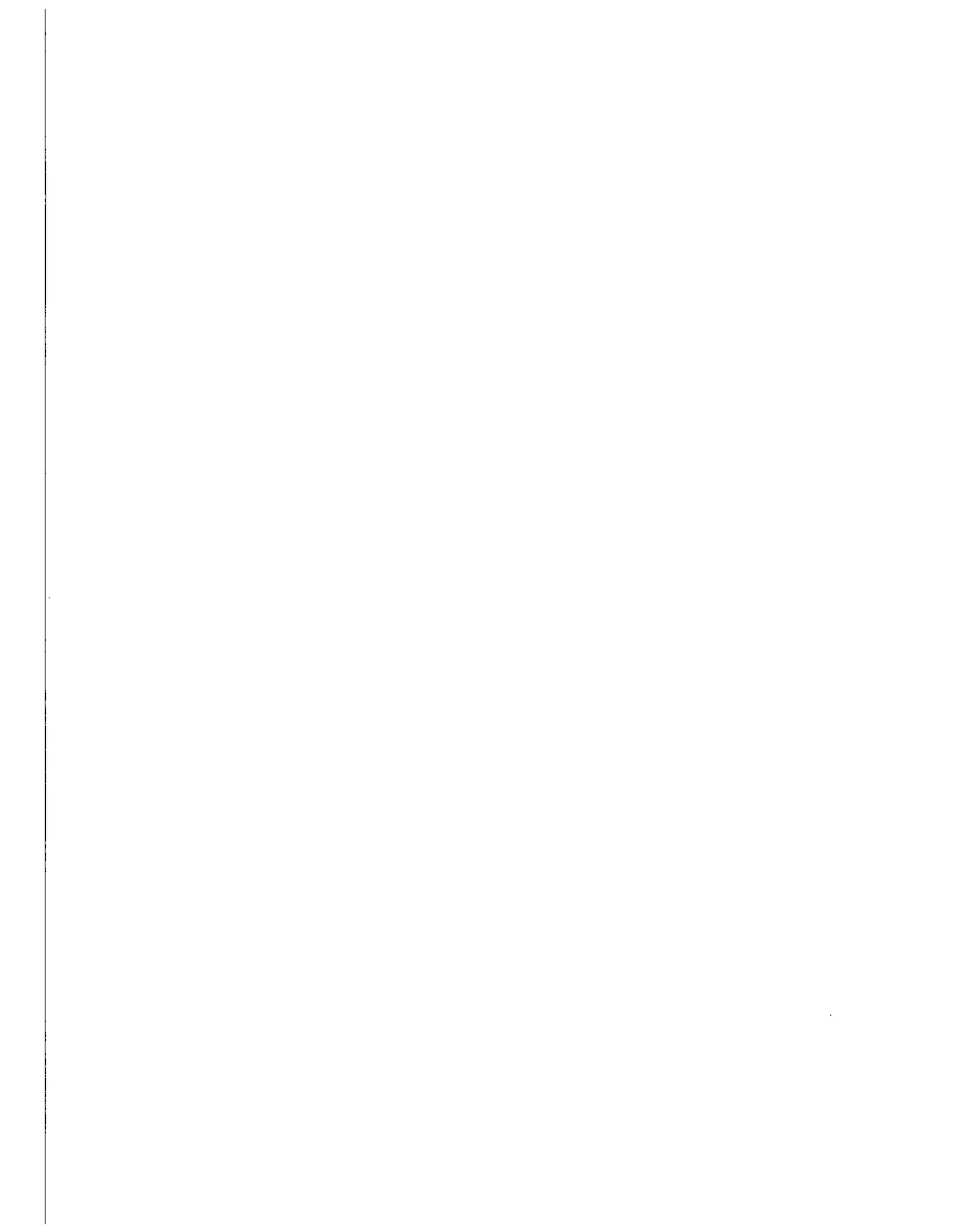


I

Passado recente e futuro do ensino da geometria

Geometria é compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.

Hans Freudenthal, "The case of geometry",
in *Mathematics as an Educational Task*



1. "O futuro da geometria"

Os colleges são instituições de ensino superior nos Estados Unidos, comparáveis de certo modo ao ensino politécnico português.

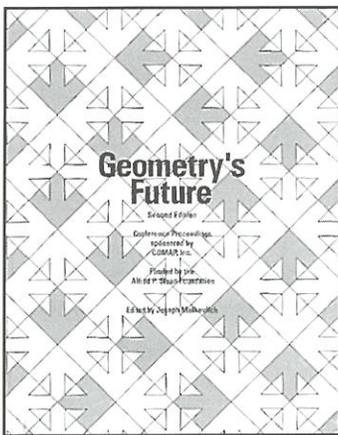


Figura 1. Actas do seminário sobre "O futuro da geometria".

Em Março de 1990 realizou-se nos Estados Unidos um seminário para analisar a situação do ensino da geometria e fazer sugestões para a sua revitalização. O objectivo principal dos participantes, um pequeno grupo de professores e investigadores universitários, era a reforma do ensino de geometria nos *colleges* americanos, e as suas preocupações estão claramente expressas nos primeiros parágrafos do prefácio das actas da reunião:

Os *Elementos* de Euclides, escritos há mais de dois mil anos, são um feito impressionante. Juntamente com as descobertas de J. Bolyai e de N. Lobachewsky, o trabalho de Euclides, os seus prolongamentos e a análise das suas limitações, têm constituído o núcleo central da geometria com que a generalidade das pessoas e dos matemáticos entram em contacto, nas escolas e nos nossos institutos e universidades.

No entanto, aquele pequeno grupo de matemáticos que se consideram a si próprios géómetras vêm o seu tema de trabalho num contexto muito mais largo, profundo e valioso. Os géómetras sabem que, para além das numerosas áreas que floresceram dentro da geometria, as ideias geométricas têm fornecido o ponto de partida para desenvolvimentos conceptuais em outros ramos da matemática, que agora estão afastados das suas raízes geométricas. Além disso, profissionais fora do campo da matemática (como físicos, cientistas da computação, biólogos, engenheiros, etc.) estão a descobrir que as ideias geométricas têm uma utilização muito ampla, não só como fundamentação teórica dos seus domínios de trabalho, mas também na realização de novas tecnologias que estão a desenvolver-se nesses domínios. Exemplos disto incluem o uso da teoria dos nós, pelos biólogos, no estudo dos enrolamentos de moléculas complexas e a utilização, por cientistas da computação e engenheiros, de muitas partes da geometria no desenvolvimento da visão computadorizada e dos sistemas robóticos. Muitos géómetras têm visto com tristeza que estes progressos empolgantes coexistem com um currículo cristalizado de geometria nas nossas escolas e institutos.¹

Embora, como dissemos, as recomendações se destinassem sobretudo aos *colleges*, os participantes esperavam que a sua concretização viesse a contrariar também o declínio e a cristalização do ensino da geometria nas escolas secundárias, através da exposição dos futuros professores de Matemática² às novas ideias. Seguem-se algumas das principais recomendações da reunião:

- Os conceitos e objectos geométricos devem ser estudados mais de um ponto de vista experimental e indutivo do que axiomático. (Os resultados decorrentes da abordagem intuitiva devem ser demonstrados.)
- Deve ser dada tanta importância aos aspectos combinatórios, topológicos, analíticos e computacionais da geometria como às ideias métricas.
- O amplo campo de aplicações da geometria deve ser mostrado aos estudantes: aplicações ao mundo dos negócios (programação linear e teoria dos grafos), à biologia (nós e sistemas dinâmicos), à robótica (geometria computacional e convexidade), etc.

- Uma ampla variedade de programas de computador devem ser utilizados (*Mathematica*, LOGO, etc.), tanto como ferramentas para investigações como para a construção de conceitos.
- Deve ser exposta a valiosa história da geometria. (Muitos dos maiores matemáticos de todos os tempos — Arquimedes, Newton, Euler, Gauss, Poincaré, Hilbert, Von Neumann, entre outros — deram contribuições significativas para a geometria).
- A utilização de diagramas e modelos concretos, como auxílio na construção conceptual da geometria, deve ser intensificada.
- Deve ser dada maior ênfase aos conceitos centrais da geometria, tais como as transformações geométricas e os seus efeitos nos conjuntos de pontos, nos conceitos referentes à distância, à superfície, etc.
- Devem ser encorajados o pensamento e o raciocínio visuais (uso de diagramas e modelos como modos de pensamento matemático e resolução de problemas).
- Devem ser trabalhados domínios nos quais seja possível fazer experiências em matemática (por exemplo, bolas de sabão, pavimentações, estudo de simetrias com espelhos, etc.).

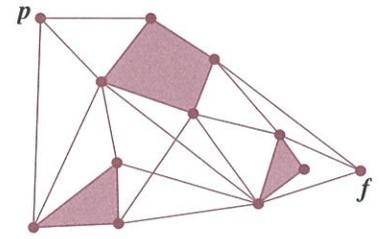


Figura 2. Um *robot* móvel desloca-se do ponto p para o ponto f no meio de obstáculos representados por polígonos. Qual o seu “gráfico de visibilidade”? Qual o caminho mais curto?³

Este conjunto de recomendações inclui grande parte do pensamento contemporâneo sobre o que deve ser um ensino renovado da geometria. Mas, para além disso, concretiza e desenvolve, nomeadamente no campo das conexões da geometria com a ciência e a tecnologia actuais, propostas de carácter geral que têm sido apresentadas noutras publicações — por exemplo nas *Normas* do NCTM e nas suas Adendas relativas à geometria⁴. Este aspecto torna-se ainda mais claro com a leitura de outros textos incluídos nas actas da reunião, e resulta certamente da presença nesta reunião de alguns dos melhores especialistas nos temas referidos.

