Ensino da Geometria: Ideias para um Futuro Melhor

Eduardo Veloso

Departamento de Educação da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa

Introdução

Neste texto procuramos apresentar algumas ideias, apoiadas em exemplos, sobre o que poderia ser uma evolução positiva do ensino da geometria no futuro. Uma boa regra, para quem declara uma intenção deste tipo, é não deixar de apresentar previamente as suas premissas, ou seja, de responder pelo menos às seguintes questões:

- de que alunos estamos a falar?
- que objectivos estamos a considerar para o ensino da geometria?

É o que faremos brevemente a seguir, no que tentaremos ser tão francos e directos como Jean Dieudonné, em Royaumont, há precisamente 40 anos. Nesse ano de 1959 a OCDE convocou para aquela cidade representantes das comunidades matemática e da educação matemática de numerosos países, com o fim de discutir a reforma, reclamada insistentemente na época, do ensino da matemática. Esta reunião viria a constituir o ponto de partida principal para a chamada Matemática Moderna, e sem dúvida a intervenção de Dieudonné foi decisiva, sendo a única que pela sua importância foi transcrita na íntegra nas actas da reunião.[1]

Em relação à primeira questão, Dieudonné declara que as suas propostas "dizem apenas respeito ao problema prático da passagem do secundário para a Universidade." Isto é, os alunos a que está a referir-se são aqueles que tencionam seguir estudos universitários. Quanto aos objectivos que atribui ao ensino da matemática para esses alunos, Dieudonné é igualmente claro: trata-se obviamente de prepará-los para prosseguirem sem dificuldade o estudo da matemática dos primeiros anos da Universidade. Mais precisamente, pretende Dieudonné que se antecipe para o secundário aprendizagens que roubam muito tempo ao ensino universitário de matemática:

> "[...] eliminando toda a perda de tempo [...] e colocando [no ensino secundário] o mais possível do fardo que actualmente é suportado pela Universidade."

Quais eram essas aprendizagens que Dieudonné pretende transferir do ensino universitário para o secundário? Também neste aspecto a resposta é clara e significativa:

> "um certo número de técnicas elementares [...] álgebra linear elementar, a geometria analítica, a trigonometria e alguns elementos do cálculo diferencial e integral"

Comparando com o actual programa do secundário, podemos dizer que ao cabo de todas as vicissitudes e transformações por que tem passado o ensino da matemática nas últimas décadas, estas propostas acabaram (infelizmente...) por sair em grande parte vitoriosas.

As nossas premissas são inteiramente diferentes. Entendemos que está certamente próximo o tempo em que todos os alunos prosseguirão estudos de nível secundário, e que este nível, não sendo

- nem terminal — pois por um lado não deve ter carácter profissionalizante e por outro será desejável que a melhoria das condições sociais permita o prosseguimento dos estudos para uma percentagem crescente de todos que o desejarem fazer;
- nem de preparação específica para determinados estudos superiores — pois ainda será cedo para a generalidade dos alunos fazer escolhas de carácter quase definitivo;

terá como objectivo prosseguir e aprofundar a formação geral iniciada nos anos anteriores, num alargado leque de direcções — humanística, científica, técnica, artística, e para a cidadania.

Assim, a formação em matemática — *para todos os alunos* — terá como finalidade a compreensão da natureza da matemática. Essa compreensão atinge-se através de uma experiência matemática intensa e variada, e da reflexão sobre essa experiência. Essa experiência e reflexão devem incidir nomeadamente sobre

- a história da matemática;
- os seus processos próprios de desenvolvimento — modelação matemática, procura de invariantes, descoberta de conexões dentro da matemática e utilização da analogia, generalização e abstracção;
- as suas características como ciência — o papel da intuição e da dedução em matemática, a importância e carácter das definições e da demonstração, e a estrutura axiomática.

Nesta perspectiva, portanto, a aquisição de técnicas e de proficiência de cálculo, ou mesmo de conhecimentos específicos de conceitos ou resultados matemáticos, não constitui finalidade do ensino em si mesma, mas apenas na medida em que seja estritamente necessária para aquela formação geral, que tem portanto um carácter eminentemente cultural, do nosso ponto de vista.

No que se segue, apresentaremos o que consideramos serem os principais traços negativos do ensino tradicional da geometria, os quais, apesar de esforços isolados inovadores, ainda são dominantes na situação actual. Depois avançaremos algumas ideias para a transformação desta situação, em três pontos específicos que consideramos de primeira importância: a compreensão da estrutura axiomática da matemática através da sua "organização local", a quebra do *gueto* em que a geometria tem estado confinada por meio da explicitação de conexões da geometria com outros domínios da matemática e o abandono da abordagem tradicional da geometria, do simples para o complexo, da parte para o todo, em favor de uma abordagem que parta dos grandes temas como a simetria ou a dimensão.

Uma tradição negativa

Ao longo dos anos, o ensino da geometria tem vindo a acumular diversos aspectos negativos que nos nossos dias se têm oposto a todas as tentativas de renovação. Em Portugal, mas certamente não só, a situação actual é desastrosa. Se percorrermos os aspectos em que a geometria poderia contribuir para a compreensão da natureza da matemática que afirmámos ser o objectivo principal do seu ensino, vemos que em todos eles existe uma tradição negativa.

No que diz respeito à importância a ao carácter das *definições* em matemática, em lugar destas aparecerem depois da construção (necessariamente lenta e gradual) dos conceitos, os alunos são confrontados com listas de definições *a priori*. Pode dizer-se que o lema da generalidade dos manuais escolares e da generalidade dos professores é o seguinte: "quem diz geometria, diz definições".

Independentemente de qualquer actividade significativa, parece por exemplo ser imperativo definir, no princípio da secção dos triângulos, o que são triângulos acutângulos, obtusângulos, etc. etc. e também os vários tipos "quanto aos lados", e assim por diante. Em vez de esperar pacientemente que os alunos comecem a exprimir, porque isso se torna necessário no trabalho cooperativo, a concepção que já possuem de determinado objecto ou relação geométrica, os professores e os manuais avançam com definições muitas vezes incompletas, pressupondo mais do explicitam (fig. 1).

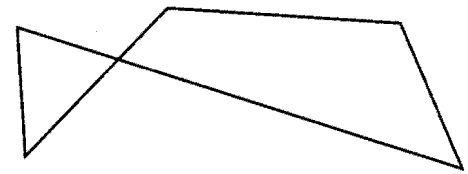

Fig. 1. "Polígono é uma linha poligonal fechada" diz um professor aos seus alunos. Mas se um aluno desenhar esta figura como exemplo de polígono, muito provavelmente o mesmo professor reagirá negativamente. Em que ficamos?

