Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2017

GRUPO I

1.

Temos que os algarismos pares, ficando juntos podem ocupar 4 pares de posições e trocando entre si, podem figurar no número de 2×4 formas distintas.

Os algarismos ímpares devem ocupar as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ disposições diferentes.

Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos pares e ímpares, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é: $2 \times 4 \times 3! = 8 \times 6 = 48$.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

2.

Temos que:

$$P\left(X > 1 \middle| X \leq 3 \right) = \frac{P\left(X > 1 \cap X \leq 3 \right)}{P\left(X \leq 3 \right)} = \frac{P\left(X = 2 \right) + P\left(X = 3 \right)}{1 - P\left(X = 4 \right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

3.

Pela definição de derivada num ponto, temos que: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Assim, vem que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x(x-2)}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} \times f'(2) \times 4 \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2 \times f'(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

4.

Dado que $(g o f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0$.

Como o único zero da função g é 2, ou seja, $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, então vem que:

$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

E, por observação do gráfico de f podemos verificar que os objetos cuja imagem é 2 pela função f são 1 e 5.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

5.

Estudando a variação do sinal da função derivada g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	$-\infty$	$-10+5=-5$		$0+5=5$		$10+5=15$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$	P. I.	$\cap$

De onde se verifica que, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-5, 5\right[$.

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: B

6.

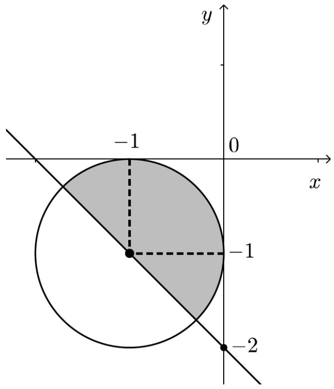
Seja $z = \rho \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{5}$ então,

$$-5i \times z = -5i \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{5} = 5 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \rho \operatorname{cis}\frac{\pi}{5} = 5\ \rho \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right) = 5\ \rho \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: B

7.



A condição $\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2\leq 1$ representa todos os pontos do plano que pertencem ao círculo de centro $\left(-1,-1\right)$ e raio 1 e a condição $x+y+2\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -x-2$ corresponde ao semiplano fechado superior, determinado pela reta de equação $y=-x-2$.

Como o centro pertence à reta de equação $y=-x-2$, então a condição $\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2\leq 1 \wedge x+y+2\geq 0$ representa o conjunto dos pontos do semicírculo de centro $\left(-1,-1\right)$ e raio 1.

Pelo que, o perímetro dessa região é igual a $1+1+\frac{2\pi}{2}=2+\pi$.

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

8.

Como $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}=\frac{1}{2^{1-n}}=2^{n-1}$, então

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2^{n-(n-1)}=2^1=2, \forall n\in\mathbb{N}$, logo é uma progressão geométrica de razão 2.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

GRUPO II

1.

A condição $|z - z_1| = |z - z_2|$ define o conjunto dos pontos que está à mesma distância dos afixos dos complexos z_1 e z_2, ou seja, a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de z_1 e de z_2.

Para mostramos que o complexo $\sqrt{2}\ \text{cis}\ \dfrac{\pi}{4}$, que denotaremos por *w*, satisfaz a condição dada, temos que começar por determinar o complexo z_2, uma vez que não é dado.

Dado que $z_1 = 2 + i$ e que $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$, determinemos z_2:

$$z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4 - 3i}{2 + i} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{(4 - 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{8 - 4i - 6i - 3}{4 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{5 - 10i}{5} \Leftrightarrow \overline{z_2} = 1 - 2i$$

Temos então que $z_2 = 1 + 2i$, dado que o seu conjugado é $\overline{z_2} = 1 - 2i$.

Passemos *w* da forma trigonométrica para a forma algébrica:

$$w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow w = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i\right) \Leftrightarrow w = 1 + i$$

Verifiquemos, agora, se *w* satisfaz a condição dada.

