Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação, Instituto Poiltécnico de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Isolina Oliveira

Universidade Aberta
isolina@univ-ab.pt

Resumo. Este artigo discute o conceito de trajectória de aprendizagem, as suas componentes e o seu possível contributo para um ensino da Matemática com compreensão. Relaciona-se este conceito com a construção de sequências de ensino e apresentam-se exemplos de trajectórias de aprendizagem. Por fim, tecem-se algumas considerações e recomendações para a utilização do conceito no desenho de tarefas matemáticas.

Introdução

A investigação sugere que as bases do conhecimento matemático iniciam-se durante a infância e podem ter um desenvolvimento extensivo nos primeiros cinco anos de vida. Para Clements e Sarama (2009) é tão natural para as crianças pensarem pré-matematicamente e depois matematicamente como é usar a linguagem, pois os seres humanos nascem com um sentido de quantidade, com um sentido espacial e uma propensão para procurar regularidades.

As crianças têm o interesse e a capacidade para se envolverem em pensamento matemático e aprendizagem significativa. As suas capacidades vão, muitas vezes, para além daquilo que faz parte das orientações curriculares, em especial na educação pré-escolar. Esta situação propicia múltiplas oportunidades aos educadores e professores mas também lhes coloca muitos desafios. Determinar que tópicos abordar, com que estrutura e que abordagem pedagógica são alguns dos desafios que se colocam aos educadores. Assim as trajectórias de aprendizagem são um poderoso instrumento (Clements &

Sarama, 2009) que envolvem educadores e professores num processo em que interpretam o que as crianças estão a fazer e a pensar e tentam ver a situação do ponto de vista delas. Baseados nas suas interpretações os professores conjecturam o que as crianças podem ser capazes de aprender e abstrair das suas experiências educacionais. De modo semelhante, quando os professores interaccionam com as crianças, também consideram as suas próprias acções do ponto de vista das crianças.

A ideia de "trajectória hipotética de aprendizagem" (Simon, 1995) implica que o professor equacione como o pensamento e a aprendizagem nas quais os alunos se têm de envolver quando participam em certas actividades de ensino se relacionam com o objectivo de aprendizagem escolhido. Simon assinala o carácter hipotético destas trajectórias de aprendizagem, na medida em que os professores devem analisar as reacções dos alunos à luz da trajectória de aprendizagem estipulada de modo a encontrar a trajectória de aprendizagem real que corresponde ao que foi pensado.

O que são trajectórias de aprendizagem

É necessário, em primeiro lugar identificar quais as *big ideas*[1] a trabalhar com as jovens crianças e estabelecer "caminhos de aprendizagem" para desenvolver aquelas ideias. Ao percorrer esses caminhos, as crianças passam muitas vezes através de uma sequência de níveis de pensamento. Estas progressões em desenvolvimento podem basear-se em trajectórias hipotéticas de aprendizagem (Simon, 1995) um constructo pedagógico cuja utilidade é baseada na investigação.

Numa trajectória de aprendizagem são identificados: o *objectivo*, isto é, um aspecto de um tópico matemático que os alunos devem aprender, por exemplo, a multiplicação nos inteiros positivos; uma *progressão no desenvolvimento*, ou percurso de aprendizagem, através do qual os alunos se movem nos níveis de pensamento e desenvolvem compreensão e competência num dado tópico matemático; o ensino, expresso num *conjunto de tarefas*, que os ajuda a caminharem através daquele percurso.

---

[1] Segundo Clements e Sarama (2009), este conceito tem a ver com conjuntos de conceitos e skills que são matematicamente centrais, coerentes e geradores de aprendizagem futura; uma big ideia, é, por exemplo, a contagem que pode ser usada para saber quantos há num dado conjunto.

A discussão à volta destas três componentes apresentada por Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004) ilustra como, na sua perspectiva, as trajectórias de aprendizagem representam um avanço sobre esforços anteriores:

Objectivos. Numa primeira fase de desenvolvimento duma trajectória hipotética de aprendizagem, é identificado o conjunto de objectivos que se pretendem, usando uma diversidade de fontes, que vão da própria Matemática e aquilo que na sua aprendizagem é socialmente importante, aos resultados da investigação em ensino e aprendizagem da matemática, à História da Matemática e resultados da investigação em desenvolvimento das crianças. Para aqueles autores esta especificação de objectivos de aprendizagem tem recebido contributos da investigação que tem sido realizada no âmbito do construtivismo.

