Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2016

GRUPO I

1.

Sabe-se que:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(A \cup B\right) = 0{,}4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}4$$

Logo,

$0{,}2 + 0{,}3 - P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = 0{,}1$.

Como $P\left(A|B\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)}$, temos que:

$P\left(A|B\right) = \dfrac{0{,}1}{0{,}3}$.

Assim, $P\left(A|B\right) = \dfrac{1}{3}$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: B

2.

Como se trata de uma distribuição binomial em que a probabilidade de sucesso é 0,4 e o número de experiências é 5 então, a probabilidade de encestar exatamente 4 vezes é igual a:

$${}^{5}C_{4} \times 0{,}4^{4} \times 0{,}6^{1} = 0{,}0768$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: B

3.

Dado que:

$\log_a\left(ab^3\right) = 5 \Leftrightarrow \log_a(a) + 3\log_a(b) = 5 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a(b) = 5$, pois a e b são ambos positivos,

temos

$$\log_a(b) = \frac{5-1}{3} \Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{4}{3}$$

Mas,

$\log_b(a) = \dfrac{\log_a(a)}{\log_a(b)}$ pelo que,

$$\log_b(a) = \frac{1}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \log_b(a) = \frac{3}{4}$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: A

4.

$$\lim f(u_n) = \lim\left(\ln\left(\frac{n}{e^n}\right)\right) = \lim\left(\ln\left(\frac{e^n}{n}\right)^{-1}\right) = -\lim\left(\underbrace{\ln\left(\frac{e^n}{n}\right)}_{limite\ notável}\right) = -\ln(+\infty) = -\infty$$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: C

5.

Calculemos a área do triângulo $[PQR]$ em função de α:

$Area_{[PQR]} = \dfrac{\overline{QR} \times altura}{2}$, sendo a altura igual a $2 \times \overline{OR}$.

Ora, $\overline{QR} = \left|\cos(\pi + \alpha)\right| = \left|-\cos\alpha\right| = \cos\alpha$, pois $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$, então $2 \times \overline{OR} = 2 \times \operatorname{sen}\alpha$.

Portanto, $Area_{[PQR]} = \dfrac{\cos\alpha \times 2 \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$.

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: C

6.

As raízes de índice 6 do número complexo w têm como imagem geométrica os vértices de um hexágono regular centrado na origem do referencial e inscrito numa circunferência de raio igual ao módulo de z que é uma das raízes de índice 6 de w.

Como $z = 3 + 4i$, o raio da circunferência é $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ e como o lado do hexágono tem comprimento igual ao raio da circunferência que o circunscreve, então o perímetro do hexágono igual a:

$$6 \times |z| = 6 \times 5 = 30$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: B

7.

Como a circunferência está inscrita no quadrado, a medida do comprimento do seu diâmetro é igual à medida do comprimento do lado do quadrado.

Sendo l a medida do lado do quadrado e r a medida do raio da circunferência, então $r = \frac{l}{2}$.

Dado que $l = 5 - 1 = 4$, então $r = 2$.

As coordenadas do centro da circunferência são $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$, isto é, $(2, 3)$.

Uma condição que define a circunferência de centro $(2, 3)$ e raio 2 é:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: D

8.

Como (u_n) é uma progressão geométrica podemos escrever $u_8 = u_4 \times r^{8-4}$, sendo r a razão da progressão.

Assim,

$u_8 = u_4 \times r^4 \Leftrightarrow 8192 = 32 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 256$.

A progressão geométrica (u_n) é monótona pelo que a razão r é um número real positivo. Então,

$r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow r = 4$.

Como (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 4$ tem-se:

$$u_5 = u_4 \times r \Leftrightarrow u_5 = 32 \times 4 \Leftrightarrow u_5 = 128$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

GRUPO II

1.

