Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2017

GRUPO I

1.

Dado que os algarismos que são usados são os do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, um número formado por quatro algarismos que seja múltiplo de 5 tem, necessariamente, que terminar em 5. Assim, para cada uma das restantes três posições para formar o número temos nove hipóteses. Conclusão, existem $9^3 = 729$ números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: D

2.

Consideremos os acontecimentos:

R – O aluno escolhido ser rapaz

V – O aluno escolhido ter olhos verdes.

Se $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes, então $P\left(V|R\right) = \frac{1}{4}$, e se escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$, isto significa que $P\left(R \cap V\right) = \frac{1}{10}$.

Da definição de probabilidade condicionada temos que:

$P\left(V|R\right) = \frac{P\left(V \cap R\right)}{P\left(R\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{P\left(R\right)}$, resolvendo a equação em ordem a $P(R)$, vem:

$P\left(R\right) = 4 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow P\left(R\right) = \frac{4}{10}$.

Dado que a turma tem 20 alunos e destes $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ são rapazes, então o número de rapazes da turma é $\frac{2}{5} \times 20 = 8$.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

3.

Considerando as concavidades do gráfico da figura concluímos, por um lado, que $f''(-1) < 0$ e que $f''(-2) < 0$. E, por outro lado, que $f''(1) > 0$ e que $f''(2) > 0$.

Considerando as quatro hipóteses de resposta a única que é verdadeira é a $f''(1) \times f''(2) > 0$.

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

4.

Considerando que $y = -x$ é assíntota oblíqua quer do gráfico de f quer do gráfico de g, então verifica-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\times g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} \times \frac{g(x)}{x} \times x \right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} \right) \times \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x} \right) \times \lim_{x\to+\infty}(x) =$$

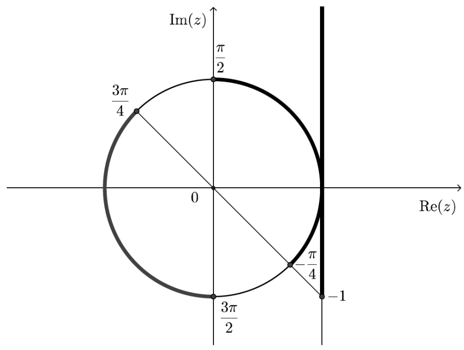
$$= (-1)\times(-1)\times(+\infty) = +\infty$$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: C

5.

Consideremos a seguinte figura:



observando-a, conclui-se que

$$\operatorname{tg} x > -1 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[,\ k \in \mathbf{Z} .$$

Portanto:

- se $k = 0$ então $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, não estando este intervalo representado em nenhuma das opções;
- se $k = 1$ então $x \in \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$, estando este intervalo representado numa das opções.

Logo, A pode ser o conjunto $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

6.

Tem-se que α é a inclinação da reta r, pelo que o seu declive é dado por $\operatorname{tg}\alpha$.

Como $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, vem que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, pelo que $\operatorname{tg}\alpha < 0$

Logo, usando a fórmula $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{4}$$

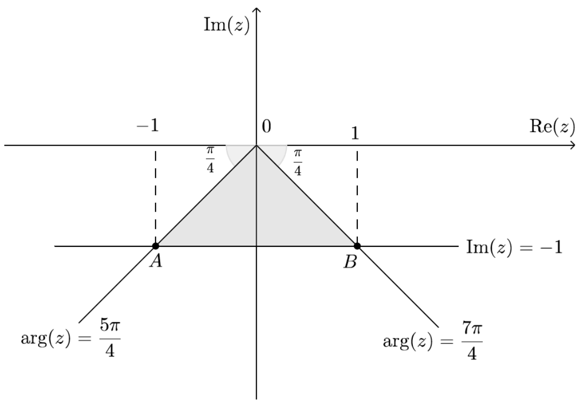
Como $\operatorname{tg}\alpha < 0$, vem $\operatorname{tg}\alpha = -2$, pelo que o declive da reta é -2. Das opções apresentadas, apenas uma tem uma equação de uma reta cujo declive é -2.