Desta forma, resultou desta reunião um programa estratégico para a renovação do ensino da geometria, que tem por base a situação concreta das escolas e universidades dos Estados Unidos.

Nenhuma reflexão deste tipo foi feita ainda em relação ao ensino da geometria em Portugal, e ousaríamos dizer que a análise pessimista que é feita sobre a vitalidade e actualidade do ensino da geometria nas universidades americanas se confirmaria e acentuaria relativamente às portuguesas. É necessário iniciar, mesmo num nível menos ambicioso, uma tal reflexão entre nós. Tentaremos descrever com brevidade, nas próximas secções deste capítulo, o que foi o passado recente no ensino da geometria em Portugal e qual a situação concreta em que nos encontramos no momento presente.

2. A Matemática Moderna e o ensino da geometria

A situação antes da Matemática Moderna

Podemos dizer que nas vésperas do chamado movimento da Matemática Moderna (M.M.), o currículo de geometria dos liceus tinha duas componentes principais: as construções geométricas e o estudo da geometria euclidiana — no estado exacto em que Euclides a deixara —, no plano e no espaço.

Nas construções geométricas determinavam-se alguns lugares geométricos e faziam-se cálculos algébricos com segmentos. Neste cálculo com segmentos aprendia-se a calcular o produto e quociente de dois segmentos, o segmento meio proporcional entre dois segmentos, o inverso de um segmento, e a raiz quadrada de um segmento (fig. 3). Diga-se desde já que esta parte da geometria, nas mãos de alguns professores, tornava-se pretexto para actividades interessantes de resolução de problemas.

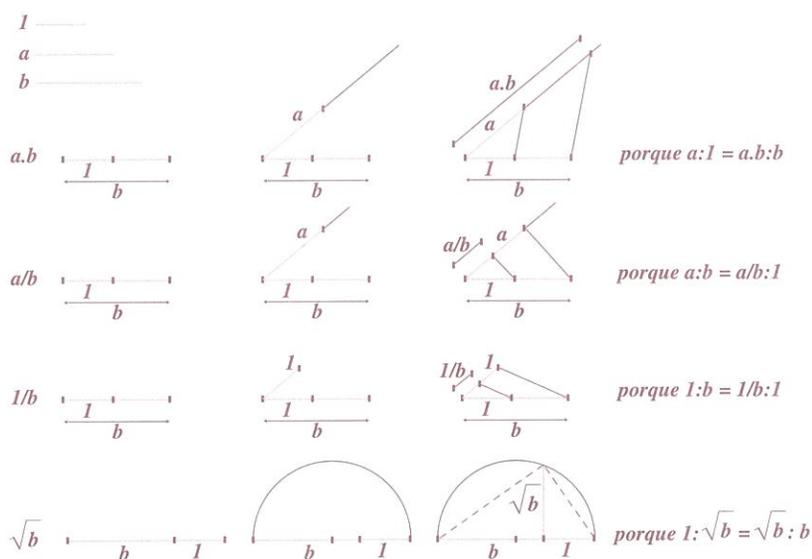


Figura 3. Operações com segmentos.

O estudo da geometria de Euclides consistia numa tentativa de levar os alunos (dos 12 aos 14 anos) a adquirir hábitos de raciocínio rigoroso e sistemático, próprios da matemática, dentro da tradição de considerar que a geometria seria o campo ideal para os alunos aprenderem a demonstrar e também a apreciar a matemática como uma construção lógica, perfeita. Assim, eram enunciados e demonstrados nos livros de texto dezenas e dezenas de axiomas, postulados, lemas, teoremas, corolários, escólios, etc. Começava-se no plano e, dois anos depois, passava-se ao espaço. Escusado será dizer que a maior parte dos alunos reagia mal a este “tratamento”, ficando a odiar a geometria para o resto da vida.

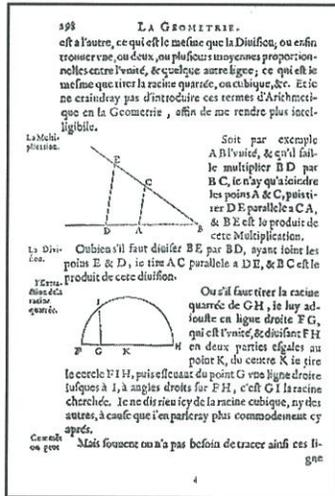


Figura 4. A segunda página da *Géométrie* de Descartes.



Figura 5. A tradução portuguesa dos *Fundamentos da Geometria*, de David Hilbert.

Este programa de geometria poderia ter sido ensinado no séc. XVIII. De resto, as construções geométricas — a parte mais interessante do programa — correspondiam às primeiras páginas do *livre premier* da *Géométrie* de Descartes: *Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites*⁵. Quanto ao estudo da geometria de Euclides, perpetuava todas as insuficiências dos *Elementos*, ignorando completamente as críticas do fim do séc. XIX e do início do séc. XX.

Em 1942 foram traduzidos para português, por Maria do Pilar Ribeiro e José da Silva Paulo, os *Fundamentos da Geometria* de David Hilbert, publicados pela primeira vez em alemão 15 anos atrás. Nesse livro Hilbert assentava a geometria euclidiana em bases sólidas, completando muitas lacunas que a análise crítica do século XIX tinha detectado na obra de Euclides. Nomeadamente, era claramente explicada a necessidade de escolher alguns termos da geometria, no caso “ponto”, “recta” e “plano”, como primitivos, ou seja, de os aceitar sem definição. Apesar disso, manuais de geometria portugueses insistiam ainda em definir “à maneira de Euclides”, nos anos cinquenta, esses mesmos termos. Por outro lado, na profusão de axiomas e teoremas apresentados, muitas demonstrações apresentavam características daquilo a que então se chamava “pescadinhas de rabo na boca”, pois os axiomas e teoremas de uma página transformavam-se, respectivamente, em teoremas e axiomas noutra página mais à frente. Era desta forma que se queria ensinar os alunos a raciocinar rigorosamente!

Outro tema ignorado da geometria escolar, antes da M.M., eram as geometrias não-euclidianas. Este tema poderia e deveria ser abordado nos últimos anos da escola secundária, mas é preciso notar que nestes anos a geometria sintética desaparecia dos programas, e apenas ficava a geometria analítica. O ensino da Matemática afunilava-se, podendo dizer-se que os objectivos de preparação para os estudos superiores decidiam da inclusão ou não dos temas nos anos terminais do ensino secundário. E como o objectivo era a preparação para o cálculo infinitesimal, a única geometria importante era a geometria analítica.

Esta era em traços muito gerais a situação em Portugal do ensino da geometria, antes do movimento da M.M..

No estrangeiro, vinha decorrendo desde os anos 20 um grande debate sobre o programa de geometria para o nível secundário. O isolamento científico em que Portugal vivia, devido à situação política, não facilitava a participação dos matemáticos portugueses nessas discussões. No entanto, o movimento matemático que se desenvolveu, durante os anos 37-47, em torno de Aniceto Monteiro, Ruy Luis Gomes e Bento de Jesus Caraça, e a criação da *Gazeta de Matemática*, permitiram que as questões do ensino da Matemática fossem discutidas entre nós.⁶ Nomeadamente, em 1947, Sebastião e Silva, então bolseiro em Itália, traduziu



Figura 6. Capa do número 33 da *Gazeta de Matemática*.

para a *Gazeta* (nº 33, Agosto de 47), um artigo de Emma Castelnuovo intitulado “Um método activo no ensino da geometria intuitiva.” Neste texto a autora verbera o facto do ensino de geometria ser feito “às avessas”, com as definições precedendo a prática, resultando daqui que “o aluno deve primeiro fazer o esforço de conceber as ideias abstractas, e, depois de *não* as compreender, fazer as respectivas aplicações.” Emma Castelnuovo propõe um novo tipo de abordagem, em que substitui “um método descritivo por um método construtivo” com passagem do concreto ao abstracto, do complexo ao simples, e portanto ordenação do curso segundo o desenvolvimento histórico.” Uns anos depois, em 1953, de novo Emma Castelnuovo publica na *Gazeta* um artigo sobre “I Films di geometria di Jean Louis Nicolet.”⁷ A propósito dos filmes de Nicolet, defende que se tenha a coragem de ir contra a beleza estática do tratado de Euclides, introduzindo na escola o movimento, que resulta do princípio da continuidade de Poncelet. Na descrição que faz das potencialidades educativas daqueles filmes, Emma Castelnuovo parece descrever, com uma antecipação de quatro dezenas de anos, as características do moderno *software* para geometria dinâmica (*Cabri e Sketchpad*).

