A ANÁLISE DE ERROS COMO METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Helena Noronha Cury, Eleni Bisognin, Vanilde Bisognin
Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Brasil
curyhn@via-rs.net, eleni@unifra.br,vanilde@unifra.br

Resumo

Nesta comunicação, apresentamos os resultados parciais de um projeto de investigação desenvolvido em quatro instituições de ensino universitário do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil, com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), com o objetivo de analisar soluções de problemas de Álgebra, Análise, Geometria e Probabilidades, apresentadas por professores que cursam Mestrado em Ensino de Matemática.

A análise da produção escrita de estudantes, em qualquer nível de ensino, é uma possibilidade de trabalho que pode ser considerada sob o ponto de vista da investigação ou do ensino. Como metodologia de investigação, podemos avaliar o conteúdo das soluções dos estudantes, passando pelas etapas de pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, obtendo informações que nos permitem avançar no conhecimento das causas dos erros.

Visando a exemplificar os procedimentos metodológicos usados nesta investigação, analisamos as respostas de 13 professores a uma questão que envolvia a decisão sobre a verdade ou falsidade de afirmativas, com justificativa para a resposta. As dificuldades apresentadas pelos professores podem gerar obstáculos à aprendizagem dos seus alunos. Entendemos que, a partir da análise de seus erros, é possível criar um ambiente de aprendizagem em que esses mestres sejam desafiados a questionar as certezas matemáticas e contribuir para uma melhor qualificação de sua formação.

Palavras-chave: Análise de erros. Metodologia de investigação. Curso de Mestrado.

Introdução

A análise da produção escrita de estudantes de Matemática é uma atividade que pode ser confundida com os procedimentos de avaliação. No entanto, ainda que possamos encontrar pontos em comum entre essas ações, a análise do que foi produzido pelo aluno não tem como objetivo atribuir-lhe um conceito ou nota. Ao analisar a resolução de um exercício ou problema, pode-se usar os erros cometidos pelos estudantes como subsídio para a avaliação, mas também se pode empregar essa análise no decorrer de uma investigação ou mesmo no planejamento de estratégias de ensino.

Nesta comunicação, apresentamos a análise de erros como metodologia de investigação e exemplificamos com respostas, produzidas por professores que cursam mestrado em ensino de Matemática, a uma questão que envolve resolução de equação.

A análise aqui relatada é parte dos resultados de uma investigação realizada em quatro instituições de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, Brasil, e que recebe apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O objetivo geral da pesquisa é analisar soluções de problemas de Álgebra, Análise, Geometria e Probabilidades e detectar erros cometidos por professores em formação continuada.

A questão apresentada nesta comunicação envolve a lei do cancelamento da multiplicação e as resoluções dos professores mostram que há dificuldades de compreensão dessa propriedade.

O uso da análise de erros em uma investigação

A análise de erros de uma produção escrita é uma atividade que, metodologicamente, se baseia na análise de conteúdo, especialmente se levarmos em conta as conceituações apresentadas em Bardin (1979). Ao apresentar os tipos de documentos possíveis de serem submetidos a tal método, a autora indica, por exemplo, respostas a questionários, testes ou experiências. Dessa forma, as respostas escritas de estudantes a questões de Matemática podem ser objeto de uma análise aprofundada e sistemática.

Bardin (1979) assinala três etapas básicas para o trabalho: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Ao adaptar esse método para a análise das respostas de estudantes (Cury, 2007), nomeadamente dos seus erros, primeiramente fazemos uma leitura “flutuante” de todo o material, para avaliar as respostas. A seguir, as separamos em “totalmente corretas”, “parcialmente corretas” e “incorretas”, fazendo a contagem do número de respostas de cada tipo. Algumas vezes, dependendo do tipo de questão e de resposta, encontramos apenas duas classes, respostas corretas ou incorretas. Nessa primeira fase, já empregamos algum tipo de notação para separar aquelas respostas sobre as quais nos debruçaremos, o *corpus* da pesquisa.

Em um próximo passo, aprofundamos a análise, realizando a unitarização e categorização das respostas. Nesse momento, o pesquisador já produz uma interpretação dos dados, pois estabelece os critérios segundo os quais cria as categorias. Segundo Bardin (1979, p. 119),

> A categorização tem por primeiro objectivo (da mesma maneira que a análise documental), fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos.

