Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 04 DE SETEMBRO 2020

1.

1.1. Temos que encontrar a solução da equação $p(x)=799$

Essa resolução pode ser gráfica ou analítica. Vamos optar neste caso por resolver analiticamente:

$$p(x)=799 \Leftrightarrow 1013,25e^{\left(-\frac{x}{8}\right)}=799$$
$$\Leftrightarrow e^{\left(-\frac{x}{8}\right)}=\frac{799}{1013,25} \Leftrightarrow -\frac{x}{8}=\ln\left(\frac{799}{1013,25}\right) \Leftrightarrow x=-8\times\ln\left(\frac{799}{1013,25}\right)$$
$$\Leftrightarrow x\approx 1,90046 \text{ Km}$$

Resposta: A altitude do local é de, aproximadamente, 1900 metros

1.2. Como no modelo apresentado a altitude é em Km, vamos calcular $p(1,983)$ e $p(1,851)$:

$$p(1,983)=1013,25\times e^{\left(-\frac{1,983}{8}\right)}=1013,25\times 0,78046=790,7986$$

$$p(1,851)=1013,25\times e^{\left(-\frac{1,851}{8}\right)}=1013,25\times 0,79344=803,9550$$

$$p(1,851)-p(1,983)=803,9550-790,7986=13,1564$$

Resposta: A diferença de pressão atmosférica é de, aproximadamente, 13 hPa

2.

2.1.1.

Seja $d_n = -2,5n + 37,5$ e calculemos $d_{n+1} - d_n$

$$d_{n+1} - d_n = -2,5(n+1) + 37,5 - (-2,5n + 37,5) = -2,5n - 2,5 + 37,5 + 2,5n - 37,5 = -2,5$$

Como $d_{n+1} - d_n$ é constante, a expressão $d_n = -2,5n + 37,5$ pode ser o termo geral de uma progressão aritmética e a sua razão é $r = -2,5$

2.1.2.

O total de quilómetros percorridos pelo André ao fim de oito horas corresponde à soma dos oito primeiros termos da progressão aritmética:

$$\frac{d_1 + d_8}{2} \times 8 = \frac{-2,5 \times 1 + 37,5 - 2,5 \times 8 + 37,5}{2} \times 8 = (35 + 17,5) \times 4 = 210$$

Como $225 - 210 = 15$ então:

Resposta: Ao fim de oito horas faltavam percorrer 15 Km.

2.2.

O que pretendemos determinar é a média (esperança matemática) da variável aleatória X.

Para isso temos que começar por determinar os valores de a e de b:

$P(X = 4) = P(X = 0) \Leftrightarrow b = 0,05$

$0,05 + 0,18 + 0,33 + a + 0,05 + 0,10 = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0,71 \Leftrightarrow a = 0,29$

Média $= 0,05 \times 0 + 0,18 \times 1 + 0,33 \times 2 + 0,29 \times 3 + 0,05 \times 4 + 0,10 \times 5 = 2,41$

Resposta: É de esperar que o André faça, aproximadamente, 2 treinos por semana.

3.

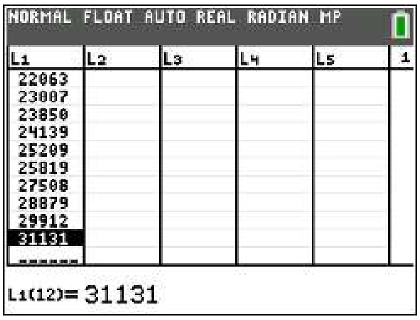
Vamos ordenar, de forma crescente, os doze valores apresentados no gráfico (pode ser manualmente, observando o gráfico, ou editando os dados na calculadora e depois pedir a ordenação):

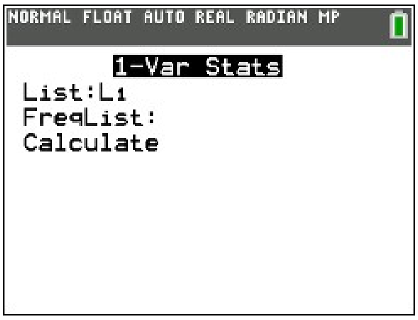
17931 , 20789 , 22063 , 23007 , 23850 , $\boxed{24139 , R}$, 25819 , 27508 , 28789 , 29912 , 31131

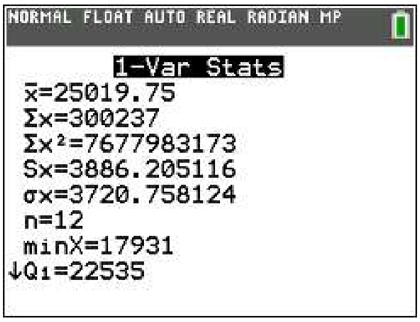
Como temos um número par de valores, a mediana é a média dos dois valores centrais, pelo que:

$$\frac{24139+R}{2}=24674 \Leftrightarrow R=24674\times 2-24139 \Leftrightarrow R=25209$$

Vamos agora usar a calculadora gráfica para obter o valor da média e do desvio padrão desta amos de 12 dados, já com o valor de R=25209







Obtemos assim que a média é 25019,75 e que o desvio padrão é 3886,21 (trata-se duma amostra e vamos por isso utilizar este valor).