Este foi o escasso reflexo em Portugal do debate sobre o ensino da geometria que existia a nível internacional e que está descrito num relatório da Unesco de 1973.⁸ A principal questão em discussão dizia respeito à substituição da apresentação clássica da geometria através da axiomática de Euclides (revista por Hilbert): devia ser dada prioridade à estrutura afim ou à estrutura métrica? Os defensores da primeira opção salientavam, entre outras vantagens, que a geometria afim, do ponto de vista axiomático, era mais simples e conduzia mais rapidamente à estrutura de espaço vectorial (era a tendência estruturalista, promotora da integração rápida na organização que propunham para a matemática). Os que privilegiavam a via métrica estavam sobretudo preocupados pelo facto da geometria afim ser uma estrutura relativamente pobre, que limitava o desenvolvimento da imaginação e da intuição nos alunos e eliminava o estudo de problemas envolvendo medidas, “interessantes e enriquecedores para o pensamento dos alunos entre os 12 e os 15 anos”. Como veremos no ponto seguinte, os promotores da via afim e vectorial para a geometria acabaram por sair momentaneamente vitoriosos no seio da M.M.. Mas a via métrica continua a ter defensores ainda hoje.⁹

A intervenção da Matemática Moderna

A crítica que os promotores da M.M. fizeram da situação do ensino da geometria foi violenta, mas deve considerar-se justa, em grande parte. No Seminário de Royaumont, em 1959, Dieudonné verbera “a maneira como hoje se ensina o princípio da geometria, com séries de ‘definições’ que não definem nada e de pseudo ‘demonstrações’ que não podem resistir à análise lógica”.¹⁰ E acrescenta:

Julga-se desonroso não poder apresentar aos alunos uma teoria completamente dedutiva a partir dos axiomas fundamentais; como isto é muito difícil para o

nível elementar, pensa-se ser preferível passar a uma *escroquerie* intelectual em vez de reconhecer francamente a situação.

[...] pela minha parte, não vejo o que haja de mal ou desonroso partir de uma premissa que pode ser uma proposição complicada, desde que seja possível demonstrar sem erros lógicos que a proposição em questão implica uma outra; não apenas isso seria muito mais instrutivo, como mostraria à luz do dia a natureza da dedução lógica e o seu carácter relativo, muitas vezes encoberto devido à maneira como se fazem confusões com a noção metafísica de verdade.

Na mesma intervenção, Dieudonné chega a defender o apelo à intuição nos primeiros tempos do ensino da geometria:

[...] não se pode desenvolver com proveito uma teoria sob forma axiomática enquanto o aluno não está familiarizado com as questões a que ela se aplica, trabalhando algum tempo numa base experimental, ou semi-experimental, fazendo constantemente apelo à intuição.

[...]

Quanto à geometria, sei que recentemente se fizeram muitas investigações e experiências nos meios pedagógicos (em particular na Bélgica) sobre os métodos permitindo ensinar a geometria, por assim dizer, como um capítulo da física. Penso que estas iniciativas se devem encorajar bastante, desde que se privilegiem, não os brinquedos artificiais como os triângulos, mas as noções fundamentais, como as simetrias, translações, produtos de transformações, etc.



Figura 7. O fascículo de resultados de um dos livros de Bourbaki, *Topologie Générale*, publicado em 1953.

No entanto, Dieudonné afirma franca e expressamente que a sua preocupação é exclusivamente a preparação dos alunos para os estudos universitários. E nesse prisma acabaria por propor um modelo de axiomática, baseada na noção de espaço vectorial, para o estudo da geometria. Esta atitude e esta proposta são características do posicionamento da M.M., decorrentes do facto dos seus promotores provirem na sua totalidade do meio universitário e da concepção estruturalista da natureza da matemática, devido à influência do grupo Bourbaki, dominante naquela época.

As consequências das ideias da M.M. no ensino da geometria variaram de país para país, conforme foram levadas mais ou menos à letra. Em Portugal, enquanto a M.M. se limitou às turmas experimentais do último ciclo do ensino liceal, nada de grave se passou. De resto, Sebastião e Silva defendia frequentemente a importância da visualização e do desenvolvimento da intuição geométrica nos alunos. No entanto, com o decorrer do tempo, quando a reforma da M.M. foi generalizada para o ciclo preparatório e para o curso geral unificado, e sobretudo com a morte prematura de Sebastião e Silva, a situação do ensino da Matemática em geral entrou numa fase de degradação profunda.

No caso da geometria, a situação ainda se tornou mais grave devido a uma conjugação de factores:

- a ausência de lugar para a geometria no edifício bourbakista da matemática, a não ser como subproduto ou “parente pobre” da álgebra

linear; o próprio relevo que muito justamente a M.M. queria atribuir às transformações geométricas perdeu-se com a abordagem formal, como aplicações, que foi adoptada, fazendo tábua rasa do seu eminente carácter intuitivo;

- as actividades interessantes de geometria — como as construções geométricas — foram a certa altura transferidas para a Educação Visual, onde são encaradas naturalmente sem qualquer perspectiva matemática, pelos respectivos professores, e sem que em geral exista qualquer trabalho interdisciplinar com a Matemática;
- o estatuto menor da visualização na actividade matemática dos alunos e no eixo central da aprendizagem da Matemática — aritmética → álgebra → análise;
- a memória de uma experiência negativa que muitos professores guardavam do ensino axiomático da geometria, tornando desejável um papel reduzido da geometria no currículo de Matemática.

Assim, lentamente, a geometria foi na prática desaparecendo do currículo implementado pelos professores. Esse desaparecimento não se tornava notado, pois nos estudos subsequentes, e em particular no secundário, ou mesmo no superior, “a geometria não fazia falta para nada”. Em consequência, gerações de alunos — muitos deles actuais professores de Matemática — atravessaram o ensino de Matemática tendo como únicos contactos com a geometria elementar o teorema de Pitágoras e algumas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Para os alunos que prosseguiam estudos universitários, a ausência de uma base experimental de visualização e de trabalho com modelos tridimensionais tornava em geral seco e estéril o estudo formal da álgebra linear em \mathbf{R}^n , da geometria diferencial ou da topologia.

Este processo de redução do papel da geometria no ensino da Matemática, em Portugal, decorreu fundamentalmente ao longo dos anos 70 e 80. Entretanto, noutras paragens, algumas experiências e reflexões sobre o ensino da geometria iam preparando o seu regresso. Delas nos ocuparemos na próxima secção.

3. O regresso da geometria

A influência de Freudenthal

Hans Freudenthal (1905-1990) foi, sem dúvida, a personalidade que maior influência desempenhou no regresso da geometria, como tema fundamental, à matemática escolar. Tendo dedicado os primeiros anos da sua vida activa, como matemático, a investigações em topologia, nomeadamente na sua tese de doutoramento e como assistente de Brower¹¹, as suas preocupações quanto ao estado da educação matemática vão sempre crescendo e a partir de 1948 resultam numa intensa actividade, tanto no que diz respeito a publicações como à intervenção em organizações internacionais. Freudenthal era um verdadeiro “homo universalis”, como foi chamado pelo presidente da Universidade de Utrecht nas cerimónias

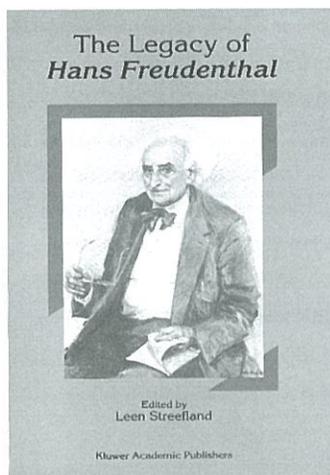


Figura 8. Capa do livro *The Legacy of Hans Freudenthal*, editado por Leen Streefland, do Instituto Freudenthal.

de abertura do Instituto Freudenthal, um ano depois da sua morte. Josette Ada resume exemplarmente a sua personalidade no parágrafo seguinte:

A sua cultura não tinha fronteiras e lutou sempre (em várias línguas) contra o obscurantismo. Os seus pensamentos e trabalhos distribuíram-se por muitas direcções complementares: matemática, história da matemática, educação matemática, filosofia... Trabalhou para abrir a educação matemática para todos e nunca diminuiu a exigência intelectual de um grande pensador científico. Mas foi também um homem de acção e teve uma grande influência no desenvolvimento da educação matemática, não apenas na Holanda mas em todo o mundo.¹²

O texto mais completo de Freudenthal sobre o ensino da geometria constitui um dos capítulos do seu livro *Mathematics as an Educational Task*, publicado em 1973. O título do capítulo é *The case of geometry* (“o caso da geometria”) e as questões principais são expostas logo nos primeiros parágrafos, que não podemos deixar de transcrever:

Durante muito tempo matemática foi sinónimo de geometria. De facto, sempre existiram também outros ramos — álgebra, trigonometria, cálculo — que contudo quase não passavam de colecções de regras não fundamentadas, escolhidas ao acaso, enquanto a geometria era um sistema conceptual perfeito, onde as afirmações resultavam rigorosamente umas das outras e finalmente tudo das definições e axiomas. Embora outras técnicas fossem mais eficientes, a geometria era a verdade genuína. Mas a alta estima que era atribuída à geometria foi desaparecendo. Os sistemas axiomáticos de Pasch e Hilbert revelaram muitas falhas na geometria clássica. Por outro lado as axiomáticas do tipo das de Pasch-Hilbert eram tão complicadas que o que se podia fazer era lê-las ou fazer investigação sobre os fundamentos a propósito delas, mas não era possível fazer geometria no seu interior ou, em qualquer caso, ensinar geometria com elas.

Noutros tempos, a geometria não era apenas uma poderosa peça de ciência dedutiva; era o mais antigo e divulgado exemplo de didáctica. A primeira lição que ficou registada foi a lição experimental que Sócrates deu ao escravo de Meno diante deste, embora o relato de Platão possa ser ficção. Não se tratou de acaso o facto do conteúdo da lição de Sócrates ter sido geometria. Ainda hoje a geometria seria um excelente tema para o método socrático e para a reinvenção; a este respeito apenas é igualada pelas probabilidades.

