Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

# (CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 4 DE SETEMBRO DE 2020

**1.**

**1.1.**

A reta $AE$ é perpendicular ao plano $EFG$, pelo que qualquer vetor diretor da reta $AE$ é também um vetor normal ao plano $EFG$.

Assim, como o vetor $\vec{u}(3,-6,2)$ é um vetor diretor da reta $AE$, vem que também é um vetor normal ao plano $EFG$ e portanto uma equação do plano $EFG$ é da forma $3x-6y+2z+d=0$.

Como o ponto $G(5,3,6)$, pertence ao plano $EFG$, substituindo-o, vem:

$$3\times5-6\times3+2\times6+d=0 \Leftrightarrow 15-18+12+d=0 \Leftrightarrow 9+d=0 \Leftrightarrow d=-9$$

Logo, $EFG: 3x-6y+2z-9=0$.

**1.2.**

A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo é a superfície esférica de diâmetro $[AG]$.

Assim, o centro desta superfície esférica é o ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e a medida do comprimento do raio é igual a $\frac{\overline{AG}}{2}$.

Portanto:

- as coordenadas do ponto médio de $[AG]$ são:

$$\left(\frac{x_A+x_G}{2},\frac{y_A+y_G}{2},\frac{z_A+z_G}{2}\right)=\left(\frac{7+5}{2},\frac{1+3}{2},\frac{4+6}{2}\right)=(6,2,5)$$

- $\frac{\overline{AG}}{2}=\frac{\sqrt{(5-7)^2+(1-3)^2+(4-6)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4+4}}{2}=\frac{\sqrt{4\times3}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\sqrt{3}$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é:

$$(x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3$$

**2.**

O número de casos possíveis é ${}^{8}C_3$, que é o número de maneiras de escolher três dos oito vértices do cubo.

Cada uma das faces do cubo tem quatro vértices. Para formar uma das faces do cubo, dos seus quatro vértices escolhem-se três, o número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_3$. Como o cubo tem seis faces, vem que o número de casos favoráveis é $6\times {}^{4}C_3$ e a probabilidade pedida é $\dfrac{6\times {}^{4}C_3}{{}^{8}C_3}=\dfrac{3}{7}$.

A resposta correta é a opção **(B).**

**3.**

Tem-se que: $P\left(A\middle|\left(A\cup B\right)\right)=\dfrac{P\left(A\cap\left(A\cup B\right)\right)}{P\left(A\cup B\right)}\underset{i)}{=}\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

***i*** ) Como $A\subset\left(A\cup B\right)$, vem que $A\cap\left(A\cup B\right)=A$.

De uma outra forma, $A\cap\left(A\cup B\right)=\left(A\cup\varnothing\right)\cap\left(A\cup B\right)=A\cup\left(\varnothing\cap B\right)=A\cup\varnothing=A$

Mas,

$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}9\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}9\Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=0{,}9\Leftrightarrow 1-0{,}9=P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0{,}1$.

Logo, $P\left(A\middle|\left(A\cup B\right)\right)=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}3+0{,}4-0{,}1}=\dfrac{0{,}3}{0{,}6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

**4.**

Os números superiores a 9999 e inferiores a 22000 têm cinco algarismos e começam por 1 ou por 2.

**Números que começam por 1:**

| 1 | 0,1,2 *ou* 3 | 0,1,2 *ou* 3 | 0,1,2 *ou* 3 | 0,1,2 *ou* 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 4 | 4 |

O primeiro algarismo tem de ser o 1, pelo que para a primeira posição há apenas uma hipótese. Para as restantes quatro posições há quatro hipóteses, o 0, o 1, o 2 e o 3.

Logo, para este caso temos $1\times4\times4\times4\times4=4^4=256$ números.

**Números que começam por 2:**

| 2 | 0 *ou* 1 | 0,1,2 *ou* 3 | 0,1,2 *ou* 3 | 0,1,2 *ou* 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 4 | 4 |

O primeiro algarismo tem de ser o 2, pelo que para a primeira posição há apenas uma hipótese. O algarismo da segunda posição tem de ser inferior a 2, pelo que temos apenas duas hipóteses, o 0 e o 1. Para os restantes três posições há quatro hipóteses, o 0, o 1, o 2 e o 3.

Logo, para este caso temos $1\times2\times4\times4\times4=2\times4^3=128$ números.

Portanto, o total de números nas condições do enunciado é $256+128=384$.

A resposta correta é a opção **(C)**.

**5.**

Sejam a e b dois números reais positivos.

Dado que $\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3}$, então

$$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8 (a \times b) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a \times b = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow a \times b = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow a \times b = 2^{\frac{3}{3}} \Leftrightarrow a \times b == 2,$$

portanto o produto dos dois números é 2.

A resposta correta é a opção (**A**).

**6.**

Seja $r$ a razão da progressão aritmética $(u_n)$, com $r \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $u_7$ é o dobro de $u_2$, isto é,

$u_7 = 2u_2$ e como $u_7 = u_2 + 5r$, vem que $u_7 = 2u_2 \Leftrightarrow u_2 + 5r = 2u_2 \Leftrightarrow u_2 = 5r$.

