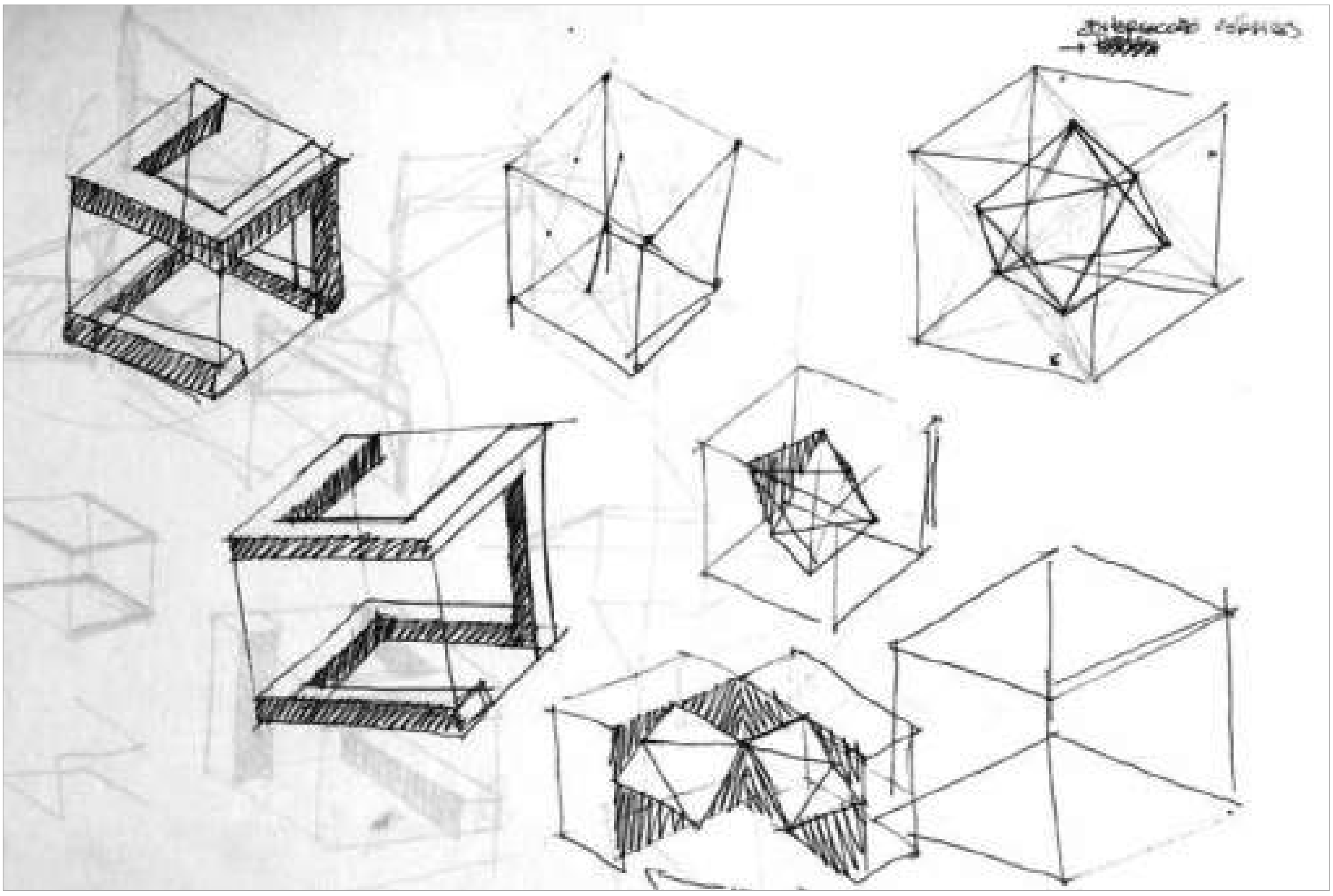
APM
Associação de Professores
de Matemática

Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática

APONTAMENTOS DE GEOMETRIA



2023

APONTAMENTOS DE GEOMETRIA
Autores: Cristina Loureiro
Equipa Editorial da Educação e Matemática

Editor gráfico: Mário Baía
Imagem da capa:
Desenho de um cubo, in “Desenho – Perceção e Investigação Formal”, de António Olaio, 2006

Educação e Matemática
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
1.ª Edição
JUNHO de 2023

ÍNDICE

APROXIMAÇÕES À UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NOS 1.º E 2.º CICLOS

GEOMETRIA NA LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

INDICE REMISSIVO

NOTA INTRODUTÓRIA

Artigos curtos. Ideias matemáticas importantes na geometria. Ideias importantes para o ensino e aprendizagem da geometria. Discussão. Episódios de sala de aula. Escrita em parceria. Estas são características-chave de uma secção que celebra 10 anos de vida na Educação e Matemática.

Assim começava o artigo *Permanências, Caderno de Apontamentos de Geometria. Um caderno com muitas páginas por escrever*, publicado na Educação e Matemática n.º 165, do terceiro trimestre de 2022, que procurava celebrar esta secção da revista.

Para assinalar estas *Permanências*, a equipa editorial da EM convidou Cristina Loureiro, coordenadora da secção, a fazer uma retrospetiva sobre uma década do Caderno, bem como os coautores de artigos do *Caderno* e leitores, a um olhar envolvido sobre esta secção da revista.

O voltar a folhear o *Caderno de Apontamentos* ofereceu a Cristina Loureiro o desafio de uma nova organização. Surgiram categorias que separam os apontamentos por contextos de escrita. Uma organização que destaca ideias de geometria poderosas, que a equipa editorial propôs publicar. Cristina Loureiro aceitou. A Direção da APM apoiou. Mário Baía, o editor gráfico, concretizou. O *Caderno* ganha agora a forma de uma publicação, com o nome *Apontamentos de Geometria*, disponível no *site* da APM. Uma nova encadernação que permite ter à mão todos os *Apontamentos*. Contamos que seja útil aos professores.

Equipa editorial da EM

APRESENTAÇÃO

Os 52 artigos publicados na seção *Caderno de Apontamentos de Geometria*, entre o n.º 108 de 2010 e n.º 166 de 2022, constituem agora esta publicação. A iniciativa desta edição cabe à Equipa editorial da Educação e Matemática e vem permitir a possibilidade de revisitar estes textos, organizados agora pela responsável da secção em cinco temáticas:

Geometria nos Primeiros Anos

Arte e Matemática (MARTE 1618)

Aproximações à utilização do GeoGebra nos 1.º e 2.º ciclos

Geometria na Licenciatura em Educação Básica

Resolução de Problemas

Esta organização, que decorre de um olhar mais estruturado sobre os textos, foi regulada pelos projetos de trabalho a que a secção foi sendo ligada e proporciona agora aos leitores uma leitura focada dos artigos publicados. A esta organização foi associado um ***Índice remissivo*** que permite uma outra entrada nos textos a partir de um conjunto de treze ideias-chave, apresentadas por ordem alfabética:

Avaliação

Classificação

Disseções geométricas

Estruturação espacial

Estruturação geométrica

Estruturação lógico formal

Geometria dinâmica

Interdisciplinaridade Artes Visuais e Matemática

Ligações 3D-2D

Pensamento computacional

Raciocínio geométrico

Transformações geométricas

Visualização

É importante destacar que estas ideias-chave, de natureza muito diversa, correspondem a problemáticas relevantes, abordadas ao longo dos textos, mas que não têm nenhum caráter exaustivo sobre o complexo panorama da aprendizagem da geometria. Estas ideia-chave correspondem as perspetivas significativas inerentes aos projetos que têm alimentado os textos publicados.

Ora, sendo este **Apontamentos de Geometria** constituído por textos curtos sobre ideias matemáticas importantes na geometria ou no ensino e aprendizagem da geometria, sem qualquer propósito de contemplar todos os temas ou capacidades de raciocínio geométrico, esta reedição dos textos veio agora proporcionar introduzir duas estruturas organizativas úteis: os cinco temas e as treze ideias chave do índice remissivo. Porém, veio também evidenciar o interesse por aprofundar as ideias chave selecionadas e por melhorar a natureza aparentemente caótica da secção. Desejamos por isso que continue a ser encarado como um Caderno de apontamentos sempre em construção.

A publicação de textos vai continuar com o reforço que tem tido recentemente a escrita de textos em parceria com os professores que vivenciam as experiências de sala de aula que fazem frutificar as ideias geométricas exploradas nos apontamentos. E isto por que a geometria é mesmo uma área privilegiada da matemática, com muito já escrito e tanto ainda por escrever. Contamos por isso que a utilidade reconhecida nestes textos seja ainda mais significativa para os leitores da Educação e Matemática.

Em jeito de fecho, um especial agradecimento à Equipa editorial da Educação e Matemática e ao seu Editor gráfico pelo enorme carinho que manifestam sempre por esta secção e como reconhecimento por todos os contributos ao processo de desenvolvimento dos textos e da própria secção.

Julho 2023
Cristina Loureiro

GEOMETRIA NOS PRIMEIROS ANOS

ÍNDICE

Impossibilidades, uma poderosa possibilidade matemática (I)

Cristina Loureiro

No seu livro «Cartas a uma jovem matemática», Ian Stewart faz o elogio da impossibilidade em Matemática. Afirma que «a matemática goza de um privilégio que nenhuma outra forma de vida tem. Na matemática, podemos demonstrar que algo é impossível.» Acrescenta ainda que «uma demonstração matemática de impossibilidade é uma garantia virtualmente inquebrável» (p. 93). Sabemos como esta fascinante possibilidade faz parte da matemática, mas muitas vezes esquecemo-nos de que, por isso mesmo, ela deve estar presente na construção do raciocínio matemático na escola. Nos últimos anos confrontei-me com algumas impossibilidades matemáticas no ensino básico que me interessaram duplamente. Por um lado foi a necessidade de demonstrar a impossibilidade. Por outro o fascínio que elas produzem nos alunos.

Construir um quadrilátero com 3 ângulos rectos

A tarefa proposta aos alunos foi: *Num geoplano de 5 por 5, construir quadriláteros com pelo menos um ângulo recto. Pintar a vermelho os ângulos rectos, a verde os agudos e a amarelo os obtusos.*

Ao organizar os exemplares descobertos em classes segundo o número de ângulos rectos, rapidamente reconhecemos que falta um quadrilátero com 3 ângulos rectos. Ninguém consegue construir um quadrilátero assim. Será mesmo impossível?

A demonstração de que este quadrilátero não pode existir, na geometria euclidiana, tem por base a ideia de que ao tentar obter o terceiro ângulo recto necessariamente o quarto ângulo também tem que ser recto (fig 1). Uma verificação manual pode ser feita com recurso a um geoplano como ilustra a figura 2.

Construir um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos

O que é também interessante quando nos familiarizamos com a existência da impossibilidade é que ficamos mais sensíveis a esta hipótese e somos tentados a recorrer a ela frequentemente. Por exemplo, tenho notado que muitos professores pensam que é impossível construir um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos. Não só não é impossível, fig. 3, como estes quadriláteros têm um papel muito importante na geometria.

Nos exemplos apresentados na fig. 3, há dois exemplares congruentes e um que está incorrecto. Não é difícil confirmar, mas para isso é necessário ter alguma destreza em identificar ângulos rectos quando os seus lados não coincidem com a malha quadriculada do geoplano.

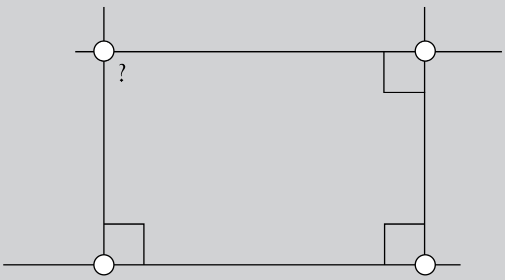


Figura 1

Figura 2

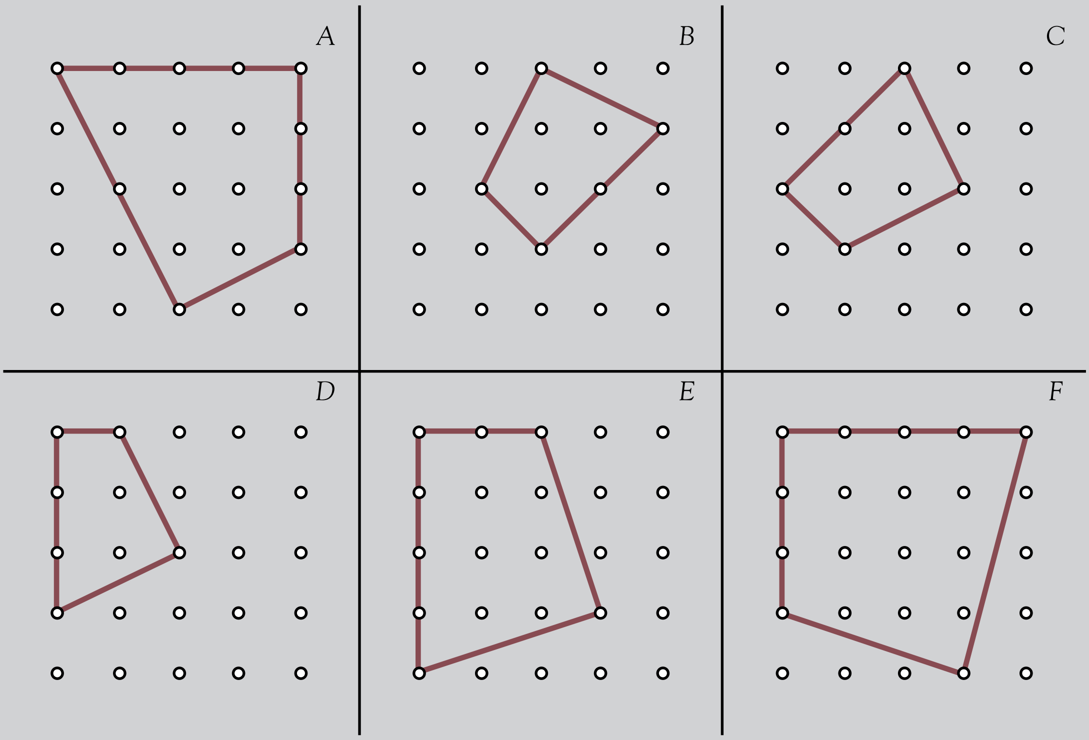


Figura 3

Procurar um exemplo de existência é um tipo de acção fundamental no raciocínio geométrico. Assim como é próprio da geometria, no caso de não se obter nenhum exemplo, procurar uma explicação para essa inexistência. O raciocínio geométrico consolida-se a partir das relações que se vão estabelecendo na procura de objectos geométricos com determinadas condições. A geometria elementar pode ser fértil neste tipo de situações desde que se tenha o cuidado de criar condições para isso.

Nota

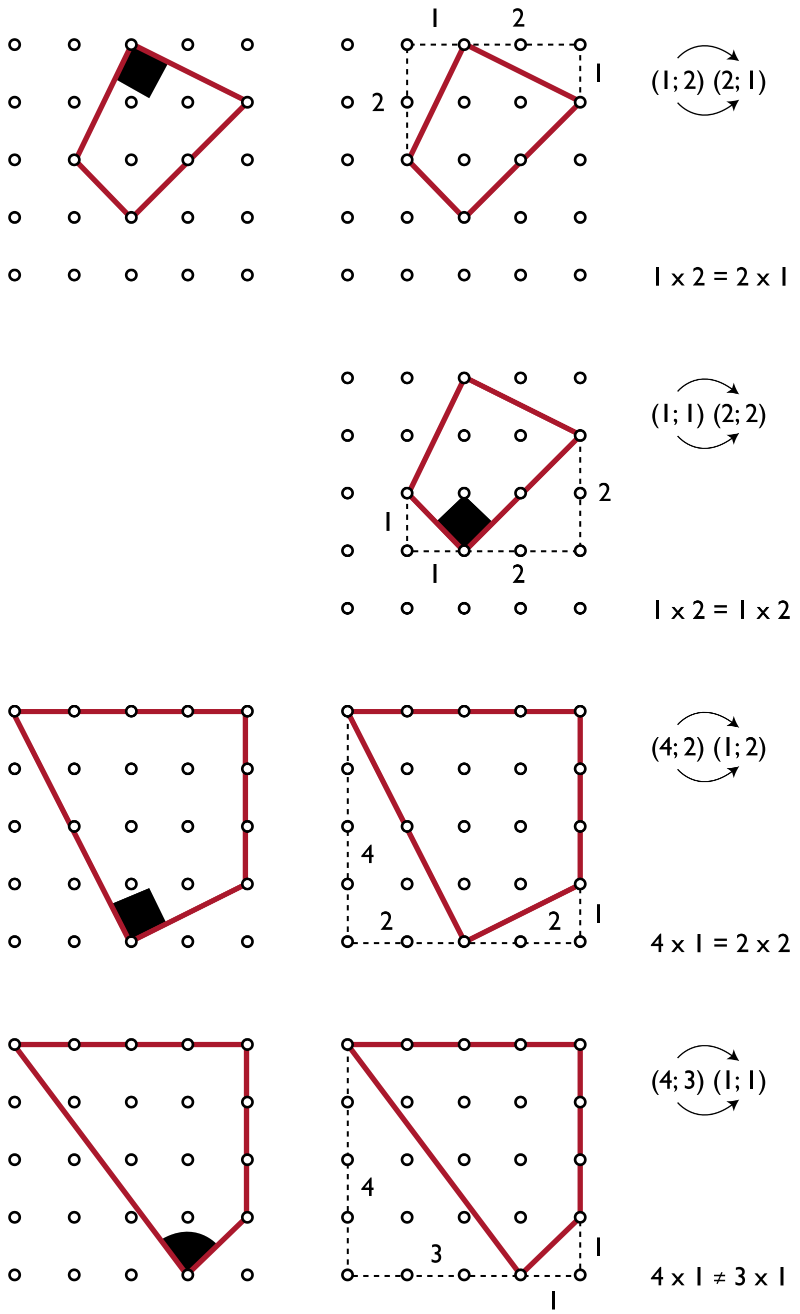
Este artigo é o primeiro de uma série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes. Cada artigo será a discussão de uma ideia com base numa experiência ou num episódio de sala de aula.

Referências Bibliográficas

Stewart, Ian. (2006). *Cartas a uma jovem matemática*. Lisboa: Relógio d' Água.

Possibilidades, muito mais do que descobrir um exemplo[1]

Cristina Loureiro



No texto anterior foi aflorada a ideia de construir um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos. Este tipo de desafio inscreve-se no raciocínio matemático de descoberta de um exemplo. Uma actividade desta natureza não termina com a satisfação pela descoberta de um exemplar. É necessário que seja natural a atitude de ir à procura de mais exemplos e de querer compreender por que razão matemática são eles possíveis. É assim que se poderão obter mais, todos se o número de possibilidades for finito, tantos quantos se queiram, no caso de existirem em número infinito. Deste modo, descobrir um exemplo será sempre ampliar o conhecimento matemático.

Os quadriláteros apresentados no texto referido são exemplos de quadriláteros apenas com 2 ângulos rectos opostos. Foi deixado ao leitor a tarefa de garantir se os ângulos em causa eram ou não rectos. Haverá uma técnica rápida para ter a certeza se um ângulo, na estrutura quadriculada do geoplano, é ou não recto?

Se os produtos cruzados dos pares das diferenças entre pontos (ver as figuras), tomadas pela mesma ordem, são iguais, o ângulo é recto. Se os produtos são diferentes, o ângulo não é recto. Esta técnica só deve ser aplicada a ângulos que à vista desarmada parecem rectos ou quase rectos.

Com esta técnica é muito fácil descobrir mais exemplos de quadriláteros só com 2 ângulos rectos opostos em qualquer rede ponteada quadriculada, isto é, numa rede que tem subjacente uma estrutura ortogonal isométrica. Fica por provar que esta técnica é válida e porque é que ela funciona.

Descobrir um exemplo é um dos tópicos do raciocínio matemático no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

Nota

[1] Este artigo é o segundo de uma série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes. Cada artigo será a discussão de uma ideia com base numa experiência ou num episódio de sala de aula.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Descobrir um exemplo gera oportunidades diversas de raciocínio[1]

Cristina Loureiro

«Em menos de dois minutos, é capaz de desenhar um quadrilátero que tenha dois ângulos rectos e nenhum par de lados paralelos?» (Discroll, *et al.*). Os autores do artigo em referência apresentam três resoluções diferentes. Numa delas, a pessoa que resolveu a questão afirma que começou por pensar que os dois ângulos não poderiam ser adjacentes pois isso originava dois lados paralelos, concluindo assim que os ângulos rectos deveriam ser opostos e que os outros dois ângulos deveriam somar 180°. Uma segunda pessoa pensou num triângulo rectângulo que reflectiu segundo a hipotenusa, obtendo um exemplar do quadrilátero pedido (figura 1). A terceira pessoa, pensou num círculo dividido por um diâmetro, considerou um ponto *A* num dos semi-círculos e um ponto *B* no outro, ligou cada um destes pontos com os extremos do diâmetro e obteve uma solução, compreendendo assim que obteria um número infinito de soluções movendo os pontos *A* e *B* sobre os semi-círculos, sendo que todos estes quadriláteros tinham uma diagonal rígida comum (figura 2).

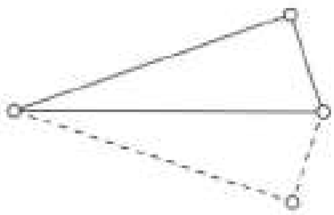


Figura 1

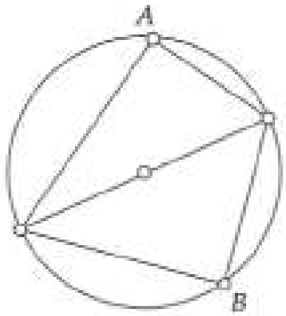


Figura 2

Este desafio aqui discutido é uma outra versão da proposta, explorada na nota anterior (Revista 109), e que era a de construir sobre a estrutura ponteada do geoplano um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos. São duas discussões com orientações diferentes. Esta centra-se na discussão da diversidade de «ataque de um problema» e das diferentes resoluções geradas. A outra orientou-se para o estudo das conexões presentes no raciocínio geométrico, visto que recorreu a correspondências numéricas proporcionadas pela estrutura ortonormada do geoplano.

Para continuar esta discussão, deixo dois novos desafios de descoberta de exemplos, agora sobre uma estrutura circular representada por um geoplano circular (figura 3): (1) construção de quadriláteros com 2 ângulos rectos e sem nenhum par de lados paralelos; (2) construção de quadriláteros com um par de lados paralelos.

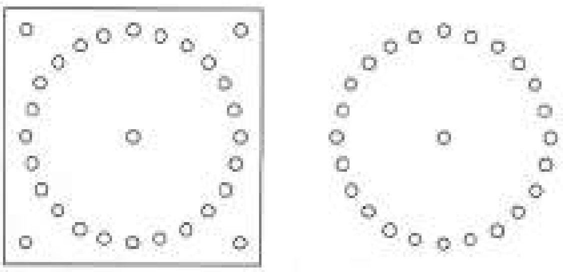


Figura 3

Como reflexão final deixo a ideia de que fazer variar a estrutura sobre a qual se formula um problema ajuda-nos a entender o potencial da estrutura física de suporte ao raciocínio geométrico. É por isso que nunca é demais frisar que os materiais manipuláveis no ensino da Matemática são um meio e não um fim. A sua escolha deve ser bastante criteriosa pois dela dependem os raciocínios que serão desenvolvidos. Voltando ao início da discussão deste artigo, as três pessoas que apresentaram três raciocínios totalmente diferentes conceberam o quadrilátero pedido com base em conhecimentos geométricos distintos e optaram por suportes visuais totalmente diferentes para encontrar um exemplo do quadrilátero pedido, no entanto, todas raciocinaram visualmente.

Nota

[1] Este artigo continua a série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes iniciada na revista n.º 108.

Referências Bibliográficas

Driscoll, M., Egan, M., DiMatteo, R. W. e Nikula, J. (2009). Fostering Geometric Thinking in the Middle Grades. In Timothy V. Craine e Rubenstien Rheta (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. 71th NCTM Yearbook: 155–171. Reston: NCTM.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Ângulos rectos e paralelismo

Cristina Loureiro

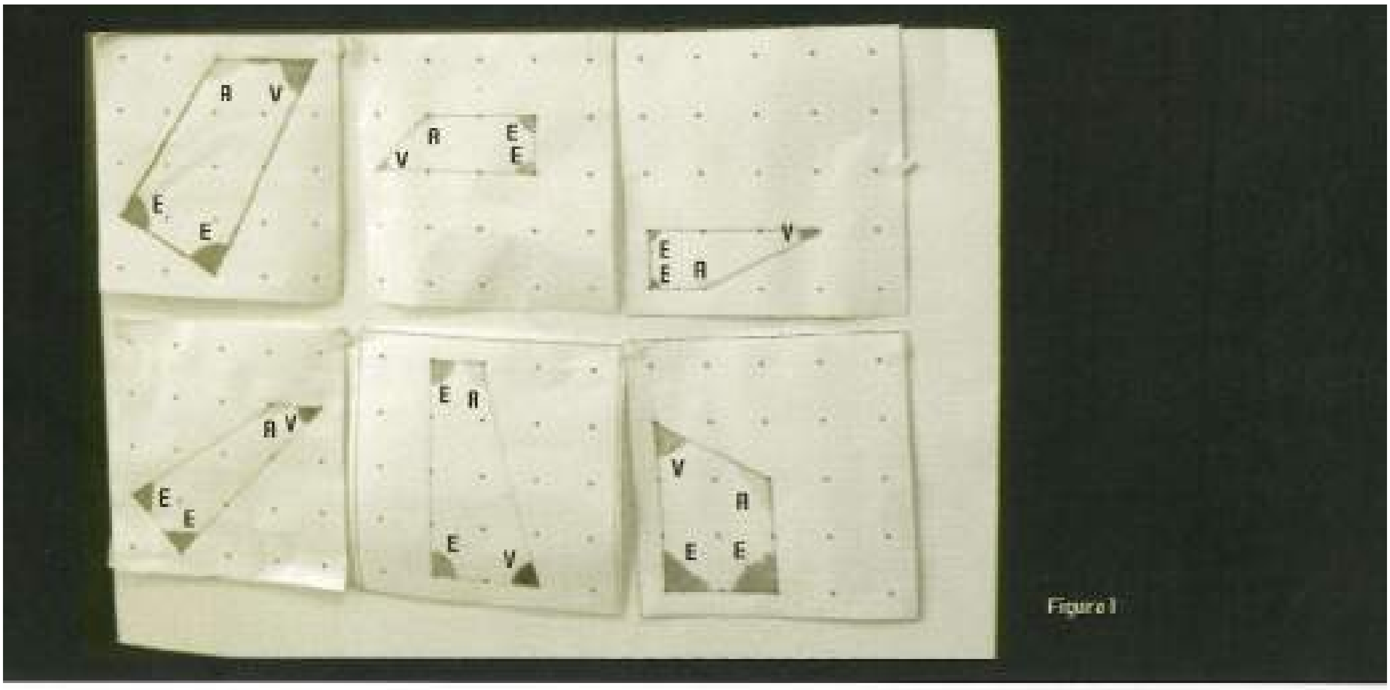


Figura 1

Como é que podemos confirmar rapidamente se duas rectas são ou não paralelas?

Geralmente não damos importância nenhuma a esta questão. Talvez porque a achemos óbvia e consideremos que isso «se vê a olho nu». Será?

Na fotografia (figura 1) estão seis dos quadriláteros desenhados numa actividade realizada numa sala de aula do 4.º ano. Cada aluno, individualmente, construía vários quadriláteros em que tinha de identificar os ângulos: rectos (E), agudos (V), obtusos (A). Os exemplos construídos foram expostos e, em discussão colectiva, organizados em categorias de acordo com critérios propostos pelos alunos. Um dos critérios foi atender ao número de ângulos rectos dos quadriláteros. Na fotografia estão representados elementos da classe dos quadriláteros que têm 2 ângulos rectos, mas no lado esquerdo vemos dois quadriláteros que nos chamam a atenção. Estão marcados 2 ângulos rectos mas as rectas não parecem bem paralelas. E de facto não são porque houve um erro na marcação.

Nas duas figuras, 2 e 3, não há nenhum par de rectas paralelas. Por isso, não pode haver dois ângulos rectos consecutivos, como foram assinalados pelos alunos. Sabemos que se a perpendicular a uma de 2 rectas, traçada por um ponto qualquer dessa recta, também for perpendicular à outra, então as duas rectas são paralelas (figura 4). Esta é uma relação própria da geometria euclidiana.

Talvez alguns de nós ainda se lembrem que este é o fundamento matemático da construção de rectas paralelas com o recurso a régua e esquadro (figura 5). Tenho vindo a concluir que esta relação entre paralelismo e perpendicularidade é muitas vezes desconhecida, bem como a construção de paralelas com régua e esquadro. Neste caso foi um erro dos alunos que nos levou a pensar numa relação bastante esquecida e muito pouco utilizada para verificar o paralelismo de forma directa e simples recorrendo a ângulos e, por isso, à perpendicularidade.

E no geoplano, como posso verificar, sem recorrer a ângulos rectos, se dois segmentos são ou não paralelos?

Nota

[1] Este artigo continua a série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes, iniciada na revista n.º 108.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

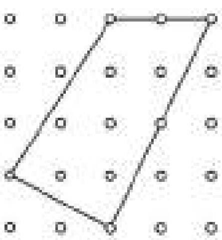


Figura 2

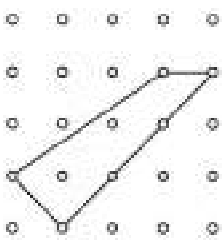


Figura 3

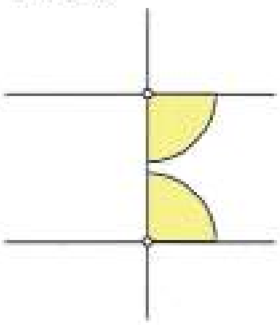


Figura 4

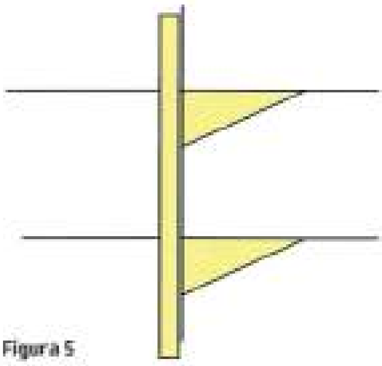
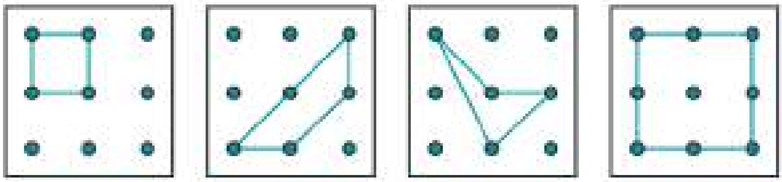


Figura 5

Quadriláteros, para que vos quero?

Cristina Loureiro



Os quadriláteros são os meus polígonos preferidos. Sobre eles é possível criar uma multiplicidade de situações problemáticas simples que desenvolvem o raciocínio geométrico. Como tenho vindo a discutir nesta secção, procurar um exemplo, mostrar uma impossibilidade, justificar uma relação, podem constituir bons exemplos de raciocínios geométricos ricos e acessíveis em níveis elementares. Todas as situações já discutidas tinham por base quadriláteros.

Um outro aspecto importante é o estabelecimento de limitações. Neste caso, o geoplano é um instrumento útil para limitar o plano. Ao fazer limitações, criamos uma mundo mais simples onde se pode colocar um outro tipo de desafio, descobrir todos os exemplos.

Descobrir todos os quadriláteros diferentes que é possível construir num geoplano 3 por 3

Neste problema, é importante descobrir todos os casos e é igualmente importante ter a certeza de que não ficou nenhum por descobrir. É muito interessante observar as estratégias pessoais de obtenção dos vários exemplos. Como é que cada um vai organizando os vários exemplos para ter a certeza de que descobriu todos? Atenção às repetições, porque vão aparecer alguns quadriláteros congruentes, em posições diferentes, que não vai ser fácil identificar.

A limitação do geoplano a 3 por 3 é uma boa restrição. O problema fica suficientemente desafiante e a garantia de que todos foram descobertos é acessível. Se passarmos a um geoplano de 4 por 4, o número de hipóteses dispara e torna-se impraticável a demonstração de que foram descobertas todas as possibilidades.

Ao propor este tipo de tarefa numa aula é preciso dar aos alunos uma folha de registo. Quantos geoplanos apresentar na folha de trabalho? É sempre uma boa estratégia didáctica não dar o número exacto de figuras que vão ser necessárias, deixando uma folga para os repetidos que acabam sempre por ter que aparecer. Neste caso, 20 ou 24 geoplanos são bons números para colocar nessa folha, 5 ou 6 filas de 4 ficam mesmo de bom tamanho.

Este problema tem mais um aspecto interessante. Depois de todos os quadriláteros descobertos vale a pena observá-los e começar a fazer perguntas sobre as características dos quadriláteros obtidos.

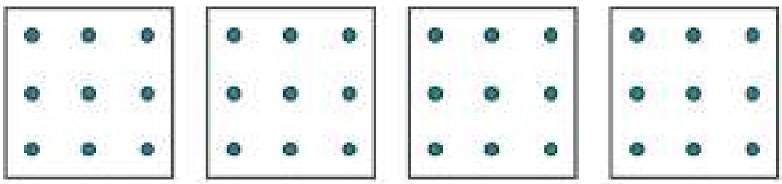
Johnston-Wilder e Mason (p. 8) apresentam este problema para um geoplano de 9 pontos, e incluem a procura de triângulos e a identificação dos ângulos que é possível obter com estas limitações. Sobre esta tarefa, os autores destacam-lhe o carácter de construção de objectos com determinadas condições e que a distingue da simples análise de alguma coisa previamente dada. Estes autores também evidenciam o potencial de uma tarefa como esta para a criação de uma notação própria, ou seja, uma experiência de invenção matemática. Este aspecto é interessante para os vários ângulos diferentes que se podem obter neste geoplano.

Apesar de ter encontrado esta tarefa no livro em referência, há muito tempo que conhecia este desafio. Ele foi-me apresentado pelo meu colega e amigo José Tomás Gomes. Não sei onde ele o descobriu ou até se foi ele que o inventou, mas deixo aqui esta referência como homenagem ao seu espírito matemático e ao seu gosto por resolver e discutir problemas.

Referências Bibliográficas

Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Cristina Loureiro



Classificar (I)

Cristina Loureiro

Quando se pensa em tarefas de geometria é importante ter em conta que faz parte da geometria o trabalho com tipos de problema diferentes que exigem raciocínios também diferentes. Uma ideia interessante é procurar identificar e caracterizar os tipos de raciocínio que são próprios da geometria. Ao fazê-lo estamos a conhecer o que é o raciocínio geométrico, ou seja, como se pensa em geometria. Nestas notas tem sido ilustrado o que pode ser uma impossibilidade, descobrir um exemplo, descobrir todos os exemplo. Na última nota (*Educação e Matemática* n.º 114) foi apresentada uma situação em que eram pedidos todos os exemplos. Descobrir todos e ter a certeza de que não há mais nenhum é diferente de contar quantos são, embora também permita contar quantos são. Quando se descobriram todos pode ser interessante contá-los, mas isso não é geometria. Já olhar para eles, ver as suas características e organizá-los é próprio da geometria.

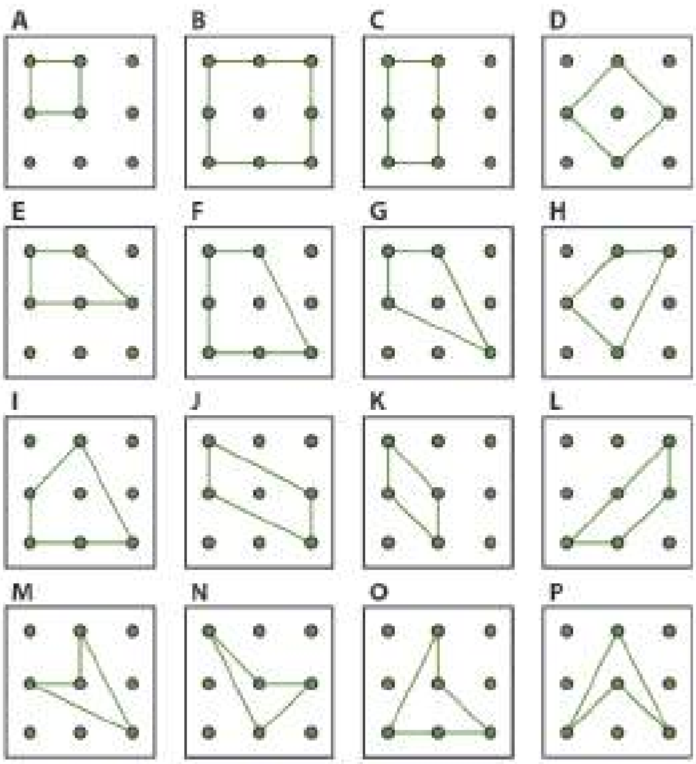


Figura 1

Os 16 quadriláteros diferentes que se podem construir num geoplano de 3 por 3 (figura 1) são muito favoráveis para pensar em diferentes organizações por classes, isto é, em diferentes critérios de classificação.

Exemplos de classificações com critérios diferentes

- Número de ângulos rectos, 4 classes — 4 ângulos rectos; 2 ângulos rectos; 1 ângulo recto; zero ângulos rectos.
- Número de pares de lados paralelos, 3 classes — 2 pares de lados paralelos; 1 par de lados paralelos; sem lados paralelos ou zero pares de lados paralelos.
- Número de pares de lados iguais, 3 classes — 2 pares de lados iguais; 1 par de lados iguais; sem lados iguais ou zero pares de lados paralelos.
- Convexidade, 2 classes — Convexos; Não convexos ou Côncavos.
- Número de eixos de simetria, 4 classes — 4 eixos de simetria; 2 eixos de simetria; 1 eixo de simetria; zero eixos de simetria.

Quando se trabalha com classes, um bom apelo ao raciocínio é pedir mais um exemplar diferente para cada classe. Como neste caso já temos todos os exemplares organizados, podemos pedir o desenvolvimento destas classes para um geoplano de 5 por 5. Fica aqui uma porta aberta para decidir o que são exemplos diferentes pois a posição em que foi desenhado o quadrilátero vai exigir alguma atenção e obrigar a uma análise visual que às vezes não é simples.

Outra ideia de desenvolvimento é sugerir novas classificações. Neste caso deveremos apontar para quadriláteros do geoplano de 5 por 5. Poderão surgir como novos critérios: número de lados iguais; congruência das diagonais.

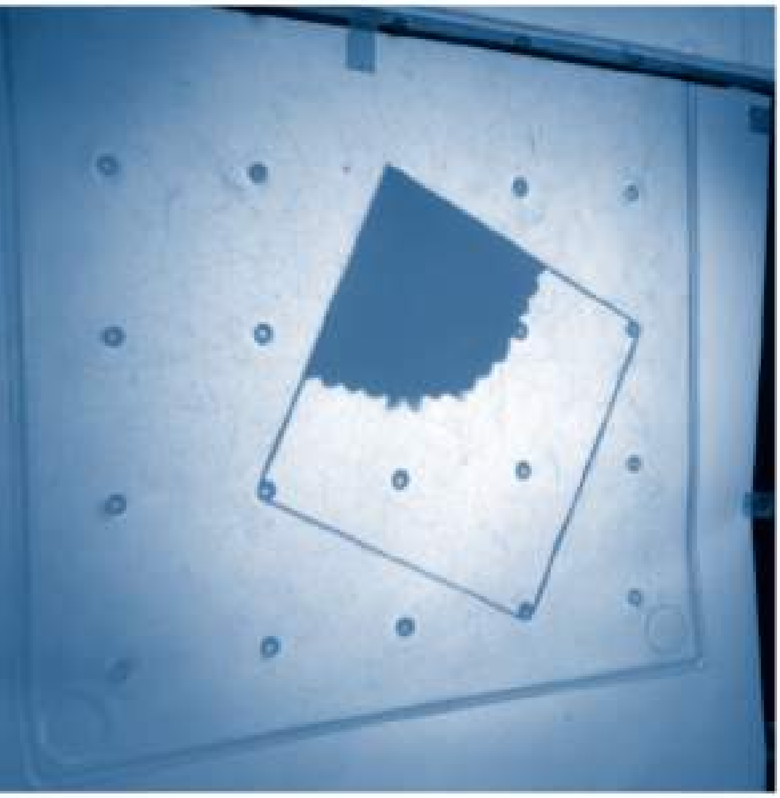
Para classificar objectos geométricos não é preciso de ter todos, mas sim ter representantes de todas as classes possíveis. Ser capaz de reconhecer todas as classes possíveis também é raciocínio geométrico.

Nesta discussão as classes foram sempre consideradas como separadas, não sendo abordada a ideia de classificação inclusiva.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

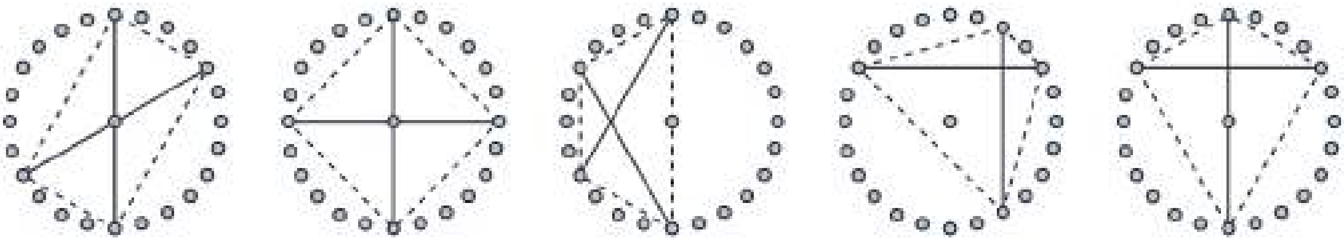
A equipa da redação da *Educação e Matemática* decidiu passar a considerar estes pequenos artigos como uma secção permanente, convidando-me a dar um nome a essa secção. Inicialmente, eles foram propostos com o propósito de ir apresentando, concisamente numa página, ideias didáticas para o ensino da geometria elementar. A compilação dos artigos ao longo do tempo proporcionará uma coleção alargada de ideias e uma perspetiva fundamentada do que poderão ser orientações para o ensino da geometria. Pela natureza do conteúdo dos artigos e pela forma como vão aparecendo, sem uma sequência lógica e sem uma organização subjacente, pareceu-me que tinha sentido designar esta secção por *Caderno de Apontamentos de Geometria*. É esse o nome que passará a ter a partir de agora. À redação da revista agradeço o apreço pelo meu trabalho e a confiança para continuar a responder a este desafio. Aos professores que me têm feito chegar comentários e sugestões agradeço o incentivo.

Estruturação espacial (1)



Vários especialistas de ensino da geometria afirmam que «toda a geometria é, em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação» (Battista *et al.*). Estruturar espacialmente um objeto determina a sua natureza, ou forma, pela identificação das suas componentes espaciais, pela combinação das componentes em composições espaciais, e pelo estabelecimento de inter relações entre as componentes e os compostos. Por exemplo, um geoplano é um instrumento de estruturação espacial através de uma malha quadriculada de linhas perpendiculares, uma estrutura ortogonal isométrica. Ao utilizá-lo para representar retângulos estamos a estruturar espacialmente o retângulo. Se os lados do retângulo coincidem com as linhas da malha quadriculada a estruturação é imediata. Se o retângulo está numa posição inclinada, a sua estruturação exige outro tipo de recurso. Neste caso, o destaque dos ângulos retos, como componentes do retângulo, pode ser uma maneira de estruturar esta figura e identificá-la em qualquer posição.

Este apontamento mostra-nos a necessidade de diversificar as atividades de aprendizagem para que a estruturação das figuras seja o mais completa possível, atendendo às suas várias componentes e às relações entre elas. Mostra-nos também a necessidade de escolher criteriosamente os suportes materiais que vão ajudar a construir essa estruturação. Por exemplo,



a estruturação do quadrado deve permitir que ele vá sendo trabalhado de modos diferentes:

(a) com os 4 ângulos retos e os lados todos iguais (um retângulo especial);

(b) com os lados todos iguais e os 4 ângulos retos (um losango especial);

(c) com as diagonais iguais, perpendiculares e que se bissectam;

(d) com 4 vértices equidistantes de um ponto e as diagonais iguais que se bissectam ou com 4 vértices que são pontos de uma circunferência e as diagonais são diâmetros;

(e) com 4 eixos de simetria;

(f) …

Ao fazer estas afirmações estou a pensar se, para cada uma delas, falta dizer alguma coisa ou se há alguma coisa a mais. Ao pensar assim, sou imediatamente levada a tentar descobrir exemplos de quadriláteros que verifiquem uma parte da afirmação e que não verifiquem a outra e isso dá pistas para organizar tarefas simples a propor aos alunos.

Descobrir, num geoplano de 5 por 5, todos os quadrados diferentes possíveis de construir, e descobrir depois todos os retângulos diferentes, são duas atividades em sequência que vão ajudar a ver um quadrado como um quadrilátero com os 4 ângulos retos e os lados todos iguais. Por isso, além de estruturar espacialmente o quadrado estamos a encará-lo como um retângulo especial. Deste modo preparamos um outro nível de estruturação, a geométrica, em que se inclui a classificação inclusiva dos quadriláteros. Mas esta estruturação espacial do quadrado não vai adiantar nada aos outros aspetos referidos, porque a estrutura ortogonal isométrica deste geoplano não dá contributos visuais para ajudar a estruturar esses aspetos.

Descobrir, num geoplano circular, todos os quadriláteros com as duas diagonais iguais e distinguir aqueles em que estas têm o ponto médio comum, é uma atividade que vai ajudar a estruturar o retângulo como quadrilátero com as duas diagonais iguais e que têm o ponto médio comum. Além disso, ajuda a estruturar o quadrado como o retângulo cujas diagonais são perpendiculares.

Ao falar da estruturação espacial fomos naturalmente conduzidos a falar da estruturação geométrica, mas essa discussão tem que ficar para outro apontamento.

Referências Bibliográficas

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education. Handbook of Research on Mathematics* 29(5), 503–532. NCTM.

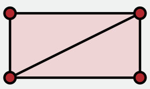
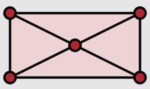
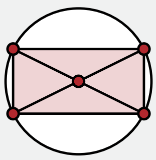
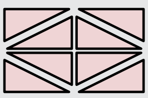
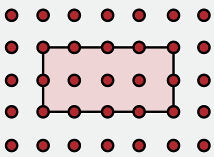
Estruturação espacial [2]

Cristina Loureiro

Na nota anterior foi apresentado o que se entende por estruturar espacialmente um objeto. Esta ideia é tão importante e há tanto para dizer sobre ela que vamos continuar a desenvolvê-la. De uma maneira simples, estruturar espacialmente os objetos geométricos é desenvolver representações mentais desses objetos que permitam isolar e identificar as suas componentes e estabelecer relações entre as componentes e o composto. Para compreender melhor esta ideia podemos fazer uma lista de maneiras diferentes de estruturar espacialmente uma figura muito conhecida, o retângulo, e analisar implicações de cada uma dessas estruturações.

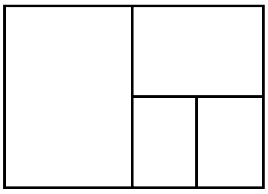
Estes exemplos mostram que a estruturação espacial do retângulo deve estar presente ao longo de toda a aprendizagem da matemática e quanto mais rica for essa estruturação, maiores serão os instrumentos de raciocínio geométrico de que cada um poderá dispor. Como poderei compreender a fórmula da área de um retângulo se nunca vi as redes quadriculadas que estão presentes em todos os retângulos? Ou entender a semelhança de retângulos se nunca vi nem comparei vários formatos de retângulo?

Para além das questões anteriores, que são apenas exemplos da necessidade de estruturar o retângulo, a lista de imagens

	**1.** Retângulo desenhado em fundo branco, sem o interior pintado.
	**2.** Retângulo desenhado em fundo branco com os vértices destacados. Visualmente identificam-se 4 lados e 4 vértices. Destacar os pontos de forma bem visível é uma ajuda substancial à estruturação espacial. Nos ambientes de geometria dinâmica (AGD) os pontos têm uma identidade bem visível.
	**3.** Retângulo desenhado em fundo branco com os vértices destacados e o interior destacado a outra cor. Num AGD a construção do interior de um polígono é representada pela pintura colorida do interior. A utilização de cores é um suporte indispensável para a estruturação espacial.
	**4.** Retângulo com uma das diagonais desenhadas. É possível avançar na estrutura do retângulo, identificando 2 triângulos retângulos como componentes do retângulo.
	**5.** Retângulo com as duas diagonais desenhadas. É possível identificar outros triângulos na estrutura do retângulo.
	**6.** Retângulo com as duas diagonais desenhadas e uma circunferência circunscrita. É possível identificar as diagonais como diâmetros da circunferência e o seu centro como o ponto de intersecção das diagonais. Para qualquer retângulo existe esta circunferência.
	**7.** Retângulo formado por 8 triângulos retângulos congruentes, construído com o recurso a triângulos retângulos de material manipulável ou de cartolina colorida.
	**8.** Retângulo desenhado numa rede ponteada com estrutura quadriculada. O destaque visual que os vértices do retângulo tinham no fundo branco perdeu-se pois há muito mais pontos destacados. A capacidade de percepção figura fundo precisa de ser mais acentuada para distinguir entre esses pontos os vértices do retângulo.

Experimente sobrepor, a partir de um vértice, vários retângulos escolhidos ao acaso (por exemplo envelopes diversos). Separadamente, sobreponha os retângulos que se obtém a partir de uma folha A4, dividida sucessivamente em duas a partir do meio da dimensão maior. De cada vez que dividir ao meio a folha guarde uma parte e divida a outra novamente.
Há alguma diferença entre o que acontece numa e na outra situação? Descobre alguma relação em alguma das situações?

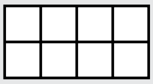
Haverá alguma relação entre as medidas dos retângulos utilizados como campos para diversos desportos?



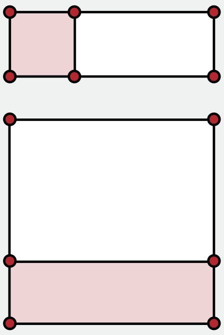
Por coincidência alguns aspetos da estruturação geométrica do retângulo são desenvolvidos no artigo «A matemática do papel», do n.º 116 da revista *Educação e Matemática*.

aponta também para a escolha criteriosa dos recursos que ajudam a fazê-lo. Há muitos anos que penso na utilização didática de materiais manipuláveis e tenho vindo a tornar mais consistente a escolha que deles faço e a consolidar o modo como essa seleção deve ser compreendida e fundamentada. O estudo da estruturação espacial confirma-me que a escolha tem que ser feita em função da estruturação espacial que se pretende desenvolver.

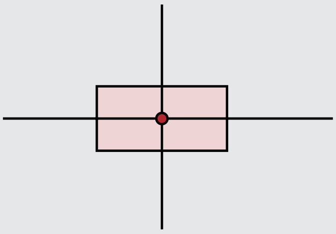
A estruturação espacial é uma condição necessária para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.



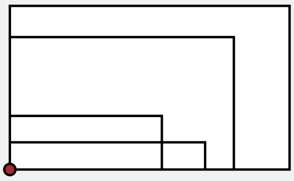
9. Retângulo desenhado com uma estrutura quadriculada de linhas e colunas.
Esta representação pode designar-se por uma disposição retangular de quadrados (*array* na literatura anglo-saxónica).
O destaque visual que os lados do retângulo tinham no fundo branco perde algum poder de percepção relativamente ao fundo.



10. Retângulo com um quadrado desenhado dentro ou fora.
Qualquer retângulo tem dentro um quadrado cujo lado é igual à menor dimensão do retângulo.
Por fora de qualquer retângulo há um quadrado cujo lado é igual à sua maior dimensão.
Ver como um retângulo se aproxima mais ou menos de um quadrado determina o seu formato.
Um retângulo pode ser visto como um quadrado esticado ou encolhido numa direção.



11. Retângulo associado a duas retas perpendiculares.
A associação de retas ou eixos ajuda a ver características da figura.

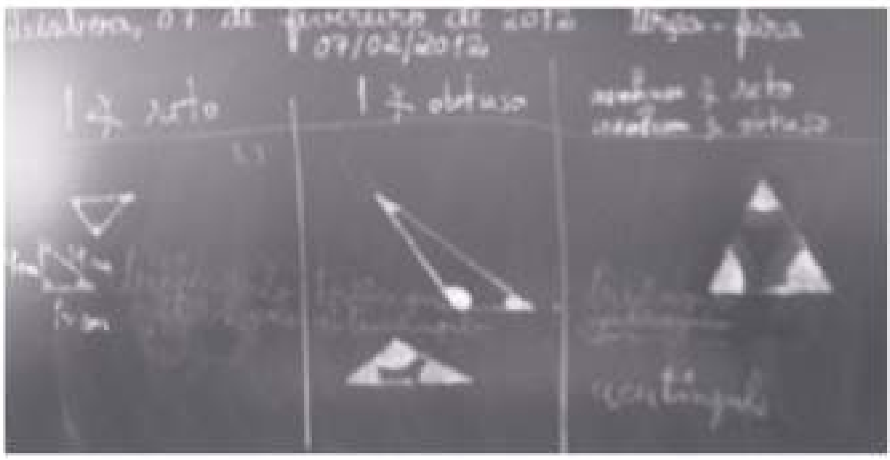


12. Vários retângulos sobrepostos com um vértice comum.

Estruturação espacial [3]

Cristina Loureiro

Esta seção é alimentada por um trabalho de investigação que tenho vindo a realizar há bastante tempo em várias turmas do 1º ciclo. Este trabalho centra-se na experiência de realização de atividades de geometria e medida em várias turmas, com a minha presença na sala de aula. As atividades são implementadas a partir de sequências de tarefas que, depois de experimentadas, passam a constituir o que designo por percursos didáticos.
Estes percursos fundamentam-se em níveis de estruturação do raciocínio geométrico [Battista, 2008] e estas experiências têm-me permitido compreender melhor a caraterização desses níveis e as suas implicações na aprendizagem da Geometria e Medida geométrica em todo o ensino básico.
Um dos percursos [Loureiro, 2012] foca-se principalmente na estruturação espacial dos polígonos, trabalhando-os como uma combinação de ângulos e procurando estabelecer relações entre esta componente e o composto, o polígono [Quadro 1]. Neste percurso começa-se por trabalhar com quadrados e outros retângulos [tarefas 1 e 2], passando por outros quadriláteros [tarefas 3 e 4] e outros polígonos [tarefa 5], para terminar com triângulos [tarefa 6]. Em todas as tarefas os ângulos foram o elemento fundamental em estudo.
As tarefas desta sequência incidem articuladamente sobre a estruturação espacial e a geométrica. A primeira parte do percurso orienta-se para a estruturação espacial, procurando libertar os alunos do suporte do geoplano e do papel ponteado correspondente, para a utilização de papel branco que ocorre nas tarefas 5 e 6. A identificação de ângulos, com recurso à utilização do detetor de ângulos retos, ajuda a destacá-los como elementos de um polígono. Neste percurso, os lados, como elementos constituintes de um polígono, foram pouco significativos pois apenas tiveram alguma atenção na discussão coletiva após as duas tarefas de construção dos retângulos, quadrados ou não [tarefas 1 e 2], e nas tarefas 3 e 5, apenas como contagem. A identificação das figuras, independentemente da sua posição no plano, e o reconhecimento visual dos ângulos como parte das figuras são exemplos de estruturação espacial dos quadriláteros, dos triângulos e dos outros polígonos. Como afirma Battista [2008], a configuração visual é uma forma de estruturar espacialmente.
A estruturação geométrica começa por ocorrer na discussão coletiva no fim da tarefa 2, com a introdução de figuras que são contraexemplos e com a inclusão do quadrado como retângulo especial. A tarefa 3 e a tarefa 6 inscrevem-se também neste âmbito pelas discussões coletivas que proporcionaram e em que foram estabelecidas relações geométricas.
Propositadamente os lados, outro elemento fundamental de um polígono, estiveram quase totalmente ausentes. Esta experiência permite-me concluir que foi uma boa opção focar toda a atenção no elemento ângulo e nas relações que podem ser estabelecidas, algumas delas já referidas em outras notas anteriores.



Considero este percurso muito consistente porque, em todas as experiências realizadas, [1] as tarefas foram sempre o ponto de partida e provocaram um envolvimento generalizado dos alunos das turmas em que foram experimentadas, [2] os trabalhos realizados pelos alunos proporcionaram discussões coletivas muito ricas, [3] as atividades deram sentido ao conhecimento sobre ângulos como elemento fundamental da estrutura de um polígono e [4] deram sentido ao estabelecimento de relações geométricas interessantes bem como à necessidade de compreender e justificar essas relações. No que respeita à ligação entre as tarefas, considero que a ordem está bem delineada pois permitiu aos alunos avançar, partindo sempre do conhecimento adquirido na atividade anterior e introduzindo também novos obstáculos promotores de aprendizagem. Além disso, este percurso deixa entradas em aberto para outros percursos de estruturação espacial e de estruturação geométrica.

Este trabalho de investigação tem permitido dar especial atenção à decisão sobre se as tarefas se orientam para a estruturação espacial, para a estruturação geométrica ou, ainda, se combinam e como combinam estas duas orientações. Um outro aspeto tem sido a obtenção de tarefas, desafiantes e capazes de criar obstáculos promotores de aprendizagem, focadas principalmente na estruturação espacial. Sabendo que é muito fácil e tentador cair numa exigência de estruturação geométrica sem que os alunos tenham ainda desenvolvido uma adequada estruturação espacial, penso que vale a pena discutir o desenvolvimento do raciocínio geométrico nesta perspetiva.

Propositadamente deixo com esta nota vários pontos em aberto para discutir em notas subsequentes, nomeadamente os trabalhos realizados pelos alunos e o conhecimento que foi construído, bem como o papel da intervenção do professor na realização destas atividades.

Quadro 1

	Descrição sumária da tarefa	**Barreiras críticas**
1	Construir quadrados num geoplano de 5 por 5.	Reconhecimento de quadrados em posições não «direitas». Necessidade de recorrer a ângulos retos e de introduzir um instrumento de medida: o «detetor de ângulos retos».
2	Construir retângulos num geoplano de 5 por 5.	Utilização do «detetor de ângulos retos». Reconhecimento de retângulos em posições não «direitas». Inclusão do quadrado como retângulo especial. Introdução de figuras que são contraexemplos.
3	Construir quadriláteros com pelo menos um ângulo reto num geoplano de 5 por 5.	Construção de figuras que respeitam simultaneamente duas condições.
4	Identificar em quadriláteros construídos, ângulos agudos e obtusos.	Reconhecimento e comparação de ângulos. Aparecimento de um ângulo que gera quadriláteros não convexos, o ângulo maior que um raso.
5	Descobrir ângulos retos, agudos, obtusos e superobtusos em polígonos dados em papel branco.	Ausência da estrutura quadriculada do geoplano. O ângulo como elemento fundamental de um polígono. Relações que envolvem ângulos e lados.
6	Construir, em papel branco, triângulos com: [1] um ângulo reto, [2] um ângulo obtuso, [3] nenhum ângulo reto e nenhum ângulo obtuso.	Estruturação espacial em papel branco. Impossibilidades de construção. Triângulos: retângulos, obtusângulos e acutângulos. Relações que envolvem ângulos num triângulo.

Referências Bibliográficas

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 – Cases and Perspetives. (pp. 131–156). NCTM & IAP.