A estrutura dedutiva da geometria tradicional não foi apenas um sucesso didáctico. Existem actualmente pessoas que acreditam ter a geometria falhado por não ter sido suficientemente dedutiva. Na minha opinião, a causa foi antes o facto da dedução não ser ensinada como reinvenção, como fez Sócrates, mas sim imposta ao aluno. De qualquer modo, algumas pessoas defendem e promovem actualmente a abolição da geometria. Entre aqueles que deveriam abrir à juventude as portas da sua herança cultural, existem alguns que alegremente deitariam a geometria no incinerador cultural. Os dias da geometria tradicional estão contados, se porventura ainda existe em algum lugar. O que se lhe seguirá? Esta questão urgente justifica o título deste capítulo. O “caso da geometria” — foi condenada à morte, mas terá tido um

juízo imparcial? Foi condenada justamente ou devido a provas falsas? Teve o réu advogado de defesa? Não deverá ser reaberto o processo?

Se existem hoje motivos para preocupação acerca do futuro do ensino da geometria e mesmo para recear que a geometria possa desaparecer do currículo, os primeiros culpados são aqueles que, activa ou passivamente, resistiram à inovação no ensino da Matemática. As vozes daqueles que defendiam a renovação não foram ouvidas. O grupo mais perigoso era constituído por aqueles que acreditavam que podiam salvar a velha geometria reforçando a sua estrutura dedutiva; tarefa votada ao fracasso, sem dúvida. Geometria não é apenas dedução.

Ao longo do capítulo, Freudenthal apresenta, através de descrições de cursos concretos, de múltiplos exemplos e de comentários, algumas das principais orientações que propõe para a renovação no ensino da geometria. Como era habitual em tudo o que Freudenthal escrevia, não se trata de um texto com uma estrutura rígida, mas antes de uma teia muito rica de comentários e observações que, de modo sobretudo implícito, levam cada leitor a construir a pouco e pouco uma visão clara e profunda sobre o ensino renovado da geometria. Assim, não se conseguem retirar receitas das posições de Freudenthal, mas cada um é estimulado a procurar por si caminhos para concretizar aquela visão. Numa palavra, nada pode substituir a leitura deste magnífico texto. O que se apresenta nos pontos seguintes é apenas uma espécie de guia de leitura, sublinhando e comentando alguns tópicos do texto.

Recomendamos sobretudo a leitura da primeira parte (pág. 401 a 409) e também das páginas 446 a 462.

a) *O que é a geometria?*

Geometria é “compreender o espaço”. Compreender o espaço “em que a criança vive, respira, se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.”

Freudenthal coloca uma longa série de questões que se levantam nessa investigação do espaço. Eis as primeiras quatro:

- Porque razão uma folha de papel se dobra ao longo de uma recta?
- Porque razão uma folha de papel enrolada se torna rígida?
- Porque razão um nó feito com uma tira de papel resulta num pentágono regular (fig. 10)?
- Qual é a origem das sombras?

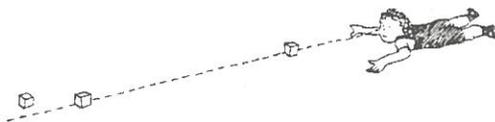


Figura 9. O que é uma linha recta?¹³

b) *Objectivos do ensino da geometria*

Freudenthal salienta como o critério pragmático, da utilidade, relevante em outras áreas da matemática, falha inteiramente na geometria, onde esse critério reduziria o programa de geometria a um pequeno grupo de teoremas como o de Pitágoras, e algumas fórmulas para o cálculo de perímetros, áreas e volumes.

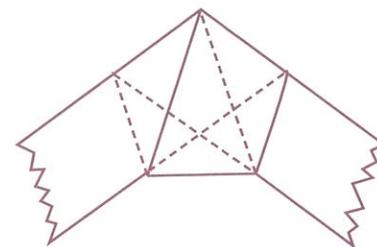


Figura 10

A geometria presta-se, mais do que outros temas, para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também “com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes”.

A geometria tem ainda capacidade também para fazer as crianças sentir, a partir da necessidade lógica das suas conclusões, “a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito.”

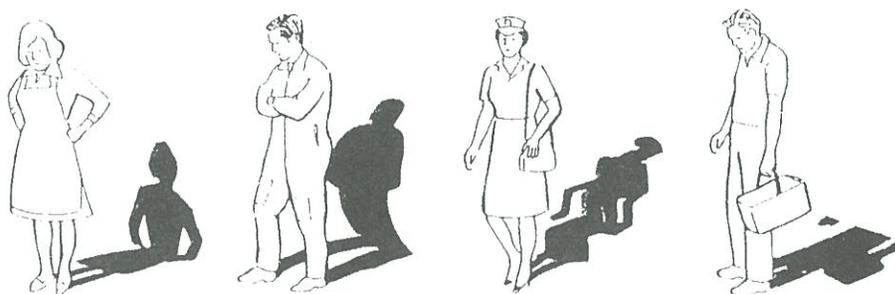


Figura 11. Porque aparecem estas sombras?¹³

c) *Partir do espaço, manipular, construir*

Uma boa parte do texto de Freudenthal é dedicada à apresentação e comentário de cursos de geometria e trabalhos de Dina van Hiele e de P. J. van Albada.

Grande parte destes cursos consistiam em trabalho experimental dos alunos, no sentido da matemática e não da física. Isto é, procediam como os matemáticos nas suas investigações, formulando conjecturas e tentando justificá-las. Outra característica destes cursos é o facto dos alunos utilizarem materiais concretos muito diversos e o espaço ser o ponto de partida. No curso de Dina, depois do estudo do cubo, do tetraedro e do octaedro, incluindo as suas planificações e construções, começa a ser tratado o tema da simetria (no sentido geral de transformação que deixa invariante uma dada figura, não apenas no sentido de simetria bilateral). E passa-se às pavimentações, um tema que durante

meses vai ocupar os alunos. Mais tarde, num movimento próprio de quem pretende seguir o trajecto espaço → plano → espaço, volta-se a abordar o cubo, a sua dissecção em pirâmides quadrangulares, relações entre volumes, etc.. O cubo volta a ser reconstruído a partir das seis pirâmides.

O curso de van Albada não é menos original: espaço e plano sempre interligados, utilização da geometria descritiva, construção de sombras e projecções, construção de modelos, geodésicas em cones e cilindros.

Tudo isto era revolucionário na época em que foi realizado. Ao descrever estas experiências, Freudenthal quer salientar, entre outros pontos importantes, os dois seguintes:

- a necessidade de dar *tempo e oportunidade ao aluno para organizar as suas experiências espaciais*; isto significa que não deve ser apresentada ao aluno uma organização preconcebida pelo professor ou pelo autor do manual, já toda completa, com todos os conceitos, definições e deduções;
- a conveniência de proceder a *pequenas organizações locais da geometria*; isto significa que em vez de se pretender apresentar ao aluno uma (pseudo) organização global da geometria, um sistema axiomático completo, o que deve ser proporcionado aos alunos são experiências de organização local, em que um pequeno número de resultados conjecturados por eles sejam, por meio de curtas deduções, interligados logicamente.

Abordaremos com maior detalhe este ponto da organização local da geometria no capítulo VII, Formalização

A influência de Freudenthal na comunidade da educação matemática não deixou de crescer depois da publicação do livro a que nos estamos a referir. A tradução para inglês das obras dos seus discípulos van Hiele foi decisiva na expansão das suas ideias na América do Norte, embora por vezes reduzidas a uma visão pouco flexível do modelo dos “níveis de compreensão em geometria” dos van Hiele, e com uma divulgação limitada da abordagem didáctica de Dina van Hiele, o aspecto mais interessante dos seus trabalhos.

O modelo van Hiele consiste na identificação de cinco níveis de compreensão na aprendizagem da geometria: “visualização”, “análise”, “dedução informal”, “dedução formal” e “rigor”. Os alunos, de acordo com a sua maturidade geométrica, estão num destes níveis de compreensão, e com o apoio de um ensino apropriado à sua situação, podem passar sequencialmente para os outros níveis superiores. Pode também acontecer, de acordo com os autores deste modelo, que um ensino apropriado a um nível superior ao do aluno possa impedir o aluno de progredir na sua compreensão da geometria.¹⁴

Se por um lado o modelo dos níveis dos van Hiele veio lançar luz sobre as diferenças reais existentes entre os alunos relativamente à geometria e auxiliar os professores a lidar com elas, por outro pode dar lugar a interpretações estreitas e prejudiciais.

A própria interpretação de Freudenthal acerca dos níveis sempre foi diferente da dos van Hiele, como afirma na sua última obra:

Soube sempre que os meus níveis diferiam dos dos van Hiele e salientei isto em muitas ocasiões; os meus níveis são relativos e não absolutos. Mas tenho que admitir que nunca senti essa diferença tão claramente como agora.¹⁵

Nível 0 (nível básico): Visualização

Neste nível inicial, os alunos estão conscientes do espaço apenas como alguma coisa que existe em torno deles. Os conceitos geométricos são vistos como entidades totais e não como tendo atributos ou características.[...]

Nível 1: Análise

Começa uma análise dos conceitos geométricos. Por exemplo, através de observação e experimentação os alunos começam a discernir as características das figuras. [...]

Nível 2: Dedução Informal

Os alunos são capazes de estabelecer relações entre propriedades relativas a uma figura (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos então os ângulos opostos são iguais) ou entre figuras (um quadrado é um rectângulo porque tem todas as propriedades de um rectângulo). [...]

