

Determinação experimental do perímetro da Terra e outras propostas de experiências envolvendo o Sol e as suas sombras¹

Seguem-se propostas de actividades, pensadas para serem concretizadas por professores e alunos de escolas localizadas em diferentes pontos de Portugal, e adaptadas de um conjunto de actividades sugeridas pelo prof. Máximo Ferreira, do Centro de Ciência Viva de Constância.

O projecto que estamos a propor pode envolver alunos e professores de duas ou mais escolas, mas deverá incluir escolas bastante afastadas em latitude, para que a diferença entre as latitudes das duas escolas não seja muito pequena, circunstância em que o método adoptado daria resultados muito pouco aproximados da realidade.

Este projecto envolve três partes: I – Determinação da direcção Norte-Sul em cada escola, II – Determinação da altura do Sol ao meio dia solar em cada escola e III – Determinação do comprimento do Meridiano Terrestre. Nas duas primeiras partes são feitas certas construções e medições e na terceira calcula-se o comprimento do meridiano terrestre utilizando os resultados obtidos nessas medições. A precisão com que este comprimento é obtido depende do cuidado e rigor colocados nas medições. Isto levantará permanentemente questões práticas que serão muito instrutivas para os alunos, em geral habituados a problemas preparados de antemão para dar valores “certinhos”.

Supõe-se que a iniciativa parte da escola A, que convida a escola B (e eventualmente as escolas C, D, etc.) para a execução em conjunto do projecto. Vamos considerar para simplificar que a escola A (em Lisboa) convida a escola B (em Viana do Castelo).

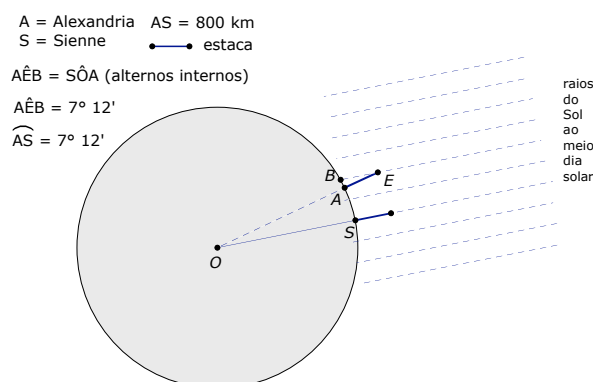
O processo usado nesta proposta inspira-se na determinação do perímetro da Terra realizado por Eratóstenes no terceiro século antes da nossa era.

Eratóstenes (c. 284 -194 a.C.)

Eratóstenes de Cirene, a quem Arquimedes dedicou o seu livro *O Método*, foi um matemático posterior a Euclides de que existem múltiplas referências como filósofo, historiador, geógrafo, astrónomo e poeta. Viveu grande parte da sua vida em Alexandria, tendo sido escolhido para director da famosa biblioteca desta cidade. É conhecido, no domínio da matemática, pelo chamado “crivo de Eratóstenes”, um método para determinação sistemática da sucessão dos números primos.

O seu mais famoso feito científico foi a determinação, com notável aproximação, do perímetro da Terra. É o sucessor de Aristarco de Samos (c. 310-230 a.C.) nas tentativas pioneiras dos matemáticos gregos – numa época em que os conhecimentos da estrutura do Universo eram tão incipientes – de realizar medições astronómicas baseadas em observações feitas com instrumentos ainda tão primitivos. Aristarco, que era defensor do sistema heliocêntrico do Universo, tentou determinar as distâncias da Terra à Lua e ao Sol, bem como as respectivas dimensões.