Resposta correta:

Versão 1: C	
Versão 2: A	

7.

A condição $\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$ define a região a sombreado da figura seguinte:



A condição define o triângulo $[AOB]$, em que a medida do comprimento da sua altura é 1 e $\overline{AB} = 2$. Logo,

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times altura}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta correta:

Versão 1: D	
Versão 2: B	

8.

Tem-se que para $n \in \mathbb{N}$ e:

- para $n \leq 20$, $u_n = n$, pelo que $1 \leq u_n \leq 20$
- para $n > 20$, $u_n = (-1)^n$, pelo que $u_n = -1$ se n é ímpar e $u_n = 1$ se n é par.

Logo, para todo o $n \in I\!N$, $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta correta:

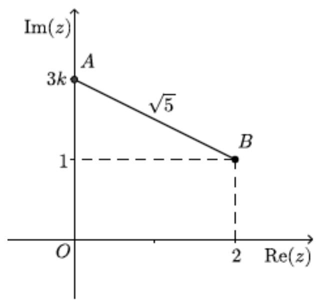
Versão 1: C
Versão 2: A

GRUPO II

1.

Tem-se que:

- $i^{19} = i^{16+3} + i^{4\times 4} \times i^3 = \left(i^4\right)^4 \times (-i) = 1^4 \times (-i) = 1 \times (-i) = -i$
- $z_1 = \dfrac{1-3i^{19}}{1+i} = \dfrac{1-3(-i)}{1+i} = \dfrac{1+3i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i+3i-3i^2}{1^2-i^2} = \dfrac{1-i+3i+3}{2} = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i$
- $z_2 = -3k \underbrace{\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{2}}_{-i} = -3k \times (-i) = 3k\,i$



A distância entre z_1 e z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$.

Assim,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i-3k\,i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i(1-3k)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (1-3k)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{4+(1-3k)^2} = \sqrt{5}$$

Como para todo o $k \in I\!R^+$, $4+(1-3k)^2 > 0$, elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{4+(1-3k)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 4+(1-3k)^2 = 5 \Leftrightarrow (1-3k)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-3k = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-3k = -1 \ \vee \ 1-3k = 1 \Leftrightarrow -3k = -2 \ \vee \ -3k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \ \vee \ k = 0$$

Dado que $k \in I\!R^+$, então $k = \dfrac{2}{3}$.

2.

2.1.

Como o plano STU tem equação $z = 3$, então $T\left(0, 0, 3\right)$ e $T'\left(0, 0, -3\right)$. Assim, o centro da superfície esférica de diâmetro $\left[TT'\right]$ é a origem do referencial $\left(0, 0, 0\right)$ e o raio é igual a 3.

A equação da superfície esférica pedida é: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

2.2.

Como $\left[UP\right]$ e $\left[RS\right]$ são arestas laterais do prisma e a altura é 3.

$\left\|\overline{UP}\right\| = 3$

$\left\|\overline{RS}\right\| = 3$

O ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ é 180º.

Assim, $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{RS}\right\| \times \cos(180^\circ) = 3 \times 3 \times (-1) = -9$

2.3.

Como o plano PQV tem equação $x + y = 2$, e como o ponto Q tem a abcissa e a cota iguais a 0, as coordenadas de Q são: $Q\left(0, 2, 0\right)$

O vetor diretor da reta é: $\overrightarrow{TQ} = Q - T = \left(0, 2, 0\right) - \left(0, 0, 3\right) = \left(0, 2, -3\right)$

Assim, uma condição cartesiana que define a reta TQ é $x = 0 \wedge \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

2.4.

O número de casos possíveis é dado por: ${}^8C_3$

Há 6 planos perpendiculares ao plano xOy. Os 4 planos que contêm as faces laterais do prisma e os dois planos que contêm as diagonais das bases do prisma.

