = \sqrt{(5-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$.

Resposta correta: (A)

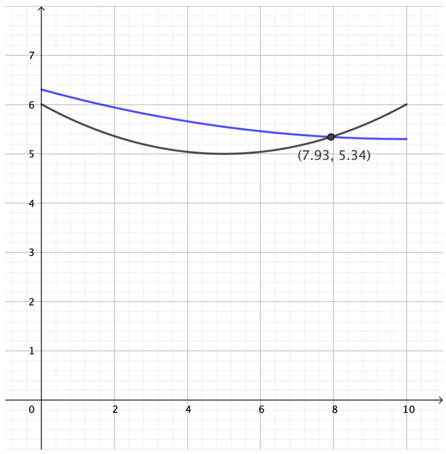
9.2.

Seja d a distância, em metros, ao poste da esquerda, logo 50% da distância d é $\frac{1}{2}d$.

Uma equação que traduz o problema é:

$$h(d) = h\left(\frac{1}{2}d\right) + 0{,}3$$

Consideremos as funções $h(x)$ e $h\left(\frac{1}{2}x\right) + 0{,}3$, e representemos na calculadora gráfica a sua interseção no intervalo $[0{,}10]$.



Observando o gráfico correspondente ao domínio da função verificamos que o valor de d procurado, arredondado às décimas, é 7,9 m

10.

Dado que $Im(w) = -Re(w)$ e $Re(w) > 1$, e considerando $\rho = |w|$ temos que $\rho > \sqrt{2}$ porque $Re(w) > 1$.

Como $Im(w) = -Re(w)$ um argumento de W é, por exemplo, $\frac{7\pi}{4}$.

Pelo exposto, seja $w = \rho e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Assim, $w^2 = \rho^2 e^{i\frac{7\pi}{2}}$ e como $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ vem que:

$$-iw^2 = \rho^2 e^{i\frac{7\pi}{2}} \times e^{i\frac{3\pi}{2}} = \rho^2 e^{i\frac{10\pi}{2}} = \rho^2 e^{i\,5\pi} = \rho^2 e^{i\,\pi}.$$

Observando a figura temos que $|\mathrm{B}| < |w|$ e $\rho^2 > 1$, pelo que o afixo de $-iw^2$ é o C.

Resposta correta: (C)

11.

Dado $z^3 = \left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6$

Consideremos:

- $w = -\sqrt{3}+i$, então $|w| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$ e seja $\theta = \arg(w)$, como $\theta \in 2^{\text{o}}Q$ temos que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, de onde se conclui que $w = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$
- $t = \sqrt{3}i$, então $|t| = \sqrt{0^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$ e seja $\beta = \arg(t)$, como t é um imaginário puro positivo tem-se que $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ de onde se conclui que $w = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

Assim, temos que

$$z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6 = \left(\frac{2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^6 e^{6i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^6 e^{6i\left(\frac{2\pi}{6}\right)} = \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i(2\pi)} = 8e^{i(2\pi)} = 8$$

logo

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

Para

$$k=0 \Rightarrow z_0 = 2e^{i\left(\frac{0}{3}\right)}, \quad k=1 \Rightarrow z_1 = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k=2 \Rightarrow z_2 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

Como o afixo pertence ao terceiro quadrante, o número complexo é :

$$z_1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2i\operatorname{sen}\left(4\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}i = -1-\sqrt{3}i$$

12.

Observando a figura e considerando o ponto M a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta AB podemos afirmar que:

- $sen(2x) = \frac{\overline{CM}}{2} \Leftrightarrow \overline{CM} = 2sen(2x)$;
- $cos(2x) = \frac{\overline{MB}}{2} \Leftrightarrow \overline{MB} = 2cos(2x)$; (1)

$\boxed{sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)}$

- $tg(x) = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{\overline{CM}}{tg(x)} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{2sen(2x)}{tg(x)} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{4sen(x)\cos(x)}{\frac{sen(x)}{\cos(x)}} \Leftrightarrow \overline{AM} = 4cos^2(x)$ (2)

De (1) e (2), resulta:

$\boxed{cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)}$

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 4cos^2(x) + 2cos(2x) = 4cos^2(x) + 2\left(cos^2(x) - sen^2(x)\right) =$$

$$= 4cos^2(x) + 2cos^2(x) - 2sen^2(x) = 6cos^2(x) - 2\left(1 - cos^2(x)\right) =$$

$$= 6cos^2(x) - 2 + 2cos^2(x) = 8cos^2(x) - 2.$$

$\boxed{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1}$

13.