$|(1 + i) - (2 + i)| = |(1 + i) - (1 + 2i)| \Leftrightarrow |-1 + 0i| = |0 - i| \Leftrightarrow 1 = 1$, como obtivemos uma igualdade numérica verdadeira podemos afirmar que, de facto, o afixo de $w = \sqrt{2}\ \text{cis}\dfrac{\pi}{4}$, pertence à mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de z_1 e de z_2.

2.

2.1.

Tem-se que o ponto C pertence ao eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são do tipo $C(0, y_C, 0)$.

Como C também pertence ao plano ACG, substituindo as coordenadas de C na equação de ACG, vem:

$$0 + y_C - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow y_C = 6 \text{, então o ponto } C \text{ tem coordenadas } C(0, 6, 0).$$

Como D tem coordenadas $(0, 4, 0)$, a medida do comprimento da aresta $[CD]$ é $6-4=2$. Portanto, a medida do comprimento das arestas do cubo é 2, pelo que a abcissa do ponto A é 2 (a face $[ABCD]$ está contida em xOy).

2.2.

A condição que define a reta r pode ser escrita da forma $x-1=1-y=z \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=z \\ 1-y=z \end{cases}$.

Considerando um sistema de três equações e três incógnitas com a condição que define a reta r e o com a condição que define o plano ACG, podemos determinar as coordenadas do seu ponto de intersecção:

$$\begin{cases} x-1=z \\ 1-y=z \\ x+y-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z+1 \\ y=1-z \\ \cancel{z}+1+1-\cancel{z}-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4+1 \\ y=1-(-4) \\ z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \\ z=-4 \end{cases}$$

$\therefore$ As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG são $(-3, 5, -4)$.

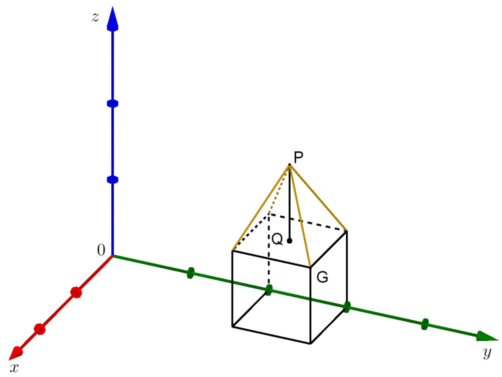
2.3.

Tem-se que a amplitude do ângulo OGP é igual à amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{GO}$ e $\overrightarrow{GP}$. Assim, sendo α a amplitude desse ângulo, tem-se que $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{GP}}{\left\|\overrightarrow{GO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{GP}\right\|}$.

▪ $G(2, 6, 2)$, pelo que $\overrightarrow{GO} = O - G = (0, 0, 0) - (2, 6, 2) = (-2, -6, -2)$

Logo, $\left\|\overrightarrow{GO}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

▪ O ponto P tem a mesma abcissa e a mesma ordenada que o centro Q, da face $[EFGH]$, pelo que as suas coordenadas são da forma $P(1, 5, z_P)$, com $z_P > 2$.



O volume da pirâmide é dado por $\dfrac{\overline{EF}^2 \times \overline{QP}}{3}$, pelo que,

$$\frac{\overline{EF}^2 \times \overline{QP}}{3} = 4 \Leftrightarrow \frac{2^2 \times \overline{QP}}{3} = 4 \Leftrightarrow \overline{QP} = \frac{4\times 3}{4} = 3$$

Logo, $P(1, 5, 2+3) = (1, 5, 5)$.

Assim, $\overrightarrow{GP} = P - G = (1, 5, 5) - (2, 6, 2) = (-1, -1, 3)$ e portanto

$\left\|\overrightarrow{GP}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$.

▪ $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{GP}}{\left\|\overrightarrow{GO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{GP}\right\|} = \dfrac{(-2, -6, -2)\cdot(-1, -1, 3)}{2\sqrt{11}\times\sqrt{11}} = \dfrac{2+6-6}{2\times 11} = \dfrac{2}{22}$, então $\alpha \approx 85^\circ$.