Cada um destes planos contém 4 vértices do prisma:

Assim, o número de casos favoráveis é: $6 \times {}^4C_3$

A probabilidade pedida é: $\dfrac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \dfrac{6 \times 4}{56} = \dfrac{3}{7}$

3.

Como a $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ significa a probabilidade do número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par, então queremos a probabilidade do número da bola retirada ser 2, 4, 6, 7, 8, 9, …. ou seja, considerando o acontecimento contrário, queremos que a bola retirada não tenha os números 1, 3 e 5, pelo que: $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - \dfrac{3}{n} = \dfrac{n-3}{n}$

4.

4.1.

Temos que $f(0) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 0} + e^{0{,}2\times 0-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1} + e^{-1}\right) \approx 1{,}28$

Assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$, vem:

$$\sqrt{1{,}28^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1{,}28^2 + x^2}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1{,}28^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 1{,}28^2 \Leftrightarrow x^2 = 2{,}3616$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2{,}3616}$$

Como $x \in [0, 7]$, então a solução da equação é $x = \sqrt{2{,}3616} \approx 1{,}5$.

Dado que $\overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2$ e $\overline{OP} = f(0)$ e $\overline{OS} = x$, então temos que $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2}$ é a distância $\overline{SP}$.

Assim, a solução da equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$ é a abcissa do ponto S, na posição em que dista duas unidades do ponto P. O ponto S da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta o ponto P está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

4.2.

Comecemos por determinar a expressão analítica da derivada da função f :

$$f'(x) = \left(9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)\right)' = 9' - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2{,}5\left(\left(e^{1-0{,}2x}\right)' + \left(e^{0{,}2x-1}\right)'\right) = -2{,}5\left((1-0{,}2x)'\left(e^{1-0{,}2x}\right) + (0{,}2x-1)'\left(e^{0{,}2x-1}\right)\right) =$$

$$= -2{,}5\left(-0{,}2\left(e^{1-0{,}2x}\right) + 0{,}2\left(e^{0{,}2x-1}\right)\right) = -2{,}5 \times 0{,}2\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) =$$

$$= -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

Calculemos os zeros da função derivada, no domínio da função:

$$-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} = e^{0{,}2x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}2x = 0{,}2x - 1 \Leftrightarrow -0{,}4x = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{4} \Leftrightarrow x = 5$$

Estudando a variação do sinal da função derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	min	↗	Máx	↘	min

Assim, conclui-se que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 5} + e^{0{,}2\times 5-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-1} + e^{1-1}\right) = 9 - 0{,}5\left(e^{0} + e^{0}\right) =$$

$$= 9 - 2{,}5 \times 2 = 9 - 5 = 4$$

Portanto, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

5.

5.1.

Para averiguar se a função g é contínua em $x=1$, temos que verificar se $g(1)=\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)$:

- $g(1)=2$

- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \frac{1-\left(1^-\right)^2}{1-e^{1-1^-}} = \frac{1-1}{1-e^0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação).

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\left(x^2-1\right)}{-\left(e^{x-1}-1\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{\left(e^{x-1}-1\right)} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(x-1)}{\left(e^{x-1}-1\right)}(x+1)\right) =$$

(fazendo $y=x-1$, temos que se $x\longrightarrow 1^-$, então $y\longrightarrow 0^-$)

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{y}{e^y-1} \times \lim_{x\to 1^-}(x+1) = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} \times \left(1^-+1\right) =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} \times \left(1^-+1\right) = \frac{1}{1}\times 2 = 2$$

- $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = 3+\frac{\operatorname{sen}(1-1)}{1-1} = 3+\frac{0}{0}$ (indeterminação).

$$\lim_{x\to 1^+}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+} 3 + \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}\right) = 3 - \lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} =$$

(fazendo $y=x-1$, temos que se $x\longrightarrow 1^-$, então $y\longrightarrow 0^-$)

$$3 - \underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = 3-1 = 2$$

Como $g(1)=\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x=1$.