Já na fase de tratamento dos resultados, as categorias são apresentadas por meio de quadros com indicação de freqüências e percentagens ou com a produção de um "texto-síntese" que resuma cada uma, incluindo-se, também, exemplos dos erros cometidos. A partir dessa compreensão mais aprofundada, pode-se utilizar os resultados da investigação com fins teóricos ou práticos. Por exemplo, podem ser seguidas as recomendações de Borasi (1996): explorar os erros, juntamente com os estudantes, para fazer descobertas sobre os conteúdos em questão ou apenas tentar remedia-los, criando estratégias de ensino para retomar os conteúdos nos quais os alunos mostram mais dificuldades.

Um exemplo de análise de erros

Para a primeira fase da investigação que está a ser desenvolvida, aplicamos algumas questões a uma turma de 13 professores que freqüentam um curso de mestrado em ensino de Matemática. Nessa primeira fase, tivemos como objetivo discutir os procedimentos da metodologia de análise de erros, para que todos os investigadores da equipe pudessem empregar a mesma sistemática ao analisar as produções de professores em formação continuada. Para exemplificar os procedimentos que empregamos nessa análise, apresentamos as respostas desses professores a uma questão constante de um livro de Cálculo (Stewart, 2001, p. 110), cujo enunciado adaptado é:

Analise se as afirmações a seguir são verdadeiras e justifique suas respostas:

a) $\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3)$

Com essa questão, queríamos verificar se os professores reconhecem, de imediato, que a afirmativa do item “a” só é verdadeira se for indicado que $x \neq 2$ e que a afirmativa do item “b” é verdadeira porque estamos trabalhando com o cálculo de limite, ou seja, quando x tende a 2 sem atingir esse valor.

Inicialmente, lemos todas as respostas dadas. Consideramos que, nesse caso, só havia possibilidade de separá-las em corretas ou incorretas, justamente porque o respondente tinha que decidir sobre a veracidade da afirmativa, para cada item. A seguir, fizemos a contagem do número de respostas certas ou erradas, e separamos aquelas que fariam parte do *corpus*, a saber, as respostas incorretas. Na fase de exploração do material, a partir das unidades de respostas – ou seja, dos tipos de justificativa apresentada - criamos categorias.

Dos 13 professores, apenas dois (15%) acertaram o item “a”, ao responder que a afirmativa é falsa. Já no item “b”, 10 mestrandos (77%) consideraram que a afirmativa é verdadeira. A análise foi feita em duas etapas, visto que há diferenças entre as respostas a cada item. Para exemplificar a forma como empregamos a análise de erros em investigações, apresentamos nesta comunicação apenas as respostas ao item “a”, por ter sido o que causou maiores dificuldades para os professores.

O material sobre o qual nos debruçamos foram as 11 respostas erradas ao item “a”, a saber, aquelas em que os professores consideraram que a equação dada é correta. As justificativas foram dadas, em geral, por meio de cálculos, acrescidos de indicações das propriedades usadas. Essas justificativas foram agrupadas em cinco classes, apresentadas a seguir, com o número de respondentes em cada classe e ilustradas com exemplos. Alguns dos professores justificaram suas respostas de duas maneiras, por isso o número total de justificativas é maior do que o número de respostas.

Classe A: cinco professores fatoraram o numerador da fração algébrica do primeiro membro e cancelaram o termo (x-2) no numerador e denominador, obtendo a igualdade x+3=x+3. Na figura 1, há um exemplo de justificativa para esse procedimento:

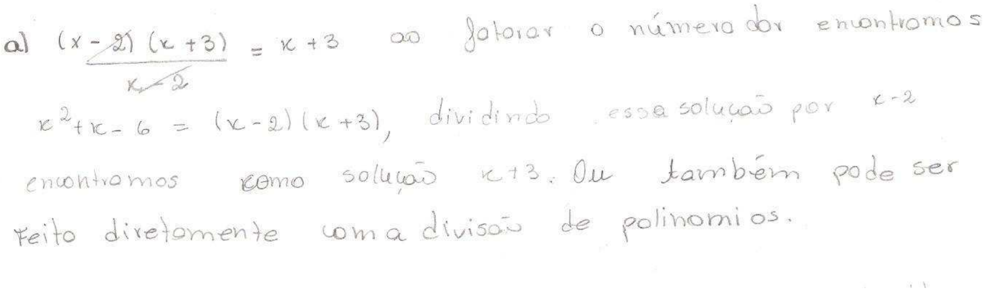
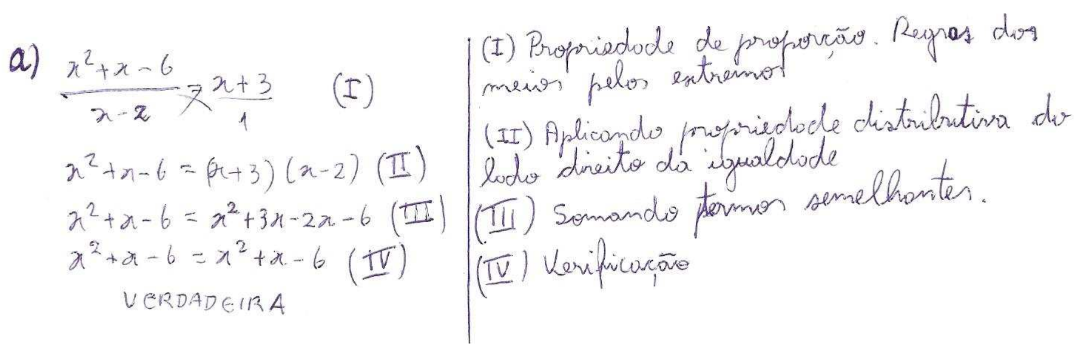

a) $\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3$ ao fatorar o numerador encontramos
$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$, dividindo essa solução por $x-2$
encontramos como solução $x+3$. Ou também pode ser
feito diretamente com a divisão de polinomios.

Figura 1 – Exemplo de justificativa da classe A

Classe B: cinco professores multiplicaram o segundo membro da igualdade pelo denominador da fração algébrica do primeiro membro, reduziram os termos semelhantes e obtiveram a igualdade entre dois polinômios de segundo grau. A figura 2 mostra uma justificativa dessa classe:


a) $\frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{x+3}{1}$ (I)
$x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ (II)
$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6$ (III)
$x^2+x-6 = x^2+x-6$ (IV)
VERDADEIRA

(I) Propriedade de proporção. Regras dos meios pelos extremos
(II) Aplicando propriedade distributiva do lado direito da igualdade
(III) Somando termos semelhantes.
(IV) Verificação

Figura 2 – Exemplo de justificativa da Classe B

Classe C: três professores dividiram o polinômio numerador da fração algébrica do primeiro membro pelo seu denominador e obtiveram quociente igual ao segundo membro e resto zero. Ilustramos a classe com o exemplo da figura 3:

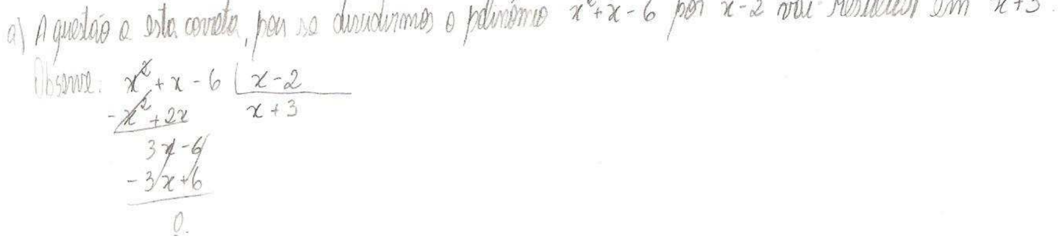

a) A questão a esta correta, pois se dividirmos o polinômio x^2+x-6 por $x-2$ vai resultar em $x+3$.
Observe: $x^2+x-6 \;|\; x-2$
$-x^2+2x \qquad x+3$
$3x-6$
$-3x+6$
0

Figura 3 – Exemplo de justificativa da Classe C

Classe D: um respondente multiplicou o segundo membro da igualdade pelo denominador da fração algébrica do primeiro membro e cancelou o termo x^2 nos dois membros, obtendo a igualdade x-6=x-6.

Além dessas classes, costuma-se indicar em uma última categoria – aqui chamada de classe F – aquelas soluções fora do contexto da pergunta, como, por exemplo, a do professor que escreveu, ao lado do item “a”, a igualdade “2x+1=1” e justificou: “derivando o x, encontrarei zero dividido por um número, o que não existe”.