O caso dos poliedros é paradigmático. Ignorando ou esquecendo que o conceito de poliedro levou séculos a estabilizar, "dá-se" aos alunos, sem qualquer espírito crítico, a pseudo-definição dos *Elementos* de Euclides (fig. 2).

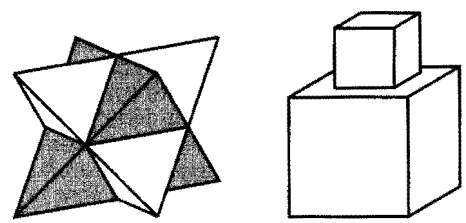

Fig. 2. "Poledro é um sólido com as faces planas" diz um professor aos seus alunos. Mas se o aluno lhe apresentar estes "poliedros", como reagirá o mesmo professor?

Na tradição da "definomania" é frequente o aparecimento do "conceito" de sólido "não poliedro", uma invenção oriunda certamente da "conjuntivite" cujos prenúncios Sebastião e Silva denunciou. Os alunos são obrigados a dizer que um cone ou um cilindro são "não poliedros"! Apetece dizer que com a não-definição que os manuais dão de poliedros, tudo são não poliedros...

Desta forma, quando o que se pretende é que os alunos fiquem a compreender o carácter das definições em matemática — que as definições são convenções, não caem do céu nem são imutáveis, mas ao mesmo tempo são essenciais na construção da matemática —, a mensagem transmitida pela prática actual é que, quando nos pedem uma definição de um objecto matemático, o que temos a fazer é "falar sobre ele", dizer tudo o que nos vier à cabeça"...

A situação, relativamente à demonstração em matemática, não é melhor. De um período em que os alunos decoravam, em muitos casos sem compreender, dezenas de demonstrações, passou-se para a situação actual em que dificilmente se poderá dizer que existe da parte de muitos alunos verdadeira experiência matemática, pois não chegam a esboçar uma demonstração em toda a sua escolaridade.

Obviamente, a principal característica da matemática como ciência — a demonstração — não é compreendida como tal, e a imagem da matemática fica completamente distorcida. A alteração desta situação é talvez um dos problemas mais difíceis na educação matemática, pelas profundas transformações que exige nos programas, na prática dos professores e na formação inicial e contínua. Considerações sobre a formalização no ensino da geometria, escritas pelo autor noutro local, poderão porventura lançar alguma luz sobre esta problemática.[2]

É conhecida a crítica de Freudenthal à tentativa de levar os alunos a compreender o *carácter axiomático da matemática* através da sua exposição a uma versão, mais ou menos abreviada ou adaptada, dos *Elementos* de Euclides. Curiosamente, embora tão distantes em relação a outras questões, Dieudonné parece antecipar as observações de Freudenthal ao classificar precisamente de *escroquerie* , no encontro de Royaumont,

> [...] a maneira como se ensina actualmente o princípio da geometria, com sequências de "definições" que não definem nada e de pseudo demonstrações que não resistem à análise lógica.

A experiência portuguesa confirma inteiramente as reservas de Freudenthal e as críticas de Dieudonné, mesmo na forma reduzida como se tentou recuperar a mesma ideia na última reforma do secundário. O posterior "ajustamento" tomou a boa decisão de eliminar essa parte do programa, mas obviamente o objectivo de ajudar os alunos a ter uma compreensão vivida da matemática como sistema axiomático não ficou assim resolvida. Tentaremos mais à frente, a partir de uma ideia proposta por Freudenthal — "as axiomáticas locais" —, sugerir como poderíamos caminhar no sentido de atingir aquele objectivo.

Outra tradição negativa do ensino da geometria é a posição isolada, de verdadeiro *gueto*, que a geometria tem ocupado no currículo de matemática. No espírito de muitos alunos desenvolve-se a concepção de que existe a matemática e... a geometria! E, no entanto, as conexões da geometria com outros domínios da matemática são numerosas, e por vezes surpreendentes. O reconhecimento desta situação tem levado os autores dos programas a sugerir com insistência que os professores tentem estabelecer essas conexões quando estão a abordar outros tópicos do programa, como funções, ou álgebra. Isso não tem sido conseguido de forma correcta, devido sobretudo à falta de experiência dos professores e à inexistência de bons materiais com esta perspectiva, em particular em língua portuguesa. Assim, o que é corrente encontrar, nos manuais e na prática dos professores, é a geometria como "ilustração" ou a geometria como "pretexto", mas raramente questões matemáticas onde existam verdadeiras conexões entre a geometria e outras áreas da matemática, que permitam iluminar essas questões a partir de diferentes perspectivas. Apresentaremos adiante algumas sugestões no sentido de tentar diminuir a situação de isolamento da geometria.

Na lista dos "maus hábitos" que o decorrer dos anos foi introduzindo no ensino da geometria, não pode deixar de ser incluído aquele que consiste em apresentar os objectos geométricos numa ordem supostamente "lógica" ou "natural", do "simples" para o "complexo", do ponto e da recta para as figuras planas, do plano para o espaço, e assim por diante. Por qualquer razão misteriosa, o percurso habitual de aprendizagem das crianças — que é obviamente analítico, do complexo para o elementar, do todo para a parte, pois começa por conhecer a mãe ou o mundo que o rodeia como um todo, e não como justaposição de elementos mais simples — não é considerado aceitável para a abordagem da geometria. Froebel, que nos seus *kindergarten* punha à disposição das crianças cubos, cones e esferas pendurados por cordéis, como primeira familiarização com objectos geométricos, estaria assim enganado... o que deveria ter pendurado eram pontos(!), rectas e planos... Veremos mais à frente como se pode imaginar uma abordagem alternativa da geometria que contrarie a prática que acabamos de referir.

A organização local da geometria

Já referimos que Freudenthal, na sua crítica às exposições axiomáticas globais da geometria, utilizadas tradicionalmente como meio de fazer compreender aos alunos o carácter axiomático das teorias matemáticas, propõe a sua substituição pelas "axiomáticas locais".

Noutro local indicámos também como Freudenthal salienta

> [...] a conveniência de proceder a *pequenas organizações locais da geometria*; isto significa que em vez de se pretender apresentar ao aluno uma (pseudo) organização global da geometria, um sistema axiomático completo, o que deve ser proporcionado aos alunos são experiências de organização local, em que um pequeno número de resultados conjecturados por eles sejam, por meio de curtas deduções, interligados logicamente.[3]

O NCTM, na Adenda às *Normas para o Currículo* intitulada *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas,* retoma esta ideia, apresentando alguns exemplos concretos.[4] Num deles, diferentes grupos de alunos partem de definições diferentes de paralelogramo

- quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos;
- quadrilátero com um par de lados opostos paralelos e iguais.

