

PROBLEMÁTICAS ASSOCIADAS À IMPLEMENTAÇÃO DE ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO COM A CALCULADORA GRÁFICA

Helena Rocha

Universidade Nova de Lisboa

hcr@fct.unl.pt

Introdução

A possibilidade de rapidamente traçar gráficos de funções, explorando depois as principais características destes, é uma das potencialidades atribuídas à calculadora gráfica. E é esta potencialidade que torna esta tecnologia num aliado particularmente adequado à realização de actividades de investigação envolvendo funções. Torna-se fácil observar um conjunto abrangente de gráficos de funções, procurando relações e formulando conjecturas, enquanto se aprofunda o conhecimento sobre diferentes tipos de funções. Mas este tipo de tarefas, sendo potenciadora de aprendizagens ricas por parte dos alunos, não é necessariamente simples de implementar. A sua gestão é frequentemente complexa para o professor, requerendo a procura de um equilíbrio delicado entre o nível de estruturação da tarefa e a familiaridade dos alunos com este tipo de trabalho, tornando necessária uma atenção cuidada sobre a quantidade de situações analisadas pelos alunos durante o processo de formulação de uma conjectura, exigindo uma atenção sobre a diferença entre conjectura e um resultado matematicamente válido, entre outros aspectos.

As tarefas de investigação

A importância da realização de investigações por parte dos alunos parece ser genericamente reconhecida, quer pelo contributo que estas podem trazer ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos, quer pela experiência que proporcionam relativamente aos processos pelos quais as ideias matemáticas são desenvolvidas e testadas (Yeo, 2008). O que caracteriza este tipo de tarefas parece, no entanto, não ser tão consensual. As investigações são usualmente consideradas próximas da resolução de problemas, embora vários autores lhe apontem diferenças importantes, geralmente associadas ao nível de abertura da tarefa (Ponte, 2005; Rocha, 2011; Yeo, 2008). Segundo Yeo (2008), isto significa que estas são tarefas onde o problema não é

especificado, competindo ao aluno a sua delimitação. Neste sentido, são tarefas que envolvem simultaneamente a colocação do problema e a sua resolução, pelo que é possível que diferentes alunos coloquem diferentes problemas e que, portanto, surjam caminhos divergentes numa turma. Pelo contrário, na resolução de problemas a questão em causa estará definida e, como tal, as vias seguidas serão convergentes em direcção à resolução do problema.

Por seu turno, Ponte e Matos (1992) referem-se à investigação como uma actividade onde os alunos procuram compreender uma situação complexa, descobrindo regularidades, relações, similaridades e diferenças, tendo em vista o estabelecimento de generalizações. Nesta perspectiva, Ponte (2007) entende que os autores consideram que as investigações matemáticas incluem uma grande variedade de situações, que vão desde as tarefas complexas que podem requerer algum tempo para resolver, até às simples questões que podem surgir no decorrer de uma aula. Ainda assim, estas são tarefas com pontos de contacto com a resolução de problemas, que envolvem processos de pensamento complexos e que requerem um grande envolvimento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1992).

Skovsmose (2001) refere-se ao foco que uma investigação coloca sobre a formulação de questões e a procura de explicações por parte dos alunos, enfatizando o que designa por autonomia intelectual, que, inspirando-se em Cobb e Yackel (1998), descreve como a disposição dos alunos para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos. Este autor refere ainda o carácter algo imprevisível que a realização deste tipo de tarefas usualmente assume, abordando os desafios que se colocam ao professor. Ponte (2007) dá igualmente atenção ao papel do professor durante a implementação deste tipo de tarefas. Este autor refere o modelo das três fases para a actividade matemática na sala de aula, introdução, desenvolvimento e discussão, aludindo a estudos que têm procurado identificar problemas específicos de cada uma destas fases. Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) consideram igualmente três fases marcantes numa investigação, destacando o papel do professor no arranque da tarefa e na compreensão por parte dos alunos relativamente ao que se espera deles, a forma como este acompanha o trabalho dos alunos enfatizando o seu envolvimento e autonomia, e o modo como conduz a fase final do trabalho, promovendo uma discussão efectiva das ideias matemáticas envolvidas.

As professoras e as tarefas

Carolina e Catarina são duas professoras com experiências profissionais muito distintas. A primeira tem já um longo percurso no ensino, a segunda está apenas a iniciar a sua carreira de professora. Em comum têm uma reduzida experiência de utilização da calculadora gráfica com alunos e o reconhecimento pelo contributo que as actividades de investigação podem trazer aos seus alunos e à aprendizagem das funções ao nível do 10.º ano de escolaridade.