Nível 3: Dedução Formal

Neste nível, o significado da dedução, como modo de estabelecer a teoria da geometria no interior de um sistema axiomático, é compreendido. A relação entre os termos indefinidos, os axiomas, postulados, definições, teoremas e a demonstração, bem como o papel de cada um, são compreendidos.

Nível 4: Rigor

O aluno é capaz de trabalhar em diversos sistemas axiomáticos e assim as geometrias não-euclidianas podem ser estudadas, e sistemas diferentes podem ser comparados. A geometria é vista como uma abstracção.

Figura 12. Os níveis de van Hiele

As Normas do NCTM

A publicação em 1989 das *Normas para o Currículo* do NCTM constituiu um marco essencial no movimento de recuperação da geometria como tema relevante da matemática escolar. A sua importância consiste em ter concentrado, num documento revelando grande maturidade, todo um movimento de rejeição da situação em que se encontrava o ensino da matemática depois dos anos da M.M.. Sendo assim, naturalmente, este documento reflecte o crescendo de interesse e de experiências de ensino da geometria que caracterizou a parte final dos anos 80, e propõe nas normas dedicadas à geometria uma visão renovada do ensino deste tema. Para além das alterações metodológicas que caracterizam a visão do ensino da Matemática veiculada pelas *Normas*, são feitas propostas, no caso específico da geometria, de alteração dos programas tradicionais no sentido de dar maior relevo aos pontos seguintes:

- compreensão dos objectos geométricos e suas relações, e utilização da geometria na resolução de problemas;
- integração da geometria em todos os temas e em todos os anos de escolaridade;

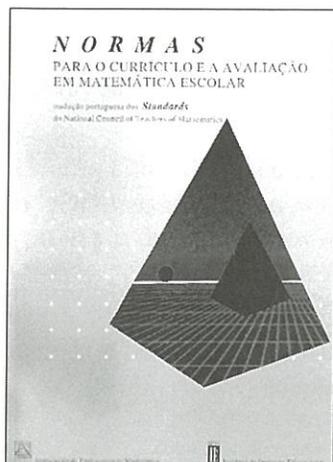


Figura 13. As Normas do NCTM

Os autores das Adendas são:

Geometry and Spatial Sense — John del Grande e Lorna Morrow

Geometry in the Middle Grades — Dotothy Geddes et al

Geometry from Multiple Perspectives — Arthur Coxford et al

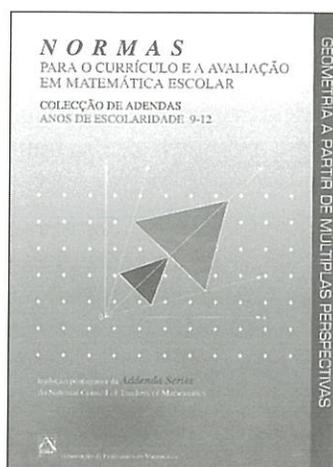


Figura 15. Uma adenda traduzida em português: *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*

- abordagem da geometria por intermédio das coordenadas e das transformações geométricas;
- desenvolvimento de curtas sequências de teoremas (*retomando portanto as ideias de Freudenthal sobre a organização local da matemática*);
- argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos;
- explorações em computador de figuras bi e tridimensionais;
- geometria no espaço;
- aplicações ao mundo real e modelação.

Ao mesmo tempo o NCTM recomenda que se dê menos atenção a certos tópicos (por exemplo, geometria de Euclides como sistema axiomático completo), que a geometria analítica não seja tratada como tema isolado e que sejam evitadas as demonstrações “a duas colunas”.

Estas recomendações significavam uma mudança profunda, sobretudo nos Estados Unidos, em que a geometria era dada durante um ano inteiro (correspondente ao 10^o português), de acordo precisamente com aquilo que o NCTM propunha que fosse progressivamente extinto.

Nas Adendas às Normas sobre geometria que foram publicadas nos anos seguintes — *Geometry and Spatial Sense* (níveis de escolaridade K-6), *Geometry in the Middle Grades* (5-8) e *Geometry from Multiple Perspectives* (9-12) — esta tendência foi concretizada e intensificada.

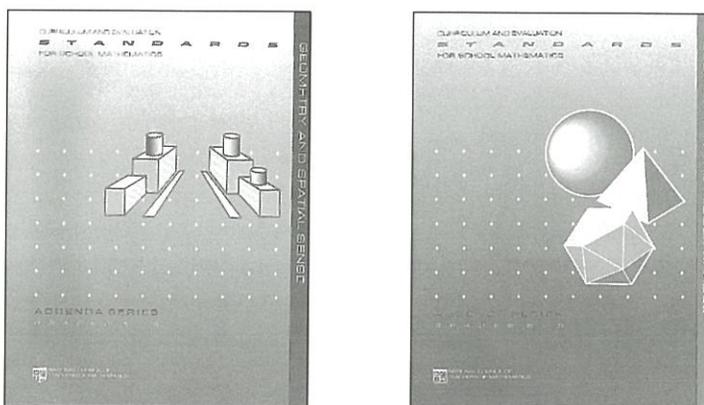


Figura 14. Duas adendas dos Standards

O *Yearbook* do NCTM de 1987, intitulado *Learning and Teaching Geometry, K-12*, organizado por M. M. Lindquist, tinha sido um passo na mesma direcção, embora de efeitos e repercussão mais limitados, segundo parece. Nas revistas do NCTM têm sido publicados nos últimos anos numerosos artigos sobre geometria e o ensino da geometria, desenvolvendo as recomendações das Normas e das Adendas.

Fora do âmbito do NCTM e não apenas nos Estados Unidos, o movi-

mento de regresso da geometria tem vindo a acentuar-se, através da publicação de livros, novos materiais e *software* para o ensino da geometria, de inúmeras reuniões de diversos tipos e do lançamento de projectos. Entre estas iniciativas, salientamos:

- quanto a *software* — envolvendo quase sempre uma filosofia própria para a abordagem do ensino da geometria —, os programas LOGO de Seymour Papert (a partir de 1980), *The Geometric Supposer*, *CABRI-géomètre*, e *The Geometer's Sketchpad*;¹⁶
- no que diz respeito a reuniões, para além daquelas destinadas a discutir a utilização de determinado *software*, como por exemplo os grandes *meetings* sobre o LOGO realizados nos Estados Unidos em 84 e 86, podemos referir:
 - o encontro sobre poliedros *Shaping Space: a polyhedral approach*, realizado em Abril de 1984 no *Smith College*, nos Estados Unidos, com a participação de numerosos géometras, professores e alunos da América do Norte;¹⁷
 - os *topic* e *working groups* de geometria nos últimos ICME's (1988-Budapeste, 1992 - Quebec, 1996 -Sevilha);
 - os *workshops* e conferência final (Verão de 1997) do projecto de geometria de *S. Olaf* (ver mais abaixo);
 - o seminário *Geometry's Future*, organizado pelo COMAP (*Consortium for Mathematics and its Applications*) em Março de 1990, a que fizemos referência no início deste capítulo;
- quanto a projectos, podemos nomear os seguintes:
 - o *University of Chicago School Mathematics Project*, orientado por Zalman Uziskin, e que publicou manuais inovadores, entre os quais *Geometry*;
 - *The Connected Geometry*: um projecto de desenvolvimento curricular que inclui a produção de materiais interligando a geometria com outros temas da matemática escolar;¹⁸
 - O projecto *Vertically-Integrated, Inquiry-Based Geometry, a project to transform 6-12 mathematics*, com a duração de três anos e destinado aos professores do ensino secundário visando a transformação do currículo de matemática — em particular da geometria —, e tendo por centro o *St. Olaf College*;
 - o *Visual Geometry Project*, um projecto dirigido por Eugene Klotz do *Swarthmore College* e por Doris Schattschneider, do *Moravian College*, que produziu excelentes materiais para o ensino da geometria, como *The Platonic Solids* e *The Stella Octangula*, e ao qual se deve também a concepção do programa *The Geometer's Sketchpad*;
 - um projecto dirigido por Jean Marie Laborde do *Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées IMAG* de Grenoble, que produziu várias versões do programa *Cabri Géomètre*;

- o grupo de trabalho *Learning/Teaching of Geometry*, orientado por Richard Leher, do *National Center for Research in Mathematical Sciences of Education*.

Não podemos deixar também de salientar a importância que estão a ter, na difusão das novas ideias sobre o ensino da geometria, os numerosos *sites* da Internet dedicados à geometria e ao seu ensino, entre os quais destacamos o pioneiro *The Geometry Forum* (transformado em 1995 em *The Math Forum*, mas ainda com uma larga preponderância de materiais e grupos de discussão sobre geometria) e o *Geometry Center* da Universidade de Minnesota, famoso pelos seus materiais interactivos, produção de *software*, cursos e seminários.¹⁹

A edição de livros sobre geometria ou sobre os aspectos visuais da matemática, e das relações da matemática, nomeadamente da geometria, com a arte, tem-se expandido ultimamente. A revista *Leonardo*, da Pergamon Press, publicou em 1992 um número especial sobre o tema *Visual Mathematics*, tendo convidado Michele Emmer, especialista nas relações entre matemática e arte, para o organizar. O mesmo Michele Emmer²⁰ organizou um outro livro, editado pela MIT Press, com o título *The Visual Mind: Art and Mathematics*.