Loureiro, C. (2012). Um percurso didático de estruturação especial e geométrica. In Atas do EIEM 12

Objetos e Estruturas

Cristina Loureiro

«É importante entendermos que, ao recuarmos no tempo, aquilo que hoje é considerado um objecto matemático simples, como um círculo, um triângulo equilátero ou um poliedro regular, poderá outrora ter transportado o impacto psicológico de toda uma estrutura e ter exercido influência sobre a metodologia científica (por exemplo, na astronomia). Um só número, digamos, 3, era tido como uma estrutura, com as implicações místicas que daí resultavam. Isolado, um objecto matemático perde o seu significado. Esse significado resulta de uma estrutura e desempenha o seu papel apenas inserido numa estrutura.» (p. 41)

«Se uma estrutura matemática é frequentemente utilizada durante um longo período de tempo, surgirá todo um corpo de experiência e de intuição sobre essa estrutura que poderá vir a ser considerada como um objecto matemático. Assim, o conjunto R dos números reais, uma estrutura, pode ser visto como um objecto quando se toma o produto R x R para definir pares de números reais.» (p. 41)

Estes dois parágrafos da «Experiência Matemática» deixaram--me a pensar sobre as implicações didáticas desta problemática. Talvez que muitas dificuldades da didática decorram desta dupla perspetiva dos objetos matemáticos. Quando é que estamos a encarar um objeto matemático como objeto? Quando estamos a encará-lo como estrutura? Quando sobrepomos estas duas perspetivas? Que confusões e dificuldades advém disso? Em toda a matemática há exemplos destes dilemas e complexidades. Pensemos em alguns da geometria elementar.

Só é possível aceitar que um quadrado é um retângulo quando os encaramos como estruturas. Assim, aceitamos que todos os quadrados têm as propriedades dos retângulos, ou que não é possível encontrar um quadrado que não tenha as propriedades de um retângulo. O que é equivalente a dizer que a classe dos quadrados está incluída na classe dos retângulos. Ao dizê-lo desta última maneira percebemos claramente que estamos a encarar estas figuras como estruturas.

Quando trabalhamos com crianças pequenas, que ainda têm dificuldades nesta abstração de ver um objeto como uma estrutura, é importante que usemos expressões que as ajudem sem confundir. É por isso que se opta nos primeiros anos por dizer que «um quadrado é um retângulo especial». À medida que se vão conhecendo muitos quadrados e muitos retângulos, podemos passar a usar expressões como «a família dos quadrados faz parte da família dos retângulos». Esta é já uma linguagem de estrutura, que ajuda quem aprende a ver classes de objetos. A didática tem obrigação de identificar estes dilemas, de ir encontrando soluções para lidar com eles, trabalhando com os professores sobre essas soluções.

Para uma criança um quadrado é um objeto. À medida que vai vendo muitos quadrados e que vai sendo convidada a pensar sobre eles vai adquirindo a ideia de protótipo de quadrado, isto é, de figura que representa a classe dos quadrados. Se uma criança viu sempre todos os quadrados num posição direita vai construir um protótipo de quadrado direito. É por isso que é tão importante que sejam trabalhados vários exemplos de protótipos e que quando se trabalha sobre a classe dos quadrados esta seja representada por mais do que um protótipo (Figura 1).

Assim como, quando se trabalha a classe dos retângulos é indispensável que apareçam também exemplos que são quadrados (Figura 2).

Para mim também é importante que sejam realizadas tarefas em que apareçam imagens diversas em que propriedades estruturantes dos elementos estão destacadas visualmente (Figura 3 e 4).

É assim que se constrói a classe dos retângulos, inclusiva para os quadrados. A ideia de figura como uma estrutura de classe só é possível quando se conhecem as propriedades da classe. Ter os 4 ângulos retos, ter as 2 diagonais iguais e cujos pontos médios coincidem são algumas propriedades que é importante destacar. E naturalmente que os contra-exemplos também têm um papel indispensável na construção de classes.

O professor precisa de conhecer os objetos geométricos como estruturas para saber orientar o ensino no sentido de ir trabalhando sobre os objetos de modo que os seus alunos os vão encarando também como estruturas. Mas a quem elabora

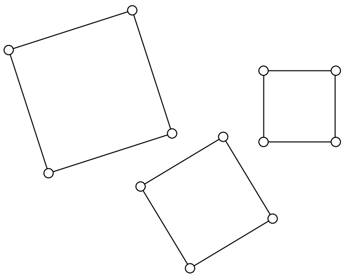


Figura 1

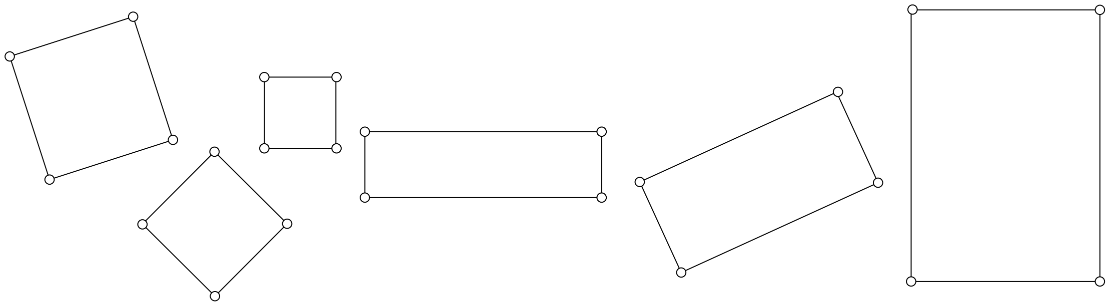


Figura 2

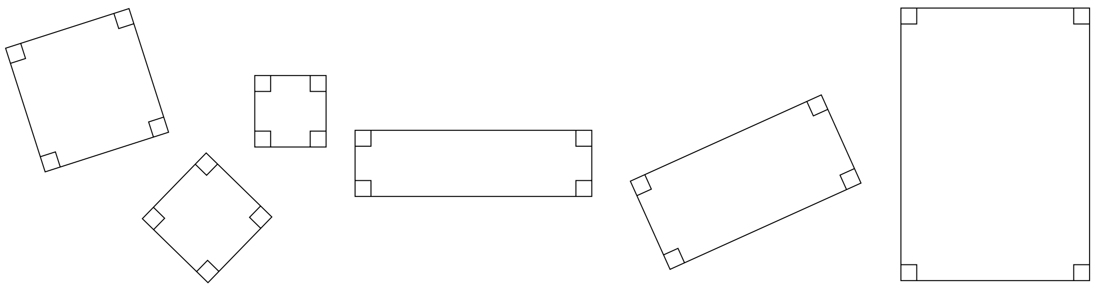


Figura 3

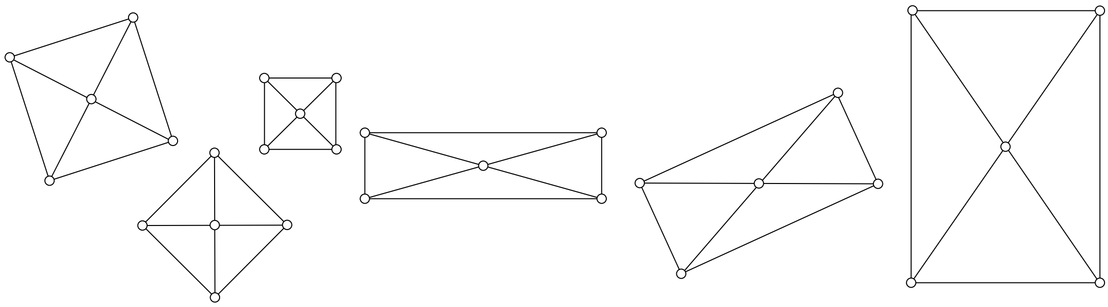


Figura 4

documentos de orientação curricular exige-se mais. Exige-se que, além do conhecimento das estruturas matemáticas, se dominem os modos possíveis de elas serem compreendidas e aprendidas. Por estas razões são inaceitáveis as actuais *Metas curriculares* da geometria. Estas metas não têm nenhum sentido didático e o seu sentido matemático é muito discutível. Ao definir inúmeras metas pontuais, semeadas ao longo dos vários anos, destrói-se totalmente a possibilidade de aprendizagem construída progressivamente. A única opção aceitável seria definir meia dúzia de metas realmente estruturantes no fim de cada ciclo de aprendizagem, como aliás é feito em alguns países em que há a preocupação de que a Matemática não sirva só para classificar alunos através da realização de exames. Uma aprendizagem estrutural e estruturante não se faz de um dia para outro, vai-se construindo. Ao estabelecer as actuais *Metas*, os autores do documento estão a mostrar o seu entendimento da aprendizagem da matemática, uma aprendizagem sem sentido e sem compreensão, em que prevalecem a mecanização de procedimentos e a memorização de factos e de regras.

Referências Bibliográficas

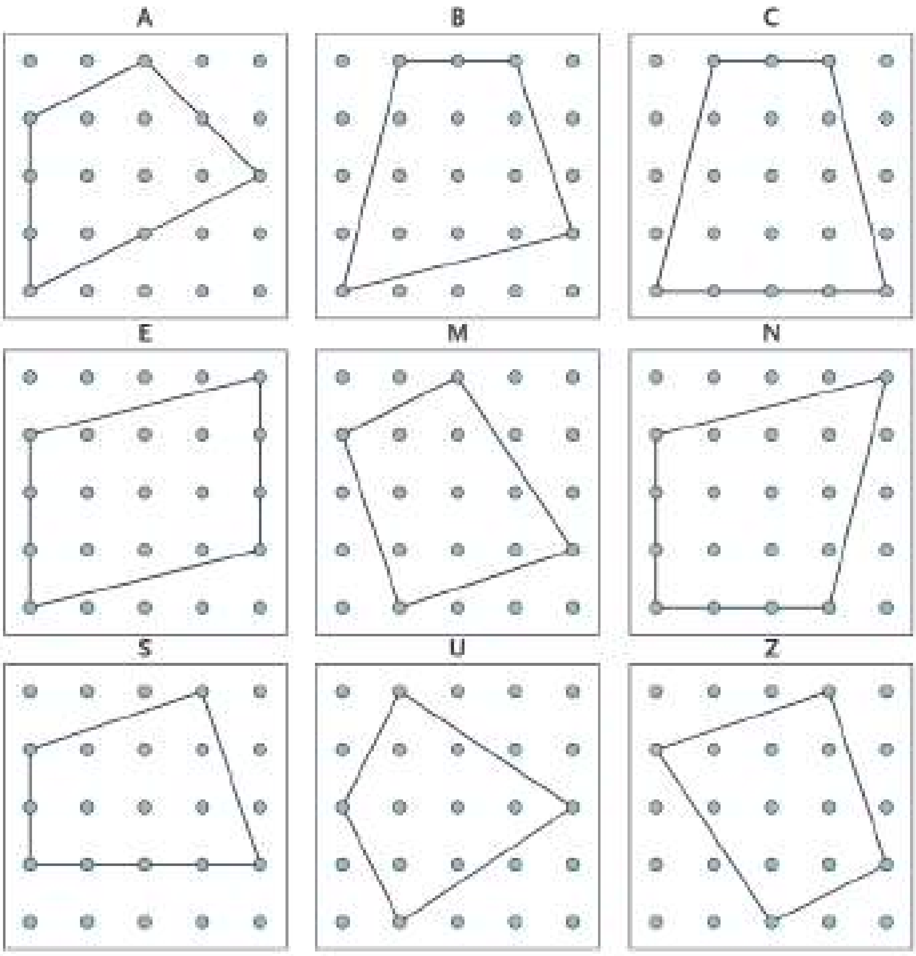
Davis, Philip J. e Hersh, Reuben (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

De novo os Quadriláteros (1)

Cristina Loureiro

Quando pessoas diferentes olham para uma figura nem todas veem o mesmo. Este é certamente um dos aspetos que dificulta o ensino da geometria. Johnston-Wilder e Mason (p. 53) defendem a utilidade de dizermos o que vemos, e quando o fazemos num grupo depressa descobrimos que aquilo que para uns é mais saliente, para outros não teve importância ou não mereceu atenção. Afirmam que o desenvolvimento do raciocínio geométrico depende da nossa capacidade de identificar e reconhecer relações geométricas que são úteis e isso pode desenvolver-se através da participação em discussões em que ouvimos o que os outros têm para dizer e em que cada um pode defender o que vê.

A tarefa que se propõe foi construída para provocar discordâncias. Perante estes 9 quadriláteros há quem seja mais sensível a uma relação entre os elementos de cada figura do que a outra. A rede ponteada ortonormada que sustenta os quadriláteros constitui um suporte indispensável dos raciocínios que se pretendem fazer.



1. Há algum quadrilátero repetido? Há intrusos no grupo de quadriláteros?
Carateriza a família de quadriláteros que consideraste. Acrescenta mais algum exemplar que aches que deve pertencer à família que escolheste.

2. Dos 9 quadriláteros apresentados qual é o que tem o maior perímetro?
Será possível acrescentar algum quadrilátero a este grupo de 9 e que tenha um perímetro maior? Se sim, acrescenta, se não porquê?

3. Dos 9 quadriláteros apresentados qual é o que tem a maior área?
Será possível acrescentar algum quadrilátero a este grupo de 9 e que tenha uma área maior? Se sim, acrescenta, se não porquê?

Referências Bibliográficas

Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

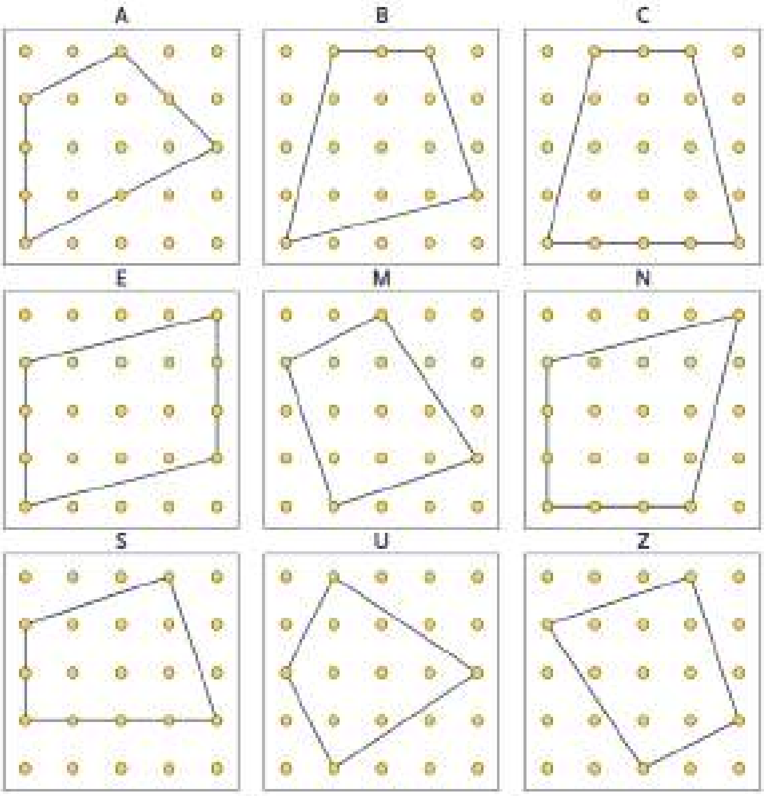
Famílias, repetidos e intrusos.

Cristina Loureiro

A tarefa que vamos discutir (divulgada na E&M anterior, n.º 126) foi trabalhada numa sessão de formação com professores dos 2.º e 3.º ciclos, aproveitando, assim, esta discussão muito contributos destes professores.

São objetivos da primeira parte da tarefa: agrupar quadriláteros a partir de propriedades comuns; construir o conceito de classe; definir classes de quadriláteros; desenvolver o raciocínio visual. A tarefa apresentada tem também uma parte relativa a perímetros e áreas que discutiremos em outros momentos.

São objetivos ambiciosos, mas estão muito interligados e a forma como a tarefa está organizada torna-os mais acessíveis. A natureza exploratória da tarefa, partindo dos conhecimentos dos alunos, permite realizar discussões muito interessantes baseadas nas diferentes conclusões a que irão chegar. A tarefa deve ser resolvida sem o recurso a uma régua para que não haja a tentação de medir comprimentos. É importante que os raciocínios sejam geométricos e de base visual, aproveitando as caraterísticas da rede ponteada ortonormada que sustenta os quadriláteros. A limitação da rede, a que dá jeito chamar geoplano de 5 por 5, ajuda a ter figuras equilibradas e a trabalhar num universo mais restrito.



As questões colocados como ponto de partida são: 1. *Há algum quadrilátero repetido?* 2. *Há intrusos no grupo de quadriláteros?* 3. *Carateriza a família de quadriláteros que consideraste.* 4. *Acrescenta mais algum exemplar que aches que deve pertencer à família que escolhestes.*

A *questão 1* e a existência de pelo menos duas figuras repetidas foi considerada importante pelos professores porque permite abrir a discussão da congruência de figuras. A sensibilidade e atenção à congruência é fundamental em todo o trabalho na geometria. Neste caso M e Z são os quadriláteros repetidos. Por isso a discussão que vamos fazer a seguir será apenas com base em 8 figuras.

A *questão 2*, sobre a existência de intrusos, obriga a olhar para os quadriláteros todos e a evidenciar alguma propriedade que permita compará-los e agrupá-los. É aqui que está a abertura da tarefa e que lhe confere a natureza exploratória.

Como afirmamos na nota anterior, pessoas diferentes vão ser sensíveis e identificar relações diferentes, a discussão surge naturalmente a partir das ideias que cada um vai ter que defender. O que está em jogo não é o certo ou errado, mas sim o que cada um vê, como defende e o modo como o verbaliza. Por essa razão as questões 3 e 4 são indissociáveis da questão 2.

É importante registar que consideramos como intrusos de uma família os elementos que não verifiquem a propriedade que carateriza essa família. O número de intrusos no conjunto dado pode ser superior aos dos membros da família presentes. O tipo de raciocínio que está em jogo é inerente a uma relação do tipo «se ..., então», isto é, se consideramos uma determinada propriedade caraterística da família, os quadriláteros que não a verificam são os intrusos.

Família 1 — B, C, E, M, N, S e U. É intruso A.

Pode haver quem defenda que não há nenhum intruso pois este quadrilátero, se estivesse representado em fundo branco, passaria facilmente como elemento da família. A família é constituída por todos os quadriláteros que têm pelo menos um par de lados iguais. Neste caso, para além de construir mais quadriláteros com esta propriedade é desafiante obter mais alguns que a não tenham.

Família 2 — B, C, M e S. São intrusos A, E, N e U.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm apenas um par de lados iguais.

Família 3 — E, N e U. São intrusos A, B, C, M e S.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm dois pares de lados iguais.

Família 4 — A, C, E. São intrusos B, M, N, S e U. Um deles, o M, se estivesse representado em fundo branco passaria muito bem por elemento da família.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm pelo menos um par de lados paralelos.

Se quisermos podemos restringir esta família e considerar os quadriláteros que têm apenas dois pares de lados paralelos. Neste caso ficaria solitário o quadrilátero E como representante da família.

Família 5 — M, N e S. São intrusos A, B, C, E, e U.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm pelo menos um ângulo reto. Esta família também pode dar origem a uma outra, constituída por quadriláteros com exatamente 2 ângulos retos, neste caso pertence-lhe o quadrilátero S. Nos intrusos há ângulos quase retos que é interessante analisar.

Família 6 — C, N e U. São intrusos A, B, E, M e S.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm um eixo de simetria. Neste caso haverá a discussão sobre se A e E serão ou não intrusos. O quadrilátero A porque visualmente dá a ilusão de que é um trapézio isósceles e o E porque, embora errado, é comum identificar em paralelogramos a existência de eixos de simetria. E fica a abertura para a discussão sobre se haverá quadriláteros com mais eixos de simetria, abrindo assim a possibilidade para aparecerem quadrados e outros retângulos que, propositadamente, foram excluídos do conjunto inicial de 9 quadriláteros que permitiu despoletar toda esta discussão.

Além destas 6 famílias é possível definir ainda outras recorrendo, por exemplo, à complementaridade de conjuntos e à negação de condições: não têm nenhum par de lados paralelos, não têm nenhum par de lados iguais, não têm nenhum ângulo reto. Alguém mais sofisticado poderá avançar para a análise das diagonais, mas como não estão representadas, não têm força visual e é natural que isso não ocorra. É interessante analisar que há elementos que podem pertencer a mais do que uma família e que uma família pode estar incluída noutra, ideias que são preparatórias da compreensão do que é uma classificação hierárquica.

Os 9 quadriláteros dados respeitam a condição de terem os vértices na fronteira do ponteado. Embora esta condição não deva ser usada como caraterística de uma família, pode ser exigida para limitar o conjunto das figuras com que queremos trabalhar.

A diversidade de resultados da tarefa, as discussões que vai permitir realizar, os conceitos que permite trabalhar, bem como as perspetivas que abre em termos de continuidade, levam-nos a considerar um grande potencial na utilização desta tarefa para trabalhar sobre quadriláteros. Perspetivamos por isso outras tarefas para trabalhar a classificação hierárquica de quadriláteros. Fica registado já um agradecimento especial aos professores que participaram nesta formação e que estão a experimentar esta tarefa com os seus alunos.

De novo os Quadriláteros (1)

Cristina Loureiro

A tarefa que apresento decorre da tarefa discutida nas duas notas anteriores, «De novo os quadriláteros (1)» e «Famílias, repetidos e intrusos», (E&M n.º 126 e n.º 127). Esta tarefa foi planeada para trabalhar a classificação ortodoxa de quadriláteros, assunto que considero um dos mais interessantes e de difícil aprendizagem na geometria elementar. Porventura um dos assuntos em que professores e alunos têm grandes dificuldades.

Uma das ideias fundamentais desta tarefa é que a sua natureza aberta e exploratória implica que o professor planeie muito bem a discussão das produções dos alunos. Por isso é indispensável que o professor pense previamente quais são os bons exemplos e contra-exemplos que vão ser úteis para a discussão. Só assim poderá selecionar com segurança, entre as produções dos alunos, os quadriláteros mais favoráveis para a discussão coletiva. Além disso, o professor deve ter exemplos preparados para fazer aparecer no momento adequado. Uma sugestão é criar uma folha de figuras de apoio à discussão que contenha exemplos de todos os tipos:

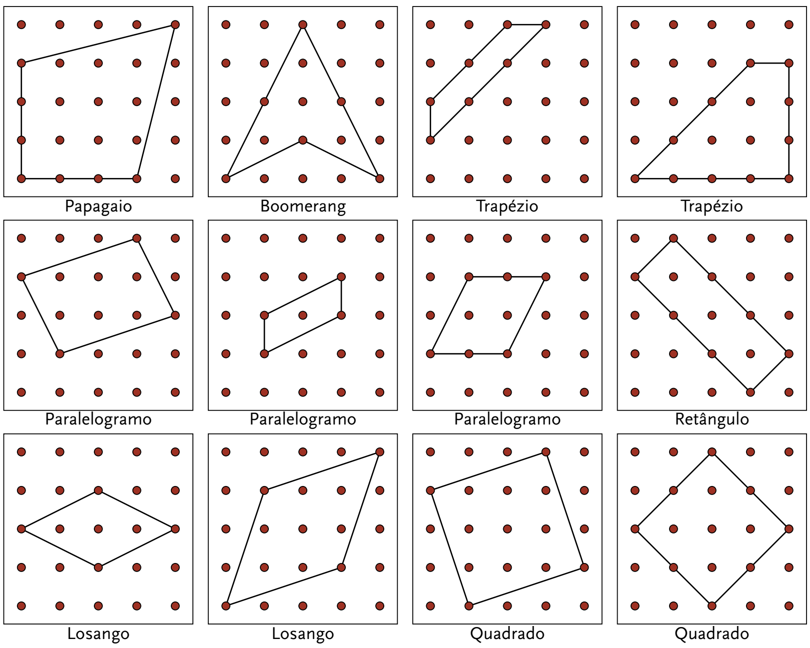
- Boomerangues e papagaios — dois pares de lados consecutivos iguais
- Trapézios — pelo menos um par de lados paralelos
- Paralelogramos — dois pares de lados paralelos
- Losangos — quatro lados iguais
- Retângulos — dois pares de lados paralelos e quatro ângulos retos
- Quadrados — quatro lados iguais e quatro ângulos retos

Há contra-exemplos interessantes de aparecer, que poderão ser muito úteis na discussão, e que não estão na folha de trabalho. São eles: um quadrilátero com dois lados opostos iguais e que não é trapézio; um quadrilátero apenas com três lados iguais.

Proposta de trabalho

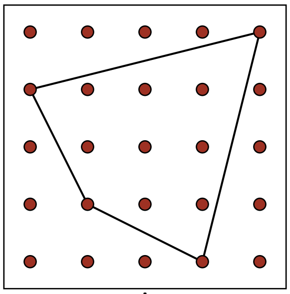
1. Em cada quadrilátero da folha de trabalho:
— Assinala os lados iguais com uma pequena marca.
— Pinta da mesma cor os pares de lados paralelos.

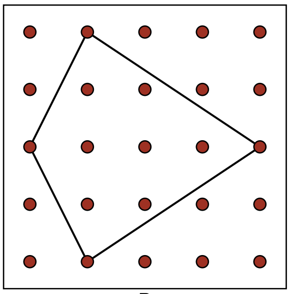
2. Organiza em famílias os quadriláteros. Para cada família que organizares acrescenta novos elementos construídos por ti.

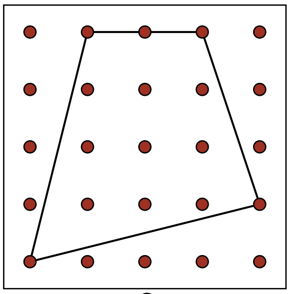


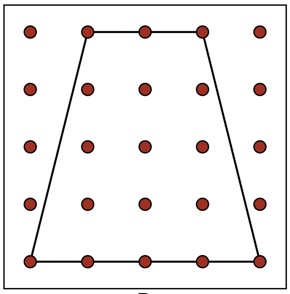
Exemplos para apoio à discussão

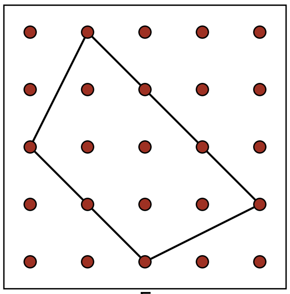
Folha de trabalho

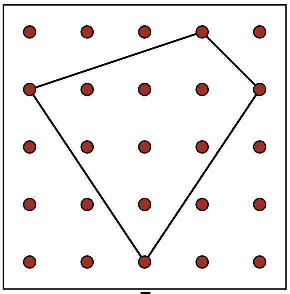

A

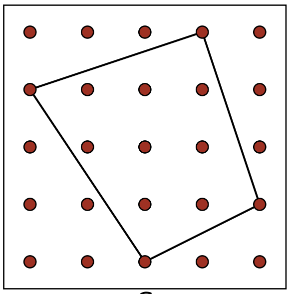

B

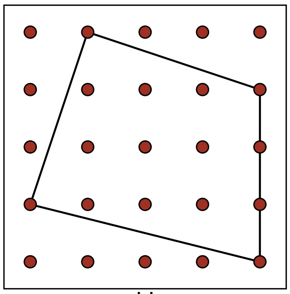

C

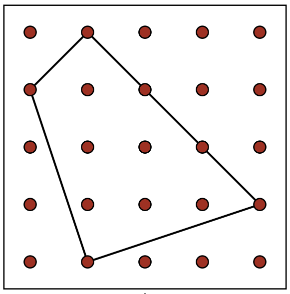

D

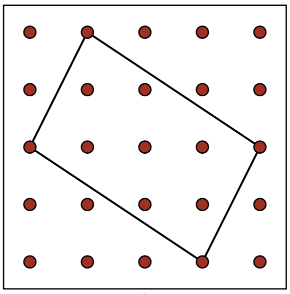

E

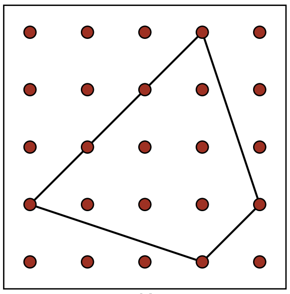

F

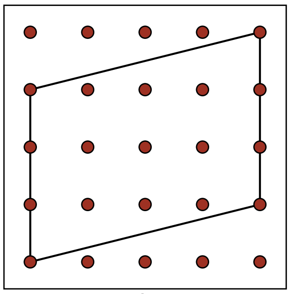

G

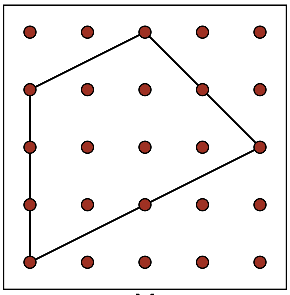

H

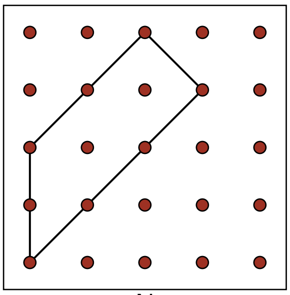

I

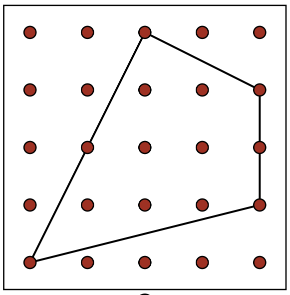

J

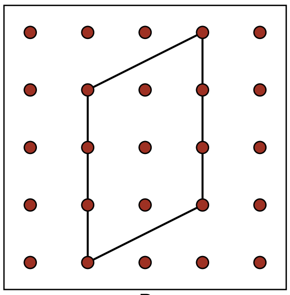

K


L


M


N


O


P

Loureiro, C. (2014). Classificação de Quadriláteros a partir dos lados. *Educação e Matemática, 128,* 6-7.

O papel dos papeis

Cristina Loureiro

Muitas das tarefas de geometria que tenho vindo a apresentar e discutir nestas notas têm como suporte de trabalho um papel ponteado. Dito de outro modo, *privilegio* nesta tarefas a utilização de um papel com elementos orientadores indispensáveis para trabalhar a geometria das figuras planas sem o peso de instrumentos de medida. Muitos raciocínios são mais simples e diretos e muitos outros podem ser também mais exigentes, constituindo verdadeiros raciocínios geométricos. Por exemplo, identificar comprovadamente ângulos retos (nota E&M 109) ou segmentos paralelos (nota E&M 113) pode exigir raciocínios mais ou menos sofisticados. Mais simples, mas exigindo bastante atenção, é a identificação de segmentos congruentes em quadriláteros (figura 1). A situação de existência de dois lados congruentes tem duas possibilidades, consecutivos ou opostos, e neste caso é interessante notar que o quadrilátero de três lado iguais não é trapézio.

A escolha do ponteado é estratégica. O papel ponteado quadriculado, em que se enquadra o geoplano, serve maravilhosamente o estudo dos quadriláteros pois permite construir todos os tipos de quadriláteros, como tenho ilustrado em várias destas notas. Mas este tipo de papel não serve o estudo dos triângulos pois não permite desenhar triângulos equiláteros cujos vértices sejam os pontos fundamentais da rede. Sem este triângulo não faz sentido discutir classificações de triângulos. No entanto o papel isométrico permite representar quase todos os tipos de triângulos incluindo triângulos retângulos (figura 2). O ângulo reto pode ser facilmente identificado com recurso ao detetor de ângulos retos e que não é mais do que um canto de uma folha de papel A4. Por acaso há um triângulo que não se consegue representar nesta rede ponteada, é o triângulo retângulo isósceles. Esta é a única limitação deste papel para o estudo completo dos triângulos. Porém é uma limitação que se pode transformar numa mais valia.

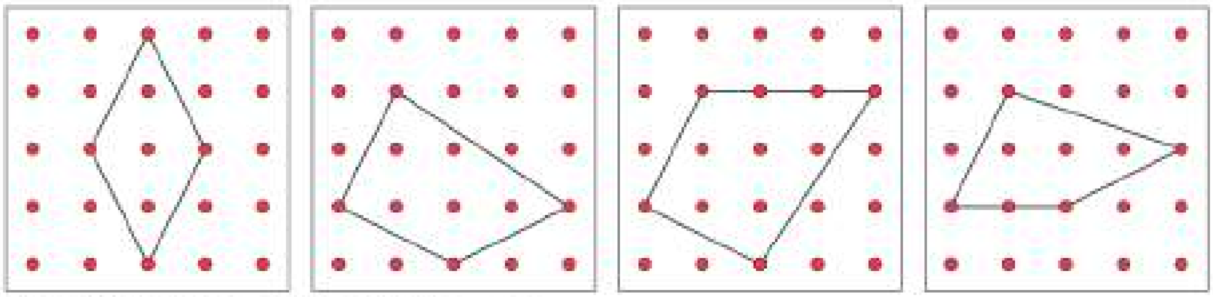


Figura 1. Quadriláteros com 4, 3 e 2 lados iguais.

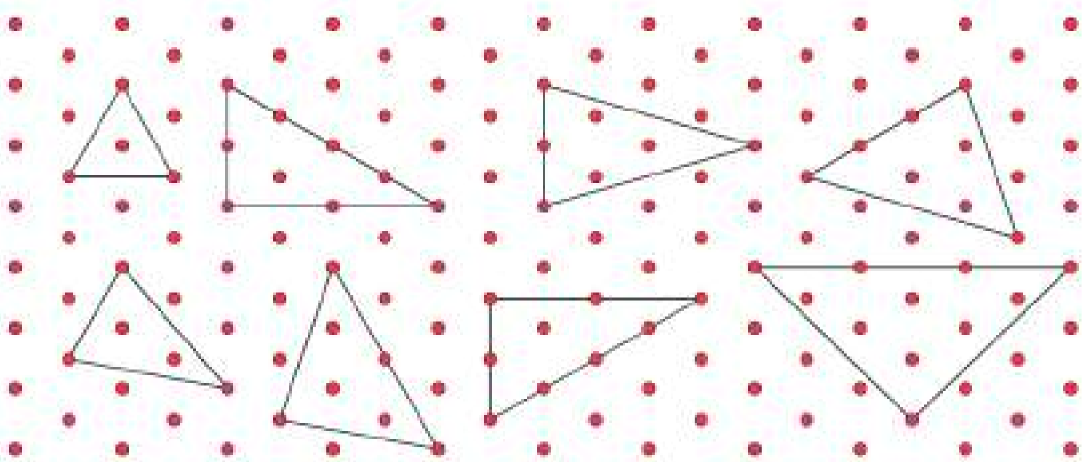


Figura 2. Triângulos representados em papel ponteado isométrico

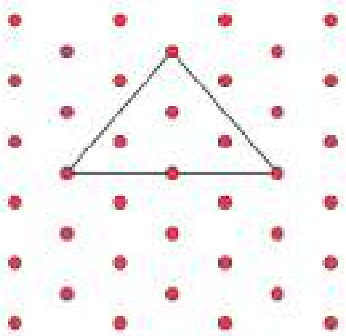


Figura 3. Exemplo de um falso triângulo retângulo com 3 ângulos agudos

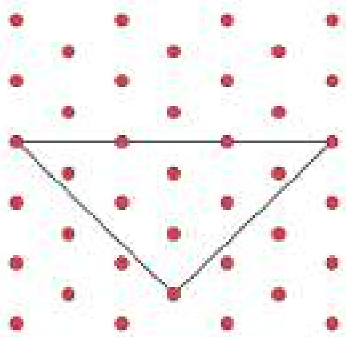


Figura 4. Exemplo de um falso triângulo retângulo com um ângulo obtuso

Recentemente, discuti a exploração de triângulos a partir de uma tarefa com grandes potencialidades de diferenciação pedagógica no artigo «Exames e diferenciação pedagógica» publicado em Junho na revista on-line Almadaforum. Nunca tinha feito uma exploração tão completa sobre triângulos com recurso a este papel e fiquei fascinada pela diversidade de triângulos que foi possível desenhar e pelos raciocínios que tive de fazer. O ângulo reto, como ângulo charneira que permite classificar o triângulo quanto aos ângulos criou-me algumas partidas. Há situações em que ele é quase, quase reto, estando no limiar entre deixar de ser agudo para ser já obtuso (Figuras 3 e 4).

Aos triângulos com um ângulo destes eu chamo falsos triângulos retângulos porque a olho nu eles parecem mesmo ter um ângulo reto. Os dois exemplos apresentados são triângulos isósceles. Deixo-vos por isso uma tarefa com duas partes distintas.

Descobrir o maior número de triângulos retângulos e de falsos triângulos retângulos desenhados em papel isométrico.

Para cada caso apresentar a justificação do raciocínio para garantir que o triângulo é mesmo triângulo retângulo.

As duas partes da tarefa apontam para dois níveis de exploração. Um nível mais elementar em que se prova que o triângulo é retângulo porque se verifica que tem um ângulo reto recorrendo simplesmente à sua medição. Outro mais elaborado em que se recorre a uma demonstração geométrica. A construção rigorosa e simples destas figuras, bem como a sua análise rápida seria bastante mais complicada em papel branco. Até porque em papel branco seria difícil alimentar estes desafios.

Como desafios finais para esta discussão sobre papéis ponteados deixo-vos em jeito de problema duas questões a que a minha abordagem anterior já respondeu. No entanto a compreensão das duas impossibilidades não foi de todo abordada.

Será possível construir um triângulo equilátero cujos vértices sejam pontos de uma rede ponteada ortonormado? Porquê?

Será impossível obter um triângulo retângulo isósceles cujos vértices sejam pontos de uma rede ponteada isométrica? Porquê?

Referência bibliográfica

Loureiro, C. (2014). Exames e Diferenciação. Almadaforma, nº 6, Junho 2014, (16–19). http://issuu.com/almadaformarevista/docs/6almadaforma.

O «retângulo» que não é retângulo

Cristina Loureiro

Muitas das ideias que têm estado na base destas notas decorrem de um trabalho de investigação que tenho vindo a realizar há já algum tempo. Este trabalho teve uma componente muito forte de experiência em salas de aula do 1.º ciclo onde foram experimentadas muitas das tarefas que tenho idealizado. Decidi apresentar agora alguns breves episódios de ensino com comentários e enquadramento teórico. Esta opção marca uma alteração na orientação destas notas que passam assim a contar com trabalhos de sala de aula para alimentar a reflexão.

Há uma ideia prévia à apresentação destes episódios que quero evidenciar. Os ambientes de geometria dinâmica alteraram radicalmente o modo de trabalhar a geometria. Será por isso desejável que as crianças comecem a aprender geometria o mais cedo possível com recurso a estes ambientes. Isso é desejável e possível que se inicie logo no 1.º ciclo, como evidencia o trabalho realizado por Graça Pereira (Pereira, 2012). Apesar de defender esta ideia, optei por realizar uma investigação ainda apenas com suporte de papel e lápis e recurso a materiais manipuláveis. Registo no entanto que muito do trabalho que realizei e das ideias que desenvolvi usufruíram do facto de eu fazer sempre todas as explorações prévias com recurso a um AGD. Espero ainda um dia poder adaptar muitas das tarefas que desenhei à utilização deste recurso para alunos do 1.º ciclo.

O episódio que relato ocorre numa aula do 3.º ano. Numa aula anterior, alguns dias antes, os alunos tinham realizado duas tarefas seguidas. Nessas tarefas, individualmente cada aluno tinha que descobrir o máximo de quadrados diferentes e depois de retângulos, também diferentes, possíveis de construir num geoplano de 5 por 5. Durante a fase de trabalho individual nunca foi dito aos alunos se os exemplares que iam descobrindo estava corretos ou não. O que foi sendo pedido foi para passarem algum dos seus exemplos para um folha maior que permitisse depois integrar uma exposição para apoiar a discussão coletiva. Foram assim obtidos 8 quadrados diferentes e 8 retângulos diferentes. Esta orientação permitiu, também, que existissem exemplares de paralelogramos que duas das alunas tinham construído considerando que eram retângulos. Estes contra-exemplos permitiram a realização de uma discussão muito rica em grande grupo. Esta aula começou com a exposição dos trabalhos realizados pelos alunos (figura 1).

O paralelogramo apresentado na última folha da figura 1 e que destaco na figura 2 não estava inicialmente na exposição, mas é apresentado por uma aluna como mais um exemplar possível. Para a discussão que se seguiu foi muito importante ele ter sido colocado ao lado de dois retângulos em posições não prototípicas (os dois primeiros retângulos da segunda fila na figura 1). A aluna está contente e totalmente convencida de que descobriu mais um retângulo para além dos 8 descobertos pelos seus colegas, no entanto não consegue explicar porque acha que assim é. Quase todos os alunos reagem e dizem que não é, embora alguns

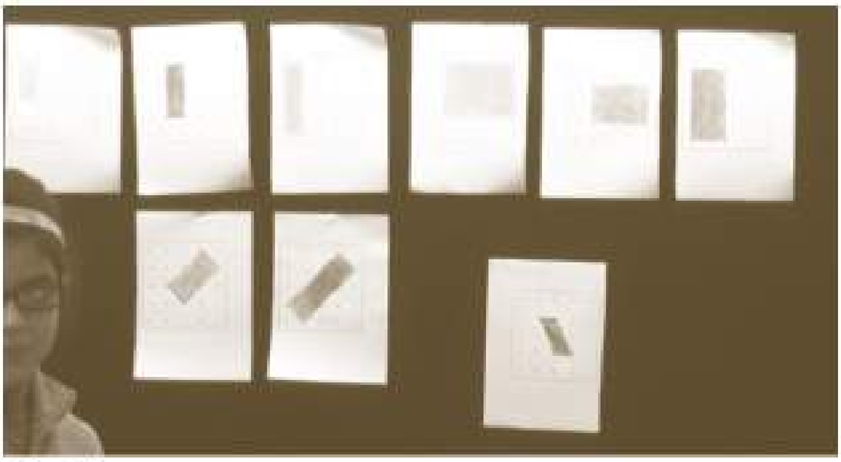


Figura 1

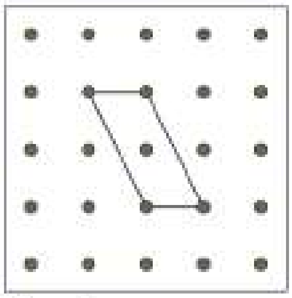


Figura 2

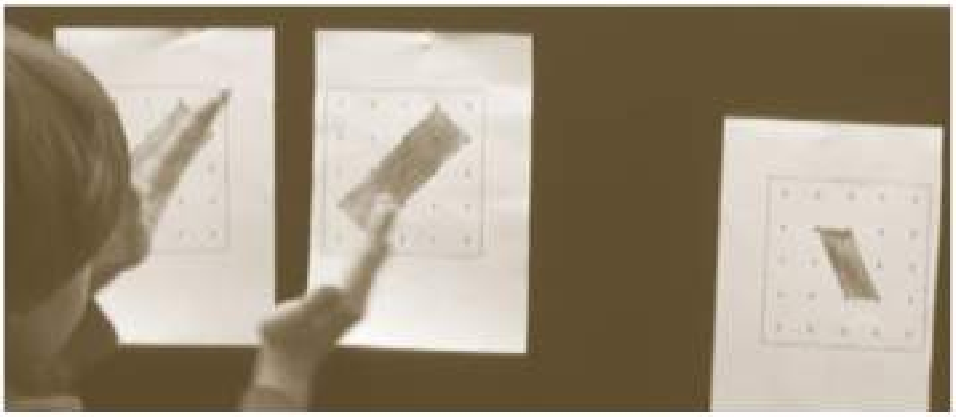


Figura 3

não consigam argumentar porque consideram que a figura não é um retângulo.

Hugo — *Não é porque tem assim 2 bicos para o lado.*

O Hugo vai ao quadro e contorna com os dedos os paralelogramos. Aponta dois lados opostos e diz que está inclinado por comparação com os retângulos em que considera que não está inclinado. O Hugo tem de recorrer à comparação com outra figura exposta, um retângulo em posição prototípica «ao alto», embora identifique elementos da figura importantes para esta decisão. Perante a dificuldade deste aluno em justificar o seu raciocínio, foi pedido a outro aluno, Duarte, que viesse apresentar aos colegas como tinha pensado.

Duarte — *Não é retângulo porque está torto. Em vez de ser assim está assim!*

O Duarte acompanha o que diz com gestos com as mãos (figura 3). No primeiro faz dois segmentos paralelos ao alto, ||, e depois faz dois segmentos paralelos inclinados, //, e contorna com os dedos o paralelogramo. Além disso, é capaz de fazer com as mãos a modificação necessária para que o paralelogramo ficasse retângulo, isto é, coloca as duas mãos de modo que dois lados consecutivos façam um ângulo reto. No entanto não é capaz de verbalizar esta relação entre os lados. Acompanha a sua justificação comparando também com um outro retângulo exposto mas em posição não prototípica isto é, «inclinado». Embora este aluno mostrasse que tinha ideias muito claras sobre a justificação geométrica correta não foi capaz de as verbalizar totalmente.

Esta discussão centrou-se na observação e análise de figuras e tornou evidente para nós a necessidade de trabalhar mais aspetos da estruturação espacial dos quadriláteros, necessários para a estruturação geométrica (Battista, 2008). Permitiu evidenciar a necessidade de dar atenção aos elementos que compõem uma figura, neste caso os ângulos e os lados. Permitiu também identificar as dificuldades em verbalizar o raciocínio, revelando que a maior parte das vezes as imagens mentais dos alunos estão corretas e são adequadas à sua argumentação.

A estruturação espacial e a estruturação geométrica são as ideias chave da análise deste episódio. Para mim são neste momento um referencial indispensável na análise e compreensão dos raciocínios dos alunos e por isso, na orientação do desenho das tarefas a propor-lhes e da sequenciação dessas tarefas. A leitura desta nota pode ser complementada com as notas 7 a 9 das revistas *Educação & Matemática* 116 a 118.

Referências

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In Glendon W. Blume, & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 — Cases and Perspectives*, (pp. 131–156). NCTM & IAP.

Pereira, M. G. (2012). Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros — um estudo com alunos do 4.º ano. Tese de mestrado. Repositório do IPL. http://hdl.handle.net/10400.21/2127

Exemplos e contra exemplos para construir o conceito de classe.

Cristina Loureiro

O episódio que apresento ocorreu numa aula de 3.º ano. A discussão coletiva com toda a turma da qual o retirei aconteceu depois dos alunos terem construído quadrados e retângulos. É interessante notar que construíram alguns paralelogramos pensando que eram retângulos e esses contra exemplos foram decisivos para gerar uma controvérsia favorável a uma boa discussão sobre propriedades de quadriláteros.

O quadrilátero da figura (fig. 1) foi um dos vários exemplares construídos como exemplo de retângulo. De fato é um paralelogramo que não é retângulo e constitui um excelente contra-exemplo para despoletar uma discussão significativa que permita identificar propriedades relevantes do retângulo.

Muitos alunos olhavam para o quadrilátero e diziam que era um retângulo, outros afirmavam que não era. Instalou-se assim um motivo de discussão. Como decidir se é ou não um retângulo? A olho nu ele parece mesmo ser retângulo. Um raciocínio possível para ter a certeza de que não é baseia-se no recurso à estrutura ponteada que o suporta, o que não é muito fácil para quem não domina o raciocínio geométrico. Outra possibilidade será recorrer a um instrumento de medida simples, o «detetor de ângulos retos». Mas vamos ver como decorreu a discussão até chegar à utilização deste instrumento.

Para alimentar a discussão foi destacado como elemento de comparação um retângulo, também construído pelos alunos, e numa posição «inclinada» como a do paralelogramo controverso (fig. 2). Uma boa maneira de forçar os alunos a defenderem uma opção errada é transmitir-lhes a sensação de que o professor defende essa opção. De certa maneira isso dá-lhes confiança.

Professor — *Quem quer dizer o que está a pensar de uma maneira que seja boa para todos ficarem convencidos de que a figura da direita também é retângulo? Vem cá a Rosa.*

Rosa — *Porque este se nós o pusermos assim em pé.*

A aluna, confiante, aproxima-se do quadrilátero exposto e ilustra com gestos o seu argumento (figs. 3 e 4).

Perante a sua dificuldade em verbalizar o que está a pensar, a aluna é incentivada pela professora a mudar a posição da figura. Ao fazê-lo fica com dúvidas.

Rosa — *Se colocasse assim era* [e aponta para os lados]. *Como está ao contrário ...*

É interessante procurar compreender o raciocínio desta aluna. No seu gesto inicial ela aponta para os vértices e por isso parece dar a ideia de conseguir decompor a figura em componentes e de estabelecer relações entre elas. Estaria assim ao nível de uma estruturação geométrica. No entanto, ao precisar de mudar a posição à figura mostra-nos claramente a sua necessidade de a ver como um todo. Para esta aluna a ideia mais forte para identificar um retângulo é uma imagem numa posição comum, «ao alto». A aluna precisa de mostrar que está a tentar vê-la como tal para justificar que é retângulo. Os gestos que faz, com as mãos e com a cabeça, e a sua afirmação dizem-nos que ela defen-

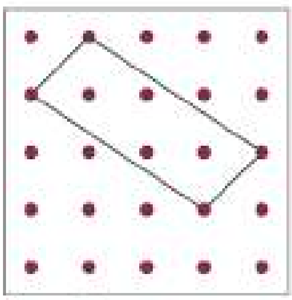


Figura 1

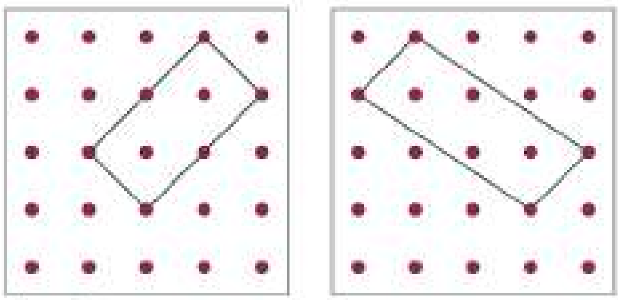


Figura 2

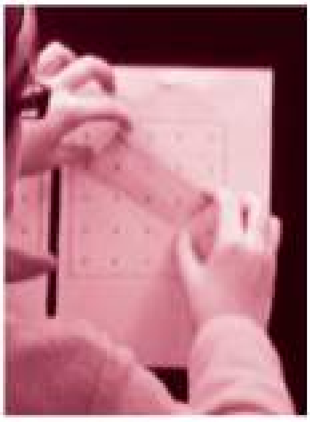


Figura 3


Figura 4

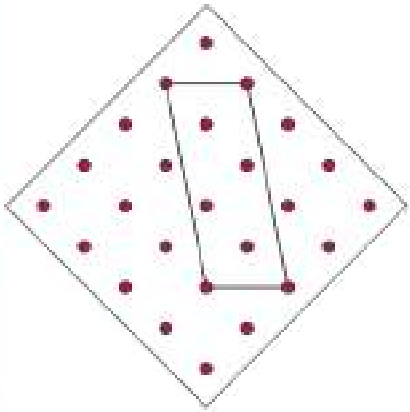


Figura 5

de que é um retângulo porque está a conseguir vê-lo mentalmente como um retângulo. No entanto, ao colocar efetivamente a figura na posição «ao alto» a aluna fica com dúvidas (fig. 5). A ilusão da perpendicularidade dos lados perde-se ao mudar a posição. A aluna não consegue decidir, simultaneamente parece que é e que não é.

Esta aluna, e todos o que estiverem a pensar como ela, precisam ainda de desenvolver a capacidade de raciocínio baseada na estruturação espacial. Isto é, precisam de ser capazes de destacar elementos no retângulo, neste caso os ângulos, para passar a reconhecer e usar uma propriedade que distingue claramente o retângulo dos outros paralelogramos. Esta propriedade é ter 4 ângulos retos. É uma propriedade inclusiva que facilita a construção da relação da classe dos retângulos como uma parte da classe dos paralelogramos.

A introdução de um instrumento de medida muito simples para reconhecer os ângulos retos permitiu aos alunos destacar visualmente os ângulos e passar a usar a propriedade de ter 4 ângulos retos como caraterística da classe dos retângulos. O recurso a contra-exemplos é indispensável para construir a ideia de classe. Uma classe de quadriláteros constitui-se a partir da identificação de invariantes num conjunto alargado de exemplares dessa classe. O conceito de invariante só pode ser bem compreendido se forem analisados também exemplares que não pertencem à classe, como o paralelogramo sobre o qual discutimos.

Esta discussão teve por base figuras construídas pelos alunos e isso confere-lhe muito mais valor e significado. Assim como surgiram paralelogramos não retângulos como exemplos de retângulos poderiam ter surgido losangos não quadrados como exemplares de quadrados. Porém tal não aconteceu, nenhum aluno construiu um losango com dois pares de lados diferentes pensando que poderia ser um quadrado. Mais à frente, no desenrolar da discussão, esse contra-exemplo teve de ser apresentado pela professora, uma possibilidade que é sempre um recurso do professor quando pretende construir a ideia da classe dos losangos inclusiva para os quadrados.

Penso que não seria capaz de refletir sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico nesta perspetiva de estruturação se não tivesse trabalhado com estes miúdos e vivido estas estimulantes discussões a partir das dezenas de figuras que construíram. A leitura desta nota pode ser complementada com as notas 7 a 9 das revistas *Educação & Matemática* 116 a 118, e da nota 20 da revista 131.

A classe dos paralelogramos

Cristina Loureiro

O episódio que apresento foi o último de uma discussão coletiva realizada numa turma de 3.º ano. Ele ocorreu como culminar de um trabalho sobre a construção de quadrados e retângulos em que, na fase de discussão, foram sendo introduzidos paralelogramos não retângulos e losangos não quadrados. Os paralelogramos não retângulos foram construídos pelos alunos como exemplares de retângulos e os losangos foram introduzidos pela professora como contraexemplos de quadrados.

Alguns alunos, ao verem alguns paralelogramos como retângulos estavam a valorizar os pares de lados paralelos. É uma ideia forte e boa que ajuda a construir os paralelogramos como classe inclusiva para os retângulos. Estes quadriláteros são uma subclasse. Podemos dizer que os retângulos são paralelogramos com os quatro ângulos retos ou com os ângulos todos iguais.

A professora fez aparecer o losango para introduzir a necessidade de destacar os lados e encarar a relação entre a classe dos quadrados e a dos retângulos. A intenção da professora era fazer evidenciar a classe dos quadrados como uma classe muito especial que resulta da interseção de duas classes (Fig. 1).

O objetivo principal das tarefas realizadas até este momento era a compreensão de que os quadrados são simultaneamente retângulos especiais e losangos especiais. É importante notar que a ideia de classe ainda está a ser construída por estes alunos. O conceito de classe de figuras geométricas é bastante abstrato. Os alunos constroem e analisam exemplares de uma classe e só progressivamente os começam a ver como representantes de uma entidade abstrata, uma classe.

O desenrolar da discussão tinha deixado ficar expostos no quadro também os paralelogramos que não eram retângulos (Imagem 1 e Fig. 2). Esta exposição de figuras levou um aluno a intervir e dizer «São todos paralelogramos». Este aluno leva-nos a pensar que para ele a relação entre estas classes de quadriláteros (Fig. 3) já estava bem clara. Este aluno está a construir naturalmente a ideia da classe dos paralelogramos como inclusiva para as subclasses particulares dos retângulos e dos losangos. E por sua vez, com a inclusão especial da classe mais fina dos quadrados.

O caminho de construção da classe dos paralelogramos que aqui foi percorrido é distinto daquele que com maior frequência se apresenta aos alunos. É um caminho do particular para o geral. Vai-se consolidando a classe mais restrita e através da introdução de contraexemplos para esta classe constrói-se uma nova classe mais ampla. O que se evidencia aqui é que os paralelogramos que são quase retângulos ajudam-nos bastante a destacar a existência de dois pares de lados paralelos como uma propriedade caraterística dos paralelogramos. Foi isso que aconteceu durante esta experiência com os alunos que desenharam paralelogramos convencidos de que eram retângulos (E&M n.º 132).

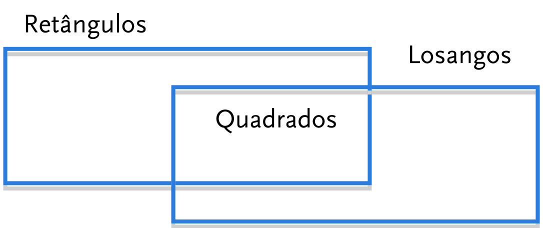


Figura 1

Imagem 1

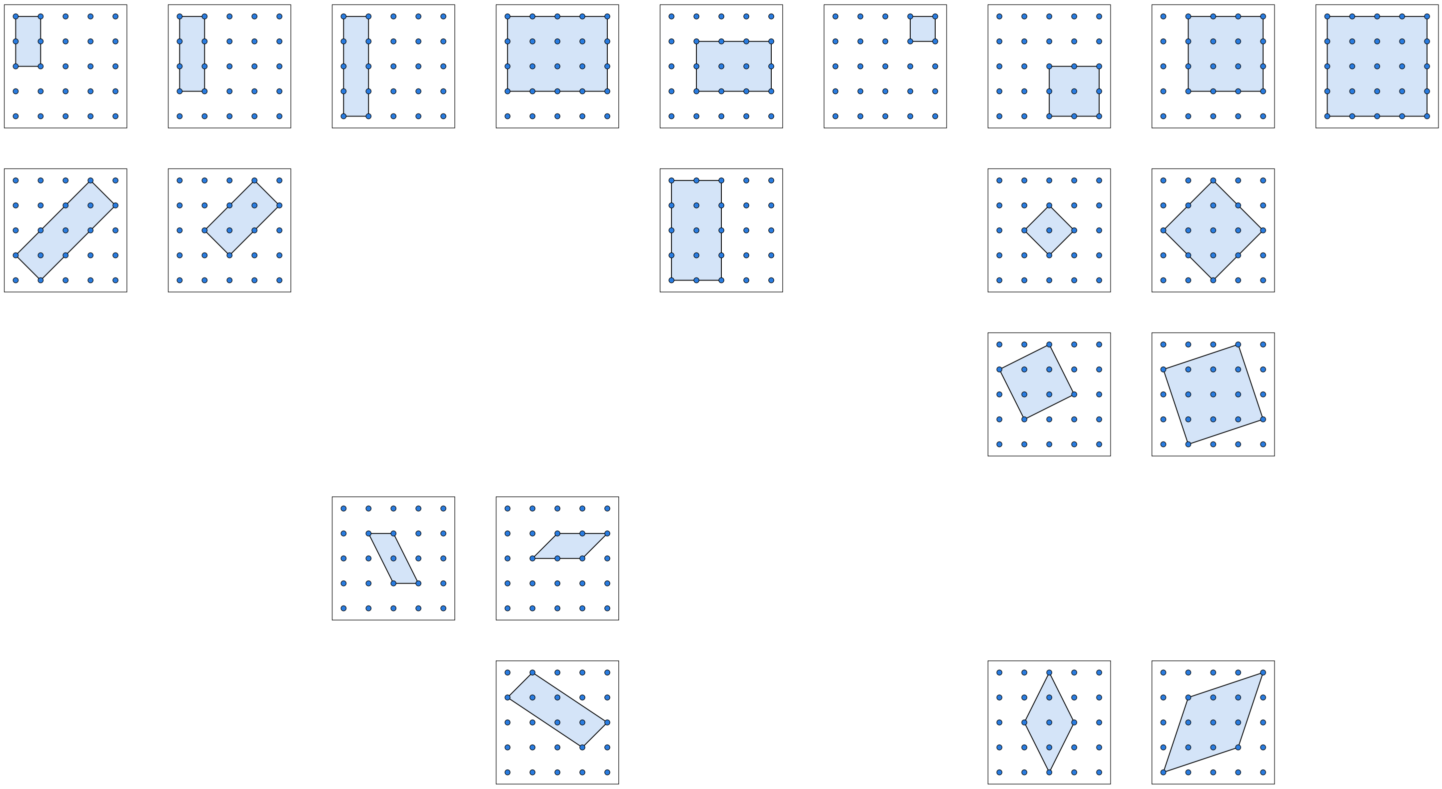


Figura 2

Este episódio inscreve-se na perspetiva de Battista (2008) que evidencia a importância de compreender como pode ser o movimento a partir das estruturações próprias dos alunos para estruturações geométricas formais poderosas. Segundo este investigador, este movimento não exige apenas o refinamento recursivo das estruturações espaciais informais dos alunos, mas também o acesso aos conceitos geométricos apropriados. Acesso que depende de uma estruturação e uma concetualização em níveis apropriados ao seu desenvolvimento e também das interações sociais vividas na sala de aula.