Carolina

Carolina propôs aos seus alunos três tarefas visando a exploração de algumas famílias de funções. A primeira dessas tarefas era dedicada à função afim, a segunda à função quadrática e a terceira à função módulo.

O estudo da função afim teve por base uma ficha de trabalho e pretendia que os alunos estudassem a influência da variação dos parâmetros da função sobre o aspecto do respectivo gráfico. Na primeira parte da ficha eram dadas três funções, $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $h(x) = -1$, e pedido o preenchimento de um quadro relativo ao domínio, contradomínio, zeros, injectividade, sinal e monotonia de cada uma das três funções. Na segunda parte da ficha era pedida uma conclusão relativamente à influência do parâmetro m sobre a monotonia e sobre o sinal da função $k(x) = mx + b$.

O estudo da função quadrática teve igualmente por base uma ficha de trabalho em que era proposta a análise de quatro famílias de funções: ax^2 , $ax^2 + c$, $a(x-h)^2$, $a(x-h)^2 + k$ (com $a \neq 0$). A proposta de trabalho pedia aos alunos para, dentro de cada família de funções, observarem gráficos de diversas funções à sua escolha para, a partir da análise destes, preencher alguns quadros com as principais características dessas funções.

Para o estudo da função módulo, Carolina elaborou uma ficha de trabalho onde propôs o estudo de três famílias de funções: $|x| + b$, $|x - a|$ e $|x - a| + b$ (com $a, b \in \mathbb{R}$). Nos dois primeiros casos em estudo, a ficha previa que em cada família de funções os alunos visualizassem o gráfico de $|x|$ e o de mais três funções escolhidas pela professora (duas com um valor positivo para o parâmetro e uma com um valor negativo) e que os traçassem no referencial existente na ficha. A partir da observação dos gráficos deviam preencher um quadro indicando o domínio, contradomínio, zeros e coordenadas do

ponto mínimo do gráfico. Depois disso os alunos deviam redigir um pequeno texto explicando qual a influência do parâmetro sobre o aspecto do gráfico das funções daquela família. No terceiro caso em estudo, para além de $|x|$, a ficha determinava que fossem consideradas mais quatro funções com diferentes valores e sinais para os parâmetros a e b , traçados os seus gráficos no referencial existente na ficha e preenchido um quadro onde era pedida a especificação dos valores dos parâmetros e das coordenadas do ponto mínimo do gráfico. Ao contrário dos casos anteriores, aqui não era pedida qualquer síntese relativamente ao efeito dos parâmetros sobre o aspecto do gráfico, sendo antes apresentados alguns gráficos de funções e pedida a respectiva expressão. Os primeiros gráficos apresentados pertenciam a esta última família de funções (com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) e requeriam que os alunos, embora pudessem não ter escrito, tivessem intuído qual a influência dos parâmetros sobre o gráfico da função. Os restantes gráficos pertenciam a famílias de funções que não tinham sido estudadas (como $c \cdot |x|$ ou $|d \cdot x|$ ou $c \cdot |x - a| + b$) e portanto pressuponham que os alunos se aperceberiam disso e que faziam, por sua iniciativa, as explorações que considerassem necessárias.

Catarina

Catarina propôs aos seus alunos duas tarefas visando a exploração de algumas famílias de funções. A primeira dessas tarefas era dedicada às funções polinomiais, incluindo duas partes marcadamente diferenciadas, uma incidindo sobre as funções lineares e outra sobre funções polinomiais do 2.º, 3.º e 4.º graus. A parte dedicada às funções lineares encontrava-se elaborada em torno de seis questões que procuravam ajudar os alunos a organizar o seu trabalho. Assim, começava por ser sugerido o estudo da família de funções ax com a positivo e sem esquecer de considerar números inferiores a 1, sendo depois sugerido que fossem tidos em conta os números negativos. De seguida era proposto o estudo da família $2x+b$ e depois o da família $ax+2$. Depois de pedido o esboço do gráfico de algumas funções lineares concretas (sem recurso à calculadora), era pedida uma conclusão relativamente ao efeito dos parâmetros a e b sobre o aspecto do gráfico das funções. A segunda parte da tarefa tinha uma estruturação muito mais aberta, sendo apenas pedido um estudo do aspecto gráfico das funções polinomiais do 2.º ao 4.º grau através de realização de um estudo semelhante ao realizado para as funções lineares. Como sugestão era apenas indicado que fosse dada atenção à posição

do gráfico relativamente aos eixos coordenados, à existência de diferentes concavidades e ao número de zeros.