A partir daqui formulam conjecturas, deduzem propriedades, tentam justificações e organizam os seus resultados, que serão depois comparados.

Outros exemplos poderiam ser apresentados nesta mesma direcção. No Grupo de Geometria do projecto Matemática para Todos, que decorreu nos últimos três anos no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pareceu-nos que estas ideias de Freudenthal poderiam ser estendidas e englobar alguns tipos de actividades de investigação que foram desenvolvidas no âmbito desse projecto. Seria o caso, por exemplo, de investigações em torno da família dos quadriláteros, que conduzem a diversos tipos de organização deste tipo de objectos geométricos — tomando como ponto de partida propriedades das diagonais, ou o tipo de paralelogramo que resulta da união por meio de segmentos dos pontos médios dos lados.

Julgamos assim que a ideia de Freudenthal pode ser estendida e levar à consideração de um amplo conjunto de actividades matemáticas, em particular de geometria, a que poderíamos chamar de "organização local". Este conjunto de actividades teriam algumas características comuns:

- o seu objectivo seria ajudar os alunos a compreender, pela experiência, alguns traços distintivos da matemática como ciência — as teorias matemáticas como sistemas axiomáticos, o carácter convencional mas essencial das definições, a "verdade matemática" como verdade relativa, o papel decisivo da demonstração em matemática;
- neste tipo de actividades, os alunos investigariam determinada "região" da matemática — uma família de objectos matemáticos, um conjunto de termos primitivos e derivados, um pequeno conjunto de definições, axiomas e teoremas extraídos de um sistema axiomático — e tentariam

  • ou "organizar" essa "região — construindo conceitos, propondo definições, conjecturando relações entre objectos ou termos matemáticos, demonstrando ou refutando essas relações;

  • ou compreender a organização subjacente, procurando perceber o que levou determinado matemático a adoptar determinada estrutura para a "região" em estudo.

Em relação a este último ponto, pensamos portanto que existe uma alternativa para o mau serviço prestado a Euclides e à geometria com as tentativas de transmitir aos alunos o sistema axiomático completo contido nos *Elementos*.

Parece-nos muito preferível seleccionar e entregar para estudo e investigação, aos alunos, alguns pequenos conjuntos encadeados de proposições de Euclides e deixá-los explorar essa zona dos *Elementos*, esperando que se deixem fascinar, como no passado aconteceu a tantos matemáticos, pela mestria de Euclides. O exemplo que passamos a apresentar corresponde precisamente a esta situação.

Do compasso euclidiano ao compasso moderno

Os *Elementos* de Euclides, depois de apresentarem os cinco *postulados* (hoje diríamos axiomas), um conjunto de *definições* e as chamadas *noções comuns* (afirmações aceites sem definição, de carácter geral, isto é, não necessariamente geométrico), enunciam e demonstram — tomando por base os axiomas, as definições, as noções comuns e as proposições anteriores já demonstradas — o conjunto das *proposições* que formam o corpo da teoria matemática contida nos *Elementos*.

As três primeiras proposições (1, 2 e 3) do livro I são as seguintes:

Prop. I.1. Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero.

Prop. I.2. Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado.

Prop. I.3. Dados dois segmentos desiguais, cortar do maior um segmento igual ao mais pequeno.

Em seguida, a partir da proposição I.4., Euclides demonstra resultados referentes aos triângulos, à bissectriz, a mediatriz, etc.

Ocorre perguntar: onde queria Euclides chegar com as três primeiras proposições?

Na fig. 3 incluímos estas três proposições e, por meio de setas, indicamos os postulados, noções comuns e proposições anteriores a que Euclides recorre nas demonstrações.

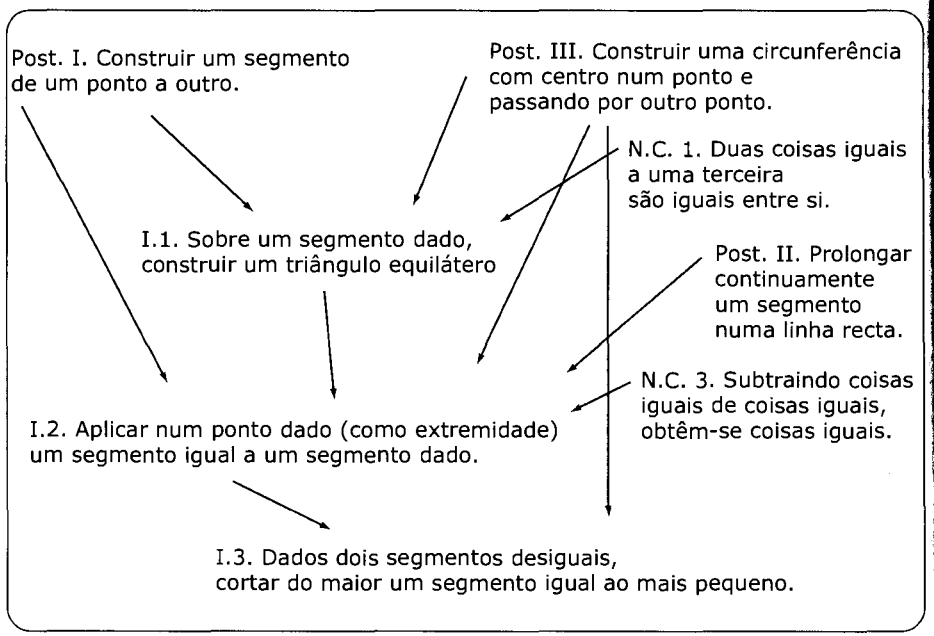

Fig. 3. Do compasso euclidiano ao compasso moderno

Observações a propósito da figura 3:

- Os postulados I e III são normalmente considerados aqueles em que Euclides apresenta os "instrumentos de desenho" permitidos na construção da geometria.
- Assim, o postulado I introduz a régua não graduada e o postulado III o compasso euclidiano.
- Note-se que na sua primeira proposição Euclides afirma a possibilidade de construir um triângulo equilátero utilizando apenas estes dois instrumentos; na realidade, para a demonstração desta proposição, Euclides apenas tem disponíveis os postulados e as noções comuns.
- É muito importante notar que o compasso euclidiano é muito diferente do nosso compasso moderno. O instrumento de Euclides serve para traçar uma circunferência conhecido o centro e outro ponto por onde deverá passar a circunferência. Depois de traçar uma circunferência, para traçar a seguinte *devo novamente dar dois pontos, o centro e o outro ponto por onde deve passar a nova circunferência*. Isto é, *o compasso euclidiano não serve para transportar segmentos*. Depois de traçar uma circunferência, o compasso de Euclides "esquece-se" do raio que utilizou para isso (por outras palavras, não conserva a abertura!).