Eratóstenes observou que em Siene (actualmente Assuã), no solstício de verão (o dia mais longo do ano), ao meio dia solar o Sol não produzia qualquer sombra ao incidir numa vara espetada verticalmente no solo (isto é, o Sol estava no zénite de Siene nesse dia e a essa hora). Isto era confirmado pelo facto do Sol iluminar completamente um poço (vertical) cavado nessa localidade. No entanto, em Alexandria (que se situava no mesmo meridiano de Siene), ao meio dia solar do mesmo dia, o Sol produzia uma sombra ao incidir numa estaca vertical. Tendo em atenção que os raios do Sol podem ser considerados paralelos, o esquema ao lado mostra que a medição do ângulo entre os raios do Sol e a estaca nos dá a distância angular entre Siene e Alexandria. Segundo uma lenda, Eratóstenes enviou um caminheiro para medir a distância entre Alexandria e Siene, que é em unidades actuais de 800 km, aproximadamente. Como o ângulo entre os raios solares e a estaca tinha uma amplitude de $7^{\circ} 12'$, uma simples proporção deu-lhe um comprimento do meridiano da Terra de 40000 km, valor muito próximo do actualmente estabelecido (40072 é o comprimento do equador).



$7^{\circ}12' \longleftrightarrow 800 \text{ km}$
 $360^{\circ} \longleftrightarrow c = \text{comprimento do meridiano}$
 logo
 $c = 40000 \text{ km}$

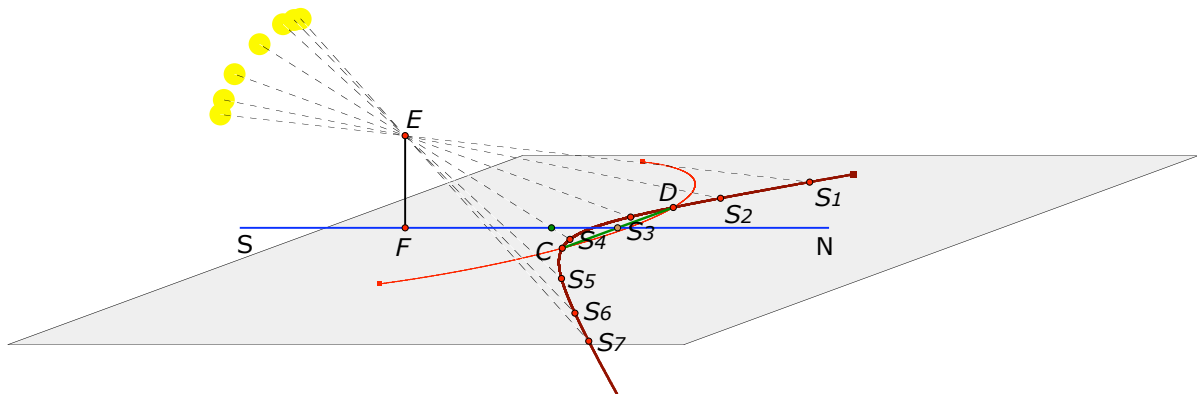
I. Determinação da direcção Norte-Sul

Para esta determinação, é necessário:

- Colocar uma estaca vertical num ponto de um local limpo, plano e horizontal, iluminado pelo Sol durante a manhã e o início da tarde (por exemplo, entre as 10 (10.00) da manhã e as 4 (16.00) da tarde).
- Periodicamente (por exemplo, de 30 em 30 minutos), durante o período de tempo escolhido, assinalar no chão o ponto correspondente à sombra da extremidade da estaca. Obtêm-se desta forma os pontos S_1, S_2, S_3 , etc. (ver figura)
- Depois de assinalados todos os pontos, traçar a curva definida por eles.

Saber que essa curva é um ramo de hipérbole ajuda a traçar a mesma. Para compreender que assim é, deve notar-se que durante um dia, devido ao movimento de rotação da Terra, o Sol parece descrever uma circunferência completa em torno do eixo da Terra. Do ponto de vista matemático, embora a Terra esteja num movimento de rotação em torno do seu eixo, é perfeitamente equivalente supor a Terra imóvel e o Sol a descrever a tal circunferência em torno do eixo da Terra. Assim, os raios solares que produzem as sombras S_1, S_2, S_3 etc. passam pela extremidade da estaca e pela circunferência descrita pelo Sol, logo formam uma superfície cónica – cuja directriz é uma circunferência – e a curva que une os pontos S_1, S_2, S_3 etc não é mais do que a secção pelo plano horizontal dessa superfície. É então necessariamente uma cónica. No caso presente, será uma hipérbole pois em duas horas do dia (ao nascer do Sol e ao pôr do Sol) os raios solares são horizontais (e portanto o plano da secção é paralelo a duas geratrizes da superfície cónica). A figura seguinte mostra a situação descrita e ainda o que há a fazer para determinar a direcção Norte-Sul.