Assim, o movimento de regresso da geometria é um facto inequívoco no panorama mundial da matemática e do seu ensino, pesem embora as grandes diferenças existentes entre os vários países, frequentemente com tradições escolares muito dispare. Caracteriza-se neste momento por uma grande vitalidade no que diz respeito a iniciativas e propostas, as quais vão surgindo naturalmente, de forma não sistemática, e com níveis de qualidade e maturidade muito diversificados. Neste contexto, como podemos situar o ensino da geometria em Portugal? Que rumo deverá, ou poderá, tomar? É o que tentaremos ver no próximo ponto.

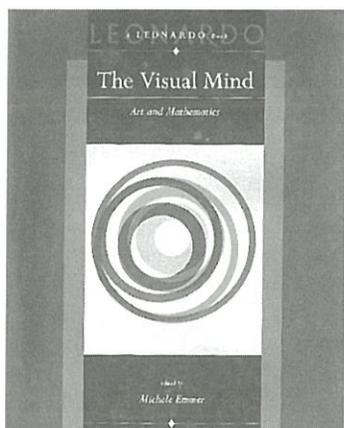


Figura 16. *The Visual Mind: Art and Mathematics*.

Geometria antes da última reforma

4. O caso português

Até à última reforma dos programas, no início dos anos 90, a evolução das ideias relativas ao ensino da geometria que descrevemos acima teve consequências diminutas na situação portuguesa. Durante os anos 70 e 80 os programas de Matemática sofrem várias remodelações e ajustamentos, mas não só a geometria não é muito beneficiada com estas alterações, como estas são sempre de pouca duração e sem um plano claro de conjunto.

Os aspectos intuitivos da geometria e a predominância da geometria no espaço chegam a ser propostos²¹, ao mesmo tempo que se começa a compreender os inconvenientes de assimilar a geometria a um capítulo da álgebra linear. Mas estas tentativas são pouco persistentes e não chegam sequer a ter consequências concretas nas alterações dos programas e muito menos na sala de aula. Além disso, não correspondem a uma base de pensamento metodológico sobre o ensino da geometria, que parece estar ausente das preocupações dos reformadores da época.

Deve referir-se, no entanto, que tentativas de contactos com pontos de vista inovadores, do ponto de vista da metodologia do ensino da Matemática, continuam a ser feitos. Por exemplo, em 1983 vem a Portugal, para um seminário de dois dias no Instituto Superior Técnico, Emma Castelnuovo, acompanhada por Daniela Gorigiorgi.



Figura 17. Actas do seminário *Une Mathématique Dynamique/Rérelations avec la Réalité*



Figura 18. Capa do livro *O Geoplano na sala de Aula*, de Lurdes Serrazina e José Manuel Matos.

Quando se começa a intensificar e a organizar o movimento para a reforma do ensino da Matemática em Portugal, simbolizado pelo aparecimento do boletim *Inflexão*, não são as questões metodológicas específicas dos vários temas da matemática escolar, por exemplo da geometria, que são abordados prioritariamente. As principais linhas de força são questões transversais ao currículo — resolução de problemas, utilização dos computadores e calculadoras no ensino e gestão da sala de aula.

Será através dos computadores e da sua utilização no ensino que a geometria iniciará o seu regresso em Portugal. De início, nos tempos do BASIC, ainda a aritmética e a álgebra dominavam, como o provam os programas pioneiros TRINCA-ESPINHAS e ESTIMATEMP²². Mas o aparecimento do programa LOGO, de Seymour Papert, com a possibilidade dada aos utilizadores de darem instruções à tartaruga para desenhar figuras geométricas, desencadeou um movimento crescente de interesse pelas questões e problemas da geometria plana. Esse movimento de interesse ampliou-se com o aparecimento do Projecto Minerva e com a realização das Semanas do LOGO. Depois da fundação, em 1986, da Associação de Professores de Matemática, um novo impulso é dado pela publicação de artigos (e mesmo de um número especial²³) na sua revista *Educação e Matemática* e pelas numerosas sessões práticas sobre geometria nos encontros anuais.

Um marco importante foi a publicação pela APM, em 1988, de *O geoplano na sala de aula*, da autoria de dois professores recém chegados de Boston com o mestrado em Educação Matemática.²⁴ Além de promover a utilização do geoplano, conhecido por poucos professores portugueses, o livro veiculava uma metodologia inovadora de ensino da geometria (de facto, de toda a Matemática), através de numerosas propostas de actividades de investigação e de problemas, e dos seus comentários sobre a utilização dessas actividades. Os materiais manipuláveis iniciavam o seu regresso à sala de aula, movimento que não deixaria de se intensificar até à actualidade.²⁵

Assim, quando no fim dos anos 80 foi lançado o processo da reforma dos programas de Matemática, existiam algumas condições favoráveis para que a geometria recuperasse o lugar que lhe competia no currículo:

- uma reflexão, bem documentada, sobre a importância e papel da geometria num currículo renovado de Matemática — em particular, uma edição dos *Standards* do NCTM, na forma de documento de trabalho, circulava em Portugal já em 1988, antes da formação das comissões de redacção dos programas para os vários níveis de escolaridade;
- um ambiente propício ao regresso do ensino da geometria em novos moldes — papel essencial da intuição, recusa da formalização como ponto de partida, importância dos materiais manipuláveis, utilização das novas tecnologias (grande experiência acumulada no Projecto Minerva);

- um número apreciável de professores estava já ganho para a importância de um papel acrescido da geometria no currículo de Matemática, apesar da sua relativa falta de preparação científica e metodológica neste tema;
- entre os promotores activos do movimento de reforma do currículo de Matemática, o futuro ensino da geometria era identificado como uma das questões importantes a enfrentar — significativamente, um dos dois convidados externos, no Seminário de Milfontes²⁶, foi J. A. Franco de Oliveira, a quem se pediu uma reflexão sobre a renovação do ensino da geometria (o outro tema escolhido foi o da estatística).

*Situação actual
no ensino básico*

Não cabe aqui analisar as circunstâncias em que foram construídos, experimentados e generalizados os actuais programas de Matemática no princípio dos anos 90. Nem, dado os objectivos deste livro, fazer comentários detalhados sobre as mudanças programáticas que sofreu o ensino da geometria no ensino básico. Diga-se em resumo que:

- Os programas reflectem o movimento de regresso da geometria, sobretudo na preocupação de lhe reservar maior tempo lectivo — que chega a atingir mais de 40% em alguns casos —, e ao nível das introduções gerais e das indicações metodológicas, em que por exemplo o valor da intuição e da utilização de materiais manipuláveis é realçado.
- Como era de esperar, os programas revelam a falta de uma visão de conjunto sobre os problemas e possíveis soluções para o ensino da geometria ao longo da escolaridade, o que se torna mais saliente na forma um pouco *ad hoc* como os vários tópicos se distribuem pelos diversos anos; um exemplo gritante é a separação arbitrária das transformações geométricas: simetria no 6º ano, semelhanças no 7º, rotações no 8º e translações no 9º...
- Não existe estímulo positivo para a utilização de computadores no ensino de Matemática, tendo sido ignorada a rica experiência acumulada no Projecto Minerva; os vagos apelos à utilização (“quando possível”) das tecnologias colocam os programas a reboque das condições para a sua concretização e não o contrário, adoptando-se a velha regra da tradição napoleónica em educação — todos os alunos fazem obrigatoriamente o mesmo em todo o país, servindo desta maneira de bitola as escolas com menos condições —, uma solução votada a impedir o progresso em vez de o promover. Esta é talvez uma das lacunas mais graves dos novos programas, que estando associada no tempo ao desaparecimento do Projecto Minerva, impediu os alunos e professores de desenvolver a utilização dos computadores na aprendizagem da geometria, precisamente numa fase em que se deu o aparecimento de *software* inovador, como o *Cabri-géomètre* e o *Sketchpad*.
- Não parece ter havido a consciência, da parte dos autores dos programas e do Ministério da Educação, do que implicavam, ao nível da formação de professores e da criação de condições nas escolas, as

transformações propostas no ensino da geometria. Assim, apesar de um número crescente de professores estar a aproveitar positivamente as novas orientações para o ensino da geometria, a amplitude deste movimento ainda é muito diminuta.

É necessário portanto desenvolver novos esforços e iniciativas relativamente ao ensino e aprendizagem da geometria no ensino básico (em coordenação com a evolução que a este respeito se for dando no secundário).²⁷ Esses esforços devem orientar-se nas seguintes direcções:

- Reflexão aprofundada sobre a situação actual e futura do ensino da geometria em Portugal, desde o 1º ciclo do básico até ao secundário. Esta reflexão deveria envolver professores de todos os graus de ensino, incluindo os professores das Universidades e das Escolas Superiores de Educação encarregados da formação inicial dos professores de Matemática.
- Como resultado desta reflexão, definição de linhas de orientação gerais para o ensino da geometria e para a formação inicial e contínua dos professores de Matemática — elaboração de um ou mais documentos especificando essas orientações. Estes documentos seriam uma base para a reforma contínua da parte relativa à geometria dos programas de Matemática.
- Elaboração de uma lista de recursos e instalações escolares (por exemplo, laboratórios de Matemática) indispensáveis para se poderem concretizar as orientações resultantes dos pontos anteriores.

Situação actual da geometria no ensino secundário

Nas considerações introdutórias ao novo programa de Matemática para o ensino secundário, generalizado desde 1993, afirma-se que:

A Geometria assume um papel de relevo, considerando o seu poderoso contributo para a estruturação do pensamento e para a compreensão do meio.

As actividades geométricas localizam-se principalmente nas unidades do programa denominadas Geometria Analítica e Trigonometria [...]