Assim temos que:

$$\bar{x}-s=25019,75-3886,21=21133,54$$

$$\bar{x}+s=25019,75+3886,21=28905,96$$

Não pertencem ao intervalo $\left]\bar{x}-s,\ \bar{x}+s\right[$ os valores 20789, 17931, 29912 e 31131, pelo que:

Resposta: não pertenceu ao intervalos o número de residentes correspondentes aos anos de 1900, 1920, 1950 e 1960.

4.

4.1.

Se a altura do tronco de pirâmide é $\frac{2}{3}$ da altura da pirâmide $[ABCDV]$ então a altura da pirâmide $[EFGHV]$ é $\frac{1}{3}$ da altura da pirâmide $[ABCDV]$, ou seja $\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}$ metros.

Assim temos

$$V_{[EFGHV]}=\frac{1}{3}\times 1^2\times\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$$

Tendo em conta a relação entre as alturas, das duas pirâmides, podemos dizer que a razão de semelhança, entre ambas, é de 3 ou $\frac{1}{3}$, consoante se esteja a considerar ampliação ou redução.

Assim temos

$$V_{[ABCDV]} = 3^3 \times \frac{4}{9} = 12$$

Sendo o volume do tronco de pirâmide igual à diferença entre os volumes das duas pirâmides podemos dizer que

$$12 - \frac{4}{9} = \frac{104}{9} \approx 11{,}6$$

Resposta: a estrutura, na qual está assente a estátua, tem um volume de, aproximadamente 11,6 m^3.

4.2.

$[EOF]$ é um triângulo retângulo isósceles, com 1 m de hipotenusa, $\overline{EF}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos: $\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{EF}^2$

Como $\overline{OE} = \overline{OF}$, temos $\overline{OF}^2 + \overline{OF}^2 = 1^2 \Leftrightarrow \overline{OF}^2 = \frac{1}{2}$

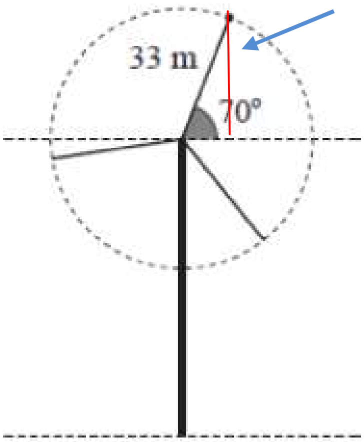
Donde $\overline{OF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$

Deste modo, a ordenada de F é 0,7 e F é um ponto do eixo das ordenadas. Assim:

Resposta: As coordenadas de F são $(0, 0.7, 0)$.

5.

5.1.1.



Comecemos por determinar a distância, digamos d_1, da extremidade da pá até à horizontal. Ora temos que:

$$\sin 70^\circ = \frac{d_1}{33} \Leftrightarrow d_1 = 33 \times \sin 70^\circ \Leftrightarrow d_1 = 31{,}01$$

Seja d a distância da extremidade da pá até ao solo. Então:

$$d = 31{,}01 + 67 = 98{,}01$$

Resposta: A distância da extremidade da pá ao solo é, aproximadamente, 98 metros.

5.1.2.

Em cada volta a amplitude descrita por um ponto na extremidade de cada pá é de 2π radianos.

Em 15 voltas, dadas num minuto, temos uma amplitude de $15\times 2\pi = 30\pi$ rad

Em cada segundo a amplitude ω será de $\frac{30\pi}{60}=0,5\pi$

Temos assim que a velocidade linear é $v=0,5\pi\times 33=16,5\pi$ m/s

Finalmente temos que converter este valor para quilómetros por hora (sabemos que 1 hora são 3600 segundos e 1 metro são 0,001 quilómetros):

numa hora teremos $v=16,5\,\pi\times 3600=59400\,\pi$ metros por hora, isto é,

$v=59400\pi\times 0,001=59,4\pi\approx 187$ Km/h

Resposta: A velocidade linear das pás é, aproximadamente, 187 quilómetros por hora.

5.2.

Comecemos por determinar a altura máxima a que a extremidade de uma pá se pode encontrar.