Com centro na base F da estaca traça-se uma circunferência (a vermelho na figura) que intersecta o ramo de

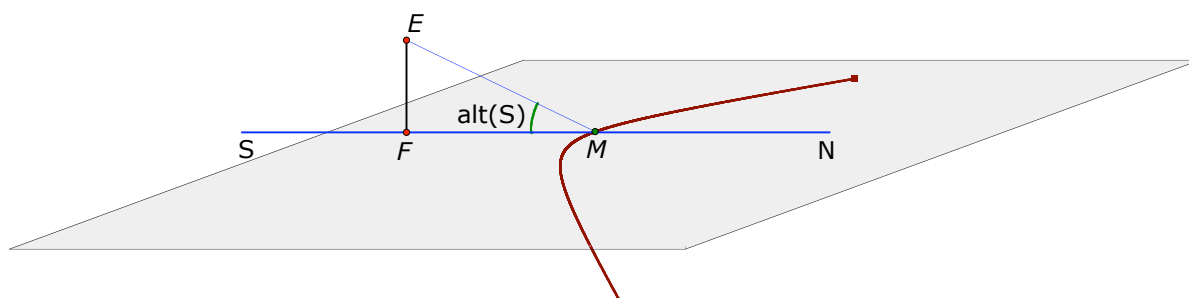


hipérbole nos pontos C e D . Unindo o ponto médio do segmento CD (a verde na figura) com o ponto F , encontra-se a direcção Norte-Sul (a azul na figura) verdadeira (diz-se “verdadeira” para distinguir da direcção N-S magnética, que poderia ser determinada por uma bússola, e que não serviria, naturalmente, para determinar o meio dia solar). Nas nossas latitudes, as sombras estão sempre para norte, e o meio dia solar é a hora a que a sombra da estaca, produzida pelo Sol, coincide com a direcção N-S que determinámos.

II. Determinação da altura do Sol ao meio dia solar

A altura de um astro, num determinado ponto da superfície terrestre, é por definição a amplitude do (menor) ângulo formado pela semirecta com origem nesse ponto e passando pelo astro e o plano do horizonte (plano tangente à Terra nesse ponto). Durante o dia a altura do Sol num determinado local da Terra (excepto nos pólos) está sempre a variar, sendo nula ao nascer e ao pôr do Sol e máxima ao meio dia solar. Traçada a linha

N-S, para obter a altura do sol ao meio dia solar basta esperar pelo meio dia solar e medir esse ângulo, que designamos por $\text{alt}(S)$ na figura seguinte.



O processo de medição do referido ângulo depende naturalmente do nível de escolaridade e da maturidade dos alunos envolvidos no projecto. O Prof. Máximo Ferreira sugere três métodos

a) Um fio preso com um dedo sobre a cabeça de um dos participantes e outra extremidade coincidente com a extremidade da sombra, permitirá medir – com o auxílio de um transferidor – o ângulo correspondente à altura do Sol.

b) A construção de um astrolábio simples (em cartão, por exemplo) constituirá um trabalho manual que culminará com a sua utilização na medição da altura do Sol. (no Kit Latitude Longitude, editado pelo Ciência Viva, encontram-se procedimentos para a construção de vários instrumentos, incluindo o astrolábio. Este pode ser adquirido no Pavilhão do Conhecimento ou através de

http://www.pavconhecimento.pt/loja_livraria/prod_loja/index_02.asp).

c) Alunos mais avançados poderão obter o mesmo ângulo pela aplicação de um método de resolução trigonométrica do triângulo rectângulo, cujos catetos são o observador e a sua sombra, ou o comprimento da estaca vertical e o comprimento da respectiva sombra coincidente com a direcção N-S, o que conduzirá a uma melhor aproximação.



