(continuação da página anterior)
deveria responder C mas, como mente, diz A, B ou D.

O Daniel, tal como o Batista, comete dois erros de pensamento que se anulam e deveria responder D. Mas como é mentiroso dirá A, B ou C.

Se a resposta que o professor de Filosofia ouviu fosse A ou B ficava sem saber com quem falava (vários gémeos poderiam responder assim). Se ouviu C, ficou com a certeza de estar perante o Daniel. Se ouviu D é porque o gémeo era o Carlos.

Em resumo, o professor de Matemática encontrou o Batista ou o Carlos. O professor de Filosofia encontrou o Carlos ou o Daniel. Portanto, o gémeo em questão só podia ser o Carlos.

A resolução que mais se aproximou da nossa foi a do colectivo Susana Carreira, Otília Moreirinho, Leonor Cunha Leal e Ana Paula Canavarro. Esta resposta, seguindo os conselhos de Guzman, estava apresentada sob a forma de um protocolo com 3 anexos...

Parabéns às quatro colegas que em breve irão receber o prémio — o livro "Desafios 2" das Edições Affrontamento.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Carnide

Correio dos Leitores

Com muito pesar, vimos noticiar o falecimento, a 20 de Outubro de 1992, de Amélia Folhadela, sócia nº 166 da APM, presença constante e interessada em todas as actividades do núcleo do Porto.

Dela recordamos, apesar de prolongada doença, a sua extraordinária força e vontade de viver e de se manter sempre actualizada e actuante no campo da Educação Matemática, do que é prova a sua inscrição no ProfMat 92, onde infelizmente já não pode estar presente.

Professora efectiva na Esc. Sec. Garcia da Horta, no Porto, onde foi responsável pelo Clube de Matemática da Escola Cultural em 87/88 e orientadora de estágio do ramo educacional da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto de 1988 a 1991. Foi também professora na Faculdade de Letras da Universidade do Porto, monitora de várias acções de formação, e autora do livro *Iniciação à Estatística* para o 11º ano.

Os seus materiais relativos à Matemática (livros, publicações e muitos jogos) foram doados pela família ao núcleo do Porto da APM, o que agradecemos.

Helena Martins
Isabel Quinta
Luís Reis
Teresa Barandela
Núcleo Regional do Porto (APM)

Matemática na Imprensa

SABIA QUE...

■ Um total de 376 presos espanhóis, numa população reclusa de 40 mil, se matricularam durante o ano lectivo de 1991-92 nos estudos universitários que é possível frequentar nas instituições penitenciárias do país vizinho. Destes, 150 fizeram o curso de acesso à universidade e 226 frequentaram cursos superiores. Com matriculam-se em Direito e 202 escolheram letras. O único curso que não suscitou interesse a nenhum preso foi o de matemática.

© PUBLICO

(continuação da pág. 26)

"O papel da investigação no movimento de reforma consiste em fornecer conhecimentos fidedignos sobre aspectos importantes da reforma "(NCTM, 1989b, p.10).

Concluo este texto salientando o facto de que, para que ocorra uma mudança genuína, no que diz respeito à posição da matemática na sociedade, é necessário um esforço considerável para iniciar e realizar efectivamente mudanças permanentes. Sugiro que África aprenda com os outros, especialmente com a abordagem realizada nos E.U.A. de formar um organismo matemático autónomo e que pode angariar os seus próprios fundos. Claro que os E.U.A. não devem ser o único país que deveremos ter em conta na construção do nosso modelo, devemos ter o espírito aberto quanto a isto. Estão os matemáticos e educadores matemáticos africanos prontos para uma revolução?

Referências

Ernest, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. Bristol, PA.: Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (1989a) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989b) *Setting a Research Agenda* Vol. 5. Reston, Va.: NCTM & Lawrence.