Este episódio está integrado numa experiência que incluiu a realização de várias tarefas com vista à construção progressiva do conceito de classe de quadriláteros e de algumas dessas classes. Ao longo deste trabalho ficou evidente que esta construção é lenta, muito diferenciada entre os alunos e exige a realização de várias tarefas que permitam o desenvolvimento da estruturação espacial e da estruturação geométrica de forma articulada. Numa mesma turma há alunos que já conseguem identificar as componentes de uma figura e relacioná-las, enquanto outros ainda olham para as figuras como um todo, guiando-se pela perceção global da figura. Neste caso ainda terão muitas dificuldades em conseguir compreender as relações entre os seus elementos e por isso não terão acesso à compreensão de uma classe de quadriláteros, por mais simples que ela seja. No entanto, o aluno que olhou para todas as figuras e foi capaz de identificá-las como elementos da classe dos paralelogramos revela já um nível de estruturação geométrica avançado.

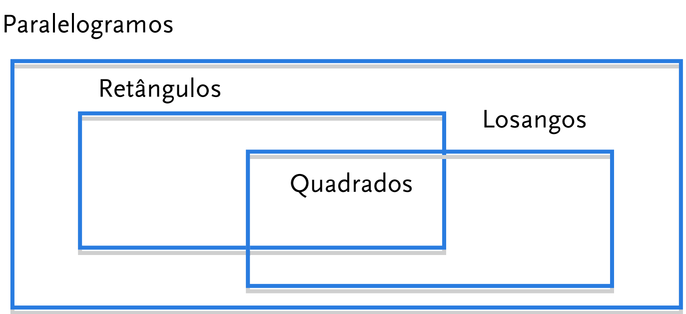


Figura 3

Referências Bibliográficas

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 — Cases and Perspetives*, (pp. 131–156). NCTM & IAP.

Geometria partilhada e socialmente construída

Cristina Loureiro

Os pequenos artigos deste *Caderno de apontamentos* são aparentemente uma miscelânea de ideias resultantes da investigação que venho a fazer há alguns anos sobre o ensino e a aprendizagem da geometria. Esta aparente miscelânea decorre da multiplicidade de investigações, contributos teóricos e ideias a que acedi, dos dados que fui recolhendo e da reflexão que venho fazendo sobre eles. Os meus escritos constituem destaques de aspetos que considero relevantes, que são muitos e de natureza muito diversa, elaborados nestes artigos com o objetivo de serem úteis e interessantes para outros professores.

Na vastíssima e complexa rede de conhecimentos produzidos pela investigação em educação matemática, a compreensão da perspetiva sócio construtivista da aprendizagem é aquela que me suscita neste momento maior interesse. Este interesse advém da importância que passei a dar aos momentos de discussão coletiva na realização de tarefas de geometria e de ter escolhido os contributos teóricos do sócio construtivismo para estudar, analisar e compreender esses momentos. Na linha de investigação do sócio construtivismo considero fundamental o trabalho de Cobb, Yackel e Wood de que destaco o artigo «*A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education*» de 1992. Embora já com alguns anos, este artigo é recorrentemente citado desde essa data em quase todos os trabalhos de investigação nesta área.

Deste artigo destaco as três dimensões de referência do conhecimento matemático: (1) as formas de conhecimento matemático individuais de cada aluno; (2) as práticas matemáticas partilhadas da comunidade de sala de aula; (3) as práticas matemáticas partilhadas reconhecidas e aceites pela sociedade em geral. Gosto particularmente de encarar e representar estas três dimensões e o processo de aprendizagem da matemática por um esquema evolutivo (fig. 1). Os processos de ensino terão assim como objetivo aproximar estes três níveis como procuro ilustrar no esquema. Propositadamente no esquema, a matemática válida não desce de nível e são as outras duas dimensões que sobem e se aproximam.

Na análise dos momentos coletivos vividos na experiência de ensino que realizei, tenho procurado identificar e compreender estes três níveis bem como as relações entre eles, a sua complementaridade e a evolução que o processo de ensino pode permitir realizar. Há dois exemplos que considero interessantes para discutir.

O primeiro exemplo diz respeito ao conceito de ângulo reto. O reconhecimento de um ângulo reto em qualquer posição, isolado ou como elemento que faz parte de uma figura geométrica, é uma competência comum na matemática. Nas experiências realizadas e que têm sido referidas nestas notas (E&M n.ºs 116, 118, 131, 132, 133), esta necessidade esteve presente para decidir se determinados paralelogramos eram ou não retângulos. Nas discussões que ocorreram houve uma sobreposição da matemática partilhada com a matemática dos alunos, a partir das figuras feitas por eles e que constituem a sua matemática. Destaco a heterogeneidade na matemática dos alunos, com diferenças

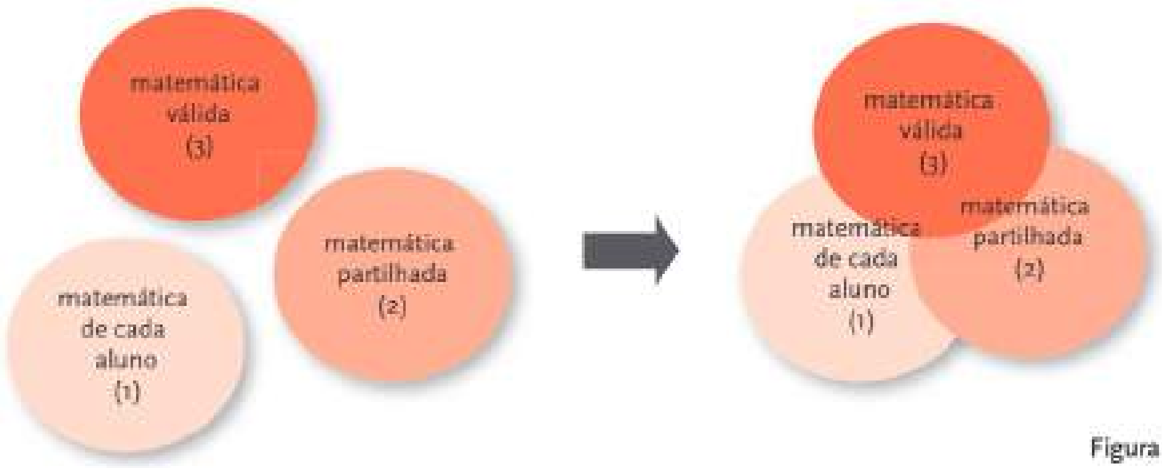


Figura 1

significativas entre a matemática de cada aluno, e o modo como este ponto de partida permitiu encontrar patamares comuns para a matemática partilhada e socialmente construída. Alguns alunos já eram capazes de identificar corretamente os ângulos retos sem serem capazes de verbalizar as justificações, outros ainda tinham dificuldade em destacar os ângulos como elementos de uma figura. Na experiência realizada, a introdução do detetor de ângulos retos e a sua utilização significativa por todos os alunos constituiu a meu ver uma boa aproximação à matemática socialmente aceite — a utilização de um objeto que permite identificar e medir ângulos, o transferidor. Mas mais do que disso, este objeto é uma eficaz representação do ângulo reto como um quarto de volta. Este aspeto valoriza-o ainda mais pois permite construir o conceito de ângulo reto totalmente independente do sistema de unidades de medida (fig. 2).

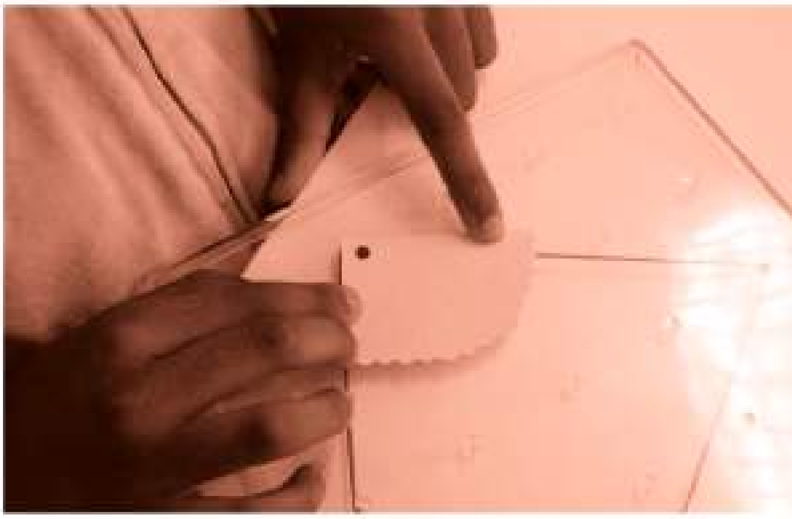


Figura 2

É muito comum ouvirmos definir ângulo reto com um ângulo que mede 90°. Esta definição não é a mais correta porque não é intuitiva, nem independente da noção de medida e de sistema de unidades de medida. O ângulo reto é o ângulo de um quarto de volta ou de metade de uma meia volta. Esta ideia, realmente intuitiva e poderosa, valoriza este objeto porque justapondo dois detetores de ângulos retos obtemos um ângulo raso (fig. 3).

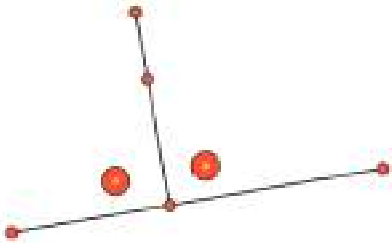


Figura 3

Com esta justaposição de dois detetores discuto um outro aspeto relevante da matemática partilhada que vivemos nesta experiência. Os alunos construíram naturalmente quadriláteros com ângulos agudos, retos e obtusos que passaram a identificar com facilidade. Quando a aproximação a um reto era grande, e isso aconteceu muitas vezes, aprenderam a recorrer ao instrumento de comparação, o detetor de ângulos retos. Entre os quadriláteros construídos pelos alunos, surgiram naturalmente alguns que não eram convexos e por isso com ângulos maiores do que um raso. Este tipo de ângulo teve de passar a ter um nome, chamámos-lhes «super obtuso». Para mim constitui um bom conceito da matemática partilhada pois foi bem aceite pelos alunos, com significado e com a possibilidade de verificação a partir da justaposição de dois detetores de ângulos retos (fig. 3). Mas será este conceito da matemática partilhada uma boa aproximação à matemática socialmente aceite?

Nos livros de matemática portugueses, um ângulo maior do que um raso é designado por côncavo. No entanto, em livros americanos, este tipo de ângulo é considerado como ângulo reflexo (reflex angle). Considero que nesta perspetiva assume-se uma classificação mais coerente dos ângulos: agudo, reto, obtuso, raso e reflexo (Musser, Burger & Peterson, 2006). Estes autores, ao introduzirem esta classificação e nomenclatura, associam-na ao objetivo de que os alunos selecionem e apliquem técnicas e instrumentos para obter com precisão a medida de um ângulo.

Destaco esta diferença interna à própria matemática socialmente aceite. Parece-me uma reflexão útil para a compreensão dos três níveis que apresentei no início. O uso de classificações e designações diferentes na matemática não acontece apenas na geometria. Há outras situações em que vale a pena os professores refletirem sobre este conceito de matemática socialmente aceite e terem consciência das diferenças entre comunidades de ensino da matemática distintas. A decisão de escrever sobre o ângulo reflexo decorreu de duas apresentações públicas que fiz deste trabalho e em que a designação de «super-obtuso» foi questionada por alguns professores. Defendo que passemos a utilizar o conceito de ângulo reflexo. Espero que este texto seja esclarecedor e útil.

Referências Bibliográficas

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2–33.

Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (2006). *Mathematics for elementary teachers — a contemporary approach*. John Wiley & Sons.

Geometria partilhada e socialmente construída (2)

Cristina Loureiro

Estamos em janeiro de 2016 e estão criadas as condições para alterar a orientação do ensino da matemática com base no programa do ensino básico de 2013 e na realização de exames nos anos terminais dos três ciclos deste nível de ensino. Registo por isso um desejo para mudança do rumo das orientações curriculares na escolaridade básica, em particular no que respeita à geometria. Este desejo tem por base três ideias chave: (1) geometria partilhada e socialmente construída, (2) sequências de atividades ou percursos de aprendizagem e (3) recurso à tecnologia. Justifico as duas primeiras ideias chave com uma reflexão sobre o que se pode passar na sala de aula quando se dá espaço aos alunos para pensar e para mostrar e discutir como pensam, construindo assim ideias matemáticas abstratas de modo significativo. A terceira ideia é inevitável quando a tecnologia faz parte da vida diária de todos e não pode ser deixada fora da sala da aula.

Hoje em dia existem já muitos contributos relevantes, baseados em investigação, que permitem compreender a importância e os efeitos do contexto de sala de aula na aprendizagem da geometria e medida. As tarefas, os materiais, o professor e os outros alunos, bem como as expetativas de cada aluno relativamente à turma e à sua própria aprendizagem são elementos do contexto de ensino que influenciam todo o processo de aprendizagem. É por isso que não há duas turmas iguais e que o mesmo professor pode funcionar de modo diferente em turmas distintas e o sucesso de um aluno também pode variar conforme a turma em que está integrado. Owens e Outhred (2006, p. 97) afirmam que «os estudantes atendem seletivamente a aspetos deste contexto à medida que trabalham mentalmente com as suas perpeções e as ligam a memórias já existentes». Acrescentam ainda que as interações aluno-aluno bem como a professor-aluno no contexto de sala de aula podem influenciar o que os alunos percebem e as respostas que dão, tanto numa perspetiva afetiva como heurística.

Este apontamento leva-me a olhar para uma série de afirmações feitas por alunos numa turma de 3.º ano depois de uma longa discussão sobre a relação entre quadrados e retângulos e sobre a construção da classe dos retângulos (notas apresentadas na Educação e Matemática n.º 132 e n.º 133). No final da aula os alunos foram convidados a dizer o que tinham aprendido:

Duarte — *Aprendemos paralelologramos, e losangos e ...*

Leonor — *Hoje aprendemos paralelogramos.*

Daniela — *Hoje aprendemos a detetar os ângulos retos.*

Beatriz — *Descobrimos retângulos que não eram retângulos.*

Duarte — *Descobrimos retângulos especiais.*

Zé — *Descobrimos quadriláteros que não são quadrados nem retângulos.*

Hugo — *Descobrimos linhas retas e o detetor de ângulos retos.*

Inês — *O quadrado é um retângulo especial porque tem 4 ângulos retos.*

As intervenções destes alunos mostram a diversidade de sensibilidade aos vários aspetos que tinham estado presentes na discussão coletiva. O que se tinha passado na realização e discussão das tarefas, bem como estas intervenções dos alunos, determinaram o caminho que foi seguido para a conceção das tarefas subsequentes. A importância de delinear esse caminho é justificada por Confrey e Kazak (2006) quando afirmam que anos de investigação de inspiração construtivista levam a concluir que o sucesso da aprendizagem depende da realização de sequências de atividades, cuidadosamente escolhidas e aplicadas de modo flexível, que simultaneamente se adaptem às ideias dos alunos mas que conduzam também a barreiras críticas que devem ser ultrapassadas.

É importante registar que o percurso de aprendizagem trabalhado com estes alunos partiu das classes mais finas (retângulos e quadrados), experienciadas como subclasses da classe dos paralelogramos, mas de forma inversa à habitual, isto é, partindo da construção de quadrados e retângulos, figuras muito conhecidas dos alunos. Este caminho permitiu identificar duas barreiras críticas: a identificação de ângulos retos, como elemento decisivo para o reconhecimento de retângulos; a construção da classe dos retângulos, tendo como subclasse os quadrados. Estas barreiras estão associadas a outras: a construção da classe dos losangos, tendo como subclasse os quadrados; a classe dos paralelogramos como inclusiva para retângulos e losangos, e consequentemente para quadrados; a classe dos quadrados como interseção de duas classes, retângulos e losangos. Apesar destas várias barreiras e das ligações, o caminho seguido com estes alunos centrou-se na identificação de ângulos em quadriláteros e na ampliação do papel dos ângulos como elemento importante para conhecer propriedades dos quadriláteros. Ao estabelecer este caminho abriu-se amplamente o mundo dos quadriláteros e o desafio de os organizar em classes a partir de propriedades. Deste modo foi construída com estes alunos uma classificação dos quadriláteros quanto ao número de ângulos retos. Reconheço a esta classificação, não standartizada e em classes disjuntas, um interesse didático muito grande pelo desafio que coloca pois um dos subconjuntos possíveis, o dos quadriláteros com apenas 3 ângulos retos, é vazio.

Ao seguir este caminho centrado no trabalho sobre ângulos ficou claramente identificado um outro caminho possível centrado no trabalho sobre os lados e as suas relações, bem como ainda um caminho centrado no paralelismo dos

lados dos quadriláteros. Esta rede de caminhos possíveis e ligados uns nos outros ilustra a ideia inicial defendida nesta nota de que será a turma e o professor a delinear um percurso entre os muitos possíveis. Ilustra também a complexidade da rede de barreiras críticas subjacente à compreensão dos quadriláteros, das suas propriedades e da sua classificação hierárquica e inclusiva. Este é um dos assuntos mais interessantes mas também mais complexos da geometria. Pelo facto de trabalhar a partir de objetos matemáticos comuns para os alunos pode ser iniciado logo nos primeiros anos abrindo uma série de percursos didáticos possíveis. O recurso a um programa de geometria dinâmica pode facilitar a abordagem e tornar os caminhos possíveis ainda mais desafiantes, mais ricos e mais interessantes. Uma perspetiva construtivista da aprendizagem matemática terá sempre subjacente uma rede complexa de vários caminhos possíveis. Cabe aos professores, preferencialmente em conjunto nos contextos em que trabalham, conhecer esses vários caminhos e delinear os percursos para os seus alunos.

Registo assim o desejo de que tenhamos em breve para o ensino básico um programa de matemática ou orientações curriculares perspetivadas para o trabalho sobre objetos matemáticos diversos, com um ênfase destacado na resolução de problemas, no raciocínio matemático, na visualização e na comunicação, com indicações claras e assumidas sobre o recurso à tecnologia no seu pleno potencial no quadro do conhecimento didático atual.

Referências Bibliográficas

Confrey, Jere e Kazak, Sibel (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In Angel Gutiérrez e Paolo Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 305–345. Rotterdam: Sense Publishers.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 83–115. Rotterdam: Sense Publishers.

CRISTINA LOUREIRO

Geometria partilhada e socialmente construída (3)

Cristina Loureiro

Este apontamento tem por base um episódio ocorrido numa discussão coletiva numa sessão de formação de professores. O problema que lhe serve de mote surgiu a partir da identificação de questões de exploração e de desenvolvimento com base na análise de produções de alunos (fig. 1). Destaco este episódio porque eu própria não esperava o interesse da discussão vivida nem o seu efeito formativo.

Haverá algum quadrilátero com 3 ângulos obtusos?
Se sim é preciso construir um exemplo, se não é preciso demonstrar a impossibilidade da construção.

Estávamos a pensar sobre as possibilidades de exploração do conjunto de produções de alunos apresentado na figura 1, em que os exemplos tinham precisamente os ângulos retos destacados e pintados a vermelho. A discussão aconteceu a partir da sugestão de explorar ao máximo aquele conjunto de figuras.

Isabel — *A partir desse conjunto de quadriláteros podemos pedir aos alunos que assinalem os ângulos obtusos a amarelo e os agudos a verde.*

Manuela — *Já repararam se há algum em que o ângulo reto esteja mal marcado? Se isso acontecer temos um intruso neste conjunto de quadriláteros com pelo menos um ângulo reto.*

Luísa — *E já viram que os alunos vão ser confrontados com um ângulo sobre o qual não sabem que cor usar. É um ângulo côncavo.*

Isabel — *Pode ser, mas é uma espécie de ângulo obtuso. É um ângulo maior do que dois retos.*

Clara — *Eu a essa categoria de ângulos prefiro chamar ângulo superobtuso precisamente por ser maior do que dois retos. Decidimos dar esse nome numa turma em que ele surgiu numa atividade como esta.*

Dora — *É engraçado que é o desafio de descobrirem quadriláteros com condições, vários quadriláteros diferentes, e o estímulo da concorrência com os colegas que pode levar os alunos a serem criativos e a fazerem a figuras que habitualmente não lhes aparecem.*

Luísa — *Mas chama-se mesmo superobtuso? Nunca vi esse nome. Não está no programa.*

Manuela — *A designação formal é ângulo reflexo. Já tinha conversado sobre isso com a Clara. Lemos no «Caderno de apontamentos de geometria» da Educação Matemática n.º 134 em que se explica a razão de ser desse nome.*

Isabel — *Eu gosto dessa designação. Já repararam como ela é significativa para os alunos? E afinal há tantos quadriláteros que podem ter um ângulo destes.*

Esta discussão ajudou a reforçar o interesse na tarefa. É uma situação tão simples que parece pobre. Porém, a discussão faz-nos descobrir o seu potencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e leva-nos a pensar que, na geometria elementar, há características, propriedades e classificações dos quadriláteros que podem ser muito estimulantes para proporcionar situações de aprendizagem.

Luísa — *Outra ideia para pedir aos alunos era a organização desses quadriláteros em famílias a partir do número de ângulos retos.*

Isabel — *Sim, vão surgir 3 classes. Só com 1 ângulo reto, só com 2 ângulos retos e com 4 ângulos retos.*

Dora — *Dessa classificação salta logo a vontade de afirmar que não há nenhum exemplar para uma classe formada pelos que têm apenas 3 ângulos retos. E consequentemente a curiosidade de querer perceber porque é que isto acontece.*

Luísa — *O que eu gosto nesta organização em famílias é que podemos sempre tentar descobrir mais exemplares da mesma família.*

Manuela — *Concordo totalmente com a Luísa. É por isso que eu estou intrigada a tentar descobrir um quadrilátero com 3 ângulos obtusos. Neste conjunto não está nenhum. Será que é impossível de obter?*

Isabel — *Já repararam que o quadrilátero F quase que tem 3 ângulos obtusos. Mas talvez seja impossível. Quando uns ângulos do quadrilátero abrem mais os outros têm que fechar.*

Manuela — *Pois é, não podem abrir todos. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° e por isso não podem todos ser obtusos.*

Francisca — *E dá mesmo jeito sabermos que a soma é 360°. Estou desconfiada de que conseguimos obter um com 3 ângulos obtusos. Afinal 100 + 100 + 100 + 60 dá 360 e assim poderemos ter um exemplar com essa condição.*

Isabel — *Até parece que pode ser possível. Mas eu acho que não é. Estou aqui a experimentar construir um exemplo com barras articuladas. Quando abro mais os lados para ter os 3 ângulos obtusos fico a precisar de um quinto lado. Não se consegue. É mesmo impossível.*

Luísa — *Isto é mesmo desafiante. No geoplano não estamos a conseguir nenhum. Com as barras não estamos a conseguir e até pare-*

ce que estamos a mostrar a impossibilidade. Mas eu acho que os cálculos que a Francisca fez nos ajudam a duvidar. Vamos experimentar com papel, lápis, régua e transferidor.

Manuela — *Ora aqui está uma boa razão para eu ter que fazer uma construção rigorosa.*

Isabel — *Acabo de conseguir construir um com as barras articuladas.*

O geoplano e as barras articuladas são instrumentos limitados. A impossibilidade com estes recursos não garante a impossibilidade de existência de um exemplar com determinadas condições. No entanto, são suficientemente ricos para nos possibilitar um mundo bastante amplo de possibilidades. Para crianças pequenas, no 1.º ciclo, é desejável que estes materiais manipuláveis sejam usados na aprendizagem da geometria, mesmo quando começam também a usar programas de geometria dinâmica.

Manuela — *E já viram que há trapézios e quase-trapézios? Explorar os quase-trapézios é mesmo interessante pois leva-nos à discussão do que são retas paralelas e de como reconhecê-las. Li isso no «Caderno de apontamentos de geometria» da Educação e Matemática n.º 113.*

Isabel — *O trapézio N está numa posição pouco comum.*

Dora — *Este conjunto de figuras dá muito jeito. Vamos guardá-lo e para usar no próximo ano, tanto no 1.º como no 2.º ciclo.*

Luísa — *E também no 3.º ciclo. Os quadriláteros são um mundo. Tanta coisa interessante sobre eles que pode proporcionar aprendizagens significativas de geometria ao longo de toda a escolaridade. É realmente o raciocínio geométrico que podemos ajudar a desenvolver.*

Francisca — *E liga-se com outros assuntos. Agora apetece-me olhar para estes quadriláteros e descobrir se há alguns equivalentes.*

Isabel — *Aposto que sim. E já estou a retirar os que são congruentes.*

Francisca — *Parece-me que o C e o G têm a mesma área. E o J? E o G? E o P? Parecem todos ter o mesmo tamanho? Haverá algum com menor área que os outros?*

Manuela — *E também posso pensar em descobrir o que tem a maior área. Será o quadrilátero L?*

Clara — *E qual é o quadrilátero com a menor área que conseguimos construir no geoplano? Claro que é o quadrado de 1 por 1. E por isso mesmo é aquele que dá jeito escolher para unidade.*

Francisca — *Se escolhêssemos outro quadrilátero para unidade iríamos ter dificuldades na obtenção das áreas. A partir das áreas podemos entrar nos números racionais. Esta discussão pode ser interminável.*

Dora — *Temos ideias para todo os anos e para todo o ano. E estamos a conciliar aquisição de conhecimentos com desenvolvimento do raciocínio. Voltámos rapidamente ao programa do básico de 2007.*

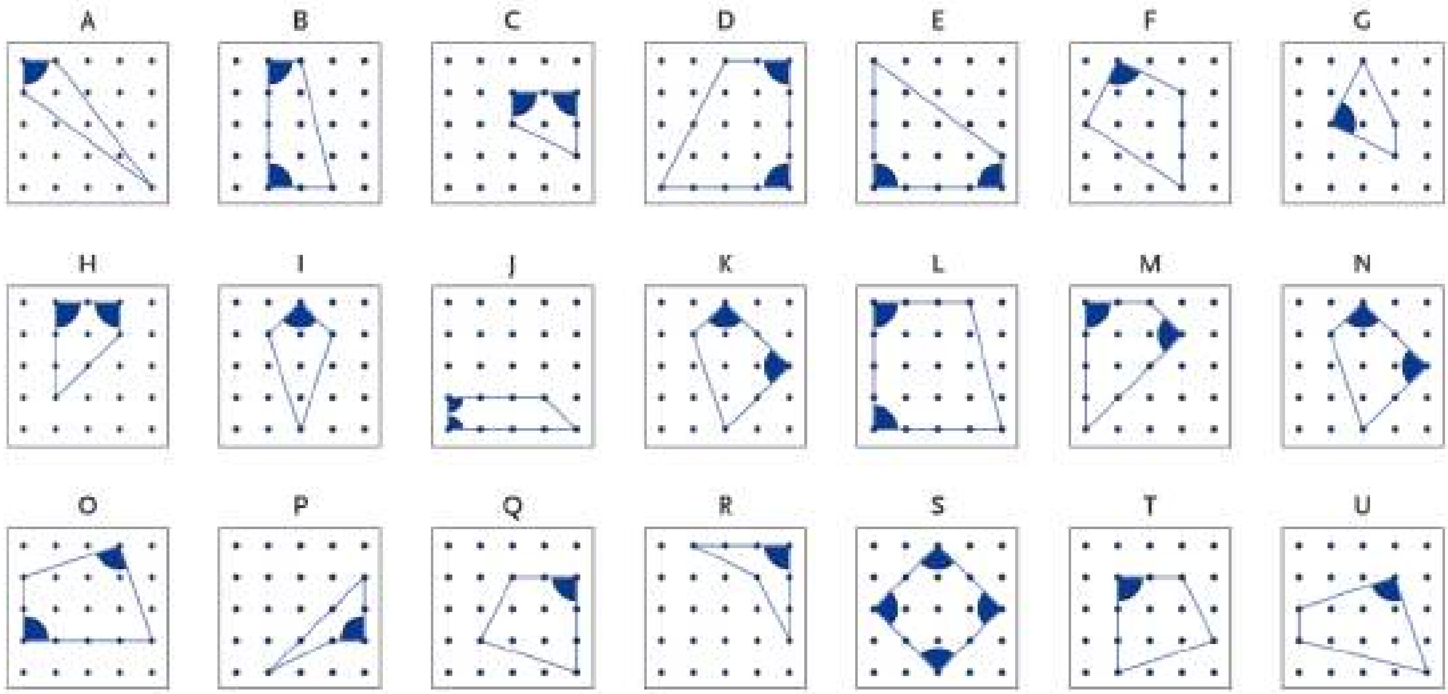


Figura 1

Geometria partilhada e socialmente construída (4)

Cristina Loureiro

Quantos caminhos há para ensinar geometria nos primeiros anos? Por onde começar? E depois de uma atividade bem sucedida que outra tarefa escolher? Claro que depende dos objetivos estabelecidos. Considero que a aprendizagem da geometria permite várias abordagens e muitos caminhos possíveis. As experiências que tenho feito, bem como as que tenho acompanhado, mostram isso mesmo. É por isso que aprecio especialmente esta ideia de geometria partilhada e socialmente construída que ocorre quando se dá espaço aos alunos para pensar e para mostrar e discutir como pensam, construindo assim ideias matemáticas abstratas de modo significativo.

Gosto de pensar na ideia de que o professor pode ir registando e organizando, ao longo da sua vida profissional, uma série de sinais de alerta verdes, isto é, boas ideias que vêm dos alunos e que lhe dão pistas potencialmente ricas para desenvolver o trabalho. Um desses sinais está presente no diálogo apresentado pela professora Graça Pereira (Pereira & Serrazina, 2015, 40-41) na descrição de uma experiência que fez com os seus alunos do 4º ano, com recurso ao GeoGebra para a resolução da maioria das tarefas propostas. Apresento um recorte de um dos muitos diálogos apresentados nesse artigo.

"Professora — *Fizeram diferente? Então vamos olhar para ali e vamos ver se há algum repetido.*

Maria — *Sim há. Há dois meios trapézios ...*

Professora — *Há dois quê?!*

Maria — *Aqueles que são metade do trapézio.*

Professora — *Metade do trapézio! Explica lá isso. O que é isso de meio trapézio? Explica lá.*

Maria — *É assim professora. É metade do trapézio.* (Maria foi mostrar o trapézio ao quadro)

Maria — *Este é o meio trapézio [Maria apontava o trapézio retângulo]*

Professora — *Porque é que dizes que é um meio trapézio?*

Luísa — *Porque se nós fizermos outro ao lado, forma um trapézio.* [Completou a Luísa]"

Como descreve a professora, a aluna desenhou a outra metade e obteve um trapézio isósceles. Há aqui um destaque significativo feito pela professora ao compreender o modo como estas duas alunas estavam a ver o trapézio retângulo, do qual não sabiam o nome, relacionando-o com o trapézio isósceles que já conheciam. Mas o diálogo continua com uma outra intervenção.

"Outro — *Professora eu cheguei à conclusão que não existe "meio-trapézio".*

Professora — *Tu achas que não existe "meio-trapézio"?!*

Outro — *É trapézio ou não trapézio.*

Luísa — *Nelson, nós estamos a chamar "meio-trapézio" porque se nós o partirmos em metade* [referia-se ao trapézio isósceles] *ficava como este* [referia-se ao trapézio retângulo] *e nós sabemos como se chama este."*

No artigo em referência, as autoras desenvolvem a análise dos trabalhos e diálogos focando-se na visualização, nas imagens prototípicas e nas propriedades dos quadriláteros. Para mim é um excelente artigo em que estão bem evidenciados e sustentados os raciocínios dos alunos e o modo como podem ir construindo a classificação hierárquica de quadriláteros. Sei que este episódio do "*meio trapézio*" foi muito significativo para a professora pois já conversámos sobre ele. Foi um sinal de alerta verde.

Estas alunas, que sentiam liberdade para pensar sobre as figuras e para dizer o que pensavam sobre elas, dão-nos uma pista muito interessante para refletir sobre os nomes das figuras geométricas e das relações que podem estar escondidas nas designações. Dão-nos também ideias para propor novas tarefas.

> *Porque razão um triângulo com um ângulo reto se chama triângulo retângulo? Há alguma relação entre um triângulo retângulo e um retângulo?*

Um triângulo retângulo não é um meio-retângulo, no sentido que estas alunas deram ao meio trapézio. E isto acontece porque a diagonal do retângulo só é eixo de simetria na situação particular do retângulo ser quadrado. Porém, é muito comum ser afirmado que a diagonal de um retângulo é um eixo de simetria (Fig. 1). A este propósito uma tarefa exploratória que pode ser produtiva é partir de um triângulo qualquer e explorar quais são as figuras que se obtém por reflexão de um dos lados do triângulo. É obviamente uma tarefa para ser realizada com o recurso a um AGD e em que se deve pedir sempre para que o aluno preveja o que vai acontecer antes de experimentar. A percentagem de previsões de obtenção de um retângulo quando o eixo de reflexão for o lado maior do triângulo será enorme.

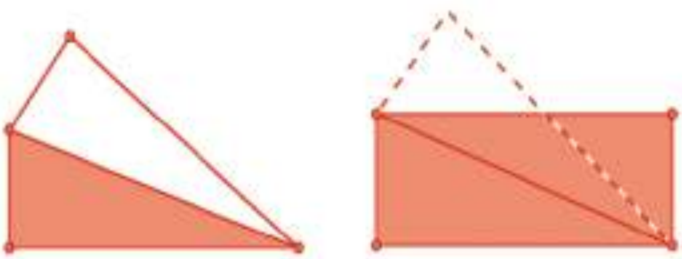


Figura 1

Porque razão um trapézio com um eixo de simetria se chama trapézio isósceles? Há alguma relação com o triângulo isósceles?

Porque razão um trapézio com um lado perpendicular aos dois lados paralelos se chama trapézio retângulo?

Uma tarefa exploratória que pode ajudar a compreender as razões destes nomes é partir de um triângulo qualquer e fazer um corte paralelo a um dos lados. Que figuras se podem obter, tendo em conta as caraterísticas do triângulo de partida? (Fig. 2)

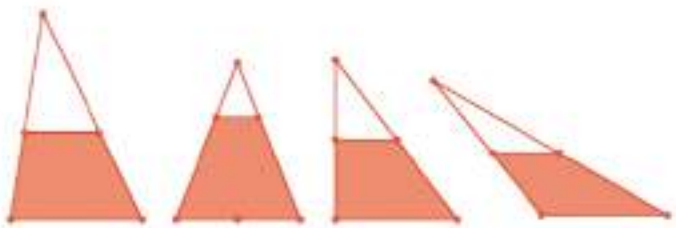


Figura 2

Na sequência de triângulos e quadriláteros da figura 2 faz sentido considerar todos os quadriláteros como trapézios porque têm um par de lados paralelos. No entanto, encarando o último quadrilátero isolado (Fig. 3) poucos alunos, e mesmo alguns professores, o identificarão como trapézio pois não encaixa bem na imagem prototípica que temos de um trapézio.

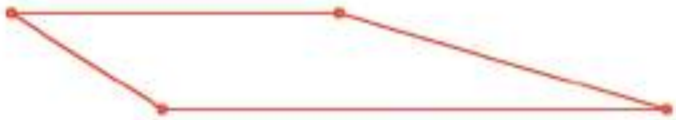


Figura 3

Como muito bem ilustra o trabalho da Graça Pereira, o trapézio é a classe dos quadriláteros menos intuitiva para os alunos considerarem como inclusiva para o paralelogramo. Por isso, ao longo da escolaridade, faz sentido que os alunos trabalhem com trapézios em atividades que se complementem.

Esta discussão sobre os nomes das figuras e as relações qu eles sugerem está ligada às questões linguísticas. Bartolini Bussi e Baccaglini-Frank (2015), discutem a relação entre retângulos e quadrados como o exemplo paradigmático do conflito entre a experiência percetual e as exigências teóricas da definição matemática. A propósito desta situação fazem uma referência ao modo como os chineses representam, em ideogramas, "quadrado" e "retângulo", mostrando que o "quadrado" é visto como "uma forma com lados iguais" e o retângulo como "a mesma forma com lados mais longos" (p. 392). Estas investigadoras evidenciam assim que para as crianças chinesas as duas formas linguísticas explicitam claramente uma relação entre as formas que facilita o entendimento da relação inclusiva entre as duas classes.

Vale a pena dar espaço aos alunos para falarem sobre as figuras que constroem. Descobriremos certamente designações claramente marcadas pelas suas experiências percetuais.

Referências Bibliográficas

Bartolini Bussi, Maria G. & Baccaglini-Frank, Anna (2015). Geometry in early years: sowing seeds for mathematical definition of squares and retangles. ZDM Mathematics Education (2015) 47:391–405. DOI 10.1007/s11858-014-0636-5

Pereira, Mª da Graça B. & Serrazina, Mª de Lurdes. (2015). Propriedades e relações entre quadriláteros: contributos do geoplano e do GeoGebra. *Quadrante*, *XXIV*(1), 30-57.

O desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial*

Cristina Loureiro

O raciocínio geométrico e espacial são indissociáveis, afirmação que justifica a escolha do título deste artigo, escrito com o propósito de apresentar as ideias poderosas que a investigação educacional tem trazido ao ensino da geometria. O ponto de partida é a ideia de que o raciocínio geométrico se constrói e que os alicerces desta construção são determinantes para toda a aprendizagem da geometria subsequente. A sua orientação é a procura da conciliação de um ensino da geometria baseado no rigor do raciocínio geométrico com o sentido das formas e das relações geométricas. Assim, embora as ideias apresentadas se foquem principalmente na educação básica, ele cobre toda a aprendizagem da geometria. A orientação do texto não enveredou por uma abordagem temática da geometria e não há referências a nenhum tema em particular. É um texto naturalmente incompleto em que procurei responder a um desafio de forma também desafiadora.

O texto está organizado em três pontos encadeados, sendo que o último constitui uma espécie de conclusão: I) Aspetos específicos do ensino e aprendizagem da geometria; II) Resultados decorrentes da investigação neste domínio; III) Desafios que se colocam hoje à investigação.

O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA — ALGUNS ASPETOS ESPECÍFICOS

O mundo da geometria está a mudar e os últimos anos têm dado um novo brilho a este campo do conhecimento matemático, afirma Joseph Malkevitch. Para este matemático, a geometria, que ao longo da história se desenvolveu entre o interesse na descrição do mundo físico e a construção de sistemas axiomáticos, passou hoje do ramo da matemática dedicado ao estudo das formas e do espaço, para o ramo da matemática que estuda os fenómenos visuais (Malkevitch, 2009).

Podemos considerar a geometria como uma rede complexa de conceitos, formas de pensar e sistemas de representação que são usados para analisar e imaginar ambientes espaciais (Battista, 2007). Michael Battista afirma que "a maior parte do raciocínio geométrico é espacial, considerando este tipo de raciocínio como a habilidade para ver, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações" (2007, p. 843). Este investigador destaca o papel das imagens ao serviço de outras operações mentais e afirma que o raciocínio espacial proporciona, simultaneamente, a entrada e os instrumentos para o raciocínio geométrico formal.

A geometria lida com objetos que podem ter uma existência física, com os quais podemos interagir, e estuda também os processos de interação com esses objetos. É decisivo ter presente que os objetos físicos, com existência palpável ou desenhos, são sempre representações dos objetos geométricos (figura 1). Esta caraterística específica do conhecimento matemático distingue-o de todas as outras formas de conhecimento, conferindo à visualização e à representação um papel essencial na compreensão matemática.

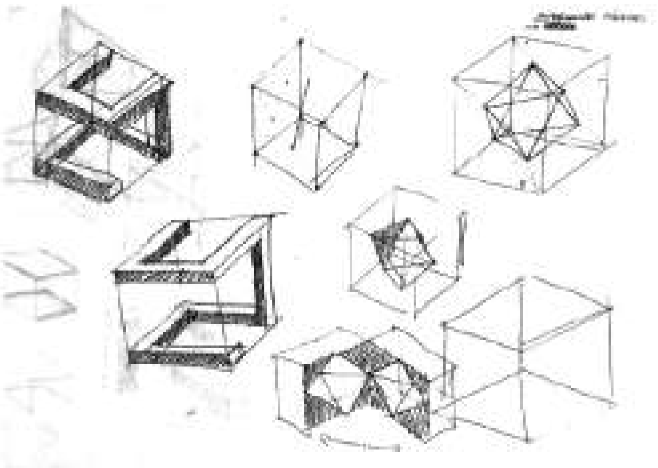


Figura 1. Desenho de um cubo, in "Desenho – Perceção e investigação Formal" de António Olaio, Coimbra 2016

O raciocínio espacial, nos níveis iniciais do raciocínio geométrico, está limitado ao nível superficial das ideias visuais. É reconhecido que um dos aspetos mais importantes da educação matemática das crianças é que estas desenvolvam, de modo crescente e integrado, representações que sintetizem imagens flexíveis e conceptualizações geométricas (Sarama e Clements, 2009), constituindo assim o seu reportório de imagens pessoal, progressivamente mais rico, diversificado, flexível e dinâmico. Além disso, deve ser dado ênfase aos processos pelos quais os alunos progridem da análise de figuras particulares para abstrações gerais de classes de figuras, bem como, aos mecanismos que permitem usar conceitos geométricos abstratos e formais para analisar figuras particulares (Battista, 2007).

Investigar sobre os vários tipos de raciocínio geométrico implica investigar sobre os vários aspetos do raciocínio espacial que lhe estão associados. Esta caraterística do raciocínio geométrico tem orientado o foco da investigação em geometria principalmente para os processos cognitivos. Embora a natureza social da aprendizagem seja hoje considerada como um dos aspetos mais relevantes no ensino, é reconhecido que poucos estudos têm examinado a aprendizagem da geometria nesta perspetiva. Mantém-se ainda hoje a afirmação de que os investigadores ainda não sabem o suficiente sobre como as várias componentes da prática social influenciam a construção pelos alunos dos conceitos e raciocínio geométricos, muito embora a investigação neste domínio tenha vindo progressivamente a integrar as dimensões de comunicação matemática e as perspetivas sociais da aprendizagem (Battista, 2007; Jones & Tzekaki, 2016).

É amplamente afirmado que a maior parte da investigação atual no ensino e aprendizagem da geometria está focada na utilização de ambientes computacionais (Battista, 2007; Jones & Tzekaki, 2016). Esta atração, a expressão é do próprio Battista, leva alguns autores a tentar compreender porque razão o ensino e a investigação em geometria abraçaram a tecnologia talvez mais entusiasticamente do que qualquer outra área da educação matemática. Um dos aspetos identificados está precisamente na riqueza que os ambientes de geometria dinâmica (AGD) proporcionam ao processo de fazer geometria, permitindo a cada um explorar ideias geométricas de modos diferentes, e indiscutivelmente melhores, do que explorações de papel e lápis, ampliando significativamente a habilidade para examinar grandes conjuntos de exemplos rigorosamente construídos, infundindo movimentos dinâmicos às investigações (Battista, 2007).

Interdependência entre raciocínio geométrico e raciocínio espacial, com envolvimento da visualização, necessidade de maior atenção ao papel dos aspetos sociais da aprendizagem e o recurso a ambientes digitais são três circunstâncias específicas da investigação sobre o ensino e aprendizagem da geometria, que ajudam a compreender a situação atual da investigação neste domínio.

IDEIAS DECORRENTES DA INVESTIGAÇÃO NO DOMÍNIO DA GEOMETRIA DETERMINANTES PARA O CURRÍCULO E PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Destaco quatro ordens de ideias chave como basilares para pensar o ensino da geometria hoje, seja do ponto de vista curricular ou das práticas de ensino: a) a estruturação do raciocínio geométrico; b) a ligação 3D-2D; c) as tarefas e os recursos, d) o desenvolvimento do raciocínio geométrico do professor.

O modelo de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio geométrico é considerado como o melhor e um dos mais significativos para descrever como é que os alunos constroem conceções matemáticas (Sfard & Cobb, 2014). Este modelo, desenvolvido a partir do fim dos anos cinquenta, tem como ideia base fundamental o pressuposto de que o raciocínio geométrico evolui segundo níveis de compreensão de complexidade crescente, passando sucessivamente desde o nível de visualização pela análise, abstração, dedução e rigor. Segundo a teoria de van Hiele, o progresso do raciocínio geométrico faz-se por níveis discretos, sequenciais e hierárquicos. Este modelo é consistente com a perspetiva construtivista da aprendizagem e constitui uma teoria útil para entender o progresso a fazer pelos estudantes à medida que o seu raciocínio geométrico se desenvolve (Battista, 2008).

Existe um consenso de que o objetivo destes níveis não seja o de classificar o raciocínio de cada estudante. Os descritores que caraterizam cada nível são úteis para identificar aspetos importantes do raciocínio geométrico e devem ser considerados como guias para o ensino que o professor se propõe fazer. Para desenvolver as capacidades de raciocínio inerentes a um nível é necessário ter em consideração o desenvolvimento de capacidades e conceitos inerentes a um nível anterior. Por exemplo, para compreender a classificação de uma figura geométrica (terceiro nível, abstrato/relacional) é necessário ser capaz de caraterizá-la tendo em conta as suas propriedades, descrevendo as relações espaciais entre as componentes da figura (segundo nível, descritivo/ analítico). É precisamente entre estes dois níveis que se situam os conceitos geométricos fundamentais da geometria elementar próprios da educação básica. Tem sido identificado pela investigação que muitos estudantes no final da educação básica não apresentam indicadores de desenvolvimento do seu raciocínio geométrico inerentes ao terceiro nível, e muitas vezes nem sequer inerentes ao segundo.

No que respeita aos níveis mais exigentes, facilmente se compreende que estejam relacionados com a escolaridade mais avançada. O quarto nível, dedução, é inerente à capacidade de elaborar uma sequência de afirmações que justifique uma conclusão como consequência dos dados de partida. E o quinto nível, rigor, inerente à capacidade de compreender o próprio sistema axiomático.

Num dos artigos mais recentes da autoria do próprio van Hiele, este investigador afirma que "pensar sem palavras não é pensar" e que o desenvolvimento do raciocínio geométrico depende mais do ensino e das experiências vividas do que da idade ou de qualquer outro tipo de maturidade do aprendente. Para van Hiele, o ensino deve promover o desenvolvimento do raciocínio geométrico através de sequências de atividades que possibilitem a integração progressiva de novas aprendizagens no conhecimento que o estudante já possui (van Hiele, 1999).

Ao longo dos anos este modelo tem sido estudado, melhorado, aplicado e desenvolvido, dando também origem a outros modelos. No entanto, as suas ideias fundamentais permanecem. O modelo de van Hiele é considerado ainda hoje como particularmente robusto e com impacto e influência na investigação e na aprendizagem (Sfard & Cobb, 2014). Segundo estes autores, a identificação do papel do ensino na mudança cognitiva e o foco na linguagem como o principal fator dessa mudança contribuem para a facilidade de conciliação deste modelo com as abordagens centradas no desenvolvimento da comunicação matemática.

Um dos desenvolvimentos do modelo de van-Hiele é o modelo de estruturação de Battista que constitui uma orientação muito útil do ponto de vista didático. Este investigador, a partir de experiências de aprendizagem realizadas com o recurso a AGD, desenvolve a ideia de que a aprendizagem da geometria tem por base o conceito chave de estruturação, sendo esta de três tipos: estruturação espacial, estruturação geométrica e estruturação lógico formal (2008, p. 138).

A estruturação espacial, entendida como a operação mental de construção e organização no espaço de uma forma ou objeto, ou de um conjunto de objetos, determina a perceção do objeto e integra a identificação de componentes do objeto e o estabelecimento de relações entre componentes e compósitos.

Por exemplo, o mesmo objeto geométrico, o paralelepípedo, admite mais do que uma estruturação espacial. Pode ser encarado como um sólido compacto em que se destacam seis faces retangulares, como uma pilha de retângulos todos iguais sobrepostos, como uma estrutura oca na qual se destacam as arestas, ou como uma superfície desmontável composta por três pares de retângulos iguais. Ao ler cada uma destas quatro descrições diferentes, propositadamente apontadas aqui sem qualquer representação visual associada, idealizamos uma imagem mental do paralelepípedo. No primeiro caso a melhor imagem é a de um sólido de madeira, no segundo, de uma resma de papel ou de um pacote de bolachas cream craker, no terceiro, de uma estrutura feita com palhinhas ou, mais sofisticadamente, com polydrons, e, no quarto, de uma caixa de cartão facilmente planificável. Qualquer destas estruturações espaciais do paralelepípedo nos remete para características distintas deste poliedro, todas elas importantes e necessárias para a sua conceptualização geométrica. Percebemos que a estruturação espacial do paralelepípedo não se esgota numa única imagem, física ou mental, e que todas elas poderão ter um papel distinto. Além disso, rapidamente também percebemos que há outras estruturações possíveis, por exemplo, a disposição de um conjunto de cubos todos iguais, dispostos em camadas iguais que são formadas pelo mesmo número de barras iguais.

A estruturação espacial é condição indispensável à compreensão e estruturação das medidas geométricas de comprimento, área e volume e das relações entre elas (Sarama & Clements, 2009).

A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial em termos de conceitos de geometria formal. Isto é, na estruturação geométrica de uma situação espacial, o sujeito usa os conceitos de geometria como ângulos, declive, paralelismo, comprimento, retângulo, sistemas de coordenadas e transformações geométricas, entre outros, para conceptualizar e operar sobre uma dada situação. Para que a estruturação geométrica faça sentido para alguém, ela terá que evocar uma estruturação espacial adequada.

Por exemplo, para relacionar os elementos faces, arestas e vértices de um paralelepípedo, a estrutura espacial a evocar deve ser a estrutura de polydrons. Para identificar o paralelismo das faces do paralelepípedo é significativo evocar uma pilha de retângulos justapostos.

Por fim, Battista considera a estruturação lógico formal, na qual se organiza os conceitos geométricos ou as estruturas geométricas num sistema e que especifica as relações que podem ser descritas e estabelecidas através de raciocínio lógico. Para chegar à estrutura lógica, o indivíduo deve organizar logicamente conjuntos de propriedades.

Seguindo o exemplo dos paralelepípedos, é nesta estruturação que encaramos o cubo como um paralelepípedo. Para o fazer percebe-se o sentido de evocar uma pilha de retângulos justapostos ou uma superfície desmontável formada por três pares de retângulos iguais e associar a qualquer destas imagens, pilha ou planificação, o quadrado como elemento da classe dos retângulos. Deste modo organiza-se a classe dos paralelepípedos numa perspetiva inclusiva, de classes hierarquicamente integradas em outras classes.

Este exemplo ajuda-nos a compreender a importância destes três tipos de estruturação e a utilidade destas ideias para a elaboração de tarefas de aprendizagem e para o planeamento do ensino. O exemplo ilustrativo do paralelepípedo foi escolhido intencionalmente por apontar um outro aspeto determinante na estruturação geométrica, a ligação 3D-2D.

Figura 2. Foto de escultura de arte pública de Artur Rosa (Lisboa)

"— São quadrados.
— Mas também retângulos.
— Há retângulos de grossuras diferentes, um é mais grosso, outro é médio e o outro é fino."

Estas afirmações de três crianças são um excerto de um diálogo, ocorrido no jardim de infância, a partir da observação da uma escultura composta por paralelepípedos de várias dimensões, com espessuras vincadamente diferentes, em que dois deles são aproximadamente cubos (figura 2). Este diálogo serve para introduzir a discussão do lugar relativo das figuras 2D e 3D, uma das questões que se coloca sempre na organização do ensino e aprendizagem da geometria. Deverão ser as figuras 3D encaradas primeiro que as outras, pelo facto dos objetos tridimensionais serem mais familiares para as crianças? Johnston-Wilder e Mason (2005) respondem a esta questão ao defenderem que tanto a geometria sólida como a plana devem ser ensinadas de modo integrado. O que é importante, é que o foco seja o raciocínio geométrico e este exige tarefas que envolvam os alunos em manipulações apropriadas, que proporcionem oportunidades para dar sentido às relações e para ver essas propriedades como invariantes, independentes de uma situação particular, e passar a raciocinar com base nessas propriedades.

Segundo Jones e Tzekaki (2016) a investigação tem mostrado que as dificuldades dos alunos em visualizar e explicar os seus raciocínios podem ser devidas à falta de experiências prévias e ao débil desenvolvimento de imagens mentais. Ideia que confere uma relevância especial à tridimensionalidade e à necessidade de a articular com a bidimensionalidade. Os objetos reais são maioritariamente tridimensionais e muitos desenhos a duas dimensões são representações de objetos tridimensionais. Ainda segundo estes investigadores, os resultados de estudos em que as tarefas espaciais combinam figuras geométricas 2D e 3D, apoiadas por ferramentas tecnológicas relevantes, contribuem para o desenvolvimento das capacidades e do conhecimento inerentes ao raciocínio geométrico e espacial, confirmando assim o importante papel dos ambientes tecnológicos no desenvolvimento deste raciocínio.

A perspetiva de estruturação que discutimos aponta para a necessidade de ir conjugando ao longo da escolaridade tarefas que combinem o desenvolvimento do raciocínio geométrico com o desenvolvimento do raciocínio espacial, associados sempre à visualização. E tendo também sempre presente a natureza abstrata dos objetos e conceitos geométricos e a necessidade de que eles e as ações sobre eles se sustentem num universo pessoal de imagens mentais ricas e dinâmicas. A investigação tem mostrado (Jones & Tzekaki, 2016) que a visualização é um requisito para demonstrar e resolver problemas em geometria. Tanto as representações visuais como o processo pelo qual estas se desenvolvem são indispensáveis para a obtenção de soluções e para construção de demonstrações. No entanto, estes investigadores consideram que ainda são limitadas as pesquisas que relacionam a visualização com o desenvolvimento de processos criativos, muito embora afirmem que os AGD e o recurso a tecnologias digitais oferecem novas possibilidades para o estudo da visualização de objetos geométricos.

Estas orientações conduzem-nos naturalmente a encarar o professor, o principal responsável por orquestrar o ensino. Para isso retomo o modelo de van Hiele, pois uma das suas caraterísticas mais significativas é que ele se aplica a qualquer aprendente. Este aspeto explica a importância que este modelo tem tido na compreensão do desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores e tem influenciado muita da investigação sobre a sua formação neste domínio. É por isso que é adequado comparar a investigação sobre o conhecimento geométrico dos professores recorrendo aos mesmos referenciais usados para compreender o conhecimento geométrico dos estudantes. Jones e Tzekaki afirmam que, "com base nos mesmos referenciais, a investigação sobre o conhecimento dos professores sobre diferentes ideias geométricas tem vindo a apresentar baixos níveis de compreensão geométrica" (2016, p. 139). Para estes investigadores esta conclusão aponta para a necessidade de melhorar a formação de professores e de realizar estudos com propostas que incluam tarefas relevantes, software específico e exploração de abordagens de ensino.

DESAFIOS QUE SE COLOCAM HOJE À INVESTIGAÇÃO NO DOMÍNIO DA GEOMETRIA

Um das mais importantes áreas de investigação, tanto para a prática de ensino como para a produção de conhecimento, está no estudo dos processos que permitem aos estudantes avançar da sua estruturação espacial pessoal, idiossincrática e auto inventada, para a estruturação geométrica formal (Battista, 2008; Jones & Tzekaki, 2016). Este avanço deve ser encarado de forma progressivamente refinada, com uma orientação recursiva e adaptada à acessibilidade dos conceitos geométricos apropriados em cada momento.

De certo modo é como se encarássemos a aprendizagem da geometria como um caminho a percorrer, com duas vias lado a lado, a da estruturação espacial e a da estruturação geométrica na qual está incluída a estruturação lógico formal. As duas vias vão estabelecendo cada vez mais ligações entre si. A via da estruturação espacial é uma espécie de alicerce da estruturação geométrica. Não faz sentido que os conceitos geométricos formais, com uma forte natureza abstrata, sejam trabalhados sem uma sólida estruturação espacial.

Ao defender a acessibilidade conceptual como dependente de uma boa rede de estruturação dos conceitos, tanto espacial como geométrica, que progressivamente se vai complexificando, Michael Battista defende também a dependência das interações sociais que se estabelecem na sala de aula à medida que o ensino proporciona os andaimes para a construção dessa rede. É precisamente ao professor que compete proporcionar as condições para a construção dessa rede de estruturação.

Este investigador evidencia o interesse em conhecer os tipos de salas de aula que promovam a valorização, pelos estudantes, de justificações cada vez mais sofisticadas em geometria, bem como os processos sociais que ajudam a desenvolver esses progressos. E preconiza a necessidade de investigação sobre como os fatores afetivos estão relacionados com a aprendizagem da geometria, nomeadamente o interesse em saber qual o sentido que os estudantes dão às ideias comunicadas por outros quando estas ideias são discrepantes das suas próprias ideias ou, sendo consistentes com as suas, são expressas numa linguagem ou raciocínio diferentes.

Podemos concluir que a investigação tem proporcionado ideias e instrumentos poderosos para melhorar o ensino e aprendizagem em geometria e, simultaneamente, que há muito por estudar e conhecer neste domínio. Apesar de no nosso país a investigação neste âmbito não ser a mais relevante ao nível de doutoramentos e de projetos de investigação institucionais ou de grupos de investigadores, este domínio de estudo tem tido uma presença significativa em projetos e dissertações de mestrado realizadas em Portugal. Este facto indicia seguramente interesse neste domínio e um potencial de trabalho colaborativo entre professores de matemática e educadores matemáticos.

Todo o raciocínio espacial e muito do raciocínio geométrico não são exclusivos da Matemática e destaco a sua importância nas Artes Visuais. Importa evidenciar este aspeto no momento atual em que se discute a flexibilidade curricular e em que se desenham condições mais favoráveis para o desenvolvimento de projetos curriculares interdisciplinares. Matemática e Artes Visuais são seguramente uma boa aliança.

Para terminar convido-o a fechar os olhos. Durante uns minutos pense apenas em paralelepípedos procurando exaustivamente percorrer o seu banco pessoal de imagens. Depois procure na internet imagens do trabalho do escultor português José Pedro Croft e desafie um colega de Artes Visuais para realizar um projeto de geometria, seja com crianças do pré-escolar ou com alunos do ensino básico ou secundário.

Referências

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In Frank K. Lester, Jr. (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 843-908. NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspectives*, (pp. 131-156). NCTM & IAP.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 109-149. 2016, Sense Publishers.

Malkevitch, J. (2009). What Is Geometry? In Timothy V. Craine e Rubenstien Rheta (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World. 71th NCTM Yearbook*: 3-16. Reston: NCTM.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. New York: Routledge.

Sfard, A & Cobb, P. (2014). Research in mathematics education: What can it teach us about human learning? In R. Keith Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences, Edition: Second*. pp. 545-564. DOI:10.1017/CBO9781139519526.033.

van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, fevereiro 1999*, 5(6), 310-316. NCTM.

Notas

* O título deste artigo coincide com o nome de um capítulo do Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, de 2007, da autoria de Michael Battista. Duas razões presidiram a esta escolha. A primeira é o reconhecimento de que raciocínio geométrico e espacial são indissociáveis, a segunda razão, mais afetiva, prende-se com a importância que reconheço às ideias deste educador matemático.

** Agradeço aos professores que, numa fase de finalização, leram este artigo e deram sugestões significativas para a sua melhoria.

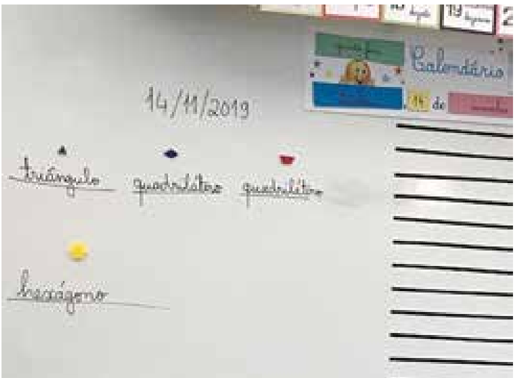
Relacionar, classificar e estruturar

Cristina Loureiro

Este texto tem como objetivo apontar um conjunto de ideias ligadas a estas três ações fundamentais na matemática. A motivação para o escrever decorre de um episódio recente passado numa sala de aula.

