

área), entre as geometrias Euclidiana e Esférica, com base na manipulação de materiais ou utilização de tecnologias. O conjunto das tarefas propostas, para alunos do 1.º ao 12.º anos de escolaridade, pode ser acedido em

<http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino>.

### Notas

- 1 Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado de forma mais precisa por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.
- 2 Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos.

### Referências

- (1) Alexander, James — *Loxodromes: A Rhumb Way to Go*. Mathematics Magazine, Vol. 77, n.º 5, December 2004, pp. 349–356.
- (2) Coxeter, H. S. M. — *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.
- (3) Kline, Morris — *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Volume 3. Oxford University Press, 1972.
- (4) Randles, W. G. L. — *Pedro Nunes e a Descoberta da Curva Loxodrónica, ou como, no século dezasseis, a navegação com o globo não resolveu as dificuldades resultantes do uso de cartas planas*. Gazeta de Matemática, n.º 143, Julho de 2002, pp. 90–97. Tradução de Suzana Metello de Nápoles, revista por João Filipe Queirós, Henrique Leitão e pelo autor de *Pedro Nunes and the discovery*

*of the loxodromic curve, or how, in the sixteenth century, navigating with a globe had failed to solve the difficulties encountered with the plane chart*, Revista da Universidade de Coimbra, Vol. XXXV, 1989, pp. 119–130.

- (5) Rosenfeld, B. A. — *A History of Non-Euclidean Geometry*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of *Istoriya Neevklidovoi Geometrii*. Moscow: Nauka, 1976.

*Nota:* Na página <http://atractor.pt/mat/GeomEsf> encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atrator, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atrator. Para além do texto, no qual se baseia este artigo, esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros são utilizados nas tarefas propostas numa colaboração entre a Associação Atrator e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de <http://www.wolfram.com/cdf-player/>.

As tarefas elaboradas no âmbito da referida colaboração podem também ser acedidas a partir da página do MPT2013 da APM, <http://mpt2013.apm.pt>.

Atrator e Núcleo do Porto da APM

### MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Sendo 2013 o ano de (re)descoberta e divulgação da Matemática do Planeta Terra, propõe-se neste número da E&M, na secção materiais para a aula de Matemática, uma tarefa cujo propósito principal de ensino é a abordagem e exploração de algumas diferenças entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

A tarefa que aqui se apresenta foi concebida para alunos do 3.º ciclo e o seu desenvolvimento requer a utilização de computadores com instalação do software Wolfram CDF Player e do ficheiro `soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf`, que pode ser descarregado de <http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino> ou em <http://mpt2013.apm.pt>. Pressupõe-se que os alunos sejam previamente capazes de identificar os lugares geométricos esfera, superfície esférica e circunferência, conheçam a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo no plano e saibam interpretar gráficos.

Com duração prevista de 90 minutos, a tarefa visa:

- a investigação dos valores entre os quais pode variar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico;
- a análise comparativa entre os resultados obtidos e a propriedade correspondente em Geometria Euclidiana.

Esta tarefa proporciona ainda aos alunos amplas oportunidades de argumentação e fundamentação das suas ideias, assim como de construção de modelos matemáticos elementares.

Resultados da sua aplicação experimental permitem destacar a curiosidade dos alunos face aos resultados observados, a sua vontade de saber mais e a forma como a discussão gerada contribuiu para o reforço dos seus conhecimentos prévios de Geometria Euclidiana.

Destaca-se que além da sugestão de tarefa para o aluno, existem algumas indicações para o professor.

Atrator e Núcleo do Porto da APM

## Geometria do Planeta Terra

### Guião para o aluno

#### I. O Urso

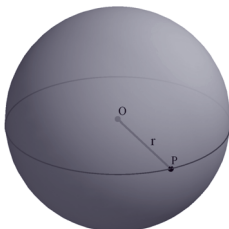
Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direção e caminhou 10 Km sempre em direção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro *How to solve it*<sup>(1)</sup> do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

#### II. Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r > 0$  consideraremos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância  $r$  de  $O$ .



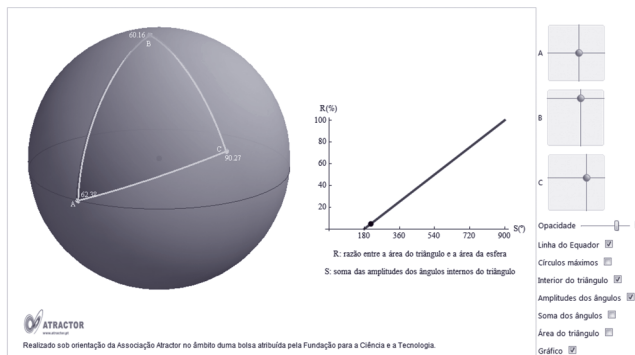
Superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$ .

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimientos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças [surpreendentes] entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

#### III. Tarefa

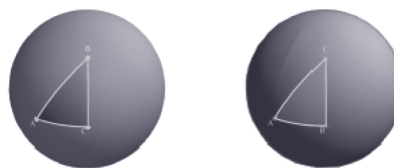
**Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?**

1. Abre o ficheiro *soma\_dos\_ângulos\_de\_um\_triângulo.cdf*. Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa que contém uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis:  $A$ ,  $B$  e  $C$ .



