APM Associação de Professores de Matemática

Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2015

GRUPO I

1.1. De acordo com o modelo apresentado temos que calcular a diferença entre $G(2)$ e $G(11)$.

Utilizando as potencialidades da calculadora, introduzindo $y_1 = 0,9\left(x+0,5\right)^3 \times e^{-0,6x}$ determinamos o valor da função para $x=2$ e para $x=11$, obtendo:

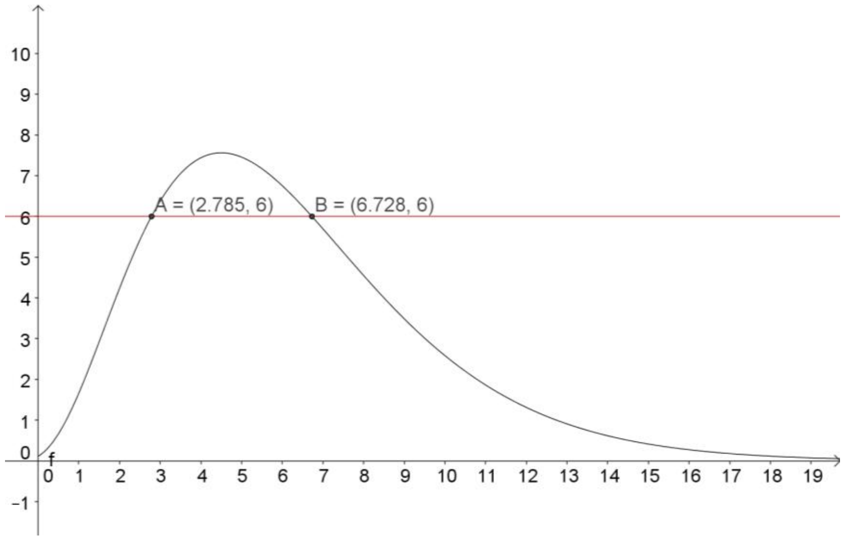
$G(2) \approx 4,23554$ e $G(11) \approx 1,86205$

Pelo que: $G(2)-G(11) = 4,23554 - 1,86205 = 2,37349 \approx 2,37$

Assim, o número de gafanhotos existente na semana dois após a localização da praga, $G(2)$, excede em $2,37$ milhões o existente na semana onze, $G(11)$.

1.2. Utilizando as potencialidades da calculadora, traçamos o gráfico da função definida por $G(x)$ e a reta definida pela equação $y=6$, de forma a determinarmos as soluções da inequação $G(x)>6$

Fazendo, por exemplo, $y_1 = 0,9\left(x+0,5\right)^3 \times e^{-0,6x}$ e $y_2 = 6$, obtemos uma representação como a que se segue:



Os pontos A e B são os pontos de interseção do gráfico de G com a reta.

Fazendo a diferença entre as suas abcissas, obtemos:

$6,728-2,785\approx 3,94$ semanas.

Convertendo em dias:

$3,94\times 7=27,58$

Apenas durante 27 dias completos o número de gafanhotos foi superior a 6 milhões.

2.1. A função definida por $A(x)$ retrata um modelo de crescimento logístico. De acordo com a sua expressão podemos concluir que o gráfico de A admite uma assintota horizontal de equação $y=12$, o que, no contexto do problema, significa que a área afetada vai aumentando, mas não chega a atingir as 12 centenas de Km^2.

Desta forma, a área total afetada nunca atingirá, por maioria de razão as 14 centenas de Km^2, isto é, será sempre inferior a 1400 Km^2.

2.2. No contexto descrito $T(6)\approx 1,3$ significa que na 6ª semana após a localização do enxame, a área agrícola afetada se encontra a crescer à razão, aproximada, de 130 Km^2 por semana, uma vez que T é a taxa de variação instantânea de A e que $1,3\times 100=130$.