A segunda fase do desenvolvimento de trajectórias hipotéticas de aprendizagem procura desenvolver sequências de aprendizagem. Estas são concretizadas em experiências de ensino para avaliar a trajectória hipotética de aprendizagem e como consequência revê-la. Esta nova trajectória de aprendizagem é de novo concretizada em experiências de ensino, avaliada e se necessário revista. Este processo pode ser realizado várias vezes. Este esforço de revisão conduz a uma terceira fase, que alguns autores designam como "a melhor" sequência de ensino e outros preferem designar como "uma experiência de ensino que é relativamente, potencialmente ou hipoteticamente melhor". Esta última formulação traduz melhor a ideia chave que as trajectórias de aprendizagem são hipotéticas e estão sujeitas a constante revisão, podendo depender da turma ou do grupo de alunos.

Tarefas de aprendizagem. Muito do trabalho que tem sido feito à volta das trajectórias hipotéticas de aprendizagem tem como objectivo o desenvolvimento da teoria e do currículo. A investigação sobre as trajectórias hipotéticas de aprendizagem implica, muitas vezes, avaliar uma tarefa, ou conjunto de tarefas, num contexto de ensino, em sala de aula e procurar compreender até que ponto pode ser desenvolvida nesse contexto. Normalmente a uma trajectória hipotética de aprendizagem corresponde uma sequência de tarefas, entendidas como a melhor forma de dar corpo à trajectória definida, também por vezes referida como cadeia de tarefas.

Hipóteses sobre o processo de aprendizagem. A investigação que tem vindo a ser desenvolvida sobre trajectórias hipotéticas de aprendizagem tem ido bastante além dos esforços anteriores para definir sequências de aprendizagem, dado que são baseadas na investigação: (i) os investigadores investigam o desenvolvimento ao longo do tempo e as transições de desenvolvimento; (ii) baseiam-se numa perspectiva construtivista e pesquisam ao detalhe a evolução da aprendizagem significativa; e (iii) muita da investigação é baseada em situações de aula ou em pequenos grupos, logo as teorias de aprendizagens desenvolvidas têm melhor validade ecológica, isto é, estão mais directamente ligadas ao que é esperado numa sala de aula normal. Assim, o trabalho com trajectórias de aprendizagem propicia uma descrição mais rica dos requisitos de conhecimento, de desenvolvimento e das dificuldades das crianças do que os esforços prévios para definir sequências de aprendizagem.

Formalmente, trajectórias de aprendizagem são descrições do pensamento dos alunos quando eles aprendem para atingir objectivos específicos num tópico matemático, associadas a um relacionado percurso hipotético, através de um conjunto de tarefas de ensino organizadas para activar aqueles processos ou acções mentais que se conjecturaram conduzirem os alunos através de uma progressão de desenvolvimento de níveis de pensamento (Clements & Sarama, 2009).

Trajectórias de aprendizagem são constructos pedagógicos úteis, bem como constructos teóricos. O conhecimento de progressões de desenvolvimento – níveis de compreensão e de destreza, cada um mais sofisticado que o anterior – são essenciais para um ensino de qualidade baseado na compreensão quer da matemática quer dos processos de pensamento e aprendizagem dos alunos.

A investigação sugere que o conhecimento dos professores sobre o desenvolvimento matemático dos alunos está relacionado com o aproveitamento escolar dos seus alunos (Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988). A investigação também sugere que, a formação de professores na perspectiva do seu desenvolvimento profissional focada em sequências de desenvolvimento, aumenta não só o conhecimento profissional do professor, mas também a motivação e os resultados dos seus alunos. Como consequência, as trajectórias de aprendizagem podem facilitar o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem para todos os alunos.

Segundo Simon (1995), estabelecer objectivos de aprendizagem proporciona uma orientação para uma trajectória hipotética de aprendizagem, o professor prevê um percurso de aprendizagem e qual o procedimento a seguir de acordo com esse percurso. Diz-se hipotética pois não é possível conhecê-la antecipadamente, antes corresponde a uma "tendência expectável"

(p. 135), a uma previsão que o professor faz em relação ao desenvolvimento que a aprendizagem pode tomar; esta previsão tem a ver com os processos de pensamento e as compreensões dos alunos relacionadas com tópicos matemáticos. Apesar disso, o autor considera que "há uma certa regularidade na aprendizagem individual, que a comunidade de sala de aula limita muitas vezes a actividade matemática a caminhos previsíveis e que muitos dos alunos da mesma sala podem beneficiar da mesma tarefa matemática" (p. 135).