Como dizia Morgan no séc. XIX, as duas proposições I.2 e I.3 seriam misteriosas se não compreendêssemos que o Post. III se refere ao compasso euclidiano (que acabámos de descrever) e não ao compasso moderno.[5] Com efeito, a prop. I.3. afirma que é possível transportar segmentos, ou seja, que estamos de posse do compasso moderno.

Em resumo, Euclides, que gosta claramente de jogar o jogo das construções geométricas, apenas concede a si próprio, nesse jogo, dois instrumentos limitados — a régua não graduada e o compasso euclidiano. Mas (ousaríamos dizer que se diverte quando) demonstra, nas suas primeiras três proposições, que essa limitação é apenas aparente, pois afinal tudo se passa como se possuísse o compasso moderno (que pode transportar segmentos).

É interessante acompanhar Euclides nas construções e demonstrações correspondentes a estas três proposições. E o modo ideal de o fazer é utilizar o *Geometer's Sketchpad*. Na realidade, os instrumentos (*tools*) relativos ao traçado de rectas (segmentos e semirectas) e de circunferências — situados na margem esquerda do ecrã — *correspondem precisamente* aos conceitos de régua não graduada e de compasso euclidiano (fig. 4).

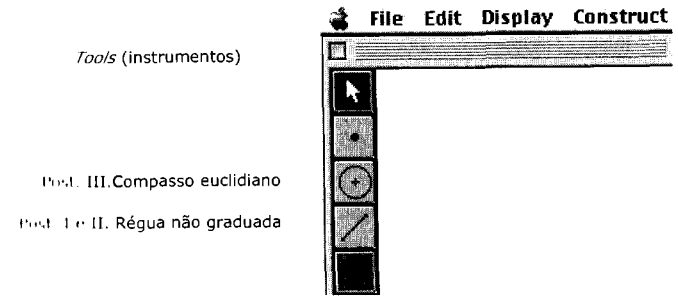

Fig. 4. Os instrumentos do *Sketchpad* correspondem a postulados de Euclides

Assim, deveremos conseguir, sem utilizar quaisquer outros comandos do *Sketchpad*, reproduzir as construções de Euclides. É o que mostraremos a seguir.

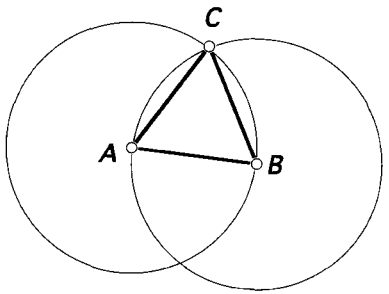

Fig. 5. Prop. I.1.

Na figura 5, traçado o segmento *AB* com o auxílio da régua não graduada (Post. I), passa-se a utilizar o compasso euclidiano (Post III) duas vezes seguidas. Primeiro para traçar a circunferência de centro em *A* e passando por *B*, depois para traçar a circunferência de centro em *B* e passando por *A*. Com a régua não graduada traçam-se os segmentos *CA* e *CB* (Post. I). A conclusão que este triângulo é equilátero resulta da definição de circunferência e da N.C. 1 ("duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si"). Fica assim demonstrada a Prop. I.1.

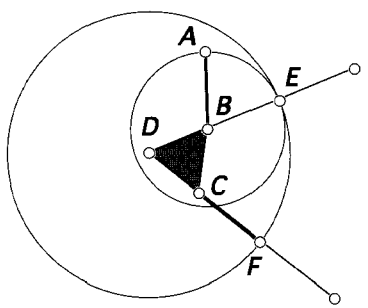

Fig. 6. Prop. I.2.

A demonstração da Prop. I.2 é uma das mais engenhosas de Euclides. Ficamos a perceber como "não é por acaso" que Euclides escolheu, para primeira proposição do seu famoso livro, a construção do triângulo equilátero, que acabamos de ver. Esta construção é um elemento essencial da demonstração. De novo, utilizando apenas as *tools* (régua e compasso) do *Sketchpad*, conseguimos reproduzir o processo seguido por Euclides (ver fig. 6). Dados o segmento *AB* e o ponto *C*, constrói-se o triângulo equilátero *CBD* sobre *CB* (Prop. I.1.). Depois prolongam-se os segmentos *DB* e *DC* (Post. II). Traçam-se as circunferências de centro em *B*, passando por *A*, e de centro em *D*, passando por *E* (Post. III), encontrando-se o ponto *F*. Utilizando as N.C. 3 ("se a coisas iguais tiro coisas iguais, fico com coisas iguais") e 1, conclui-se que o segmento *CF* é igual ao segmento *AB*. Fica assim demonstrada a Prop. I.2.

Demonstrada a Prop. I.2., Euclides tem claramente a tarefa facilitada. A Prop. I.3. utiliza apenas a Prop. I.2. e o Post. III. Dados os segmentos *AB* e *CD*, sendo aquele menor que este, traça-se com origem em *C* um segmento *CE* igual a *AB* (Prop. I.2.) (fig. 7). Depois traça-se a circunferência de centro em *C* e passando por *E* (Post. III). Encontra-se o ponto *F*, intersecção desta circunferência e do segmento *CD*. Então *CF* é igual a *AB*, por definição de circunferência. Fica assim demonstrada a Prop. I.3.

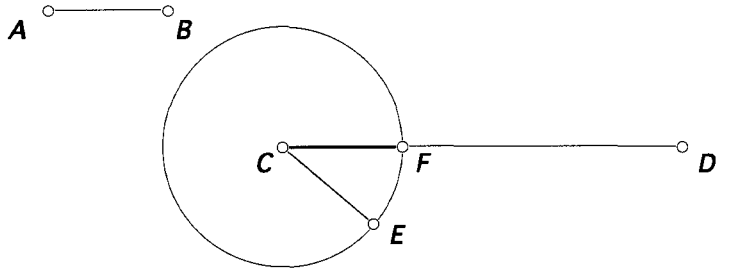

Fig. 7. Prop. I.3.

Esta pode ser uma boa actividade para alunos do fim do ensino secundário. A utilização de um programa moderno de geometria dinâmica como o *Sketchpad* neste contacto com a obra de Euclides é estimulante: a limitação que nos impomos, do ponto de vista tecnológico, de apenas utilizar os dois instrumentos da coluna dos *tools*, é semelhante à limitação intelectual que Euclides se impõe de apenas utilizar, neste seu jogo das construções geométricas com que inicia os Elementos, os postulados I, II e III, isto é, a régua não graduada e o compasso euclidiano. E o facto de conseguirmos, no *sketchpad*, realizar a construção correspondente à Prop. I.3. — que podemos depois transformar em *script tool* —, não é mais do que modelar, com o auxílio da tecnologia, o resultado de Euclides contido nas primeiras três proposições da sua obra: no sistema axiomático de Euclides, o compasso euclidiano é equivalente ao compasso moderno.