GRUPO II

1. De acordo com os dados fornecidos , temos que a altura do cone de revolução que dá origem à maquete é $11,2+h$ cm.

Atendendo à semelhança dos triângulos envolvidos e, portanto, à proporcionalidade entre os seus lados, temos que:

$$\frac{15}{11,2+h}=\frac{6,6}{h} \Leftrightarrow 15h=6,6\times\left(11,2+h\right)$$

$$\Leftrightarrow 15h=73,92+6,6h$$

$$\Leftrightarrow 15h-6,6h=73,92$$

$$\Leftrightarrow 8,4h=73,92 \Leftrightarrow h=\frac{73,92}{8,4}=8,8\text{ cm}$$

2. Seja g a geratriz do cone de revolução que é cortado, isto é, do cone de altura 8,8 cm e raio da base 6,6 cm. Então, pelo teorema de Pitágoras temos que:

$g^2 = 6,6^2 + 8,8^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{6,6^2 + 8,8^2} \Leftrightarrow g = 11$

Assim a área lateral do cone cortado é $A_c = \pi \times 6,6 \times 11 \approx 228,08$ cm^2

Como a área lateral do cone antes de efetuar o corte é 1178 cm^2, temos que a área lateral do tronco de cone (correspondente ao reservatório) na maquete é: $A_{reservatório} = 1178 - 228,08 = 949,92 \approx 950$ cm^2

Como o reservatório é uma ampliação da maquete de razão 100 nas medidas lineares, a área lateral do reservatório é aproximadamente, na realidade,

$100^2 \times 950 = 9500000$ cm^2 $= 950$ m^2,

3.1. Os raios estão em progressão aritmética de razão $0,3$ e primeiro termo $6,9$.

O raio da segunda circunferência é então $6,9 + 0,3 = 7,2$ m.

O perímetro da circunferência menor é $p_1 = 2\pi \times 6,9 = 13,8\pi$

O perímetro da circunferência seguinte será $p_2 = 2\pi \times 7,2 = 14,4\pi$

Como os perímetros estão em progressão aritmética, a razão é a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos.

Então a razão é $r = p_2 - p_1 = 14,4\pi - 13,8\pi = 0,6\pi$ metros.

3.2. $p_1 = 13,8\pi$ como vimos atrás e $p_{27} = 13,8\pi + 0,6\pi \times 26 = 13,8\pi + 15,6\pi = 29,4\pi$

A soma dos 27 perímetros pintados é, então:

$$S = \frac{13,8\pi + 29,4\pi}{2} \times 27 = 21,6\pi \times 27 \approx 1832 \text{ metros.}$$

4. Se V tem cota 20, as suas coordenadas são $(0,0,20)$, pelo que o ponto simétrico de V em relação ao plano xOy tem coordenadas $(0,0,-20)$.

GRUPO III

1. Como os segmentos $[A,B]$ e $[A,C]$ representam uma das correntes do baloiço, temos que $\overline{AB}=\overline{AC}$, pelo que $\overline{AD}=\overline{AB}-8$

Por outro lado: $\cos(55^{\text{o}})=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos(55^{\text{o}})=\frac{\overline{AB}-8}{\overline{AB}}$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}\times\cos(55^{\text{o}})=\overline{AB}-8$$

$$\Leftrightarrow 0,574\,\overline{AB}=\overline{AB}-8$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}-0,574\,\overline{AB}=8$$

$$\Leftrightarrow 0,426\,\overline{AB}=8 \Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{8}{0,426}\approx 18,8$$

O comprimento da corrente é, aproximadamente, 18,8 dm.

2. Um dos maximizantes da função H é $5,6$, pelo que $H(5,6)=13$, o que nos permite encontrar o valor de a.

$$H(5,6)=13 \Leftrightarrow 9-a\sin(0,625\pi\times 5,6)=13$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{13-9}{-\sin(0,625\pi\times 5,6)} \Leftrightarrow a=\frac{4}{-(-1)} \Leftrightarrow a=4$$

Como dois maximizantes consecutivos são $5,6$ e $8,8$, e como $8,8-3.6=3,2$, então a função H assume os mesmos valores de $3,2$ em $3,2$ segundos, isto é, é periódica de período $3,2$. Como $18-3,2=14,8$, então $H(t+3,2)=H(t)$ para qualquer $t\in[0;14,8]$.

O valor (-12) na expressão analítica da função S, faz com que o seu gráfico seja um deslocamento, na horizontal, do gráfico de H, 12 unidades para a direita. Significa, assim, que o Samuel começou a andar no baloiço 12 segundos depois da Helena, atingindo as mesmas distâncias (mínima e máxima) ao solo que ela.

