Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 6 DE SETEMBRO DE 2021

1.

1.1. O centro da superfície esférica é o ponto R de coordenadas $(-5,5,-3)$.

Como a superfície esférica passa no ponto $Q(-2,1,1)$, a medida do comprimento do seu raio é igual a:

$$\overline{RQ}=\sqrt{(-5+2)^2+(5-1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16+16}=\sqrt{41}$$

Portanto, uma condição que define a superfície esférica de centro em R e que passa no ponto Q é:

$$(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=\left(\sqrt{41}\right)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$$

A resposta correta é a opção: (C)

1.2. Seja α o plano perpendicular à reta RS que contém o ponto P.

Como o plano α é perpendicular à recta RS, um vetor normal a α é $\overrightarrow{RS}$. Mas, como o quadrilátero $[PQRS]$ é um trapézio, em que as bases são $[PQ]$ e $[RS]$, vem que os lados $[PQ]$ e $[RS]$ são paralelos e, portanto, os vetores $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são colineares, pelo que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ também é normal a α.

Assim, dado que $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,1,1)-(1,-1,2)=(-3,2,-1)$, vem que $\alpha: -3x+2y-z+d=0$.

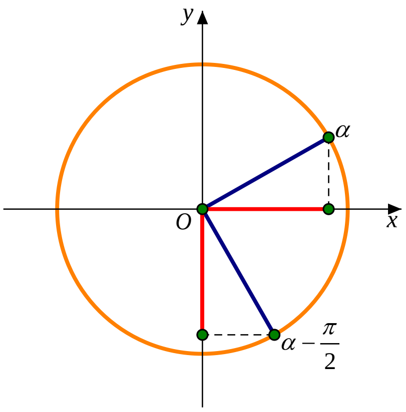
Como $P(1,-1,2)$ pertence a α, substituindo, vem:

$$-3\times 1+2\times(-1)-2+d=0 \Leftrightarrow -3-2-2+d=0 \Leftrightarrow -7+d=0 \Leftrightarrow d=7$$

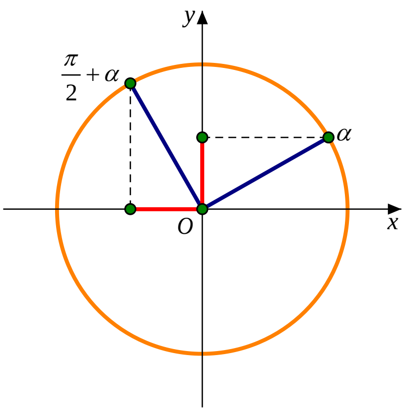
$\therefore\ \alpha: -3x+2y-z+7=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-7=0$

2. Tem-se que $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) \underset{\substack{\text{Período fundamental} \\ \text{da tangente é } \pi}}{=} \operatorname{tg}(-\alpha) \underset{\substack{\text{A função tangente} \\ \text{é ímpar}}}{=} -\operatorname{tg}\alpha$

Por outro lado:



$$\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$$



$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(-\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$$

$$=\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$$

Portanto, como $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}$, vem que $-\cos\alpha=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{5}$ e pretende-se determinar o valor de:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha+2(-\operatorname{sen}\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{sen}\alpha$$

Assim, como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ e $\cos\alpha=\frac{1}{5}$, vem que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\left(\frac{1}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{25} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{24}{25} \underset{\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha>0}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{24}}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Finalmente, como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, vem que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{\cancel{5}}}{\frac{1}{\cancel{5}}} = 2\sqrt{6}$, pelo que:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha = -2\sqrt{6}-2\times\frac{2\sqrt{6}}{5} = -2\sqrt{6}-\frac{4\sqrt{6}}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5}$$

3.

3.1. O número de casos possíveis é ${}^{12}C_6$, das doze raquetes escolhem-se seis para o primeiro conjunto. As outras seis vão para o segundo conjunto. (ou $\frac{{}^{12}C_6}{2}$ se considerarmos os dois conjuntos indistinguíveis)

O número de casos favoráveis é ${}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3$, para o primeiro conjunto, escolhem-se três raquetes de badmínton entre as seis e escolhem-se três raquetes de ténis entre as seis. (ou $\frac{{}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3}{2}$ se considerarmos os dois conjuntos indistinguíveis)

A probabilidade pedida é $\frac{{}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0,43$.