[...]

Considera-se útil e formativo ampliar os conhecimentos de Geometria no espaço numa perspectiva hipotética-dedutiva antes da abordagem ao método cartesiano.²⁸

As opções reveladas nestas citações mostram como o ponto de partida para este novo programa de geometria estava afastado do movimento de renovação de que esboçámos as linhas mestras em pontos anteriores.

Em primeiro lugar, a “estruturação do pensamento” era reafirmado como um dos dois objectivos do ensino da geometria, ao lado da compreensão do meio. Mas este último, que poderia ser assimilado à *compreensão do espaço* de Freudenthal, era depois praticamente ignorado no corpo do programa. Restava portanto a tradição de utilizar a geometria para mostrar a matemática na sua “perspectiva hipotética-dedutiva”. A proposta que era feita no programa do 10º ano consistia em partir de cinco

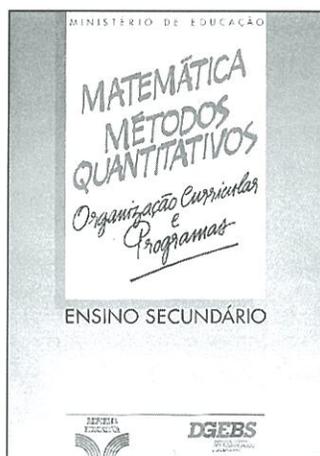


Figura 19

axiomas para uma “introdução relativa à geometria no espaço, a qual não deverá ser demorada” e que, além de permitir uma visão mais clara do espaço, proporcionava “ao aluno algumas ideias sobre a construção hipotético-dedutiva de uma ciência”. Apesar das tentativas dos autores de aproximar esta geometria da realidade — com os velhos exemplos do fio de prumo e dos bancos de três pés —, o que ficava desta primeira parte do programa de geometria era um conjunto de teoremas de geometria no espaço, para a demonstração dos quais eram necessários *precisamente*, como que por milagre, os tais cinco axiomas...

Em segundo lugar, para além desta primeira parte, a qual raramente foi abordada pela maioria dos professores nestes poucos anos de aplicação do programa, o que restava era a geometria analítica e a trigonometria, apresentadas de acordo com a tradição, embora evitando a formalização relativa aos espaços vectoriais.

Assim, o novo programa de Matemática ignorava as recomendações recentes sobre a renovação do ensino da geometria, nomeadamente as das *Normas* do NCTM, insistindo na apresentação “hipotético-dedutiva” e tratando a geometria analítica como tema isolado, melhor dizendo, como único tópico da geometria no ensino secundário.

Dois anos depois do início da generalização do novo programa de Matemática para o ensino secundário, “o volume dos problemas tornou clara a necessidade de proceder a ajustamentos desse programa.”²⁹

Diversas versões do ajustamento foram sendo propostas e amplamente discutidas ao longo de 1995 e a versão definitiva foi publicada em Janeiro de 1997, com o objectivo de substituir o programa actual a partir do ano lectivo de 1997-1998.

Não cabe aqui a descrição do processo de trabalho e discussão que conduziu à versão definitiva do ajustamento, nem a análise detalhada do documento final. Diga-se apenas que o modo como o ajustamento foi sendo construído constituiu uma experiência exemplar, ao romper com a prática autista anterior e que o resultado final, tanto quanto é possível afirmá-lo antes da realização concreta das suas propostas, é muito positivo, tendo em atenção as limitações naturais do que se pretendia que fosse um simples ajustamento.³⁰

No que diz respeito à geometria, o ajustamento não veio naturalmente resolver o problema de fundo das opções a tomar quanto ao seu ensino no nível secundário. Não só essas opções dependem da reflexão a que nos referimos no ponto anterior, e que ainda não foi feita entre nós, como quaisquer transformações mais profundas do que aquelas que foram adoptadas implicariam uma redistribuição muito mais radical dos temas ao longo dos três anos, e um simples ajustamento, como se pretendia, não comportava tal mudança.

Assim, mantêm-se deficiências graves no programa de geometria do ensino secundário:

	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO ESPANHA/INSTITUTO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO
	MATEMÁTICA PROGRAMAS
	10 ^o , 11 ^o e 12 ^o ANOS
	JANUÁRIO 1997

Figura 20. *Programas de Matemática do Ensino Secundário (resultados do Ajustamento)*, publicados em Janeiro de 1997.

- Apesar dos esforços feitos no ajustamento para procurar “um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva com a Geometria Analítica” o peso desta no programa continua avassalador. Conhecendo a tradição firmemente estabelecida entre muitos professores de reduzir na prática a geometria analítica a manipulações algébricas, existe um grande risco da componente verdadeiramente geométrica do programa do ensino secundário ficar muito aquém das percentagens anunciadas no texto.
- As transformações geométricas e as geometrias não-euclidianas são tópicos de geometria inexistentes no programa ajustado. A situação no programa não ajustado não era melhor, pois as transformações geométricas eram uma opção (!) a acrescentar a um programa já totalmente sobrecarregado e as geometrias não-euclidianas eram uma mera “referência” a fazer pelos professores no quadro da matemática como ciência “hipotético-dedutiva”. Mas estas lacunas são graves e reforçam a perspectiva de que, pelo menos quanto à geometria, este programa tem que evoluir profundamente.
- A trigonometria — funções e equações trigonométricas — ocupa parte do programa *dito* de geometria no 11^o ano. Por esta forma, a análise, já claramente privilegiada neste programa, estende-se ainda para os domínios que apenas nominalmente são atribuídos à geometria.

Julgamos que estes pontos negativos resultam sobretudo do facto do ajustamento ter deixado intactos os objectivos — tanto os declarados como os implícitos, acrescentamos nós — do programa do ensino secundário. Ora esses objectivos tendem a considerar o ensino de Matemática no secundário como preparação para prosseguimento de estudos superiores. Enquanto assim acontecer, a consequência inevitável — embora mesmo neste caso discutível — será privilegiar a álgebra e a análise em detrimento da geometria que não esteja ao serviço daquelas — como é o caso da geometria sintética e das transformações.

No entanto, apesar destas deficiências, a equipa do ajustamento envidou claramente todos os esforços para compensar esta situação. Assim:

- “Foi dada uma posição de destaque à geometria, por ser o tema tratado em primeiro lugar tanto no 10^o como no 11^o anos, e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas do Ajustamento.”³¹
- Uma parte da geometria do 10^o ano é dedicada à *Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço*, e aí os professores têm ocasião de levar os alunos a construir e manipular modelos, representar sólidos em perspectiva cavaleira, resolver problemas e actividades de investigação em geometria, nomeadamente com a utilização de computadores.
- Mesmo na parte do programa dedicada à geometria analítica, que como dissemos é predominante, existem abundantes recomendações contra a referida redução da geometria analítica à álgebra. Transcrevemos uma dessas indicações metodológicas:

O professor deve incentivar o aluno a fazer em todas as situações uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação *não deixando que o aluno se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas.*³² (itálico nosso)

Em síntese, o ajustamento, em geometria, está ainda bastante longe de ser aceitável como programa para o ensino secundário nesta mudança de milénio. No entanto, vamos ter que viver com ele nos próximos anos, e os professores devem aproveitar as possibilidades que mesmo assim ainda permite para desenvolver actividades interessantes no espaço e no plano, que despertem o gosto pela geometria em todos os seus alunos e que aumentem o seu “poder geométrico”, ou seja as suas capacidades de resolução de problemas utilizando diferentes perspectivas, de raciocínio geométrico, de visualização e de compreensão do espaço em que vivem.

Futuro da geometria no ensino secundário

Que fazer para melhorar o programa actual?

O plano que devemos seguir não é muito diferente daquele que esboçamos em geral para o do ensino básico, na pág. 30, e que começa por uma reflexão global sobre as linhas de orientação para o ensino da geometria ao longo de toda a escolaridade. Devemos acrescentar que a possibilidade de melhoria do programa de Matemática do ensino secundário terá de passar por uma mudança, não apenas declarada, mas efectiva, dos objectivos do ensino da Matemática neste nível, que confirmem identidade própria a este ciclo e não o reduzam a mero trampolim para prosseguimento de estudos.

O presente livro não é mais afinal do que uma contribuição para essa reflexão, no que se refere sobretudo ao ensino secundário. A sua organização e tópicos são propostas para alimentar esse debate urgente entre todos os que já estão conquistados para a necessidade de mudança no ensino da geometria.

A geometria no secundário deve ser encarada como o coroamento de doze anos de experiência matemática no campo da geometria. Nos últimos anos vão necessariamente situar-se os trabalhos de aprofundamento e de síntese, ao mesmo tempo que se continua a desenvolver, colmatando porventura lacunas que transitam de anos anteriores, o “poder geométrico” a que já nos referimos.

Se entendemos que um dos objectivos gerais do ensino da Matemática é a compreensão da natureza da matemática e do seu papel na construção da nossa sociedade, o aprofundamento da geometria que deve ser feito no ensino secundário refere-se à compreensão do espaço e dos respectivos modelos geométricos que são fornecidos pela matemática. Este facto irá progressivamente afastar-nos da “pequena geometria” que está presente no actual programa, e cujos tópicos se reduzem às coordenadas, referenciais, vectores, rectas e planos, e dirigir-nos para tópicos mais globalizantes da “grande geometria”. Devemos caminhar para que um

dia o ponto de partida não sejam os métodos de resolução de problemas, como é o caso da geometria analítica, mas sim os próprios problemas e questões inerentes à compreensão do espaço, como a simetria, a forma e a dimensão.