No contexto da situação descrita $P\left(A \mid B\right)$ é a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar, sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

Os casos possíveis correspondem aos pares da forma $\left(u, v\right)$ cuja soma dos números u e v é igual a 10 e esses pares são os seguintes:

$\left(1, 9\right), \left(2, 8\right), \left(3, 7\right), \left(4, 6\right)$.

Destes casos possíveis, os casos favoráveis são $\left(1, 9\right)$ e $\left(3, 7\right)$, pois são os pares correspondentes aos casos em que os produtos dos dois números é ímpar.

Assim, usando a regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{2}{4}$.

Apresentando o resultado na forma de fração irredutível a resposta é $\frac{1}{2}$.

1.2.

Como o tabuleiro possui 4 filas na horizontal, existem 4 possibilidades diferentes de colocar os números pares ocupando uma única fila horizontal.

Fixada uma fila horizontal há $4!$ formas diferentes de dispor essas 4 fichas pares nessa fila.

Para distribuir as restantes 5 fichas nos 12 espaços livres do tabuleiro existem ${}^{12}A_5$ maneiras diferentes de o fazer.

Assim, o número pedido é dado por:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9123840$$

2.

Escrevendo $-1+i$ na forma trigonométrica temos $-1+i = r\,\text{cis}\,\alpha$, onde:

- $r = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- α é um argumento de $-1+i$ com $\alpha \in 2.^{\text{o}}$ quadrante e $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{-1} = -1$, vem $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

(Note-se que podíamos ter considerado $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$, referindo que a imagem geométrica do complexo $-1+i$ pertence ao segundo quadrante pois está sobre a bissetriz dos quadrantes pares.)

Assim, $-1+i = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Substituindo em z , temos:

$$z = \frac{-1+i}{(\rho\,\text{cis}\,\theta)^2} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\rho^2\,\text{cis}(2\theta)} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right)$$

Escrevendo, agora, w na forma trigonométrica temos $w = -\sqrt{2}\,i = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$, pois w pertence ao semieixo negativo das ordenadas.

Considerando a igualdade $z = w$, temos:

$z = w \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\rho^2}\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4} - 2\theta\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$, ou seja:

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \vee \rho = -1 \Leftrightarrow \rho = 1$, porque o módulo é um número positivo.
- $\dfrac{3\pi}{4} - 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Resolvendo a equação $\dfrac{3\pi}{4} - 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, obtemos:

$$\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{6\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Procuremos $\theta \in \left]0\,,\pi\right[$:

Se $k = 0$, temos $\theta = -\dfrac{3\pi}{8} \notin \left]0\,,\pi\right[$

Se $k = 1$, temos $\theta = \dfrac{5\pi}{8} \in \left]0\,,\pi\right[$

Se $k = 2$, temos $\theta = \dfrac{13\pi}{8} \notin \left]0\,,\pi\right[$

Logo, $\rho = 1$ e $\theta = \dfrac{5\pi}{8}$.

3.

3.1.

Como o vetor de coordenadas $(3,2,4)$ é um vetor normal ao plano α então é um vetor diretor da reta perpendicular ao mesmo. Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que passa no ponto C é $(x,y,z)=(2,1,4)+k(3,2,4), k\in\mathbb{R}$.

3.2.

Um vetor diretor da reta OD é $\overrightarrow{OD} = D - O = (4,2,2)-(0,0,0)=(4,2,2)$.

A reta OD é definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{2} \end{cases}$$

Intersectando com o plano α, vem:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x-4 = \dfrac{4(y-2)}{2} \\ y-2=z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x-4=2y-4 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x=2y \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\times 2y+2y+4y-12=0 \\ x=2y \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y=12 \\ x=2y \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α são $(2,1,1)$.

3.3.

Tem-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox. Logo, as suas coordenadas são do tipo $A(x,0,0)$, com $x>0$.
- o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy. Logo, as suas coordenadas são do tipo $B(0,y,0)$, com $y>0$.
- o ponto P pertence ao eixo Oz, sendo a sua cota não nula. Logo, as suas coordenadas são do tipo $P(0,0,z)$, com $z\neq 0$.