Como é natural, outros conjuntos de proposições dos Elementos podem também ser ponto de partida para actividades de *organização local*. Por exemplo, consideremos o conjunto das proposições 27 a 32 do livro I. O postulado V — dito "das paralelas" — não é necessário para demonstrar qualquer das proposições 1 a 26 mas intervém, directa ou indirectamente, na proposição 33 e seguintes. No que diz respeito ao conjunto 27 a 32, o Post. V é necessário em algumas das demonstrações, noutras não. Ou seja, este conjunto de proposições constitui uma transição entre a geometria habitualmente designada por *neutra* e a geometria propriamente euclidiana. Por outras palavras, as proposições 1 a 26 são válidas tanto na geometria euclidiana como na geometria hiperbólica, ao passo que as proposições a partir da 32 apenas são verdadeiras na geometria euclidiana. O estudo do conjunto de proposições 27 a 32 lança luz sobre o cuidado colocado por Euclides na organização dessa "zona" da sua teoria geométrica e também sobre as distinções entre a geometria hiperbólica e a geometria elíptica.

Conexões da geometria

Como podemos tirar a geometria do *gueto* em que tem estado confinada? Uma resposta consiste em propor tarefas aos alunos que os levem a experimentar e compreender as profundas, e por vezes surpreendentes, conexões da geometria com outros domínios da matemática — números, álgebra, análise, etc.

A experiência mostra, no entanto, que as tentativas que têm sido feitas neste sentido são muitas vezes artificiosas e superficiais, relegando a geometria, como já dissemos, para as funções de *pretexto* ou *ilustração*.

O combate a esta situação faz-se se as relações com os outros temas matemáticos partirem de verdadeiros problemas geométricos. Uma fonte muito rica para esses problemas é a história da matemática, que durante muitos séculos se confundiu, praticamente, com a história da geometria.

Num curso de dois dias realizado por ocasião do ProfMat 94, em Leiria, intitulado *Áreas e Volumes: A pré-história do cálculo*,[6] Franco de Oliveira aborda, tanto do ponto de vista matemático como da história da matemática, um certo número de problemas e resultados da geometria sobre o cálculo de áreas e volumes:

- Problemas de áreas e volumes nas civilizações egípcia e babilónica antigas
- Áreas e volumes na Grécia antiga
- Arquimedes
- Do declíneo ao Renascimento
- Indivisíveis e infinitesimais

A partir deste trabalho, escrito de forma muito acessível, é possível extrair um número apreciável de actividades, para alunos do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, que mostram como a partir das tentativas de resolução de problemas de carácter indiscutivelmente geométrico relativos a áreas e volumes os matemáticos foram conduzidos à invenção do cálculo infinitesimal. O caminho, aqui, pode ser muito diferente do habitual, em que a geometria aparece apenas como (dispensável) ponto de partida para exercícios destinados ao treino de técnicas de cálculo.

No exemplo que apresentamos a seguir, também dirigido para alunos dos anos terminais do ensino secundário, partiremos do problema das tangentes às linhas curvas, outro problema de carácter geométrico que pode conduzir — embora aqui nos quedemos apenas nos aspectos geométricos — historicamente ao cálculo diferencial.

Tangentes a linhas curvas

O início do séc. XVII foi um período áureo da história da geometria. Um centro de discussão e de difusão de problemas de geometria era o chamado *círculo de Mersenne*, um grupo de físicos e matemáticos que se reunia na cela do frade Mersenne. O alcance deste círculo era mais amplo que o local de reunião, pois Mersenne encarregava-se de difundir dentro e fora da França os problemas e as soluções de um número alargado de cientistas (entre os quais Étienne Pascal e Blaise Pascal, Desargues, Descartes e Fermat, por exemplo). Um frequentador assíduo do círculo de Mersenne era Gilles Personne de Roberval (1602-1675), físico e matemático, professor no Collège de France.

No princípio dos anos 30 do século XVII Roberval dedicou-se ao problema do traçado da tangente a uma curva num dado ponto. Os seus trabalhos apenas são publicados em 1693, com o título *Observações sobre a composição de movimentos e sobre um método de traçar tangentes a curvas*.[7]

Nesse trabalho, Roberval anuncia o seu "princípio de invenção":

> A direcção do movimento de um ponto que descreve uma curva é a tangente à curva nesse ponto.

Em seguida, apresenta uma regra para a determinação da tangente num ponto:

> [...] a partir das propriedades específicas da curva (que são dadas) examinar os diferentes movimentos do ponto que a descreve no local em que se pretende traçar a tangente; determinar o movimento composto por estes movimentos componentes e estará determinada a tangente à curva.

Com o auxílio do *Sketchpad*, e do comando *animate,* vejamos a aplicação desta regra à parábola, seguindo de perto Roberval (fig. 8). A parábola de directriz *d* e foco *F* é o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente de *d* e de *F*. No *Sketchpad*, um meio de obter a parábola é colocar um ponto variável *X* sobre a semirecta *VF* (em que *V* é o vértice da parábola, isto é, o ponto médio do segmento *AF*), traçar a paralela *r* a *d* passando por *X* e depois a circunferência *c* de centro *F* e raio *AX*. Os pontos *P* e *P'* intersecções de *r* com *c*, descrevem a parábola quando animamos o ponto *X* na semirecta *VF*. Cumprimos assim a primeira parte da regra de Roberval, conhecer as propriedades específicas da curva, ou seja, o modo de geração, neste caso.

Consideremos agora o problema da determinação da tangente no ponto *P*, e vejamos como Roberval aplica o seu método. Recordemos que temos que imaginar o movimento do ponto *P* decomposto em movimentos mais simples.

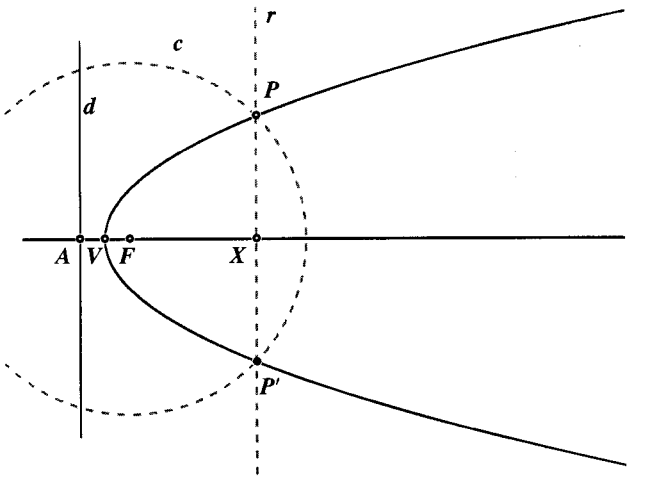

Fig. 8. Geração da parábola

A composição destes "movimentos" (que serão, em linguagem moderna, vectores velocidade *instantânea*) dar-nos-á a (direcção da) tangente (fig. 9).