Não é possível compreender o papel da matemática na construção da nossa sociedade sem integrar a história da geometria no seu ensino. Acresce que durante muitos séculos a história da matemática se confundiu praticamente com a história da geometria, e a maior parte dos matemáticos eram intitulados geómetras. Assim, a componente histórica no programa de geometria, nomeadamente no ensino secundário, deve tornar-se muito mais ampla do que é na actualidade.

Tendo em conta que a história da geometria não terminou no séc. XVIII, nem se esgota com a geometria euclidiana, é importante que os alunos não abandonem o 12º ano sem compreender que existem “outras geometrias” para além daquela com que contactaram durante quase toda a escolaridade. Esta compreensão deve ter uma base experimental — os alunos devem trabalhar, resolver problemas ou realizar actividades de investigação noutras geometrias para além da geometria euclidiana. Além disso, a existência das geometrias não-euclidianas tem implicações filosóficas profundas, e não é aceitável manter os alunos alheios a elas depois de 12 anos de escolaridade.

Finalmente, não queremos terminar este ponto sem referir que uma das questões sobre as quais deve incidir a reflexão, em particular no secundário, é a formalização no ensino da geometria — quando e como deve ser feita? Alguns pontos de partida para a discussão deste tópico podem ser encontrados no capítulo VII.

As mudanças necessárias para a renovação do ensino da geometria não poderão, claramente, ser feitas todas de uma vez. Nem sequer, porventura, devemos continuar a esperar 20 ou 30 anos e depois ensaiar grandes reformas. Possivelmente o que devemos desejar é uma reforma contínua do ensino da geometria, que seja constantemente alimentada por uma reflexão também ela desenvolvida de forma contínua. Note-se que as mudanças que apontamos neste livro deixam ainda várias e importantes lacunas, sobretudo no capítulo das conexões da geometria: conexões com a arte, com outros temas da matemática, com o mundo concreto. Em particular, ficam de fora das nossas considerações os temas da geometria (teoria dos nós e geometria combinatorial) referentes a algumas aplicações da geometria discutidas nas actas “O futuro da geometria”, com que iniciámos este capítulo.

Amplas perspectivas estão abertas diante de nós. Estamos apenas a começar.

NOTAS

¹ A reunião realizou-se em Março de 1990 e as respectivas actas foram publicadas em 1991 sob o título *Geometry's Future* (org. pot Joseph Malkevitch). Na reunião estiveram presentes, entre outros, Joseph Malkevitch, Marjorie Senechal, John Conway, Donald Crowe e Thomas Banchoff.

² Escreveremos a palavra “matemática” com letra maiúscula quando se tratar do nome da disciplina e com letra minúscula quando se referir à ciência matemática.

³ Figura contida no texto de Walter Meyer, *Robotics in Geometry Courses*, incluído no livro *Geometry's Future*.

⁴ Estamos a referir-nos ao livro publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) em 1989 com o título *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Foi traduzido pela APM e publicado pela APM e pelo Instituto de Inovação Educacional em 1991, com o título *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Será referido neste livro simplesmente por *Normas para o Currículo* ou ainda por *Normas*. Existem três *Adendas* às *Normas*, relativas à geometria: *Geometry and Spatial Sense* (para o nível K-6), *Geometry in the Middle Grades* (para o nível 5-8) e *Geometry from Multiple Perspectives* (para o nível 9-12). Esta última adenda está traduzida para português sob o título *Geometria a partir de Múltiplas Perspectivas*.

⁵ Ver *The Geometry of René Descartes*, edição *fac simile* do famoso apêndice ao *Discours de la Méthode*.

⁶ Sobre o movimento matemático 1937-1947 ver o artigo de J. Morgado sobre “Os anos 40 e a Resistência Matemática”, publicado na revista *Educação e Matemática*. Ver também *Movimento Matemático 1937-1947*, editado pela Sociedade Portuguesa de Matemática.

⁷ Os filmes de Nicolet foram passados na RTP nos anos 60, nos programas da TV Educativa sobre a Matemática Moderna.

⁸ Ver *Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques*, vol. III.

⁹ A via métrica é seguida por Franco de Oliveira no livro *Geometria Euclidiana*, da Universidade Aberta. Ver justificação da escolha na pág. 11 daquela obra.

¹⁰ No Seminário de Royaumont foram lançadas as bases do movimento da Matemática Moderna. Uma recolha das intervenções foi publicada pela OECE, sob o título *Mathématiques Nouvelles*. Jean Dieudonné (1906-1992), um dos mais importantes e produtivos matemáticos franceses do grupo Bourbaki, foi nesta reunião o porta-voz das posições mais radicais em defesa de mudanças no ensino da Matemática.

¹¹ L. E. Brower (1881-1966) foi um topologista holandês que ficou conhecido pela sua defesa do filosofia construtivista da matemática. Em termos simples, o construtivismo contesta o uso que os matemáticos fazem do infinito, em particular na teoria dos conjuntos de Cantor. De acordo com esta posição filosófica, o ponto de partida de toda a matemática são os números naturais, que nos são dados por uma intuição básica. Partindo daqui, a matemática deve ser construída por meio de um número finito de passos. Os objectos matemáticos que não forem assim construídos não podem ser considerados. Para os construtivistas, muitos teoremas clássicos não são válidos, pois não foram encontradas (ainda) demonstrações construtivistas. Uma demonstração construtivista não pode incluir deduções baseadas no princípio do terceiro excluído.

¹² Hans Freudenthal — Homo Universalis” in *The Legacy of Hans Freudenthal*, uma reimpressão em forma de livro do número especial comemorativo da revista *Educational Studies in Mathematics* 25 (1-2), 1993.

¹³ Figura incluída no capítulo “Geometry Instruction in the Netherlands (ages 4-14) — the realistic approach”, de E. de Moor, do livro *Realistic Mathematics Education in Primary School*, organizado por L. Streefland.

¹⁴ Para uma descrição mais completa da teoria dos van Hiele, ver por exemplo o texto *The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought*, escrito por Mary

Crowley para o *Yearbook* de 1987 do NCTM dedicado à geometria. Ver também, o artigo de José Manuel Matos, *Um exemplo de Didáctica da Geometria*, na revista *Educação e Matemática* nº 6.

¹⁵ Ver *Revisiting Mathematics Education*, de Hans Freudenthal, pág. 101.

¹⁶ O programa LOGO teve grande difusão em Portugal, no âmbito do Projecto Minerva. A filosofia de educação subjacente é descrita no livro *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*, de Seymour Papert. Os programas da série *Supposer*, entre os quais *The Geometric Supposer* são da autoria de Judah Schwartz e Michal Yerushalmy. O programa *Cabri Geometry II*, de Jean Laborde & Frank Bellemain, versão 1.0, e o programa *The Geometer's Sketchpad*, de Nicholas Jackiw, serão considerados longamente no cap. II.

¹⁷ O livro *Shaping Space, A Polyhedral Approach*, organizado por Marjorie Senechal e George Fleck, inclui as principais intervenções proferidas no encontro.

¹⁸ O projecto *Connected Geometry*, animado por Paul Goldenberg e Albert Cuoco, é um dos mais interessantes projectos actuais em geometria. Terá como produtos uma série de publicações que estão previstas para Junho de 1997. Informações sobre o projecto e as publicações podem ser obtidas na Internet, URL <http://www.edc.org/LTT/ConnGeo/projdesc.html>.

¹⁹ Incluiremos ao longo do livro uma lista de endereços da *World Wide Web* com interesse para geometria.

²⁰ Michele Emmer foi um dos conferencistas estrangeiros convidados para o encontro nacional de professores de Matemática organizado pela APM, ProfMat 94, em Leiria. As suas conferências estão transcritas nas actas respectivas.

²¹ *Cronologia Recente do Ensino da Matemática*, de José Manuel Matos, pp. 45-46.

²² ESTIMATEMP E TRINCA-ESPINHAS são dois programas de computador de Paulo Abrantes e João Pedro Ponte, respectivamente.

²³ O número temático sobre geometria foi o número 6 e pode ser pedido à Associação de Professores de Matemática (APM). Ver morada da APM junto da bibliografia.

²⁴ Lurdes Serrazina e José Manuel Matos, *O Geoplano na Sala de Aula*.

²⁵ Ver *Bibliografia e outros recursos*, na parte final do livro.

²⁶ O Seminário de V. Nova de Milfontes, uma iniciativa da APM realizada em 1988, foi uma reunião de reflexão sobre a renovação do currículo e dos programas de Matemática. O seu produto foi um documento de trabalho intitulado *Renovação do Currículo de Matemática*. Este texto foi posteriormente publicado pela Comissão da Reforma do Sistema Educativo.

²⁷ A criação do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) da APM e o trabalho que tem realizado e pretende desenvolver é uma contribuição nesta direcção. Para contactos, ver *Bibliografia e outros recursos*.

²⁸ *Matemática e Métodos Quantitativos: Organização Curricular e Programas*, ed. Ministério da Educação.

²⁹ Ver *Matemática: Programas, 10º, 11º e 12º*, pág. 1.

³⁰ Este texto foi escrito no início de 1997. Neste momento (Abril de 1998), embora já tenha havido a experiência de Geometria do novo 10º ano, ainda não é possível ter uma visão de conjunto de como decorreu.

³¹ *Matemática: Programas, 10º, 11º e 12º*, pág. 6.

³² *Idem*, pág. 19.