Uma trajectória hipotética de aprendizagem revela-se útil por providenciar um racional que sustenta a escolha de uma certa sequência de ensino sobre um tópico matemático. No planeamento de uma unidade, as escolhas que o professor faz em cada situação de ensino bem como as decisões que toma face às compreensões dos alunos são configuradas pela trajectória de aprendizagem.

Tão importantes como as trajectórias de aprendizagem são as tarefas a propor. Uma descrição do desenvolvimento das crianças é fundamental, mas não suficiente, na medida em que nos diz que tipos de pensamento procurar e desencadear mas não nos diz como facilitar o desenvolvimento das crianças para o nível seguinte. A trajectória de aprendizagem completa explica os níveis de pensamento, as ideias e acções mentais que devem ser construídas, o processo de gerar essas ideias e acções (por exemplo, promover aprendizagem) e tarefas específicas e estratégias de ensino baseadas nesses processos.

Sublinha-se a relação estreita entre uma trajectória hipotética de aprendizagem e as tarefas que são desenhadas, para constituírem a sequência, ou seja, estas dependem das hipóteses que o professor coloca sobre o desenvolvimento conceptual e o percurso de aprendizagem dos alunos. A criação de hipóteses desse desenvolvimento conceptual tem a ver com a natureza das tarefas antecipadas. Com base nestas hipotéticas trajectórias há, então, a possibilidade de definir várias sequências de ensino, em que umas promovem mais efectivamente a aprendizagem do que outras (Baroody, Cibulskis, Lai & Li, 2004).

É importante que as decisões a tomar sobre as alterações de uma dada trajectória de aprendizagem sejam sustentadas e tenham em consideração a meta que se pretende alcançar. Este processo pode ser encarado como um ciclo de ensino onde se inter-relacionam o conhecimento do professor sobre a elaboração da trajectória hipotética de aprendizagem com os objectivos de aprendizagem mas, também, com as tarefas, o(s) processo(s) de aprendizagem e a avaliação do conhecimento matemático dos alunos.

O professor define um plano que antecipa percursos de aprendizagem e adapta-o à medida do que vai acontecendo na sala de aula na interacção com os alunos. A modificação que daí resulta pode incidir sobre os objectivos, o *design* das tarefas e o hipotético processo de aprendizagem. Com efeito, o plano delineado vai sofrendo alterações e sendo adaptado aos alunos das diferentes turmas.

Este modo de ensinar envolve uma rede complexa de conexões e implica ter presente as compreensões dos alunos numa diversidade de cenários. Como sublinham vários autores (ver, por exemplo, Oliveira, 1994; Sierpinska, 1994), as dificuldades conceptuais dos alunos são entendidas como desafios e, uma vez ultrapassadas, ampliam a sua compreensão e o seu desenvolvimento conceptual.

Construir sequências de ensino

Ensinar pode ser entendido como um processo em que, de modo contínuo, se questionam conteúdos e aprendizagens em cenários que podem ser construídos com o objectivo de proporcionar o desenvolvimento das compreensões dos alunos (Ball, 1993).

Identificadas progressões de desenvolvimento para um dado tópico matemático desenham-se sequências de tarefas criando-se ambientes de aprendizagem mais apropriados à aprendizagem dos alunos. Uma sequência de tarefas assenta numa trajectória hipotética de aprendizagem que culmina nas ideias matemáticas que, à partida, foram definidas como uma meta a alcançar. Os alunos apropriam conhecimento que pode ser utilizado como base para desenhar futuras sequências de tarefas. A este propósito, Gravemeijer (2004) sublinha que no desenho de tarefas é necessário ter em conta que estas devem proporcionar a transição de modos habituais de raciocínio dos alunos para modos mais avançados de raciocínio matemático. Neste sentido, é importante (re)pensar o ponto de partida sempre que se elaboram tarefas matemáticas.

Um dos problemas centrais no ensino da matemática é a tensão entre a abertura às ideias próprias dos alunos, aos seus raciocínios e a obrigação de trabalhar segundo metas finais definidas (Gravemeijer, 2004). O professor deve ter em mente a relação entre como é o pensamento e a aprendizagem do aluno quando se envolve na realização de uma dada tarefa e a meta de aprendizagem definida. É neste sentido que Simon (1995) fala em trajectória hipotética de aprendizagem, segundo a qual o professor analisa as reacções dos alunos à luz dessa trajectória verificando se corresponde ao que inicialmente definiu. Com esta informação adapta ou elabora novas tarefas em ligação com a trajectória de aprendizagem revista.