III. Determinação do comprimento do meridiano terrestre

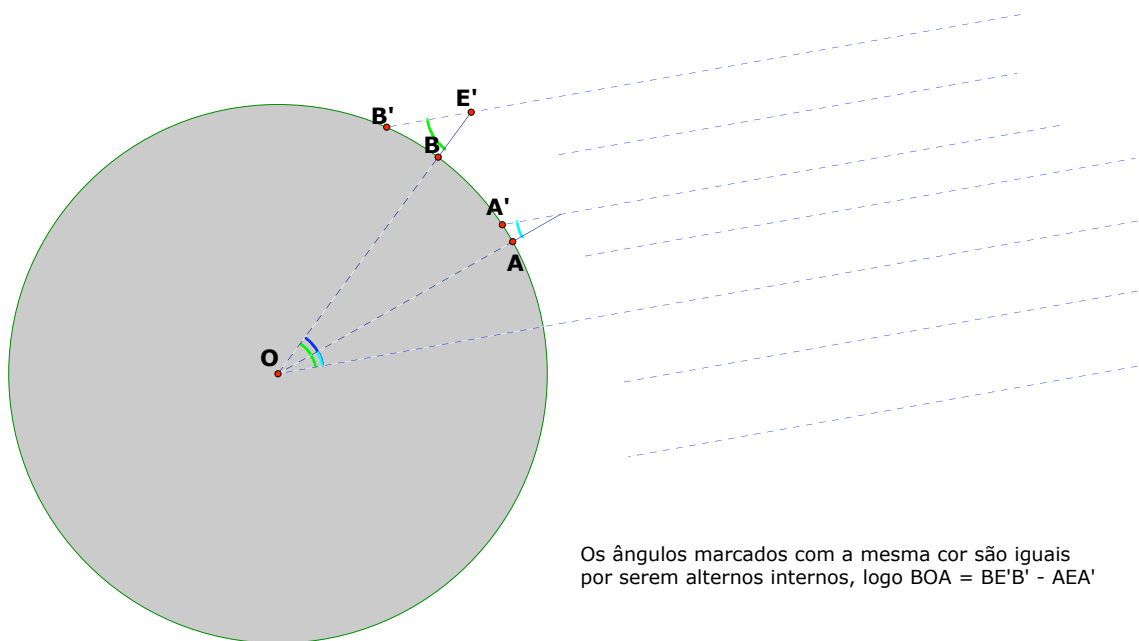
A determinação deste comprimento faz-se utilizando as construções e medições anteriores, nas duas escolas A e B (supostamente com latitudes diferentes, como em Lisboa e Viana do Castelo, por exemplo).

Note-se que o processo que vamos seguir tem pequenas modificações em relação ao método seguido por Eratóstenes:

a) Os dois locais não têm necessariamente que estar sobre o mesmo meridiano (isto é, podem ter longitudes diferentes). Em cada um dos locais foi determinada a direcção Norte-Sul e a hora das medições das alturas do sol poderá ser diferente nos dois locais, pois coincidirá com o momento em que, nesse local, a sombra da estaca estará sobre a linha N-S.

b) Enquanto Eratóstenes escolheu, como um dos locais de observação, Siene, em que ao meio dia solar o Sol estava no Zénite (portanto com uma altura do Sol igual a 90°), no nosso projecto nenhuma das escolas estará nessa situação, e teremos assim que utilizar a diferença das alturas (e não apenas o ângulo de $7^\circ 12'$ medido em Alexandria por Eratóstenes).

Assim, o que há a fazer é medir as alturas do Sol, no mesmo dia, em cada uma das escolas, nas respectivas horas correspondentes ao meio dia solar. Portanto, se em dois locais de latitudes diferentes, ao meio dia solar em cada um dos locais, se executa o procedimento proposto no ponto II, a diferença entre as alturas do Sol é igual à diferença das latitudes dos dois locais, e daí esse valor é a diferença angular, medida sobre um meridiano, entre as duas latitudes. O esquema seguinte mostra claramente essa situação.