Tem-se que $A\hat{P}B = \overrightarrow{PA}\,\hat{}\,\overrightarrow{PB}$. Como cada um dos pontos A, B e P pertence a um eixo coordenado diferente, os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ nunca são colineares, pelo que o ângulo APB nunca é nulo. Logo, para provar que o ângulo APB é agudo basta provar que $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} > 0$. Assim, como $\overrightarrow{PA}=(x,0,0)-(0,0,z)=(x,0,-z)$ e $\overrightarrow{PB}=(0,y,0)-(0,0,z)=(0,y,-z)$, então

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (x,0,-z)\cdot(0,y,-z)=z^2$ e $z^2>0,\ \forall z\neq 0$.

Portanto, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$. Logo, o ângulo APB é um ângulo agudo.

4.

4.1.

Considerando o domínio da função f se existir assíntota oblíqua ela ocorrerá quando $x \to +\infty$. Sendo assim, procuremos uma reta de equação $y = mx + b$, com m e b pertencentes a $\mathbb{R}$ e $m \neq 0$, em que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = b$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left((x - \ln x) - x\right) = -\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = -\infty$$

Dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = -\infty$ podemos afirmar que o gráfico da função f não tem assíntota oblíqua.

4.2.

Para estudarmos a monotonia da função f e a existência de extremos relativos no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de f.

$$f'(x) = \left(\frac{2 + \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(2 + \operatorname{sen}(x)\right)' \times \cos(x) - \left(\cos(x)\right)' \times \left(2 + \operatorname{sen}(x)\right)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \left(-\operatorname{sen}(x)\right) \times \left(2 + \operatorname{sen}(x)\right)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1 + 2\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$$

Calculemos os zeros da primeira derivada de f:

$$1 + 2\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

No intervalo considerado só $x = -\dfrac{\pi}{6}$ é solução da equação $1 + 2\operatorname{sen}(x) = 0$.

Como $\cos^2(x) > 0, \forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, o sinal da derivada depende apenas do sinal da expressão $1 + 2\operatorname{sen}(x)$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
$f(x)$	n.d.	↘	Min.	↗	n.d.

Dado que:

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 + \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Por observação da tabela, verificamos que a função f :

- tem um mínimo relativo igual a $\sqrt{3}$ para $x = -\frac{\pi}{6}$.
- é monótona decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e monótona crescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{6}, 0\right[$.

4.3.

Seja $y = mx + b$ a equação da reta r .

Considerando que a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$, então $m = f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

A função derivada de f para $x > 0$ é dada por $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Temos então que: $m = = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$.

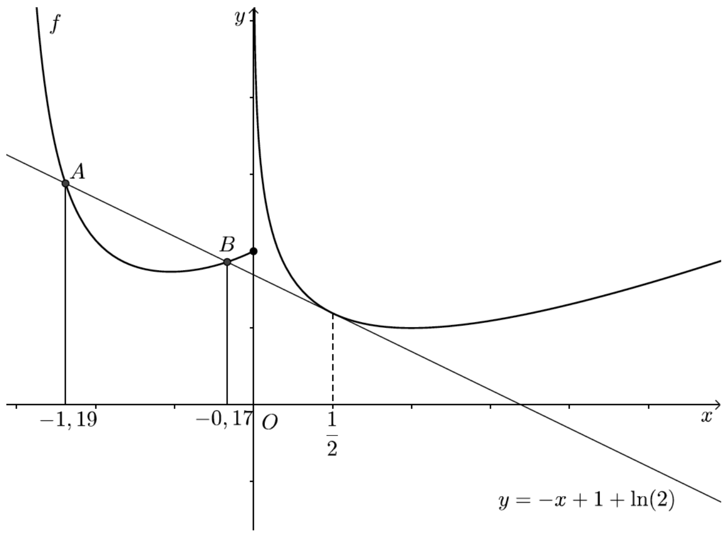
Como a reta é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$, então o ponto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pertence à reta e permite-nos determinar o valor de b .

