Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 13 DE JULHO 2021

1.

1.1.

Seja $\vec{u}(-3,-2,2)$ um vetor diretor de EF e $\vec{v}$ um vetor diretor da reta perpendicular a EF que passa no ponto E.

Dado que as retas são perpendiculares, temos que $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Podemos, assim, verificar que

(A) $(-3,-2,2).(2,-3,0) = -6+6 = 0$

(B) $(-3,-2,2).(0,3,-3) = -6-6 \neq 0$

(C) $(-3,-2,2).(0,3,3) = -6+6 = 0$

(D) $(-3,-2,2).(2,0,-3) = -6-6 \neq 0$

As respostas possíveis são a (A) e (C).

Verifiquemos se o ponto E pertence a uma das retas

(A) $\begin{cases} 7 = 7+2k \\ 2 = -3-3k \\ 15 = 3 \end{cases}$ Condição Impossível (C) $\begin{cases} 7 = 7 \\ 2 = -10+3k \\ 15 = 3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases}$ logo pertence.

A resposta correta é a opção: **(C)**

1.2.

A equação da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D, tem centro num ponto do eixo Oy e raio igual a $d(E,G)$.

Ora,

$$d(E,G) = \sqrt{(6-7)^2+(10-2)^2+(13-15)^2} = \sqrt{1+64+4} = \sqrt{69}\,;$$

Para determinarmos o ponto $B\ (0,y,0)$,

Podemos considerar que B pertence ao plano ABG.

A equação do plano ABG é da forma $-3x-2y+2z+d=0$, pois a reta EF é perpendicular ao plano ABG.

Como o plano ABG contém o ponto G, temos:

$$-3\times 6-2\times 10+2\times 13+d=0 \Leftrightarrow d=12$$

A equação do plano é: $\quad -3x-2y+2z+12=0$

Como B pertence ao plano e ao eixo Oy, temos:

$$-3\times 0-2y+2\times 0+12=0 \Leftrightarrow y=6$$

Logo as coordenadas do ponto B são: (0,6,0)

A equação da superfície esférica pedida é:

$$x^2+(y-6)^2+z^2=69$$

2.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{OC}\times|y_A|}{2}+\frac{\overline{OC}\times|y_B|}{2}$$

Sendo uma circunferência de centro em O e raio 3

Como $C\hat{O}A=\alpha$, temos que as coordenadas do ponto A são $(3\,cos\,\alpha\,,3\,sen\alpha)$;

Como $C\hat{O}B=\alpha-\pi$ temos que as coordenadas do ponto B são $(3\,cos(\alpha-\pi),3\,sen\,(\alpha-\pi))$

Assim:

$\overline{OC}=|3\,cos\alpha|=-3\,cos\alpha$

$|y_A|=3\,sen\alpha$ e $|y_B|=-3\,sen(\alpha-\pi)=3\,sen\alpha$

$$A_{[ABC]}=\frac{-3\,cos\alpha\times 3\,sen\alpha}{2}+\frac{-3\,cos\alpha\times 3\,sen\alpha}{2}=-3\,cos\alpha\times 3\,sen\alpha=-9\,sen\alpha\,cos\alpha$$

c.q.d.

3.

Consideremos os acontecimentos A: "o estudante escolhido é rapaz" e B: "o estudante escolhido é estrangeiro".

Do enunciado sabe-se que $P(\overline{A})=0,6 \Leftrightarrow P(A)=0,4$;

Sabe-se, também, que $P(A\cap B)=0,15$.

Pede-se a probabilidade de o estudante escolhido ser português, sabendo que é que rapaz,

ou seja, $P(\overline{B}|A)$

Assim, $P(\overline{B}|A)=\dfrac{P(\overline{B}\text{ Ç }A)}{P(A)}=\dfrac{P(A)\text{- }P(B\text{ Ç }A)}{P(A)}=\dfrac{0,4\text{- }0,15}{0,4}=\dfrac{0,25}{0,4}=0,625$, ou seja,

$P(\overline{B}|A)=62,5\%$

A resposta correta é a opção: **(D)**

4.

Tem-se que:

Dos três dirigentes escolhem-se dois para conduzirem cada um dos veículos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{3}C_{2}$. Para cada uma destas maneiras, os dois dirigentes escolhidos permutam de $2!$ maneiras pelos dois veículos.

Portanto, para as posições de condução nos dois veículos temos ${}^{3}C_{2} \times 2! = {}^{3}A_{2}$ possibilidades.