A segunda tarefa consistia no estudo da função quadrática na forma $a(x-h)^2+k$. Ao aluno era apenas dito que se pretendia que aprofundasse o seu conhecimento sobre a função quadrática, sendo-lhe sugerido que variasse os coeficientes a , h e k e que “visse o que conseguia descobrir”.

Problemáticas identificadas pelas professoras na implementação das tarefas

Nas conversas que mantive com as professoras antes e depois de cada uma das aulas, estas partilharam comigo algumas das suas expectativas e constatações relativamente a estas aulas. Foi com base nestas conversas e nos acontecimentos das aulas que identifiquei algumas das problemáticas a que dou atenção de seguida.

Estruturação das tarefas

Carolina

As três propostas de trabalho, embora partilhassem a intenção global de proporcionar aos alunos o estudo intuitivo das principais características de determinadas famílias de funções, apresentavam diferenças relativamente ao nível de estruturação. Essas diferenças eram intencionais e correspondiam a opções conscientemente assumidas por Carolina. No caso da função afim a decisão de não deixar aos alunos a escolha dos parâmetros a considerar prendeu-se com o facto de um estudo muito semelhante ter acabado de ser feito no tema Geometria relativamente à recta:

A minha primeira ideia era dar uma [função] e depois agora inventem rectas e (...) comparem o comportamento (...) Mas, quer dizer, nós já fizemos isso com a recta, percebes?

Ao pensar o estudo da função quadrática, elaborou uma ficha menos estruturada, deixando aos alunos a escolha dos parâmetros, pretendendo dar-lhes liberdade para explorarem estas funções. Na opinião de Carolina, esta foi uma aula que correu mal, com os alunos a evidenciarem diversas dificuldades em concretizar a exploração prevista. Estas duas experiências foram então ponderadas por Carolina ao conceber a terceira tarefa de carácter exploratório sobre a função módulo. Optou assim por uma proposta com uma primeira parte mais estruturada, onde orienta os alunos sugerindo-lhes quais as experiências a realizar, e concebendo depois uma segunda parte onde a

necessidade de explorar surge de uma forma implícita. Fundamentou a opção por um início da tarefa mais estruturado com base nas dificuldades que identificou durante o estudo da função quadrática:

Portanto eu agora dei-lhes [as expressões das funções], não deixei ao critério deles irem desenhar funções... Como aquilo [na função quadrática] eu acho que não resultou muito bem...

Mas mencionou a expectativa de uma crescente familiarização dos alunos com este tipo de propostas de trabalho e com a calculadora:

Vamos lá a ver se eles já estão um bocado mais enturmados com estas coisas todas. (...) Quer dizer, à partida eu tenho esperanças que eles nesta altura, como já estão mais familiarizados com a calculadora... e tudo isso (...). Quer dizer, mesmo com esta história da variação dos parâmetros etc., os outros era uma situação assim mais inédita, não é? Agora já não é.

Deu ainda atenção aos registos que pretendia que os alunos fizessem, mencionando a inclusão na ficha sobre a função módulo de referenciais com uma base quadriculada e questionando-se a si própria se também o deveria incluir junto da terceira família de funções cujo estudo propunha ou apenas junto das duas primeiras. Na versão da ficha que me apresentou antes da aula apenas existiam os dois primeiros referenciais, mas quando a entregou aos alunos já incluía o terceiro. Durante a nossa conversa abordou a questão relativamente à qual ainda não havia tomado uma decisão, parecendo ponderar se devia deixar aos alunos a organização dos registos a efectuar ou se era preferível facilitar-lhes a organização e evitar eventuais complicações futuras que pudessem decorrer de um registo menos claro:

Deixei ali aquele espacinho (...) mas depois até estava para alterar e ir pôr o referencialzito como nestas (aponta as duas primeiras famílias de funções na ficha), que às tantas, se eles vão aqui esboçar o gráfico... Tenho receio que neste espaço, fique assim uma coisa muito mal feita.