National Council of Teachers of Mathematics (1991) *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Simeon Hau
University of Georgia
Mathematics Education Department

Aparecimento dos números negativos e dos complexos a partir da resolução de equações

José Orlando Freitas

Se pensarmos qual o número que satisfaz a equação $x+1=0$, virá $x=-1$. Só com Albert Girard, em 1629, se aceitaram os números negativos como soluções de equações. Este matemático afirmava: "O número negativo em geometria indica um recuo enquanto o positivo indica um avanço." Até Descartes desconfiava destes números, nunca os utilizando na geometria (evitando-os) e chegando a escrever em 1637: "Muitas vezes acontece que as soluções são impossíveis ou inferiores a zero."

Se pensarmos numa solução da equação $x^2+1=0$, será um número ainda mais monstruoso. Podemos pensar em $\sqrt{-1}$ como solução da equação anterior; Euler foi o primeiro matemático a representar $\sqrt{-1}$ por i. Mas, segundo reza a história, o aparecimento dos números complexos deve mais às equações do 3º grau do que às de 2º grau, como poderemos ver já de seguida.

Em 1545 Geronimo Cardano, um matemático e filósofo italiano, publicou um livro intitulado *Ars Magna* (traduzido em inglês por *The Great Art*), no qual descreve um método algébrico para resolver equações do 3º e 4º graus. Foi por esta altura que pela primeira vez a raíz de um negativo surgiu.

Qualquer equação do 3º grau é transformada facilmente numa do tipo $x^3=ax+b$. A solução de Cardano é

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Esta última fórmula é conhecida como Fórmula de Cardano, embora descoberta por Tartaglia (ver *Jornal de Matemática Elementar* nº 107).

Quando esta fórmula é aplicada à equação $x^3=15x+4$, esta fornece o valor $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Cardano afirmava que a "sua" fórmula era inaplicável neste caso.

Para $x^2+1=0$ não existe solução real, para $x^3=15x+4$ podemos, por inspecção, verificar que $x=4$ é uma solução real; de facto, as duas outras raízes também são reais, $-2\pm\sqrt{3}$.

O problema foi resolvido pelo engenheiro hidráulico Rafael Bombelli, cerca de trinta anos depois da publicação da obra de Cardano. Bombelli fez a "feliz conjectura" de que, como os números $2+\sqrt{-121}$ e $2-\sqrt{-121}$ diferem apenas num sinal, o mesmo deveria ser verdade na verdadeira raíz cúbica. Assim, fez

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$$

e

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}.$$

Aplicou a álgebra, chegando a $a=2$ e $b=-1$, e mostrando que

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=$$
$$=\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4.$$

"Bombelli, com esta excelente ideia, deu significado ao *significado*. Este acontecimento assinala o nascimento dos números complexos". (Israel Kleiner, 1988)

Para resolver os aparentes paradoxos das equações cúbicas exemplificadas por este tipo de equações, Bombelli desenvolveu um conjunto de regras com números complexos. As suas regras, na nossa notação, são

Geronimo Cardano (1501-1576)

$(\pm1)i=\pm i$
$(\pm i)(-i)=\mp i$
$(+i)(+i)=-1$
$(-i)(+i)=1$
$(+i)(-i)=1$
$(-i)(-i)=-1$

Também considerou exemptos envolvendo adição e multiplicação de complexos, tais como $8i+(-5i)=+3i$ e $\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{2i}}\right)\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8i}}\right)=\sqrt[3]{8+11\sqrt{2}i}$.

Bibliografia:

Abrantes, Paulo. (1989). *O Novo M7*. Lisboa: Texto Editora.

Kleiner, Israel. (1988). *The story of complex numbers*. Mathematics Teacher 81-7. 583-592.

José Orlando Freitas
Esc. Sec. do Funchal

A EeM em voo de cruzeiro

Eduardo Veloso

Fiquei e ainda estou um pouco perplexo com o convite do Henrique para escrever um depoimento sobre o período em que fui director da revista *Educação e Matemática*. Cada um é como é, e o presente e o futuro são para mim muito mais dignos de atenção que o passado... embora seja disparate, evidentemente, ignorar a importância que ele teve. Mas foi o que foi, não se pode já modificá-lo e daí a minha atitude.