Gravemeijer (2004) perspectiva as "teorias de ensino locais" como uma estrutura de referência para os professores definirem as sequências de tarefas e desenharem as trajectórias hipotéticas de aprendizagem para uma dada turma. Com efeito, para auxiliar os alunos nas aprendizagens matemáticas é necessário conhecer os seus modos de pensamento em relação aos conceitos matemáticos. Analisar a actividade mental dos alunos quando participam numa dada tarefa pode proporcionar informação útil na orientação da revisão da tarefa ou sequência de tarefas.

O método de investigação proposto por Gravemeijer (2004) para desenvolver uma sequência de ensino consiste em três fases: 1) desenvolver um desenho preliminar; 2) concretizá-lo em sala de aula; e 3) realizar uma análise retrospectiva.

A primeira fase implica a clarificação das metas de aprendizagem, a elaboração das sequências de tarefas e respectivos recursos, e um processo de aprendizagem conjecturado (trajectória hipotética de aprendizagem), que antecipe como o pensamento dos alunos pode evoluir quando se trabalham as tarefas em sala de aula.

A fase dois, correspondente à aplicação de uma dada sequência de tarefas, há um ganho pois permite a cada nova aplicação uma revisão e, deste modo, desenvolver uma teoria de ensino enraizada em resultados empíricos locais. Este processo de vaivém de experimentação valoriza o facto das conjecturas poderem ser alteradas de acordo com o raciocínio dos alunos e as aprendizagens realizadas em sala de aula.

Na fase três, resultante do processo interactivo cumulativo entre o desenho das tarefas (sequências) e os dados empíricos que foram recolhidos, analisa-se e reflecte-se sobre as tarefas que na sequência influenciaram as compreensões dos alunos. A sequência de ensino acompanha a reconstrução do conjunto das tarefas que foram pensadas para constituir, à partida, a sequência de ensino efectiva.

Em todo este processo de investigação o professor não pode estar sózinho, deve estar integrado numa equipa que elabora sequências de ensino assente numa teoria de ensino local conjecturada, concretiza em sala de aula e analisa e reflecte com vista à reelaboração dessa sequência.

Esta abordagem implica da parte do professor um bom conhecimento matemático, um à vontade com as ideias fundamentais de um dado tópico: os conceitos, representações, procedimentos e técnicas e a variedade de tarefas e processos matemáticos que podem emergir na sua exploração (Ponte & Serrazina, 2000). Mas contempla, ainda, um outro aspecto que tem a ver com a promoção de alterações em termos cognitivos (Baroody, Cibulskis, Lai & Li, 2004). A especificação de modos mais sofisticados de pensar com a definição de trajectórias hipotéticas de aprendizagem inclui uma orientação e uma meta de aprendizagem. Deste modo, torna-se relevante ter em conta os alunos, o que é significativo para eles, assim como as suas aprendizagens anteriores e actuais.

Trajectórias de aprendizagem e abstracção reflexiva

Em Portugal, desde o início dos anos 90 do século passado foram realizados diversos estudos, particularmente relacionados com a aprendizagem de conceitos, de que se destaca o projecto AMECC (*Aprendizagens em Matemática: estudo sobre a construção de conceitos*) e, mais recentemente, o projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* (Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008). Neste último foram construídas cadeias de tarefas tendo por base a noção de trajectória de aprendizagem. Os resultados destes estudos começam a ter reflexos nos currículos de Matemática e no desenho de tarefas matemáticas, como é sublinhado pelo NCTM (2007) e, também, se observa no actual PMEB (ME, 2007). Neste programa sublinha-se a importância de desenvolver a compreensão matemática relacionado-a com o entendimento do significado dos conceitos, dos algoritmos e procedimentos de rotina, com o reconhecimento de regularidades e de relações e com a análise de um raciocínio ou estratégia matemática.

A literatura existente sobre a educação matemática tem mantido sempre, ao longo de décadas, uma forte linha de investigação sobre os processos de pensamento dos alunos, o que compreendem e como compreendem e a compreensão matemática (ver, por exemplo, Confrey, 1991; Hart, 1981; Hiebert & Carpenter, 1992; Kieren, 1988; Kieren & Pirie, 1991; Sierpinska, 1994), através de estudos onde os alunos são escutados e avaliados nas suas compreensões enquanto resolvem tarefas matemáticas.

