Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2016

Grupo I

Restrições do problema

$x \geq 0$

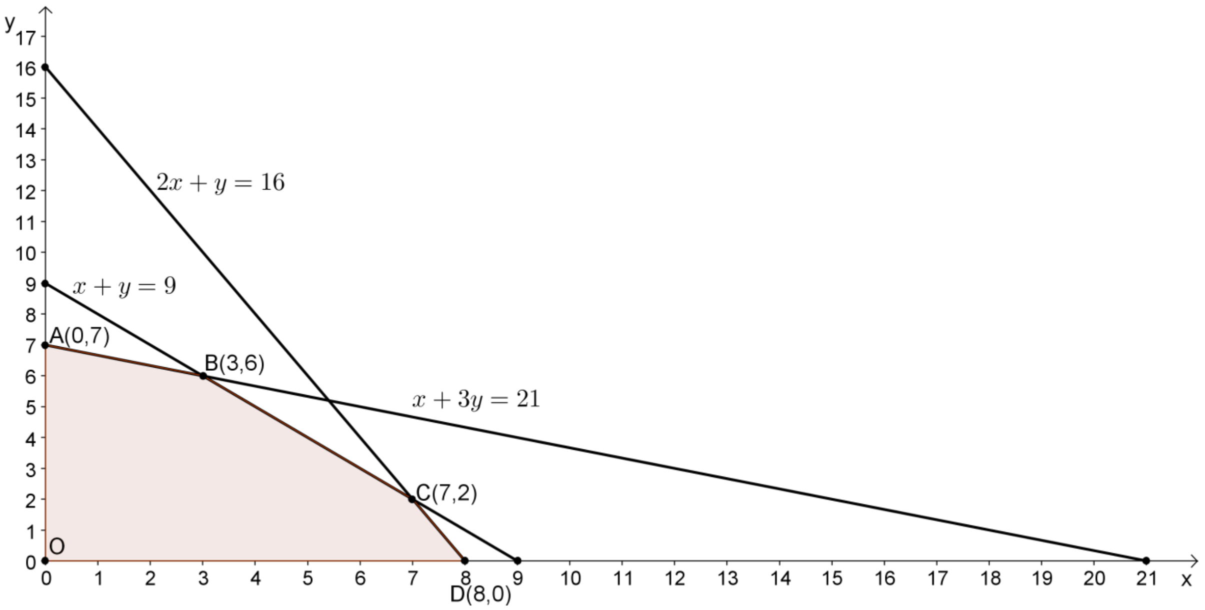
$y \geq 0$

$160x + 80y \leq 1280 \Leftrightarrow 2x + y \leq 16$ (dividindo os termos da desigualdade por 80)

$100x + 100y \leq 900 \Leftrightarrow x + y \leq 9$ (dividindo os termos da desigualdade por 100)

$50x + 150y \leq 1050 + 20 \Leftrightarrow x + 3y \leq 21$ (dividindo os termos da desigualdade por 50)

Representação gráfica da região admissível



A função objetivo é a receita gerada com a venda de *x* lotes de tipo I e *y* lotes de tipo II:

$R(x,y) = 1500x + 1800y$

Vértice	x	y	$R(x,y) = 1500x + 1800y$
A	0	7	12 600
B	3	6	**15 300**
C	7	2	14 100
D	8	0	12 000

O valor máximo de receita que a empresa pode obter com a venda de lotes dos dois tipos é *15 300* euros; por isso, não é possível a receita de *15 500* euros.

Grupo II

1.

1.1. Criaram-se duas listas na calculadora, de acordo com os dados fornecidos:

Lista 1	31	857	11973	12000	86000	86123	320083	616545
Lista 2	6	117	1000	1100	5426	6000	13848	18339

Equação da reta de regressão linear, obtida através da calculadora:

$$y = 0{,}0304x + 1418{,}9582$$

Substituindo na equação x por 250 000 e arredondando às unidades de milhar, obtém-se uma estimativa de 9000 hospitalizações associadas à gripe, nessa região.

1.2.