A resposta correta é a opção: (B)

3.2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: «o sócio escolhido é mulher» B: «o sócio escolhido pratica badmínton»

Pretende-se determinar a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis, ou seja $P\left(A\cap\overline{B}\right)$. Como $P\left(A\cap\overline{B}\right) = P(A) - P(A\cap B) = 0,65 - P(A\cap B)$, só precisamos de saber o valor de $P(A\cap B)$

Do enunciado sabe-se:

- $P(A) = 65\%$, ou seja, $P(A) = 0,65$, pelo que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,65 = 0,35$

- $P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right) = \frac{1}{7}P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right) = \frac{1}{7}\times 0,35 \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right) = 0,05$

- $P(A|B) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{5P(B)}{6}$

Preenchendo uma tabela:

	A	$\overline{A}$	p.m.
B	$\frac{5P(B)}{6}$	$0,05$	$P(B)$
$\overline{B}$			
p.m.	$0,65$	$0,35$	

Logo, $\frac{5P(B)}{6}+0,05=P(B)\underset{\times 6}{\Leftrightarrow}5P(B)+0,3=6P(B)\Leftrightarrow P(B)=0,3$

Portanto, $P(A\cap B)=\frac{5P(B)}{6}=\frac{5\times 0,3}{6}=0,25$, pelo que:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,65-0,25=0,40\text{, ou seja, }P(A\cap\overline{B})=40\%$$

4. Para formar um triângulo com os pontos que estão sobre as rectas temos de escolher dois pontos da recta r e um ponto da recta s, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2\times{}^nC_1=10n$, ou temos de escolher um ponto da recta r e dois pontos da recta s, o número de maneiras de o fazer é:

$${}^5C_1\times{}^nC_2=5\times\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{5n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}}=\frac{5n(n-1)}{2}$$

Assim, o número de triângulos distintos que se podem formar com os $n+5$ pontos das duas rectas é dado, em função de n, por $10n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{20n+5n(n-1)}{2}$.

Logo, $\frac{20n+5n(n-1)}{2}=175\underset{\times 2}{\Leftrightarrow}20n+5n^2-5n=350\Leftrightarrow 5n^2+15n-350=0\underset{\div 5}{\Leftrightarrow}n^2+3n-70=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times(-70)}}{2\times 1}\Leftrightarrow n=-10\ \vee\ n=7$$

Como $n\in\mathbb{N}$, vem que $n=7$.

5. Tem-se que $\lim v_n=\lim\left(2-\frac{5}{n+3}\right)=2-\frac{5}{+\infty}=2-0^+=2^-$, pelo que $\lim g(v_n)=\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=1$.

A resposta correta é a opção: (B)

6. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n).

Sabe-se que $u_6 + u_{20} = -5$ e que $u_9 = 4u_7$. Pretende-se determinar $u_1 + u_2 + \ldots + u_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16$.

Tem-se que:

- $u_{19} = 4u_7 \underset{\substack{u_{19} = u_1 + 18r \\ u_7 = u_1 + 6r}}{\Leftrightarrow} u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \Leftrightarrow u_1 + 18r = 4u_1 + 24r \Leftrightarrow -6r = 3u_1 \Leftrightarrow r = -\frac{3u_1}{6} \Leftrightarrow r = -\frac{u_1}{2}$

- $u_6 + u_{20} = -5 \underset{\substack{u_6 = u_1 + 5r \\ u_{20} = u_1 + 19r}}{\Leftrightarrow} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \Leftrightarrow 2u_1 + 24r = -5 \underset{r = -\frac{u_1}{2}}{\Leftrightarrow} 2u_1 + 24 \times \left(-\frac{u_1}{2}\right) = -5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2u_1 - 12u_1 = -5 \Leftrightarrow -10u_1 = -5 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2} \underset{r = -\frac{u_1}{2} = -\frac{1}{2}u_1}{\Rightarrow} r = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$$

Como $u_{16} = u_1 + 15r = \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{13}{4}$, vem que:

Assim, $u_1 + u_2 + \ldots + u_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{13}{4}}{2} \times 16 = \frac{-\frac{11}{4}}{2} \times 16 = -\frac{11}{8} \times 16 = -11 \times 2 = -22$.

7. Tem-se que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, pelo que:

$$z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10} + 2\pi\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\frac{19\pi}{10}}$$

$\therefore$ Um argumento de w é $\frac{19\pi}{10}$.