Catarina

Tal como Carolina, Catarina também considerou importante ter presente que os alunos não estavam habituados a realizar actividades de investigação. Assim, embora pretendesse que os alunos trabalhassem com autonomia e que tivessem liberdade para efectivamente investigar, conduzindo o trabalho em torno dos aspectos que se lhes afigurassem mais importantes, considerou conveniente estruturar um pouco a parte inicial da tarefa:

Acho que é benéfico começar por propor aos alunos uma investigação mais dirigida. Os alunos sentem-se perdidos quando têm que organizar a sua própria investigação. Por isso, acho prudente não começar com actividades de investigação pouco guiadas. Mas não devemos esquecer que um dos objectivos com que estas actividades se realizam está relacionado com o desejo de ter alunos menos dependentes, mais autónomos, mais confiantes e livres para descobrir.

Este é no entanto um equilíbrio delicado, pois se por um lado considera que estruturar mais a tarefa pode de algum modo truncar o trabalho dos alunos e limitar as suas descobertas, por outro lado, deixar a tarefa demasiado aberta quando os alunos ainda não estão preparados para tal pode conduzir a um trabalho mais superficial. E foi precisamente esta a ideia expressa pela professora ao fazer um comentário geral à forma como decorreu a primeira tarefa:

As investigações relativamente às funções polinomiais do 2.º, 3.º e 4.º graus foram mais pobres. Quando são os alunos que guiam a investigação surgem descobertas não previstas, mas também explorações menos desenvolvidas, pois [os alunos] experimentam com um ou dois exemplos e depois passam à frente.

Outro aspecto que a professora considera importante prende-se com os registos que os alunos efectuam. Catarina pretendia que elaborassem um relatório com as conclusões a que chegassem e isto era algo a que sabia que os alunos não estavam habituados. A professora não esperava que os alunos sentissem dificuldades na parte inicial da tarefa, uma vez que esta incluía indicações relativamente ao que se esperava que estes fizessem, mas o mesmo já não acontecia relativamente ao que deviam registar. Ponderando a questão optou por pedir aos alunos que elaborassem um relatório com todas as conclusões a que chegassem, sem definir propriamente o que devia ser incluído nesse relatório. Mais do que dizer aos alunos o que registar, pretendia discutir a questão com eles. Referiu apenas que deviam incluir esboços dos gráficos observados e as conclusões a que tinham chegado. Mais tarde, na discussão, pretendia então incluir comentários às opções de registo que estes tivessem assumido.

Introdução da tarefa

A introdução às tarefas é feita pelas duas professoras enquanto distribuem a respectiva ficha de trabalho aos alunos. No caso de Carolina este foi sempre um momento curto, onde mencionou de forma sintética aquele que ia ser o foco da tarefa. No caso da primeira proposta deste tipo, a professora informou os alunos que iam utilizar a

calculadora para sintetizar algumas ideias sobre umas funções específicas. Referiu que eram funções que já lhes eram familiares, pois embora na altura não lhes chamassem funções tinham estado a estudá-las no tema de Geometria. Expressou assim a sua expectativa que este fosse um trabalho que ocupasse apenas uma parte da aula.

Catarina alongou-se um pouco mais, em particular na primeira tarefa. Abordou as características um pouco diferentes de que este trabalho se ia revestir e referiu especificamente o relatório que pretendia que elaborem e o peso que este ia ter na avaliação. A própria acabou, no entanto, por considerar que não abordou nesta altura alguns aspectos importantes, como o tempo de que os alunos dispunham para a realização da tarefa, o que teve implicações sobre a forma excessivamente descontraída com que os alunos abordaram a tarefa:

Eu não referi a expectativa que tinha quanto à conclusão da tarefa e acho que isso foi mau... Penso que tal facto levou os alunos a um estado de descontração total. Os alunos encararam a actividade de investigação como um trabalho para ir fazendo e não como um trabalho para se fazer e ser entregue quando estivesse concluído, como era o meu objectivo.

O decorrer da aula

O carácter mais aberto das propostas de trabalho colocou algumas dificuldades às professoras relativamente à gestão do trabalho da aula. Surgiram por vezes situações que as professoras não esperavam, umas vezes motivadas pela falta de familiaridade dos alunos com este tipo de propostas de trabalho, outras vezes motivadas por uma certa falta de familiarização com a calculadora gráfica.