No modelo apresentado, essa altura é obtida quando $\theta=\frac{\pi}{2}$ (quando a pá fica perpendicular à horizontal). Então temos:

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=91+57\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=91+57\times 1=148$$

$$148-91=57$$

Cada pá mede 57 m que corresponde ao raio da circunferência descrita por cada pá.

Resposta: O diâmetro da circunferência descrita por cada pá numa volta completa é de 114 m.

5.3.

Para que as potências sejam iguais temos que ter $P_A(v)=P_B(v)$, isto é,

$$1,525\,v^3=1,882\,v^3 \Leftrightarrow 1,525\,v^3-1,882\,v^3=0 \Leftrightarrow \left(1,525-1,882\right)v^3=0 \Leftrightarrow v^3=0 \Leftrightarrow v=0$$

Mas zero não é um valor admissível, uma vez que os modelos são válidos apenas para $5\le v\le 14$

Resposta: não existe nenhum valor da velocidade para o qual as duas potências sejam iguais.

6.

6.1.

Para obter 20 pontos em cada prova terá que treinar um número de horas correspondente a:

- Prova de Bola: $\dfrac{20}{0{,}8}=25$
- Prova de Fita: $\dfrac{20}{0{,}5}=40$

Teria que treinar ,então, um total de 40+25= 65 horas

Como dispõe de 9 horas de treino por cada um dos 6 dias, isso corresponde a um máximo de $6\times 9=54$ horas de treino. Logo:

Resposta: Nas condições referidas, não será possível obter 20 pontos em cada uma das provas.

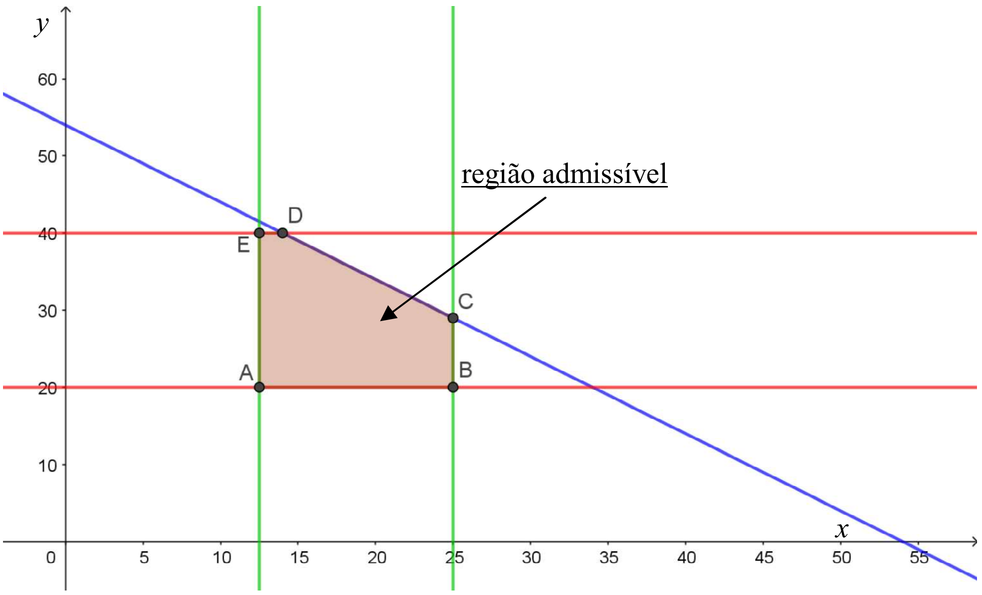
6.2.

A função objetivo que pretendemos maximizar é: $L(x,y)=0{,}8x+0{,}5y$.

As restrições do problema são:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 54 \\ 10\leq 0{,}8x\leq 20 \\ 10\leq 0{,}5y\leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq -x+54 \\ 12{,}5\leq x\leq 25 \\ 20\leq y\leq 40 \end{cases}$$

Construindo a região das soluções admissíveis obtemos:



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos depois qual a solução ótima:

(x, y)	$L(x, y) = 0.8x + 0.5y$	
$A(12.5, 20)$	$L(12.5\,, 20) = 0.8 \times 12.5 + 0.5 \times 20 = 20$	
$B(25\,, 20)$	$L(25\,, 20) = 0.8 \times 25 + 0.5 \times 20 = 30$	
$C(25\,, 29)$	$L(25\,, 29) = 0.8 \times 25 + 0.5 \times 29 = 34.5$	← Solução ótima!
$D(14\,, 40)$	$L(14\,, 40) = 0.8 \times 14 + 0.5 \times 40 = 31.2$	
$E(12.5\,, 40)$	$L(12.5\,, 40) = 0.8 \times 12.5 + 0.5 \times 40 = 30$	

Resposta: A Joana deverá treinar, ao longo dos 6 dias, um total de 25 horas de Bola e 29 horas de Fita.

FIM