A resposta correta é a opção: (A)

8. Tomando $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow (1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

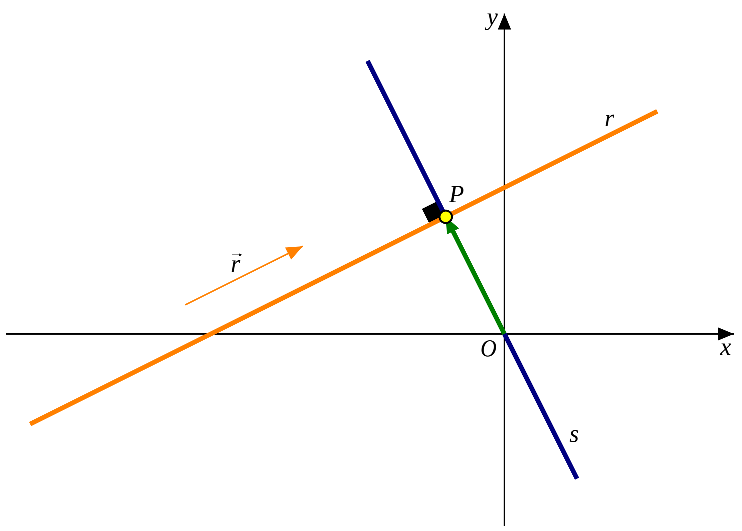
$$\Leftrightarrow x + \cancel{yi} + \cancel{2xi} + 2yi^2 + x - \cancel{yi} - \cancel{2xi} + 2yi^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x + 10 = 4y \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

Sejam r a reta dada e P o ponto de r.

Determinar o número complexo cujo afixo pertence à reta r e cujo módulo é o menor possível é equivalente a determinar o ponto da reta r cuja distância à origem é mínima, sendo que este ponto é o afixo do complexo pedido.

Assim, sendo $\vec{r}$ um vector director da recta r, a distância de P à origem é mínima se $\vec{r} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$:



O declive da recta r é $\frac{1}{2}$, pelo que $\vec{r}$ pode ser $\vec{r}(2,1)$. Como P pertence à recta r, vem que as suas coordenadas são da forma $P\left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right)$ e $\overrightarrow{OP} = P - O = \left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) - (0,0) = \left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right)$.

Logo, $\vec{r} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \Leftrightarrow (2,1) \cdot \left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{x}{2} + \frac{5}{2} = 0 \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} 4x + x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1$

Portanto, $P\left(-1, -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)$, ou seja, $P(-1, 2)$, pelo que o número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta r é $-1 + 2i$.

Outra resolução: o ponto P da recta r cuja distância à origem é mínima, é o ponto de intersecção da recta perpendicular à recta r, que contém a origem.

Assim, sendo s essa recta, vem que $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Como a recta s contém a origem, vem que a sua equação reduzida é $y = -2x$.

Fazendo a intersecção entre as duas rectas, tem-se:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = x + 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1,2)$$

Logo, o número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta r é $-1 + 2i$.

9.

9.1. Quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} \underset{\substack{y=-x \Leftrightarrow x=-y \\ x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty}}{=} 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{-y} = 1 + \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{y}}_{\text{Limite notável}} = 1 + \infty = +\infty$$

Logo, o gráfico de f não tem assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.

Quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x+1} - \lim_{x\to+\infty} 3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1} - 3 =$$

$$\underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow x>0 \\ \text{Logo, } \sqrt{x^2}=|x|=x}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 3 = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{(+\infty)^2}}}{1+\frac{1}{+\infty}} - 3 = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Logo, a recta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

9.2. Sendo t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2, tem-se que o seu o declive é dado por $f'(-2)$

Para $x<0$, tem-se que $f(x)=\dfrac{x-e^{-x}}{x}=\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}}-\dfrac{e^{-x}}{x}=1-\dfrac{e^{-x}}{x}$, pelo que, para $x<0$:

$$f'(x)=\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)'=0-\frac{\left(e^{-x}\right)'x-e^{-x}\times x'}{x^2}=-\frac{-e^{-x}x-e^{-x}\times 1}{x^2}=\frac{e^{-x}x+e^{-x}}{x^2}=\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Logo, o declive da reta t é igual a $f'(-2)=\dfrac{e^2(-2+1)}{(-2)^2}=-\dfrac{e^2}{4}$, pelo que $t: y=-\dfrac{e^2}{4}x+b$.

As coordenadas do ponto de tangência são $(-2, f(-2))=\left(-2,1+\dfrac{e^2}{2}\right)$, pois $f(-2)=1-\dfrac{e^2}{-2}=1+\dfrac{e^2}{2}$.