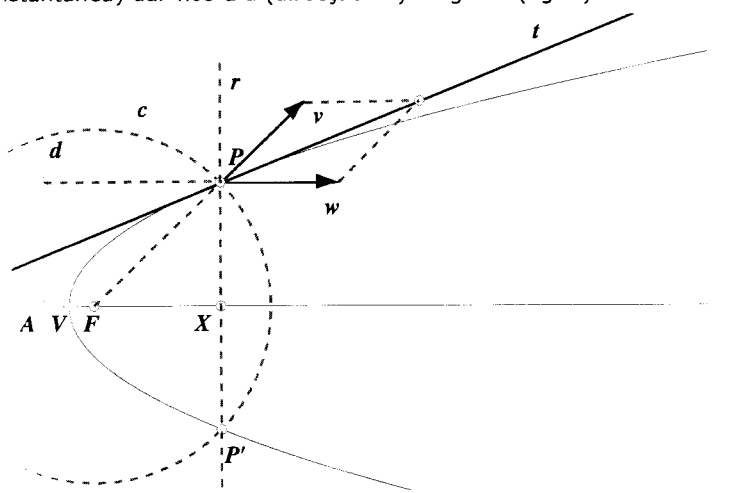

Fig. 9. Tangente à parábola no ponto *P*

Roberval considera que *P*, ao descrever a parábola, está sujeito a dois movimentos. Por um lado, está sempre a afastar-se do foco *F*, por outro, está também sempre a afastar-se da directriz *d*. A construção que fizemos com o *Sketchpad* mostra como Roberval visualiza bem a situação. Aos dois movimentos correspondem os vectores *v* e *w*, que Roberval afirma terem o mesmo módulo (não nesta linguagem, claro). Na realidade, dado que em cada instante as distâncias de *P* à directriz e ao foco são iguais, os vectores são iguais. Então, compondo os dois vectores (que definem um losango), obtemos como tangente a bissectriz dos vectores *v* e *w*, ou seja a recta *t*.

Vejamos como Roberval aplica o mesmo método à ciclóide. A definição da ciclóide é conhecida. Uma circunferência rola sem escorregar sobre o segmento *AB* (fig. 10).

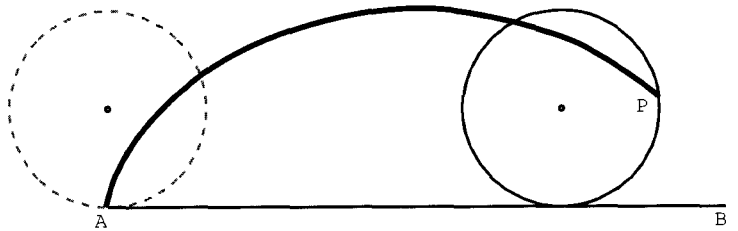

Fig. 10. Geração da cicloide

O ponto *P* é um ponto da circunferência. No momento inicial, o ponto *P* e o ponto *A* coincidem (circunferência a tracejado). A cicloide é a figura traçada pelo ponto *P*. Na figura 10, a circunferência ainda não rolou sobre todo o segmento *AB*, e portanto a cicloide está apenas parcialmente traçada.

De acordo com o seu método, Roberval afirma que o ponto *P* está sujeito a dois movimentos. Por um lado, roda sobre a circunferência. Além disso, é arrastado pelo movimento da circunferência, que passa da posição incial — tangente ao segmento *AB* no ponto *A* — à posição final tangente a *AB* no ponto *B*. Na figura 11, os dois vectores indicam respectivamente esses movimentos.

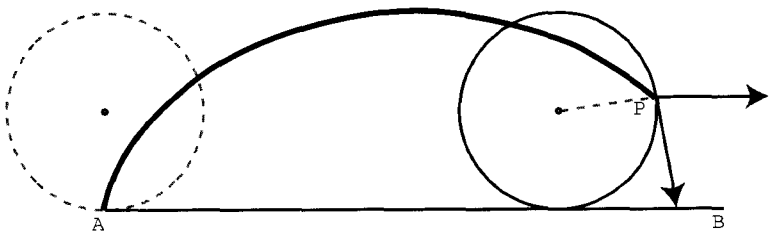

Fig. 11. Os dois "movimentos" do ponto *P*

Roberval afirma que os dois "movimentos" são iguais (vectores com o mesmo módulo). Assim é, com efeito. Como a circunferência rola sem escorregar, o perímetro da circunferência é igual ao comprimento do segmento *AB*. Como o ponto *P* executa os dois movimentos no mesmo tempo, os vectores velocidade instantânea são iguais. Portanto, de novo, a tangente obtém-se determinando a bissectriz das direcções dos vectores (fig. 12).

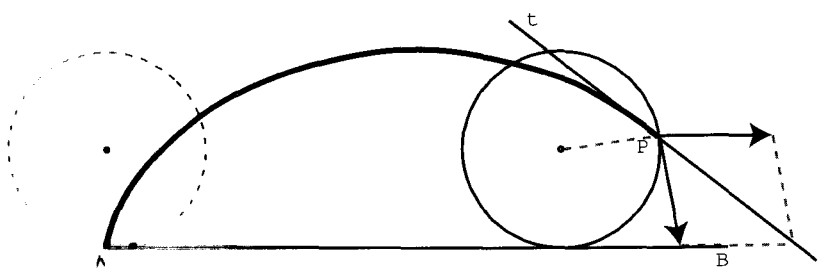

Fig. 12. Determinação da tangente no ponto *P*

René Descartes (1596-1650) também resolve o problema da tangente à cicloide. Embora raramente visitasse Mersenne, correspondia-se frequentemente com ele, participava activamente nas competições que surgiam a propósito de propostas de problemas, em geral de geometria. A resolução de Descartes foi comunicada a Mersenne (que, como habitualmente, se encarregaria de a difundir) numa carta escrita em 23 de Agosto de 1638. Como não podia deixar de ser, é muito interessante e original.