5.2.

Para $x \in \left]\, 4, 5 \,\right[$ tem-se $g(x) = 3 + \dfrac{\operatorname{sen}(\, x-1\,)}{1-x}$ e $1 - x \neq 0$. Assim,

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 + \frac{\operatorname{sen}(\, x-1\,)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\, x-1\,)}{1-x} = 0 \underset{1-x\neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}(\, x-1\,) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 1 + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, se:

- $k = 0$, então $x = 1$ e $1 \notin \left]\, 4, 5 \,\right[$;
- $k = 1$, então $x = 1 + \pi$ e $1 + \pi \in \left]\, 4, 5 \,\right[$;
- $k = 2$, então $x = 1 + 2\pi$ e $1 + 2\pi \notin \left]\, 4, 5 \,\right[$.

pelo que, o conjunto solução da equação é $\left\{\, 1 + \pi \,\right\}$.

5.3.

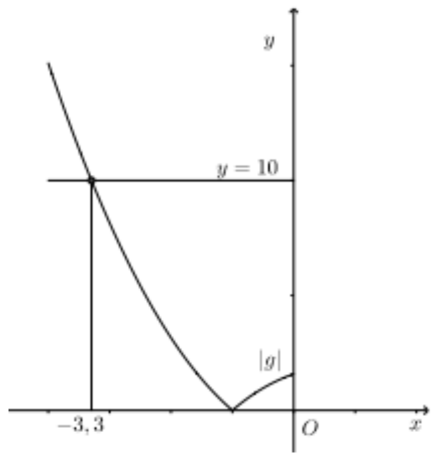
Como o ponto A é o ponto de abcissa negativa $(x < 1)$ que é a interseção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, tem ordenada nula, calculemos a abcissa resolvendo a equação seguinte:

$\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$. Dado que $x < 1$, então $x = -1$.

Assim, temos que $\overline{OA} = |-1| = 1$ e considerando o lado $[OA]$ como a base do triângulo $[OAP]$, a altura é o valor absoluto da ordenada do ponto P , pelo que a área do triângulo é igual a 5, se:

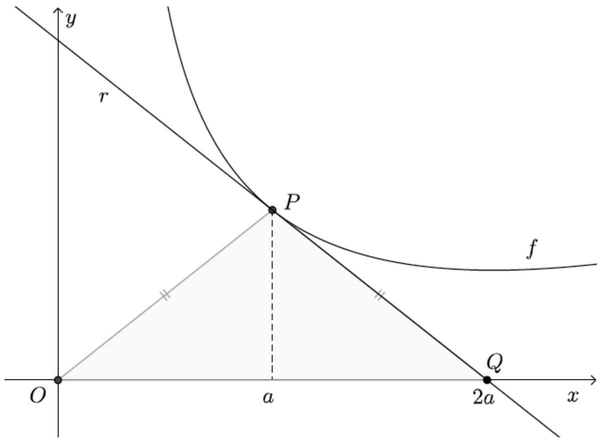
$$\frac{\overline{OA} \times |\, g(x)|}{2} = 5 \Leftrightarrow 1 \times |\, g(x)| = 5 \times 2 \Leftrightarrow |\, g(x)| = 10 \Leftrightarrow |\, g(x)| = 10 \Leftrightarrow \left| \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} \right| = 10$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $|\, g\,|$, para valores inferiores a 0 e a reta $y = 10$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto P , $x_P \approx -3{,}3$.



6.

Dado que $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$.



Como as coordenadas do ponto P são $\left(a, f(a)\right)$ e as do ponto Q são $(2a, 0)$, temos que o declive da reta PQ, é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$

Tendo em conta que a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então o declive da reta r, ou seja, da reta PQ é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, vem que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$

FIM