$\therefore$ A amplitude do ângulo OGP é, aproximadamente, 85º.

3.

3.1.

Tendo em conta os acontecimentos seguintes:

A: “ O aluno escolhido é rapariga”

B: “ O aluno escolhido frequenta o 10ºano”

Sabe-se que $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}82$ e que $P\left(B\,|A\right)=\frac{1}{3}$.

Assim,

$$\begin{aligned}&P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}82\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}82\Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=0{,}82\Leftrightarrow\\&\qquad\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=1-0{,}82\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0{,}18\end{aligned}\qquad(1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&P\left(B\,|A\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{1}{3}\underset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{0{,}18}{P\left(A\right)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P\left(A\right)}{0{,}18}=3\Leftrightarrow P\left(A\right)=0{,}18\times3\Leftrightarrow\\&\qquad\Leftrightarrow P\left(A\right)=0{,}54\end{aligned}$$

De onde se conclui que $P\left(A\right)=0{,}54$.

3.2.

Temos um saco com cartões numerados de 1 a 30.

Como queremos retirar quatro cartões simultaneamente, o número de casos possíveis é dado pela expressão: ${}^{30}C_4$, pois trata-se de escolher do conjunto dos 30 cartões existentes no saco subconjuntos de quatro elementos.

Se os dois menores números, dos quatro retirados simultaneamente, são os número 7 e 22, então os restantes dois números poderão ser escolhidos entre os números 23, 24, 25, 26 , 27 , 28, 29 e 30.

Isto é, o número de casos favoráveis é dado pela expressão ${}^{8}C_2$ pois, podemos fazer subconjuntos de dois elementos de entre os oito disponíveis.

Assim, e tendo em conta a regra de Laplace, a probabilidade pedida é dado por:

$$\frac{{}^{8}C_2}{{}^{30}C_4}=\frac{28}{27405}\approx0{,}001\ .$$

$\therefore$ A probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22 é aproximadamente 0,001.

4.

4.1.

Determinemos as:

- Assíntotas verticais:

A função f é contínua em $]0,+\infty[$, por ser o quociente de duas funções contínuas.

Uma vez que a função f é contínua em $]0,+\infty[$, apenas a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f .

Tem-se:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

- Assíntotas horizontais:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, limite notável.

Portanto, a reta de equação $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando x tende para $+\infty$. Não existem outras assíntotas horizontais porque o domínio de f é limitado inferiormente.

4. 2.

$$f(x) > 2\ln(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} > 2\ln(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} - 2\ln(x) > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 2\,x\,\ln(x)}{x} > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\ln(x)(1-2x)}{x} > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, então o sinal de $\dfrac{\ln(x)(1-2x)}{x}$ só depende do sinal do numerador $\ln(x)(1-2x)$.

Calculemos os zeros da expressão $\ln(x)(1-2x)$:

$$\ln(x)(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \vee 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$$

Estudando a variação do sinal vem:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(1-2x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\ln(x)(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Conclui-se que o conjunto solução da condição $f(x) > 2\ln(x)$ é o intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

4.3

Comecemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de g.

$$g'(x) = \left(\frac{k}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)' = \left(\frac{k}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}.$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, a função g é derivável em $\mathbb{R}^+$.

Como g é uma função derivável em $\mathbb{R}^+$ e tem um extremo relativo em $x = 1$, então $g'(1) = 0$.

Resolvendo esta equação em ordem a k, vem:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Assim, $k = 1$.

5.

Desenvolvendo a expressão dada, vem:

$$\left(2x\ \text{sen}\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2 = 4x^2\, sen^2\alpha + \frac{4x\ \text{sen}\alpha\cos\alpha}{x} + \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$$

$$= 4x^2\, sen^2\alpha + 4\text{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{x^2},\ \text{com } x \neq 0$$

Neste desenvolvimento, o termo independente de x é igual a 1, pelo que, $4\ \text{sen}\alpha\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow 2sen(2\alpha) = 1$.