Carolina

A primeira proposta que Carolina colocou aos alunos era relativamente estruturada e, apesar dos alunos necessitarem de toda a aula para a concretizar, levando assim muito mais tempo do que a professora esperava, não surgiram propriamente dificuldades na sua realização. A demora na realização da tarefa deveu-se ao facto dos alunos não estabelecerem relação entre o estudo que tinham feito para a recta e aquele que estavam agora a fazer para as funções lineares e, por isso, necessitarem de estabelecer todas as conclusões como se nunca tivessem estudado representações gráficas daquele tipo. A segunda tarefa de investigação já era mais aberta e isso traduziu-se em diversas dificuldades por parte dos alunos, que começaram logo no estudo da família ax^2 , como descreve a professora:

Eu dizia-lhes para eles começarem por $y=x^2$. A minha ideia era que a partir daí eles vissem que: quando o a aumenta, a abertura da parábola diminui; quando a é mais próximo de 0, a abertura da parábola aumenta. Mas eles começaram a atribuir assim valores à toa, sem nenhuma sequência, percebes? E às tantas já não sabiam qual era o gráfico que correspondia a que expressão.

Esta primeira dificuldade estava mais relacionada com a calculadora e com a incapacidade dos alunos em associar cada uma das expressões introduzidas com o respectivo gráfico, do que propriamente com o facto de se tratar de uma actividade de investigação. Nestas circunstâncias, Carolina optou por recorrer a outra representação e pediu aos alunos para verem qual era a imagem de determinado objecto por meio de cada uma das funções, sugerindo que considerassem o valor 1. Os alunos procuraram corresponder à solicitação da professora, fazendo no caderno o cálculo que esta lhes pedia. O processo revelou-se contudo demorado e a professora procurou simplificar o trabalho dos alunos sugerindo-lhes que considerassem $y_1=x^2$ e $y_2=2x^2$. No entanto, a reacção destes diferiu do que esperava:

Quer dizer, pensando eu que eles ali viam, pronto, uma imagem, então no caso do 1, era o dobro da outra. Portanto, se para o mesmo objecto uma imagem era o dobro da outra, o $y=2x^2$ tinha que ser a que tinha uma abertura mais pequena. Eles ficam-me parados e eu não sei! Quer dizer, eu às tantas digo assim: “Meu Deus, mas o que é que se está a passar?”

As dificuldades dos alunos acabaram por fazer com que a professora optasse por lhes indicar que considerassem apenas três funções, uma com $a=1$, outra com $a>1$ e outra com $0<a<1$. Esta opção pareceu não facilitar o trabalho dos alunos, que continuaram a não conseguir ver o efeito do parâmetro como a professora pretendia. Perante a desorientação dos alunos, Carolina acabou por escolher ela as funções e sugerir que todos fizessem a sua análise.

Catarina

As principais problemáticas apontadas por Catarina prenderam-se com a dificuldade dos alunos em perceber verdadeiramente o que é uma conjectura, assim como os cuidados necessários para tentar garantir a formulação de uma que seja matematicamente válida. Os alunos formularam frequentemente conjecturas com base num número extremamente reduzido de observações, o que fez com que estas nem sempre fossem verdadeiras. Ainda assim, como referiu a professora, pareciam não perceber a

importância de ponderarem as afirmações que faziam, mostrando-se mais interessados em apresentar conclusões do que em reflectir sobre estas:

Verifiquei que os alunos faziam dois ou três exemplos e que muitas vezes chegavam a conclusões erradas ou resultados que só se verificavam para os casos que eles estudaram. Alertei várias vezes os grupos para o perigo de estarem a generalizar factos verificados apenas com dois ou três exemplos, mas de pouco serviu. Os alunos sentem necessidade de mostrar que descobriram “uma espécie de regularidade”. Acredito que mesmo que tivessem verificado que aquilo não se passava para um caso, voltariam a escrever, pois para eles foi uma descoberta. Parece que resulta, talvez só não resulte para o outro caso...

Estas dificuldades foram particularmente evidentes na segunda parte da primeira tarefa, quando os alunos iniciaram o estudo das funções polinomiais de grau 2. Nesta altura, os alunos tinham ainda uma reduzida experiência neste tipo de trabalho e já não dispunham de uma orientação relativamente à forma de conduzir a investigação. Como tal, mostraram-se desorientados, solicitando o apoio da professora:

Os alunos ficaram confusos, não sabiam se deviam estudar só polinómios do tipo $y=ax^2$ ou se deviam variar também o b e o c e estudar também os polinómios do tipo $y=ax^2+bx$ e $y=ax^2+bx+c$. Aquilo que eu tentei foi esclarecê-los, mas sem lhes dizer directamente o que fazer... que era o que eles queriam. Disse que tentassem ver se identificavam o efeito de cada um dos parâmetros... E tentei não acrescentar mais, para os deixar ser eles a... Não é fácil... isso não é fácil. (...) Os alunos estão pouco habituados a realizar na sala de aula actividades de investigação e daí advêm muitas das dificuldades sentidas por estes, tornando também mais difícil o papel do professor neste tipo de aula. O professor tem que incentivar, motivar e estimular a investigação dos alunos. E de forma pouco dirigida tentar esclarecer as dúvidas e responder às perguntas colocadas pelos grupos.