Como a função é contínua no seu domínio, pois é a diferença de duas funções contínuas, e como o domínio é $]1, +\infty[$, vamos averiguar, somente, se a função tem uma assíntota vertical, quando x tende para 1 por valores superiores.

Assim:

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+}(5x - 3\ln(x-1)) = 5 - 3\,ln0^+ = 5 - 3\times(-\infty) = 5 + \infty = +\infty$$

Logo a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g.

Averiguemos se existe alguma assíntota oblíqua ao gráfico da função g.

Determinemos o declive:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x - 3\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(5 - \frac{3\ln(x-1)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(5 - \frac{3\ln(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= 5 - \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln(x-1)}{x-1}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x} =$$

Considerando $x - 1 = y$, então quando $x \to +\infty$, $y \to +\infty$. Assim temos:

$$= 5 - 3\times\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y+1} = 5 - 3\times0\times1 = 5$$

Determinemos a ordenada na origem:

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(5x - 3\ln(x-1) - 5x) = \lim_{x\to+\infty}(-3\ln(x-1)) =$$

$$= -3\times(+\infty) = -\infty$$

Logo não existem assíntotas oblíquas ao gráfico da função g.

Assim, existe apenas uma assíntota ao gráfico da função g de equação $x = 1$.

14.

A equação $(e^x - 1)\ln(5-2x) + e^x \ln(3-x) = \ln(3-x)$ tem o domínio:

$D = \{x \in R: 5 - 2x > 0 \land 3 - x > 0\} = \{x \in R: -2x > -5 \land -x > -3\} =$

$= \left\{x \in R: x < \frac{5}{2} \land x < 3\right\} = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[.$

Em D,

$$(e^x - 1)\ln(5-2x) + e^x \ln(3-x) = \ln(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)\ln(5-2x) + e^x \ln(3-x) - \ln(3-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)\ln(5-2x) + \ln(3-x)\,(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(5-2x) + \ln(3-x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1) = 0 \lor \ln(5-2x) + \ln(3-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1) = 0 \lor \ln((5-2x)\times(3-x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \lor ln(15 - 5x - 6x + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 15 - 11x + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \lor 2x^2 - 11x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = \frac{7}{2}$$

Como $\frac{7}{2} \notin D$, o conjunto solução da equação é $\{\ 0,\ 2\ \}$.

15.

Considerando que a é a abcissa de A e b é a abcissa de B, temos:

$f(a) = \frac{k}{a}$ e $f(b) = \frac{k}{b}$

Logo as coordenadas dos pontos A e B são respetivamente $\left(a, \frac{k}{a}\right)$ e $\left(b, \frac{k}{b}\right)$.

Assim o declive da reta AB é:

$$m = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b-a} = \frac{\frac{ak-bk}{ab}}{b-a} = \frac{ak - bk}{ab(b-a)} = \frac{-k(b-a)}{ab(b-a)} = -\frac{k}{ab}$$

Obtendo a função derivada de f:

$$f'(\mathrm{x}) = \left(\frac{k}{x}\right)' = \frac{0\times x - 1\times k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$$

Determinando a abcissa do ponto do gráfico de f em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB, e sabendo que o domínio de f é $\mathbb{R}^+$temos:

$$-\frac{k}{x^2} = -\frac{k}{ab} \Leftrightarrow x^2 = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$$

Como:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < ab \Leftrightarrow a < \sqrt{ab} \quad \text{e} \quad a < b \Leftrightarrow ab < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$$

Então as abcissas dos três pontos a, $\sqrt{ab}$ e b para serem termos consecutivos de uma progressão geométrica têm de verificar a seguinte igualdade:

$$\frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab \Leftrightarrow ab = ab$$

Como esta igualdade se verifica para todo o a e b pertencentes ao domínio da função, então as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

FIM