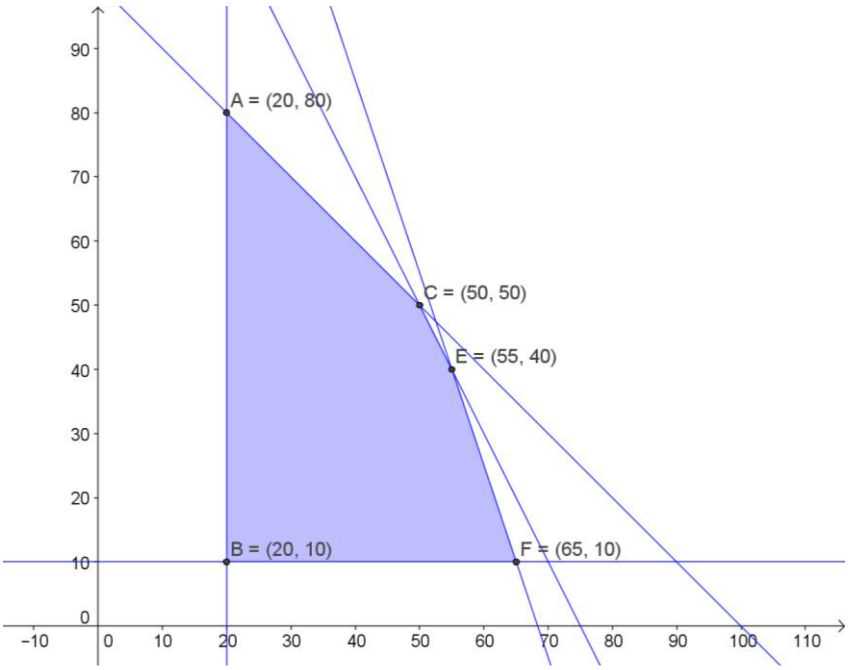
GRUPO IV

1. A função objetivo é o lucro e é dada por $L(x,y)=1500x+3000y$

Atendendo à informação dada, o problema apresenta as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x+y\leq 100 \\ x\geq 20 \\ y\geq 10 \\ 2000x+1000y\leq 150000 \\ 3000x+1000y\leq 205000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq -x+100 \\ x\geq 20 \\ y\geq 10 \\ y\leq -2x+150 \\ y\leq -3x+205 \end{cases}$$

O que conduz a seguinte representação gráfica da região admissível:



Testemos as possíveis soluções ótimas:

x	y	$L(x,y)=1500x+3000y$
20	**80**	**270000**
20	10	60000
50	50	225000
55	40	202500
65	10	127500

A solução ótima é a correspondente ao ponto A, pelo que a empresa deve cultivar 20 hectares de trigo e 80 hectares de vinha para obter o lucro máximo no próximo ano agrícola.

2.1. Procuramos os pares de dias consecutivos em que choveu, uma vez que no dia em que a Edite escreveu a frase choveu e pretendemos obter a probabilidade de no dia seguinte ter também chovido.

Esses pares de dias são: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(10,11)$ e $(13,14)$.

O número de casos favoráveis corresponde a este número de pares, isto é, a 6 .

O número de casos possíveis corresponde ao número de pares de dias em que no primeiro dia choveu, isto é, 10, uma vez que temos os seguintes pares:

$(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(7,8)$, $(10,11)$, $(11,12)$, $(13,14)$ e $(14,15)$.

A probabilidade pedida é então: $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

2.2. Designemos por a_0 o valor da precipitação em 2010, por a_1 o valor em 2011, por a_2 o valor em 2012 e por a_3 o valor da precipitação em 2013.

Se ordenarmos os valores, de acordo com a informação dada, obtemos que $a_2 < ... < ... < a_3$

Os valores centrais são a_0 e a_1.

Atendendo ao valor da mediana, temos que:

$$\frac{a_0+a_1}{2}=1314,350 \Leftrightarrow a_0+a_1=2628,700$$

Por outro lado, e atendendo ao valor da média, temos:

$$\frac{a_0+a_1+a_2+a_3}{4}=1270,125 \Leftrightarrow 2628,700+a_2+a_3=4\times 1270,125$$

$$\Leftrightarrow a_2+a_3=4\times 1270,125-2628,700 \Leftrightarrow a_2+a_3=2451,8$$

Ora, assim, a média da precipitação total anual dos anos de 2012 e 2013 é dada por:

$$\frac{a_2+a_3}{2} = \frac{2451,8}{2}=1225,9 \text{ mm.}$$

FIM