No carro têm de viajar dois jogadores do sexo masculino e dois do sexo feminino. Assim, dos cinco do sexo masculino escolhem-se dois. O número de maneiras de o fazer é ${}^{5}C_{2}$.

Dos cinco do sexo femininos escolhem-se dois, o número de maneiras de o fazer é ${}^{5}C_{2}$.

Para cada uma destas maneiras, os quatro jogadores permutam de $4!$ maneiras distintas nos quatro lugares do carro. Portanto, para ocupar os restantes quatro lugares do carro temos ${}^{5}C_{2} \times {}^{5}C_{2} \times 4!$ possibilidades.

Finalmente, as restantes oito pessoas permutam de $8!$ maneiras distintas nos restantes oito lugares da carrinha.

Assim, uma expressão que dá o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos pelos catorze lugares é ${}^{3}A_{2} \times {}^{5}C_{2} \times {}^{5}C_{2} \times 4! \times 8!$.

5.

O número de casos possíveis é ${}^{30}C_{5}$, que é o número de maneiras de escolher cinco alunos entre os trinta.

Tem-se que 60% são raparigas, ou seja $0,6 \times 30 = 18$ são raparigas e, portanto, doze são rapazes.

Um terço dos rapazes têm 17 anos, ou seja, como $\frac{1}{3} \times 12 = 4$, quatro rapazes têm 17 anos e, portanto, os restantes oito rapazes têm 15 ou 16 anos;

Um terço das raparigas têm 15 ou 16 anos, ou seja, como $\frac{1}{3} \times 18 = 6$, seis raparigas têm 15 ou 16 anos e, portanto, as restantes doze raparigas têm 17 anos.

Consequentemente, dezasseis (4+12) alunos têm 17 anos e catorze (8+6) têm 15 ou 16 anos.

Assim, temos de escolher o André e a Beatriz, o número de maneiras de o fazer é ${}^{2}C_{2}$.

Dos dezasseis alunos com 17 anos escolhem-se dois, o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_{2}$.

Finalmente, dos restantes doze alunos (excluem-se o André e a Beatriz) com 15 ou 16 anos escolhe-se um, sendo o número de maneiras de o fazer ${}^{12}C_{1}$.

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^{2}C_{2} \times {}^{16}C_{2} \times {}^{12}C_{1} = {}^{16}C_{2} \times 12$ e a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{16}C_{2} \times 12}{{}^{30}C_{5}} \approx 0,01.$$

6.

Tem-se que (v_n) é uma progressão geométrica, logo sabe-se que $v_8 = v_5 \times r^3$ em que r é a razão.

Assim sendo, e atendendo ao enunciado,

$$108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$$

Como $v_6 = v_5 \times r$, obtemos que $v_6 = 12$.

A resposta correta é a opção: (**A**)

7.

A subsucessão dos termos de ordem ímpar é dada pela expressão $2 + \frac{1}{n}$.

Pretende-se calcular quantos termos de ordem ímpar verificam a condição $\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33}$.

Temos:

$$\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \underset{(n\,ímpar)}{\Longleftrightarrow} \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41$$

Conclui-se assim que existem 5 termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencentes ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

8.

Calculemos w:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = \left(\frac{2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{28} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{28}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

Um dos outros vértices do polígono pertence ao semieixo real positivo, assim, esse vértice será o afixo do número complexo $e^{i(0)}$.

Ora, como os argumentos dos números complexos que são raízes de índice n de um determinado número complexo estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, em que n é o número de vértices do polígono regular, temos:

$$\frac{\pi}{7} - 0 = \frac{2k\pi}{n}, n \epsilon \mathbb{N}, k \epsilon \mathbb{Z}^+$$

$$\frac{\pi}{7} = \frac{2k\pi}{n} \Leftrightarrow n\pi = 14k\pi \Leftrightarrow n = 14k.$$

Como $k \epsilon \mathbb{Z}^+$, temos que o menor valor de n é 14, isto é, o número mínimo de vértices do polígono é 14.

A resposta correta é a opção: **(B)**

9.

Calculemos w.

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i} = \frac{-3-6i+2i+4i^2}{2-i} = \frac{-3-4i-4}{2-i} = \frac{-7-4i}{2-i} =$$

$$= \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-14-7i-8i-4i^2}{2^2+1^2} = \frac{-14+4-15i}{5} = -2-3i$$

$|w| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. (1)

Vejamos agora o que podemos concluir acerca do argumento do número complexo w.