Que importância tem investigar as compreensões dos alunos? Que conexão tem este domínio de investigação em educação matemática com o ensino e o desenho de tarefas? Como podem os professores desenvolver conhecimento que lhes permita desenhar tarefas que desencadeiem o desenvolvimento de certos processos de pensamento matemático?

Os resultados dos vários estudos têm contribuído para ampliar a capacidade de antecipar os processos de aprendizagem dos alunos e de elaborar trajectórias hipotéticas de aprenzidagem. Com efeito, ao ter-se acesso, através de investigação realizada, às compreensões dos alunos sobre um dado tópico matemático podem ser desenvolvidas tarefas com as quais se pretende alcançar um plano mais avançado de compreensão. Importa, então, perceber como ocorrem essas progressões de desenvolvimento, como é que concepções avançadas emergem de outras menos avançadas, a partir da descrição do processo de que derivam níveis de conceptualização mais avançados.

A ideia de abstracção está subjacente a esse processo. A noção de abstracção reflexiva que Piaget (1976, 1977) introduziu para explicar os progressos do conhecimento em desenvolvimento, tem sido retomada por vários autores (Dubinsky, 1991; Steffe, 1991; Sierpinska, 1994; Thompson, 2000). Recentemente, Simon, Tzur, Heinz e Kinzel, (2004) partindo dessa noção propõem um mecanismo para a aprendizagem conceptual da matemática que pode constituir a base para o desenho de tarefas matemáticas. A noção de abstracção reflexiva envolve projectar algo do nível precedente para o mais avançado, em função de novos dados e sustentado na reflexão (mais ou menos consciente); mas esta projecção supõe uma reconstrução cognitiva ou reorganização num outro plano.

A questão, tantas vezes colocada pelos professores, sobre como se pode ampliar a compreensão dos alunos ou como podem os alunos progredir num dado tópico matemático pode requerer o conhecimento de como se processa o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Aceita-se, então, que este conhecimento pode contribuir para a compreensão e orientação a prestar na aprendizagem dos alunos.

Simon, Tzur, Heinz e Kinzel, (2004) sublinham a importância da abstracção reflexiva para explicar a aprendizagem de conceitos e procuram torná-la útil na intervenção pedagógica, especificamente no desenho de tarefas. Ao operacionalizarem o mecanismo da abstracção reflexiva relacionam o objectivo, a tarefa, a actividade e os efeitos, a par da reflexão sobre os diversos registos da actividade e os seus efeitos. Esta ligação entre a aprendizagem da Matemática com compreensão e a reflexão sobre as relações actividade-efeito torna possível elaborar conjecturas sobre o tipo de tarefas a desenvolver e, no caso de insucesso na resolução, organizar intervenções futuras e modificá-las se for necessário.

O professor antecipa um certo desenvolvimento conceptual e elabora uma sequência de tarefas possível, em que o aluno trabalha segundo um objectivo.

Neste processo o aluno faz registos dos seus raciocínios e distingue diversos efeitos tendo em conta o modo como cada um deles contribui para alcançar esse objectivo.

Vejamos o exemplo apresentado no *Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número: perspectivas e exigências curriculares*, para o desenvolvimento dos decimais.[2] A cadeia de tarefas foi definida com os seguintes objectivos: construção do sentido de número decimal, construir um sistema de referências e relações numéricas e aprender a raciocinar e calcular utilizando as suas próprias referências e relações.

Nesta sequência proposta para ser realizada por alunos do 3.º ou do 4.º ano de escolaridade, as tarefas estão referidas a contextos ligados ao sistema monetário e às medidas de capacidade, com significado para os alunos, centrando-se, numa fase inicial, na construção de sentido de número decimal. Estes contextos permitem construir referências e relações através de experiências de comparar, de ordenar, de localizar e posicionar na linha numérica.

Na primeira tarefa procura-se, a partir do relacionar alguns sistemas de referência (capacidade, monetário) e respectivas unidades de medida, aprofundar a compreensão das unidades do nosso sistema decimal e das relações conhecidas entre as unidades de medida: 1 l; 0,5 l; 0,250 l; 0,125 l; 1 dl; 1 cl; 1 ml; Compor e decompor números inteiros e decimais em partes iguais e diferentes; Relacionar números inteiros e decimais; Usar números de referência para contar/calcular/operar; Desenvolver o raciocínio proporcional, em particular a relação dobro/metade.