UM EPISÓDIO

Quantas vezes os professores falam em classificação mas estão a pensar apenas na identificação de caraterísticas das figuras e na atribuição de nomes? O episódio é simples, porém muito significativo. Tudo se passa numa aula de 2.º ano de escolaridade em que os alunos irão realizar uma tarefa com o objetivo de trabalhar a composição de figuras planas. A professora recorda e regista no quadro a "classificação" das figuras que vão usar. Embora referindo a classificação, o seu discurso reforça especialmente o nome de cada uma das quatro figuras que os alunos vão usar.



Para os alunos são apenas nomes, sem qualquer significado. Porém, reparando com atenção no que ficou escrito no quadro (triângulo, quadrilátero, quadrilátero, hexágono), podemos notar que os quatro nomes registados correspondem a três relações entre figuras de natureza distinta. Subjacente a estas designações, os triângulos estão a ser encarados como o conjunto das figuras com três ângulos, os quadriláteros como o conjunto das figuras com quatro lados e os hexágonos são vistos como um subconjunto do conjunto dos polígonos, o dos polígonos com seis lados.

RELACIONAR PARA CLASSIFICAR

Na geometria a presença de referências sobre relacionar e classificar é permanente. Estas duas palavras são tão comuns que, muitas vezes, já nem pensamos no seu sentido, nem em muito do que é inerente aos processos de relacionar e classificar. Embora esta reflexão esteja naturalmente focada na geometria e seja orientada para objetos geométricos, penso que poderia ser toda reescrita para outra área, com as devidas adaptações à natureza dos entes matemáticos envolvidos, os objetos de estudo.

Quando manipulamos, encaramos, analisamos ou organizamos objetos há três tipos de situações fundamentais para estabelecer relações:

– entre os elementos constituintes de um único objeto
– entre objetos distintos
– entre conjuntos de objetos

No primeiro caso, encaramos e atendemos à estrutura do objeto. No segundo caso atendemos a aspetos de ligação entre os objetos selecionados, identificando posições, semelhanças e diferenças. Os objetos podem ter sido selecionados por já formarem um conjunto ou então podemos concluir que o que os liga nos conduz a organizá-los num conjunto. Outra possibilidade é atendermos a ligações entre os objetos e fazermos separações, formando categorias ou classes. Como consequência criamos uma estrutura dentro do conjunto, estruturamos o conjunto. No terceiro caso comparamos estruturas de conjuntos e estruturamos a um outro nível. Estabelecemos ligações entre os conjuntos.

A apresentação destes três níveis, sem exemplos, parece estranha e um pouco árida. Quando encaramos uma figura, o retângulo por exemplo, estabelecemos relações entre os seus elementos constituintes (lados, ângulos, diagonais). Com base nestas ligações passamos a encarar o retângulo como uma estrutura geométrica.

Ao analisar e comparar muitos retângulos, destacamos este conjunto de quadriláteros de outros conjuntos de quadriláteros e passamos a encará-los com uma estrutura de classe, a classe dos retângulos. Nesta classe temos que incluir naturalmente os quadrados porque estes têm uma estrutura análoga à dos retângulos, embora mais rica. Ao estabelecer esta relação de inclusão da classe dos quadrados na classe dos retângulos estamos já a estabelecer ligações entre as duas classes. Criamos por isso uma nova ordem de estrutura. Continuamos a estruturar, mas ao nível da estruturação lógico-formal.

Estas ideias não são novas. No entanto, continuamos a encontrar estudantes futuros professores ou educadores, e também muitos professores, para quem os raciocínios que estão subjacentes a estes tipos de estruturação parecem novos e totalmente estranhos. Muitas vezes até, estas considerações provocam desconfiança por parte dos professores.

Na geometria há uma estreita relação entre o estabelecimento de relações entre os elementos constituintes dos objetos, as relações entre os objetos e as relações entre os conjuntos de objetos. Todos estes tipos de relações contribuem para a classificação dos objetos geométricos. E classificamos os objetos geométricos porque isso nos ajuda a encará-los de forma organizada e podemos, assim, compreender melhor as definições, bem como a organização lógico formal da geometria. Muitos autores afirmam que os processos de classificação são uma das componentes básicas do raciocínio matemático.

No que respeita a classificações em geometria também é importante evidenciar três níveis de classificação, de complexidade crescente, e que interessa destacar:

Nível 1 — A classificação corresponde à classificação direta dos objetos e em que estes valem por si. Podemos considerá-la como a classificação simples de objetos.

Nível 2 — Os objetos já representam classes. Podemos considerá-lo como um nível de classificação de classes de objetos. Os objetos que representam as classes são protótipos que exemplificam as propriedades dos objetos de cada uma das classes.

Nível 3 — Para além de os objetos representarem classes, a classificação ocorre segundo aspetos de invariância dos objetos no que respeita às transformações geométricas. Aliás, é essa invariância que carateriza a classe. Neste caso continuamos a ter uma classificação de classes de objetos. Os exemplos mais comuns do terceiro nível são as classificações dos frisos e padrões geométricos.

A consciência destes três níveis de classificação é importante para perspetivar atividades de classificação na aprendizagem e ter em conta a complexidade do raciocínio matemático ao classificar. A atividade matemática de classificar deve percorrer toda a aprendizagem da matemática. Muitas vezes considera-se que basta fazer classificações nos primeiros anos para que se aprenda a classificar.

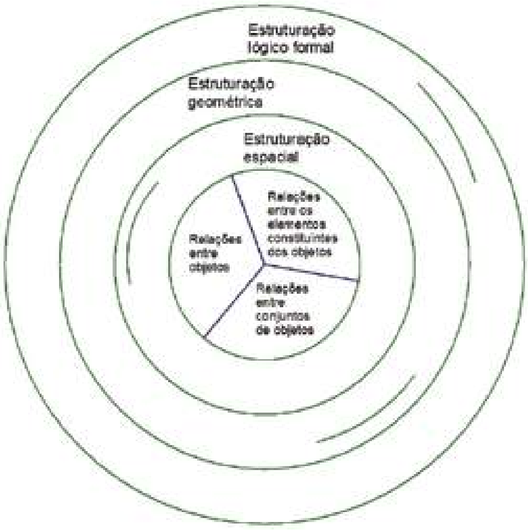
... E ESTRUTURAR

Tenho um apreço especial pela ideia, defendida por vários especialistas de ensino da geometria, que afirmam que "toda a geometria é, em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação" (Battista et al., 1998, p. 531).

O reflexo desta orientação no ensino da geometria é o de uma construção consistente, progressivamente mais complexa, mas em que a estruturação está sempre presente. Para as crianças e jovens as estruturas podem estar ocultas, mas para os professores e educadores é desejável que elas sejam conhecidas.

Nem sempre é fácil organizar todas estas ideias. E também aqui os três níveis de estruturação de Battista nos ajudam (Battista, 2008). Organizei por isso um esquema que associa as três ideias atrás referidas sobre relações com os três níveis de Batista: estruturação espacial, estruturação geométrica e estruturação lógico-formal. Neste esquema, os três tipos de relações e os três níveis convivem.

Do estabelecimento de relações, de que decorrem classificações progressivamente mais complexas, resulta a estruturação da geometria em três componentes interligadas e também de construção espiral.



O objetivo deste esquema é associar numa única imagem as ideias sobre relações e estruturação apresentadas. Espero que seja encarado como um esquema que ilustra a convivência das ideias expressas e o dinamismo das ligações que existem entre elas. Desde as primeiras idades, quando se realizam as primeiras vivências de estruturação espacial, que se inicia a espiral de construção da estruturação geométrica e da estruturação lógico formal. Nem sempre tive estas ideias tão claras como passei a ter depois de analisar e pensar sobre experiências que acompanhei, no âmbito da realização de atividades de geometria e de artes visuais, com crianças pequenas e da responsabilidade das suas educadoras de infância.

Referências

Battista, M. (2008). Development of the shape makers geometry world. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - *Cases and Perspectives*, (pp. 131-156). NCTM & IAP.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

ARTE E MATEMÁTICA

ÍNDICE

Tecnologia, Arte e Geometria

Cristina Loureiro

Este texto não está ligado a nenhuma experiência de ensino, não tem nenhuma sugestão didática ou profissional, é apenas uma oportunidade para refletir sobre estes três domínios e partilhar algumas ideias.

Há algumas caraterísticas próprias da utilização da tecnologia. Destaco três: repetição, variação e dinamismo. O recurso a instrumentos tecnológicos permite-nos repetir, rapidamente e sem esforço, uma grande multiplicidade de objetos. Esta repetição pode ser operada sobre ou a partir de representações dos objetos ou sobre objetos com existência física tangível. O avanço é de tal ordem que hoje reproduzimos facilmente objetos 3D pensados a partir das suas representações num ecrã. As possibilidades de variações sobre um objeto são também múltiplas, incluindo variações *ad-hoc*, sem qualquer regularidade ou critério, até variações reguladas por condições de múltipla natureza. O dinamismo advém da possibilidade de constituir variações interligadas e poder assim estudar as invariâncias decorrentes e simular até à exaustão as consequências dessas variações.

Estas três ideias, repetição, variação e dinamismo, são tão fortes e estão de tal forma já integradas nos nossos modos de raciocínio que influenciam sobremaneira o modo como olhamos para objetos que foram construídos sem o recurso à tecnologia. Refiro-me a objetos artísticos e destaco alguns com que me cruzei recentemente e que me deixaram a pensar (figuras 1 e 2). Todos eles são também objetos com valor geométrico. A figura 1 é a fotografia de uma composição em guache e tinta da china sobre papel, a figura 2 a fotografia de uma composição de relevos com recurso a recortes em plástico. Ambas recorrem repetidamente à reflexão, parecendo a primeira um exemplo de um estudo para a composição dos relevos como o da figura 2. Ambos os trabalhos são do artista português José Escada.

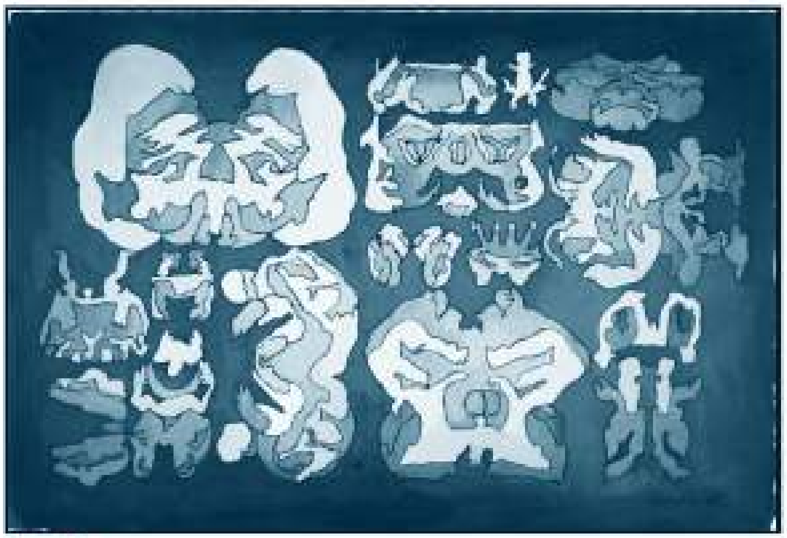


Figura 1

Figura 2

Nos anos sessenta, José Escada elaborou muitos relevos desta natureza com recurso aos mais diversos materiais. "Estes trabalhos constroem-se a partir de módulos retangulares onde se inscrevem, recortadas até três elementos por módulo, formas-figuras dobradas simetricamente, num sistema positivo-negativo (cheio-vazio) interdependente" (Museu Calouste Gulbenkian, 2016, p. 9). Estes trabalhos são classificados como Metamorfoses e considera-se que constituem uma abordagem à tridimensionalidade.

O que faria José Escada hoje com o recurso à tecnologia? Teria explorado outras possibilidades, fazendo composições mais complexas com recurso a outras transformações geométricas e à sua composição? Até onde iria a sua pulsão artística tão carregada de repetição, variações e dinamismo?

Artur Rosa criou esculturas belíssimas e composições planas nas quais se encontra repetição, variações e dinamismo (figuras 3 e 4).

É impossível observar em paralelo estas duas obras de Artur Rosa e não as relacionar. As mesmas questões sobre o recurso à tecnologia, colocadas a partir das obras de José Escada, poder-se-iam colocar a propósito dos trabalhos de Artur Rosa. Talvez aqui de uma outra forma. Como foram criadas estas obras sem o recurso aos instrumentos tecnológicos de que hoje dispomos? Seguramente que Artur Rosa usou matemática para criar objetos artísticos como aqueles que as figuras mostram. José Escada poderá ou não ter usado, mas deu sentido à simetria para os criar. Nos trabalhos de ambos pode apreciar-se a geometria com vida, tangível e em movimento.

Os exemplos são imensos. Mesmo sem sair da esfera dos artistas plásticos portugueses, em obras de muitos nomes encontramos repetição, variação e dinamismo. Como se estas três caraterísticas fossem próprias da criação plástica. Deixo por isso uma pergunta. O que poderemos aprender e ensinar sobre geometria e sobre a utilização da tecnologia a partir da criação artística plástica?

Ao fazer esta pergunta situo-me na educação básica. Penso que ao nível do secundário há já respostas e experiências muito interessantes, nomeadamente nas escolas artísticas e em muitos artigos divulgados na E&M.

Figura 3

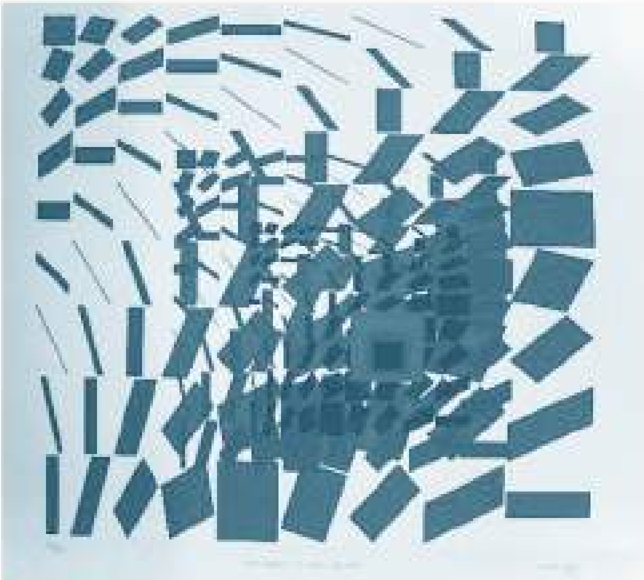


Figura 4

Referências Bibliográficas

Museu Calouste Gulbenkian (2016). *Eu não evoluo, viajo – José Escada*. Coleção Moderna. Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Sousa, Pedro Miguel Pereira (2008). A arte op na arte pública em Portugal. Tese de mestrado, Repositório da Universidade de Lisboa, Faculdade de Belas Artes. http://hdl.handle.net/10451/639

Experiências de simetria com crianças

Cristina Loureiro

Quando damos oportunidade às crianças de nos dizerem como pensam ou como vêm os objetos elas surpreendem-nos. Infelizmente muitas vezes estamos tão obcecados com os conteúdos previstos para ensinar que não lhes proporcionamos essas oportunidades. Perdemos assim a possibilidade de repensar os conteúdos que queremos ensinar, as tarefas a propor e as estratégias a seguir. A geometria é uma das áreas da Matemática onde a Arte nos pode ajudar a melhorar os conteúdos de aprendizagem, organizando experiências de aprendizagem ricas, significativas e poderosas.

O trabalho que agora apresento e discuto foi realizado numa experiência que decorreu num Jardim de Infância, dinamizada por uma educadora[1], no âmbito do Projeto MARTE1618 da Escola Superior de Educação de Lisboa. Este projeto de investigação tem como objetivo experimentar e estudar atividades que envolvem simultaneamente aprendizagens matemáticas e de educação artística. Os experimentadores participam no projeto a partir da realização de ações de formação.

TAREFA PROPOSTA

Cada criança teria de fazer 4 quadrados iguais. Escolheriam os materiais que quisessem (botões de vários tamanhos, pedaços de tecido de cores, pedaços de cartão canelado). No caso de optarem por um material com cor, só poderiam optar por uma cor.

Depois dos quadrados feitos, as crianças iriam ser distribuídas por equipas e realizar uma sequência. Do trabalho conjunto culminaria uma obra de arte, uma composição coletiva para a qual só seriam escolhidos 3 quadrados de cada criança. É por esta razão que a obra coletiva foi nomeada pelas crianças como "Quadrados coloridos menos um" (figura 1)

Esta atividade foi realizada na continuidade de outras atividades em que as crianças tinham observado obras de Cargaleiro e conversado sobre elas. Nestas obras o artista recorre a sequências de elementos diversos. As crianças tinham também construído sequências de objetos com materiais diversificados antes de realizarem esta atividade individual de construção de 4 quadrados iguais. Para a composição coletiva final não havia qualquer critério matemático para as sequências dos quadrados construídos individualmente. O objetivo foi exclusivamente estético.

Como afirma a educadora no seu relatório da formação: "Todos os materiais colocados à disposição das crianças tinham como cor o castanho claro ou bege e as três cores primárias: amarelo, azul e "magenta". Ao escolher os materiais teriam de ter atenção que tudo o que escolhiam tinha de ser multiplicado por 4, nomeadamente no tamanho, cor, textura e forma. Os botões eram muitos, de diferentes tamanhos e

1Educadora Mª Leonor Henriques, Agrupamento de Escolas de D Maria II, JI do Cacém, Sintra.

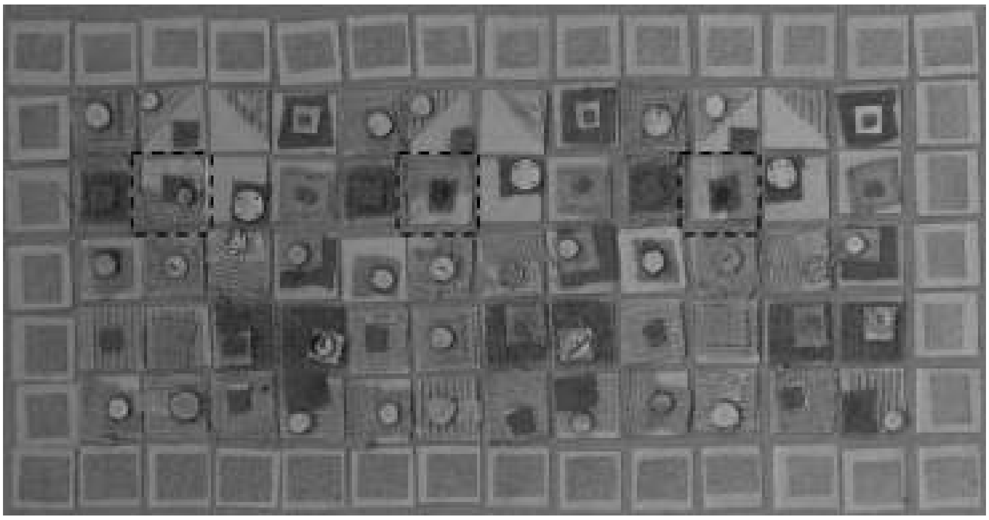


Figura 1. Fotografia de composição realizada numa sala de jardim de infância, "Quadrados coloridos menos um". Destaque na composição de elementos individuais relacionados através de rotações

sendo do mesmo tamanho tinham um número de furos em quantidades diferentes.As crianças perceberam o que lhes foi pedido e realizaram a atividade com empenho, interesse e divertimento. Não apresentaram dificuldades na realização da atividade individual. A composição coletiva foi realizada num momento posterior. Depois da obra esteticamente organizada foi analisada matematicamente ainda em coletivo".

É durante esta discussão coletiva que os raciocínios das crianças sobre simetria se revelam, proporcionando grande admiração à educadora que não estava à espera destas ideias nem do impacto que a composição coletiva tinha dado às componentes individuais relativamente à simetria de rotação.

> Uma criança reparou que um dos seus quadrados não estava na posição certa. A educadora respondeu que ela estava correta, no entanto este trabalho era uma obra de arte e ela poderia colocá-los em posições diferentes pois seria mais dinâmico. Então, colocou os três quadrados em posições diferentes, outra criança fez o mesmo com os seus que estavam todos na mesma posição. Uma terceira criança observou que mesmo rodando o seu quadrado, ele ficaria sempre igual pois estava colado no meio. Uma das crianças poderia ter rodado os seus, mas preferiu não o fazer deixando-os ficar a todos na mesma posição.
>
> (Excerto de relatório de educadora)

Para melhor ilustrar o que as crianças viram destacamos e analisamos alguns elementos individuais. Cada grupo de 4 composições quadradas, em que isoladamente os elementos eram iguais, permitiu destacar diferenças na sua simetria intrínseca quando colocados na composição coletiva. Na figura 2, as duas composições elementares têm simetria de rotação de ordem 1, e por isso podem ser colocadas em 4 posições distintas que correspondem à rotação de ordem 4 da figura original. Foi num destes casos que uma criança não quis aplicar a rotação ao seu quadrado base e, por isso, o deixou sempre na mesma posição. Na figura 3, cada uma das duas composições elementares têm simetria de rotação de ordem 4 e, por isso, seja qual for a posição em que o quadrado base for colocado o resultado é sempre igual.

A maior parte das crianças fizeram composições de base quadrada com simetria de ordem 1, pois ao colocarem os vários elementos quebraram a simetria do quadrado. No entanto, algumas crianças fizeram composições com simetria de ordem 4 como vimos. Não houve, mas poderia ter havido também, composições com simetria de rotação de ordem 2 (figura 4). Os materiais que a educadora deu às crianças abriam estas três possibilidades e essa intencionalidade foi muito importante. Embora os objetos colocados à disposição das crianças constituíssem elementos bastante irregulares, devido aos materiais de que eram feitos, tinham formas base muito regulares e carregadas de simetria (botões circulares, quadrados e retângulos de tecido, triângulos retângulos de cartão).

Esta experiência mostra que a ligação entre a educação artística e a matemática permite desenvolver desde muito cedo o conceito de simetria geométrica na sua mais ampla aceção e com toda a sua riqueza. Aproveitar e explorar a simetria nas figuras geométricas é precisamente o que têm feito os artistas plásticos ao longo dos tempos. No projeto MARTE1618 temos vindo a identificar aspetos muito interessantes no âmbito da Geometria e da Combinatória que abrem novas possibilidades de atividades exploratórias e de resolução de problemas ligadas a atividades de Educação Artística.

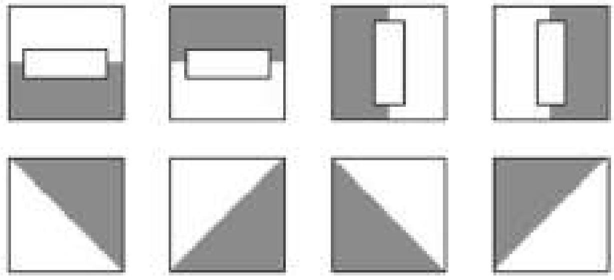


Figura 2

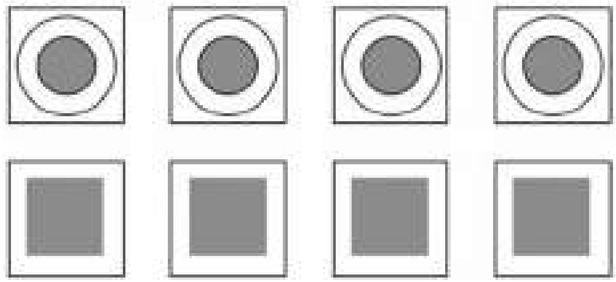


Figura 3

A educadora que fez esta experiência escreveu também no seu relatório que "As crianças pensaram, aprenderam matemática, divertiram-se e criaram! Não será isto que se pretende de um jardim-de-infância?" Eu acrescento, não será isto o que se pretende da escola em qualquer nível de escolaridade na sua vertente de educação matemática?

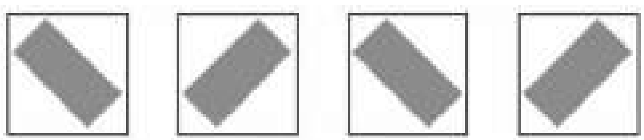


Figura 4

Referências Bibliográficas

Loureiro, C., Guerra, C., Castro, S. & Pereira, T. (2016). Contributos para uma interdisciplinaridade entre Matemática e Literacia Visual. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos, Livro de Atas do EIEM 2016 - Encontro em Investigação em Educação Matemática - Recursos na Educação Matemática (EIEM 16, 19-20 Novembro 2016) (pp. 99-112), Universidade de Évora. ISSN: 2182-0023.

Por onde começar na geometria? Porque não pelos paralelepípedos?

Cristina Loureiro

O currículo de geometria pode ser um caminho com várias entradas e percursos alternativos. Não há uma maneira única de começar nem de desenvolver os conhecimentos de geometria e as formas de pensar próprias desta área.

No projeto MARTE1618, em que nos propomos experimentar e estudar atividades que envolvem simultaneamente aprendizagens matemáticas e de artes visuais, temos vindo a experimentar várias formas de trabalhar conceitos de geometria, desde o jardim de infância, a partir de atividades com grande significado para as crianças, muito envolventes e criativas. A grande vantagem do jardim de infância relativamente a outros ciclos é que neste nível o currículo é muito aberto, com uma formulação de orientações que o educador pode gerir de acordo com o grupo de crianças com quem está a trabalhar (http://www.dge.mec.pt/ocepe/). Além disso, não há manuais adotados e, por isso, cada educador aproveita livremente a flexibilidade do currículo e constrói percursos alternativos. É importante também destacar que o educador trabalha geralmente com grupos de crianças muito heterogéneos, proporcionando-lhes experiências comuns. Dito de outro modo, ao grupo de crianças é proposta a mesma tarefa, sabendo de antemão o educador que alguns irão mais longe do que outros. Este facto aponta por isso para a formulação de tarefas abertas que permitam várias soluções e vários níveis de consecução.

No âmbito deste projeto têm sido realizadas várias atividades que têm como ponto de partida os paralelepípedos. Neste artigo descreve-se uma sequência de atividades iniciada com o objetivo de trabalhar o conceito de oposto. A descrição, feita com base nas palavras da educadora[1] que a realizou, está estruturada em tarefas e comentários. No final apresento uma reflexão final sobre o trabalho realizado.

INTRODUÇÃO DA TAREFA

"Nós estávamos a trabalhar os opostos e pensei trabalhá-los recorrendo à geometria. Para isso pedi às crianças para trazerem caixas que utilizavam lá em casa.

Iniciou-se assim uma conversa sobre as caixas partindo da sua observação. Os primeiros comentários foram sobre o produto que estava nas caixas. Mas agora nós iríamos olhar para elas com um olhar matemático. O que é que nós descobríamos em termos de matemática naquela caixa? Então eles descobriram que a caixa tinha retângulos. Tinha um retângulo à frente, e outro retângulo ao lado, e outro retângulo atrás e outro retângulo do outro lado. Descobriram também que os retângulos não eram todos do mesmo tamanho naquela caixa que estávamos a observar que era uma caixa de cereais.

E depois perguntei, então não veem mais nada?

Eles descobriram que também tinha outro retângulo em cima e outro retângulo em baixo.

Depois eu procurei uma que tivesse um quadrado, um paralelepípedo com quadrados. Então e nesta, que diferença é que nós vemos?

Descobriram que tinha 4 retângulos e tinha 2 quadrados, um em cima e outro em baixo. E então foi aí que eu percebi a importância do dentro, porque o quadrado de cima e de baixo dá para pôr coisas lá dentro. Eles percebem o volume através daquilo que se coloca dentro das caixas."

1ª TAREFA PROPOSTA

"O que lhes foi proposto era um trabalho difícil. Era abrir a caixa e na parte que não era colorida eles fazerem padrões exatamente iguais nos dois retângulos que eram opostos. Se tivessem dúvidas poderiam pegar na caixa, voltar a montá-la e descobrir qual era o retângulo oposto (Fig. 1). Cada um escolheu a sua caixa, poderiam escolher o padrão que quisessem. Também nos padrões não deveriam escolher padrões simples, como por exemplo risquinhas, deveriam fazer coisas mais complexas."

Comentário após a 1ª atividade

"Depois de completada a tarefa, fomos ver se toda a gente tinha cumprido a regra, se os opostos estavam mesmo iguais. Descobrimos que havia um que não estava. Descobrimos os padrões que eram iguais, porque alguns tinham feito padrões iguais. Alguns tinham usados cores iguais, mas com formas

[1] Educadora Mª Leonor Henriques, Agrupamento de Escolas de D. Maria II, JI do Cacém, Sintra.

diferentes. Por exemplo, a Yara tem riscas a azul e amarelo, o David tem círculos a azul e amarelo.

Estivemos a observar as caixas e a observar os padrões. Depois tivemos que decidir o que faríamos com as nossas caixas, que tipo de construção iríamos fazer. E eles decidiram fazer a turma, já que cada um tinha a sua caixa iríamos fazer a nossa turma."

Figura 1

2ª TAREFA PROPOSTA

Esta tarefa foi no âmbito das artes visuais. As crianças desenharam olhos e bocas e cortaram cartão para os cabelos e nariz. Cada um ficou com o seu boneco feito.

3ª TAREFA PROPOSTA

"Depois de cada um ter o seu boneco feito fomos então desenhar. Cada criança tinha que desenhar em 2 planos, de frente e de lado."

Comentário após a 3ª atividade

"No plano de frente ninguém teve dificuldade. No plano de lado já não. Há meninos que conseguiram fazer os 2 planos, houve meninos que fizeram o plano de frente e de lado e o que imaginaram que estava do outro lado. E houve meninos que não os colocaram juntos, portanto fizeram separados, apesar de os estar a ver juntos (Fig. 2 e 3). Depois eu alertei para o facto de que quando estavam a desenhar a caixa que se pudesse ver a parte de cima, era importante a parte de cima porque aí é que faz a grande diferença do volume. Eles aí tiveram muita dificuldade como é que desenhavam em perspetiva. Eles tiveram muita dificuldade em desenhar em perspetiva e em ver como é que aquilo tudo funciona. Eles até conseguiram sentir na mão, mas depois no desenho tiveram muita dificuldade."

Figura 2

Figura 3

4ª TAREFA PROPOSTA

O trabalho culminou com a realização de uma composição coletiva a que foi dado o nome de "A cidade da amizade" (Fig. 4).

REFLEXÃO FINAL

Com base nesta descrição coloco algumas ideias para reflexão.

1) A sequência de tarefas, umas de natureza matemática, outras de artes visuais e a sua articulação conduziram à criação de um produto final coletivo, cheio de significado para o grupo de crianças. No percurso seguido, cada criança realizou atividades individualmente, ao seu ritmo e de acordo com as suas capacidades.

2) O sentido que as atividades tiveram para as crianças. Há uma motivação intrínseca para cada uma das atividades e que tem como ponto de partida o conhecimento das crianças e que as envolve. O educador ou professor habilmente parte desse conhecimento e cria condições para que as aprendizagens ocorram.

Figura 4

3) A apropriação que as crianças fizeram dos paralelepípedos: forma das faces; faces opostas e iguais duas a duas; relação entre a forma tridimensional e a sua planificação; representação dos paralelepípedos através de vistas. É de destacar o facto de o foco ter estado nos paralelepípedos e de eles serem encarados de diversos pontos de vista, mas sempre serem com sentido.

4) O saber da educadora que conduziu o processo e que, ao partilhar a experiência e ao refletir sobre ela, nos interroga sobre os aspetos matemáticos envolvidos neste trabalho. Ficaram vários aspetos em aberto, nomeadamente o estudo sobre a forma como as crianças encararam duas formas distintas de representação no plano de objetos tridimensionais: as vistas e a representação em perspetiva. Esta, embora não tenha sido trabalhada está claramente presente nas palavras da educadora.

5) Considero também importante registar que inicialmente eu não valorizei a ideia da educadora relativamente à utilização das caixas para decorarem as faces com padrões. De certa forma até a desvalorizei. Refletindo após esta descrição reconheço o sentido que a educadora conseguiu que as crianças dessem às faces opostas através da realização desta atividade. Destaco também a possibilidade que lhes deu de irem verificando se o seu trabalho estava a cumprir os critérios através do montar e desmontar das caixas.

Como ligar 2D com 3D? Sólidos em camadas, uma possibilidade inesperada e fascinante

Cristina Loureiro

"A perceção que as crianças têm do mundo que as rodeia não é bidimensional. A nossa perceção e vivências é a várias dimensões. Se estamos a trabalhar com crianças de idade pré-escolar que descobrem e apreendem o mundo que as rodeia através da experimentação tem todo o sentido explorar e aprender neste enquadramento" (reflexão de uma educadora de infância participante no projeto MARTE1618).

Acrescento a esta reflexão que há muito tempo se discute sobre as formas de abordagem da geometria elementar. É consensual que esta deve ser feita ligando a bi e a tridimensionalidade, seja através das várias formas de representação de objetos geométricos e do desenvolvimento da visualização, seja do conhecimento das propriedades das figuras a duas e a três dimensões, das relações entre elas, bem como do estudo da simetria na sua mais ampla aceção.

Como já escrevi na nota anterior, o currículo de geometria pode ser um caminho com várias entradas e percursos alternativos. Não há uma maneira única de começar nem de desenvolver os conhecimentos de geometria e as formas de pensar próprias desta área. Destaco agora precisamente a continuidade que esta educadora deu às atividades realizadas pelas crianças e descritas na nota anterior a esta ("Por onde começar na geometria? Porque não pelos paralelepípedos?"). Esta descrição é feita com base nas palavras da educadora[1].

> "Após a concretização do nosso projeto da decoração das caixas foi proposto às crianças que com um dos materiais que temos na sala construíssem um paralelepípedo. O material usado foram cubos de encaixe. As crianças começaram por construir um paralelepípedo estreito e depois de compararem com a caixa foram acrescentando mais peças dando mais largura ao objeto. Depois de analisarmos a peça construída chegámos à conclusão que tivemos de sobrepor um conjunto de peças por camadas para formar um objeto idêntico à caixa.
> Uma criança disse que era como as bolachas. Fomos buscar um pacote de bolachas e, como as bolachas eram redondas, o objeto que essas bolachas formavam era diferente ... era redondo. Ficou então combinado entre todos que os rapazes iriam decorar quadrados e as meninas decorar círculos.
> As meninas usaram como molde da unidade de medida um copo. E os rapazes o quadrado construído com as peças (figuras 1 e 2).
> Após finalizarem o trabalho (figura 3) fomos sobrepô-las, formando um cilindro e um paralelepípedo (figuras 4 e 5)."

1 Educadora Maria Leonor Henriques, Agrupamento de Escolas de D. Maria II, JI do Cacém, Sintra.

TRÊS REFLEXÕES

Com base nesta descrição e nas experiências do projeto MARTE1618 registo três reflexões.

1. No âmbito deste projeto, foi a primeira vez que discuti com professores ou educadores a construção de sólidos em fatias. Esta ideia foi trabalhada nas sessões de formação com o objetivo de abordar o conceito de prisma e também de cilindro a partir da sobreposição de camadas iguais. Esta ideia permite um entendimento da existência de paralelismo entre componentes planas destes sólidos, as camadas, que nos ajuda a estruturá-los de uma forma pouco comum. A estruturação em camadas é a base do Princípio de Cavalieri, ideia chave na compreensão das fórmulas de cálculo do volume do prisma e, por extensão, do cilindro. O conceito de volume de um sólido e o respetivo cálculo através de fórmulas são aspetos curriculares incontornáveis na educação básica. Dois aspetos chave na aprendizagem são a equivalência de sólidos e a compreensão das fórmulas de cálculo de volumes, embora muitas vezes sejam esquecidos ou relegados para segundo plano.
2. Há vários artistas que recorrem à construção de esculturas com base em camadas ou fatias. As esculturas em fatias de um destes artistas, Rui Sanches, ilustram muito bem o Princípio de Cavalieri e permitem compreender, com forte componente visual, a fórmula do cálculo do prisma como produto entre a área da base e a altura (figuras 6 e 7). Além disso, este tipo de composições plásticas evidenciam, através da sua materialidade, o papel das variáveis área da base e altura nesse cálculo. Estas esculturas são também demonstrativas e facilitadoras da compreensão de que o prisma não tem que ser reto para que o cálculo do volume seja obtido por essa fórmula. As esculturas da figura 7 (Colunata 2004) encontram-se na Assembleia da República e outros trabalhos deste artista estão acessíveis na Internet, *http://www.ruisanches.com/pt/escultura_1983-1989.html.*
3. Uma resma de papel é um paralelepípedo. Mas raramente olhamos para uma resma como tal e não destacamos que

são 500 folhas, teoricamente 500 retângulos bidimensionais, que sobrepostas nos fazem passar do bidimensional ao tridimensional. Esta é a ideia das esculturas em camadas de Rui Sanches e, de forma ainda mais fascinante, da técnica usada pelo artista chinês Li Hongbo. Totalmente inesperado, para quem ainda não conhece, em

https://www.youtube.com/watch?v=W2GYslCAk-So.

Para mim também foram inesperadas e fascinantes as construções do prisma e do paralelepípedo realizadas pelas crianças do grupo desta educadora.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Figura 5

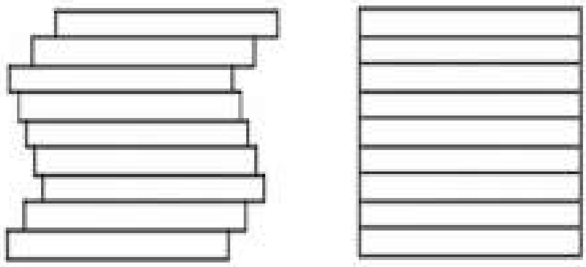


Figura 6

Figura 7

Esferas e aproximações de esferas — definição e definições.

A PROPÓSITO DA NATUREZA E DO PAPEL DAS DEFINIÇÕES EM GEOMETRIA

Cristina Loureiro

Uma das ideias que considero mais marcantes sobre a natureza e o papel das definições em geometria é a preocupação de Coxeter (1973) ao definir polígono. Este matemático afirma no início do livro que vai considerar uma definição e que depois, mais à frente no mesmo livro, vai considerar outra. Além disso é notável o cuidado que Coxeter tem em associar sistematicamente a ideia de possibilidade quando refere definições. "Podemos definir" é uma expressão recorrente para este geómetra.

Conhecendo o destaque que é dado às definições no ensino da geometria, nunca é demais refletir sobre a natureza dinâmica das definições e discutir as consequências desse dinamismo para o papel que estas podem ter no ensino e na aprendizagem. Nesta caso, escolho a esfera como objeto de debate.

A ESFERA

Este objeto geométrico está praticamente ausente da aprendizagem nos primeiros anos de escolaridade. É quase exclusivamente relegado para o papel de contraexemplo de poliedro. No entanto, a esfera é o sólido geométrico com simetria perfeita, simultaneamente o mais móvel e mais instável. Está também muito presente no nosso dia a dia, sendo as suas aproximações objetos comuns. Poderia e deveria por isso ter um papel mais relevante na aprendizagem.

Mas afinal de que falamos quando queremos referir uma esfera?

Nesta discussão recorro às ideias de Baruk (2005) por as considerar as mais completas e dinâmicas. Para falar de uma esfera, esta matemática parte da superfície esférica e evidencia duas ideias importantes:

– uma superfície esférica é uma superfície cujos pontos estão todos à mesma distância de um ponto chamado centro;
– uma superfície esférica encerra uma porção de espaço, ou seja, um volume, a que se chama esfera" (Baruk, 2005, p. 437).

E acrescenta ainda. "Os pontos de uma superfície esférica são todos aqueles cuja distância ao centro é igual ao raio. Os pontos da esfera são todos aqueles cuja distância ao centro é inferior ao raio. Se a esfera inclui a superfície esférica considera-se fechada, no caso contrário considera-se aberta".

Gosto especialmente da observação de Baruk: "Quando a palavra "esfera" figura num enunciado sem mais precisão, é porque se trata de uma esfera fechada" (2005, p. 437).

Tenho encontrado outras definições de esfera. Esfera é definida como "o conjunto dos pontos do espaço tridimensional que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado centro" (Musser, Burger & Peterson, 2006, p. 623). Esta definição considera apenas a superfície esférica e é comum em outros livros de referência de origem anglo saxónica.

No livro de geometria Elementos de Geometria (Fernandes, p. 478): "Esfera é o sólido gerado por um semicírculo (semicírculo gerador) que roda em torno do seu diâmetro (eixo) até dar uma volta completa". Nesta definição a esfera é considerada como um sólido de revolução.

Para já temos definições que não são totalmente equivalentes e definições que recorrem a propriedades distintas da esfera. Seguramente que podemos obter outras definições se atendermos a outras propriedades da esfera. Para isso é útil procurar maneiras distintas de estruturar espacialmente a esfera, isto é, de conceber vários tipos de estruturas que permitem obter ou compor uma esfera.

A ESTRUTURAÇÃO DA ESFERA

Um balão cheio pode ser uma boa imagem de uma superfície esférica. Assim como uma bola de basquete ou de andebol. As bolas de futebol já são aproximações à esfera de outra natureza pois são poliedros.

Os deliciosos bombons Baci são boas aproximações a esferas fechadas em que a superfície esférica é de chocolate e o interior é um saboroso recheio com avelãs. Mas é verdade que há outros bombons que são aproximações mais perfeitas da esfera.

As laranjas são esferas quase perfeitas. Podemos destacar a casca como uma superfície esférica e o interior que revela uma estrutura de gomos muito apelativa. Começamos a encarar a esfera como um sólido de revolução.

O que acontece quando cortamos uma esfera por um plano? Obtemos sempre um círculo. A esfera é o único sólido que tem esta propriedade, isto é, qualquer corte determinado por um plano gera sempre uma figura plana do mesmo tipo. Nem o cubo tem esta propriedade. Não há maneira de cortar uma esfera e obter uma outra figura que não seja um círculo. Há algum tempo, numa sessão de formação, ficámos todas estupefactas e algo incrédulas com esta propriedade da esfera. Nunca tínhamos encarado a esfera deste ponto de vista. Obtivemos a confirmação desta propriedade no dicionário de Baruk.

A propriedade anterior tem uma situação de restrição quando o corte da esfera passa pelo centro. Neste caso, obtemos círculos máximos ou meridianos. Esta propriedade permite obter uma esfera estruturada a partir de um conjunto de círculos máximos como mostra a figura 1. Faço notar que embora usemos a designação de "círculos máximos", o que temos são circunferências.

Um berlinde de vidro é uma esfera que não revela a estrutura. Pode ser útil para medir o volume da esfera e obter de um modo concreto a inesperada relação entre o volume de uma esfera e o de um cilindro circunscrito. Recordo que esta relação é de 2/3.

Entre os objetos do nosso dia a dia descobrimos várias estruturações espaciais da esfera. Todas elas reveladoras de relações significativas do objeto tridimensional com os seus elementos constituintes bidimensionais. São excelentes exemplos da relação 3D-2D.

Figura 1

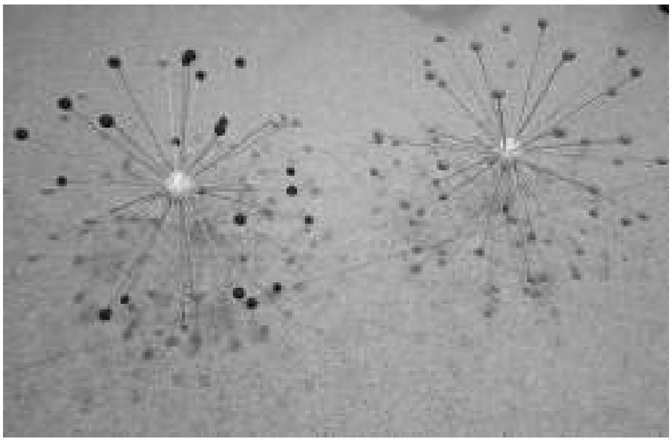


Figura 2

Figura 3

COMENTÁRIOS FINAIS

A superfície esférica é uma superfície não planificável. Talvez por isso tenhamos a ideia de que é uma superfície difícil de obter. No entanto, as estruturações de que falámos dão excelentes pistas para construir objetos esféricos que são muito boas aproximações à esfera. Para este trabalho foram inspiradoras as obras de alguns artistas que são sem dúvida nenhuma quem melhor explora estas relações.

Apresentamos um conjunto de objetos esféricos construídos pelas crianças em dois jardins de infância. Na figura 1 as esferas são construídas a partir de tiras de papel iguais para obter círculos máximos, na figura 2 a estruturação é feita a partir dos raios. Apresentamos também uma aproximação à esfera, do artista Rui Sanches (2017), em que a estruturação é feita a partir de planos paralelos (figura 3).

Referências bibliográficas

Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar.* Edições Afrontamento.

Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular Polytopes.* New York: Dover Publications.

Fernandes, A. (sem data). *Elementos de Geometria.* Coimbra: Coimbra Editora.

Musser, G., Burger, W. & Peterson, B. (2006). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach.* USA: John Wiley & Sons.

Sanches, R. (2017). *Janela, espelho, mapa …* Lisboa: Sistema Solar.

Comunicação Visual

Cristina Loureiro

"Praticamente tudo o que os nossos olhos veem é comunicação visual". Esta afirmação de Bruno Munari, reconhecido *designer* italiano, aponta-nos a natureza deste tipo de comunicação, que tem a sua origem nas Artes Visuais.

Bruno Munari afirma que:

> conhecer a comunicação visual é como aprender uma língua composta só por imagens, mas imagens que têm o mesmo significado para as pessoas de todas as nações e, por isso, de todas as línguas. A linguagem visual é uma linguagem talvez mais limitada do que a falada, porém, é mais direta. (p. 81)

Destacamos, assim, o caráter universal da linguagem das imagens. Todos conhecemos o papel da linguagem visual, que está presente em inúmeras situações à nossa volta. Isto significa que todos estamos habituados a enviar e receber mensagens através da linguagem visual, embora desconhecendo muitos dos seus códigos e não tendo aprendido muitos aspetos da chamada literacia visual.

Uma ideia que nos interessa destacar é que a mensagem visual pode ser decomposta em informação e suporte. Considera-se o suporte visual como "o conjunto dos elementos que tornam visível a mensagem", isto é, "todas aquelas partes que devem ser consideradas e aprofundadas para se poderem utilizar com a máxima coerência em relação à informação" (p. 93).

Interessa-nos, portanto, destacar cinco tipos de suporte considerados pelos especialistas das Artes Visuais: Textura, Forma, Estrutura, Módulo e Movimento. A estes há ainda a acrescentar a Cor. Todos estes tipos de suporte têm uma forte ligação à matemática e, por isso, o especialista de comunicação visual recorre a muitas componentes da linguagem matemática e a muitos objetos matemáticos. Não se espera que um professor ou educador seja um especialista de comunicação visual; porém, o conhecimento de muitos aspetos da comunicação visual e o interesse por esta área podem contribuir para desenvolver a comunicação matemática.

Para despertar ou alimentar o interesse pela comunicação visual fazemos uma pequena experiência ligando dois suportes, textura e forma. Este último é bastante familiar na matemática, mas sobre o primeiro e a ligação dos dois talvez já não possamos dizer o mesmo.

TEXTURA E FORMA

Uma superfície pode ter uma textura ou adquiri-la. Texturizar uma superfície é sensibilizá-la. Podemos, por isso, sentir a textura ou criar a textura. Os *designers* consideram duas grandes famílias de texturas: as orgânicas e as geométricas. As primeiras mais ligadas à natureza e as segundas mais construídas. Um dos desafios dos designers é construir texturas orgânicas recorrendo a processos, muitas vezes, de natureza geométrica.

Para pensar sobre este assunto, o melhor é fazer uma experiência de texturização a partir de uma forma geométrica fundamental, o quadrado. Apresento-vos, por isso, um conjunto de quadrados, divididos em partes, mas sem qualquer tipo de textura (figura 1). Naturalmente que a divisão destes quadrados em partes foi intencional e recorre a aspetos da gramática da forma, usando linhas para marcar o quadrado. Não são linhas quaisquer e foram sendo dispostas de maneira a ficar estabelecido um conjunto organizado de imagens que nos interpela e nos comunica alguma coisa. A cada quadrado foi acrescentada informação pelo facto de terem sido traçadas algumas linhas. Além disso, as figuras são todas distintas e o facto de estarem associadas permite estabelecer ligações entre elas. Propositadamente, há intenção de comunicar alguma coisa de um modo muito livre e aberto, sem recorrer a qualquer tipo de comunicação verbal.

Experimentemos agora texturizar as figuras do conjunto obtendo assim um novo conjunto (figura 2). A cada figura foi acrescentada informação visual. Mantém-se a ausência de comunicação verbal. O que ganhámos com a aplicação da textura? O que perdemos? Em que medida a mensagem se enriquece e nos interpela, nos convida a responder estabelecendo, assim, um

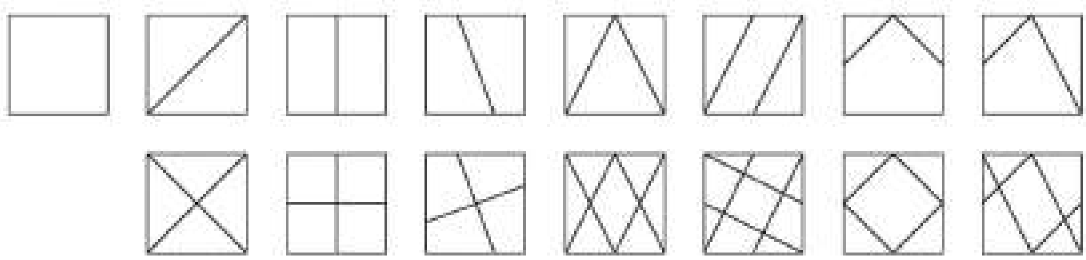


Figura 1

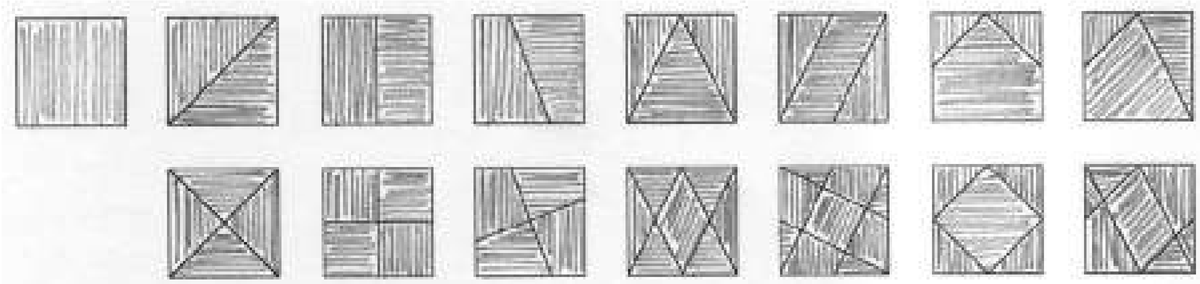


Figura 2

diálogo meramente visual ou com uma forte componente de comunicação visual?

A aplicação de texturas tem, principalmente, uma função visual. No nosso exemplo, a aplicação da textura teve um propósito de comunicação matemática. E embora ele não tenha sido desenvolvido, ficou bem patente que as várias divisões do quadrado em partes apontam vários tipos de relações que podem ser estudadas geometricamente. Fica o desafio de obter geometricamente, e para cada figura do conjunto, a relação entre todas partes de cada quadrado e o quadrado inicial. Naturalmente que a última figura é a mais intrigante. As relações presentes e a simplicidade dos raciocínios geométricos para as obter são inesperadas.

Os artistas aplicam texturas com objetivos de comunicação de natureza distinta. Para ilustrar intenções estéticas, destaco uma composição de Sol LeWitt (figura 3). Neste caso, mantém-se a forma de partida, o quadrado, também decomposto em partes e mantém-se também o mesmo tipo de tipo textura, isto é, traços paralelos a grafite. Também LeWitt nos intriga e desafia a descobrir o sentido desta sua composição, aparentemente, só estética. Será mesmo só estética?

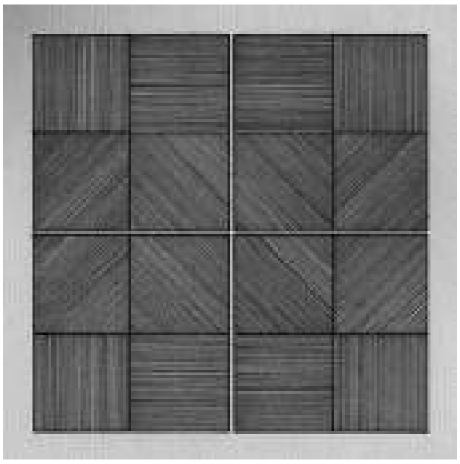


Figura 3

Uma outra composição de LeWitt (figura 4), possivelmente um estudo para uma obra, pode ser associada à comunicação visual que aqui apresentamos. Neste caso, a composição é sem textura e com uma intenção de estudo matemático. No texto que está na imagem pode ler-se: "linhas retas em quatro direções e todas as suas combinações possíveis".

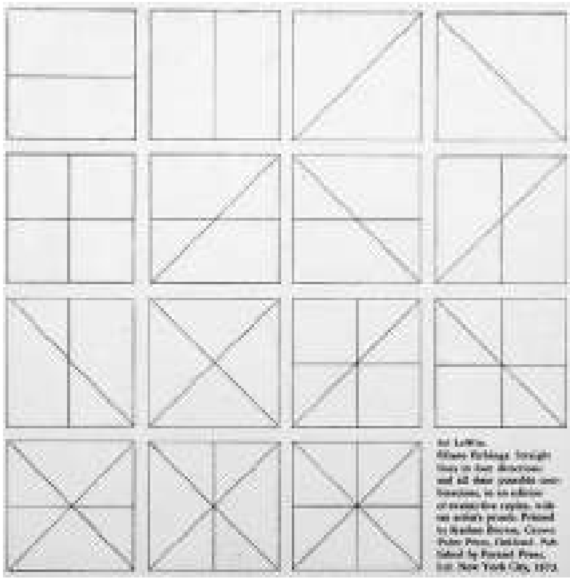


Figura 4

A propósito de Sol LeWitt, sugiro a leitura do artigo de Eliana Pinho, publicado na revista há algum tempo e indicado nas referências. Algumas imagens da obra de Sol LeWitt podem ser obtidas em https://www.sollewittprints.org/introduction.

O objetivo desta nota foi mostrar como a comunicação puramente visual nos pode interpelar e desafiar do ponto de vista matemático. Todas as imagens apresentadas são passíveis de desenvolvimento que o espaço desta nota não permitiu. Fica, assim, a promessa de desenvolvê-las matematicamente na perspetiva da comunicação visual.

Referências

Munari, B. (1968). *Design e comunicação visual.* Edições 70.

Pinho, E. (2013). Sol LeWitt – arte contemporânea e matemática. *Educação e Matemática, 125,* 11-22.

Comunicação Visual (II)

Cristina Loureiro

A temática da comunicação visual pode ser desafiadora sob vários pontos de vista. A nossa proposta é considerá-la como ponto de partida e não como complemento a outras formas de comunicação sejam elas escritas ou orais.

O que nos pode transmitir uma figura? E uma configuração formada por várias figuras organizadas?

A configuração proposta na nota da revista anterior (figura 1) foi organizada para transmitir vários desafios e proporcionar o interesse no estabelecimento de relações geométricas e também numéricas. O que cada figura transmitiria isoladamente seria pobre. A configuração apresentada criou um contexto visual bastante mais rico. Na 1.ª linha cada quadrado vai sendo decomposto em partes: o todo, ou 1 parte; 2 partes, 3 partes.

A 2.ª linha foi construída a partir da linha anterior. Que relação existe entre cada figura da 2.ª linha e a figura que lhe está acima?

Com este conjunto de figuras foi construído um contexto visual em que cada uma das figuras tem um papel. Podemos dizer que temos um agrupamento por forma consistente, na linha do que defende Arnheim (1998). Há uma ligação intrínseca entre as figuras. Esta ligação é dada pelas divisões do quadrado, obtidas a partir de pontos particulares, e pela textura que acentua a decomposição do quadrado em partes.

Podemos dizer que estamos perante um discurso visual e fazer uma analogia com um texto. O mesmo conjunto de palavras pode originar textos distintos conforme a ordem pela qual são organizadas. Também com estas figuras poderia ter sido construído outro contexto visual.

Qual é o sentido deste discurso visual? Uma coisa é o sentido atribuído por quem o organizou, outra o sentido que lhe vai atribuir quem o encara. Esta configuração foi organizada com o objetivo de estabelecer relações geométricas entre cada uma das partes de cada quadrado e o quadrado inicial. De certo modo, estabelecer estas relações ajuda a atribuir um significado ao discurso apresentado. Se a obtenção destas relações for feita com recurso a relações geométricas fica também valorizado o discurso visual.

Para estabelecer as relações entre as partes e o todo de cada figura do conjunto recorremos formalmente às transformações geométricas. No entanto, podemos tornar as justificações mais informais e visualmente mais acessíveis recorrendo a uma linguagem informal e a operações comuns como dobragem, corte e sobreposição das partes. Sejam as partes que estão marcadas ou outras auxiliares que se considerem úteis. Importa também registar que as relações que vão sendo estabelecidas podem ser usadas em figuras subsequentes.

De uma maneira geral as relações são fáceis de obter. No entanto, há duas figuras que nos impõem um raciocínio diferente (figura 2).

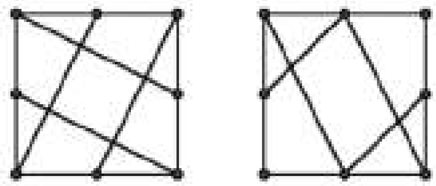


Figura 2

Para ambas as situações, a estratégia de raciocínio mais acessível é recompor a figura original, o quadrado, numa outra figura equivalente em que as relações sejam visualmente mais evidentes (figura 3).

No primeiro exemplo, a relação é obtida a partir da transformação do quadrado original numa cruz equivalente formada por 5 quadrados iguais, concluindo-se assim que o quadrado interior é $\frac{1}{5}$ do quadrado original. No segundo exemplo, a relação é obtida a partir da transformação do quadrado original num paralelogramo equivalente formado por 3 paralelogramos iguais, concluindo-se assim que o paralelogramo interior é $\frac{1}{3}$ do quadrado original. Em ambos os casos recorremos a uma

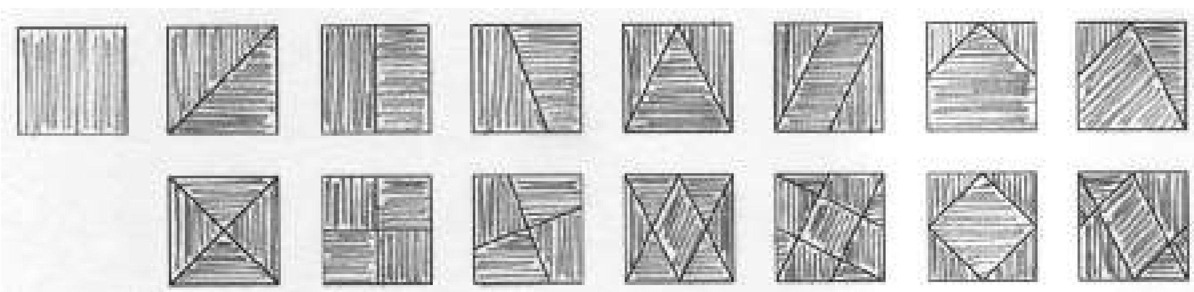


Figura 1

figura auxiliar equivalente passível de obter a partir da disseção do quadrado.