Seja:

$\beta = Arg(w)$.

Sabemos que $\beta \in 3ºQ \quad \wedge \quad tg(\beta) = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Como, por um lado, $\beta \in 3ºQ$, isto é, $\beta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

E, por outro lado, como $-3 = Im(w) < -2 = Re(w)$, temos que $\beta > -\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $\beta \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$ (2)

De (1) e (2), resulta que a proposição $|w| = \sqrt{13} \quad \wedge \quad Arg(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$ é verdadeira.

10.

10.1.

Uma função f diz-se contínua no ponto $x = 1$ do seu domínio se e só se:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Determinemos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1^2(1+2\ln 1) = -1(1+2\times 0) = -1\times 1 = -1$$

$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = \frac{0}{0}$$

Aplicando a regra de *Ruffini* para fazer a decomposição de x^2+3x-4 em fatores, vem:

	1	3	-4
1		1	4
	1	4	$0 = R$

$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$

Então:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5 \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x-1}-1)}{(x+4)(x-1)}$$

Fazendo a mudança de variável $y = x - 1$ $(x = y + 1)$. Como, quando $x \to 1$ então $y \to 0$, logo:

$$-5 \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x-1} - 1)}{(x+4)(x-1)} = -5 \lim_{y\to 0^+} \frac{(e^{y} - 1)}{(y+5)\, y} =$$

$$= -5 \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y+5} \times \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Limite Notável}} = -5\ \frac{1}{0+5} \times 1 = -1 \times 1 = -1$$

Consequentemente, como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -1$ então

a função f é contínua em $x = 1$.

10.2.

Para $x \in \left]0,1\right[$ tem-se $f(x) = -x^2(1 + 2\ln x)$.

Derivando f, temos:

$$f'(x) = (-2x \times (1 + 2\, ln\, x)) + \left(-x^2 \times \left(0 + \frac{2}{x}\right)\right) = -2x - 4x\, lnx - 2x = -4x - 4x\, lnx$$

Determinemos os zeros da derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x - 4x\, lnx = 0 \Leftrightarrow -4x\,(1 + lnx) = 0 \Leftrightarrow -4\text{x} = 0\ \vee\ 1 + lnx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee\ lnx = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee \text{x} = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$-4x$		$-$	$-$	$-$	
$1 + lnx$		$-$	0	$+$	
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Conclui-se que f é crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{1}{e}, 1\right[$

$f\left(\frac{1}{e}\right)$ =-$\left(\frac{1}{e}\right)^2 \times \left(1 + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e^2}$

Tem um máximo igual a $\frac{1}{e^2}$, para $x = \frac{1}{e}$

11.

Pretendemos mostrar que existe pelo menos um ponto no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$, ou seja, $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[: g'(c) = -\frac{1}{2}$.

Comecemos por derivar a função g:

$$g'(x) = (x\, cosx + senx)' = cosx - x\, senx + cosx = 2\, cosx - x\, sen\, x$$

Segundo o Teorema de Bolzano-Cauchy:

Se f for uma função contínua num determinado intervalo $[a, b]$, então para qualquer valor d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um valor c pertencente ao intervalo $]a, b[$ tal que $f(c) = d$.

Ora g' é contínua em $\mathbb{R}$ pois resulta de produtos e de somas de funções contínuas. Logo g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2} = 2 \times 0 - \frac{3\pi}{2} \times (-1) = \frac{3\pi}{2}$$

Como, $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[: g'(c) = -\frac{1}{2}$.

Concluímos, assim, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico de g nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$.

12.

Determinemos o declive:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^3 - x\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3\left(2 - \frac{\ln x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2 - \frac{\ln x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2 - \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{2 - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\substack{limite \\ notável}}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2}$$

Determinemos a ordenada na origem:

$$b = \lim_{x\to+\infty}(h(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3 - 2x^3 + x\ln x}{4x^2 - 2\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{4x^2 - 2\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x^2\left(4 - 2\frac{\ln x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{4 - 2 \times \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}{4 - 2 \times \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = \frac{0}{4 - 2 \times 0 \times 0} = 0$$

considerando o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

Conclui-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$, de equação reduzida $y = \frac{1}{2}x$.

13.

13.1.