Na segunda tarefa procura-se ainda: Localizar e posicionar na linha numérica; Estruturar, comparar e ordenar para descobrir relações entre os decimais e entre estes e os inteiros; Efectuar cálculos com números decimais. Com a terceira tarefa procura-se: Aprofundar a compreensão das unidades do sistema decimal e das relações entre essas unidades; Estabelecer a ligação entre o nome oral, a representação decimal dos números e o valor posicional dos algarismos que formam um determinado número; Aumentar a prática de leitura e escrita de números decimais; Usar números de referência para contar/calcular/operar; Aumentar a compreensão de decimal usando modelos rectangulares; e, Construir um sistema de referências para números menores que 1.

---

[2] Pode ser vista com detalhe na brochura publicada pela APM (DSN, 2007).

A terceira tarefa da sequência "quadrado da centésima" foi pensada para que os alunos comecem a estabelecer relações entre a décima, centésima e milésima e a desenvolver o cálculo mental.

A esta sequência de tarefas está subjacente uma trajectória hipotética de aprendizagem que parte de um aprofundamento das unidades do sistema de numeração decimal e das relações entre elas, quer com números inteiros quer com números decimais, utilizando números de referência, para as unidades de medida de capacidade (1.ª tarefa), para o dinheiro (2.ª tarefa) e também o posicionamento na linha numérica. Com a 3.ª tarefa pretende-se estabelecer uma ligação entre o nome oral, a representação decimal dos números e o valor posicional dos algarismos que formam um determinado número.

Neste projecto para a elaboração da sequência de tarefas foram objecto de discussão os objectivos pretendidos com a cadeia e como é que se espelhavam em cada uma das tarefas e a progressão preconizada para a aprendizagem dos alunos. Esta sequência de tarefas foi depois experimentada numa turma do 3.º ano de escolaridade (no 3.º período do ano lectivo) e a partir dessa experimentação a sequência foi revista.[3]

O ciclo de desenvolvimento em cada tópico envolve a construção de uma sequência de tarefas sustentada numa hipotética trajectória de aprendizagem. Esta é antecipada, registada e é com base nela que a sequência é elaborada. A aplicação em sala de aula é acompanhada de análise posterior aos efeitos em termos dos processos de resolução dos alunos.

As tarefas são muitas vezes construídas, colocando questões acima do actual plano de operar do aluno, exigindo que se envolva activamente na reformulação da tarefa ou nas suas estratégias de solução, muitas vezes com os seus pares e com a orientação do professor. Numa primeira fase os alunos usam as concepções anteriores sobre como realizar a tarefa; numa fase posterior de reflexão a comparação dos diferentes registos disponíveis (e, portanto, diferentes concepções) permite a abstracção das relações entre a actividade e os efeitos que constitui um primeiro passo para o desenvolvimento de uma nova concepção (Simon, Tzur, Heinz & Kinzel, 2004). Neste sentido interessa que as tarefas a introduzir no contexto de sala de aula sejam desafiantes do ponto de vista cognitivo e integradas numa sequência que tenha subjacente uma certa trajectória de aprendizagem.

A importância da reflexão na aprendizagem tem sido sublinhada por diversos autores (ver Baroody, Cibulskis, Lai & Li, 2004). Por exemplo, na

---

[3] Podem ver-se na brochura vários percursos seguidos pelos alunos.

utilização de materiais manipuláveis em sala de aula a investigação evidencia que os modelos são úteis se os alunos reflectem no seu uso e o relacionam com conhecimentos anteriores.

Este modo de perspectivar a aprendizagem assente na reflexão sobre as relações actividade-efeito e de intervir pedagogicamente requer da parte do professor uma atitude de investigação sobre a sua prática. Um professor investigador (Serrazina & Oliveira, 2002) que atribui uma importância central ao desenho das tarefas, apoiando-se nas compreensões dos alunos, as quais pesquisa através de um processo contínuo entre a recolha de dados e a criação de hipóteses. Construir uma sequência de ensino contempla, então, a definição de uma trajectória hipotética de aprendizagem, onde o professor vai ampliando o seu conhecimento em simultâneo com o desenvolvimento conceptual dos alunos.