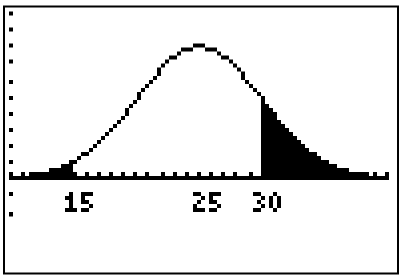
1.2.1. Sendo X a variável aleatória "tempo de espera, em minutos", então $X \sim N(25, \sigma)$

Pela simetria da curva normal em relação ao valor 25, tem-se que $P(X \geq 25) = 0{,}5$

1.2.2. Ainda pela simetria da curva normal em relação ao valor 25 pode-se concluir que

$$P(X < 15) < P(X > 30)$$

De facto, como 15 dista 10 minutos do valor médio 25 e 30 dista 5 minutos, então para a esquerda da reta vertical de equação $x = 15$ a área da região limitada pela curva normal é menor do que a área da região limitada pela curva normal e a direita da reta vertical de equação $x = 30$

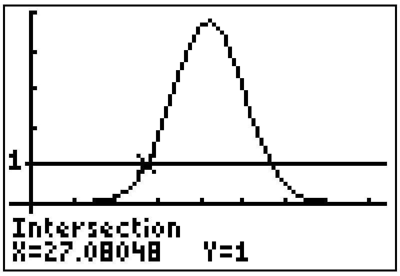


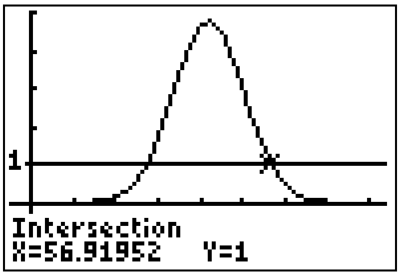
2.

2.1. Para $x = 21$ (dias), obtém-se $f(21) \approx 0{,}2168$

A percentagem de casos de gripe no instante em que se completaram três semanas foi 0,2%, aproximadamente.

2.2. O gráfico da função f interseta a reta horizontal de equação $y = 1$ em dois pontos, cujas coordenadas são, com arredondamento às décimas, (27,1; 1) e (56,9; 1)





A percentagem de casos de gripe foi superior a 1% , em dias completos, desde o dia 28 até ao dia 56, ou seja, durante 28 dias.

A medida esteve ativa durante quatro semanas completas.

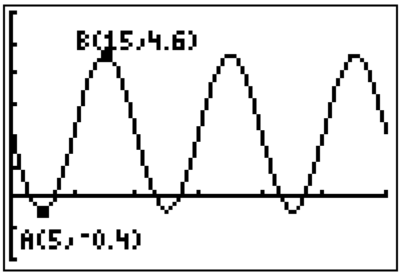
Grupo III

1.

1.1.1.

Processo 1

Representação gráfica da função h_1 , com $t \in [0,60]$



A ordenada do ponto A corresponde ao valor do mínimo absoluto da função e a ordenada de B ao seu máximo absoluto.

Máximo absoluto da função: 4,6

Mínimo absoluto da função: -0,4

Diâmetro da nora: 4,6 – (-0,4) = 5

Diâmetro da nora: 5 metros.

Processo 2

Os valores extremos da função h_1 são atingidos quando sen (πt/10) toma os valores máximo e mínimo 1 e -1, respetivamente.

- se $sen\ (\pi t/10) = 1$ vem $h_1(t) = 2{,}1 - 2{,}5 \times 1 = -0{,}4$

- se $sen\ (\pi t/10) = -1$ vem $h_1(t) = 2{,}1 - 2{,}5 \times (-1) = 4{,}6$

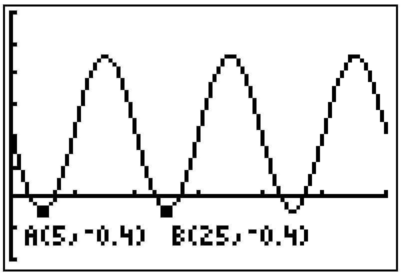
O diâmetro da nora é dado pela diferença entre o valor do máximo absoluto da função e o mínimo absoluto.

Diâmetro da nora: 4,6 – (-0,4) = 5

Diâmetro da nora: 5 metros.

1.1.2. Processo 1

Representação gráfica da função h_1 , com $t \in [0,60]$



A função é periódica. O período pode ser determinado pela diferença das abcissas de dois pontos cujas ordenadas são o mínimo da função. O valor da abcissa do ponto A é 5 e o valor da abcissa de B é 25, logo o período é 20 (25-5). Significa que a nora demora 20 segundos a dar uma volta completa. Como a nora roda durante 600 segundos, $\frac{600}{20} = 30$.