Dado que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(2^{-1}\right) = \frac{1}{2} + \ln(2)$ e considerando que a reta r é definida por uma equação da forma $y = -x + b$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \ln(2) = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 1 + \ln(2).$$

Assim, a equação da reta r é $y = -x + 1 + \ln(2)$.

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos a representação gráfica da função f e da reta r no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 3\right[$:



De onde se verifica que as abcissas dos pontos A e B são, respetivamente, $-1{,}19$ e $-0{,}17$ com uma aproximação às centésimas.

5.

5.1.

Como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros e $x = 0{,}003$, temos: $p = 24$.

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$24 = \frac{600 \times 0{,}003}{1 - e^{-n \times 0{,}003}} \Leftrightarrow 24 - 24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = \frac{24 - 1{,}8}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = 0{,}925 \Leftrightarrow -0{,}003n = \ln 0{,}925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003}$$

Como $\frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003} \approx 26$, concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.

5.2.

Calculando o valor do limite, em função de n, vem que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \frac{600 \times 0}{1 - e^{-n \times 0}} = \frac{0}{1 - e^{0}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

Fazendo a mudança de variável: $y = -nx \Leftrightarrow x = -\frac{y}{n}$,

Como $x \to 0$ então $y \to 0$

e assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \lim_{y \to 0} \frac{600\left(-\frac{y}{n}\right)}{1 - e^{-n\left(-\frac{y}{n}\right)}} = \lim_{y \to 0} \left(-600 \times \frac{\frac{y}{n}}{1 - e^{y}}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} (-600) \times \left(\lim_{y \to 0} \frac{y \times \frac{1}{n}}{1 - e^{y}}\right) = -600 \times \lim_{y \to 0} \frac{1}{n} \times \left(\lim_{y \to 0} \frac{y}{1 - e^{y}}\right) =$$

$$= -600 \times \frac{1}{n} \times \left(\lim_{y \to 0} \frac{y}{-\left(-1 + e^{y}\right)}\right) = -600 \times \frac{1}{n} \times \left(-\lim_{y \to 0} \frac{y}{e^{y} - 1}\right) =$$

$$= \frac{600}{n} \times \left(\underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y}}_{\textit{limite notável}}\right)^{-1} = \frac{600}{n} \times (1)^{-1} = \frac{600}{n}$$

Ou seja, se $x \to 0$, o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de $\frac{600}{n}$, o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em n parcelas iguais, durante n meses.

6.

Como $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - x - 1 = 0$, então provar que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]\, a\,,\ g(a)\, [$ é equivalente a provar que a equação $f(x) = 0$ é possível no intervalo $]\, a\,,\ g(a)\, [$, com $f(x) = g(x) - x - 1$

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser a soma de duas funções contínuas, a função g e a função afim definida por $y = -x - 1$. Em particular a função f é contínua no intervalo $[\, a\,,\ g(a)\,]$.

Cálculos auxiliares:

$f(a) = g(a) - a - 1 = g(a) - (a + 1)$

Como $g(a) > a + 1$, então $g(a) - (a + 1) > 0$, ou seja, $f(a) > 0$.

$f(g(a)) = g(g(a)) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 = -g(a) + a - 1$

Como $g(a) > a + 1$, vem

$-g(a) < -a - 1 \Leftrightarrow -g(a) + a - 1 < -a - 1 + a - 1 \Leftrightarrow f(g(a)) < -2 \Rightarrow f(g(a)) < 0$

Assim, $f(a)$ e $f(g(a))$ têm sinais contrários.

Logo, como $f(a) \times f(g(a)) < 0$ e a função f é contínua em $[\, a \, , \, g(a) \,]$, pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que a função f tem pelo menos um zero em $]\, a \, , \, g(a) \,[$, pelo que a equação $g(x) = x + 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]\, a \, , \, g(a) \,[$.

FIM