Exemplos de trajectórias de aprendizagem

Algumas das experiências que originaram os textos incluídos neste livro iniciaram-se com o desenvolvimento de uma trajectória hipotética de aprendizagem que foi depois experimentada com uma turma, e feita a análise do seu desenvolvimento. Por exemplo, João Almiro descreve no seu texto a trajectória de aprendizagem que desenvolveu com os seus alunos do 7.º ano de escolaridade para trabalhar o tópico "Triângulos e quadriláteros". Nesse sentido, começou por clarificar os objectivos pretendidos, a forma como construiu a sequência de tarefas e o que pretendia com cada uma, de modo a que a sua realização pelos alunos correspondesse a uma progressão na aprendizagem. O artigo analisa posteriormente, através das evidências recolhidas, a aprendizagem efectiva realizada pelos alunos, bem como as dificuldades sentidas e as alterações que teve necessidade de fazer na sua planificação inicial, nomeadamente no que se refere ao tempo necessário para a realização de cada uma das tarefas.

Também Teresa Marques e Idália Pesquita enquadram o estudo apresentado no seu artigo numa trajectória de aprendizagem centrada no subtópico Equações do 2.º grau a uma incógnita. Definiram os objectivos específicos da trajectória bem como a sequência de tarefas que designam como um conjunto de quatro tarefas para trabalhar aquele subtema, tendo definido com clareza os objectivos pretendidos com cada uma das tarefas e o seu contributo para o objectivo global. Para a elaboração do seu artigo seleccionaram dois problemas que, na apresentação das autoras, constituíram parte da última tarefa da sequência, que tinha como objectivo a mobilização de conhecimentos de equações do 2.º grau a uma incógnita em contexto semi-real e também o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e de comunicação na sala de aula.

Laura Bandarra e Maria Sofia Alves desenvolveram com as suas turmas do 8.º ano uma trajectória de aprendizagem com o objectivo de desenvolverem o pensamento algébrico dos seus alunos. Numa primeira fase pretendiam que os seus alunos explorassem tarefas centradas na "algebrização" de problemas aritméticos, numa segunda fase, procurando estabelecer conexões entre os vários temas da matemática e com a utilização da tecnologia pretendiam levar os alunos à manipulação simbólica com compreensão.

Em qualquer dos casos a definição da trajectória de aprendizagem obrigou o professor a identificar o objectivo pretendido, bom como o contributo das diferentes tarefas para esse objectivo. Para além disso, em cada caso, o professor identificou previamente o hipotético caminho de progressão que os alunos seguiam ao se envolverem na sequência de tarefas propostas. A análise posterior dos resultados obtidos permitiu definir a trajectória real seguida pelos alunos.

Considerações finais

O constructo "trajectória de aprendizagem hipotética" tem sido interpretado e aplicado de modos diversos, sendo importante continuar a discutir e a clarificar as suas significações. Este constructo tem origem em certas concepções de aprendizagem e ensino e curriculares que consideram central aprender com compreensão. A compreensão envolve a actividade do indivíduo na construção do conhecimento e os actos de compreensão estão ligados por vários raciocínios (relações, explicações, validações, entre outros). Perante uma dada tarefa matemática admite-se que há compreensão se, na sua resolução, o processo inclui um certo número de actos significativos, nomeadamente actos que ultrapassam obstáculos específicos dessa tarefa matemática (Sierpinska, 1994). Consistente com esta perspectiva, o campo de investigação curricular que prioriza o ensino e a aprendizagem enquadra as abordagens que incluem o desenho de uma dada sequência de ensino, englobando um conjunto de tarefas, conectada com uma trajectória hipotética de aprendizagem que tem a ver com o pensamento e aprendizagem dos alunos num tópico matemático específico. Através da investigação devem ser identificadas tarefas que promovam a aprendizagem efectiva dos alunos. Essas tarefas são constituintes de uma sequência de ensino, sequência que não sendo o único percurso para a aprendizagem é uma hipótese a praticar em sala de aula com a possibilidade de ser revista. Este processo foi trabalhado no projecto Desenvolvendo o sentido do número referido anteriormente.