A pá deu 30 voltas completas.

Processo 2

O período da função $sen\ t$ é 2π. O período da função $sen(\frac{\pi}{10}t)$ é dado por $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$

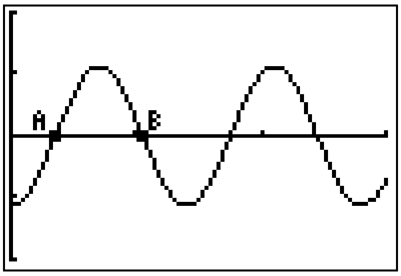
A nora demora 20 segundos a dar uma volta completa.

$\frac{600}{20} = 30.$

A pá deu 30 voltas completas.

1.2.

Representação gráfica da função *H* com $t \in [0,30]$



Seja *A* de coordenadas (a_1, a_2). Seja *B* de coordenadas (b_1, b_2)

Pela análise do gráfico podemos observar que a função é negativa no intervalo $[0, a_1[$, o que significa que a altura da pá está a diminuir, correspondendo a_1 ao tempo decorrido até a pá ter atingido uma altura mínima.

No intervalo $[a_1, b_1[$, a função é positiva correspondendo b_1 ao tempo decorrido até a pá ter atingido uma altura máxima. Utilizando as potencialidades da calculadora para determinar a abcissa de B, conclui-se que $b_1 = 10{,}5$.

A altura da pá atingiu pela primeira vez a altura máxima ao fim de 10,5 segundos.

2. Gráfico da figura 3: Por análise do gráfico verifica-se que a imagem de 5 é superior à imagem de 40, logo a taxa de variação média no intervalo $[5, 40]$ é negativa.

Gráfico da figura 4: Por análise do gráfico verifica-se que a imagem de 0 é superior a 21.

Gráfico da figura 5: Por análise do gráfico verifica-se que 10 não é um maximizante da função.

Grupo IV

1. O número de triângulos em cada etapa de construção segue a sequência: 3, 9, 27, …

   Trata-se de uma sucessão que é uma progressão geométrica de termo geral $s_n = 3^n$ onde *n* corresponde à ordem da etapa.

   Assim, na etapa 16 obter-se-ão: $s_{16} = 3^{16} = 43\,046\,721$ triângulos.

2. Considerando o triângulo inicial com área 1, na etapa 1 são considerados 3 triângulos dos quatro em que se divide o inicial. Na etapa 2 consideramos, em cada um dos triângulos obtidos na 1ª etapa, 3 dos quatro em que cada um deles se divide, e assim sucessivamente.

   Desta forma, e chamando A_n à soma das áreas dos triângulos obtidos na etapa *n*, temos:

$A_1 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

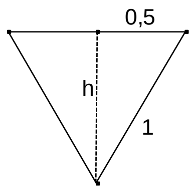
$A_2 = 3 \times 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 9 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$

Como A_n é uma progressão geométrica, a sua razão é: $r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$

3. De acordo com o padrão de construção apresentado, cada dois triângulos (iguais aos da etapa 1 do Tapete de Sierspinski) ocupam um paralelogramo de 1 dm por 1 dm.

   O mural comporta então um total de triângulos igual a $(20 \times 2) \times 10 = 400$

   Cada triângulo pintado a branco tem uma área que é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo equilátero de lado 1, esquematizado na figura ao lado.



   Altura: $h = \sqrt{1 - 0,5^2} \approx 0,8660$ dm

   Área: $\frac{1 \times 0,8660}{2} = 0,4330$ dm^2.

   Cada triângulo branco tem área $\frac{1}{4} \times 0,4330 = 0,10825\,\text{dm}^2$

   A área do mural ocupada pelos triângulos brancos é de $400 \times 0,10825 \approx 43,3\,\text{dm}^2$

4. Se as pirâmides são ambas triangulares regulares então são semelhantes e por isso as suas dimensões são diretamente proporcionais.

   Se a razão entre os seus volumes é $r_{volumes} = \frac{1}{64}$, a razão entre a dimensão das arestas é

   $r_{arestas} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$.

   Se a aresta da pirâmide de menores dimensões mede 10 cm, a aresta da pirâmide de maiores dimensões mede 10 × 4 = 40 cm.

   A soma dos comprimentos das arestas da pirâmide de maiores dimensões é igual a $6 \times 40 = 240$ cm (uma pirâmide triangular tem 6 arestas).

FIM