Os ângulos marcados com a mesma cor são iguais por serem alternos internos, logo $BOA = BE'B' - AEA'$

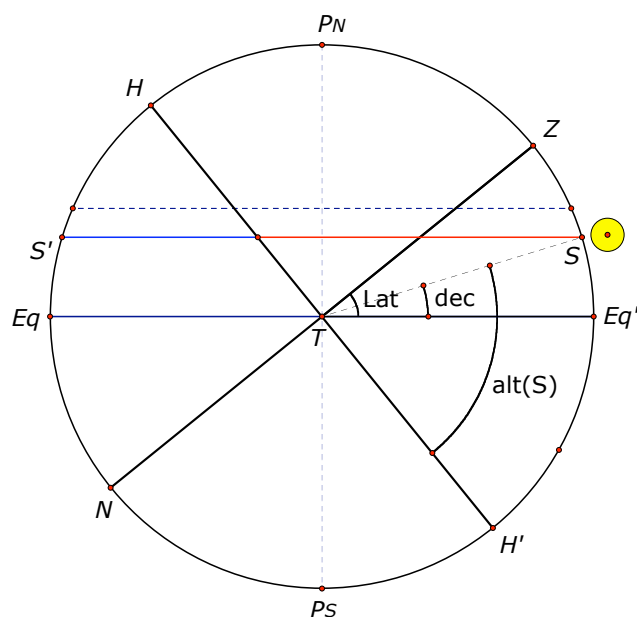
Nesta figura as escolas estão supostamente no mesmo meridiano, e conclui-se imediatamente que a diferença das alturas do Sol (ao meio dia solar, neste caso coincidente nas duas escolas) é igual à diferença das latitudes. Uma explicação um pouco mais elaborada, para o caso das duas escolas estarem em meridianos diferentes, encontra-se mais à frente neste documento.

Conhecida a diferença das latitudes entre as escolas A e B, procura-se a quando equivale essa diferença em distância (por exemplo em km) medida sobre um mesmo meridiano. Esta pesquisa pode fazer-se através de mapas convenientes ou por exemplo no Google Earth, site muito conhecido na Internet. Depois, com uma proporção em tudo semelhante à utilizada por Eratóstenes, determina-se o comprimento do meridiano terrestre.

Nota. A diferença das alturas do Sol ao meio dia solar, em dois locais não necessariamente no mesmo meridiano, é igual à diferença das latitudes.

O esquema ao lado mostra como o conhecimento da altura do Sol ao meio dia solar, associado ao valor da declinação do Sol no dia da observação (que pode ser obtido numa tabela astronómica ou certamente em algum site na Internet), nos permite obter a latitude do lugar.

Neste modelo matemático da esfera celeste, a Terra naturalmente está reduzida a um ponto no centro da esfera celeste, e a esfera celeste está projectada num plano de frente. Os nomes adoptados para os pontos e planos notáveis da esfera celeste são adoptados a partir dos correspondentes pontos e círculos da esfera terrestre. $EqEq'$ é o equador celeste, P_N é o pólo norte celeste, HH' o “nosso” horizonte celeste, etc. Z é o zénite, ou seja a intersecção da vertical do lugar com a esfera celeste, “por cima das nossas cabeças”. Em cada dia, o Sol percorre um paralelo celeste SS' (chamado paralelo de declinação) e a recta TS mantém um ângulo com o equador celeste cuja amplitude é constante e se denomina *declinação*. A projecção da esfera é feita num plano paralelo ao meridiano (celeste) do lugar, e portanto a circunferência na figura é exactamente o meridiano celeste.



Sendo assim, podemos medir na figura a latitude do lugar (lat), a declinação do Sol nesse dia (dec) e a altura do Sol ao meio dia solar, dado que nesse instante o Sol está no meridiano do lugar.

Sendo assim, temos

$lat = 90^\circ - (alt(S) - dec)$ (estamos a supor latitudes em Portugal e declinações positivas).

Portanto a diferença das alturas – mesmo para locais não situados no mesmo meridiano, mas medidas no momento dos respectivos meios dias solares – é igual á diferença das latitudes. As medições têm que ser feitas no mesmo dia, para que a declinação do Sol seja a mesma. Ao longo do ano, devido ao movimento de translação do Sol, a declinação do Sol varia entre (aproximadamente) -23.5° e $+23.5^\circ$.

1. Este projecto foi elaborado, a partir das sugestões do prof. Máximo Ferreira, pela equipa do Pavilhão do Conhecimento do projecto Pencil, e foi revisto pela Associação de Professores de Matemática.