E se Catarina se referiu à dificuldade de apoiar os alunos sem dirigir o seu trabalho, mencionou também a dificuldade em gerir a informação disponibilizada pela calculadora. Na sua opinião, os alunos lidam de uma forma completamente acrítica com a máquina e isso é uma fonte de problemas. Com efeito, apontou várias conclusões erradas estabelecidas pelos alunos e que se deveram a observações parciais de gráficos. A ideia que todo o gráfico é sempre visível no ecrã, levou a que alguns alunos considerassem, por exemplo, que o aspecto gráfico de um polinómio do 4.º grau é idêntico ao de um do 3.º grau. Uma situação que pode ser considerada natural para alunos que estão numa fase inicial de utilização desta tecnologia, mas que ainda assim se constitui como mais uma das dificuldades suscitadas por este tipo de actividades.

A gestão que os alunos fizeram do trabalho de grupo é outro dos aspectos apontados por Catarina como exigindo alguma atenção por parte do professor. Na sua opinião os alunos tendem a ter algumas dificuldades a este nível, o que em geral significa que apenas parte dos alunos de cada grupo trabalha:

Nem todos os alunos do grupo trabalhavam. O normal seria passar por um grupo e encontrar um aluno a experimentar uma coisa na calculadora, outro a passar as conclusões que aquele ditava [para o relatório] e os outros dois ou estavam a conversar ou então não faziam nada.

Ainda assim, a professora considerou que esta foi uma situação que foi evoluindo à medida que os alunos ganhavam experiência com este tipo de trabalho e começavam a sentir a importância do contributo de todos para enriquecer o trabalho do grupo.

A discussão e síntese de resultados

Os quadros existentes nas tarefas propostas por Carolina levaram a que todos os alunos seguissem percursos semelhantes no decorrer das actividades, pelo que acabou por não existir uma discussão dos resultados alcançados pelos alunos, mas mais uma correcção dos registos efectuados nos referidos quadros. Apenas a justificação das expressões encontradas para cada um dos gráficos da segunda parte da tarefa dedicada à função módulo suscitou algum envolvimento dos alunos, com alguns deles a apresentar pequenas divergências na abordagem.

Pelo contrário, o carácter aberto da primeira investigação proposta por Catarina permitiu que surgissem relatórios com alguma diferenciação nas conclusões, especialmente no que respeita à investigação em torno das funções polinomiais de graus 2, 3 e 4. Como tal, existia material interessante para efectivamente discutir, pois nem todos os alunos tinham chegado às mesmas conclusões. Catarina não considerou no entanto fácil a gestão desta parte da aula. A opção assumida pela professora foi a de realizar a discussão na aula seguinte àquela em que os alunos realizaram a tarefa (que ocupou quatro tempos lectivos), o que lhe permitiu dispor de tempo para ler todos os relatórios, mas fez com que a discussão ocorresse quando os alunos já não tinham tão presente o trabalho realizado. Ainda assim, a professora considerou que os alunos se envolveram na apresentação e discussão dos resultados:

Durante a discussão os alunos confrontaram opiniões e existiram momentos em que não estavam de acordo, sobretudo em relação ao número de zeros que estas funções tinham que ter ou poderiam ter.

A intenção de Catarina ao propor esta tarefa sobre as funções polinomiais era que os alunos conseguissem ficar com uma ideia do aspecto do gráfico possível para o polinómio de cada um dos graus em estudo, com uma noção intuitiva da influência do coeficiente director relativamente aos limites da função no infinito, com uma ideia da relação do termo independente com a ordenada na origem e ainda com o conhecimento do número de zeros que cada uma das funções podia ter. Esta intenção foi contudo dada aos alunos de uma forma muito genérica, o que fez com que alguns chegassem a conclusões que a professora não esperava. Foi o que sucedeu, por exemplo, com o efeito do coeficiente director na compressão ou expansão do gráfico em torno do eixo dos yy .