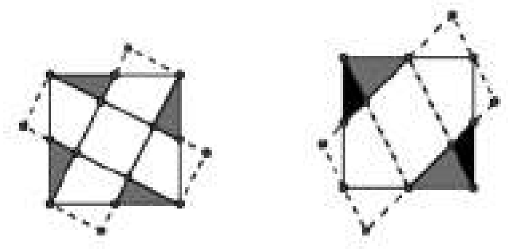


Figura 3

Se quisermos valorizar as relações geométricas, o discurso visual aqui exposto pode associar-se às transformações geométricas e às disseções.

Se quisermos valorizar as relações numéricas, é interessante registar que a configuração exposta é formada por decomposições do quadrado em partes que permitem estabelecer várias relações. Registamos algumas delas separando as frações que as representam em três grupos, com destaque para as frações redutíveis que têm especial significado em algumas das figuras (figura 4).

Para ambos os tipos de relações, para quem atribuiu significado à exploração desenvolvida, podem ser formulados novos problemas. No caso das relações numéricas, surge o interesse em descobrir como obter $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$, por exemplo. Ou descobrir outras decomposições que originem outras frações equivalentes.

$\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{8};\frac{1}{12};\frac{1}{20}$
$\frac{5}{8};\frac{3}{20}$
$\frac{2}{8};\frac{4}{8};\frac{6}{8};\frac{2}{16};\frac{4}{16};\frac{5}{20}$

Figura 4

No caso das relações geométricas, surge o interesse em descobrir outras disseções interessantes análogas às que são apresentadas na figura 3.

E claro que é aceitável que alguém não atribua significado ao discurso visual aqui exposto e discutido. Da mesma maneira que é preciso aprender a ler palavras e a atribuir-lhes significado, bem como aos textos com elas construídos, também é preciso aprender a ler imagens e a atribuir significado aos contextos visuais.

Os artistas e especialistas de comunicação visual são quem melhor cria e concebe contextos visuais atrativos e com significado. Muitos desses contextos visuais recorrem a séries de formas organizadas e são muito ricos do ponto vista matemático, não exclusivamente geométrico. Estudar e desenvolver estes contextos visuais, procurando identificar as aprendizagens de literacia visual e as aprendizagens matemáticas envolvidas parece-me ser uma boa estratégia para a realização de aprendizagens interdisciplinares entre a Educação Visual e a Matemática.

Referências

Arnheim, R. (1998). *Arte e percepção visual.* Brasil: Pioneira.

Estruturas inesperadas

Cristina Loureiro

Figura 1

A Art Tower Mito, da autoria do premiado arquiteto japonês Arata Isozaki é uma obra inesperada que prende a nossa atenção e desafia a imaginação (figura 1). Datada de 1990, foi construída no Japão e o seu autor foi este ano premiado com o Prémio Pritzker. Seguramente a recente atribuição deste prémio trouxe fotografias das suas obras aos jornais portugueses e foi, por isso, que agora contactei com estas imagens. Quando vi esta fotografia fiquei fascinada e várias ideias me ocorreram.

Que poliedro estranho. De certo modo parece que pode ser prolongado indefinidamente. Será que é mesmo um poliedro? Como se poderá construir? Quais são as suas principais caraterísticas?

Como será interessante confrontar as crianças com esta obra e ouvi-las falar sobre este tão peculiar edifício. Que perguntas farão? Que comentários? E como seria desafiador construir com elas um objeto inspirado nesta construção.

O que terá levado este arquiteto a construir tão intrigante edifício que parece desafiar as leis da gravidade? Qual é a sua função? Será que se pode subir ao cimo desta torre?

O primeiro conjunto de questões levou-me a descobrir várias informações interessantes sobre o edifício e a sua construção [1]. A torre, com 100 metros de altura, é uma espiral composta a partir de painéis em forma de triângulos equiláteros que formam tetraedros. Cada painel tem 9,6 metros de lado (figura 2). Os painéis são de titanium, um metal mais leve comparativamente a outros metais.

Por ser uma espiral confirma-se a ideia de que a torre poderia ser prolongada indefinidamente. Fica o desafio de procurar saber mais sobre espirais, objetos geométricos praticamente ignorados na matemática escolar.

Figura 2

As fotografias e o processo de construção de que nos começamos a aperceber dão a ideia de que as faces são mesmo triângulos equiláteros. Uma pesquisa mais aturada permitiu obter mais informação sobre o modelo geométrico da Art Tower e sobre a sua construção virtual [2]. O modelo é obtido pelo uso habilidoso da reflexão no espaço, definida pelo plano de uma das faces do tetraedro previamente construído e, seguida de uma rotação.

Este poliedro pode ser construído com recurso a polydrons. A construção é intrigante e desafiadora (figura 3).

Figura 3

Há outros edifícios construídos a partir de modelos geométricos também inusitados, não tão desconcertantes como este, porém acessíveis no nosso território próximo. Sobre estes edifícios poderão ser realizados interessantes trabalhos em situação escolar. Refiro-me à Casa da Música no Porto e, ao edifício sede do porto de Lisboa.

O segundo conjunto de questões sobre as crianças fez-me revisitar alguns relatos do trabalho de uma educadora, a Maria, com o seu grupo de crianças:

> Fizemos uma visita a uma escultura urbana de Charters de Almeida que foi fotografada pelas crianças e a partir da qual fizemos a nossa escultura coletiva de paralelepípedos, utilizando duas cores primárias e a secundária resultante da sua mistura (amarelo, vermelho e laranja). Acabámos com uma escultura de nome "Fogo". (figuras 4 e 5)

Tenho a certeza de que a Maria um dia destes *viajará* com as suas crianças à Art Tower Mito. O seu interesse por esta forma de envolvimento das crianças está bem patente neste excerto das suas reflexões e relatos de experiências sobre matemática e artes visuais:

> As abordagens feitas a partir de obras de arte para fazer incursões em conceitos matemáticos ou, o caminho inverso, partir de conceitos matemáticos descobrir artistas que os utilizam nas suas obras e, por sua vez utilizar, explorar e reinventar produções de expressão plástica das crianças, tanto individuais como coletivas, geram uma construção de aprendizagens e saberes, tanto matemáticos como de literacia estética e artística que a maioria das crianças passa a utilizar no seu dia a dia.

Figura 4

A Art Tower inspira-se num poliedro original, a hélice de Boerdijk–Coxeter, que tem interessantes propriedades geométricas [4]. Imagino que tenham sido algumas dessas propriedades que atraíram Arata Isozaki. Quanto à função do edifício fiquei a saber que a Art Tower Mito é um complexo de artes que foi construído no âmbito das comemorações do centenário do município de Mito [3]. É constituído por uma sala de concertos, um teatro, uma galeria de arte contemporânea e uma torre de referência que se pode ser visitada. Termino com o desafio de construírem uma réplica da Art Tower Mito.

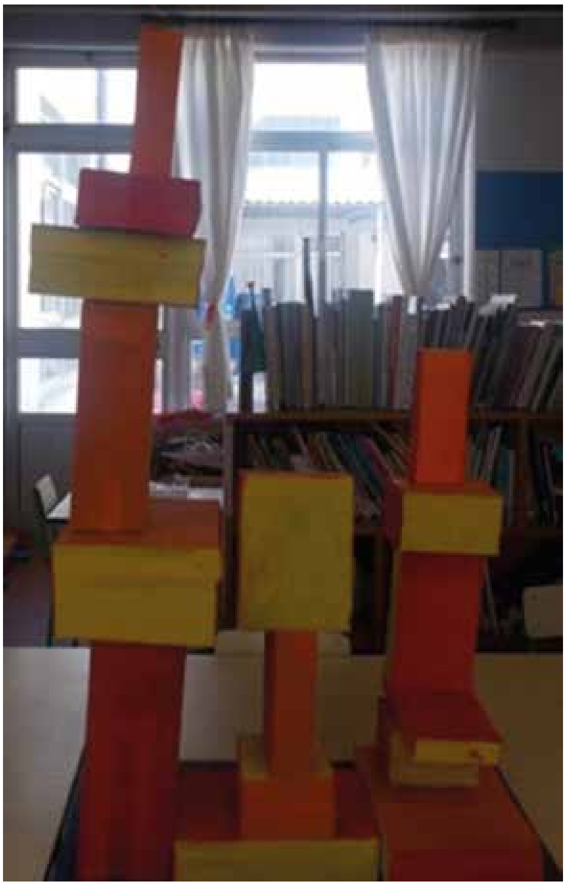


Figura 5

Referências

[1] www.kikukawa.com/en/product/art-tower-mito/

[2]Ulasevich, Z. & Ulasevich, V. (2016). Isometries in teaching descriptive geometry and engineering graphics. The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics, Volume 29, 23-20.

[3] https://www.arttowermito.or.jp

[4] http://images.math.cnrs.fr/Peut-on-faire-un-anneau-de-tetraedres.html?lang=fr

A Hélice de Boerdijk-Coxeter ou Tetrahelix

Cristina Loureiro

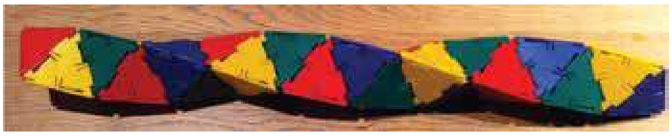


Figura 1

O objetivo deste texto é mostrar como o recurso a materiais distintos para construir o mesmo objeto geométrico permite valorizar ou destacar propriedades distintas da estrutura do objeto. Para isso foi escolhido um objeto muito pouco conhecido, a *hélice de Boerdijk–Coxeter*. Esta hélice é o poliedro que serviu de inspiração para a construção da estrutura da *Art Tower Mito*, no Japão, tendo sido esta construção explorada no artigo *Estruturas inesperadas* apresentado na revista n.º 152. A fotografia da figura 1 mostra uma hélice construída com recurso a triângulos equiláteros de *polydron*, neste caso peças compactas.

Este poliedro é descrito como um empilhamento linear de tetraedros regulares. Cada tetraedro está relacionado com o seguinte através de uma rotação formando-se assim uma espiral heliocoidal [1] [2]. Este poliedro é também conhecido como *tetrahelix*, designação que decorre da sua ligação ao tetraedro.

É importante notar que as faces dos tetraedros que constituem o complexo formam três bandas entrelaçadas, como evidencia a fotografia da figura 2. Para evidenciar este efeito foi importante usar peças de apenas 3 cores e manter a mesma cor para todos os elementos de cada uma das bandas. A maneira mais fácil de construir uma *hélice de Boerdijk–Coxeter* é recorrer a esta última propriedade, respeitando a utilização de peças de 3 cores para evidenciar as 3 bandas que formam a hélice. Vale a pena experimentar, começando por construir separadamente as três bandas de triângulos, ligando-as depois passo a passo. Embora na fotografia seja mostrada uma parte da hélice, esta construção pode ser continuada indefinidamente.

Figura 2

Os matemáticos que estudaram este objeto geométrico afirmam que, nesta sequência infinita de tetraedros empilhados, não é possível encontrar um par de tetraedros com a mesma orientação porque o passo helicoidal por célula não é uma fração racional do círculo [1]. Uma propriedade difícil de entender, mas que ajuda a explicar o aspeto estranho da hélice em que não se consegue vislumbrar uma repetição de orientação dos tetraedros que a formam e, por isso, não se identifica nenhum corte da composição que dê origem a uma parte repetível, como pode ajudar a ver a construção da figura 3.

Figura 3

Penso que cada uma destas três fotografias e as caraterísticas que foram sendo associadas a cada uma delas ajudam a compreender o interesse de analisar representações diferentes que evidenciam propriedades distintas da estrutura de um objeto geométrico.

O recurso a um objeto geométrico pouco conhecido pode ajudar a valorizar este interesse em estudar, para o mesmo objeto, a associação entre estruturas distintas e as propriedades que são evidenciadas por cada uma delas. Essa discussão foi feita para a esfera no artigo *Esferas e aproximações de esferas — definição e definições* no n.º 148 da *Educação e Matemática*, com exemplos de construções feitas por crianças. Fica assim o desafio de estudar estruturas distintas para outros objetos geométricos mais conhecidos e construí-las com os alunos. Registo ainda a ideia de que objetos como esta hélice, de natureza espiral e que podem ser continuados indefinidamente, são muito desafiadores do ponto de vista das relações matemáticas que permitem estabelecer.

Deixo também um outro desafio que decorre da minha atração pela *tetrahelix* e que me levou a encontrar algumas outras estruturas constituídas por tetraedros mas distintas da *tetrahelix* [3] e outros objetos construídos a partir de triângulos equiláteros [4]. Nestas duas referências indicadas é possível encontrar informação matemática muito interessante sobre estes objetos geométricos.

Nota — Agradeço ao Pedro Almeida que teve a ideia de construir a *tetrahelix* representada na fotografia 2 e que é também o autor da fotografia.

Referências

[1] Ulasevich, Z., & Ulasevich, V. (2016). Isometries in teaching descriptive geometry and engineering graphics. *The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics, 29*, 23–20.

[2] https://www.revolvy.com/page/Boerdijk%E2%80%93Coxeter-helix

[3] http://bit-player.org/2013/tetrahedra-with-a-twist

[4] http://images.math.cnrs.fr/Peut-on-faire-un-anneau-de-tetraedres.html?lang=fr

Técnica Pop-Up para construção de sólidos de revolução

Cristina Loureiro

A materialização de objetos geométricos é uma ideia encarada tanto por matemáticos como por artistas. E se não nos espanta que os artistas a explorem, no que respeita aos matemáticos podemos pensar que não a valorizam pois falamos de concretização. Porém, não é assim, o conceito de materialização está presente em escritos de natureza matemática (Baruk, 2005). Decidi, por isso, focar este texto numa classe de objetos geométricos desafiadores, os sólidos de revolução, encarando-os numa perspetiva de materialização interdisciplinar.

O título escolhido para este artigo aponta precisamente para a utilização de uma técnica de construção específica das artes visuais, o Pop-Up. E foram alguns os títulos para este texto que surgiram possíveis no decurso da escrita. Desde "objetos interdisciplinares" a "figuras 2D que geram figuras 3D", passando por "a cabeça a andar à roda" ou "sólidos para que vos quero", foram várias as designações que estiveram no papel. Todos estes títulos nos vão dizendo alguma coisa sobre o que está em jogo na materialização destes objetos.

A interdisciplinaridade tem vários aspetos muito atrativos. Por um lado, implica a diversidade de métodos e de formas diferentes de aplicação à resolução de um problema. Por outro, está associada ao trabalho colaborativo entre especialistas de áreas distintas. Esta combinação ajudar a desenvolver novas perspetivas sobre as disciplinas envolvidas.

Destaco, ainda, que as ideias que apresento e discuto neste artigo decorrem da análise de várias experiências interdisciplinares realizadas ao longo do desenvolvimento do projeto Marte 1618. Estas experiências permitiram-nos vivenciar, de forma muito significativa, a associação de processos criativos próprios das artes visuais à construção de objetos reais com uma forte natureza matemática. Refiro-me a objetos tridimensionais, criados como objetos artísticos, nos quais os processos de construção recorrem a relações geométricas.

O que foi novo para mim, e que tenho vindo a estudar e desenvolver, foram as potencialidades de encarar os objetos matemáticos com que lidamos na aprendizagem da matemática de novos pontos de vista, desocultando representações distintas do mesmo objeto matemático e passando a valorizar representações anteriormente ignoradas. Estes novos olhares permitiram trazer à ribalta da aprendizagem objetos matemáticos habitualmente esquecidos ou a que damos pouca atenção. Neste caso refiro-me aos sólidos de revolução.

.

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E POP-UP

Os sólidos de revolução são, pela natureza do seu processo de geração, objetos tridimensionais (3D) gerados por figuras unidimensionais ou bidimensionais (2D). Do ponto de vista matemático, as superfícies de revolução são as que são obtidas pela rotação de uma linha em torno de um eixo. A porção de espaço limitado por uma superfície de revolução é um sólido de revolução. Também podemos descrever a obtenção de sólidos de revolução através da rotação de uma figura bidimensional em torno de um eixo definido por um dos elementos da figura (Baruk, 2005).

Estas definições de sólido de revolução estão intimamente ligadas ao raciocínio visual. Se o ponto de partida do raciocínio visual for uma linha, e o objetivo for obter um sólido de revolução, interessa recorrer à capacidade de imaginar o sólido. Se o ponto de partida for um sólido, interessa identificar a linha que o vai gerar. Em ambos os casos é preciso imaginar o que vai acontecer associando uma figura visível a uma imagem mental. Há aqui uma operação mental sobre um objeto concreto ou um desenho. É no estabelecimento desta relação entre o visível e o imaginável que se realiza o raciocínio visual.

A construção de sólidos teve um papel decisivo no desenvolvimento do projeto, mas foi com o recurso a técnicas de construção de Pop-Up que as ideias de geração de sólidos de revolução a partir de uma figura original foram ganhando força.

Os livros Pop-Up consistem num género de livros que exploram várias possibilidades de movimento, através de diversos mecanismos de papel, que promovem a interação direta do leitor. Os livros deste tipo destacam-se pela capacidade de surpreender o leitor, através de formas tridimensionais recortadas que emergem das páginas de papel (Loureiro & Regatão, 2019).

As técnicas de construção Pop-Up são várias, mas mesmos as mais simples, que são muito acessíveis, têm um efeito surpreendente e desafiador. A surpresa advém das experiências perceptivas proporcionadas pelas diversas leituras visuais que se podem obter entre o Pop-Up fechado e o Pop-Up aberto (figura 1). O desafio advém da possibilidade de materialização de uma ideia através da construção de um Pop-Up original.

No caso da composição da figura 1, podemos ver uma rã cujo corpo é representado por uma semiesfera estruturada a partir de semicírculos. Na descrição do seu trabalho a criança explica a técnica que usou: *"Dobrámos círculos ao meio e colei-os todos* *dobrados ao meio (em semicírculos), todos juntinhos colados com a dobra mesmo juntinha à dobra da folha".*

Figura 1

No caso da figura 2, temos um cone estruturado a partir de triângulos. Também para este exemplo, o diálogo com as crianças permite obter a descrição da técnica utilizada.

– *"Observem bem o capuz. O que vos parece ser?*
– *Uma pirâmide.*
– *E agora observem bem o seu vestido.*
– *Colei muitos triângulos e dobrei ao meio e colei todos juntinhos, mesmo junto à dobra da folha — diz uma das crianças.*
– *O que vos parece.*
– *É um cone."*

Figura 2

Todas as experiências de construção de Pop-Up vivenciadas no âmbito deste projeto foram realizadas por educadoras com crianças de jardim de infância. Os sólidos de revolução criados limitaram-se à esfera, ao cone e ao cilindro. É importante apontar que quando se abre o Pop-Up não se vê o sólido todo, observa-se apenas uma parte que é suficiente para percecionar todo o sólido representado. Os diálogos com as crianças evidenciaram precisamente que estas eram capazes de idealizar o sólido completo.

Quando os objetos estão contextualizados a idealização torna-se mais fácil. Ao vermos uma representação parcial de um objeto que conhecemos, facilmente associamos aquela representação ao objeto.

REFLETINDO SOBRE ESTAS EXPERIÊNCIAS

A análise que fazemos destas experiências permite-nos destacar os seguintes aspetos: o potencial de aprendizagem da estruturação Pop-Up; a materialização de objetos matemáticos através de estruturações produtivas associadas a objetos reais; a natureza do raciocínio visual envolvido.

No que respeita ao potencial de aprendizagem da construção Pop-Up, os exemplos mostrados apontam para uma forma de estruturação simples de obter e muito rica do ponto vista matemático. A estruturação de sólidos de revolução obtida por este processo é unificadora relativamente a esta classe de objetos. Dito de outra maneira, o processo de construção é sempre baseado numa figura bidimensional com um eixo de simetria. É esta repetição de figuras iguais que permitem materializar o efeito de rotação caraterístico destes sólidos.

Os sólidos de revolução, objetos matemáticos ideais, ficam assim representados por objetos reais dinâmicos e com sentido. Além disso, o recurso a esta técnica ajuda a contextualizar a utilização de cada sólido, associando-os a objetos reais que fazem parte do mundo da criança. A associação entre objetos reais e objetos matemáticos contribui para o desenvolvimento de olhares matemáticos sobre os objetos reais.

No que respeita ao desenvolvimento do raciocínio visual, evidenciamos o estabelecimento de relações entre as figuras bidimensionais e as figuras tridimensionais por elas geradas, tanto no sentido de partir de uma figura bidimensional para obter uma figura tridimensional, como o inverso.

As reflexões que apresentamos e as ideias que fomos aprofundando levam-nos a perspetivar um conjunto de tarefas a realizar com crianças mais velhas, ao nível do 1.º ou 2.º ciclos. Em nosso entender poderão constituir excelentes experiências de aprendizagem interdisciplinar com a condição de que criação dos Pop-Up seja mesmo efetiva.

2D-3D-2D ATRAVÉS DE CONSTRUÇÕES POP-UP

O conjunto de tarefas que propomos tem como principal objetivo o desenvolvimento do raciocínio visual e de capacidades de visualização no que respeita ao estabelecimento de relações entre figuras bidimensionais e tridimensionais.

Que sólido se vai obter a partir da rotação, em torno do eixo indicado, de cada uma das figuras bidimensionais indicadas na figura 3.

Depois de imaginar o sólido que vai ser obtido, constrói esse sólido em papel recorrendo à técnica Pop-Up.

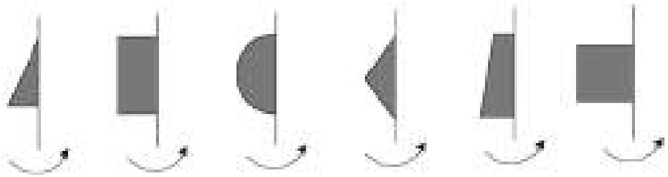


Figura 3

Há algumas questões que podem ser colocadas para refletir sobre os sólidos de revolução que se podem obter. Por exemplo: Como deverá ser o retângulo para que o cilindro seja mais fino ou mais achatado? Que caraterística comum têm todas as figuras recortadas em papel para obter cada um destes Pop-Up?

A técnica de construção dos Pop-Up ajuda a compreender que todas as figuras bidimensionais de partida tenham pelo menos um eixo de simetria, porque a técnica recorre à dobragem da figura ao meio. As figuras representadas na figura 3 são sempre metade da figura base que vai ser replicada várias vezes.

Para cada uma das figuras bidimensionais apresentadas na figura 4 descreve o sólido que se pode obter por rotação, como está indicado nos desenhos.

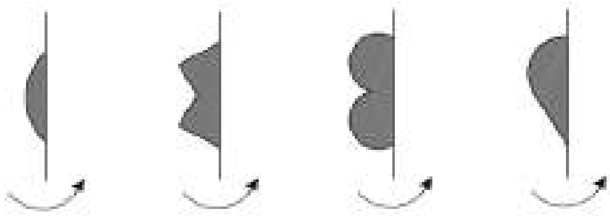


Figura 4

Os sólidos que poderão ser obtidos não são figuras simples e não têm nenhum nome específico. O objetivo desta tarefa é que a criança seja capaz de imaginar o que vai acontecer e que descreva esse objeto tridimensional. Ao fazê-lo irá destacar caraterísticas do objeto a que é mais sensível e irá estabelecer ligações com objetos reais. Por exemplo, "uma esfera esticada", "duas tendas de circo, uma em cima da outra, e uma está invertida" (figura 5), "duas espécies de donuts ou de pneus um em cima um do outro", "um cone com gelado".

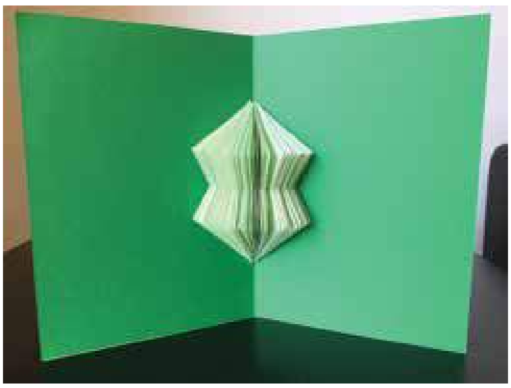


Figura 6

Inspira-te em objetos reais que sejam boas aproximações de sólidos de revolução e desenha a figura plana que permite obter a respetiva configuração através da rotação em torno de um eixo. Constrói-os recorrendo à técnica Pop-Up.

Um bom exemplo desses sólidos são alguns frutos, como por exemplo a maçã, a pêra, a laranja e alguns objetos de uso comum como garrafas e copos. Uma das intenções destas duas tarefas é que as crianças olhem para objetos aproximados a sólidos de revolução e os encarem como tal. Ao fazê-lo estarão a desenvolver um olhar matemático sobre os objetos reais. E esse é um dos grandes objetivos da aprendizagem da matemática — ver matematicamente o mundo em que vivemos.

MAIS ALGUMAS REFLEXÕES

Visualização e raciocínio visual são duas ideias chave que enquadram este trabalho sobre as quais interessa estudar mais, aprofundar os sentidos e realizar experiências com crianças e jovens. Pensar nas aprendizagens ligadas à visualização e ao raciocínio visual envolve a atenção a experiências de natureza múltipla e diversa, mas não pode esquecer o desafio à criação e construção de objetos.

A criação e construção de objetos tem que ser acessível e com sentido. Por isso, importa evidenciar que as ligações entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade não são exclusivas da matemática, nem das aprendizagens matemáticas, como também não é o raciocínio visual. Neste caso, estabelecemos uma ligação forte entre a matemática e as artes visuais. E embora esta seja a ligação interdisciplinar que mais apreciamos, importa também apontar que há outras ligações com grande potencial.

Por último, o interesse em trabalhos nesta natureza é que desenvolvem capacidades diversas, de visualização e raciocínio visual, criativas e de sensibilidade estética, de motricidade e de destreza manual, tanto das crianças e jovens como dos educadores e professores que com elas trabalham.

Referências

Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar.* Edições Afrontamento.

Loureiro, C., & Regatão, J. P. (2019). Criação e construção de Pop-Up: Uma prática pedagógica entre as Artes Visuais e a Matemática. *Interações, 15* (50), 69-91. https://revistas.rcaap.pt/interaccoes.

Notas

Um agradecimento especial ao José Pedro Regatão que faz sempre as primeiras experiências de construção dos Pop-Up para anteciparmos a concretização e as potencialidades compositivas.

APROXIMAÇÕES À UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NOS 1.º E 2.º CICLOS

ÍNDICE

Ensino da geometria com o Geogebra — duas experiências em diálogo

Cristina Loureiro, Graça Pereira

No ano letivo 2020-21 iniciámos uma experiência inédita. Como formadoras estamos, em conjunto, a realizar uma oficina de formação sobre a utilização do Geogebra para aprender geometria, dirigida a professores dos 1.º e 2.º ciclos. Esta oficina foi organizada para ser alimentada por duas experiências de ensino, a decorrer em simultâneo, de cada uma das duas formadoras com os seus alunos. A diferença entre as duas experiências de ensino, da responsabilidade separada das formadoras, é que uma de nós, a Graça, está a trabalhar com crianças do 1.º ano de escolaridade e a outra, a Cristina, com alunos de uma licenciatura de formação de professores e educadores, na unidade curricular de geometria. Os propósitos, os conteúdos e as metodologias de cada uma das experiências são naturalmente muito diferentes. Porém, o facto de estarmos em contacto sistemático e em situação de partilha na ação de formação aproximaram muito as duas experiências, bem como o interesse por estabelecer ligações e por refletir em conjunto sobre as nossas experiências separadas e tão distintas.

Este texto é da responsabilidade das duas formadoras e é escrito numa fase avançada do ano letivo, em que as duas experiências de ensino estão a chegar ao fim. O nosso objetivo com a elaboração deste texto é partilhar algumas ideias que nos ajudam a refletir sobre o ensino da geometria com recurso a um ambiente de geometria dinâmica. Apesar de estarmos as duas em contacto sistemático para organizar e dinamizar as sessões de formação contínua, decidimos usar uma metodologia de diálogo real para refletir em conjunto e escrever sobre estas experiências. Este primeiro texto resulta, portanto, de um primeiro diálogo que gravámos e do qual retirámos as ideias mais significativas. Naturalmente que, conhecendo-nos mutuamente muito bem, focámos o diálogo e disciplinámo-nos para não dispersar nem misturar as reflexões.

Para este primeiro texto, selecionámos apenas a reflexão sobre a aprendizagem inicial das ferramentas do Geogebra. Decidimos, também, que será mais interessante recorrer a uma narrativa de discurso direto, seguida de uma breve conclusão. O diálogo que apresentamos é o primeiro de uma série cuja dimensão ainda não estabelecemos. Podemos, por isso, afirmar que as reflexões que apresentamos estão ainda em construção.

APRENDER A USAR AS FERRAMENTAS GEOGEBRA

— Sabes Graça, um dos aspetos sobre o qual tenho pensado muito é a aprendizagem das ferramentas geogebra. No ano passado, uma das razões porque eu acho que a minha experiência de utilização da geometria dinâmica falhou com os meus alunos foi porque não havia tarefas dirigidas para aprender a usar as ferramentas do Geogebra. Os meus alunos não tiveram qualquer curiosidade em ir descobrir e explorar, só por si, o ambiente dinâmico.

— Eu acho que com os pequeninos a atitude é diferente. A curiosidade é tanta, a vontade de explorar é tanta que eu tenho de funcionar um bocadinho sobre outra vertente.

— É por isso que elaboras as tarefas que mostraste para eles aprenderem a usar as ferramentas? Não sei se davas este nome?

— Chamo guiões. Tenho necessidade de elaborar o guião que é, precisamente, para os obrigar a parar um bocadinho naquele envolvimento e naquele entusiasmo todo e pensar naquilo que estão a fazer e dali tirar algum conhecimento matemático. A ideia que eu tenho é que para eles o computador e o tablet são jogos e, portanto, tudo é jogo e começam a encarar o Geogebra ou qualquer coisa que façam também como um jogo. Por isso, acham piada, exploram, mexem. Ao longo destes anos todos em que tenho usado o Geogebra, fui sentindo a necessidade de ter alguma coisa que os abrigue a parar, a pensar e a registar aquilo que vai acontecendo no computador, porque, se não, o entusiasmo é tanto que aquilo que eu quero que eles aprendam e que eles vejam ou a que estejam atentos passa um bocado ao lado.

— Disseste aí uma série de coisas extremamente interessantes. Há uma diferença tão grande na atitude que os teus alunos têm, que acho que isto deve ser discutido de uma maneira mais extensa e mais calma, mais desenvolvida. Isto significa que podemos falar só sobre este aspeto — como começar?

— Como este é o primeiro ano em que estou a trabalhar o Geogebra no 1.º ano, senti necessidade de começar com os conceitos mais simples, mais básicos e, ao mesmo tempo, ir trabalhando as ferramentas. Comecei com o ponto e daí foram surgindo outras ferramentas porque eles também vão desenvolvendo, vão questionando e vão eles próprios explorando (figura 1 – 1.º guião). Eu acho que é importante, sobretudo com os mais pequeninos, ter muitos momentos ou vários momentos para parar, para refletir sobre aquilo que está a acontecer no ecrã do computador porque, se assim não acontecer, eles encaram aquilo mais como jogo e a aprendizagem não tem, claro, os efeitos que nós estamos à espera.

— Foi a partir da observação dos teus guiões que decidi que tinha de iniciar de outra maneira com os meus alunos. Eu tinha de começar com o sentido de que cada aluno vai ter que aprender a usar um conjunto de ferramentas com o objetivo de as usar para construção de conhecimentos geométricos. E esta relação é muito interessante. No teu caso, se tu não orientares o caminho de exploração, o entusiasmo deles é tão grande que não há reflexão sobre o que estão a aprender, sobre o que está a acontecer. No caso dos meus alunos, se eu não orientar não acontece nada. Como não há curiosidade e como não reconhecem o potencial de cada ferramenta não avançam. E não há o entusiasmo lúdico e de exploração que os teus miúdos têm, eles não fazem nada. Isso foi o que eu senti no ano passado. Simplesmente, a maior parte dos alunos não explorava por si. Ensinar a utilizar as ferramentas teve que passar a ser um objetivo. E teve que ser um objetivo, com tarefas muito orientadas e muito autónomas.

— **É engraçado pensar na enorme diferença entre as nossas intenções.**

— Ou seja, aquelas orientações não são guiões, eu não chamei guiões, chamei tarefas autónomas. Embora não tendo esta designação foi sempre o que foi dito aos alunos, são tarefas autónomas que nem sequer chegam a ser discutidas, porque a maneira como são construídas é no sentido de que os estudantes possam desenvolver a sua aprendizagem sozinhos. Paralelamente a estas tarefas havia outras focadas nos conceitos geométricos, estas sim discutidas. Eu utilizo vários tipos de tarefas: as tarefas para aprender a usar as ferramentas geogebra e conhecer as funcionalidades do ambiente de geometria dinâmica; as tarefas geométricas para trabalhar os vários tópicos de geometria; e a resolução de problemas que também é outra componente das tarefas propostas. Há aqui uma diferença muito grande, porque para ti, as tarefas eram as tarefas.

— Eles são pequeninos, no 1.º ano eles não sabem ler e por isso há ali muita intervenção da professora. Eu normalmente chego à sala, apresento a tarefa e tenho de o fazer antes de mandar abrir o tablet, se não já não consigo cativar a atenção deles para aquilo que quero explicar, abro o Geogebra e apresento a ferramenta. Normalmente até faço assim: numa aula eles exploram livremente a ferramenta. Eles vão falando e eu vou passando e vou vendo o que eles estão a fazer e se se aproximam daquilo que eu quero trabalhar com aquela ferramenta.

— Então não se passa tudo na mesma aula? E como é que estão organizados na aula?

— Não. Nessa primeira aula, enquanto fazem a exploração livre da ferramenta, eu vou questionando enquanto decorre o trabalho em pares ou individualmente. No final, eu pergunto sempre o que conseguiram fazer com a ferramenta. Eles vão dizendo e há sempre um que conseguiu ir um bocadinho mais longe. Vamos partilhando e eu registo o que fizeram com aquela ferramenta. Depois, na aula seguinte, já trago o guião da tarefa.

— Mas há um grande período de tempo entre as aulas dedicadas ao Geogebra porque há outras atividades de outras áreas intercaladas.

— Só trabalhamos um tempo por semana. Depois da primeira exploração da ferramenta, na semana seguinte, quando lhes trago o guião, relembramos o que é possível e o que conseguiram fazer com aquela ferramenta e então aí sim, eles vão seguindo os passos do guião e vão fazendo aquilo que é proposto. Mas mesmo assim, eu tenho de andar muito próximo deles porque eles ainda não conseguem ler e também não conseguem reter mais de duas ou três orientações seguidas. Portanto eu vou andando, vou fazendo muitos momentos de pausa e são eles que vão orientando muito a aula, também. Se há um que levanta uma questão e, se vejo que estão muito envolvidos noutra coisa avanço, mas depois paro para explicar ou questionar se alguém sabe responder àquela questão do colega. E normalmente há sempre um ou outro que sabe.

— Acabas por partir muito do que eles são capazes de fazer sozinhos.

— Os meus alunos sabem muito sobre as funcionalidades tecnológicas. Por exemplo, hoje houve necessidade de falar no botão direito do rato para fazer a seleção de uma figura para depois a refletirem. Os que tinham tablet, não sabiam onde tinham o botão direito do rato e houve um que logo explicou "pões lá o dedo e esperas um bocadinho que logo aparece e depois já consegues fazer".

CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

— Portanto, são eles próprios que vão orientando. Para que haja de facto conhecimento matemático, tem que haver momentos de pausa, momentos de reflexão e no final uma síntese daquilo que aprenderam. Há sempre essa síntese do que aprenderam e outra ideia importante é que há muitas coisas que eles aprendem por si. Por exemplo, o que é um segmento de reta? Eu nunca expliquei, nunca senti necessidade de lhes explicar o que é um segmento de reta. Como os alunos usam, vão construindo o conceito. Depois, por acaso, surgiu a questão da diferença entre uma reta e um segmento de reta e eles, através da experimentação e da observação, foram dizendo o que achavam que era um e o que era outro.

— E o que é que eles achavam que era um e outro?

— Eles achavam que o segmento de reta tem um ponto para começar e um ponto para terminar e foi assim que eles disseram: "fazemos um ponto para começar e desenhamos outro ponto e ele termina e a reta nós desenhamos e por mais que se ande com a folha para um lado e para o outro não se consegue perceber onde é que ela começa e onde é que ela acaba, mas também tem dois pontos". Eles veem os dois pontos na reta, mas não veem onde ela começa nem onde acaba e "o segmento de reta até pode ser um bocado da reta". Portanto, são conceitos que eles vão construindo e eu acho que a imagem e a representação mental que eles vão criando, se calhar é presunção da minha parte, ou também porque gosto muito de Geogebra e já não sei trabalhar de outra maneira, mas eu acho que em lado nenhum conseguiriam construir uma representação, uma imagem mental tão correta e sozinhos praticamente, sendo depois só necessária a reflexão e a sintetização daquilo que eles vão construindo.

— Esse relato é muito interessante. E deixa-me dizer que eu comecei por ter os meus alunos a reagirem muito mal e alguns deles a quererem que o uso da geometria dinâmica não fosse obrigatório na unidade curricular. Nas primeiras semanas havia uma resistência enorme e numa conversa que tivemos eu disse: podemos mudar tudo menos a geometria dinâmica. Todo o trabalho que vamos realizar nesta unidade tem de ser feito com recurso ao Geogebra. Claro que eles foram ultrapassando a resistência e algumas semanas depois uma aluna disse-me — "Tenho uma coisa muito interessante para lhe dizer. Eu dou explicações a miúdos do 5.º e 6.º anos e a única maneira que eu encontrei para que eles percebessem, finalmente, a diferença entre reta, semirreta e segmento de reta foi usando o Geogebra". Exatamente o que tu estás a dizer.

— Pois é. Eles mexiam, mexiam, arrastavam, arrastavam e comentavam "isto nunca mais acaba". E como este muito outros conceitos que eles vão adquirindo.

— A minha aluna acabou ainda por dizer — "Tenho que reconhecer que o recurso à geometria dinâmica, do ponto de vista visual, cria condições para uma compreensão diferente. Os miúdos conseguem, de facto, entender o que é não ter princípio nem fim, que é uma ideia muito forte relativamente à reta. O Geogebra dá precisamente essa ideia porque por mais voltas que deem nunca aparece o fim nem nunca aparece o princípio."

— Mas o professor tem de os ir questionando também, porque se não houver ali uma intervenção orientando-os e, sobretudo, questionando-os, as coisas passam ao lado. Eles veem, mas se não se perguntar o que é e porque é que é, nem sequer pensaram, nem se construiu dali um conhecimento que ficasse, que eles interiorizassem como algo importante e algo que aprenderam.

— É por isso que eu não podia ceder. Podia ceder em tudo, mas não podia ceder no recurso ao ambiente dinâmico e teve de ficar claro para eles que isso era completamente intocável porque eu estou completamente convencida que era isso que iria fazer a diferença. Não era nos conteúdos, os objetos a estudar poderiam ser triângulos ou quadriláteros, não era aí que estava a diferença. A diferença estava exatamente na geometria dinâmica e na forma de trabalhar as relações geométricas com base numa experimentação com todas as caracteristicas que um ambiente desta natureza possibilita. Assim como tu também estás completamente convencida, e porque estás convencida também investes desta maneira, também tens essa atitude sobre a construção do conhecimento geométrico e da sua importância na construção do conhecimento matemático.

— Claro que sim. Daí a minha persistência na utilização do Geogebra como ferramenta de aprendizagem e como aprendizagem propriamente dita. Os alunos constroem conhecimentos com as ferramentas, uma vez que elas incorporam muitos conceitos matemáticos, e com as atividades que realizam com essas ferramentas.

— Felizmente que me mostraste os guiões que estavas a usar com os teus miúdos. A tua orientação das tarefas influenciou-me bastante. A ideia principal foi a de que houvesse algum objetivo de aprendizagem matemática, portanto não era só usar a ferramenta pois esta tinha que servir para uma aprendizagem matemática específica. Eu acho o teu primeiro guião sobre os pontos (figura 1), em que questionas o que é possível fazer com três pontos, um guião muito bem pensado. Esse guião influenciou muito esta minha nova forma de encarar a necessidade de aprender a utilização das ferramentas Geogebra. O que é possível fazer com três pontos é uma perspetiva matemática da utilização da geometria muito interessante para aprender a usar as ferramentas com o objetivo de aprender matemática. Não se trata de aprender a usar as ferramentas só porque sim, e esse potencial é inerente a toda a matriz concetual dos ambientes de geometria dinâmica e tem que ser trabalhado também.

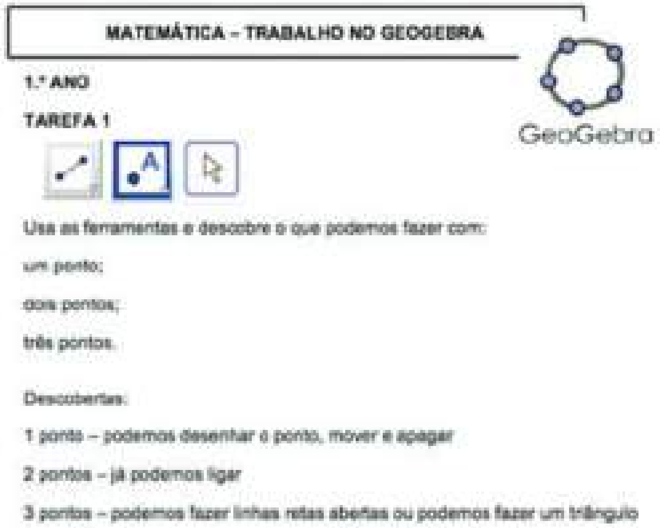
— Os guiões são pensados numa perspetiva de orientar/focar os alunos na realização da tarefa, explorando as ferramentas que lhes permitam construir os conceitos geométricos e avançar na aprendizagem matemática.

— Claro que a tua dinâmica de aulas é muito diferente da minha, pela diferença de idades e pela diferença de objetivos de aprendizagem. Eu quero que estes meus alunos, para além de aprenderem geometria, desenvolvam um conjunto de competências e de atitudes e, também, que ao desenvolvê-las, enquanto adquirem conhecimentos de geometria, comecem também a ter uma perspetiva didática sobre esses conhecimentos. Eles estão a aprender geometria para irem ensinar geometria às crianças pequenas.

COMENTÁRIOS FINAIS

Com este primeiro diálogo pretendemos evidenciar algumas ideias em jeito de conclusão deste primeiro diálogo:

- A necessidade de criar tarefas de aprendizagem sobre as ferramentas e funcionalidades do ambiente de geometria dinâmica (guiões no caso do 1.º ano de escolaridade; tarefas autónomas com os estudantes adultos).
- O enorme poder de aprendizagem de conhecimentos geométricos inerente à utilização do ambiente de geometria dinâmica (AGD). Um AGD é uma representação do plano em que estão integrados os instrumentos comuns da geometria: a régua, o esquadro, o compasso, o transferidor. É importante destacar que um ponto livre num AGD representa qualquer ponto do plano e, por isso, ao trabalhar com um ponto livre estamos a trabalhar com todos os pontos do plano. Temos presente à nossa vista e podemos manipular o caráter infinito do conjunto de pontos do plano.
- A natureza de dependência dinâmica entre um ponto livre e um ponto construído, entre os elementos livres de uma construção e os elementos construídos a partir dos elementos originais. É esta dependência e a sua manipulação que nos permite explorar e conhecer as propriedades dos objetos geométricos construídos, por mais simples que eles sejam.
- O valor insubstituível de um AGD na construção do raciocínio espacial perante objetos geométricos que o sujeito cria ou constrói, que observa, analisa e manipula.


MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA

1.º ANO

TAREFA 1

Usa as ferramentas e descobre o que podemos fazer com:

um ponto;

dois pontos;

três pontos.

Descobertas:

1 ponto – podemos desenhar o ponto, mover e apagar

2 pontos – já podemos ligar

3 pontos – podemos fazer linhas retas abertas ou podemos fazer um triângulo

Figura 1. 1º Guião usado no 1º ano de escolaridade

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Graça Pereira
Agrupamento de Escolas de Alapraia

Da reflexão à construção de figuras com simetria de reflexão

Cristina Loureiro, Graça Pereira

Poucas vezes deixamos os alunos fazer descobertas livres. Um ambiente de geometria dinâmica é precisamente, como o próprio nome indica, um ambiente propício à exploração livre. As ferramentas do ambiente são tão poderosas que, só por si, permitem fazer grandes descobertas.

Neste artigo vamos dialogar sobre as descobertas dos alunos, numa exploração livre, a partir da utilização de uma ferramenta muito simples, uma transformação geométrica, neste caso a reflexão.

Antes de iniciarmos o nosso segundo diálogo, recordamos que no artigo que precede este[1], a situação apresentada pedia simplesmente aos alunos que descobrissem o que podiam construir com um, com dois e com três pontos no GeoGebra. Retomamos agora esta ideia.

EXPLORAÇÃO LIVRE PELOS ALUNOS

— Graça, vale a pena ligar este diálogo com a primeira tarefa que tu fizeste com os teus alunos do 1.º ano e que foi uma tarefa completamente aberta. Digo isto porque tu pediste aos alunos para descobrir o que poderiam fazer com um, dois e três pontos. A tarefa não tinha um objetivo direto de trabalhar alguns aspetos das propriedades das figuras. A proposta era simplesmente experimentar e descobrir. Este tipo de questões nós nunca faríamos com régua e compasso. Nunca proporíamos aos miúdos — O que consegues fazer com um ponto? Eles iriam responder — Nada. O que consegues fazer com dois pontos? Se calhar voltavam a responder "nada". Mas com recurso ao ambiente de geometria dinâmica fez todo o sentido fazer aquela proposta e eles fizeram descobertas muito interessantes. Não sei se tu concordas com esta ideia de que são explorações em aberto.

— Eu chamo exploração livre.

— A primeira questão que quero colocar é se te lembras de outras experiências com o GeoGebra em que proponhas este tipo de descobertas em aberto. Exploração livre é uma boa designação. Não estou só a pensar na experiência deste ano, podes recordar exemplos de outros anos.

— Sempre que introduzo uma ferramenta nova, o primeiro contacto é sempre uma exploração livre. À medida que os alunos estão a explorar, vou circulando pelos lugares, vou vendo o que eles estão a fazer, vou ouvindo os seus comentários e vou retirando os aspetos que considero importantes para aquilo que quero trabalhar com aquela ferramenta. É com base nesses comentários que os alunos vão fazendo, que eu depois construo o guião. Normalmente dou sempre um tempo para fazerem a exploração livre de qualquer ferramenta. Aconteceu isso com a reflexão e, em anos anteriores, também aconteceu com outras ferramentas, como por exemplo, com a circunferência, com a reta paralela, com a perpendicular, com o polígono regular. Apresentei sempre as ferramentas. Os alunos iam explorando livremente e eu ia vendo o que faziam e o que comentavam.

— Mas como é que lhes apresentas a ferramenta, como é que a introduzes?

— Quando foi o trabalho sobre a reflexão, a isometria, eu estava no quadro interativo e à medida que ia mostrando aquela ferramenta eles iam acompanhando. Eu escolhi um triângulo para começar, porque foi a figura que vinha sendo trabalhada já desde o início. Desenhei um triângulo e recordei que já tínhamos trabalhado com essa figura quando trabalhámos o quarto de volta e a meia volta. Disse que íamos usar aquela ferramenta (reflexão em relação a um eixo) e expliquei como iríamos fazer. Fiz uma reta e eles iam acompanhando. Eu fazia e eles faziam. Desenhei uma figura, o triângulo e, a maioria dos miúdos fez como eu, o que normalmente acontece quando apresento um exemplo. E, portanto, experimentaram e desenharam um triângulo.

— E a reta que vai ser o eixo?

— Antes de falar na reta expliquei que tínhamos de selecionar a figura, e aí houve de facto alguma dificuldade porque alguns alunos não sabiam como selecionar a figura. Os miúdos ajudaram-se muito, sobretudo os que tinham *tablet,* porque não sabiam como haviam de fazer. Então, quando um miúdo descobriu, explicou aos outros como se fazia. Punham o dedo em cima do triângulo e arrastavam. A partir dali, os que já sabiam ajudavam os outros. Para os que tinham o computador foi fácil porque viam como eu fazia no quadro interativo. Depois disso, disse que tinham de clicar na reta e, logo que cliquei, viram o que acontecia. Eles viram de facto a imagem refletida e foi aí que surgiram os primeiros comentários. Depois foram experimentando...

— E o sinal de que estas experiências foram bastante significativas são os comentários dos miúdos.

— A primeira coisa que ouvi de uma miúda foi — Ah! É o reflexo! Faz reflexo! Quando clico aqui (na reta) faz reflexo! A partir dali eu deixei-os trabalhar e, quando perceberam o que podiam fazer com a ferramenta, começaram a fazer figuras e

[1] Educação & Matemática nº 160, pp. 30-32

desenhos. Eu ia passando, questionava-os sobre o que viam e incentivava-os a mexer, mover, experimentar.

— Espera um pouco. Parece-me importante que fique bem claro como decorre esta primeira exploração livre quando há uma ferramenta nova para aprender a usar e qual é a natureza das descobertas que as crianças fazem.

— Eles começaram a mexer e viram que havia ali algo que se mantinha. Mexiam no objeto e a imagem tinha um determinado comportamento. Ao mexerem na reta tinha outro comportamento. E iam falando destas coisas. Foram duas aulas de exploração livre, pois não fazem todos ao mesmo tempo. Alguns conseguem fazer logo e acompanhar, outros nem por isso. Então uns ajudam os outros e quando há um número grande de alunos que consegue fazer esta parte da tarefa, avançamos. Mexem na figura, movem os pontos, movem a reta e vão vendo o que vai acontecendo. E é nesta altura que exploram livremente.

— Parece-me que ficou muito claro porque esta ferramenta da reflexão é super simples de utilizar. Houve só aqui o pequeno problema de como selecionar, mas depois a utilização é imediata e o impacto é muito grande. Talvez seja por isso que essa miúda teve essa reação tão forte.

— Uau! Ela fez uma grande exclamação. Ficou muito admirada ao ver que clicando ali (na reta) aparecia a figura do outro lado. E quando ouvi é o reflexo eu não disse nada, deixei-os continuar. Fui passando por eles e perguntei: — então isso é o reflexo do quê? — É aquela figura que está aqui refletida, é como quando nós estamos ao espelho – explicou. Depois foram relacionando o que faziam, com o que acontecia. No final da aula já abri o diálogo a todos os alunos, para ver se todos tinham visto acontecer aquilo que a Rita tinha identificado. A Rita foi a primeira que, ao experimentar, viu a reflexão a acontecer.

A DINÂMICA GERADA PELA EXPLORAÇÃO LIVRE

— E o teu incentivo para experimentar foi uma grande ajuda. Sugerias que manipulassem o objeto ou a reta?

— Eu fui dizendo sempre para mexerem à vontade: — Podem mexer nos pontos, podem mexer na reta, podem movimentar, podem esticar, podem encolher. Eles, ao mover, iam fazendo comentários. — Ó professora, quando mexo neste, que é a imagem, nenhum se mexe, só se movimenta quando mexo na primeira que fiz (para eles, naquele momento não era objeto, mas a primeira imagem que tinham desenhado). Uns questionam os outros: — Tu viste, então também vou experimentar. E vão comentando. — Ao movimentar a reta, um afasta-se para um lado e o outro afasta-se para o outro. E todos vão experimentar porque ouviram um colega dizer. E eles não deixam passar! Quando algum não consegue ver o que outro colega viu, e isto é geral, alguém tem que ir ajudar. Ou o colega, ou eu, ou o outro professor que também está na sala, que é o professor do apoio educativo e que costuma estar comigo. Alguém tem de lá ir! Não desistem e insistem quando não veem aquilo que outros colegas já viram.

— Isso é muito engraçado.

— Mesmo aqueles miúdos que têm mais dificuldade acabam, no final, por sentir um prazer enorme porque também conseguiram ver. Viram aquilo que todos viram. Acho que o que ali sentem é de grande importância. Afinal também conseguiram! E isso é muito bom.

— Essa ideia agora que deste do estímulo positivo que essa situação provoca e o apelo a todos quererem ver é uma coisa muito interessante mesmo. É muito envolvente de facto. Uma pequena descoberta de um aluno tem um impacto enorme porque apela de uma forma alargada ao envolvimento dos outros.

— O sentido da descoberta e a vontade de experimentar são muito fortes nas crianças.

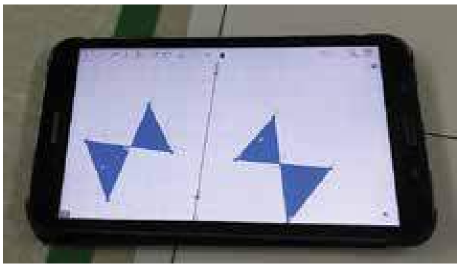
— Disseste que tinhas começado pelo triângulo, mas nas fotografias que vi estão outras figuras. E também me dá a impressão de que existem figuras que parecem sobrepostas.

— Sim, havia. Depois do triângulo eles desenharam aquilo que quiseram. Desenharam outro tipo de figuras. O triângulo foi o exemplo inicial. Depois disso foram explorar com outras figuras e não se limitaram àquilo que foi o início. Havia ali alguns que eram quadriláteros, mas fizeram imensas figuras variadas. O triângulo foi só mesmo para introduzir e para eles verem o que acontecia.

— Fico aqui com uma curiosidade. Mesmo quando desenhavam mais figuras usavam a mesma reta como eixo de reflexão?

— Sim. Na primeira abordagem usavam sempre a mesma reta. Iam arrastando a folha e iam fazendo a imagem noutro espaço da folha. Mas era sempre a mesma reta.

— Numa das fotografias há uma figura que me chamou a atenção, e que acho muito interessante.



— É uma que me parece ser originalmente um quadrilátero.

— São dois triângulos?

— Mas não são. É de facto um quadrilátero[2].

— Exatamente. É um quadrilátero que o miúdo faz ficar com os lados cruzados. Ele cruza os lados do quadrilátero. E é muito forte aqui a ideia da inversão da reflexão. Vê-se muito bem.

— Pois vê.

— Se o ponto de partida tivesse sido um quadrado, se calhar há descobertas que não tinham sido tão sensíveis para eles. E isto é uma ideia que eu acho muito valiosa porque é a perceção de que

[2] Assume-se uma definição de polígono que não exclui a possibilidade dos lados se intersetarem. Num ambiente de geometria dinâmica esta é a situação comum para a ferramenta que permite construir um polígono com um dado número de lados.

a reflexão inverte a figura. E nessa fotografia é muito evidente.

— Eles diziam que ficava ao contrário.

— A outra ideia que também é interessante é uma em que ele puxa a figura para cima do eixo. O objeto e a imagem ficam com pontos comuns sobrepostos ao eixo.

— Essa foi aquela em que o miúdo disse que parecia um vestido. (risos) Parecia um vestido e tem ao lado outros triângulos.

— Esta ideia de eles puxarem o ponto para cima do eixo é uma ideia muito boa também. No fundo é uma propriedade interessante da reflexão, os pontos do eixo não se alteram, digamos assim.

— E eu lembro-me que, não sei se foi um miúdo ou se foi uma miúda, que disse que parecia um vestido, e a colega que estava ao lado disse: — E parece uma figura só, tem metade para um lado e metade para o outro. Portanto aqui, embora não de forma explícita, já estava a identificar o eixo de simetria da figura. A figura ficou com um eixo de simetria. Quando surgem este tipo de comentários, eu coloco o comentário à discussão. Digo em voz alta: — A Clara descobriu ... e disse isto. O que é que vocês acham? Eles vão fazendo comentários e logo a seguir vão experimentar. Se não é com esta figura é com outra. Vou fazendo assim ao longo da exploração, também.

— Mas agora voltaste a evidenciar outro aspeto muito forte deste caminho que aqui foi seguido. É uma maneira genial de ligar a reflexão com a construção de figuras com simetria de reflexão. Naturalmente, esta exploração livre leva-os exatamente a essa situação. Levou-os exatamente a essa situação que disseste. Quando eles fazem os comentários sobre metades da figura é excelente. Mas o ponto de partida foi a reflexão. Um objeto e uma imagem completamente separados, completamente distintos. E depois a dinâmica do ambiente é que permite fazer isto.

— Sim, sim.

— Lá está. Há aqui um potencial que cria uma série de situações, que se não fosse a geometria dinâmica não aconteceriam. Isto não aconteceria com papel e lápis.

— Não acontecia seguramente. Aliás, a reflexão não é do programa do 1.º ano e eu não me atreveria a trabalhá-la se não fosse no GeoGebra.

— Claro.

— Nem acho que os alunos, mesmo que eu fizesse com recortes, com o borrão de tinta, com dobragens, com…., nunca conseguiriam ver aquilo que conseguem ver no ecrã do computador. Eu gosto muito do GeoGebra!

— E a outra miúda que faz um desenho que parece uma boneca? Como é que aparece esse desenho de uma menina?

— Esta miúda, depois de fazer com o triângulo, não foi experimentar com outras figuras. Esta partiu logo para o desenho e, portanto, também aparece ali a boneca. Ela inicialmente fez a boneca e estava só a movê-la, mas depois do miúdo do vestido ter dito que tinha conseguido fazer o vestido, que a reta ficava no meio e que ficava metade para um lado e metade para o outro, ela foi experimentar com a boneca.

— Fica a boneca sobreposta. Lembras-te do que a miúda disse?

— Disse que ela conseguia fazer com a boneca aquilo que o colega tinha feito com duas figuras. Fez duas bonecas (sendo uma a reflexão da outra) e conseguiu sobrepor. Foi aqui que ficou, eu acho, bastante vincada a questão de a imagem ser congruente. Acho que ajudou a reforçar bem essa ideia. Ela fez uma boneca, refletiu-a e, ao tentar sobrepor, concluiu que as bonecas coincidiam, que a imagem era mesmo igual.

— Como é que ela desenhou a boneca no GeoGebra?

— Ela desenhou com o dedito. No tablet há um acesso a um lápis digital para desenhar. Não é com figuras geométricas. Embora esta miúda tenha feito a boneca a partir do triângulo. Ela fez o corpo, o triângulo, e depois acrescentou o resto dos elementos que desenhou com o dedo.

— Graça, depois desta descrição parece-me evidente que este texto deve ter como título — Da reflexão à construção de figuras com simetria de reflexão. Tu concordas?

— Sim, concordo. E depois na tarefa seguinte podemos ver como pensei o guião a partir destas ideias e comentários da exploração livre.

— Completamente de acordo. É essa perspetiva que acaba por estar aqui muito evidente, que é a exploração livre, que te dá ideias para depois decidir o que deve ser, ou pode ser a orientação a seguir. Fascina-me o modo como a liberdade para experimentar, neste ambiente, proporciona condições para que a curiosidade contagiosa das crianças conduza a experiências e descobertas tão ricas.

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
Graça Pereira
Agrupamento de escolas de alapraia

Propriedades da reflexão (isometria) e a sua utilidade ao alcance das crianças

Cristina Loureiro, Graça Pereira

Este texto tem por base uma experiência que evidencia o modo como as propriedades de uma transformação geométrica, a reflexão, estão ao alcance dos alunos ou, melhor, como é que as experiências realizadas num ambiente de geometria dinâmica e o potencial de descoberta que podem proporcionar permitem uma apropriação notável das propriedades das isometrias e a associação às propriedades de simetria de uma figura geométrica.

A realização desta experiência contemplou mais do que uma tarefa e vários momentos de trabalho. Optámos por dividir a sua descrição em duas partes para focar, com mais possibilidades de pormenor, as aprendizagens realizadas pelos alunos. A primeira parte foi já exposta e refletida no texto apresentado na revista Educação & Matemática n.º 160. A leitura deste texto agora, embora autónoma, apresenta duas ligações explícitas ao artigo anterior que se encontram assinaladas com uma chamada de atenção.