Determinemos os valores de $\alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[$ que verificam a condição: $2\,sen(2\alpha) = 1$.

$$2sen(2\alpha) = 1 \wedge \alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[\Leftrightarrow sen(2\alpha) = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen(2\alpha) = sen\frac{\pi}{6} \wedge \alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi\right) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi\right) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[$$

Se $k = 0$, então $\alpha = \frac{\pi}{12}$ e $\alpha = \frac{5\pi}{12}$;

Se $k = 1$, então $\alpha = \frac{13\pi}{12}$ e $\alpha = \frac{17\pi}{12}$;

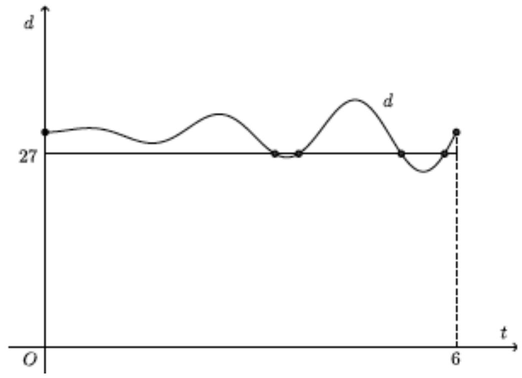
Se $k = 2$, então $\alpha = \frac{25\pi}{12}$ e $\alpha = \frac{29\pi}{12}$.

Assim, os valores de $\alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[$ que verificam a condição $2\,sen(2\alpha) = 1$ são: $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$.

6.

6.1.

Representando na calculadora gráfica o gráfico da função *d*, definida por $d(t) = 30 + t \times sen\pi$, pois $t \in [0, 6]$ e a reta de equação $d = 27$, (reproduzidos na figura ao lado) podemos observar que a reta interseta o gráfico da função *d*, naquele intervalo, em 4 pontos, pelo que o número de soluções da equação $d(t) = 27$, no intervalo $[0, 6]$, é 4.

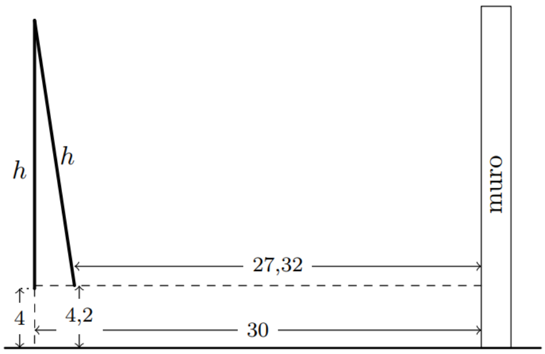


No contexto da situação descrita, a existência de 4 soluções no intervalo $[0, 6]$, significa que a criança esteve a uma distância de 27 decímetros do muro, por quatro vezes, nos primeiros seis segundos.

6.2.

No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 *dm*, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

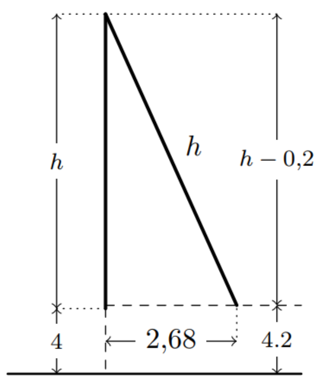
$d(0) = 30 + 0 \times sen(\pi \times 0) = 30 + 0 = 30\,dm$



Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 *dm* e a distância ao muro é dada por:

$$d(13{,}5) = 30 + 12e^{12-13{,}5} \times sen(\pi \times 13{,}5) =$$
$$= 30 + 12e^{-1{,}5} \times sen(\pi \times 13{,}5) \approx 27{,}32\,dm$$

Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), um dos catetos mede $h + 4 - 4{,}2 = h - 0{,}2$ e o outro cateto mede $d(0) - d(13{,}5) \approx 30 - 27{,}32 \approx 2{,}68$.



E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$h^2 = (h - 0{,}2)^2 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 0{,}4h + 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4h = 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow h = \frac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4}$$

Como $\frac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm.

FIM