Na segunda tarefa de investigação, as explorações realizadas pelos alunos já foram todas bastante semelhantes, o que fez com que não existisse a diferenciação de conclusões necessária para tornar interessante uma discussão. Como a própria professora afirmou, nesta tarefa tratou-se mais de uma síntese dos resultados alcançados do que da sua efectiva discussão.

Uma consequência inesperada

O facto destas actividades de investigação terem sido realizadas numa fase inicial do trabalho com a calculadora gráfica e de terem ocupado algumas aulas, após o que se seguiu um período de trabalho mais focado no cálculo analítico, parece ter levado ao desenvolvimento nos alunos de Catarina de um comportamento surpreendente. Com efeito, durante estas tarefas os alunos parecem ter-se habituado a abandonar qualquer função cuja representação gráfica se revelasse algo difícil de conseguir na calculadora. Uma vez que nestas tarefas todas as funções eram escolhidas pelos alunos, quando mesmo depois de realizados alguns zooms continuava a não ser possível observar uma imagem que parecesse aceitável para o seu gráfico, os alunos simplesmente abandonavam aquela função e optavam por introduzir outra na calculadora. Este era um comportamento aceitável durante a realização daquelas tarefas e, como tal, nunca chamou a atenção da professora. O surpreendente é que estes alunos passaram a adoptar sempre este comportamento, incluindo alguns alunos francamente bons. Mesmo quando estavam perante uma tarefa com uma função específica, se não conseguiam rapidamente algo que considerassem uma boa representação gráfica dessa função simplesmente alteravam a função. E este foi um hábito que as primeiras experiências com a calculadora gráfica parecem ter deixado de tal forma enraizado nos alunos que se

revelou muito difícil de alterar. Algo surpreendente que nos deve fazer reflectir sobre o impacto das primeiras experiências.

Conclusão

As duas professoras escolheram tarefas com diferentes níveis de estruturação que procuraram adaptar às características dos seus alunos. Carolina variou mais o nível de estruturação das tarefas que propôs, para tal teve em conta as características dos alunos e o contacto que estes já tinham tido com o tipo de representação gráfica envolvido. Mas a maior diferença entre as tarefas propostas pelas duas professoras pareceu estar ao nível do tipo de registos que as professoras esperavam que os alunos fizessem. Carolina manifestou preocupação relativamente à forma como os alunos iam organizar os seus registos, optando por lhes disponibilizar estruturas pré-preparadas para o efeito. Catarina valorizou a possibilidade de surgirem conclusões divergentes e, como tal, decidiu não dar orientações muito definidas relativamente ao que esperava como resultado do trabalho dos alunos, deixando a organização da informação registada inteiramente ao seu cuidado.

No decorrer das actividades existiram também diferenças nas opções assumidas pelas professoras. Catarina esforçou-se para não dirigir o trabalho dos alunos, procurando que estes fossem progredindo pelo seu próprio caminho sem, no entanto, deixar de ir chamando a atenção para a importância de reflectirem sobre a validade matemática das ideias que iam tendo. Os alunos de Carolina sentiram-se completamente perdidos durante a realização da primeira tarefa com características mais abertas, tornando necessária alguma orientação por parte da professora. As dificuldades foram, no entanto, tantas, que a professora acabou por ir sucessivamente restringindo o nível de abertura da tarefa.

As opções relativamente à escolha da tarefa e à forma como esta foi conduzida na sala de aula acabaram por ter implicações sobre todo o trabalho desenvolvido. As conclusões alcançadas pelos alunos de Carolina foram semelhantes, permitindo apenas a realização de uma síntese final; já os alunos de Catarina seguiram por vezes caminhos diferentes, tendo alcançado conclusões diferentes, que tornaram não só possível como principalmente interessante a apresentação e discussão final dos resultados alcançados.

As diferenças observadas neste conjunto de aulas vêm não só realçar as dificuldades que os professores enfrentam quando pretendem proporcionar aos seus alunos momentos de investigação, mas também destacar a importância não só das tarefas seleccionadas como também da forma como estas são depois conduzidas na sala de aula. Independentemente do nível mais forte ou mais fraco de investigação envolvido na tarefa, a análise destas aulas parece permitir destacar a importância da tarefa e da sua implementação proporcionarem a existência de caminhos divergentes, pela riqueza que estes podem trazer à discussão e ao envolvimento efectivo dos alunos na formulação e justificação de raciocínios matemáticos.