No que respeita à forma, este artigo mantém o formato de um diálogo entre as duas autoras, por analogia com outros textos apresentados anteriormente. Metodologicamente, estes diálogos são realizados via zoom e, depois, transcritos. O texto é elaborado com base na transcrição e é finalizado pelas duas autoras em parceria.

AS PROPRIEDADES DA REFLEXÃO DESCOBERTAS PELOS ALUNOS

Graça, lembras-te quando escrevemos a propósito da exploração da tarefa sobre a reflexão, a certa altura tu referiste as propriedades que os alunos descobriram, mas então decidimos não desenvolver essas ideias no artigo que já escrevemos[1]. Eu considero essa parte das descobertas que os alunos fizeram tão valiosa, tão interessante, que agora devíamos retomar. Podemos só falar nas propriedades que eles descobriram para a reflexão. Não achas?

Sim, até porque vou retomar esse assunto e é importante revisitar aquilo que disseram na altura. Elaborei, então, a seguinte lista em que registei as expressões dos alunos:

- **Quando movemos o triângulo, o que está refletido move-se no sentido contrário.**
- **Quando movemos a reta só move o reflexo.**
- **Se tentarmos mover o triângulo refletido, não dá.**
- **Quando fazemos a reflexão o triângulo fica à mesma distância da reta.**
- **A reta é como um espelho.**
- **Quando juntamos a reflexão com o triângulo, fica uma figura só. (Ainda com a reta no meio).**
- **Quando refletimos o triângulo, aparece do outro lado um triângulo igual. Só muda a posição.**

Podemos ir analisando as afirmações mais significativas e que são fundamentais como propriedades da reflexão como isometria. Começamos pela última desta lista.

Eles descobriram que a imagem é igual ao objeto, ou seja, o reflexo é uma imagem igual. É claro que não falaram em congruente, que também não era suposto, mas foram muito expressivos e convictos a destacar que é uma imagem igual.

Achei a tua descrição muito engraçada, principalmente a maneira como eles se aperceberam disso e como destacaram uma imagem igual ao objeto. Queres explicar o fim da frase "só muda a posição".

Como estas descobertas são feitas com grande dinamismo e movimento dos dedos no ecrã dos tablets, eles destacaram o facto de que a posição do eixo de reflexão não alterava a igualdade da imagem, apenas alterava a posição. E isso aconteceu quando fizeram a tarefa com o triângulo (Figura 1) e mais tarde com o quadrado (Figura 2).

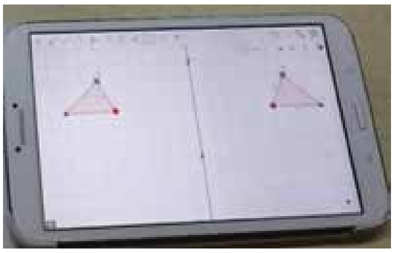


Figura 1

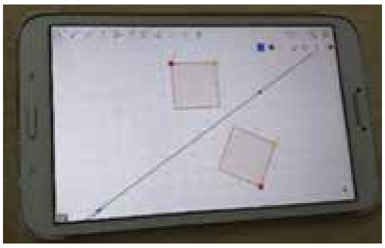


Figura 2

Outra descoberta, que esteve muito relacionada com os movimentos de arrastamento das figuras, foi que a distância da reta ao objeto que tinham desenhado era a mesma que da reta à imagem.

[1]Educação & Matemática n.º 161, pp. 23-25

Observavam isso quando tentavam aproximar o objeto ao eixo de reflexão. Isto é, se a distância do objeto à reta diminuía ou aumentava, também diminuía ou aumentava a distância da imagem à reta.

A questão da distância foi muito evidente e significativa para eles.

A congruência entre objeto e imagem e a igualdade da distância ao eixo são duas propriedades importantes a registar. Explica agora a primeira ideia da lista *"Quando movemos o triângulo, o que está refletido move-se no sentido contrário."*

Esta ideia também decorre das muitas movimentações que experimentavam. Quando os alunos movimentavam o objeto recorrendo ao cursor, se ele se afastava para o lado esquerdo, a imagem ia para o lado direito.

Havia uma inversão no sentido.

Sim, e eles observavam essa inversão do sentido. A mesma coisa em relação aos pontos. Eles tinham destacado os pontos, alterando o estilo e a cor que o GeoGebra permite. Viam que se um ponto estava do lado direito no objeto, na imagem estava do lado esquerdo e, portanto, a figura estava ao contrário.

Que é outra maneira de reforçar a inversão. O objeto rodava para um lado, a imagem rodava no sentido contrário. Associando esta variação com a mudança de posição dos vários elementos do objeto relativamente à posição dos mesmos elementos depois na imagem, fica ainda mais forte a perceção da inversão.

UTILIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES

Além dessas três ideias há, ainda, outro aspeto muito significativo que surgiu quando eles tentaram sobrepor o objeto e a imagem e juntaram, sobre a reta, o ponto do objeto e o ponto da imagem. Muitos deles disseram que ali parecia uma figura só com a reta no meio. A reta ficava no meio das duas figuras e sobre a reta ficavam pontos que coincidem, como é o caso do ponto assinalado a azul na figura 3.

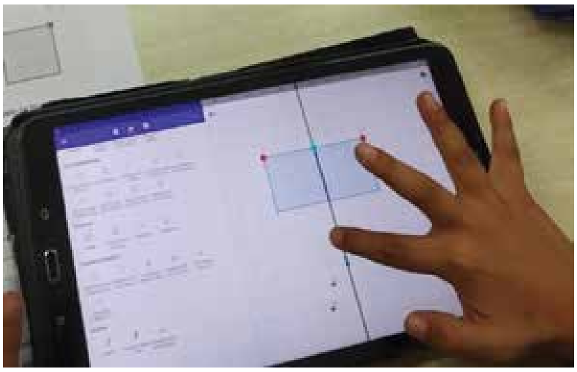


Figura 3

Na imagem da figura 3 vê-se muito bem que o vértice de um dos quadrados, assinalado a azul, coincide com o vértice da imagem. Além disso o lado de um dos quadrados coincide com o lado do quadrado imagem. Ficam ambos sobrepostos ao eixo de reflexão.

É neste tipo de situações que sinto os miúdos a compreender e a apropriarem-se das relações geométricas. A visualização é muito forte e, associada ao dinamismo que o ambiente permite, dá vida a essas relações. Quando observo, vejo que as manipulações não são feitas ao acaso, há intenção por parte das crianças de observar o que acontece. Este aluno moveu o eixo até ele coincidir com um dos lados do quadrado objeto. E claro, foi vendo o quadrado imagem a aproximar-se até que os lados coincidiram.

As tuas descrições apontam para a compreensão das propriedades da transformação geométrica, neste caso da reflexão. São ideias um bocadinho abstratas, mas que desta forma dinâmica e muito informal acabam por ser muito percetíveis para os alunos. Para eles foram conclusões muito fortes.

Esta compreensão das propriedades das isometrias é algo que geralmente não se trabalha, não se valoriza. E vale a pena, penso que desta maneira vale a pena valorizar e discutir, porque embora ao nível destes miúdos não se vá avançar com tarefas mais elaboradas sobre a reflexão, elas são fundamentais para construir o conceito de isometria e distinguir as isometrias umas das outras. Mesmo só estando ainda a trabalhar a reflexão, estes miúdos já estão a perceber que há caraterísticas próprias da reflexão.

Quando eles fizeram esta tarefa tinham de desenhar no guião, com quadriculado, a reflexão feita no tablet. E surgiram erros nessa representação. Alguns alunos foram apresentar e houve colegas que disseram — mas essa não está bem, porque ali tem 2 quadradinhos (referindo-se à distância da reta ao ponto vermelho da imagem) e da reta ao objeto tem 4 quadradinhos. Não está bem porque se tem 2 até à imagem, também tem que ter dois até ao objeto. Acho que isso foi muito claro para eles (Figura 4).

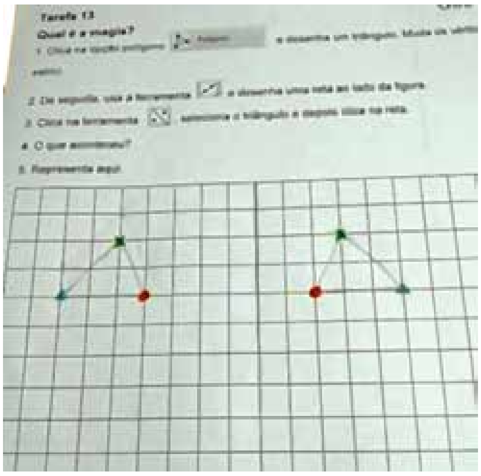


Figura 4

Também, quando eles movimentam a figura num sentido e veem que a outra se movimenta no outro, o próprio andamento da figura reforça essa questão da distância. Arrastam o objeto um, dois, três… quadradinhos e com a imagem acontece o mesmo ou quando eles movem mais

rápido, a outra também se move mais rápido. Ali, aquela questão visual é muito importante.

Acho que disseste uma coisa importantíssima. Quando queremos utilizar as transformações geométricas é importante saber identificar erros como esses que tu disseste agora. Ser capaz de perceber que numa construção há alguma falha porque não pode ser uma reflexão, ou se for uma reflexão está mal representada, é um sinal claro de compreensão. É, exatamente, uma evidência da utilização das propriedades. Foram os próprios alunos que se apropriaram das propriedades e que estão a ser capazes de as utilizar para verificar, ou para confirmar se uma representação está bem feita ou não. Esta apropriação é muito valiosa. Quando vierem a trabalhar outras transformações, vão perceber que, por exemplo, numa translação não há inversão pois a imagem é como que um deslizamento do objeto. Quando eles trabalharem outras transformações a utilização das propriedades vai ser mais forte. O que eu acho que é de valorizar é que estes miúdos estão a compreender o conceito de transformação geométrica e vão ser muito mais sensíveis às propriedades de uma transformação geométrica quando trabalharem com outras.

Acredito que sim, pois são ideias que eles vão construindo através da experimentação e da interação com o que vai acontecendo no ecrã do tablet e, ao mesmo tempo, com as construções dos colegas que partilham, discutem e corrigem. E tudo isto, facilitado pelo dinamismo que o GeoGebra permite e pela predisposição dos alunos para explorar estas ferramentas.

Claro que a escolaridade é longa e, possivelmente, só muito mais à frente vão contactar de novo com esse assunto. Mas há uma sensibilidade diferente que eles vão ganhando.

Sensibilidade essa que, muitas vezes, me obriga a reformular ou até mesmo a aprofundar as tarefas que lhes proponho. Muitas vezes são eles a propor tarefas para experimentar.

E também nos pode fazer pensar que é possível proporcionar aos alunos aprendizagens interessantes que o currículo não previu, mas que o professor tem abertura para isso. Tu estás a trabalhar conteúdos que não fazem parte do programa do 1.º ano, não é? Só vêm mais para a frente.

De facto a geometria dinâmica permitiu-me ir além do prescrito para o 1.º ano, relativamente às questões abordadas, e permitiria trabalhar muitas outras coisas.

Há um aspeto de que ainda não falámos, mas que pode ser interessante. Na tua perspetiva, em que medida é que as descobertas dos alunos ultrapassaram o que tinhas previsto, ou não? Houve ali alguma novidade, digamos assim, para ti.

Tratando-se de um 1.º ano, o facto de eles terem percebido que a distância da imagem e do objeto à reta é a mesma foi para mim uma surpresa. Sobretudo porque eles chegaram lá sem eu lhes pedir, especificamente, contrariamente a outras situações em que lhes foco a atenção em determinado aspeto. E esta surgiu mesmo naturalmente. Foi na conversa entre eles, quando estavam a aproximar e a afastar o objeto e a mover a reta para sobrepor objeto e imagem. E depois terem tido isso em atenção, quando representaram no quadriculado, ou terem verificado que havia representações erradas devido a esse facto, surpreendeu-me porque não é muito habitual. Eles movem a figura e observam que uma vai num sentido, outra vai em sentido contrário, mas a questão da distância à reta foi um aspeto que eu de facto não estava à espera. Eu sabia que isso era uma das propriedades, mas como não estava à espera, se eles não tivessem descoberto naquela aula, nem sequer teria abordado essa questão.

É muito engraçada esta ideia de que os alunos nos surpreendem. Só experimentado com essa tua abertura é que podemos perceber que eles vão muito mais além do que nós às vezes achamos ser possível. Se nunca lhes damos essa possibilidade, também não sabemos. E a outra coisa aqui interessante, também, é a sensibilidade do professor para perceber que eles estão a descobrir coisas que são importantes. Porque muitas vezes nós apercebemo-nos que os miúdos dizem coisas muito interessantes, mas o professor, como não as valoriza, nem se apercebe delas. E aí foi muito engraçado eles descobrirem essas ideias todas sobre as propriedades da reflexão.

Houve outra coisa que também foi muito interessante. Tem a ver com as potencialidades da visualização. Como o Geogebra permite mudar o estilo e a cor dos vértices, isso ajudou-os muito a observar e a comparar as figuras. Se não fosse a geometria dinâmica e as suas possibilidades, duvido que miúdos tão pequenos conseguissem ficar despertos e conseguissem apropriar-se, ainda que informalmente, destas propriedades da reflexão.

DA REFLEXÃO ÀS FIGURAS COM SIMETRIA DE REFLEXÃO

As crianças gostam de explorar as situações ao limite. E neste caso parece-me que a manipulação do eixo, arrastando com ele o objeto imagem, ajudou-os a experimentar o que aconteceria quando levassem a imagem a coincidir com o objeto.

Foi assim que eles chegaram à simetria de uma figura e que fizeram aquelas construções que discutimos no outro artigo[2]. O quadrado foi muito importante neste caso porque permitiu que eles levassem a imagem a sobrepor-se ao objeto. Com os triângulos que representaram, que não tinham simetria, não poderia ter acontecido.

É interessante que, na nossa discussão anterior, ficou evidente que a exploração a partir do objeto triângulo, figura sem simetria, os levou a querer construir novas figuras com um eixo de simetria. Neste caso, a partir do objeto quadrado, figura cheia de simetria ela própria, as crianças foram levadas à sobreposição total objeto—imagem.

São tantas aprendizagens em jogo que é mesmo necessário que façam várias experiências, com figuras diferentes e que conversemos com eles sobre as descobertas. O facto de os vértices estarem assinalados com cores ajudou muito.

[2]Educação & Matemática n.º 161, pp. 23-25

Essa é a compreensão do que é a simetria de uma figura. É a ideia de que ter um eixo de simetria significa que há uma reta que permite que a figura se transforme nela própria, que coincide ponto por ponto com ela própria, mas não são os mesmos pontos, ou seja há troca de pontos. Essa ideia é de uma abstração enorme. E esses miúdos estão a percebê-la lindamente e de forma concreta. Estão a ver que ela se sobrepõe, mas os pontos que eram do lado direito ficaram à esquerda e os que eram à esquerda ficaram à direita. Mas como todos os que estavam à direita se vão sobrepor a todos os que estavam à esquerda e vice-versa, objeto e imagem coincidem. Isso é uma compreensão da simetria de uma figura que me parece que muitos alunos, com escolaridade muito mais avançada em matemática, não têm. Portanto, esses miúdos estão a construir a ideia quer de transformação geométrica, quer de simetria de uma figura de uma forma muito consistente. E eu concordo completamente contigo, que isto é o poder da geometria dinâmica em ação e que não se chegaria a esta visão dupla destes dois conceitos com papel vegetal e ou com uma mira.

Eu nunca tinha feito este tipo de exploração da simetria. E embora esta dupla perspetiva fosse muito clara para mim, não tinha a expetativa que eles chegassem tão longe. Foi um trabalho que acabou por contemplar várias tarefas para que as aprendizagens fossem ficando consistentes.

Esta é perspetiva de abordagem que está prevista nas novas aprendizagens essenciais. O ponto de partida é o da transformação geométrica, neste caso a reflexão, para depois chegar às figuras com simetria de reflexão. Ficamos agora com o desafio de pensar um caminho análogo para a rotação.

Sim, sim. Até ao 4.º ano vou querer explorar tudo isto com os meus alunos. Vou aproveitar o entusiasmo e o interesse deles. O dia do GeoGebra é um dia especial da semana. Nem falam noutras aplicações. Já sabem que é o dia do GeoGebra e perguntam logo — professora é para abrir o GeoGebra? E eu sinto que eles estão muito mais autónomos.

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Graça Pereira
Agrupamento de Escolas de Alapraia, Cascais

Uma outra face da utilização do *GeoGebra*

Cristina Loureiro, Sandra Dias

No âmbito do projeto "*Aproximações à utilização do GeoGebra nos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*", temos vindo a estudar diversos tipos de experiências de utilização deste ambiente de geometria dinâmica, integradas no currículo e da responsabilidade dos professores titulares de turma.

Neste texto apresentamos parte de uma dessas experiências, realizada no 2.º ciclo, e a descrição e reflexão é feita com a professora responsável pela turma. Esta experiência integra a realização de duas tarefas na mesma turma, uma realizada no 5.º ano, em 2020-21 e a outra no 6.º neste ano letivo. É importante situar esta experiência em dois anos letivos muito afetados pela pandemia Covid-19, embora ambas as tarefas tenham sido realizadas em aulas presenciais.

Esta utilização do GeoGebra enquadra-se na categoria de recurso a Manipuláveis Virtuais (MV). Entendemos como *manipulável virtual uma representação visual interativa de um objeto matemático dinâmico, potenciada tecnologicamente, incluindo todas as possibilidades programáveis que permitem a sua manipulação, que apresenta possibilidades para construção de conhecimento matemático*, (Moyer-Packenham et Bolyard, 2016, p. 13).

Os manipuláveis virtuais que temos utilizado estão acessíveis no site GeoGebra. Estes recursos estão organizados por temas matemáticos e são de acesso livre através de https://www.geogebra.org/materials.

As duas tarefas experimentadas são analisadas em paralelo e, para elaborar o texto, discutimos amplamente ambas as experiências, procurando organizar uma estrutura de categorias que facilitasse a sua apresentação reflexiva e que constituísse uma motivação para a sua replicação por outros professores. Além dos guiões das tarefas e da caraterização do contexto de realização, apresentamos dois itens relativos à aprendizagem dos alunos (visualização e conhecimentos matemáticos; atitudes e comunicação), e um focado na ação do professor (gestão do currículo e diferenciação). No final, apresentamos uma reflexão final sobre a utilização destes recursos.

AS TAREFAS E O CONTEXTO DE REALIZAÇÃO

As duas tarefas (Tarefa A e Tarefa B) contemplam aprendizagens de geometria tridimensional. A primeira envolve duas partes: a realização de contagens de elementos de um poliedro (vértices, faces e arestas) e o estabelecimento de relações entre estes elementos (Relação de Euler); a associação de um poliedro às suas planificações numa exploração da relação 3D-2D. A segunda contempla a exploração da relação do volume de um cilindro com as variáveis que o influenciam, raio da base e altura, a partir da variação destas duas variáveis.

Tarefa A — Poliedros Platónicos

A investigação sobre os sólidos platónicos decorreu num contexto presencial com grandes restrições na manipulação de materiais devido ao contexto pandémico. Foi dinamizada numa aula de 90 minutos, na sala TIC, existindo um computador para cada aluno. Esta foi a primeira experiência individual com o GeoGebra, embora os alunos tivessem tido contatos anteriores com a geometria dinâmica realizados em exploração coletiva em grande grupo com o professor a manipular.

A distribuição dos alunos seguiu o critério dos alunos mais autónomos na manipulação do computador ficarem ao lado de colegas com menor autonomia.

Nos minutos iniciais desta sessão, foi feita pela professora uma revisão de conceitos (polígonos regulares) e a apresentação das janelas do GeoGebra a utilizar. Após a leitura do guião de trabalho, foram clarificadas as instruções já transmitidas e os alunos deram início à investigação. Para a análise de cada sólido platónico foi indicado no guião o link respetivo e solicitado o registo de informação no próprio guião em papel. Este guião (figura 1) foi disponibilizado na *Classroom* para facilitar o acesso dos utilizadores aos *links*.

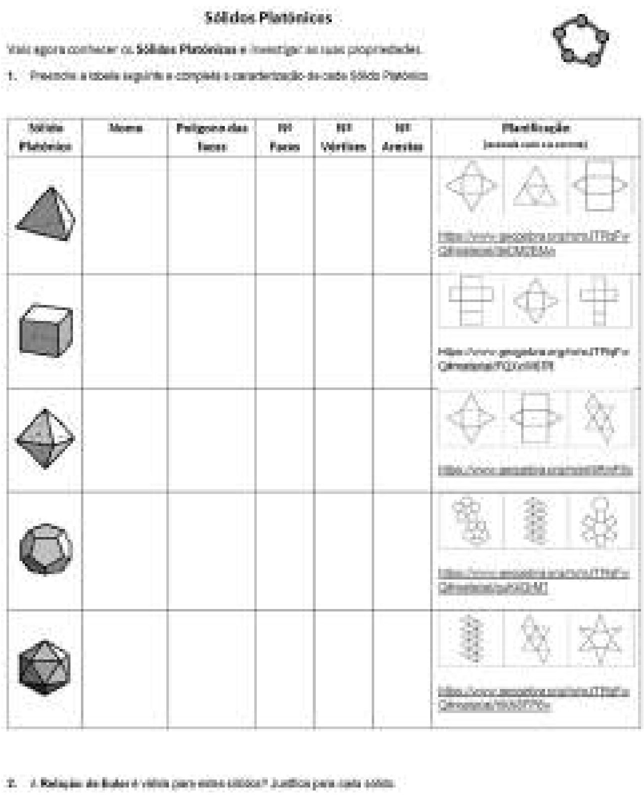
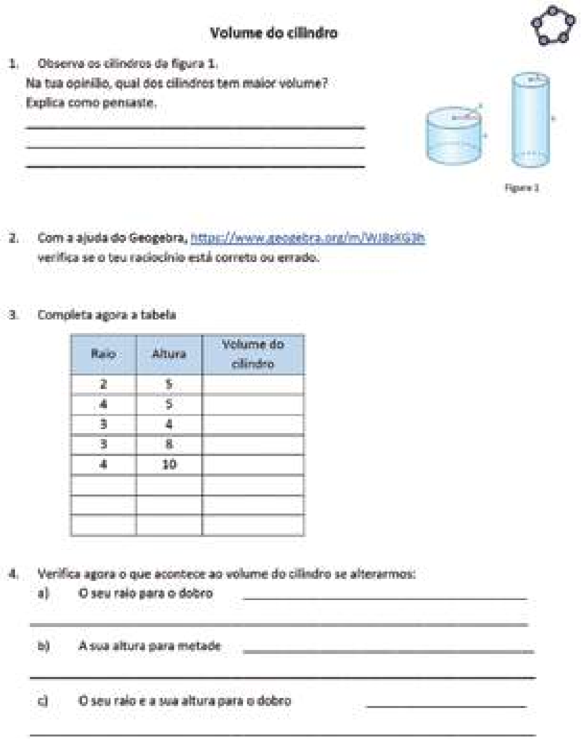


Figura 5. Tarefa A

Tarefa B — Variações no volume do cilindro

Nesta tarefa, os alunos analisaram a variação do volume do cilindro em função da alteração do comprimento do raio da base, da altura do sólido e da alteração destas duas variáveis em simultâneo. Para tal, foi selecionado um manipulável no GeoGebra com 2 seletores (um que permite alterar o valor do raio e um outro que faz variar a altura do cilindro, oscilando a escala em intervalos de 0,5), https://www.geogebra.org/m/WJ8sKG3h. O manipulável permite ainda, através de um botão de alternância mostrar/ocultar, visualizar a fórmula para calcular o volume do cilindro e o resultado do seu cálculo para os valores selecionados.

A investigação foi realizada a pares, no tablet, numa aula de 45 minutos e todas as conclusões foram registadas num guião que orientou os alunos para os objetivos da tarefa e discutidas mais tarde em grande grupo (figura 2).


Volume do cilindro

1. Observa os cilindros da figura 1.
Na tua opinião, qual dos cilindros tem maior volume?
Explica como pensaste.

Figura 1

2. Com a ajuda do Geogebra, https://www.geogebra.org/m/WJ8sKG3h
verifica se o teu raciocínio está correto ou errado.

3. Completa agora a tabela

Raio	Altura	Volume do cilindro
2	5	
4	5	
3	4	
3	8	
4	10	

4. Verifica agora o que acontece ao volume do cilindro se alterarmos:
a) O seu raio para o dobro
b) A sua altura para metade
c) O seu raio e a sua altura para o dobro

Figura 6. Tarefa B

VISUALIZAÇÃO E CONHECIMENTO MATEMÁTICO

No caso dos poliedros, estes manipuláveis virtuais permitem que, através do comando seletor, os alunos visualizem quer o sólido, quer a sua planificação. Para alternar, entre a representação a 2D e a representação a 3D, bastam poucos segundos e um simples deslizar do botão seletor, da direita para a esquerda (e vice-versa). Além disso, a interatividade para otimizar a visualização de cada sólido não fica por aqui. Ao permitir que os alunos manipulem os sólidos, o GeoGebra assegura não só uma visualização através do sólido, mas também, através de um simples click com o rato num vértice, rodar, arrastar, melhorando o ângulo de visualização e, ampliar o objeto. Nada disto é possível quando se trabalha com os sólidos rígidos.

Com os modelos de sólidos físicos, facilmente os alunos se desorientam durante o processo de contagem do número de faces, de arestas e de vértices do icosaedro e do dodecaedro. A vantagem da utilização dos manipuláveis virtuais neste processo foi evidente e quanto mais complexo era o sólido, mais óbvia era a ajuda que o GeoGebra dava nestas contagens. O GeoGebra permite mudar a cor das arestas, dos vértices e das faces ao longo da contagem. A utilização desta funcionalidade foi, indiscutivelmente, um facilitador do processo de contagem utilizado pela maioria dos alunos. Também a possibilidade de rodar o sólido, de o ampliar ou reduzir, de poder ver através de, levou os alunos a destacarem algumas propriedades (como o paralelismos de faces e arestas).

Já na segunda tarefa, o facto do manipulável apresentar a possibilidade de mostrar ou ocultar, em cada situação, a fórmula geral do volume do cilindro e o respetivo cálculo do volume do cilindro permitiu que os alunos focassem a sua atenção na análise da variação do volume em função das variáveis comprimento do raio, da altura e das duas em simultâneo: o que acontece ao volume quando duplicamos o raio? … e quando duplicamos a sua altura?... e se duplicarmos o raio e a altura em simultâneo?

Os alunos só podem observar que existe uma regularidade e chegar a conclusões depois de serem experimentados e testados vários valores para cada questão. O objetivo desta tarefa não estava em treinar cálculos/procedimentos, que iriam desnecessariamente arrastar no tempo a atividade sem ganhos para a compreensão, mas sim em testar vários cenários e chegar a conclusões sobre as relações envolvidas.

Também neste manipulável, a mais-valia da visualização é indiscutível. Em segundos é possível observar como se altera a imagem de um cilindro quando variamos o raio e a altura e até perceber que existem sólidos equivalentes que não são geometricamente iguais. A ideia errada que o volume aumenta quando o cilindro fica "mais alto" ou "mais largo" é colocada de parte perante os contra exemplos visuais.

Quantas aulas seriam necessárias para dinamizar uma atividade como esta sem o GeoGebra? Construir os cilindros em papel para a sua visualização, efetuar os cálculos caso a caso…

ATITUDES E COMUNICAÇÃO

A utilização deste tipo de ferramentas aumenta a predisposição dos alunos para o trabalho e potencia o seu envolvimento na tarefa. Trabalhar com o computador e com o tablet, utilizar manipuláveis virtuais, poder experimentar, poder errar, poder em pouco tempo reformular e melhorar, sem se expor perante o grupo turma, foram mais-valias apontadas pelos alunos.

A exploração destes manipuláveis potencia a comunicação entre alunos e o trabalho cooperativo. Além disso, no caso dos alunos mais curiosos e pró-ativos, estes objetos virtuais permitem ir além dos objetivos inicialmente traçados pelo professor, mesmo quando cada um trabalha no seu PC ou tablet. Já viste o que acontece quando clicas aqui? Como conseguiste fazer(…)?…E se (…) foram dinâmicas de comunicação estabelecidas entre alunos e entre o professor e alguns alunos.

GESTÃO DO CURRÍCULO E DIFERENCIAÇÃO

A gestão do currículo, no que respeita ao tempo e recursos é, para qualquer professor, um aspecto crítico na sua prática. Mesmo para professores com longa experiência, a gestão do currículo continua a ser um grande desafio que se tem vindo a alargar com as possibilidades tecnológicas atuais. O ensino a distância levou-nos a conhecer e a explorar um conjunto vasto de recursos digitais e, necessariamente, a alterar práticas e dinâmicas de trabalho, quer com alunos, quer com colegas.

A elaboração dos guiões utilizados não exige qualquer conhecimento profundo ou mestria na manipulação do GeoGebra. Os manipuláveis virtuais selecionados, estão disponíveis online, na Comunidade GeoGebra, são de acesso livre e de fácil manipulação para os alunos.

Por outro lado, o grupo-turma que desenvolveu estas tarefas é muito heterogéneo. Integra alunos com grandes assimetrias ao nível dos pré-requisitos, dos conhecimentos e capacidades matemáticas, o que consequentemente interfere com o ritmo de trabalho e motivação para a Matemática.

Na tarefa A, se num momento inicial, o papel do professor foi o de orientar e esclarecer dúvidas relativamente a funcionalidades de comandos do GeoGebra, com o desenrolar da atividade, os alunos que concluíam a primeira fase foram desafiados a construir e explorar prismas e pirâmides com recurso a modelos construídos no GeoGebra. Deste modo, dentro das suas capacidades e ritmos, todos estiveram envolvidos em diferentes etapas da tarefa, tendo sido dada a possibilidade a alguns de ir mais longe e realizar uma exploração de prismas e de pirâmides de forma livre.

Na tarefa B, as ferramentas de cálculo, associadas ao manipulável, tornaram acessível a tarefa a todos os alunos, independentemente da sua proficiência algébrica e, sobretudo, pouparam muito tempo, tornando a exploração mais eficiente.

Para além de desenvolver capacidades de visualização, de comparação, de análise e de generalização, a comunicação matemática ganha grande importância nos momentos de discussão coletiva. Só sabe explicar corretamente quem compreende. São estes momentos que permitem fazer um uso correto do vocabulário, mobilizar definições e conhecimentos anteriores para argumentar, permitindo estruturar e alargar raciocínios.

Apesar de ser uma tarefa mais dirigida, a diferenciação pedagógica também foi assegurada, quando na página 2, os alunos que terminavam mais cedo eram desafiados a utilizar este manipulável do GGB e a integrarem os conceitos trabalhados com outra complexidade - a resolução de um problema: "A Joana fez velas para vender. Comprou um cubo de cera com 1m3 para fazer velas de três tamanhos diferentes. De cada tamanho pretende fazer oito velas. Quais são as dimensões de cada vela?".

Ambas as tarefas foram integradas na planificação habitual e foram criadas com base na sua adequação aos objetivos de aprendizagem previstos no programa dos anos em referência.

REFLEXÃO FINAL

Uma das nossas intenções tem sido compreender o conceito de MV e pensar como os exemplos que vamos experimentando se enquadram na definição de Moyer-Packenham e Bolyard apresentada no início do texto. Esta compreensão tem-nos permitido analisar com profundidade as experiências realizadas no âmbito deste projeto e reconhecer o valor dos manipuláveis virtuais do GeoGebra para a aprendizagem.

A importância da explicitação clara da forma como a tarefa é implementada é um dos aspetos a que é preciso dar atenção no momento de apresentação da tarefa aos alunos. Estes manipuláveis virtuais integram o objeto matemático e os comandos que permitem fazer variações. É importante que na fase de introdução da tarefa o professor aponte as funcionalidades dos comandos e analise com os alunos aspetos significativos da dinâmica acessível. Claro, sem prejudicar o potencial de aprendizagem matemática da tarefa.

O poder do ambiente dinâmico permite associar mais do que uma representação do mesmo objeto matemático. Outra faceta deste poder são as várias possibilidades de visualização das representações do objeto e a sua manipulação muito acessível. Um outro aspecto que decorre da variação dinâmica dos objetos é a associação de medidas ou outros valores numéricos de elementos do objeto matemático e o acesso a resultados do cálculo com esses valores. Este é seguramente um dos pontos que nos merece especial atenção nas experiências que temos realizado. Esta possibilidade é claramente uma diferença intrínseca relativamente aos manipuláveis físicos.

Estas experiências foram realizadas sem acesso associado a modelos manipuláveis físicos dos sólidos em causa ou a materiais manipuláveis adequados à construção das suas estruturas. Este tipo de associação é um aspecto sobre o qual ainda não nos debruçamos, embora consideremos muito relevante estudar modos de fazer essa associação.

Por último destacamos as tarefas. Em qualquer utilização de modelos matemáticos manipuláveis, sejam virtuais ou físicos, o instrumento fundamental de aprendizagem são as tarefas, pois são estas que podem proporcionar aprendizagens. Não é por acaso que os autores que referimos destacam na parte final da formulação do conceito as possibilidades para construção de conhecimento matemático. Ao professor cabe selecionar ou criar as tarefas que potenciam essas possibilidades.

Referências

Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the definition of a virtual manipulative. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*, Mathematics Education in the Digital Era, 3–21.

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Sandra Dias
EB 2,3 Conde de Oeiras

Velas para todos os gostos

Cristina Loureiro, Sandra Dias

A resolução de problemas será sempre uma fonte de conhecimento e de admiração. E isso acontece porque também para nós professores é uma atividade desafiante onde há sempre novidades. Seja porque descobrimos um novo processo de resolução ou porque a tecnologia nos permite encarar o problema com outros olhos, passamos a apreciar cada problema de outra maneira. Porém, para além deste gosto pessoal, a maneira como os nossos alunos os resolvem será sempre a maior compensação didática da resolução de problemas e um grande incentivo à sua exploração e à reflexão partilhada. E claro, também uma fonte de novos problemas e de novas compreensões sobre os processos de resolução.

Partilhamos com este espírito resoluções comentadas do Problema das velas que foi proposto com acesso ao manipulável virtual do GeoGebra (MV) acessível em https://www.geogebra.org/m/WJ8sKG3h (EM, n.º 164). Partilhamos resoluções nossas e resoluções de alunos do 6.º ano e apresentamos algumas considerações no final.

O PROBLEMA

A Joana fez velas para vender. Comprou um cubo de cera com 1m³ para fazer velas de três tamanhos diferentes. De cada tamanho pretende fazer oito velas. Quais são as dimensões de cada vela?

EXPLORAÇÃO PRÉVIA DE ANTECIPAÇÃO

Este problema pode ser resolvido a partir de tentativas com valores variáveis para as dimensões da vela. Como há duas dimensões em jogo, é facilitador do ponto de vista da organização do raciocínio fixar uma das dimensões. Neste caso, optamos por fazer todas as velas com o mesmo raio, fazendo variar a altura. O manipulável virtual do GeoGebra é utilizado para calcular o volume de cada vela e os resultados são organizados numa tabela. Fixamos a unidade de medida visto que este recurso nos dá essa possibilidade. Depois de várias tentativas obtivemos uma boa solução, aproximada por defeito, com a melhor aproximação que conseguimos (figura 1).

Raio (dm)	Altura (dm)	Volume de cera de 1 vela (dm3)	Volume de cera de 8 velas (dm3)
2	2	25,12	200,96
2	3,5	43,96	351,68
2	4	50,24	401,92
		Total	954,52

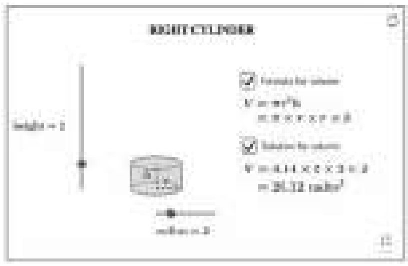


Figura 1

Uma outra abordagem é partir da decomposição de 1m³ em três porções distintas. Tendo em conta o recurso que estamos a usar para calcular o volume, decidimos trabalhar com dm³ e optamos pelos valores: 100 dm³, 300 dm³ e 600 dm³. Após obter o volume correspondente para cada vela, optamos por procurar obter, por tentativa, as dimensões de uma vela que tenha aproximadamente o volume pedido. A nossa intenção é explorar o recurso manipulável de que dispomos. Organizamos os nossos resultados na tabela (figura 2).

Volume de cera para 8 velas	Volume de cera de 1 vela	Tentativa			Verificação (volume de cera para 8 velas)
		Altura	Raio	Volume de cera de 1 vela	
100	12,5	1	2	12,56	100,48
300	37,5	2	2,5	39,25	314
600	75	2,5	3	70,65	565,2
				Total	979,68

Esta abordagem é bem mais divertida. Ganha um sentido enorme usar o manipulável e é muito mais significativa a abordagem tentativa/erro visualmente. Estamos mesmo ali a ver a vela

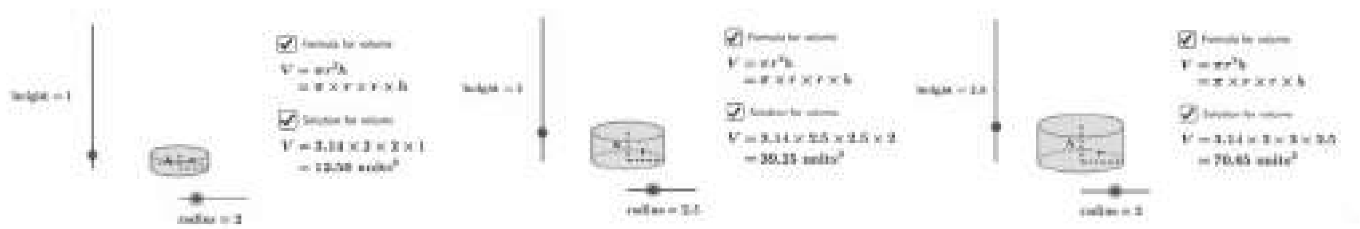


Figura 2

em cada tentativa, aspeto que nos parece muito interessante para discutir com os alunos. As tentativas têm que ser feitas com cuidado. Os dois primeiros valores são aproximações por excesso. O último tinha que ser necessariamente por defeito. Com esta abordagem conseguimos uma aproximação muito mais favorável. E seria possível conseguir melhor?

CÁLCULO APROXIMADO OU CÁLCULO EXATO?

Apesar de ser ponto assente entre os alunos que a resolução deste problema estaria muito facilitada pela utilização do manipulável virtual, as diferentes abordagens conduziram desde cedo alguns alunos a não se limitarem aos valores rapidamente fornecidos de forma imediata pelo manipulável e a recorrerem à máquina de calcular. Num primeiro momento, a resolução passou por testar valores para o raio e para a altura do cilindro, de modo a verificar se a soma do volume dos 3 grupos de velas se aproximava de 1m³.

Perante a análise dos valores do volume observados no manipulável, o maior ou menor conforto em trabalhar com determinada representação numérica, levou a uma tomada de decisão relativamente à unidade de medida a usar: m³, dm³ ou cm³. Foi sobretudo esta decisão que ditou o rumo dado às diferentes estratégias apresentadas e conduziu a uma inquietação: Pode sobrar cera? A resposta a este dilema, conduziu a dois caminhos distintos: (i) gastar a totalidade da cera ou (ii) obter um valor aproximado a 1 m³. Para ilustrar estes dois rumos distintos, analisamos a resolução de quatro alunos do 6.º ano.

GASTAR A TOTALIDADE DA CERA

Resolução A1

Este aluno encontrou uma solução possível recorrendo à estratégia de decompor o total de cera em 3 porções. Usou corretamente a relação entre as unidades de volume, mas não indicou as dimensões de cada vela (figura 3).

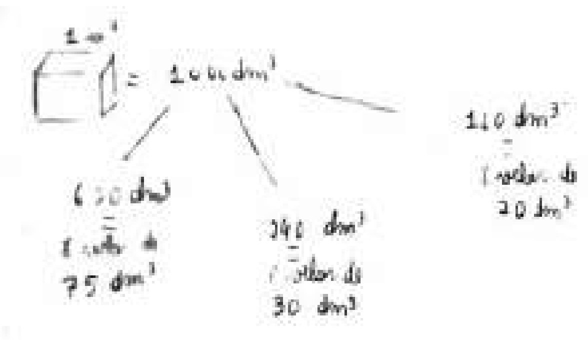


Figura 3

Resolução A2

Este aluno recorre à mesma estratégia do anterior (figura 4). Utiliza corretamente a equivalência das unidades de volume mas tem uma pequena falha ao escrever "raio velas = 1dm³ ", pois deveria ter escrito 1dm visto ser uma unidade linear. No entanto, evidenciamos esta decisão do aluno em fixar uma medida de raio igual para todas as velas e optar pela unidade. É esta opção que lhe permite usar a fórmula do volume do cilindro de forma inversa, isto é, partir do volume e obter a altura de cada vela sem precisar de recorrer a raízes quadradas e com cálculos mais simples. Este aluno consegue uma solução que otimiza o gasto de cera, embora não seja crítico relativamente à aproximação das medidas das alturas.

Nas várias etapas dos registos escritos deste aluno, é evidente que, apesar de existir sentido de número e de serem usadas corretamente, operações, procedimentos e relações matemáticas, faltou algum espírito crítico. Esta resolução mobilizou conhecimentos de decomposição e operações com números decimais, equivalência e redução com unidades de volume, álgebra e arredondamentos. Porém, foi marcada por uma pura manipulação matemática, pois o aluno não teve sensibilidade para detetar que, relativamente à altura das velas, a sua venda seria mais complicada.

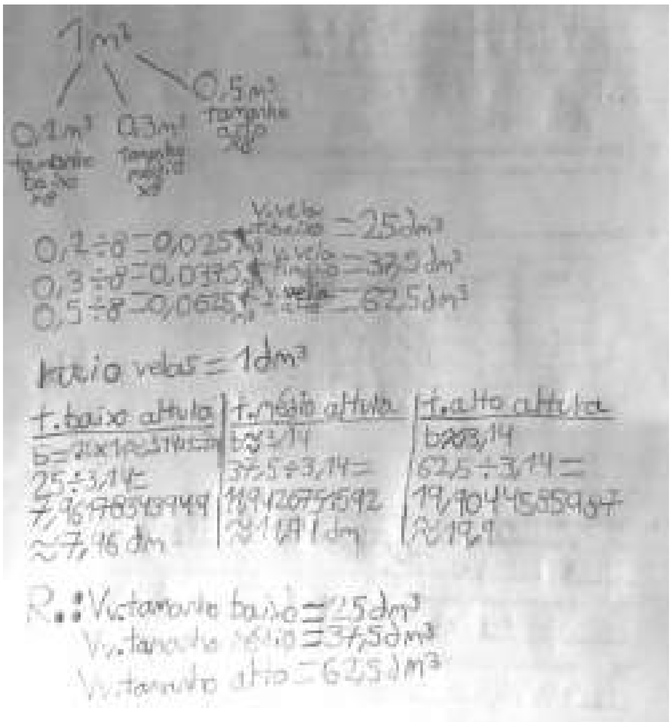


Figura 4

OBTER UM VALOR APROXIMADO

As resoluções 3 e 4 evidenciam, numa fase inicial, a utilização do MV, bem como a necessidade de organizar a informação para uma melhor análise. De uma forma mais ou menos explícita, a estratégia passa pela tentativa/erro, assumindo o raio e a altura valores diversos.

Resolução A3

Este aluno opta por usar a unidade linear centímetro para as dimensões da vela, embora não o explicite na resolução escrita (figura 5). A sua abordagem parte das dimensões de cada vela para obter o volume. Nos cálculos que apresenta regista uma 1.ª tentativa em que concluiu que obteve um valor muito distante do valor total e depois uma solução com um valor bastante próximo. No entanto, não explica como chegou a estes valores. Tendo em conta a unidade que escolheu e os valores que usou, conclui-se que não recorreu apenas ao manipulável virtual do GeoGebra que estava acessível. O aluno realizou os cálculos, que não apresentou, embora tenha indicado que considerou 3,14 para valor de π.

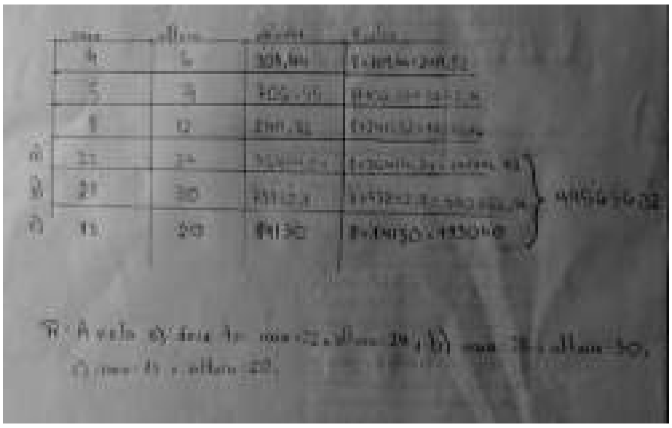


Figura 5

Resolução A4

Este aluno começa por explicitar a equivalência das unidades de volume, convertendo 1m³ em 1000dm³, (figura 6). Depois fixa o valor do raio em 2dm e faz variar a altura (2, 3 e 4 dm). Recorre ao manipulável virtual disponível para obter os volumes correspondentes e calcula a quantidade de cera gasta para 8 velas de cada tipo (904,32 dm³). Verifica então que a soma dos volumes de cera gasta para todas as velas não atinge 1000 dm³ e que tem, por isso, ainda 11,96 dm³ de cera para usar em cada uma de 8 velas de um tipo. Decide então juntar esta quantidade de cera ao volume da vela A, a mais pequena, e obtém um novo valor para a altura da vela de 2 dm de raio, que é 2,95 dm. Para obter este valor recorre à fórmula do cálculo do volume do cilindro. Refaz os cálculos da soma dos três volumes parciais e chega a um valor total de 999,78 dm³. Este aluno fica muito satisfeito com a excelente aproximação que obteve e não chega a observar que a vela A e a vela B têm uma diferença de altura mínima, 0,05 dm. Tendo em conta o contexto do problema esta diferença é praticamente impercetível.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A resolução que destacamos é A4 porque o aluno ultrapassou as limitações do manipulável virtual que tinha disponível. Este aspeto parece-nos muito importante de evidenciar pois é revelador da compreensão deste aluno sobre a fórmula do cálculo do volume do cilindro e da sua capacidade de a utilizar já sem recorrer ao modelo visual. Embora esta seja a resolução que destacamos, também nas resoluções A2 e A3 se evidencia que os alunos recorreram às fórmulas de forma independente do modelo visual. Fixamos esta consideração como muito significativa porque nos mostra que os alunos não ficaram agarrados ao manipulável virtual e avançaram na resolução já libertos desse recurso. Esta libertação é uma ideia fundamental sobre a utilização de recursos manipuláveis, tanto virtuais como físicos, que nos ajuda a ser criteriosos na seleção ou conceção de tarefas, bem como na associação de recursos para a sua realização.

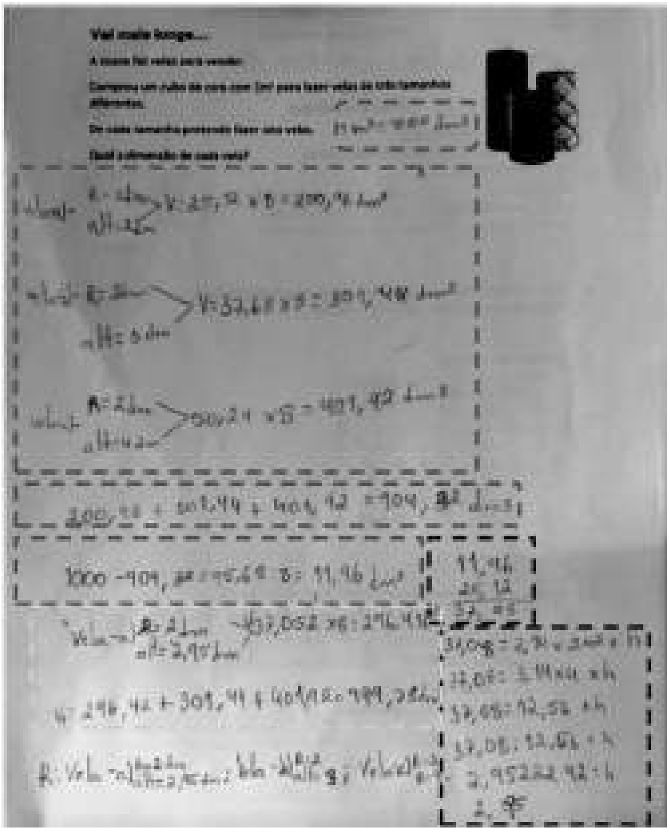


Figura 6

Apreciamos bastante a opção de decomposição do volume total em três partes, como foi feito nas resoluções A1, A2 e A4. Evidenciamos na resolução A2 e A4 a fixação do valor do raio. Neste caso, destacamos especialmente na resolução A2 a decisão do aluno de fixar esse valor em 1. Uma decisão muito valiosa do ponto de vista matemático. É esta decisão que nos conduz à nossa consideração deste problema como especial.

O problema está concebido de forma aberta e indireta porque é dado o volume de um cilindro e propõem-se que sejam obtidas as suas dimensões. Há duas variáveis em jogo (área da base e altura) e uma forma de abordar o problema passa pela fixação do valor de uma delas para analisar as consequências. Mas a natureza da variável área da base é diferente da natureza da altura, pois aquela depende do raio e envolve o quadrado do raio. Por isso, a opção dos alunos de fixar o valor do raio nos pareceu importante evidenciar. Naturalmente que um problema deste tipo pode ser abordado de forma direta, tendo como ponto de partida as dimensões de cilindros e obtendo os volumes respetivos, como foi opção da resolução A3.

Um aspecto também a evidenciar é a abertura do problema relativamente às unidades de medida a usar e que é facilitada pela forma independente como as unidades de medida estão consideradas no modelo virtual. Nas resoluções ficou bem patente a liberdade que os alunos vivenciaram relativamente a este aspeto.

É bem possível que não tivéssemos proposto este problema aos alunos deste nível se não estivesse acessível o manipulável virtual que foi usado. O peso dos cálculos na resolução ficou bastante reduzido porque os alunos podiam usar o modelo visual também para obter os resultados. Na nossa exploração como professoras apercebemo-nos que a exploração com o modelo visual, em que a variação das medidas tinha uma representação imediata do cilindro, era muito mais significativa e como referimos, até divertida. Gostar de resolver problemas passa também pela apreciação da vivência da resolução.

Discutimos bastante este problema porque gostámos de o resolver e as resoluções dos alunos são muito interessantes. Além disso, o sucesso da sua exploração com o recurso ao modelo dinâmico do sólido abre-nos a perspetiva de conceber mais manipuláveis virtuais e formular outros problemas na mesma linha de problemas abertos e de resolução indireta. Deixamos em aberto a exploração deste problema para velas de todas as formas e feitios: prismas que sejam paralelepípedos ou não, pirâmides, cones, e até esferas. O GeoGebra oferece-nos possibilidades de modelos de velas para todos os gostos.

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Sandra Dias
EB 2,3 Conde de Oeiras

Representações dinâmicas e interativas com o GeoGebra — construir, ver, transformar, pensar e discutir

Cristina Loureiro, Helena Moreira, Sónia Fernandes

> A geometria lida com objetos que podem ter uma existência física com os quais podemos interagir, e estuda também os processos de interação com esses objetos. É decisivo ter presente que os objetos físicos, com existência palpável ou desenhos, são sempre representações dos objetos geométricos. Esta caraterística específica do conhecimento matemático distingue-o de todas as outras formas de conhecimento, conferindo à visualização e à representação um papel essencial na compreensão matemática.
>
> (Caderno de Apontamentos de Geometria, EeM n.º 144, p. 16)

Recordamos este excerto de um artigo desta secção para destacar a importância de encararmos as representações dos objetos geométricos precisamente como representações que nos permitem aceder a esses objetos. Porém, são bem diversos tanto o modo como cada um de nós acede, como as imagens que vai criando dos objetos geométricos. Por isso é tão importante discutir tarefas e ferramentas de representação desses objetos na aprendizagem. Para esta discussão trazemos um episódio ocorrido no 2.º ano de escolaridade, num percurso de aprendizagem em que os alunos usaram o GeoGebra.

Os programas de geometria dinâmica permitem fazer construções geométricas ou explorar objetos geométricos já construídos numa grande diversidade de situações que possibilitam interações de natureza diversa. Para analisar as interações que eles proporcionam destacamos quatro das suas componentes que usaremos como referencial de análise do episódio (figura 1).

Figura 7

Estes quatro tipos de interações que agora destacamos ganham grande impacto quando as encaramos através da sua apresentação neste diagrama. Não há qualquer ordem ou hierarquia entre elas e o facto de estarem ligadas reforça as suas possibilidades. Mas antes de passar ao episódio, caracterizamos um pouco mais estas interações.

Focamos primeiro a representação de objetos tridimensionais num plano, o ecrã do computador. No GeoGebra, estas representações podem ser obtidas a partir de ferramentas de construção muito simples e intuitivas e situam-se na folha 3D. Esta folha 3D pode conviver no mesmo ecrã com uma folha 2D, permitindo assim o acesso, em simultâneo, a mais do que uma representação do mesmo objeto matemático dinâmico, uma representação tridimensional e representações bidimensionais. Todas as representações, 3D e 2D, estão associadas entre si de forma articulada, de maneira que a sua visualização dinâmica pode ser gerida pelo utilizador, como se o objeto tridimensional fosse rodado à nossa frente para que o possamos ver de frente, de lado ou de cima. Além das movimentações que permitem alterar a orientação da visualização, há funcionalidades associadas à manipulação que permitem agir sobre o objeto dinâmico e tornar visíveis, destacar ou esconder elementos do objeto, ou até transformar esse objeto, esticando ou encolhendo alguns dos seus elementos, por exemplo.

O episódio de sala de aula que escolhemos decorreu em momentos de trabalho, com recurso ao GeoGebra, realizados em coadjuvação, professora titular de turma e professora de apoio. As tarefas envolvidas foram planeadas pelas duas professoras e ambas iniciaram a utilização do GeoGebra com os seus alunos no início do ano letivo 2020/21. Este episódio tem uma caraterística notável, pois os alunos chegaram a conclusões relevantes do ponto de vista matemático e que não eram esperadas pelas professoras. Essa é a razão principal porque decidimos apresentá-lo e discuti-lo. A descrição do episódio tem por base uma estrutura narrativa que contempla os seguintes pontos: o contexto e a tarefa, as conclusões das crianças e algumas considerações das professoras. No final apresentamos as nossas reflexões sob a forma de discussão.

O CONTEXTO E A TAREFA

Este trabalho enquadra-se no desenvolvimento dos tópicos *Sólidos*: Características dos Sólidos e *Figuras Planas*: Polígonos, referentes às Novas Aprendizagens Essenciais de 2.º ano de Escolaridade.

Faz parte de um percurso em coconstrução que iniciou no ano letivo transato, onde os alunos tiveram a oportunidade de 1) agrupar caixas que trouxeram, muito próximas dos sólidos geométricos, definindo diferentes critérios de agrupamento; 2) descobrir características dos poliedros e dos sólidos que não são poliedros; 3) através da estratégia de "entrar dentro da caixa", descrever o que observavam, definindo as figuras que constituem os poliedros; e 4) construir planificações de poliedros.

As aprendizagens promovidas anteriormente decorreram da manipulação de materiais físicos não estruturados, em atividades de natureza exploratória, onde os alunos, em grupo: i) foram desafiados a desenvolver uma tarefa; ii) a comunicar ao grupo turma como pensaram; iii) a questionar e a serem questionados, justificando as suas ideias; iv) a sistematizar o que aprenderam; e v) a definir o trabalho a ser desenvolvido, de acordo com dificuldades sentidas ou com inquietações que surgiram.

Este ano letivo retomamos o percurso, mas desta vez com recurso ao GeoGebra para realizar atividades de natureza exploratória. Num primeiro momento, os alunos foram convidados, a pares, a descobrir este ambiente de geometria dinâmica. Nesta exploração construíram diferentes figuras 3D que partilharam e, após discussão coletiva, foram convidados a agrupá-las, segundo critérios que criaram. Um dos agrupamentos encontrados foi o dos poliedros e dentro deste, os subagrupamentos de prismas e de pirâmides. De seguida, acordou-se em estudar as propriedades dos prismas, a partir do preenchimento a pares de uma tabela como a da figura 2, ainda não preenchida, mas que continha as representações de alguns prismas.

No momento de interlocução coletiva referente à análise das respostas dos alunos (figura 2), aquando da descoberta das propriedades dos prismas, surgiu a questão "Por que razão o quadrado é retângulo?".

Poliedro	N.º de faces	N.º de arestas	N.º de vértices	Nome da face em menor número	Nome do Poliedro	Nome da face em maior número
	5	9	6	triângulo	Prisma triangular	retângulo
	6	12	8	quadrado	Prisma quadrangular - cubo -	quadrado
	6	12	8	retângulo	Prisma retangular - paralelepípedo -	retângulo
	7	15	10	pentágono	Prisma pentagonal	retângulo

Figura 8

Desta forma, quando lhes foi pedido para assinalarem o que os prismas da tabela têm em comum, um dos alunos referiu que "*em todos a face que existe em maior número é o retângulo*".

Perante esta afirmação, outro aluno disse que não concordava, porque no cubo só existiam quadrados. Nessa altura, o primeiro mencionou que "*o quadrado era retângulo, porque se esticássemos conseguíamos obter o retângulo*".

Estas ideias e a controvérsia inesperada exigiram uma intervenção da professora. Para que o aluno pudesse demonstrar essa transformação (o esticar), a professora deu-lhe um geoplano e pediu-lhe para fazer o quadrado e posteriormente mostrar como conseguia transformá-lo em retângulo. Destacamos a tentativa do aluno para fazer a transformação que a professora pediu (figuras 3 e 4).

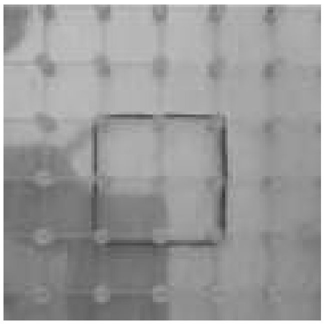


Figura 9

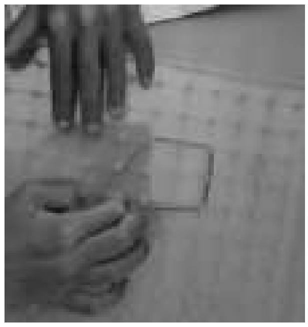


Figura 10

Dadas as dificuldades sentidas para fazer a transformação do quadrado em retângulo, o mesmo aluno sugeriu fazê-la nos prismas construídos no GeoGebra (figuras 5, 6 e 7). Na figura 5 estão representados os prismas iniciais e nas figuras 6 e 7 os prismas sobre os quais, primeiro este aluno e depois também os outros, fizeram as tentativas de transformação.

Figura 11

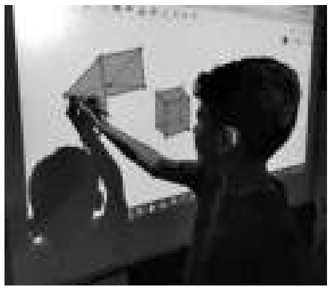


Figura 12

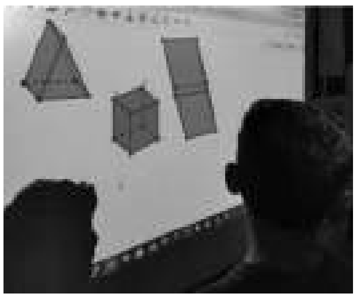


Figura 13

No GeoGebra, ao mexerem em apenas um vértice, os alunos conseguiram mostrar a transformação dos retângulos. Nessa altura, voltou-se a questionar sobre as razões que justificam considerar-se o quadrado como um retângulo. Depois desta discussão foi iniciada uma nova tarefa de exploração, que não apresentamos porque nos focamos apenas na análise deste episódio.