Por outro lado, a soma dos seus doze primeiros termos é 57, pelo que:

$$\frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 57 \underset{\substack{u_2 = u_1 + r \Leftrightarrow u_1 = u_2 - r \\ u_{12} = u_2 + 10r}}{\Leftrightarrow} (u_2 - r + u_2 + 10r) \times 6 = 57 \underset{u_2 = 5r}{\Leftrightarrow} (5r - r + 5r + 10r) \times 6 = 57 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 19r \times 6 = 57 \Leftrightarrow 114r = 57 \Leftrightarrow r = \frac{57}{114} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Logo, como $u_2 = 5r$, vem que $u_2 = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e portanto, o termo geral de $(u_n)$ é dado por:

$$u_n = u_2 + (n-2) \times r = \frac{5}{2} + (n-2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{n}{2} - \frac{2}{2} = \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$$

Assim, fazendo $u_n = 500$, vem que $\frac{n}{2} + \frac{3}{2} = 500 \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} n + 3 = 1000 \Leftrightarrow n = 997$.

Pelo que 500 é termo de ordem 997 da sucessão.

**7.**

Sendo a sucessão $(v_n)$ definida por $v_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$, temos:

Como $\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$, excluímos as opções (A) e (B).

Excluímos igualmente a (D) porque para $n < 10$ a sucessão é crescente. Verificando-se que $v_9 = 9$ e

$v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$ o que mostra que a sucessão não é crescente para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Assim:

Para $n < 10$ verifica-se que $1 \leq v_n < 10$.

Para $n \geq 10$, verifica-se que $n \geq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{11}{10}$, e $1 + \frac{1}{n} > 1$.

Então $1 \leq v_n < 10, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo a sucessão $(v_n)$ é limitada.

A resposta correta é a opção (**C**).

**8.**

**8.1.**

Cálculo de $z_1$ na forma algébrica:

$z_1 = \frac{2}{1-i}$

$$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2.(1+i)}{(1-i).(1+i)} + \frac{4}{i.i^4} = \frac{2+2i}{2} + \frac{4.(-i)}{i.(-i)} = 1 + i - 4i = 1 - 3i$$

Seja $z_2 = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, em que se sabe que $|z_2| = \sqrt{5}$, isto é, $a^2 + b^2 = 5$

Efetuando $z_1 \times z_2$ tem-se que:

$$z_1 \times z_2 = (1-3i).(a+bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = (a+3b) + (b-3a)i$$

Atendendo a que o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais obtém-se o seguinte sistema de condições:

$$\begin{cases} a+3b = b-3a \\ a^2+b^2 = 5 \\ a+3b > 0 \\ b-3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a^2+4a^2 = 5 \\ a-6a > 0 \\ -2a-3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a^2 = 1 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a = 1 \\ a < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2a \\ a = -1 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

E, sendo assim, $z_2 = -1 + 2i$

**8. 2.**

Dado $k \in \mathbb{R}$, tem-se que $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$, e sendo assim:

$$(k+i)^2 = 3-4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki + i^2 = 3-4i \Leftrightarrow k^2 - 1 + 2ki = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} k^2-1 = 3 \\ 2k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^2 - 1 = 3 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3\ (V) \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2$$

A resposta correta é a opção: (**D**)

**9.**

**9.1.**

Uma vez que se sabe que $r = \frac{3}{5}R$, tem-se que:

$$P = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3}{5}R}{R}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \sqrt{\frac{16}{25}}\right) = 10\%$$

A resposta correta é a opção: (**C**)

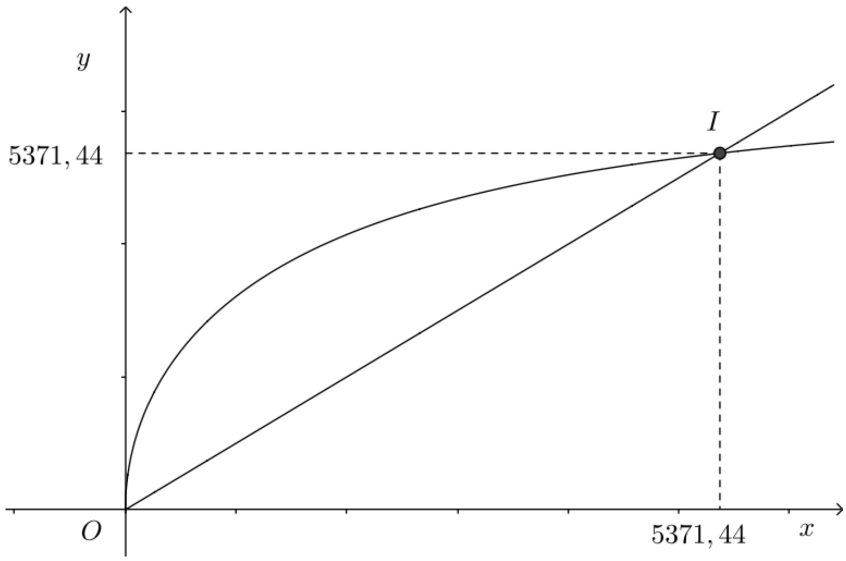
**9.2.**

Tome-se $R = 6400$ e $h = r$ .