Ficheiro em formato CDF disponível em <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino>.

2. Clica na caixa *Interior do triângulo* e move os pontos através dos cursores  $A$ ,  $B$  e  $C$  que estão à direita de forma a obteres diferentes triângulos.



Três pontos distintos na superfície esférica e três lados (arcos de círculo máximo) que definem dois triângulos, na medida em que definem duas regiões limitadas na superfície esférica. O triângulo  $[ABC]$  que se está a considerar é o triângulo com interior mais escuro.

3. Escolhe uma posição para  $A$ ,  $B$  e  $C$  e clica na caixa *Amplitude dos ângulos*. Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo esférico? Podes clicar na caixa *Soma dos ângulos* para confirmar.

4. Em Geometria Euclidiana, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer é  $180^\circ$ . Será que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico também é constante? Move os pontos de modo a obteres triângulos esféricos diferentes e observa o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de cada um desses triângulos.

5. É possível ter um triângulo esférico com dois ângulos retos? E três ângulos retos? E três ângulos rasos?

6. Entre que valores varia a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

7. Clica na caixa *Gráfico* e observa o gráfico da função que relaciona a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a sua área relativa (isto é, a razão entre a área do triângulo e a área da esfera). O que concluis?

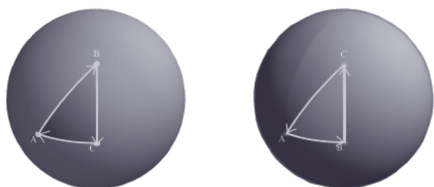
E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a [www.atractor.pt/mat/GeomEsf](http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf).

## Desenvolvimento da tarefa

### Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

1. O ficheiro *soma\_dos\_ângulos\_de\_um\_triângulo.cdf* contém uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis:  $A$ ,  $B$  e  $C$ . O professor pode começar por observar que um lado do triângulo é dado pelo menor arco de círculo máximo definido por dois vértices do triângulo. Clicando na caixa *Círculos máximos* podem-se ver os três círculos máximos que contêm os lados do triângulo.

2. Se se clicar na caixa *Interior do triângulo* e se mover os pontos através dos cursores  $A$ ,  $B$  e  $C$  que estão à direita obtêm-se diferentes triângulos esféricos. O professor deve referir que, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, três pontos distintos na superfície esférica e três lados (arcs de círculo máximo), definem dois triângulos diferentes, na medida em que definem duas regiões limitadas complementares na superfície esférica.

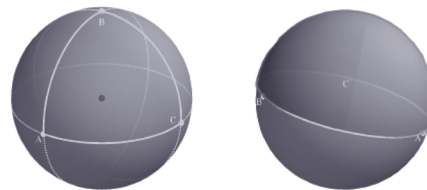


O triângulo  $(ABC)$  que se está a considerar é o triângulo com interior mais escuro definido da seguinte forma: estabelecendo o caminho orientado de  $A$  para  $B$ , de  $B$  para  $C$  e de  $C$  para  $A$ , consideramos a região que está sempre à direita do caminho.

3. Ao escolher uma posição para  $A$ ,  $B$  e  $C$  e clicando na caixa *Amplitude das ângulos*, o aluno deverá observar que a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo é superior a  $180^\circ$ . O professor deverá salientar o facto deste resultado ser muito diferente do correspondente na Geometria Euclidiana.

4. Considerando diferentes triângulos esféricos, o aluno deverá concluir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que  $180^\circ$ . O professor poderá referir que a diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso é denominada por *excesso angular*. Em Geometria Euclidiana, o excesso angular de qualquer triângulo é zero e, em Geometria Esférica, é sempre superior a zero.

5. O aluno deverá mover os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de modo a obter um triângulo esférico com dois ângulos retos, outro triângulo com três ângulos retos e outro triângulo com três ângulos rasos. O professor deverá referir que, no último caso, os pontos são «colineares».



À esquerda: triângulo  $(ABC)$  com três ângulos retos. À direita: triângulo  $(ABC)$  com três ângulos rasos cujos vértices são colineares.

6. O aluno deverá variar os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de modo a considerar triângulos *pequenos* (contidos numa semiesfera) e triângulos *grandes* e observar que a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor entre  $180^\circ$  e  $900^\circ$ .

7. O aluno deverá observar que: quando a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de  $180^\circ$ , a área do triângulo é quase nula; quando a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de  $900^\circ$ , a área do triângulo é próxima da área da esfera. O professor deverá referir que a área do triângulo é diretamente proporcional ao seu excesso angular: quando o excesso angular é um valor próximo de zero (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de  $180^\circ$ ), a área do triângulo é «quase nula»; por outro lado, quando o excesso angular é um valor próximo de  $720^\circ$  (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de  $900^\circ$ ), a área do triângulo é próxima da área total da esfera. Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma das amplitudes dos seus ângulos internos, na esfera, todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

### Notas

- <sup>[1]</sup> Polya, George – How to Solve It: a new aspect of mathematical method. With a new foreword by John Conway. United States of America: Expanded Princeton Science Library Edition, 2004.
- <sup>[2]</sup> Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla Alt. Também podes: rodar a esfera – coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.

Atractor e Núcleo do Porto da RPM