AS CONCLUSÕES DAS CRIANÇAS E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES DAS PROFESSORAS

Durante esta exploração as crianças tiraram algumas conclusões que destacamos:

– O quadrado é retângulo, porque se "esticarmos" o quadrado ele transforma-se em retângulo.
– Só conseguimos fazer esta transformação no GeoGebra, quando recorremos aos prismas.
– Os polígonos são as faces dos poliedros.

Estas conclusões foram inesperadas para nós, quer porque foi a primeira experiência que realizamos sobre este assunto num ambiente de geometria dinâmica, quer pelas relações geométricas envolvidas. Do nosso ponto de vista é importante evidenciar que ao longo deste percurso de aprendizagem fomos confrontadas com situações que não tínhamos antecipado, destacando-se:

– A perceção de que o quadrado é um retângulo, recorrendo às propriedades dos retângulos para o justificar "se esticarmos o quadrado ele transforma-se em retângulo".
– A representação dos retângulos nos prismas, mesmo quando estes foram isolados pela professora, quando sugeriu ao aluno mostrar a transformação no geoplano.
– A evolução do pensamento dos alunos, ao percecionarem propriedades geométricas, através da experiência de manipulação das representações no GeoGebra.
– A importância da interlocução na coconstrução das aprendizagens.

DISCUSSÃO

Este episódio constituiu um momento marcante nas experiências que temos realizado com recurso ao GeoGebra. Refletimos bastante em conjunto sobre ele e analisamo-lo sob vários pontos de vista que apresentamos.

Ao longo deste percurso destaca-se o papel do professor em lidar com as situações inesperadas, questionando e devolvendo, permitindo a coconstrução das aprendizagens – "*… se esticássemos conseguíamos obter o retângulo*". Por outro lado, neste papel evidencia-se ainda a aceitação de novas formas de resolução propostas pelos alunos, mesmo quando a sugestão da professora não correspondia ao pensamento do aluno – a professora isolou um quadrado do cubo, oferecendo ao aluno um geoplano para demonstrar a sua ideia. Por outro lado, o aluno, percecionando o objeto como um todo, solicitou o GeoGebra para demonstrar a transformação.

A compreensão do que se passou foi ficando para nós mais clara quando encaramos com mais atenção as representações que as crianças passaram a ter acesso. Retomando o esquema inicial, que evidencia as potencialidades da interação num ambiente de geometria dinâmica, ao longo deste percurso, destacam-se:

– a representação 3D, em ambientes dinâmicos (prismas idealizados e representados pelos alunos);
– a visualização de objetos dinâmicos (prismas representados pelos alunos e observados por eles de vários pontos de vista);
– a manipulação, que permitiu mexer e transformar os objetos (neste caso o esticar da representação);
– o desenvolvimento de diferentes representações, que permitiu a perceção do objeto como um todo e a associação aos seus elementos (o retângulo como elemento do prisma, o quadrado como um tipo particular de face retangular).

Esta última ideia é especialmente significativa pois evidencia o conceito de prisma como objeto composto e a íntima relação entre polígonos e poliedros, neste caso apenas prismas. Evidencia também a compreensão inclusiva da classe dos prismas, de que fazem parte os paralelepípedos e entre os quais o cubo é um caso particular. Do ponto de vista geométrico, esta classificação inclusiva é muitas vezes desconhecida ou mal compreendida por alunos de níveis muito mais avançados.

Este percurso de aprendizagem permitiu a vivência de situações que constituem desafios para a prática pedagógica, como i) o acesso a representações de prismas não comuns e em posições pouco habituais; ii) a abordagem inclusiva da classificação de retângulos e da classificação de prismas; iii) a manipulação de representações dinâmicas (esticar, aumentar os elementos, associar novos elementos); e iv) a oportunidade de agir sobre os objetos geométricos, criar novos objetos e desenvolver o conhecimento sobre esses objetos.

Como já ficou apontado atrás, este percurso não terminou com esta tarefa e este episódio. As conclusões inesperadas que resultaram desta exploração não podiam deixar de nos desafiar para continuar. Agora, até com maior confiança, pelas possibilidades que o GeoGebra nos estava a abrir e pela curiosidade de descobrir até onde nos podem levar as crianças quando deixamos a sua imaginação a trabalhar.

Cristina Loureiro,
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

Helena Moreira
Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Pontinha

Sónia Fernandes
Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Pontinha

GEOMETRIA NA LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA

ÍNDICE

Estruturas e Geometria Dinâmica

Cristina Loureiro

A ideia de estrutura é intrínseca à matemática a nível superior. No entanto, quando pensamos sobre a matemática nos níveis elementares esta ideia parece estar ausente e a utilização deste termo é rara. Vale a pena pensar sobre o que está inerente aos vários níveis do conceito de estrutura na aprendizagem da geometria.

Este texto é também uma oportunidade de uma reflexão, ainda a quente, sobre as consequências das alterações de fundo vividas nas últimas semanas nas práticas de uma unidade curricular de Geometria na licenciatura em Educação Básica.

VER E MANIPULAR ESTRUTURAS

Quando olhamos para um quadrado recortado em cartolina, para um retângulo de uma folha de papel ou para uma peça compacta de plástico que representa uma figura geométrica plana, muito pouco ficamos a saber sobre a estrutura de cada um destes objetos matemáticos.

A afirmação de que para aprender geometria é indispensável recorrer a materiais manipuláveis é universalmente aceite. Ninguém se atreve a discordar. Ao longo dos anos muitos tipos de materiais manipuláveis têm sido criados e colocados à disposição dos professores e educadores, ao serviço da aprendizagem. É frequente utilizarmos a designação de materiais estruturados, porém, paramos pouco para pensar nas estruturas ou nos elementos das estruturas que estão subjacentes à conceção de um determinado material didático.

Um dos exemplos que considero mais interessante para ajudar a refletir sobre a estrutura dos materiais é o dos polydrons (figura 1). Quando surgiram em Portugal, no início dos anos noventa, eram peças de plástico compactas, que representam polígonos. A sua forma de encaixe, através dos lados dos polígonos, permite criar estruturas de poliedros. Algum tempo depois, as peças deixaram de ser compactas e passaram a representar a estrutura dos lados dos polígonos. Tudo o resto se manteve, a forma de encaixe e as cores. Além disso, foram criadas novas formas, como por exemplo outros tipos de triângulos para além do equilátero.

Figura 1

Esta nova conceção das peças dos polydrons permitiu ver as estruturas dos poliedros com destaque para os seus elementos constituintes. As peças compactas destacam as faces, as peças sem interior destacam as arestas dos poliedros. Uma diferença de grande impacto para estudar as relações entre os elementos que compõem a estrutura e obter as propriedades dos objetos geométricos representados.

A aprendizagem da geometria é feita de múltiplas experiências sobre os objetos geométricos representados por estruturas que também têm de ser diversas. No entanto, pensar que uma criança fica a conhecer o quadrado porque manipula algumas peças quadradas como os blocos lógicos ou tangran é um erro que permanece em gerações sucessivas de professores e educadores.

É com mágoa que observo, ano após ano, a presença deste erro no discurso e nas práticas de muitos professores e educadores.

A orientação de que a aprendizagem da geometria exige um trabalho longo e sistemático sobre as estruturas geométricas nos seus três níveis continua a não vingar nas práticas profissionais. As estruturações espacial, geométrica e lógico-formal, indispensáveis à aprendizagem da geometria, não se constroem com meia dúzia de atividades de manipulação de materiais. Assim como algumas pinceladas dispersas não constituem uma composição artística. Não basta ver e manipular algumas estruturas de objetos geométricos, mesmo que sejam diversas, em meia dúzia de tarefas separadas e espalhadas ao longo da escolaridade.

CONSTRUIR ESTRUTURAS

O salto qualitativo sobre o conhecimento das estruturas é feito quando temos que construir as próprias estruturas ou quando usamos o conhecimento sobre as estruturas para construir objetos geométricos. Penso que há duas ideias decisivas a discutir sobre a construção de estruturas, uma ligada à educação artística e a outra à utilização da geometria dinâmica.

Não vou discutir agora a primeira sobre a qual se têm debruçado alguns artigos desta seção. Nesses artigos é reconhecido que as forças decisivas para a realização destas construções foram dadas pelo conhecimento das estruturas geométricas de objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais, em combinação com a componente artística visual. Todas as experiências relatadas foram realizadas por crianças com as suas educadoras.

Com crianças pequenas a criação destas estruturas geométricas pode ser aliciante e desafiadora, mas para crianças um pouco mais velhas temos à nossa disposição o poder dos ambientes dinâmicos. O valor destes ambientes para a aprendizagem é incomparavelmente mais forte do que o dos materiais manipuláveis. Não podemos mais ignorar este desafio, formando professores e educadores para que passem a usar sistematicamente os ambientes de geometria com todo o seu potencial.

Em 1999, o encontro designado por "Ensino da Geometria no virar do milénio", organizado pelo Departamento de Educação da FCUL, marcou uma discussão alargada sobre esta temática. Vale a pena recordar as atas do encontro.

Num texto que escrevi então, com o título de Computadores no Ensino da Geometria, usei várias vezes as palavras vida e viva para apontar as possibilidades dessas "ferramentas que foram criadas para a velha geometria, mas que abriram possibilidades ignoradas", referindo que a geometria se pode transformar e tornar viva (Loureiro, 1999).

Passaram mais de vinte anos sobre a escrita desse texto. Este ano voltei a dar aulas na formação inicial de professores e educadores e tenho muitos alunos que já nasceram neste século, depois do texto ter sido escrito. Embora não sejam todos meus alunos, partilho com a Lina Brunheira as turmas da unidade curricular de Geometria em que há cerca de 120 alunos. As primeiras aulas foram de choque. O desconhecimento e a resistência à geometria dinâmica eram enormes e, às vezes, assustadores. Não vou falar da vontade que tive de desistir, porque o que vale a pena referir aqui foi o que aconteceu devido às medidas de contingência, ao confinamento e ao ensino, que passou a ser totalmente à distância.

De um momento para o outro as condições de trabalho alteraram-se. Por um lado, passou a haver um total constrangimento para a utilização em sala de aula de materiais concretos manipuláveis e, por outro, todos os alunos tinham acesso à utilização da geometria dinâmica, neste caso o Geogebra. Esta situação favoreceu o recurso à geometria dinâmica no plano e prejudicou o desenvolvimento da geometria no espaço associada ao recurso a materiais manipuláveis. Este favorecimento permitiu um investimento na conceção de novas tarefas geométricas, integradoras das aprendizagens que os alunos tinham feito até então, nomeadamente, aprendizagens sobre propriedades das figuras bidimensionais e sobre transformações geométricas. O estudo sobre a simetria das figuras bidimensionais e o desenvolvimento do raciocínio espacial foram amplamente reforçados. As construções geométricas passaram a ser o foco principal das tarefas.

Progressivamente, as aulas de grande grupo a distância passaram a ser dominadas pela geometria dinâmica. Praticamente todos os alunos passaram a trabalhar com este recurso e o entusiasmo pela geometria aumentou muitíssimo. O Geogebra 3D passou também a ser um recurso indispensável. E nessa utilização as destrezas digitais dos alunos ultrapassaram as nossas. Vários aspetos de conhecimento geométrico inerente à utilização das estruturas 3D ficaram por trabalhar, porém, a apropriação da geometria dinâmica vingou finalmente. Uma verdadeira revolução.

Esta é uma apreciação ainda muito a quente e até, talvez, empolada pelo entusiasmo do que conseguimos fazer juntos nestas últimas semanas. Porém, o que venho pensando há muito tempo sobre as estruturas geométricas, a sua relação com a utilização de materiais manipuláveis e a sua relação com a geometria dinâmica confirmou algumas das minhas convicções sobre a aprendizagem da geometria e adquiriu uma nova convicção muito forte relativamente à formação de professores e educadores.

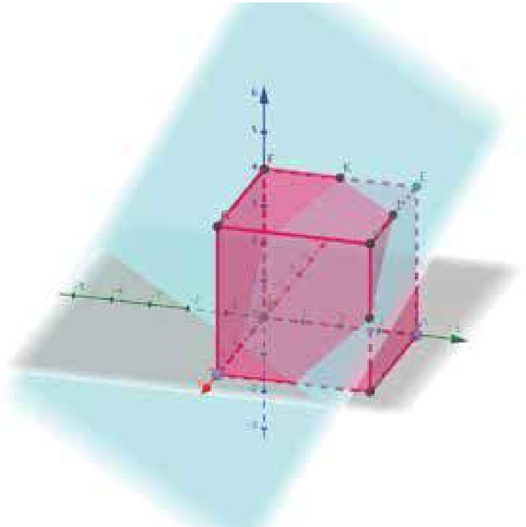


Figura 2. Construção em Geogebra 3D

Foi preciso largar totalmente os materiais manipuláveis para que a geometria dinâmica ganhasse finalmente terreno. Formulo por isso três ideias, em jeito de conjeturas, em que fico a pensar.

– As tarefas de aprendizagem são organizadas de modo a entrar a fundo na geometria dinâmica, sendo este o principal instrumento metodológico, e reduzindo o recurso a materiais manipuláveis que são colocados sempre, mas sempre mesmo, em ligação com a utilização digital.
– As tarefas de aprendizagem trazem para primeiro plano o estudo das estruturas geométricas bidimensionais e tridimensionais, assumidamente como tal, isto é, as referências a estruturações devem fazem parte dos conceitos a trabalhar.
– A avaliação contempla obrigatoriamente o recurso a ambientes dinâmicos ou a outras ferramentas digitais.

Para além de recordar o encontro sobre Ensino da Geometria no virar do milénio, evoco também o desejo de que "no século XXI a geometria seja uma fonte de situações ricas e luminosas com um potencial excecional em prol de uma melhor apreciação da matemática" (Graf & Hogdson,1998, p. 156). Ainda vamos a tempo!

Referências bibliográficas

Graf K. & Hogdson (1998). The computer as a context for new possible geometrical activities. In C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century.* (144–158). Kluwer Academic Publishers.

Loureiro, C. (1999). Computadores no Ensino da Geometria. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes, 43–50. DEFCL.

Resolução de problemas, geometria dinâmica e disseções

Cristina Loureiro

Vale a pena revisitar com regularidade os escritos mais significativos sobre a resolução de problemas e associar ideias apresentadas a resoluções realizadas por alunos em situações de aprendizagem.

Neste caso, o ponto de partida é um problema de geometria proposto aos alunos de Geometria da Licenciatura em Educação Básica na ESE de Lisboa. O problema era opcional, entre outros problemas, e foi escolhido por seis alunas. Esta situação foi proposta no fim de um trabalho muito intenso de resolução de tarefas com recurso a geometria dinâmica.

Quem gosta de resolver problemas de geometria não dispensa o recurso a um ambiente de geometria dinâmica para os resolver. Implicitamente, um recurso desta natureza permite colocar em ação uma das estratégias de Polya para a resolução de problema. Esta estratégia consiste em partir de um caso particular ou de uma restrição e procurar construir a solução a partir de uma resolução parcial.

O problema

Novos lenços de pescoço

Com 2 pequenos lenços iguais e quadrados pretende-se obter um novo lenço quadrado.

O objetivo é aumentar o tamanho perdendo o mínimo de tecido. Isto é, só se pode perder tecido nas costuras que vão ter que ser feitas. Por isso, o número de cortes e o comprimento das costuras a fazer têm que ser minimizados.

Qual é a melhor solução para obter um novo lenço?

E se os lenços tiverem tamanhos diferentes?

Este problema é um problema matemático muito conhecido, no entanto, o seu contexto é original e, a meu ver, revelou-se como fundamental para a compreensão do problema e para a sua resolução.

RESOLUÇÕES DA 1º PARTE DO PROBLEMA

A primeira parte é de resolução acessível. Foram apresentadas pelas seis alunas duas resoluções distintas (figuras 1 e 2).

Recordando que uma disseção geométrica é um corte de uma ou mais figuras geométricas em várias peças que depois podem ser rearranjadas para formar outra ou outras figuras, temos aqui dois bons exemplos de disseções geométricas. Em ambos os casos a geometria dinâmica permite verificar que ambas são independentes das dimensões dos quadrados iniciais. Além disso, a geometria dinâmica favorece a curiosidade de saber o que acontece se os quadrados iniciais não forem iguais.

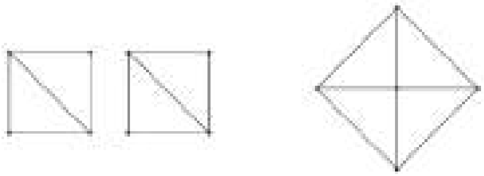


Figura 1

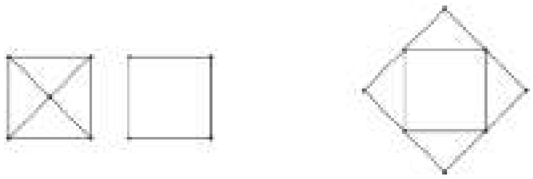


Figura 2

RESOLUÇÕES PARTICULARES DA 2º PARTE DO PROBLEMA

Para a 2ª parte seleciono três das seis resoluções distintas realizadas pelas alunas. Uma delas foi construída com recurso a uma decomposição do quadrado maior em 4 triângulos retângulos equiláteros iguais. Esta solução foi obtida a partir da exploração da situação com recurso ao geogebra. A solução é particular e só é possível se o lado do quadrado maior for o dobro do lado do quadrado menor (figura 3).

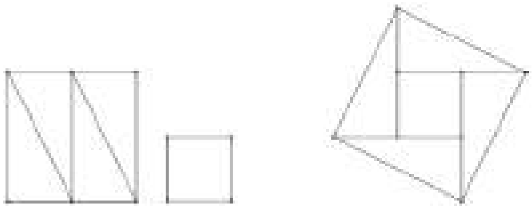


Figura 3

Outra solução particular recorre à decomposição do quadrado maior em 4 retângulos iguais. Esta solução também é obtida com recurso ao geogebra e só funciona se o lado do quadrado menor for 3/4 do lado do quadrado maior (figura 4).

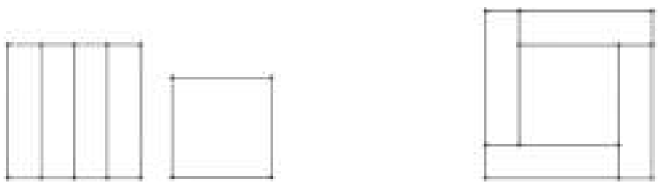


Figura 4

Umas das resoluções obteve uma solução geral. Neste caso a estratégia contempla uma ideia diferente que consiste em colocar os dois quadrados iniciais justapostos e pensar os cortes mantendo essa justaposição (figura 5).

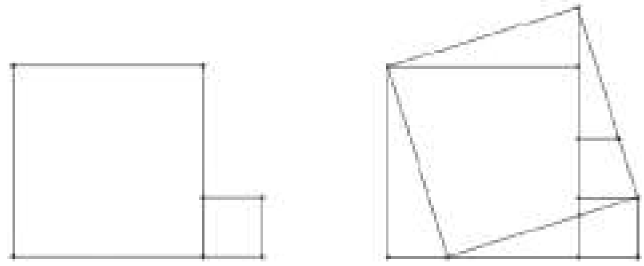


Figura 5

Esta estratégia é perfeita e generalizável para qualquer relação entre os lados dos dois quadrados iniciais. Esta estratégia é conhecida como disseção de Paul Mahlo, sendo a sua referência histórica de 1908 (Frederickson, 1997). Um outro aspeto muito relevante a evidenciar é que a construção dinâmica desta solução permite incluir a solução da 1ª parte do problema como caso limite (figura 6).

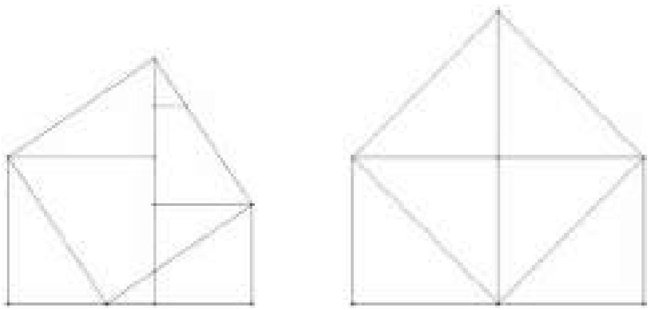


Figura 6

Estas três resoluções foram escolhidas porque nos ajudam a discutir algumas ideias relevantes e é importante registar que apenas esta última resolução apresenta uma solução geral.

ALGUMAS REFLEXÕES

Nesta resolução de solução generalizável destaco dois aspetos presentes na descrição apresentada pela aluna. Estes dois aspetos são a utilização das ferramentas da geometria dinâmica e a influência do contexto.

A utilização das ferramentas da geometria dinâmica percorre toda a descrição em apontamentos do tipo: "apliquei uma translação", "apliquei uma rotação". Ao longo da descrição, a aluna identifica corretamente os elementos fundamentais da figura e usa uma linguagem formal, embora às vezes com falhas. Seleciono um excerto um pouco mais longo.

> "Por fim percebi que o pedaço que faltava para construir o quadrado grande era o quadrilátero BJKE e portanto apliquei-lhe uma rotação de 90 graus no sentido horário e depois uma translação pelo vetor v obtendo assim a restante parte da aresta que faltava."

Destaco este excerto porque nele também está subjacente a referência ao contexto do problema quando a aluna refere "o pedaço que faltava". Aliás esta referência ao contexto está presente em várias afirmações que a aluna faz, como por exemplo:

> "Podemos ligar estes triângulos ao outro lenço através das arestas."

> "Assim foi possível obter o quadrado maior K'K'1K'2K'3, que representa o lenço grande, apenas com 4 cortes num dos lenços."

> "Obtive assim o quadrado maior final ID'FK" apenas com dois cortes no quadrado maior e um no mais pequeno."

A própria referência a "arestas", errada na perspetiva geométrica formal, pode ser influenciada pelo contexto pois a palavra "arestas" faz parte da linguagem corrente e não está totalmente associada a situações tridimensionais.

Na análise que faço, considero que a existência de um contexto familiar, a costura dos lenços, foi facilitadora da resolução e conjeturo que foi decisiva para que esta aluna obtivesse uma solução perfeita. A ideia chave nesta resolução foi a justaposição inicial dos dois quadrados originais. Na minha análise, a ideia de justapor os dois quadrados decorre do contexto de costura do problema. A aluna revela essa compreensão ao combinar sistematicamente a linguagem matemática formal com a linguagem informal do contexto do problema.

Do ponto de vista matemático, nos problemas sobre disseções, uma das estratégias poderosas de resolução consiste precisamente na justaposição das figuras de partida.

É interessante destacar também que outras resoluções apresentadas, embora não tão perfeitas como esta, também referem o contexto, como por exemplo:

> "Deste modo é possível concluir que esta forma pode ser generalizada para todos os lenços de tamanhos diferentes, estando sempre no centro o lenço de menores dimensões e em torno deste os quatro triângulos isósceles, correspondentes ao lenço de maiores dimensões."

Esta solução diz respeito a uma outra resolução em que a aluna não respeita o conceito de disseção. Porém encontra uma solução geral aceitável na perspetiva do contexto do problema.

Esta breve discussão pretende relacionar algumas ideias relevantes sobre a resolução de problemas, a geometria dinâmica e as disseções geométricas. Nesta discussão foram valorizados o papel da geometria dinâmica e do contexto do problema. Porém, vários outros aspetos ficaram por discutir ligados às possibilidades que este problema oferece para a formulação de novos problemas e para a reflexão e aprendizagem sobre a resolução de problemas na formação de futuros professores. As resoluções das alunas confirmam estas potencialidades e deixam-nos várias questões em aberto.

Referências

Frederickson, Greg N. (1997). *Dissections: Plane & Fancy.* Cambridge University Press.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Gradiva.

A avaliação para as aprendizagens pode ajudar quando a resolução do problema não é bem sucedida

Cristina Loureiro

Esta reflexão tem por base sete resoluções de um problema de geometria proposto na unidade curricular de Geometria da Licenciatura em Educação Básica na ESE de Lisboa. A reflexão vem na continuidade do caderno publicado na revista anterior, "Resolução de problemas, geometria dinâmica e disseções", embora se refira a um problema distinto. O objetivo destas reflexões é contribuir para a discussão da avaliação da resolução de problemas em geometria quando se associa a aprendizagem ao recurso a um ambiente de geometria dinâmica.

Há muitos problemas de geometria interessantes, de compreensão muito acessível e para os quais a resolução dinâmica permite obter boas soluções aproximadas. Porém, em muitos casos, a solução geométrica completa é inacessível ou muito difícil para o conhecimento matemático dos alunos, como é o caso do problema que aqui se discute. Nestes casos, o que é decisivo é definir objetivos para a sua avaliação compatíveis com os conhecimentos dos alunos e com as aprendizagens que o professor se propõe promover.

Na base desta orientação estão duas ideias interligadas. Por um lado, os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos e que os atraem, contribuindo assim para o desenvolvimento do gosto por resolver problemas. Mas, para que a sua resolução seja efetivamente promotora de aprendizagens matemáticas, é necessário que o professor desenvolva estratégias de *feedback* que permitam aos alunos progredir numa resolução bem sucedida.

A autoria do problema em discussão é de José Paulo Viana e está incluído na publicação em referência.

O PROBLEMA

O novo Parque Público

O novo parque público da cidade está quase pronto e, como é habitual, tem de ser inaugurado antes das eleições. Falta só decidir o traçado dos caminhos interiores.

O parque tem a forma de um quadrilátero irregular ABCD, com um portão de acesso P no lado que dá para a avenida principal, conforme se vê na figura 1.

O arquiteto paisagista pretende que se façam quatro caminhos em circuito fechado de modo que, partindo do portão, se passe pelos outros três lados e se regresse ao ponto de partida, tal como se mostra no exemplo da figura. No entanto, o presidente da câmara avisou o arquiteto de que quer a solução mais económica, ou seja, aquela em que o comprimento total dos caminhos é menor.

Em que posição devem estar os pontos Q, R e S para que isso aconteça?

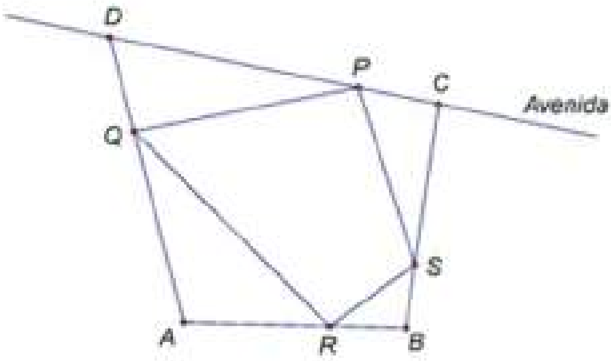


Figura 1

BREVES IDEIAS SOBRE AS RESOLUÇÕES

As sete resoluções apresentadas pelas alunas são muito fracas e ficam muito aquém das expetativas da professora. No entanto, é possível distinguir duas categorias.

Categoria A — Realização da construção do quadrilátero. Obtenção de uma solução particular, sem qualquer evidência de realização de experiências de variação para obter a solução apresentada, nem de variação do quadrilátero base do problema.

Categoria B — Realização da construção consistente do quadrilátero. Exploração das possibilidades dinâmicas obtendo uma solução aproximada. Tentativas para a compreensão da solução obtida, sendo as tentativas inconsistentes (B1) ou consistentes (B2).

Na categoria A são incluídas cinco das resoluções e na B apenas duas. No caso destas duas resoluções é possível distinguir a natureza da procura da compreensão da solução obtida. Num dos casos esta procura é de natureza geométrica, embora as tentativas sejam inconsistentes (B1). A aluna obtém uma solução através de uma construção em que recorre a reflexões definidas pelos lados da figura dada. A aluna aceita o valor obtido sem apontar a necessidade de confirmar se é ou não efetivamente o caminho mais curto (figura 2).

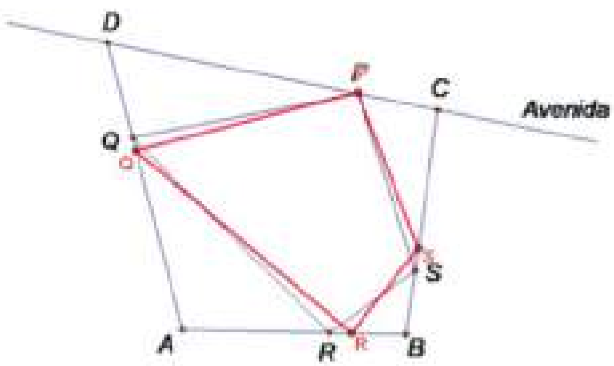


Figura 2

No outro caso, a procurada compreensão é de natureza analítica e corresponde a uma confirmação da solução obtida por outro processo matematicamente válido (B2). É consistente do ponto de vista das capacidades de resolução de problemas e reveladora do estabelecimento de conexões porque a aluna aponta a necessidade de "corroborar" que chegou a um valor mínimo e avança nessa confirmação. Recorrendo à folha algébrica do GeoGebra, a aluna obtém os intervalos de variação das abcissas e das ordenadas dos 3 pontos (R, S, Q) variáveis do quadrilátero dado (figura 3) e usa os seletores para registar os extremos dos intervalos que observou. Depois recorre ao Excel, usando a fórmula da distância entre dois pontos num referencial ortonormado e construindo uma fórmula para obter o perímetro do quadrilátero variável. Com base nas potencialidades do Excel, a aluna obtém o valor mínimo da função perímetro que associou ao quadrilátero variável. Esta resolução integra vários recursos tecnológicos e a abordagem analítica dominou o processo. Porém, não foram procuradas as relações geométricas para obter uma confirmação ou validação da situação ótima. O que considerei consistente nesta resolução foi a procura de uma justificação para a solução ótima e uma operacionalização correta de outras ferramentas matemáticas.

Embora haja diferenças significativas entre as resoluções das duas categorias, as resoluções revelam fragilidades muito grandes, inclusive sobre as possibilidades da resolução dinâmica, e evidenciam que, para estas alunas, o problema era desadequado. Além disso, revelam também que seis destas alunas não souberam avaliar as suas resoluções.

ALGUMAS REFLEXÕES

Este problema foi proposto às alunas no final da unidade curricular, numa situação de avaliação final extraordinária e de opção individual. A escolha era feita entre 3 problemas novos, 2 extensões de problemas já resolvidos em grupo e 4 tarefas exploratórias. Cada estudante deveria escolher 2 tarefas, independentemente da sua natureza. Só responderam as alunas que queriam melhorar a sua classificação. Confirmámos que este problema era demasiado difícil, no entanto estas sete alunas decidiram dedicar-se a este problema. Porém, nenhuma delas conseguiu chegar à solução completa e apenas uma obteve uma solução aproximada satisfatória coerente e reveladora de aprendizagens significativas sobre a resolução de problemas com recurso à geometria dinâmica.

Claramente que este problema, bem como a breve análise que apresento, evidenciam o interesse em continuar a desenvolver a resolução. Isto não aconteceu devido às condições em que este problema foi proposto. Poderia por isso guardar as minhas reflexões, mas decidi avançar com alguma discussão. Para esta discussão irei associar alguns comentários de apreciação de três das alunas que optaram por resolver os problemas. Estas opiniões foram recolhidas de forma livre algum tempo depois da unidade curricular estar totalmente terminada.

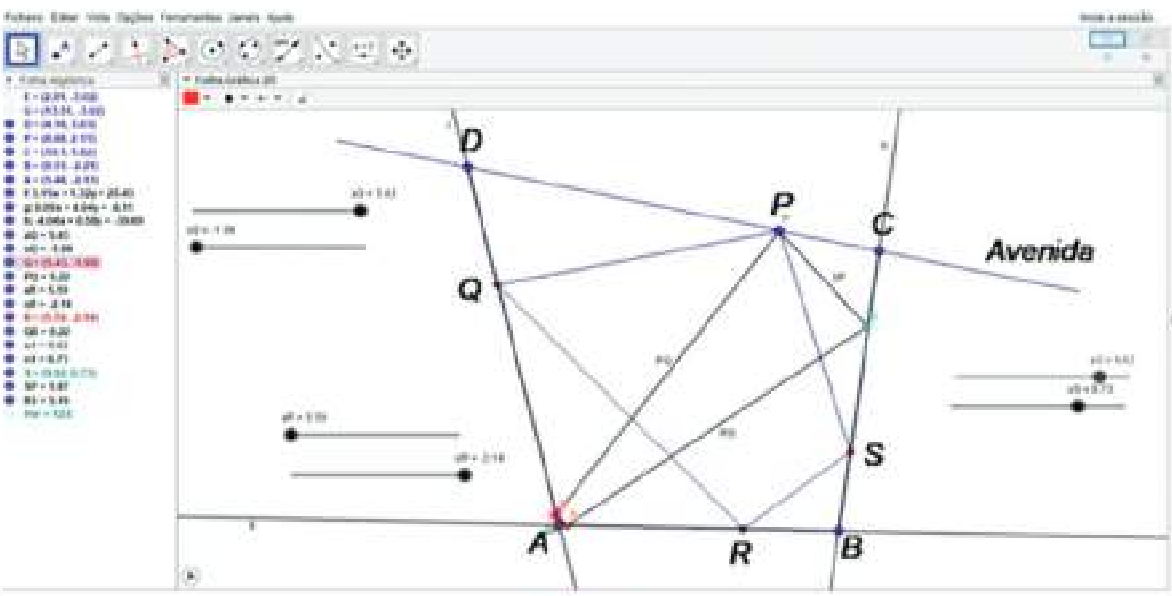


Figura 3

Esta discussão é orientada por três ideias: o *feedback*, a diferenciação, a resolução de problemas na formação inicial de professores.

No que respeita ao *feedback* do professor, claramente que este problema aponta para a necessidade de um diálogo com o professor na resolução. As fragilidades das resoluções que estas alunas apresentaram mostram que era necessária uma intervenção do professor para elas desenvolverem a resolução.

Uma das alunas cuja opinião foi recolhida afirma que *"realizar aqueles problemas foi viciante, eu estive ali horas na tentativa erro"*. Um *feedback* do professor poderia ter orientado esta aluna para um caminho de sucesso. É reconhecido que os ambientes de geometria dinâmica apontam para a exploração da situação, valorizando estratégias de tentativa-erro, no entanto, há tentativas que poderão ser produtivas e outras que não o são.

No caso deste problema, poderia ser sugerido, por exemplo, experimentar com um quadrilátero mais favorável, isto é, com alguma simetria, ou com uma figura mais simples, um triângulo. Outra sugestão poderia ser recordar algum problema já resolvido que fosse associável a este. Há ainda outras ideias poderosas, como é o caso do recurso à associação de vários quadriláteros iguais numa pavimentação do plano e ao traçar do percurso ideal a partir dessa pavimentação.

A aprendizagem da resolução de problemas com recurso aos ambientes de geometria dinâmica (AGD) deve prever a aprendizagem destas estratégias de modo que o próprio aluno desenvolva a sua capacidade de autoavaliação da estratégia que está a seguir na resolução de um problema.

O outro aspeto que evidencio tem a ver com a diferenciação. No âmbito da formação de futuros professores e educadores, problemas como este, resolvidos com recurso a um AGD, permitem desafiar um aluno a testar as suas capacidades e a desenvolver a sua capacidade de avaliar o seu próprio trabalho.

> *"Eu li todos. E tentei ver o que consegui fazer deles à partida. Eu também tentei o do parque. A resolução que eu estava a fazer não estava a fazer sentido e não estava a dar um resultado que eu achasse possível. Passei para o dos lenços. E fui fazendo."*
>
> *"Eu li tudo. E quando li pensei logo, eu quero fazer os problemas porque foi isto que estivemos a trabalhar nas aulas. E eu queria agora desafiar-me sozinha, sem o grupo para ver como corria. Vou resolver os três (problemas). E aqueles que eu tiver mais a certeza mando (à professora). Dois deles eu estava mais certa, o da formiga e o dos lenços. O do parque eu não estava tão certa, mas resolvi enviar também."*
>
> *"Eu comecei a ver todos os problemas e logo a pensar como é que iria fazer. No caso do parque comecei logo a perceber mais ou menos."*

Estas apreciações são indicadoras do interesse das alunas pela resolução de problemas e do gosto pelo desafio inerente a essa resolução. No primeiro caso, a aluna opta por resolver até ao fim dois dos três problemas. No segundo caso, a aluna identifica as fragilidades na sua resolução deste problema do parque, mas decide apresentar a resolução à professora. No terceiro caso, a aluna opta por se dedicar à resolução do problema do parque e levar a resolução ao máximo dos seus conhecimentos. Três reações levemente distintas, todas reveladoras da fragilidade destas alunas avaliarem a sua resolução geométrica e explicitarem com fundamento matemático as suas dificuldades. Um *feedback* do professor teria certamente ajudado.

Por um lado, os recursos que temos hoje em dia permitem encarar a resolução de problemas de uma maneira muito mais rica. Podemos organizar bons bancos de problemas a que os alunos acedam e dos quais selecionem problemas por interesse. Esta possibilidade tem em conta a heterogeneidade dos alunos e permite que cada um desenhe algumas componentes do seu percurso. As minhas experiências recentes com futuros educadores e professores confirmam o potencial desta opção e a necessidade de encararmos a possibilidade de os estudantes desenharem percursos flexíveis com algumas diferenças. Esta reflexão é um pequeno contributo nesse sentido, naturalmente extensível também a níveis de ensino mais elementares.

Por último, quero valorizar o papel da resolução de problemas na formação inicial de professores e de educadores. Este problema é muito difícil e nós sabíamos isso quando o integrámos no conjunto de tarefas que apresentámos aos alunos. Decidimos arriscar porque a capacidade de escolha estava também em jogo e a grande diversidade das capacidades dos alunos era reconhecida por nós. Algumas das alunas que escolheram este problema não optaram pelas tarefas mais fáceis, mas sim pelas mais desafiantes. E isso também deve ser valorizado.

Como formadores de professores e educadores cabe-nos desenvolver o gosto por uma formação matemática ao longo da vida. É por isso que desafio os leitores para a resolução geométrica completa do problema do Parque Público, com a promessa de que farei essa discussão no próximo caderno de apontamentos e com uma referência que aponta para que não paremos de resolver problemas.

> Desenvolver e sustentar o pensamento matemático é um processo contínuo para qualquer um que seja professor, aluno ou investigador. É por isso que é tão importante continuar a praticar (em ambos os sentidos) esse ofício, essa arte, essa atenção, para se sensibilizar para a experiência dos outros (alunos, colegas) e para enriquecer o seu próprio ser matemático através do que se observa e do que se atende. (Mason, 2020).

Estas três ideias que apontei influenciam o modo como encaramos a avaliação da resolução de problemas e como nos preparamos para antecipar as resoluções dos nossos alunos nas tarefas matemáticas que selecionamos e que lhes propomos.

Referências

Mason, J. (2020). Generating Worthwhile Mathematical Tasks in Order to Sustain and Develop Mathematical Thinking. *Sustainability 2020, 12*, 5727. doi:10.3390/su12145727.

Viana, J. P. (2012). *Uma vida sem problemas*. Edição Clube do Autor.

O novo Parque Público — uma resolução com recurso à geometria dinâmica

Cristina Loureiro

Este texto cumpre a promessa de apresentar uma resolução do problema *O novo Parque Público*. Recordo o problema, da autoria do José Paulo Viana, apresentado na publicação em referência no final e onde pode ser encontrada uma resolução que não recorre à geometria dinâmica.

> *O novo Parque Público*
>
> *O novo parque público da cidade está quase pronto e, como é habitual, tem de ser inaugurado antes das eleições. Falta só decidir o traçado dos caminhos interiores.*
>
> *O parque tem a forma de um quadrilátero irregular ABCD, com um portão de acesso P no lado que dá para a avenida principal, conforme se vê na figura 1.*
>
> *O arquiteto paisagista pretende que se façam quatro caminhos em circuito fechado de modo que, partindo do portão, se passe pelos outros três lados e se regresse ao ponto de partida, tal como se mostra no exemplo da figura. No entanto, o presidente da câmara avisou o arquiteto de que quer a solução mais económica, ou seja, aquela em que o comprimento total dos caminhos é menor.*
>
> *Em que posição devem estar os pontos Q, R e S para que isso aconteça?*

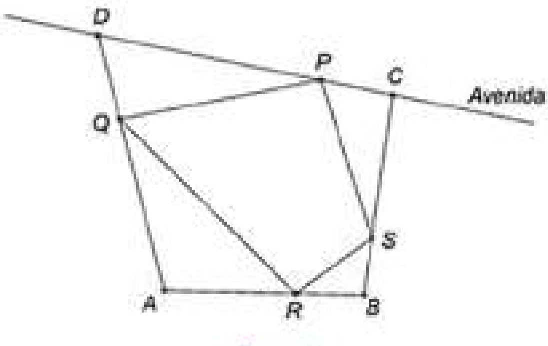


Figura 1

BREVES IDEIAS PARA INICIAR A RESOLUÇÃO

Antes de avançar com a resolução num ambiente de geometria dinâmica é importante começar a procurar estratégias de raciocínio que garantam que se obteve a solução ótima, bem como pensar como se poderão ir progressivamente desenvolvendo aprendizagens que favoreçam essas estratégias.

Nas resoluções de natureza dinâmica temos a possibilidade de simular a situação e obter boas aproximações da resolução ótima. Neste caso o percurso PQRS (figura 2). A dificuldade está em fazer uma construção que confirme se esta é ou não a solução ótima.

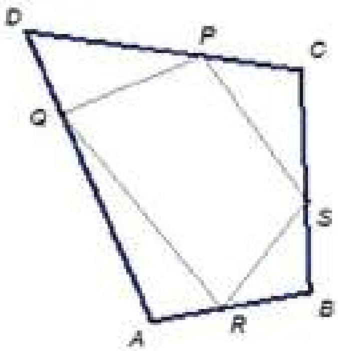


Figura 2

Uma ideia chave é a de que um problema de otimização geométrica como este recorre à obtenção do caminho mais curto entre dois pontos, a linha reta. Neste caso é dado um dos pontos, o de partida P, e o ponto de chegada terá que ser coincidente com este e terá que ser também o fim do percurso. Por isso uma boa estratégia será trabalhar com cópias do quadrilátero que contextualiza o problema, o referido parque público. Estas cópias deverão estar devidamente relacionadas para que ao manipular as variáveis se perceba que foi obtida a solução ótima. O recurso a três reflexões sucessivas permite obter quatro quadriláteros congruentes que vão permitir comparar distâncias de percursos (figura 3). As reflexões são definidas a partir de cada um dos três lados do quadrilátero que não contêm o ponto P. Primeiro a reflexão definida por DA, depois a reflexão definida pela imagem de AB na reflexão anterior, e, finalmente, a reflexão definida pela imagem da imagem de BC. Opta-se por não referenciar os pontos com letras para não carregar visualmente a figura.

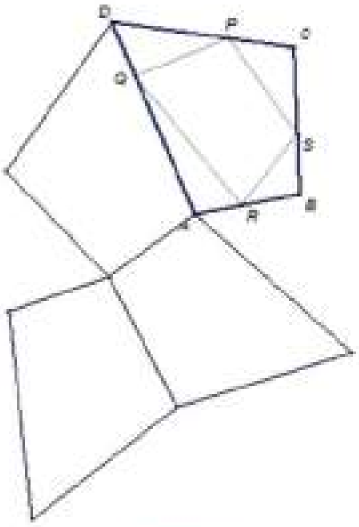


Figura 3

A BOA SOLUÇÃO

O caminho mais curto é a soma de quatro segmentos, um em cada quadrilátero da figura, que correspondem também às reflexões do caminho PQRS considerado experimentalmente como uma boa aproximação. Neste caso vê-se muito bem que os quatro segmentos não estão em linha reta. Por isso a sua soma, PQR'S'P' não é a menor possível (figura 4).

Traçamos assim o segmento PP' (figura 5), fazendo depois as reflexões por ordem inversa para obter o percurso PVXZ no quadrilátero original (figura 6). Este é garantidamente o percurso mais curto e que permite obter a solução mais económica como desafia o contexto do problema.

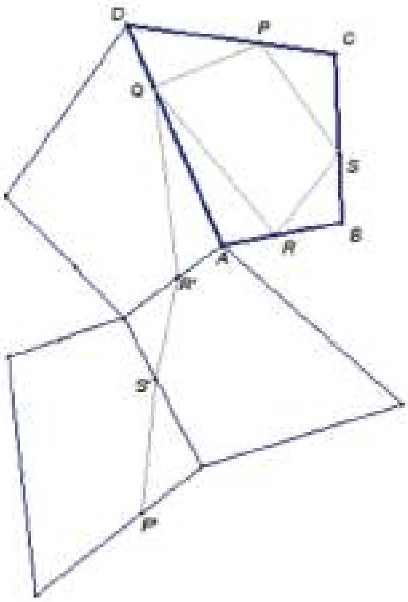


Figura 4

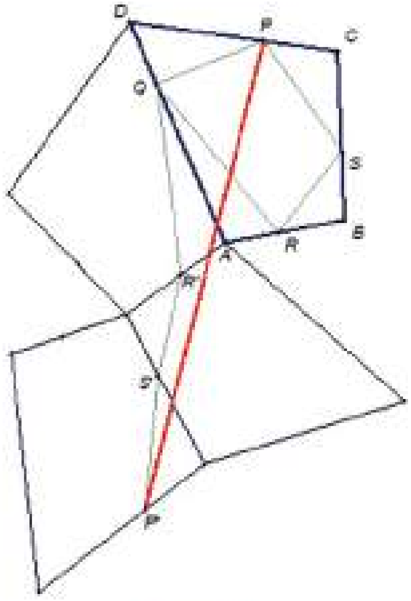


Figura 5

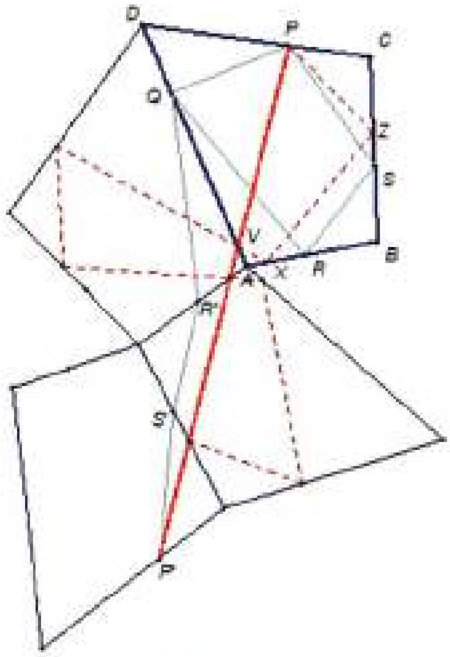


Figura 6

Este problema é difícil. Porém, a sua resolução dinâmica torna acessível, através de um raciocínio espacial, a demonstração de que foi obtido o caminho mais curto. Além disso, verifica-se por variação simples que a estratégia para obter o caminho mais curto é independente da forma inicial do quadrilátero.

OUTROS PROBLEMAS ASSOCIADOS

Há outros problemas mais acessíveis que podem ser associados a este. Por exemplo, considerar o parque em forma de triângulo ou em forma de um quadrilátero particular, um retângulo ou um losango. Outros problemas associáveis contemplam situações distintas, mas continua presente a estratégia do caminho mais curto em linha reta. É um bom exemplo o problema que deixamos para resolver. Este problema é bastante conhecido e muitas vezes apresentado com um contexto que dê sentido à necessidade de obter o caminho mais curto. Neste caso apresentamos o problema sem qualquer contexto inspirador:

Qual é o percurso mais curto entre os pontos A e B, sabendo que este percurso tem obrigatoriamente de passar por um ponto da reta t (figura 7).

Figura 7

Nota Final

Esta secção da revista *Educação & Matemática* tem sido uma oportunidade de partilha de textos de natureza muito diversa, porém sempre focados no ensino e na aprendizagem da geometria. Os 43 textos já apresentados têm percorrido temáticas diversas que vão desde a resolução de problemas à apresentação de dados dispersos resultantes de experiências de sala de aula, passando pela reflexão de ideias teóricas ou decorrentes de experiências de formação inicial ou contínua. Os dados partilhados têm tido sempre a sua origem em experiências realizadas nos primeiros anos ou na formação de professores para os níveis elementares. No entanto, várias das tarefas exploratórias e dos problemas discutidos podem ser trabalhados em níveis de aprendizagem mais avançados. Esta tão grande diversidade tem tido como objetivo divulgar e discutir ideias sobre o ensino da geometria.

Os próximos textos contemplarão episódios de uma experiência longa de ensino da geometria, no 1.º ano de escolaridade, em que o principal recurso de trabalho é o Geogebra. Esta experiência iniciou-se em setembro de 2020 e irá decorrer todo este ano letivo e certamente nos anos seguintes. Será assim divulgada uma espécie de reportagem deste trabalho.

Referências bibliográficas

Viana, J. P. (2012). *Uma vida sem problemas*. Edição Clube do Autor.

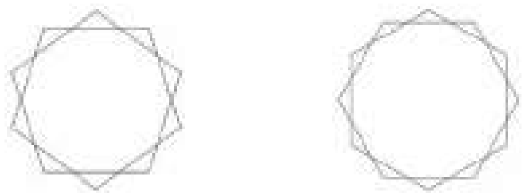
A ver estrelas — contributos para desenvolver o Pensamento Computacional

Cristina Loureiro

Este texto tem como objetivo apresentar algumas reflexões sobre o potencial de uma tarefa de geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento computacional. A tarefa que serve de base a esta reflexão foi proposta a alunos da licenciatura em Educação Básica. No entanto, os conhecimentos de geometria que a tarefa envolve estão ao nível do 2.º ou 3.º ciclos do Ensino Básico. A reflexão que se apresenta tem como ponto de partida cinco processos de resolução elaborados por vários alunos.

A TAREFA "*A VER ESTRELAS*"

1. As duas estrelas da figura pertencem à mesma família de estrelas. Constrói a estrela da direita (12 pontas) recorrendo a dois processos distintos. Descreve sumariamente cada um dos processos de construção usados.



2. Usa cada um dos processos anteriores para construir a estrela de 10 pontas.
3. Constrói outra estrela desta família com maior número de vértices, usando cada um dos dois processos de construção apresentados nas alíneas anteriores.
4. Generaliza cada um dos processos de construção utilizados, ou seja, explica como constróis uma estrela de n pontas usando cada um dos dois processos.

PROCESSOS DE RESOLUÇÃO APRESENTADOS PELOS ALUNOS

Esta tarefa foi realizada a pares, em duas turmas da unidade curricular de Geometria, com recurso obrigatório ao GeoGebra. As trinta resoluções apresentadas pelos alunos contemplaram vários processos distintos e eram, na maior parte dos casos, de natureza muito descritiva, pouco sintéticas e com muitas falhas linguísticas. Além disso, muitas dessas resoluções apresentavam também algumas falhas de utilização de termos e conceitos geométricos. Para este texto foram selecionados os cinco processos mais comuns, relativos apenas à generalização, que não apresentavam falhas de raciocínio matemático. As transcrições dos quatro primeiros processos foram levemente melhoradas do ponto de vista linguístico, sem alterar nenhum aspecto da estrutura e do raciocínio descrito pelos alunos. No quinto processo a transcrição foi objeto de algumas adaptações para ficar clara e operacional, procurando-se não comprometer a racionalidade do processo apresentado pelas alunas. As figuras ilustrativas de cada processo são apenas de um exemplar de estrelas, correspondente a um número particular de pontas.

Processo 1 – Construção através da rotação de um polígono (figura 1)

Para construir uma estrela com n pontas, começa por se construir um polígono regular com n/2 lados. Depois, realiza-se uma rotação com centro no centro do polígono inicial e amplitude 360°/n.

Processo 2 – Construção através da união de vértices não adjacentes (figura 2)

Construção do polígono regular com n lados com o auxílio do GeoGebra.

Ligar com retas dois vértices desse mesmo polígono, vértices que não sejam adjacentes e com um vértice de intervalo.

Processo 3 – "Prolongamento dos lados com interseção de duas em duas" (figura 3)

De forma a obter uma estrela com n pontas, pode construir-se um polígono regular com n lados. O próximo passo é traçar retas que contenham cada um dos lados do polígono inicial. De seguida, deve construir-se um polígono com n/2 lados cujo vértices são as interseções de lados intercalados, duas a duas. Depois, tem de se repetir este último processo para as restantes interseções.

Processo 4 – Construção de dois polígonos inscritos na mesma circunferência (figura 4)

De forma a obter uma estrela com n pontas, pode construir-se um polígono regular com n/2 lados e obter o seu centro. O próximo passo é traçar a circunferência circunscrita ao polígono. De seguida, devem construir-se os pontos médios dos lados do polígono inicial e traçar as semirretas com origem no centro do polígono e passando por cada um destes pontos. Por fim, obtêm-se os pontos de interseção entre estas semirretas e a circunferência, estes pontos são os vértices do segundo polígono. Desta forma, obtêm-se dois polígonos regulares que formam uma estrela em que o número de pontas é o dobro do número de vértices do polígono original.

Processo 5 – "Construção com base na construção, reflexão e rotação de triângulos" (figura 5)

Este processo tem por base a construção, reflexão e rotação de triângulos.

1. *Identificação do triângulo isósceles gerador de um polígono regular. Um dos ângulos deste triângulo tem por amplitude 360°/n, em que n é o número de lados do polígono. Os outros dois ângulos são iguais e a sua medida é metade da amplitude do ângulo interno do polígono.*

2. *Construção deste triângulo.*
3. *Obtenção do polígono regular por reflexões sucessivas do triângulo original. As reflexões têm como eixo um dos lados iguais do triângulo isósceles original e, depois, sucessivamente um dos lados iguais de cada uma dos novos triângulos obtidos por reflexão. O número de reflexões é igual ao número de lados do polígono pretendido menos 1, isto é, (n-1).*
4. *De seguida, fazemos uma rotação com metade da amplitude do ângulo ao centro do primeiro triângulo construído.*
5. *Para finalizar, repetimos o processo de reflexão usado no primeiro polígono e ficaremos, então, com a estrela pretendida com n lados.*

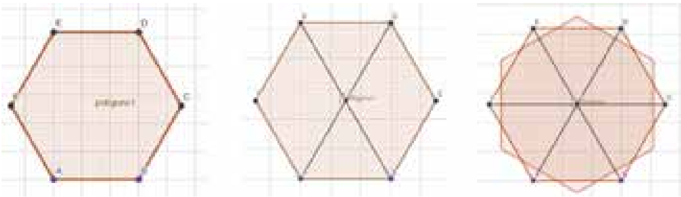


Figura 1

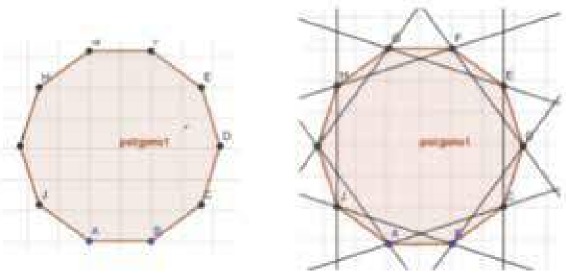


Figura 2

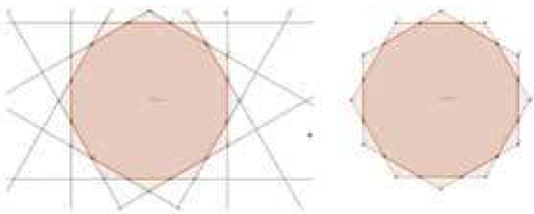


Figura 3

OLHAR, VER, CONSTRUIR E GENERALIZAR

Esta tarefa, de natureza exploratória, foi elaborada com dois objetivos: um de aplicação de conhecimentos sobre polígonos regulares e sobre transformações geométricas, e o outro de comunicação de raciocínio matemático. As resoluções apresentadas mostram aspetos interessantes da aplicação dos conhecimentos geométricos previstos. No que respeita à natureza exploratória, surgiram algumas construções restritas que permitiam apenas obter estrelas com números particulares de pontas e, também, algumas construções erradas. Quanto à comunicação escrita, evidenciaram-se fragilidades muito significativas. Para além dos aspetos descritivos, muitas vezes repetitivos e com indicações a mais, e de discursos com falhas na sua estrutura, vale a pena referir que houve casos em que os alunos realizaram todas as construções pedidas, mas não foram capazes de obter uma generalização ou fizeram generalizações incompletas.

No entanto, as resoluções apresentadas evidenciam aspetos muito significativos ligados ao desenvolvimento da capacidade de pensamento computacional. Destacam-se três: i) a identificação de padrões que permitiu a todos os alunos obter pelo menos um processo de construção para algumas estrelas da família; ii) o papel da decomposição da construção em várias fases, patente no faseamento orientado que proporcionou o sucesso de construção de uma estrela com maior número de pontas, mesmo quando os alunos não conseguiram formular uma generalização; iii) a natureza do problema de construção, própria da obtenção de processos com caraterísticas algorítmicas e que estão muito bem expressos nas descrições apresentadas.

Sobre a orientação do protocolo desta tarefa, há também dois aspetos a destacar de especial interesse para o pensamento computacional: a abertura da tarefa e a sequência orientada das questões que constituem o protocolo. A abertura, patente na existência de várias possibilidades de construção e no pedido explícito de duas delas, é facilitadora de discussão dos processos, no sentido da compreensão da eficácia e da eficiência de cada um deles. Estas caraterísticas dos processos de construção são fundamentais num tipo de raciocínio em que a depuração é

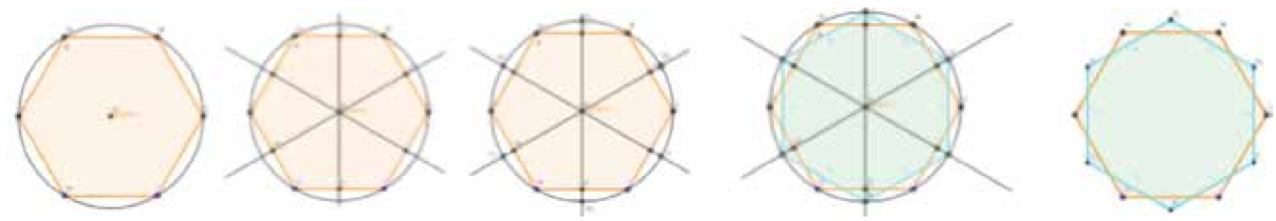


Figura 4

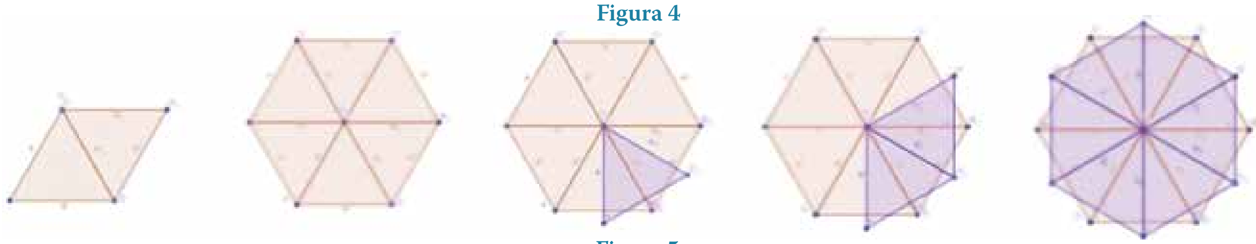


Figura 5

uma componente a destacar. Não basta ser capaz de descrever processos de construção de estrelas desta família, é interessante comparar processos, identificar critérios de eficácia e de eficiência, escolher os que são realmente eficazes e quais são mais eficientes, melhorar os processos obtidos e a sua descrição. Além disso, é inerente ao pensamento computacional conseguir o processo mais direto, completo, sem floreados ou indicações desnecessárias.