Substituindo na equação de t, vem que:

$$1+\frac{e^2}{2}=-\frac{e^2}{4}\times(-2)+b \Leftrightarrow 1+\frac{e^2}{2}=\frac{2e^2}{4}+b \Leftrightarrow 1+\cancel{\frac{e^2}{2}}=\cancel{\frac{e^2}{2}}+b \Leftrightarrow b=1$$

$\therefore\ t: y=-\dfrac{e^2}{4}x+1$

10. Tem-se que:

- $h'(x)=\left(\operatorname{sen} x+\cos^2 x\right)'=\cos x+2\cos x(\cos x)'=\cos x+2\cos x(-\operatorname{sen} x)=\cos x-2\operatorname{sen} x\cos x$

  $=\cos x(1-2\operatorname{sen} x)$

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x(1-2\operatorname{sen} x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \ \vee\ 1-2\operatorname{sen} x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \ \vee\ \operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2}$

No intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, a equação $\cos x=0$ não tem soluções e a equação $\operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2}$ tem apenas uma solução, que é $\dfrac{\pi}{6}$, pelo que o único zero de h' é $\dfrac{\pi}{6}$.

Recorrendo a um quadro de sinal de h' e relacionando com a monotonia de h, tem-se:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
h	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	n.d.

Logo, h é crescente em $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$ e tem:

• mínimo relativo em $x=0$ que é $h(0)=\operatorname{sen}(0)+\cos^2(0)=0+1^2=1$

• máximo absoluto em $x=\frac{\pi}{6}$ que é $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

11.

11.1. No instante t_1 a temperatura da substância foi de 30 ºC, ou seja, $T(t_1)=30$.

Assim, $T(t_1)=30 \Leftrightarrow 20+100e^{-kt_1}=30 \Leftrightarrow 100e^{-kt_1}=10 \Leftrightarrow e^{-kt_1}=\frac{10}{100} \Leftrightarrow e^{-kt_1}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -kt_1=\underbrace{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}_{\ln 1-\ln 10=-\ln 10} \Leftrightarrow k=\frac{\ln 10}{t_1}$$

A resposta correta é a opção: (C)

11.2. Para $k=0{,}04$, tem-se que $T(t)=20+100e^{-0{,}04t}$.

A taxa de variação média da função T nos primeiros t_2 minutos é dada por:

$$\frac{T(t_2)-T(0)}{t_2-0}=\frac{20+100e^{-0{,}04t_2}-\left(20+100e^{-0{,}04\times 0}\right)}{t_2}=\frac{20+100e^{-0{,}04t_2}-20-100e^{0}}{t_2}=\frac{100e^{-0{,}04t_2}-100}{t_2}$$

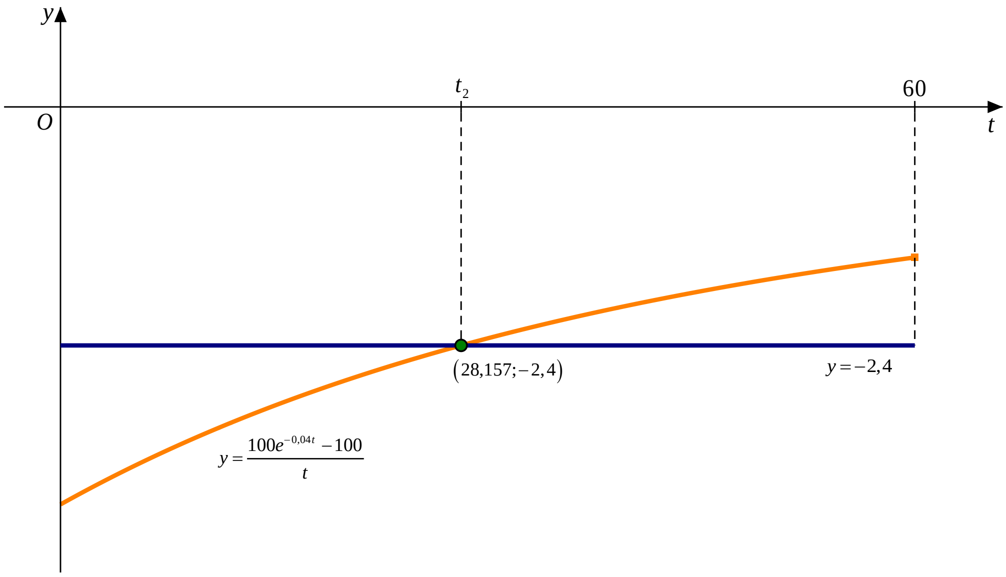
Como a taxa de variação média da função T nos primeiros t_2 minutos é igual a $-2{,}4$, vem que t_2 é a solução da equação:

$$\frac{T(t)-T(0)}{t-0}=-2{,}4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0{,}04t}-100}{t}=-2{,}4$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se:

$$y_1 = \frac{100e^{-0,04t} - 100}{t} \qquad \text{e} \qquad y_2 = -2,4$$

na janela $[0,60] \times [-4,0]$:



Logo, $\frac{100e^{-0,04t} - 100}{t} = -2,4 \Leftrightarrow t = t_2$, em que $t_2 \approx 28,157$.

Como $0,157 \times 60 \approx 9$ segundos, o instante t_2 corresponde, aproximadamente, a 28 min e 9 s.

12. Como $0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vem que $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existe se $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

Assim:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}(x-1)} + k \right) = \frac{0^2 - 1}{0 - 1} + k = \frac{-1}{-1} + k = k + 1$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2 + x \ln x) \underset{\substack{y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty}}{\overset{(0 \times \infty)}{=}} 2 + \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y} \right) \right) \underset{\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln 1 - \ln y = -\ln y}{=} 2 - \underbrace{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} = 2 - 0 = 2$

Logo, $k + 1 = 2 \Leftrightarrow k = 1$.

13. Tem-se que:

• $D=\{x\in\mathbb{R}:1-x>0\ \wedge\ 3-2x>0\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x<1\ \wedge\ x<\frac{3}{2}\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x<1\}=]-\infty,1[$

• Neste domínio D, tem-se:

$$x\ln(1-x)-\ln(1-x)=(1-x)\ln(3-2x)\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\ln(1-x)(1-x)=(1-x)\ln(3-2x)\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow 0=(1-x)\ln(1-x)+(1-x)\ln(3-2x)\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow 0=(1-x)\left(\ln(1-x)+\ln(3-2x)\right)\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow 1-x=0\ \vee\ \ln\left((1-x)(3-2x)\right)=0\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x=1\ \vee\ (1-x)(3-2x)=e^0\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x=1\ \vee\ 3-2x-3x+2x^2=1\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x=1\ \vee\ 2x^2-5x+2=0\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times2}}{2\times2}\ \wedge\ x\in D$$

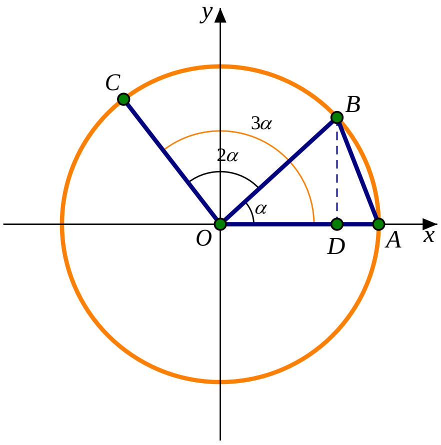
$$\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=\frac{1}{2}\ \vee\ x=2\ \wedge\ x\in D$$

Como $1\notin D$, $2\notin D$ e $\frac{1}{2}\in D$, vem que o conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

14. Seja α a amplitude do ângulo AOB.

Como a amplitude do ângulo BOC é o dobro da amplitude do ângulo AOB, vem que a amplitude do ângulo BOC é 2α, pelo que a amplitude do ângulo AOC é $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Consideremos a seguinte figura, em que D é a projeção ortogonal do ponto B no eixo Ox:



Assim, a ordenada do ponto C é dada por $\operatorname{sen}(3\alpha)$ e como a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k, vem que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \overline{BD}}{2} = k \Leftrightarrow \frac{1 \times \overline{BD}}{2} = k \Leftrightarrow \overline{BD} = 2k$$

Logo, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BD}}{1} \Leftrightarrow \overline{BD} = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = 2k$ e portanto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - (2k)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - 4k^2$$

Então, a ordenada do ponto C é dada por:

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) + 2\operatorname{sen}\alpha\overbrace{\cos\alpha\cos\alpha}^{\cos^2\alpha} =$$

$$= 2k\left(1 - 4k^2 - 4k^2\right) + 2 \times 2k \times \left(1 - 4k^2\right) = 2k\left(1 - 8k^2\right) + 4k\left(1 - 4k^2\right)$$

$$= 2k - 16k^3 + 4k - 16k^3 = 6k - 32k^3$$

FIM