Fui portanto ler de novo as revistas dessa época em que fui director, e vou fazer alguns comentários suscitados por essa leitura.

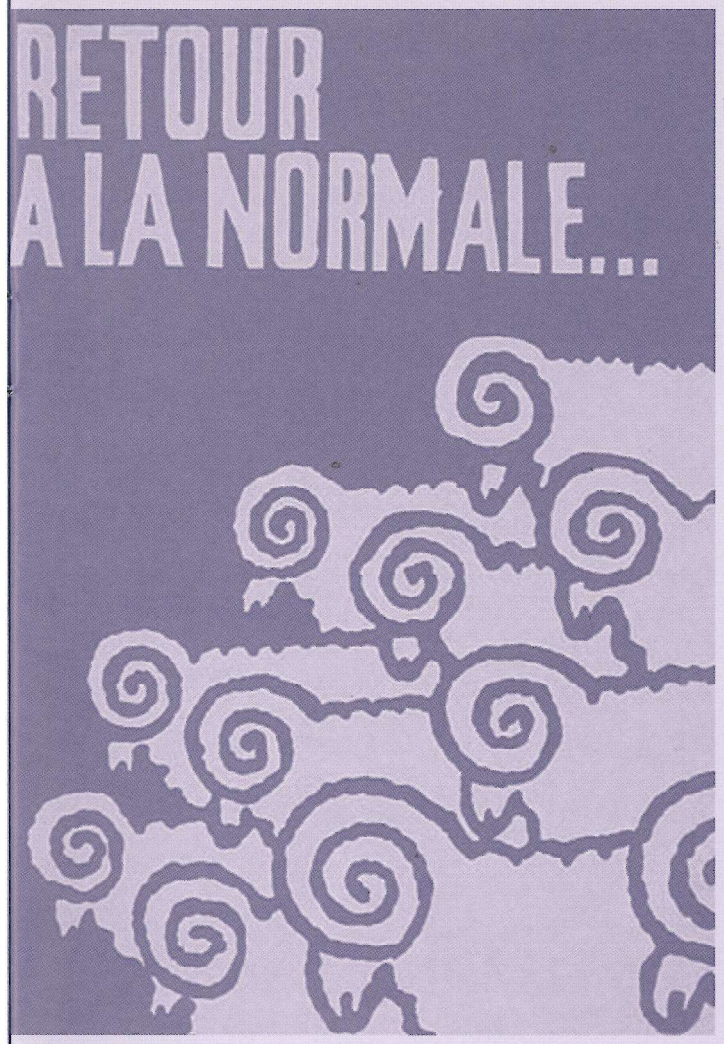
Voo de cruzeiro

Fui navegador e técnico de voo durante 34 anos e recordo perfeitamente a sensação especial que perpassava na cabine de pilotagem quando o avião entrava na fase do voo a que chamávamos "de cruzeiro". Isso significava que as primeiras fases do voo — a descolagem e a subida inicial —, que exigiam de nós uma atenção redobrada, e durante a qual a maioria das eventuais avarias ou problemas técnicos do avião se revelavam, tinha acabado e que estávamos a entrar num longo período de várias horas em que passava para o primeiro plano um trabalho calmo e continuado, sujeito a regras e rotinas bem estabelecidas e (desejavelmente) sem grandes sobressaltos.

A sensação que me deu a releitura referida foi a de que, depois de quatro anos de descolagem e subida optimamente comandada pela Leonor Moreira, e depois da revista ter passado por um período de renovação e "da redacção ter adoptado um conjunto de medidas relativas aos seus métodos de trabalho" (como se escreve no número 16, primeiro em que apareço como director), a EeM estava a entrar em voo de cruzeiro. Nos três anos seguintes, poucas alterações se iriam verificar na composição da redacção e, embora tivessem sido criadas algumas secções, o aspecto geral da revista não variou grandemente.