Determinemos a altura do combustível no depósito no início do vazamento:

$a(0) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \times 0)^{\frac{2}{3}} = 1{,}44$

A altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito será metade do diâmetro, ou seja: $\frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$

Assim a diferença pedida é: $1{,}44 - 0{,}9 = 0{,}54$

A resposta correta é a opção: (**B**)

13.2.

Uma equação que traduz o problema é:

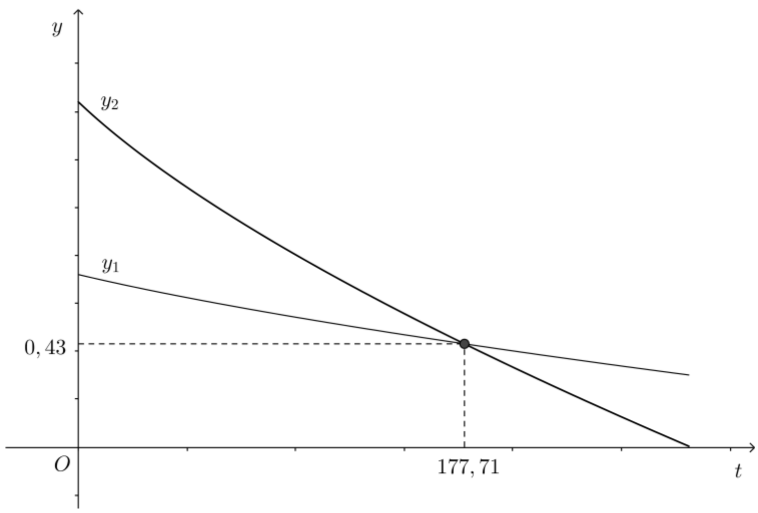
$$\frac{a(t)}{2} = a(2t)$$

Ou seja:

$$\frac{1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \times t)^{\frac{2}{3}}}{2} = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0078 \times t)^{\frac{2}{3}}$$

Assim, visualizamos na calculadora, numa janela adequada, os gráficos das funções:

$y_1(t) = \frac{1{,}8-(0{,}216+0{,}0039\times t)^{\frac{2}{3}}}{2}$ e $y_2(t) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0078 \times t)^{\frac{2}{3}}$



Do gráfico concluímos que $t_1 = 177{,}71$ min, ou seja,

na forma pedida o valor de t_1 é 2h e 58 min.

14.

A equação $\ln\left((1-x)e^{x-1}\right) = x$ tem como domínio $D = \{x \in R: (1-x)e^{x-1} > 0\}$.

Como $e^{x-1} > 0$, tem-se que $(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$, donde $x < 1$.

Assim, $D =]-\infty, 1[$

Em D,

$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right) = x \Leftrightarrow (1-x)e^{x-1} = e^x \Leftrightarrow \frac{1-x}{e}e^x = e^x \Leftrightarrow \frac{1-x}{e} = 1 \Leftrightarrow x = 1 - e.$

Como $(1-e) \in D$, este é o único número real que é solução da equação dada.

15.

Como A, B e C são pontos de interseção dos gráficos de f e de g, as suas abcissas são soluções da equação $f(x) = g(x)$ no domínio dado.

Ora,

$$k\,\mathrm{sen}(2x) = k\cos x \Leftrightarrow 2k\ \mathrm{sen}\,x\ \cos x - k\cos x = 0 \Leftrightarrow k\cos x\,(2\,\mathrm{sen}\,x - 1) = 0.$$

Como $k \neq 0$, tem-se que:

$k\cos x\,(2\,\mathrm{sen}\,x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$.

No domínio dado,

$-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$ são soluções da equação $\cos x = 0$ e $\dfrac{\pi}{6}$ é solução da equação $\sin x = \frac{1}{2}$.

Considerando as condições sobre as abcissas dos pontos A, B e C, que $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ e ainda que

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k \times \mathrm{sen}(-\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \times \mathrm{sen}(\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = k \times \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{k\sqrt{3}}{2}$,

Temos que:

$$A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\ ; \quad B\left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \quad e \quad C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, tem-se que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$ e

$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{9} - \frac{3k^2}{4} = \frac{8\pi^2 - 27k^2}{36}$.

Assim:

$\frac{8\pi^2 - 27k^2}{36} = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27}$.

Como $k > 0$, tem-se que $k = \sqrt{\frac{8\pi^2}{27}} = \sqrt{\frac{8}{27}}\pi$

FIM