Ainda no que respeita à orientação da tarefa, evidencia-se a estrutura de decomposição do problema em que se parte da experimentação de casos particulares para a generalização, permitindo o desenvolvimento progressivo da abstração. Esta estrutura experimental é ainda mais poderosa devido à utilização do GeoGebra. O recurso fácil a ferramentas de construção (polígono regular, reflexão, rotação) e a sua natureza dinâmica são possibilidades incomparavelmente mais poderosas que o recurso a régua e compasso. No decorrer da exploração, os alunos foram fazendo experiências com valores variáveis para o número de pontas das estrelas e testando a eficácia da construção obtida.

Na breve reflexão que aqui se apresenta está ausente a fase de comparação dos processos, da procura de formulações com orientação algorítmica, da sua melhoria e depuração. Falta porque não entrámos nessa fase, mas parece-me que ficou claro que os processos apresentados tinham ainda muitas possibilidades de exploração didática. Como ficou explícito atrás e se depreende desta análise, o desenvolvimento do pensamento computacional não era um dos objetivos da realização desta tarefa. Nesta reflexão procurámos, apenas, analisar uma tarefa de geometria com o objetivo de identificar potencialidades para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Existem muitas tarefas, amplamente divulgadas e que já são habitualmente utilizadas pelos professores, que podem ser facilmente adaptadas e melhoradas para promover também o desenvolvimento da capacidade de pensamento computacional. O que precisamos é de encará-las com essa nova intenção explícita. E, assim, perspetivar como, para além dos objetivos que já lhes são inerentes, também podem ser promotoras do desenvolvimento do pensamento computacional. A resolução de problemas de construção com recurso à geometria dinâmica constitui um ambiente muito fértil para realizar tarefas dessa natureza desde o 1.º ciclo do ensino básico. Há muitas estrelas no firmamento para nos iluminar o caminho. Vale a pena ver estrelas ...

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ÍNDICE

Metas Curriculares - Que sentido

Cristina Loureiro

De quantas maneiras diferentes:

- consegues dobrar um quadrado (ou retângulo, triângulo equilátero, pentágono regular, etc.) de modo que as duas partes obtidas possam ser sobrepostas e coincidam totalmente? Que nova forma geométrica se obtém quando são sobrepostas?
- podes fazer um corte a direito num folha de papel retangular de modo que as duas partes resultantes possam ser novamente justapostas para formar um triângulo?

Estas duas situações simples ajudam a justificar o porquê de ensinar geometria. É fácil concordar que estes dois problemas podem ser desafiantes em qualquer nível escolar. Para resolvê-las não são necessários conhecimentos prévios, basta aceitar o desafio proposto. Para isso é preciso desenvolver o hábito de pensar em desafios e ir construindo hábitos de pensamento que ajudem a não desmoralizar perante os desafios e que sejam eles próprios estímulos para pensar. Ninguém aprende a enfrentar desafios se sair frustrado sempre que se depara com algum, além disso, quando se tem gosto em pensar procuram-se novas situações para pensar.

Estas duas situações partem das figuras e do seu conhecimento global. Sugerem a experiência, a observação dos resultados e a procura de invariantes. A formulação «de quantas maneiras diferentes» apela à necessidade da prova. A resolução de cada um dos problemas pode, assim, ser mais ou menos exigente conforme o nível de desenvolvimento dos alunos. No 1.º ciclo podemos ficar-nos por descobrir várias maneiras diferentes, mas num nível mais avançado já podemos exigir um raciocínio que nos garanta que descobrimos todas e por isso que temos a garantia de saber exactamente quantas são. O sentido dos problemas apresentados está na facilidade de os entender e ser capaz de avançar alguma coisa na sua resolução, no desafio de descobrir maneiras diferentes de obter resultados análogos, na estranheza das situações que leva à necessidade de experimentar com outras figuras e procurar compreender por que razão estas coisas acontecem, na confiança no raciocínio próprio, independente de formalismos desnecessários.

Estas situações, para além da sua simplicidade e acessibilidade, são potencialmente muito ricas porque permitem estabelecer conexões interessantes e porque são bons veículos para desenvolver hábitos de pensamento. Duas boas razões que Goldenberg, Cuoco & Mark (1998) defendem como as fundamentais para ensinar geometria. Estes autores destacam o carácter especial da geometria como «território intelectual», é esta expressão que usam, para realizar experiências, desenvolver raciocínios com uma forte componente visual, procurar invariantes e usar várias formas de raciocínio para expandir argumentos construtivos.

Este tipo de orientação pressupõe uma abordagem holística, que parta das situações. É uma orientação para os problemas e que dá sentido à geometria. Não é essa a orientação da Metas Curriculares. Estas estão construídas numa lógica totalmente atomista de soma de conhecimentos de factos, expressos sob a forma de descritores, organizados numa hierarquia rígida estabelecida ano a ano, que culminam, para o 9.º ano, com a «Axiomatização das teorias Matemáticas» e a caraterização da Geometria Euclidiana. Começando a ler pelo fim as metas para a Geometria e Medida entende-se melhor a lógica que presidiu à sua organização. Temos uma lista, constituída por 444 descritores, 305 só para a geometria, totalmente espartilhados e estéreis, e, por isso mesmo, em que o sentido das aprendizagens está completamente ausente. Por ciclo, são 151 descritores para o 1.º ciclo, 114 para o 2.º e 179 para o 3.º. Esta longuíssima lista pretende munir o aluno de conhecimentos sobre figuras geométricas, supostamente para saber reproduzir mais tarde raciocínios formais segundo a lógica rígida hipotético-dedutiva da geometria euclidiana escolar. Nada vale por si.

Uma análise cuidada e atenta das Metas Curriculares é um acto confrangedor e arrepiante, que, passo a passo, nos revela um total desrespeito dos seus autores pela inteligência das crianças e dos jovens e pelo seu interesse em aprender. Desrespeitados os alunos, estão automaticamente desrespeitados os professores. É uma falácia afirmar-se que o professor «deve selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização». Não há estratégia possível para concretizar estas metas quando se pretende fazer um ensino da geometria com sentido! Só com má fé e total ignorância do que é a prática de ensino se pode afirmar que «os documentos das metas representam um meio privilegiado e fundamental de apoio à planificação e organização do ensino, constituindo uma ajuda para o professor na escolha das estratégias a seguir».

Referências Bibliográficas

Goldenberg, P. Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In Richard Lehrer e Daniel Chazan (Eds.) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. 3-44. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Objetos geométricos e raciocínio geométrico

Cristina Loureiro

O que distingue estas as figuras 1 e 2? A primeira é uma obra do artista plástico Robert Mangold (n. 1973) que pode ser vista na Tate Collection (http://www.tate.org.uk/art). A segunda é uma composição geométrica. A primeira foi escolhida para ilustrar o modo como um artista pode relacionar várias figuras para elaborar uma obra esteticamente atraente. Ela faz parte de um conjunto de seis composições nas quais, para além da variação da cor, é possível identificar pequenas variações no desenho do quadrado (figura 3).

A figura 2 mostra o ponto de partida que Arquimedes usou para estabelecer relações entre a área do círculo e as áreas do quadrado inscrito e circunscrito. Os objetos artísticos permitem-nos uma fruição estética. Os objetos matemáticos, geométricos ou não, também podem proporcionar essa fruição, porém encerram outras possibilidades. Aprender geometria é abrir as portas dessas possibilidades.

Obtenha várias relações entre os elementos das figuras que formam a composição, bem como entre as suas áreas e os seus perímetros.

Do ponto de vista geométrico, esta composição pode ser encarada de forma dinâmica em que se procura uma posição mais favorável (figura 4). A terceira imagem permite afirmar que o diâmetro da circunferência é igual ao lado do quadrado exterior e à diagonal do quadrado interior. Esta circunferência permite assim estabelecer relações entre os dois quadrados, sem ela não seria possível estabelecê-las.

Com mais elementos na composição esta complica-se visualmente, porém a informação que proporciona permite avançar mais (figura 5). A área do quadrado exterior é o dobro da área do quadrado interior. Ao destacar agora um novo quadrado, a sombreado, vemos que a sua área é o quadrado do raio da circunferência. Concluímos que a área do círculo está entre $2r^2$ e $4r^2$, num valor que deverá estar próximo de $3r^2$. Esta é a aproximação mais simples da relação entre a área de um círculo e o seu raio.

Arquimedes (287–212 A.C.), considerado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos e possivelmente o maior da antiguidade, recorreu aos perímetros de polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência e obteve a primeira aproximação rigorosa de π, $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$. Para chegar a este enquadramento partiu de hexágonos e recorreu sucessivamente a polígonos com um número de lados 6×2^n (figura 6). Obteve estes valores na quarta ordem com polígonos de 96 lados.

Figura 1

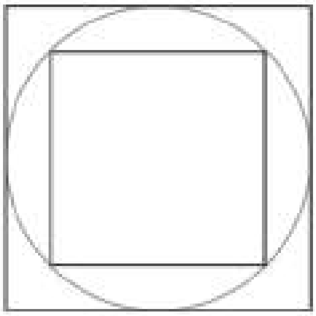


Figura 2

Este exemplo ilustra o papel da geometria no desenvolvimento do raciocínio geométrico, bem como no estabelecimento de conexões. Para mim é um bom exemplo do que Howard Eves considera a geometria inconsciente e a geometria científica. Este matemático considera que a história da geometria é composta por dois caminhos entrelaçados. Um narra o crescimento do conhecimento geométrico e o outro a mudança da natureza do objeto de estudo. Ao desenvolver estas duas narrativas, Howard Eves fala-nos da geometria subconsciente e da geometria científica. Considera que a primeira tem origem em observações simples decorrentes da capacidade humana para reconhecer figuras e comparar as suas formas e tamanhos. Foi esta geometria que desde sempre foi utilizada pelo homem para obter decorações e padrões. De certa forma esta arte inicial fez muito pelo desenvolvimento posterior da geometria. A evolução da geometria subconsciente nas crianças é bem conhecida e facilmente observável. Progressivamente, o Homem foi sendo capaz de extrair de um número de observações relacionadas com formas, tamanhos e relações espaciais dos objetos físicos certas propriedades e relações gerais, das quais as primeiras eram casos particulares. Assim, foi introduzida a vantagem de organizar problemas geométricos práticos em classes de problemas, de tal modo que numa classe os problemas são resolvidos pelo mesmo procedimento geral. Por exemplo, a comparação do comprimento de uma circunferência com o seu diâmetro levou, ao fim de algum tempo, à lei geométrica que estabelece uma razão constante entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Howard Eves considera que esta evolução conduziu à geometria científica. Nesta, a indução, a tentativa erro, os procedimentos empíricos são os instrumentos de descoberta.

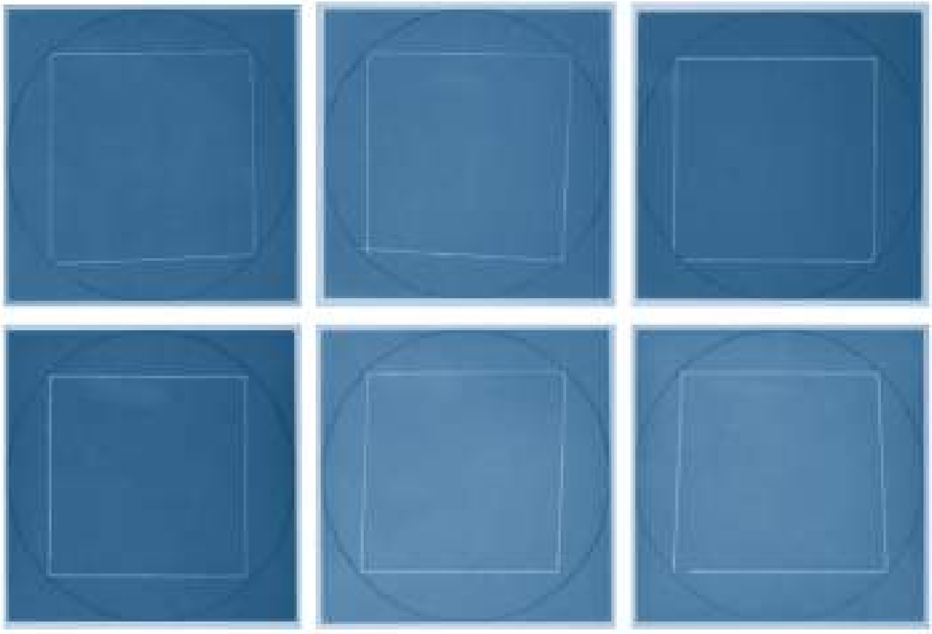


Figura 3

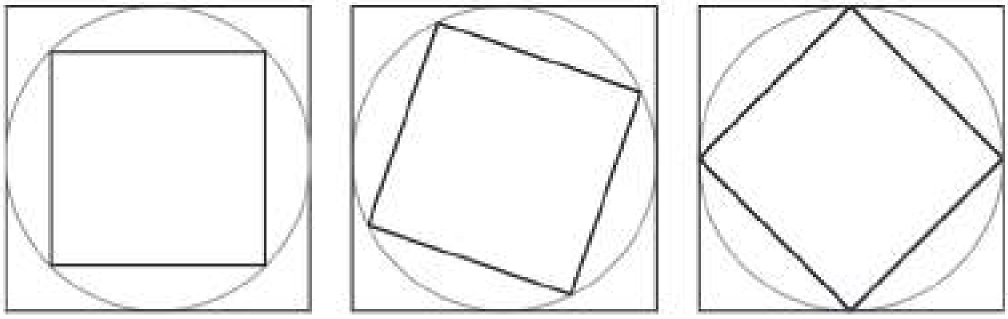


Figura 4

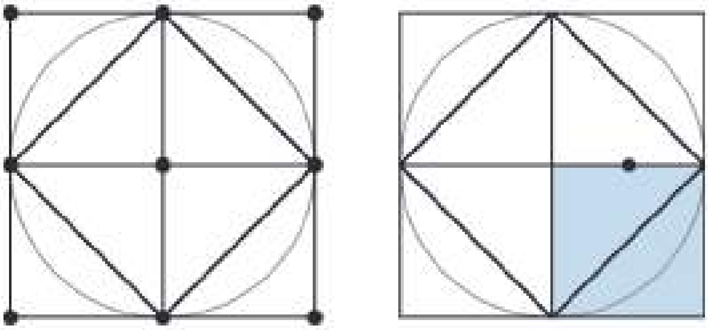


Figura 5

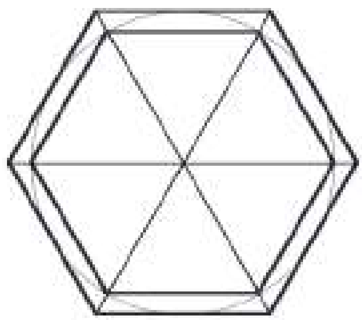


Figura 6

A perspetiva destas duas narrativas históricas é coerente com um dos propósitos atualmente dominante para o ensino da ensino da geometria, o de desenvolver o raciocínio geométrico. As metas curriculares têm por base apenas uma perspetiva dedutiva e ignoram totalmente as duas narrativas históricas referidas por Howard Eves, bem como o propósito de desenvolvimento do raciocínio geométrico que a investigação em didática preconiza. Ao fazê-lo comprometem mortalmente o ensino da geometria e por arrasto o ensino da matemática.

Referências Bibliográficas

Eves, Howard (1989). The history of geometry. In NCTM (Ed.), *Historical topics for the Mathematics classroom*. (pp. 165-192). Reston: NCTM.

Raciocínio hipotético-dedutivo

Cristina Loureiro

No futuro programa do Ensino Básico elege-se o raciocínio hipotético-dedutivo como o raciocínio matemático por excelência e afirma-se que o objetivo geral dedicado à axiomática da geometria constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos.

Quem o faz ignora totalmente tudo o que tem sido pensado, experimentado, refletido e avaliado ao longo de décadas de evolução do conhecimento sobre aprender e ensinar matemática, a que hoje chamamos Didática da Matemática.

Para fundamentar a minha posição revi uma publicação marcante, «Ensino da Geometria no virar do milénio», com contributos significativos de especialistas internacionais no ensino da geometria. Neste documento podem ser destacadas algumas ideias dominantes: (1) a relação entre a intuição e a dedução; (2) a importância da experimentação e do trabalho de cunho investigativo; (3) as conexões entre a geometria e as outras áreas; (4) as aplicações da geometria; (5) os contributos da tecnologia.

Na análise que faço do programa em debate, não encontro nenhum eco destas ideias. Uma pesquisa simples de ocorrências permitiu-me obter os resultados expressos na tabela 1.

Destaco que as quatro referências à intuição que encontrei têm como preocupação justificar a importância da dedução ou servem para chamar a atenção para o seu caráter enganador. Para quem ainda não conhece, os cadernos de apoio são explicitamente assumidos pelos autores do Programa e das Metas como um documento elaborado para apresentar «sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores».

Tabela 1.

Palavras-Chave	PM	CA1	CA2	CA3
Intuição	0	0	1	3
Experimental ou palavras derivadas	2	0	0	0
Conexões	0	0	0	0
Investigação	0	0	0	0
Programas de geometria dinâmica	1	0	0	1

PM–Programa e Metas, CA1–Caderno de apoio do 1.º ciclo; CA2–Caderno de apoio do 2.º ciclo; CA3–Caderno de apoio do 3.º ciclo

Para ilustrar a minha total discordância do programa em debate e de todos os documentos que lhe estão associados, sugiro um conjunto de problemas muito simples.

Dividir em duas parte equivalentes um triângulo isósceles. Investigar várias soluções e desenvolver o problema passando a outras figuras nomeadamente, um triângulo qualquer, um trapézio e um paralelogramo.

Estes problemas e as investigações associadas são ricos e adequados ao ensino básico. Admitem vários níveis de exploração e permitem trabalhar, ou não, sobre conhecimentos de geometria como por exemplo o Teorema de Tales. Combinam muito bem intuição e dedução. Constituem um desafio muito acessível e aliciante com recurso a um ambiente de geometria dinâmica, sem o qual se tornam inacessíveis. São um exemplo, mas há centenas deles. Escolhi este porque a sua resolução e discussão são muito interessantes.

O grande problema do futuro novo programa de Matemática para o Ensino Básico não é que o que não está lá e que os seus autores justificam como ausente para dar espaço a que as metodologias livres dos professores possam implementar. O maior problema é a visão estreita, limitada e retrógrada da matemática, subjacente às ideias expressas na introdução, nas finalidades e nos objetivos e bem patente nas metas e nos cadernos de apoio ao professor. Em meu entender, a obsessão cega do raciocínio hipotético-dedutivo, que domina o orientação dos conteúdos de geometria deste programa, pode ser mortal para o ensino da Matemática na escolaridade básica. Quem defende e persegue esta ideia, posta em causa há tanto tempo, torna-se responsável por destruir todo o caminho que vem sendo construído para que a geometria tenha o papel que lhe é devido no ensino básico.

Já ninguém tem dúvidas de que o raciocínio hipotético-dedutivo não pode ser o motivo para que as crianças e jovens aprendam Matemática na escolaridade básica. A demonstração formal, baseada num sistema axiomático, poderá vir apenas no fim de uma longa sequência de modos de raciocínio muito menos sofisticados e em níveis de escolaridade mais avançados.

Referências Bibliográficas

Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J. P. & Abrantes, P. (org.) (1999). *Ensino da Geometria no virar do milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Raciocínio hipotético-dedutivo (2)

Cristina Loureiro

Como dividir o bolo ao meio?

Este problema foi apresentado no apontamento anterior com uma formulação menos apetitosa.

Dividir em duas partes equivalentes um triângulo isósceles.

Investigar várias soluções e desenvolver o problema passando a outras figuras nomeadamente, um triângulo qualquer, um trapézio e um paralelogramo.

Recorrendo a um ambiente de geometria dinâmica (AGD), começando pelo triângulo isósceles obtém-se rapidamente um ponto que permite obter um corte que decompõe o triângulo em duas partes equivalentes, o corte [DE] na figura 1. Claro que estamos a pensar numa solução em que o corte não contêm nenhum dos vértices do triângulo. Neste caso o triângulo [ADE] e o trapézio [DBCE] são equivalentes ou, dito de outro modo, a área de um é igual à área do outro.

Qual é a posição exacta do ponto E no lado [AC]? As medições que o AGD nos oferece permitem obter uma razão interessante $AC/AE \approx 1{,}42$.

A razão entre AC e AE é igual à razão entre a diagonal e o lado de um quadrado. Assim, o ponto E será o ponto que determina AE como um segmento igual ao lado de um quadrado cuja diagonal é AC. A figura 2 mostra essa construção. Obtido o ponto E, tem-se imediatamente o ponto D por paralelismo dos segmentos DE e BC. É o paralelismo que vai garantir as razões entre os vários segmentos presentes. É o teorema de Tales que está presente, ainda que não seja preciso recorrer a ele como ponto de partida. Será esta solução independente da forma do triângulo (figura 3)? Por mais estranha que seja a forma do triângulo a solução mantém-se.

Toda esta exploração seria árida se recorrêssemos à resolução algébrica, envolvendo várias razões de segmentos e cálculos de áreas. Com o recurso a um AGD resolvemos o problema original e fizemos uma generalização muito poderosa. O caminho da resolução obrigou-nos a resolver um problema auxiliar interessante (Construir um quadrado dada a sua diagonal). No GeoGebra, por exemplo, este problema

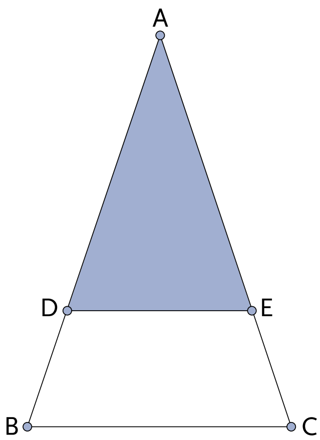


Figura 1

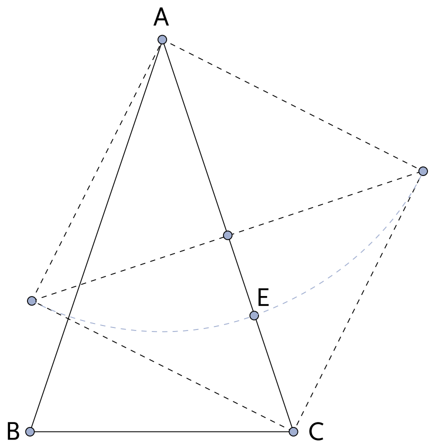


Figura 2

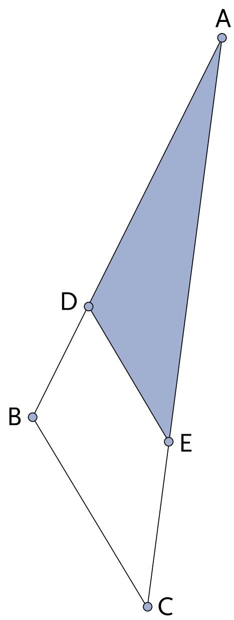


Figura 3

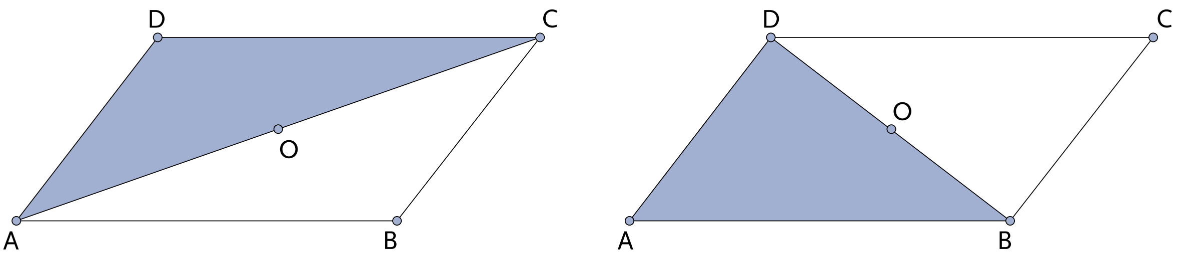


Figura 4

de construção não é de solução imediata pois este AGD tem a construção do quadrado pré definida a partir do lado.

A resolução dinâmica rapidamente provoca o interesse em passar a outras figuras.

O paralelogramo tem uma generalização interessante e acessível de obter. Para além das duas soluções particulares obtidas a partir de cada uma das diagonais (figura 4), qualquer segmento de reta que contenha o centro do paralelogramo divide-o em dois quadriláteros congruentes e, por isso, também equivalentes (figura 5). Em qualquer dos casos, a congruência das duas partes pode ser demonstrada recorrendo a uma rotação de 180º cujo centro é o centro do paralelogramo. No caso do paralelogramo pode ser mais acessível partir de paralelogramos particulares, como um retângulo qualquer ou mesmo um especial, o quadrado.

O trapézio vai complicar muito a situação e tornar o problema muito difícil de generalizar e, por isso, de obter uma solução. Passa a haver mais variáveis em jogo, como ilustram os trapézios da figura 6. No entanto o problema pode ser igualmente apetitoso.

Afirmei então que estes problemas constituem um desafio muito acessível e aliciante com recurso a um AGD, sem os quais se tornam inacessíveis. Esta apresentação pretende ilustrar essa acessibilidade e servirá de mote para discutir a dominância do raciocínio visual na geometria, que se opõe à álgebra em que domina o raciocínio sequencial.

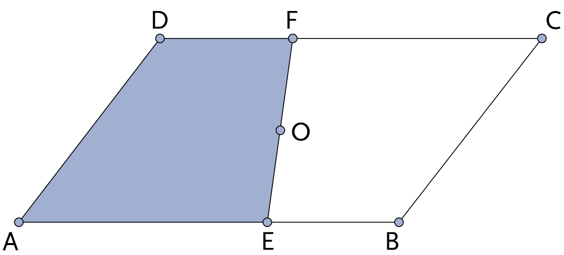


Figura 5

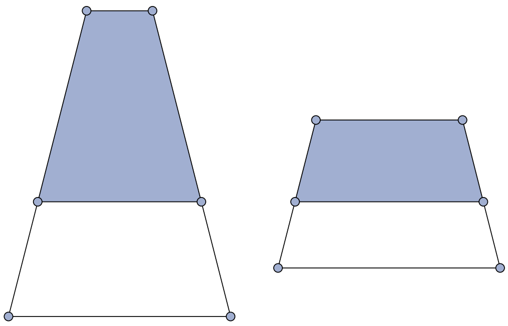


Figura 6

Um problema para o olhar

Cristina Loureiro

Dado um triângulo ABC qualquer, marque um ponto D no lado AB e trace DE paralelo a BC, como mostra a figura (figura 1). Una os pontos B com E e C com D, e marque o ponto de interseção F. Trace o segmento AF e prolongue-o de modo a intersectar o lado BC. O ponto de interseção é G. O segmento AG é sempre uma mediana do triângulo. Prove que esta afirmação é verdadeira.

Escolhi este problema porque ele apela fortemente ao recurso a um AGD para testar a validade da afirmação e porque esta demonstração, que não é simples, foi bem desafiante e inesperada para mim. A chave da demonstração está na maneira como olhamos para a figura (figura 1), para os seus elementos e no modo como procuramos invariantes entre esses elementos ou entre as suas relações.

Para provar que AG é mediana basta provar que G é o ponto médio de BG, ou que BG = GC.

A demonstração tem que ter por base as propriedades relativas à situação, ou seja, que DE é paralelo a BC, e factos conhecidos que decorrem da semelhança de triângulos.

Ao examinar a figura é importante ter em conta que não temos apenas uma figura, mas todas as figuras que se obtém fazendo variar o triângulo ABC e a posição do ponto D. Uma sucessão de figuras auxiliares ajudam a ver o que está em causa.

Neste caso temos duas maneiras diferentes de olhar a figura (figura 2 e figura 3). Em qualquer dos casos estamos a dar atenção a pares de triângulos semelhantes, por isso

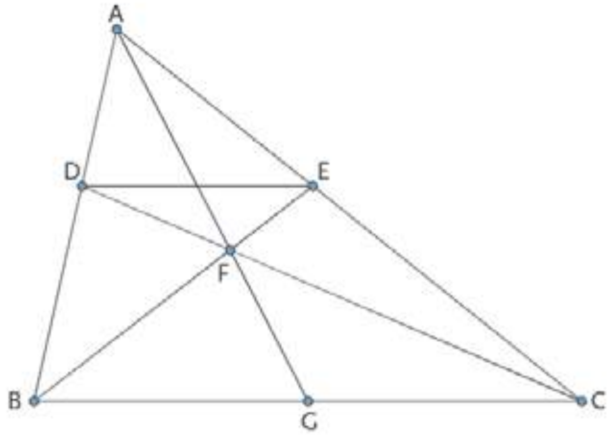


Figura 1

destacamos os triângulos pintando-os. Num caso temos o triângulo ADE semelhante a ABC, no outro temos DFE semelhante a BCF. Para ambos os casos a razão de semelhança tem que ser igual pois ela é determinada pelo paralelismo dos segmentos DE e BC e pela relação que se estabelece entre DE e BC. Designamos esta razão por k. Temos BC = k DE.

O facto dos dois pares de triângulos terem a mesma razão de semelhança é o elemento crucial desta situação. Ao traçar o segmento AG mantêm-se a razão de semelhança entre novos pares de triângulos e podem ser obtidas relações entre outros segmentos.

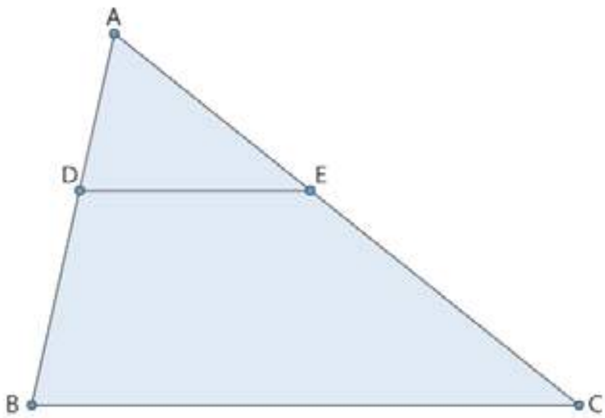


Figura 2

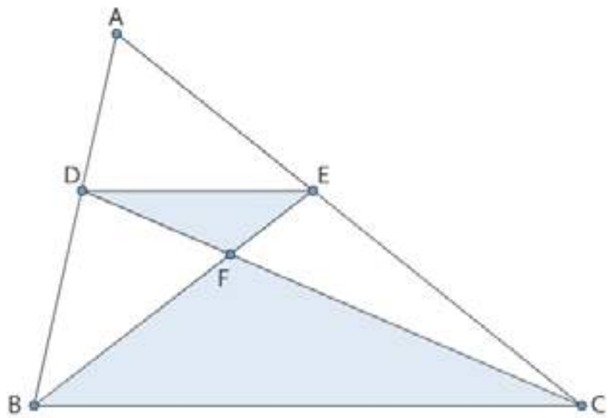


Figura 3

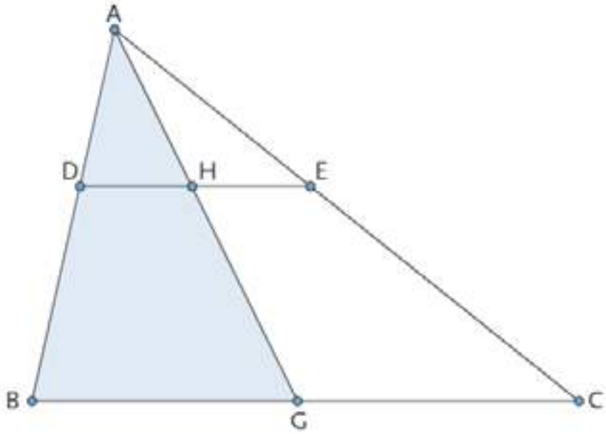


Figura 4

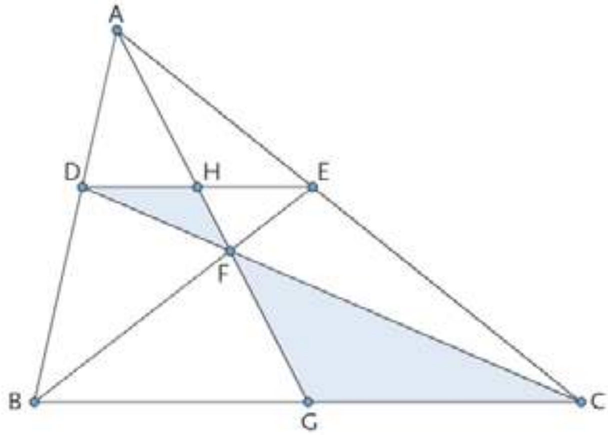


Figura 5

Estabelecendo agora relações entre os segmentos da figura (figura 4 e figura 5), obtemos:

BG = k x DH e também GC = k x DH

Destas duas igualdades podemos retirar que BG = GC. Precisamente o que queríamos demonstrar.

Chegamos ao fim da demonstração. Este resultado dá-nos mais uma ideia interessante e útil, um processo para obter paralelas (Figura 6). O processo é este: Desenhamos um triângulo ABC e obtemos o ponto médio de um dos seus lados, BC por exemplo. A partir desse ponto médio traçamos a mediana relativa a BC e marcamos um ponto qualquer sobre ela, o ponto P. As semirretas definidas por cada um dos vértices B e C e este ponto P intersetam os lados AB e AC em R e S. Estes dois pontos definem um segmento de reta RS paralelo a BC.

Este problema e esta construção são especialmente interessantes para explorar num ambiente de geometria dinâmica. Uma outra ideia que considero relevante tem a ver com a razão de escolha deste problema. Olhar e analisar várias vezes esta figura, procurando o máximo de relações entre os seus elementos confere-lhe também um dinamismo, mesmo que esteja desenhada em papel branco. Experimente.

Este problema foi retirado de Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University. (p. 39). A discussão apresentada foi adaptada da discussão feita pelos autores do livro.

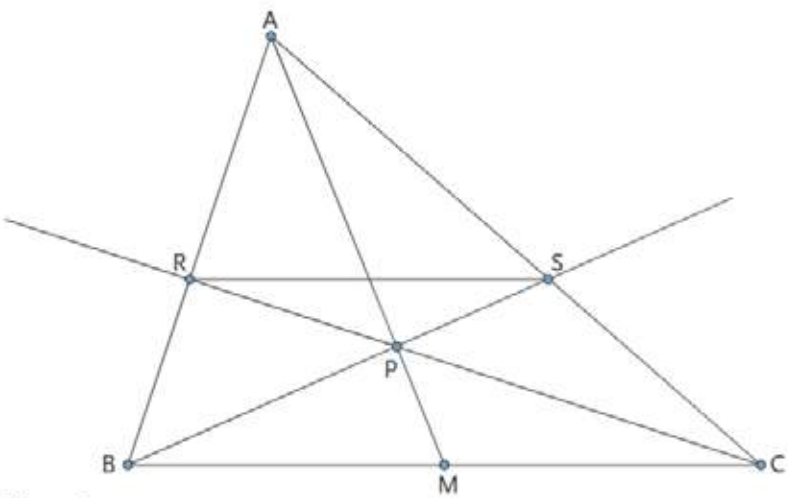


Figura 6

Torradas com manteiga

ou como a maneira de cortar pão influencia a quantidade de manteiga que nele se pode colocar

Cristina Loureiro

Não há só uma maneira de cortar o pão para torradas e por isso a quantidade de manteiga pode ser diferente conforme a maneira de fazer o corte e de barrar com manteiga. Nesta discussão, o que nos vai interessar não são as calorias a mais que estão envolvidas, mas sim as questões matemáticas que podemos formular sobre esta situação e, consequentemente, os problemas que podemos resolver e as respostas que encontramos. O desafio aqui está na complexidade crescente das questões. Os problemas podem começar por ser muito simples, mas a sua resolução pode conduzir à formulação de novas questões mais elaboradas. Façamos um percurso.

Para iniciar pensemos neste pão como um paralelepípedo cujas dimensões são 2 × 2 × 3 (fig. 1).

Há duas maneiras de cortar o pão. Em ambas a espessura das torradas é igual.

Para facilitar designamos o corte A por longitudinal e o B por corte transversal.

O corte longitudinal permite obter apenas 2 torradas, isto é, 2 faces que podem ser barradas de manteiga. O corte transversal permite obter várias torradas, dependente da dimensão do pão e da opção de colocar manteiga em mais do que uma face.

Neste caso, o corte B dá 3 torradas e a do meio pode ser barrada com manteiga em duas faces, é por isso que temos duas possibilidades de barrar para o corte B. Vamos fazer uma tabela (tabela 1) com todas as possibilidades para a situação da fig 1.

Podemos notar que para os dois cortes uma das possibilidades origina valores iguais. Esta situação levou-nos a formular uma questão. Haverá outros formatos do pão em que o resultado seja exatamente igual? Para simplificar, vamos passar a considerar que só barramos as torradas numa das faces.

Se o pão for um cubo é indiferente a maneira de cortar o pão.

Se experimentarmos com as dimensões 2 × 3 × 4 (fig. 2) obtemos a mesma área para os 2 cortes (tabela 2). E se o pão for um pouco mais comprido, 2 × 3 × 6 por exemplo, o que acontece?

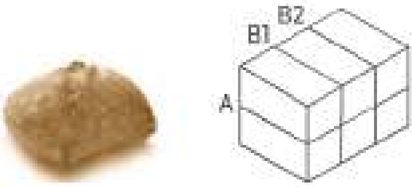


Figura 1

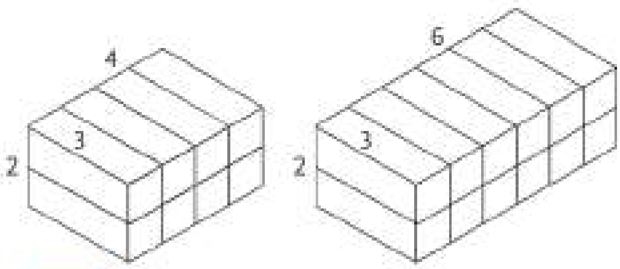


Figura 2

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	2 × 3	2	2 × (2 × 3) = 12
corte B	2 × 2	3	3 × (2 × 2) = 12
		4	4 × (2 × 2) = 16

Tabela 1

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	3 × 4	2	2 × (3 × 4) = 24
corte B	2 × 3	4	4 × (2 × 3) = 24
corte A	3 × 6	2	2 × (3 × 6) = 36
corte B	2 × 3	6	6 × (2 × 3) = 36

Tabela 2

A tabela 2 mostra-nos que o resultado é o mesmo para os dois tipos de corte.

Será que vai acontecer sempre esta igualdade? Como podemos ter a certeza disso?

Se tivermos em que conta que há uma relação entre o valor de k e as dimensões c e a para conseguir que as torradas tenham todas a mesma espessura e que essa relação é $k = c/(a/2)$ que é equivalente a ter $c = k \times (a/2)$, podemos verificar que são iguais os dois valores da área barrada:

$$2bc = 2b \times (k \times (a/2) = k \times ab$$

Quando formulei e resolvi este problema não tive em atenção que para o corte B as torradas só deviam ser barradas de um lado e, por isso, obtive valores diferentes para os dois tipos de cortes. Por essa razão avancei com um outro tipo de questão para a situação em que as torradas centrais são barradas dos dois lados.

Qual é a percentagem de aumento de manteiga necessária para barrar as torradas, isto é, qual é a percentagem de aumento da área a barrar?

Ficamos por aqui, a generalização para o caso abc fica ao cuidado do leitor mais interessado. E fica também o desafio para encontrar uma dimensão de pão que permita obter o dobro da área a barrar de manteiga, isto é, um aumento de 100%.

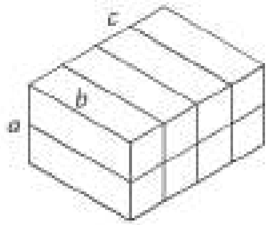


Figura 3

Um dos aspetos que destaco neste percurso é que começámos por uma situação muito simples que nos levou progressivamente à formulação de problemas mais elaborados e nos permitiu fazer uma generalização, com uma entrada muito significativa pela álgebra. Um outro aspeto foi a necessidade de simplificar o modelo geométrico, neste caso recorrendo a um paralelepípedo e de colocar cuidadosamente as condições de formulação do problema. Neste caso, barrar apenas de um lado ou dos dois faz uma grande diferença matemática. Para concluir, faltou o chá ou o café com leite.

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	$b \times c$	2	$2 \times (b \times x)$
corte B	$a \times x$	k	$k \times (a \times b)$

Tabela 3

dimensões do paralelepípedo	corte A	corte B	aumento da área	percentagem de variação da área a barrar
2 × 2 × 4	12	4 × (2 × 2) =16	4	+ 33,3%
2 × 3 × 4	24	6 × (2 × 3) = 36	12	+ 50%
2 × 3 × 6	36	10 × (2 × 3) = 60	24	+ 66,6%

Tabela 4

geometria com e sem muros

Cristina Loureiro

A ideia chave deste artigo é uma reflexão sobre a utilização de programas de geometria dinâmica (AGD) na aprendizagem da geometria desde os primeiros anos. Esta reflexão é feita aproveitando o duplo sentido da palavra muro e brincando um pouco com esse sentido.

UM PROBLEMA COM MUROS

São bastante conhecidos os problemas de geometria sobre muros. A variação do comprimento da sombra de um muro em função da sua altura, a obtenção da altura do muro sem precisar de ir ao cimo do muro são dois dos modelos mais comuns. Nesta nota resolvo e discuto mais um. O problema é simples e foi divulgado há algum tempo pelo José Paulo Viana num dos seus artigos semanais do Jornal Público. Não me lembro exatamente da formulação apresentada, mas o problema é o seguinte:

> *Temos dois muros paralelos e ligamos o topo de cada um deles à base do muro oposto por uma corda, como mostra a figura 1. As duas cordas encontram-se num ponto. Um dos muros tem 3 m de altura e o outro 5 m. Qual é a altura do ponto de encontro das duas cordas.*

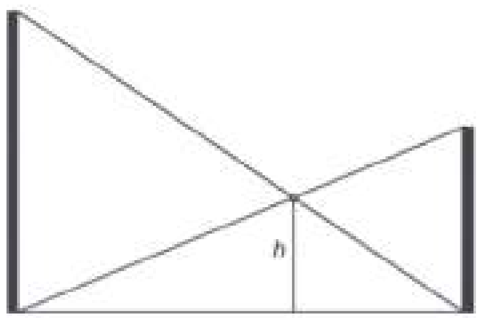


Figura 1

Para mim é impensável nos dias de hoje abordar um problema de geometria como este sem recorrer de imediato a um ambiente de geometria dinâmica (AGD). Para fazer a construção dinâmica surge logo uma questão, qual é a distância entre os muros? A ausência deste dado, que não foi facultado, aponta logo para fazer a construção dinâmica com esta distância variável. Depois de feita a construção, basta fazer as medições e obtemos de imediato o valor da altura pedida. O problema está resolvido para os valores dados e identifica-se logo um primeiro invariante: a altura pedida mantém-se quando se varia a distância entre os muros. Porém, ainda nos falta conhecer outras relações entre os vários elementos da figura.

O passo seguinte é identificar alguns elementos e estabelecer relações entre eles. Propositadamente decido representar os dados por letras pois o ambiente dinâmico empurra-me para trabalhar com medidas variáveis, o que é o mesmo que dizer que estamos a trabalhar com qualquer medida (figura 2).

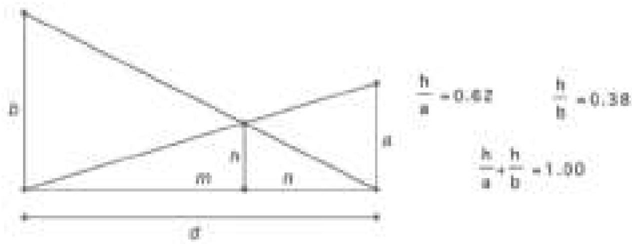


Figura 2

Obtidas algumas medidas e calculando a razão entre a altura pedida e a altura de cada um dos muros, surge um novo e desafiador invariante. A soma destas duas razões mantém-se sempre igual a 1. Conhecida esta relação, o problema está resolvido para qualquer valor de a e de b, isto é, para todas as medidas da altura de cada um dos muros. Basta substituir *a* e *b* e calcular h.

Nesta fase faz sentido perguntar porque será a soma das duas razões invariante e igual a 1?

Para compreender esta relação o problema vai passar rapidamente de um problema de geometria a um problema de álgebra.

$\frac{m}{h} = \frac{d}{a}$ ou seja $m = \frac{dh}{a}$

$\frac{n}{h} = \frac{d}{b}$ ou seja $n = \frac{dh}{b}$

de onde se tira $\frac{dh}{a} + \frac{dh}{b} = d$

que simplificado é $\frac{h}{a} + \frac{h}{b} = 1$

relação esta que é equivalente a $h(a + b) = ab$

ou seja $h = \frac{ab}{a+b}$

O problema que já estava resolvido com o AGD para quaisquer medidas da altura de muros, fica agora totalmente compreendido. Mas tornou-se um problema de álgebra e isso carregou-o de dificuldades, colocou-lhe mais muros, agora de natureza compreensiva. Considero que ao nível da aprendizagem o problema foi desafiador e interessante na parte do AGD, adequado ao 3º ciclo para todos os alunos. A segunda parte, algébrica, já coloca outras exigências e é discutível para que nível a sua adequação para todos.

Como conclusão destaco a ideia de que, com recurso a um AGD, o problema dos muros adquiriu uma configuração totalmente diferente do que se fosse resolvido com papel e lápis. Aliás, sem um AGD o problema dos muros era, simultaneamente, um problema de geometria e de álgebra, e teria sido resolvido com recurso às relações entre os elementos de dois triângulos retângulos. A resolução de um problema como este leva-nos a questionar a orientação do ensino da geometria, tanto ao nível dos conteúdos a trabalhar como da natureza das tarefas a realizar pelos alunos. É aqui que entra a segunda parte da reflexão.

APRENDER GEOMETRIA SEM MUROS

Descrevo agora um episódio simples passado recentemente numa turma de 2.º ano de escolaridade. Nesta turma a professora integra o recurso ao GeoGebra, pelos seus alunos, desde o 1.º ano.

A tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

> *Descobrir todas as bandeiras triangulares que se podem construir num geoplano de 3 por 3.*

O GeoGebra permite trabalhar com uma rede quadriculada e, por isso, é uma representação fiel do geoplano com a mais valia de ser dinâmica. Os alunos tinham de recorrer ao GeoGebra para fazer as experiências e depois representar as soluções obtidas no papel. O objetivo da tarefa era construir triângulos, em posições diversas, e identificar relações simples entre os lados dos triângulos. O contexto escolhido, construir bandeiras, tinha como intenção proporcionar logo uma orientação para que os triângulos não fossem desenhados nas posições mais comuns.

Na resolução os alunos descobriram os 8 triângulos possíveis (figura 3). Nem todos os alunos descobriram todos os triângulos, mas o oitavo, o último da figura 3, em baixo à direita, foi descoberto por vários alunos e originou uma discussão coletiva animada. Mas o mais interessante é que a própria professora, ao fazer a planificação da tarefa, tinha pensado que os alunos não iriam descobrir este oitavo triângulo pois era o único que não tinha nenhum lado coincidente com as linhas da rede quadriculada e poderia não ser considerado como uma bandeira. Foram os alunos que o descobriram e argumentaram que só com este tinham todos os triângulos possíveis.

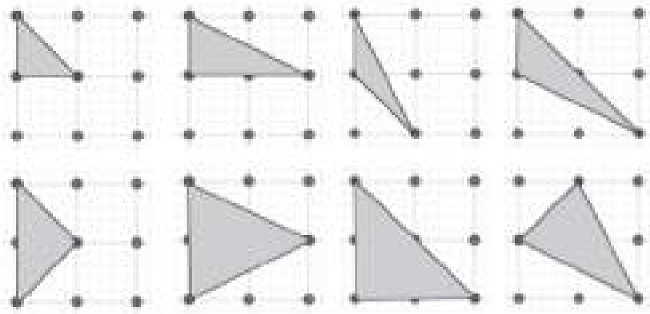


Figura 3

Os alunos desta professora resolvem tarefas de geometria desafiadoras e as expectativas da professora são sempre elevadas, no entanto eles ultrapassam-nas sem dificuldade e acabam por surpreender a professora. Vale a pena destacar que esta professora lhes apresenta a geometria sem muros.

No caso das bandeiras, o problema sugere logo um desenvolvimento que é descobrir todos os quadriláteros possíveis de construir num geoplano de 3 por 3 e depois descobrir todos os polígonos. No caso do problema dos muros ficou clara a abordagem por invariantes que os AGD possibilitam para a resolução de problemas.

A matemática sempre teve muros para os alunos. Entendidos aqui muros como obstáculos que é preciso ultrapassar. Os recursos tecnológicos permitem eliminar muitos desses muros. Infelizmente parece que insistimos em manter os muros, mesmo quando temos recursos cada vez mais acessíveis e poderosos à disposição de todos e que nos permitem eliminá-los.

Ângulos externos de um polígono e voltas completas

Cristina Loureiro

ALGUMAS IDEIAS SOBRE O CONCEITO DE ÂNGULO EXTERNO

O conceito de ângulo externo de um polígono não é muito valorizado e penso até que lhe é dada muito pouca atenção. No entanto, este elemento de um polígono pode ser muito significativo e ajudar a ampliar o conceito de ângulo.

Os ângulos externos de um polígono levam-nos a encarar uma forma de percorrer o polígono por fora. Isto é, partindo de um vértice qualquer de um polígono, percorrendo a linha poligonal que o define, a sua fronteira, de forma a manter sempre a mesma maneira de virar ao chegar a outro vértice, quando chegarmos ao vértice do qual partimos demos uma volta completa, ou seja, rodámos 360º.

Aprendi esta propriedade há muitos anos quando alguém me proporcionou a experiência de percorrer, no verdadeiro sentido da expressão, a fronteira de um polígono desenhado no chão. Esta experiência pode ser feita com crianças desde muito cedo e é realmente marcante. Andamos, paramos em cada vértice e vamos rodando. Seja qual for o número de lados terminamos sempre voltados para o mesmo ponto de referência de quando partimos e, durante o percurso, nunca olhámos para esse ponto de referência. Temos assim uma ideia concreta do que é dar uma volta completa.

Esta propriedade é válida para qualquer polígono seja qual for o número de lados. Uma outra forma de exprimir esta propriedade é afirmar que a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer é um ângulo de volta completa, um ângulo giro ou um ângulo de 360°.

A ideia que apresentamos tem subjacente o conceito de ângulo externo encarado como uma grandeza, neste caso associada à medida da rotação definida pelo prolongamento de um lado e pelo lado consecutivo (figura 1).

É importante registar que esta marcação de ângulos obedece à regra de que, num dado polígono, todos os prolongamentos dos lados sejam feitos com igual orientação e que, num polígono convexo, um ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente.

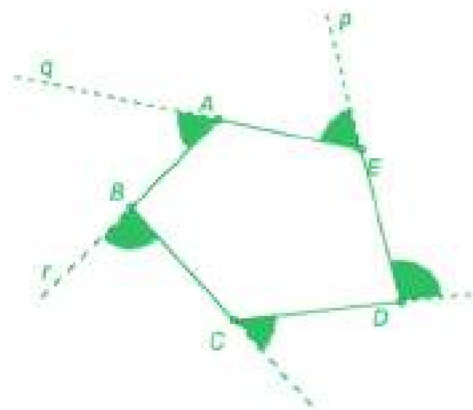


Figura 1

Destaco nesta discussão que se adota o conceito de ângulo como grandeza e não como figura, seguindo a orientação desenvolvida por Stella Baruk. Este conceito é amplamente discutido no Dicionário de Matemática Elementar desta autora. Aliás esta orientação de ângulo como grandeza é a mais correta do ponto de vista formal.

UM EPISÓDIO DE SALA DE AULA

O que acabamos de dizer é fácil de compreender e aceitar num polígono convexo. O que se passará com um polígono côncavo? O que será um ângulo externo num polígono côncavo?

Esta questão surgiu numa turma de 5.º ano e registo o comentário da professora.

“A questão foi-me colocada por um aluno do 5.º ano! Foi um episódio delicioso em que eu fiquei ‘aflita’. Quando o aluno me colocou a questão, a minha resposta foi que o ângulo alfa (a na figura 2) era o quarto ângulo externo, mas apenas o fiz por uma questão de lógica e coerência com o que estávamos a fazer com os polígonos convexos. Ficámos os dois a olhar para o desenho, por razões diferentes. Ele porque o facto de um ângulo externo estar no interior lhe causava compreensiva estranheza, eu porque a definição assente no facto de um ângulo externo ser suplementar ao ângulo interno adjacente, cair por terra. Fiquei caladinha e tivemos de sair da sala, 'graças a Deus'. Ambos saímos de sobrolho franzido! Nem um nem outro estávamos convencidos."

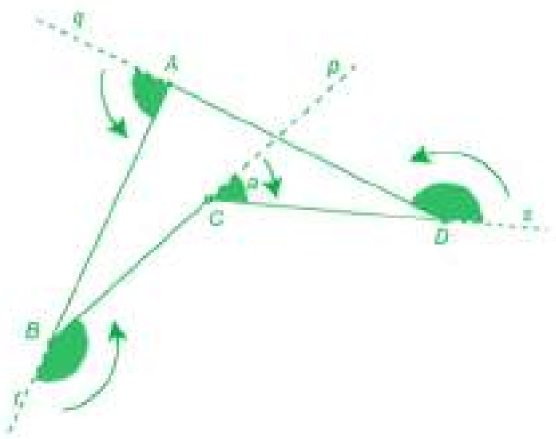


Figura 2

A professora, ciente da importância da conservação de propriedades quando se amplia um conceito, decidiu experimentar o que acontecia à soma dos ângulos externos com este ângulo externo "metido para dentro". Concluiu que se a medida do ângulo neste caso fosse negativa se mantinha a propriedade da soma igual a 360°. Como fez as experiências num programa de geometria dinâmica concluiu que a propriedade era válida para qualquer polígono côncavo, com qualquer número de lados. Assim, na discussão posterior com o aluno assumiu que o ângulo externo é obtido da mesma maneira e que, nesta situação de reentrância, a sua medida é negativa. Penso que a figura 3 ilustra muito bem a ideia de que iniciando o percurso sobre a fronteira do pentágono côncavo a partir do ponto C, quando retornamos a este ponto temos que fazer um ângulo em sentido contrário para fazer uma volta completa.

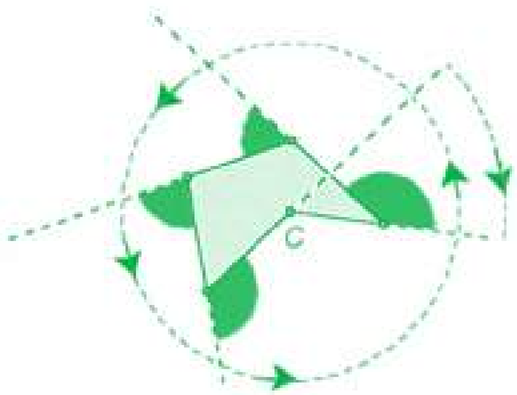


Figura 3

Segundo as palavras da professora "Claro que falar em ângulos negativos é estranho no 5.º ano....". Porém, faz todo o sentido e aumenta a consistência tanto da propriedade da soma dos ângulos externos como da propriedade da relação entre o ângulo externo e o ângulo interno adjacente e que é a de serem suplementares.

Neste último caso, é interessante verificar que o ângulo interno é côncavo, por isso superior a um ângulo raso. Precisamente por isso, ao introduzirmos uma orientação na medição do ângulo externo adjacente, subtraímos a medida deste e concluímos que a soma dos dois é um raso e por isso são suplementares.

É muito engraçado pensar que no polígono côncavo aparece um ângulo que nos apetecia mesmo considerar como externo (figura 4). Se o fizéssemos tudo o que foi dito atrás perdia coerência. Isto é, a soma dos ângulos externos não seria um ângulo de volta completa e o ângulo externo não seria suplementar do ângulo interno adjacente.

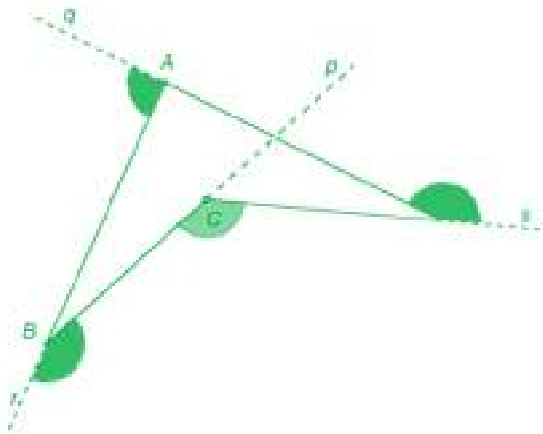


Figura 4

COMENTÁRIOS FINAIS

Não encontrei, em nenhuma das fontes credíveis que consultei, informação sobre ângulo externo de um polígono côncavo. Embora o Dicionário de Matemática Elementar de Stella Baruk seja o que se tornou mais útil para esta discussão e tenha ajudado a clarificar e sustentar o conceito de ângulo como grandeza.

As definições não são estáticas e devem ter significado. Penso que esta discussão ajuda a dar sentido à definição de ângulo externo e ajuda e dar sentido à própria definição de ângulo, que deixa de ser apenas a de uma figura obtida a partir de duas semirretas com a mesma origem, e em que ganha corpo a ideia de grandeza associada à rotação definida por essas duas semirretas. Ao acrescentar desde muito cedo a ideia de medida orientada, esta discussão vai ajudando a construir de forma consistente o conceito de ângulo, um conceito bastante complexo que progressivamente se torna mais elaborado à medida que se avança na escolaridade.

Esta discussão, pela estranheza que causa, ajuda a compreender a ambiguidade topológica do polígono côncavo. É um polígono em que a noção de interior e exterior se ampliam e que nos leva a pensar nestes dois conceitos, bem como no conceito de fronteira. Visualmente, há pontos no exterior do polígono que parecem estar no seu interior. Embora os conceitos topológicos sejam pouco trabalhados na matemática elementar não deixa de ser interessante pensar sobre eles.

O episódio apresentado por esta professora ocorreu numa aula em que os alunos estavam a usar um programa de geometria dinâmica. Na minha opinião, este episódio reforça a ideia de que estes ambientes ajudam a proporcionar situações matematicamente mais ricas e desafiadoras, tanto aos alunos como aos professores.

Do ponto de vista da estruturação espacial e geométrica, este episódio e esta discussão parece-me muito interessante. No que respeita à estruturação espacial, os ângulos externos, encarados como elementos da figura ganham destaque de forma coerente e as relações geométricas que são estabelecidas são consistentes, evidenciando assim uma ligação entre a estruturação espacial e a estruturação geométrica.

Por tudo isto registo um agradecimento especial à professora que partilhou comigo este episódio e que de forma sábia soube construir matematicamente respostas para as dúvidas do aluno e para as suas próprias dúvidas.

Referências

Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar.* Edições Afrontamento.

ÍNDICE REMISSIVO

ÍNDICE REMISSIVO REFERENTE AO NÚMERO DA REVISTA EM

Ideias chave	Número da Revista EM											
Avaliação	158											
Classificação	115	121	126	127	128	129	131	132	133	136	137	155
	166											
Disseções geométricas	151	157										
Estruturação espacial	116	117	118	129	131	132	133	135	136	143	144-145	147
	148	154	155	156	166							
Estruturação geométrica	116	117	118	121	129	131	132	133	135	143	144-145	147
	148	154	155	156	166							
Estruturação lógico formal	121	135	136	144-145	155	156						
Geometria dinâmica	122	123	124	130	138	146	147	156	157	158	159	160
	161	162	163	164	165	166						
Interdisciplinaridade Artes Visuais e Matemática	139-140	141	142	143	148	149-150	151	152	153	154		
Ligações 3D-2D	135	139-140	142	143	144-145	148	152	153	154	164	165	166
Pensamento computacional	157	162										
Raciocínio geométrico	108	109	112	113	114	119	122	123	124	129	132	133
	137	138	144-145	151								
Transformações geométricas	139-140	141	161	162	163							
Visualização	126	127	128	130	131	132	133	143	144-145	149-150	151	154
	164	165	166									