Referências bibliográficas

- Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.
- Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, 39 (5-6), 419-430.
- Ponte, J., & Matos, J. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In J. Ponte, J. Matos, J. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer.
- Rocha, H. (2011). A prática profissional num contexto de utilização da calculadora gráfica. In *Actas do XXII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.
- Skovsmose, O. (2001). Landscape of investigation. *ZDM*, 33(4), 123-132.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Yeo, J. (2008). Secondary school students investigating mathematics. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 613-619). : MERGA.

Anexos

Carolina

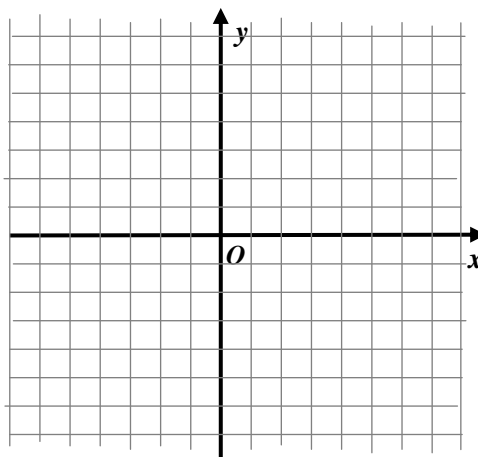
Função quadrática

Caso 1 - Família de funções definidas por $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

Utilizando a calculadora, represente graficamente as funções $y = x^2$ e $y = -x^2$ e em seguida atribua diferentes valores ao parâmetro a , positivos e negativos.

No referencial ao lado esboce algumas destas funções.

Depois de analisar os gráficos construídos, utilize os elementos obtidos para preencher os quadros seguintes:



$f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)				
	Concavidade	Coordenadas do vértice	Equação do eixo de simetria	Abertura da parábola
$a > 0$				Quanto maior é o valor absoluto de a , é a abertura da parábola
$a < 0$				

	$a > 0$			$a < 0$		
Domínio						
Contra domínio						
Zeros						
Quadro de sinais	x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$f(x)$			$f(x)$		
Quadro de variação	x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$f(x)$			$f(x)$		

Catarina

À descoberta das funções polinomiais

Parte I

Hoje vamos estudar algumas funções e seus comportamentos, fazendo para isso a sua análise gráfica. Nesta ficha terás oportunidade de conhecer um tipo especial de funções, podendo contar para este estudo com o auxílio da calculadora gráfica.

Questão 1

Utilizando a calculadora gráfica, visualiza os gráficos das funções do tipo $y=ax$.

Para este estudo, começa por atribuir a a diferentes valores positivos.

Compara por exemplo $a=1$; $a=2$; $a=0,5$; ...

Compara os gráficos obtidos. Regista as tuas conclusões.

Questão 2

Faz agora um estudo semelhante atribuindo a a valores negativos.

Que conclusões podes tirar?

Questão 3

Nas questões anteriores estiveste a estudar funções do tipo $y=ax$, com $a \in \mathfrak{R}$.

Faz agora um estudo semelhante para funções do tipo $y=2x+b$, tomando para b valores por ti escolhidos. O que acontece?

Questão 4

Analisa o que acontece aos gráficos das funções do tipo $y=ax+2$, se atribuíres diferentes valores a a . Regista as tuas conclusões.

Questão 5

Põe agora a tua calculadora de parte.

Observa as funções definidas pelas seguintes expressões:

$$y=5x \quad y=5x-2 \quad y=5x+4 \quad y=-1/5x-2$$

Que resultados esperas obter ao desenhares o gráfico destas funções?

Confirma as tuas conjecturas recorrendo novamente à tua calculadora gráfica.

Encontras mais alguma relação entre estes gráficos?

Questão 6

Nas questões anteriores estiveste a analisar funções dadas pela expressão $y=ax+b$, com a e b números reais.

A partir do que observaste és capaz de dizer qual o significado, em termos de representação gráfica, das constantes a e b ?

Parte II

O gráfico das restantes funções polinomiais que vamos estudar (2.º, 3.º e 4.º graus) também pode tomar diferentes posições relativamente aos eixos ordenados. Faz um estudo semelhante para os diferentes casos (diferentes concavidades, números de zeros,...).

Apresenta as tuas conclusões de uma forma clara e sistemática.