Devido ao seu interesse histórico transcrevemos o texto de Descartes acompanhado de dois desenhos incluídos na carta:

> A primeira destas questões consiste em determinar as tangentes das curvas descritas pelo movimento de uma *roulette* . A isso eu respondo que a linha recta que passa pelo ponto da curva onde pretendo determinar a tangente [fig. 13], e pelo ponto de tangência da *roulette* no momento em que esta descreve aquele ponto, é sempre perpendicular à tangente. De modo que se queremos, por exemplo, encontrar a tangente no ponto *B* à curva *ABC*, descrita sobre a base *AD* por um dos pontos da circunferência da *roulette DNC*, é necessário traçar pelo ponto *B* a paralela à base *AD*, depois traçar um segmento do ponto *N*, onde esta paralela encontra a *roulette*, até ao ponto *D*, onde esta *roulette* é tangente à base, e depois ainda traçar *BO* paralela a *ND*, e por fim *BL* perpendicular a *BO* no ponto *B*, pois esta recta é a tangente que procurávamos.
> Desta conclusão colocarei aqui uma demonstração que é muito curta e simples.

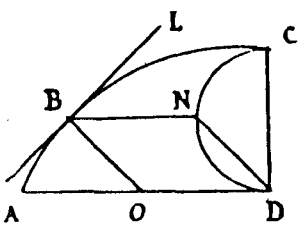

Fig. 13.

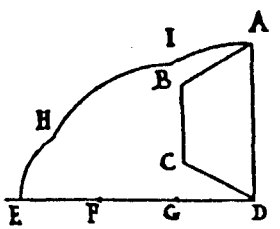

Fig. 14.

Se fazemos rolar um polígono qualquer sobre uma linha recta, a curva descrita por qualquer dos seus pontos será composta por muitos arcos de circunferência, e as tangentes em todos os pontos dos arcos de circunferência cortarão em ângulos rectos as rectas que unem estes pontos aquele [em torno do qual o polígono está a rodar] ponto do polígono que encontra a base quando descreve aquele arco. Posto isto, se considerarmos a roulette como um polígono com um número infinito de lados, vê-se claramente que deve ter a mesma propriedade, quer dizer que as tangentes em cada um dos pontos da curva descrita pela roulette são perpendiculares aos segmentos que unem o ponto de tangência ao ponto da base a que é tangente a roulette no momento em que descreve o dito ponto.

Assim, quando fazemos rolar o hexágono *ABCD* [Descartes apenas mostra metade do hexágono] sobre a recta *EFGD* [fig. 14], o seu ponto *A* descreve a linha curva *EHIA*, composta do arco *EH*, que ele descreve quando o hexágono toca a base no ponto *F* que é o centro de rotação, do arco *HI* cujo centro é *G*, do arco *IA* de que o centro é *D*, etc., por estes centros passam as rectas perpendiculares às tangentes. Ora o mesmo acontece a um polígono com cem mil milhões de lados, e por consequência também à circunferência. Poderia demonstrar esta tangente de um modo mais belo para mim e mais geométrico; mas omito essa demonstração para não ter o trabalho de a escrever pois ela seria um pouco mais comprida.[8]

É possível reproduzir no *Sketchpad* a construção de Descartes. Na figura 15, o hexágono acaba de fazer a "primeira" rotação, em torno do ponto *A*, e vemos o arco descrito por um dos vértices do hexágono. Como se compreende, a tangente num ponto dado sobre o arco de circunferência determina-se unindo por um segmento esse ponto com o centro de rotação *A* e tirando uma perpendicular a esse segmento passando pelo ponto dado. É precisamente o processo de Descartes.

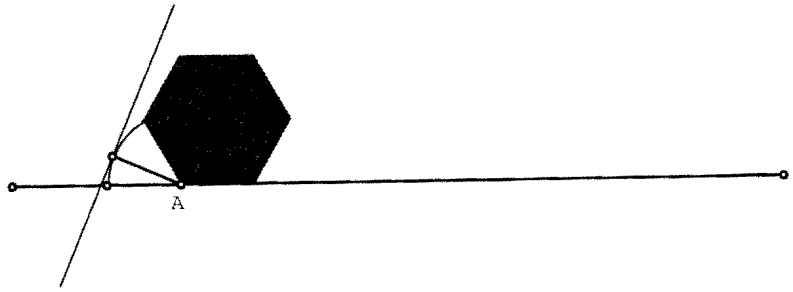

Fig. 15.

O mesmo aconteceria nos outros arcos de circunferência resultantes da rotação sobre outros vértices do hexágono. Na figura 16 mostramos uma "cicloide hexagonal" traçada com o *Sketchpad*.

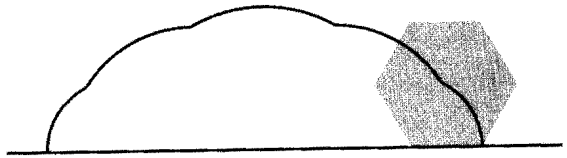

Fig. 16.

Assim, o processo de Descartes é mais um passo no caminho que vinha sendo feito desde Galileu. Este, ao estudar a trajectória de um projéctil, tinha abandonado a ideia da parábola como uma curva estática e passado a considerá-la como a trajectória de um ponto que se move segundo determinada lei. Depois, Roberval e já antes Torricelli, passam a considerar as trajectórias como composição de movimentos, e servem-se desta composição para determinar tangentes a curvas. Descartes introduz o movimento "puro", geométrico, em que as considerações de tempo e portanto de velocidades sobre a trajectória desaparecem. Descartes introduz também a noção de rotação instantânea, infinitesimal.

É ainda Descartes (acompanhado por Fermat) que dá o passo fundamental para a unificação destes processos diversos de determinar tangentes a curvas, ao publicar *La Géométrie*, e ao introduzir o método das coordenadas. No último terço do século XVII, a aplicação do método das coordenadas na "investigação e determinação de tangentes a uma curva geral [definida analiticamente], combinada com os problemas e técnicas relativas ao cálculo de áreas, dará origem ao cálculo como método unificado de análise matemática."

Assim, o estudo das tangentes a curvas, acompanhado dos primeiros elementos do cálculo diferencial — que não abordámos aqui —, poderá constituir uma fonte rica de inspiração para propostas de actividades para o ensino secundário que revelem as profundas conexões da geometria com a álgebra e a análise e contribuam para retirar a geometria do *gueto* a que nos referimos no princípio desta secção.

Que nova abordagem no ensino da geometria?