Regularidade

Sempre me pareceu que um dos pontos fortes da EeM tem sido a regularidade da saída dos seus números. É uma vitória notável para uma revista realizada (excepto nos últimos anos no que respeita à paginação) inteiramente com trabalho voluntário de sócios da APM. O "gabinete técnico" que fazia a composição durante muitos anos era uma pura



invenção, um "private joke"! Não havia qualquer gabinete técnico, apenas o gosto que alguns de nós tínhamos em fazer toda a paginação. Como dizia a ficha técnica, "a preparação da arte final foi executada num Mac II, cedido à APM pela Interlog, SA". Mas ainda me recordo como se fosse hoje do Henrique e do Paulo a colarem linguados de texto e reproduções de figuras em folhas A4 que depois iam ser fotografados em matrizes offset para a impressão da revista. Foi assim durante os primeiros anos! Ao fim de 16 números, havia apenas um atraso de 4 meses, e nota-se um esforço para recuperar esse atraso nos números seguintes (em que passa a vir referida sempre a dáta de publicação). Rapidamente, a revista recuperou o atraso, contribuindo para isso o número duplo temático (19/20) sobre a reforma curricular. O que é para mim notável é nunca mais ter sido preciso recorrer a esse expediente desde aí, e ter havido mesmo a coragem de aumentar a frequência de saída dos números da revista.

Críticas à reforma curricular

O número duplo 19/29, que foi publicado em Fevereiro de 1992, é temático, iniciando uma tradição que se manteve até agora de fazer sair em cada ano um número especial, de maior dimensão e que passou a certa altura a ter mesmo um editor convidado pela redacção (o mais recente, de grande qualidade em todos os seus aspectos, é dedicado ao "tempo", saiu no ProfMat do ano passado e teve como editor o nosso colega Luís Reis).

É muito interessante e significativo perceber, da leitura do número 19/20 e de outros artigos em números posteriores, como a reforma acabou por ser tão limitada e contraditória. Desde as *críticas ponderadas* do editorial de Henrique M. Guimarães e José Manuel Matos até ao meu *radicalismo (Reflexões sobre uma reforma "perdida")* é inegável o desencanto que perpassa nas páginas da revista de uma associação cujos primeiros anos consistiram quase totalmente na luta para que a reforma em preparação incluísse determinadas mudanças no ensino da Matemática. Estas, em grande parte, não chegaram a concretizar-se — nem sequer na letra da reforma, quanto mais na sua aplicação. Ironicamente, no entanto, é frequentemente afirmado que os males do actual ensino de Matemática resultam dessas mudanças por fazer...

De quem é a Revista?

Um aspecto que sobressai numa leitura atenta dos números deste período é a preocupação da redacção sobre a colaboração na revista. Lembro-me perfeitamente que eram muito frequentes as nossas análises sobre quem escrevia artigos, se eram sempre os mesmos ou se espontaneamente sócios da APM tomavam essa iniciativa. De muitas formas esse apelo à colaboração perpassa nos textos da revista. O editorial do número 24 é mesmo provocatoriamente intitulado *De quem é a revista (... da APM)?* e inclui claramente esse apelo:

"Cartas com críticas ou comentários a artigos, pequenos artigos de uma ou duas colunas, relatos de experiências, notas críticas sobre a situação dos professores, protestos em relação à degradação e à insuficiência das instalações escolares: porque razão não aparecem?"

No número seguinte, assinala-se que "chegaram já à redacção contribuições resultantes do apelo feito." A mesma preocupação levou à criação da secção *Pontos de vista, reacções, ideias*. Desconheço análises recentes sobre a colaboração na revista.

Cumpridos três anos de mandato, Paulo Abrantes foi eleito director para um novo triénio, que começou com o número 29. O editorial é da responsabilidade da direcção da APM — o que não era habitual — e intitula-se significativamente: A *Reforma não acabou*. Então como agora! Apetecia-me acabar este depoimento como acabei o meu artigo do número 19/20 sobre a reforma "perdida":

"Resta-nos portanto a consolação de dizer que se deu um pequeno passo, e que a luta continua... Como nos ensinaram os estudantes nas ruas de Paris, em Maio de 68: *ce n'est q'un début, continuons le combat!*