As considerações teóricas aqui desenvolvidas aplicam-se na análise do pensamento e aprendizagem dos alunos, mas também na caracterização do ensino e de programas de desenvolvimento profissional que suportam a aprendizagem com compreensão. Estabelece-se, assim, a relação entre o desenvolvimento profissional dos professores orientado para as aprendizagens dos alunos e o desenvolvimento dos professores como pessoas que aprendem. Neste cenário, quais os saberes necessários ao professor que ensina para a compreensão? Os professores precisam conhecer e dominar a estrutura das ideias e das práticas matemáticas, das trajectórias de aprendizagem que os alunos parecem seguir, das tarefas e ferramentas capazes de abrirem possibilidades às aprendizagens efectivas, do tipo de apoio que pode suportar o envolvimento dos alunos e, ainda, das normas da sala de aula (Carpenter, Blanton, Cobb, Franke, Kaput & McClain, 2004). Os professores envolvem-se na aprendizagem seguindo os mesmos processos de que se socorrem para ampliar o seu conhecimento e aprender novas ideias, gerando-se uma base para um desenvolvimento contínuo. Desenvolvem um sentido de identidade onde assumem que podem gerar conhecimento como fazendo parte da sua prática profissional.

Este trabalho em que o professor questiona a sua prática profissional não se faz de modo isolado, como sublinham Serrazina e Oliveira (2005). As comunidades profissionais são fundamentais na sustentação do processo por criarem um ambiente propício à partilha de conhecimento sobre o pensamento matemático dos alunos e à construção de sequências de tarefas matemáticas conducentes a um ensino efectivo e, também, por permitirem a construção de um suporte social e emocional para lidar com a incerteza. Foi isso que aconteceu com a maioria dos projectos que deram origem aos textos incluídos neste livro e que tiveram como ponto de partida a identificação de uma sequência de tarefas para trabalhar um dado tópico matemático.

Referências

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces and Twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg

(Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 157-196). Hillslade, NJ: Lawrence Erlbaum.

Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M-L., Li, X. (2004). Comments on the Use of Learning Trajectories in Curriculum Development and Research. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Thinking and Learning* (pp. 227-260). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Carpenter, T. P., Fennema, E., H.,Peterson, P. L. & Carey, d. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of tudents' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 385-401.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Carpenter, T. P., Blanton, M. L., Cobb, P., Franke, M. L., Kaput , J., & McClain, K. 2004). *Scaling Up Innovative Practices in Mathematics and Science*. Research report, national Center for improving student learning and achievement in Mathematics and Science. Disponível em http://www.wcer.wisc.edu.ncisla, em 13/12/2009.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). Learning trajectories in early mathematics – sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of language and Literacy Development* (pp. 1-7). London, ON: Canadian Language and Literacy Research. Disponível em 13/12/2009 em http://literacyencyclopedia.ca/pdfs/topic.php?topld=270)

Confrey, J. (1991). The Concept of Exponencial Functions: A Student's Perspective. In L.P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp. 124-157). London: Springer-Verlag.

Dubinsky, E (1991). Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. In L.P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp. 160-187). London: Springer-Verlag.

Equipa do Projecto Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares (2007). *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares* (Volume II). Lisboa: APM

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Thinking and Learning* (pp. 105-128). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hart, K. (1981). *Children´s understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 62-80). Hillslade: Laurence Erlbaum Associates.

Kieren T. E. & Pirie, S. (1991). Recursion and the Mathematical Experience. In L.P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp. 78-100). London: Springer-Verlag.

Mousley, J. Sullivan, P. & Zevenbergen, R. (2004). *Alternative Learning Trajectories*. Disponível em 10/12/2009 em http://www.merga.net.au/documents/RP442004.pdf

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Original publicado em 2000, em inglês. Lisboa: APM.

Oliveira, I. (1994). *O conceito de número racional em alunos do 6º ano de escolaridade: estratégias e dificuldades conceptuais*. Lisboa: APM.

Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In APM-GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Piaget, J. (1976). *Psicologia e Epistemologia - Para uma teoria do conhecimento*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Piaget, J. (1977). *O Desenvolvimento do Pensamento. Equilibração das Estruturas Cognitivas*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). Didáctica da Matemática do 1º ciclo. Lisboa: Universidade Aberta.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática. In APM-GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 35-62). Lisboa: APM.

Steffe, L. P. (1991). The Learning Paradox: A Plausible Counterexample. In L.P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp. 26-42). London: Springer-Verlag.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for research in Mathematics Education. Vol. 26*(2), 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a Mechanism for Conceptual Learning: Elaborating the Construct of Reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 35*(5), 305- 329.

Thompson, P. W. (2000). Didactical objects and didactical models in radical constructivism. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 191-212). Dordrecht: Kluwer.