Como já referimos anteriormente, no ensino da geometria tradicional existe o hábito de partir dos objectos geométricos considerados mais elementares e ficar durante muito tempo — geralmente todo o tempo... — a listar nomes, propriedades, e relações entre esses objectos. Para muitos alunos, a geometria não passa disso: pontos, rectas, posições relativas das rectas, ângulos, tipos de ângulos, triângulos, tipos de triângulos, igualdade de triângulos, semelhança de triângulos, quadriláteros, tipos de quadriláteros, planos, posições relativas de planos, e assim por diante... Obviamente, quando mais tarde se introduzem coordenadas, há que repetir a lengalenga: coordenadas dos pontos, equações das rectas, intersecções das rectas, equações dos planos, intersecções dos planos, e assim por diante... Depois virão ainda os vectores e as equações vectoriais das rectas, dos planos, ...

Terá que ser assim? Julgamos que não. A abordagem da geometria não deveria consistir, nem sequer tomar como ponto de partida, em qualquer nível de escolaridade, a "pequena geometria" atrás descrita. Evidentemente, não há geometria sem pontos, rectas e planos, e na resolução de problemas e nas explorações devem ser tidas em conta múltiplas perspectivas, e entre elas sem dúvida alguma as transformações geométricas, o método das coordenadas e a poderosa linguagem dos vectores. A questão não está aí, mas sim em que a experiência mostra que quando os programas têm por base e estrutura essa "pequena geometria" acabam por tomar como objectivo a aprendizagem desses nomes, desses factos e dessas técnicas instrumentais (coordenadas e vectores), quedando-se por aí. E como esses nomes, factos e técnicas não têm significado em si mesmos, nenhuma geometria é realmente aprendida.

Há, portanto, que *inventar* uma nova abordagem do ensino da geometria. Tomando como premissa que os dois pilares em que assenta a aprendizagem da matemática são a experiência matemática e a reflexão sobre essa experiência, e aceitando, de acordo com esta premissa, que devem ser valorizadas as actividades de exploração e de investigação na sala de aula, pensamos que no caso particular da geometria a nova abordagem poderia estar de acordo com as seguintes orientações gerais:

1. A intuição e a dedução deverão estar presentes ao longo de toda a escolaridade. De acordo com outras opiniões expressas neste encontro, não se deve considerar que o papel da intuição esteja reservado "para os primeiros anos" e o da dedução para os últimos... Comportando a experiência matemática uma componente experimental e tendo além disso a ciência matemática, como característica fundamental, o raciocínio dedutivo, estas duas componentes deverão fazer parte da actividade dos alunos em todos os níveis de ensino. A componente experimental, embora deva apoiar-se na utilização de *software* (ver ponto 5), deve recorrer intensamente a outros materiais, como os manipuláveis, e isto não apenas nos tais "primeiros anos". Em particular, o treino da visualização espacial não pode fazer-se de outra maneira, e deve ser permanente ao longo de toda a escolaridade.

2. A experiência matemática dos alunos, no que diz respeito à geometria, deve tomar como pontos de partida

- os grandes temas da geometria — como a visualização, a representação, a simetria, a forma e a dimensão;
- as conexões da geometria no interior da matemática — nomeadamente com os números, a álgebra e a análise;

- as relações da geometria com a realidade exterior à matemática — geometria e arte, geometria e natureza, geometria e arquitectura, aplicações modernas da geometria, como a robótica e a geometria do *design* gráfico.

3. O importante papel, tradicionalmente reservado ao ensino da geometria, de ajudar à compreensão do carácter axiomático das teorias matemáticas, deve ser prosseguido mas em novos moldes. Actividades de organização local (descritas noutro ponto deste texto) devem ser propostas aos alunos ao longo da escolaridade, naturalmente em consonância com a sua maturidade matemática. Além disso os alunos devem ter oportunidade de realizar algumas actividades em geometrias não euclidianas, e reflectir sobre essa experiência, dada a sua importância na filosofia da matemática e do ponto de vista da cultura científica.

4. A nova abordagem da geometria deve integrar de modo permanente a história da geometria no seu ensino. Não para entreter os alunos a copiar das enciclopédias anedotas sobre dois ou três geómetras ou as suas vidas romanceadas, mas para ajudar à compreensão

- do papel da geometria, ao longo de milénios, na construção da sociedade actual;
- de como conceitos importantes levam longo tempo a ser construídos e do carácter convencional e evolutivo, embora essencial, das definições em matemática;
- do carácter universal da matemática, mas ao mesmo tempo das contribuições que diferentes povos e civilizações deram à sua construção.

5. A utilização de programas de computador dedicados ao ensino da geometria e da Internet é muito importante no ensino actual da geometria e será essencial no contexto da nova abordagem que se propõe. Os programas de computador, em particular os de geometria dinâmica, como o *Geometer's Sketchpad* e o *Cabri II*, são ideais para as explorações e investigações em geometria. Além disso constituem um estímulo para a utilização do raciocínio dedutivo em geometria, na demonstração ou refutação de conjecturas formuladas nas explorações e investigações. Os recursos da Internet são numerosos, e muitos dos que dizem respeito à geometria são excelentes. Mas a rede www não é apenas útil como informação e meio de comunicação. A publicação de explorações e resultados de investigações, em temas de geometria, por alunos e professores, e o seu confronto, seja por iniciativa própria seja como resposta a desafios propostos por projectos educativos[10], poderão vir a constituir um processo privilegiado de construir uma comunidade interactiva de aprendizagem da geometria que promova e apoie a reforma do ensino da geometria.

Notas e referências

1. Ver OECE, *Mathématiques Nouvelles*, Recolha das Intervenções no Seminário de Royaumont de 1959, págs. 31-47.
2. Ver Veloso, E. *Geometria: temas actuais*, IIE, 1998, cap. VII.
3. Idem, pág. 27.
4. Ver Coxford, Arthur et al. *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*. Traduzido pela APM de Geometry from Multiple Perspectives. Lisboa: APM, 1993.
5. Citado por Heath, Thomas L.. *Euclid: The thirteen books of the Elements*. New York: Dover Publications, Inc., 1956, pág. 246.
6. Oliveira, A. J. Franco de. *Áreas e volumes: a pré-história do cálculo*. Curso no ProfMat 94 (manuscrito). Pedidos à APM.
7. Ver Barbin, Evelyne e Gilles Itard. "Le courbe et le droit". In *Histoire des Problèmes, Histoire des Mathématiques*. Lyon: IREM de Lyon, 1992.
8. Citado por Bkouche, Rudolf e Joelle Delattre. "Quand Mouvement et Géométrie se Retrouvent". *In Histoire des Problèmes, Histoire des Mathématiques*. Lyon: IREM de Lyon, 1992.
9. Ver Edwards Jr., C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979, pág. 122.
10. Como por exemplo o *Investiga e Partilha*, do Fórum Pedro Nunes, da APM (url: http://www.apm.pt/apm/forum.htm).