Ainda que não tenhamos analisado em profundidade as respostas ao item “b” da questão, por não terem se evidenciado maiores dificuldades, apresentamos, resumidamente, os tipos de resposta encontrados. Dez professores consideraram a afirmativa “b” verdadeira e apresentaram justificativas adequadas, ao calcular o limite da expressão do lado esquerdo e concluir que valia 5, o mesmo valor que encontraram para o limite de (x-+3) quando x tende a 2. Dos três respondentes que erraram, um deles declarou que não lembrava o caminho para calcular um limite; um outro professor não soube levantar a indeterminação ao calcular o valor do limite, quando x tende a 2, da expressão do lado esquerdo. O terceiro respondente chegou à indeterminação 0/0, mas considerou igual ao infinito e que, portanto, não podia ser igual a 5, valor que encontrou para o limite da expressão do lado direito. Esse professor também errou o item “a” e sua justificativa insere-se na classe B.

Interpretação dos dados

A interpretação dos dados da investigação é feita a partir das categorias apresentadas e exemplificadas. A fundamentação teórica para essa interpretação pode ser apresentada previamente (*a priori*), ou podem ser buscados, *a posteriori*, autores que auxiliem a analisar os problemas detectados. Neste caso, inicialmente analisamos as respostas e posteriormente buscamos uma possível explicação para os erros.

Primeiramente, ao voltar às classes de respostas ao item “a” e aos exemplos, vemos que, basicamente, os professores fizeram o cancelamento de x-2 sem lembrar da propriedade da multiplicação que estabelece: se xy=xz e x≠0 então y=z. Não havia informação sobre o conjunto numérico envolvido e nem sobre o valor de x. Assim, parece que esses professores não desenvolveram a habilidade de reconhecer propriedades básicas das operações nos conjuntos numéricos ou de reconhecer padrões nas expressões algébricas.

Para interpretar a dificuldade encontrada, buscamos a definição de “expectativa algébrica”, apresentada por Pierce e Stacey (2004, p. 5):

> [...] o processo de pensamento que ocorre quando um matemático experiente considera a natureza do resultado que espera obter como conseqüência de algum processo algébrico (e simbólico). Por exemplo, ocorre quando um matemático olha duas expressões e decide, sem fazer qualquer cálculo ou manipulação explícitos, se é provável que sejam equivalentes.

Em relação ao item “a” da questão proposta aos professores em formação continuada, julgamos que a definição cabe a eles, pois, apesar de não serem matemáticos profissionais, são professores experientes e deveriam estar acostumados a propor aos seus alunos problemas de resolução de equações e saber quando é possível aplicar uma determinada propriedade das operações aos dois membros de uma igualdade.

Pierce e Stacey (2004) esclarecem ainda que a expectativa algébrica envolve a observação de padrões em expressões e a habilidade de explorar os indícios de que esses padrões estão presentes. Esperávamos que os professores, acostumados a trabalhar com expressões algébricas, soubessem reconhecer que a expressão x-2 no denominador de uma fração algébrica exige que seja dado o domínio da variável x para poder decidir sobre sua veracidade ou falsidade.

Assim, nessa investigação constatamos que os alunos desse curso de formação continuada em ensino de Matemática necessitam retomar os conteúdos de Álgebra e Análise, sob um olhar direcionado às suas necessidades como professores de Matemática. Visto que o curso oferece disciplinas de Álgebra, Análise e Geometria, além daquelas relacionadas à metodologia do ensino e às teorias de ensino e aprendizagem, os resultados da investigação nos alertaram para a necessidade de fazer essa retomada e elaborar estratégias de ensino que permitam desenvolver esses processos de pensamento que levam à expectativa algébrica.

Considerações finais

Esta comunicação teve como objetivo principal discorrer sobre a análise de erros como metodologia de investigação em Educação Matemática. Usando resultados parciais de uma pesquisa em desenvolvimento, a análise das respostas e sua categorização mostraram que esses professores não conseguem reconhecer padrões em expressões algébricas e procuram empregar cálculos para comprovar resultados, ao invés de questionar sua existência. Essas habilidades são essenciais para um professor de Matemática e os problemas detectados nos alertaram para a necessidade de retomar conceitos fundamentais de Álgebra ou Análise. Assim, em uma etapa posterior, a análise de erros estará sendo usada para subsidiar estratégias didáticas a serem empregadas nas aulas do curso em questão.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: a Focus on Errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Monitoring progress in álgebra in a CAS active context: symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. *International Journal For Technology in Mathematics Education*, 11(1), 3-11.

Stewart, J. (2001). *Cálculo*. São Paulo: Thomson Learning.