Substituindo na expressão dada, obtém-se que:

$$r = \frac{6400}{r + 6400} \times \sqrt{r^2 + 2r(6400)} \Leftrightarrow r = \frac{6400\sqrt{r^2 + 12800r}}{r + 6400}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, represente-se, numa janela adequada, por exemplo $[0\ ,6400]\times[0\ ,6400]$, a função correspondente à reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) e a função representada pela expressão $y = \dfrac{6400\sqrt{x^2 + 12800x}}{x + 6400}$. Assim, pode-se encontrar as coordenadas do ponto ***I*** resultante da interseção dos dois gráficos.




Conclui-se que $r \approx 5371{,}44\ km$ , o que substituindo na expressão da percentagem obtemos:

$$P = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{5371{,}44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23\% .$$

Assim, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude desta for igual ao raio da base da respetiva calote esférica é de, aproximadamente, 23%.

**10.**

**10.1.**

A função $f \circ g$ é definida pela seguinte expressão analítica:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\cos x)^2$.

Determinando a expressão analítica da função derivada temos:

$(f \circ g)'(x) = \left((\cos x)^2\right)' = 2 \times \cos x \times (-\operatorname{sen} x)$.

O declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, pelo que:

$(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \cos\frac{\pi}{4} \times \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{4} = -1$.

A resposta correta é a opção (**B**).

**10.2.**

Mostrar que a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$ é equivalente a mostrar que a equação $f(x) - g(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no mesmo intervalo.

Assim, será também equivalente mostrar que a função $h$ tem pelo menos um zero no mesmo intervalo, considerando $h$ definida por:

$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \cos x$

Calculemos:

$h(x) = 0 - \cos 0 = -1$

$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}5966$

Como a função $h$ é contínua em $\mathbb{R}$, por ser a diferença de duas funções contínuas, uma função quadrática e a função trigonométrica $g(x) = \cos x$, logo a função $h$ é contínua em $\left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$.

Como $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$, conclui-se pelo teorema de Bolzano-Cauchy que a função $h$ tem pelo menos um zero em $\left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$ e também, na medida em que é equivalente, que a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$ como queríamos mostrar.

**11.**

**11.1.**

Para averiguar se a função $h$ é contínua em $x=1$, temos que verificar se $h(1)=\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^+} h(x)$:

- $h(1)=\lim_{x\to 1^-} h(x)=1+1\times e^{1-1}=1+1=2$;

- $$\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right)=\frac{\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)}{\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right)}=\frac{\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)}{\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)}{\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1}+1}}{1}=\frac{1}{2}$$

(fazendo $y=x-1$ temos que se $x\to 1^+$, então $y\to 0^+$)

Como $h(1)=\lim_{x\to 1^-} h(x)\neq \lim_{x\to 1^+} h(x)$, a função não é contínua em $x=1$.

**11.2.**

Como o domínio da função $h$ é o intervalo $]-\infty, 4[$ o gráfico de $h$ admite uma assíntota horizontal se $\lim_{x\to -\infty} h(x)=b$, com $b\in\mathbb{R}$.

Calculemos o $\lim_{x\to -\infty} h(x)$.

$\lim_{x\to -\infty} h(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(1+x e^{x-1}\right)$, indeterminação do tipo $0\times\infty$.

(fazendo $y=-x \Leftrightarrow x=-y$ temos que se $x\to -\infty$, então $-x\to +\infty$ e portanto $y\to +\infty$)

Assim,

$$\lim_{x\to -\infty} h(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(1+x e^{x-1}\right)=\lim_{y\to +\infty}\left(1-y e^{-y-1}\right)=\lim_{y\to +\infty}\left(1-\frac{y}{e^{y+1}}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{e\times \lim_{y\to +\infty}\frac{e^y}{y}}=1-\frac{1}{e\times(+\infty)}=1$$

Logo, $y=1$ é equação da assintota horizontal do gráfico de $h$.

**12.**
**12.1.**
Para estudar a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, comecemos por determinar a expressão da segunda derivada da função $f$:

$$f''(x)=\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)'=\frac{\left(0+\frac{1}{x}\right)\times x-1\times(2+\ln x)}{x^2}=\frac{1-2-\ln x}{x^2}=\frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Calculando os zeros da segunda derivada, no intervalo $]0,+\infty[$:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow -1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

Estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando-o com o sentido das concavidades do gráfico de $f$, temos:

| | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1-\ln x$ | n.d. | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x^2$ | n.d. | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | n.d. | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | n.d. | $\cup$ | P.I. | $\cap$ |

Podemos então concluir que o gráfico da função $f$ tem:

- a concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$;
- a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$;
- um ponto de inflexão de abcissa $\frac{1}{e}$.

**12.2.**
Calculando o limite pedido:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{-(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{-(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{-(x+1)}=$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{-2}=\frac{2+\ln 1}{1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

A resposta correta é a opção (**B**).

**FIM**