



As cartas mal distribuídas

O Augusto pegou num baralho de 52 cartas. Entregou um montinho delas à Berta, outro à Cristina, mais um ao Domingos, ficou com algumas para ele e deixou as restantes em cima da mesa.

– Não temos todos o mesmo número de cartas – reclamou a Berta.

– Não faz mal – retorquiu o Domingos. – Se o Augusto dividir igualmente metade das suas cartas entre a Berta e a Cristina, depois a Berta fizer o mesmo com a Cristina e o Augusto e, finalmente, também a Cristina dividir igualmente metade das suas cartas entre o Augusto e a Berta, todos ficaremos com o mesmo número de cartas.

Quantas cartas tinha cada um inicialmente e quantas estavam em cima da mesa?

(Respostas até 15 de Julho)

Enormes potências

O problema proposto no número 75 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O número 7 elevado a 7 elevado a 7 elevado a 7 é enorme. Quais são os seus dois últimos algarismos?

E quais são os dois últimos algarismos de 6 elevado a 6 elevado a 6 elevado a 6?

Que aconteceria se usássemos outros quatro números iguais, de 2 a 9?

Por onde andam os entusiastas da resolução de problemas? É que para este, só recebemos três respostas: da Ana Neves, do Alberto Canelas (Queluz) e do António Lucas (Castelo Mendo). Em compensação, todas levaram o problema até ao fim, incluindo as extensões, e a do Alberto é um verdadeiro tratado sobre este tipo de problemas, generalizando-o em várias direcções.

A primeira tentação é calcular o número ...

7 elevado a 7 é 823543.

7 elevado a 823543 é já um número muitíssimo grande, com mais de 695 mil algarismos. Seria preciso um caderno bem grande só para o escrever. Calculá-lo, só com a ajuda de um bom computador.

Finalmente, 7 elevado a este último número é de tal modo grande que, actualmente, nem com os melhores computadores se conseguiria. O resultado é um número inimaginável, com mais algarismos do que o número de átomos do universo conhecido. Mesmo que conseguíssemos escrever um algarismo em cada átomo, não haveria átomos suficientes para o fazer.

Então, como fizeram os nossos dois leitores, vamos tentar descobrir regularidades nas terminações das potências de 7.

7 elevado a 1 termina em 07

7 elevado a 2 termina em 49

7 elevado a 3 termina em 43

7 elevado a 4 termina em 01

7 elevado a 5 termina em 07

7 elevado a 6 termina em 49

Não é preciso continuar. As terminações repetem-se de 4 em 4.

Imaginemos, por exemplo, que queríamos saber a terminação de 7 elevado a 2002. Como 2002 é um múltiplo de 4 mais 2, a terminação vai ser a mesma de 7 elevado a 2, ou seja, 49.

Voltemos ao nosso problema.

Seja **A** = "7 elevado a 7", que já sabemos que termina em 43.

Mas, terminando em 43, **A** é um múltiplo de 4 mais 3, logo:

B = "7 elevado a A" vai ter a mesma terminação que 7 elevado a 3, ou seja 43.

Finalmente, o número procurado é "7 elevado a B". Como **B** é também um múltiplo de 4 mais 3, a sua terminação é igual à de 7 elevado a 3, ou seja, 43.

Para as potências de 6, o processo a seguir é o mesmo. Rapidamente descobrimos que as terminações se repetem com período 5.

Expoente	5n	5n+1	5n+2	5n+3	5n+4
Terminação	76	56	36	16	96



Logo, 6^6 termina em 56 (aliás, podíamos mesmo calculá-lo: é 46656).

Como este número é um múltiplo de 5 mais 1:

6^6 também termina em 56 e é portanto um múltiplo de 5 mais 1. Logo:

6^{6^6} termina em 56.

Faltam agora os restantes casos, as terminações dos números do tipo N^{N^N} com N de 2 a 9.

Mas o Alberto Canelas não ficou por aqui. Resolveu investigar todos os

valores de **N** até 100 ... Eis o que obteve, sendo **P** o período e **T** a terminação. (Tabela 1)

E ainda foi mais longe. Investigou também os três últimos algarismos destas potências para N até 10. (Tabela 2)

N	P	T	N	P	T	N	P	T	N	P	T	N	P	T
1	1	[1]	21	5	21	41	5	41	61	5	61	81	5	81
2	20	36	22	20	96	42	20	56	62	20	16	82	4	76
3	20	87	23	20	47	43	4	07	63	20	67	83	20	27
4	10	96	24	2	76	44	10	56	64	10	36	84	10	16
5	1	25	25	1	25	45	1	25	65	1	25	85	1	25
6	5	56	26	1	76	46	5	96	66	5	16	86	5	36
7	4	43	27	20	83	47	20	23	67	20	63	87	20	03
8	20	56	28	20	96	48	20	36	68	4	76	88	20	16
9	10	89	29	10	69	49	2	49	69	10	29	89	10	09
10	1	00	30	1	00	50	1	00	70	1	00	90	1	00
11	10	11	31	10	31	51	2	51	71	10	71	91	10	91
12	20	16	32	4	76	52	20	36	72	20	96	92	20	56
13	20	53	33	20	13	53	20	73	73	20	33	93	4	93
14	10	36	34	10	16	54	10	96	74	2	76	94	10	56
15	2	75	35	2	75	55	2	75	75	2	75	95	2	75
16	5	16	36	5	36	56	5	56	76	1	76	96	5	96
17	20	77	37	20	17	57	4	57	77	20	97	97	20	37
18	4	76	38	20	16	58	20	56	78	20	96	98	20	36
19	10	79	39	10	59	59	10	39	79	10	19	99	2	99
20	1	00	40	1	00	60	1	00	80	1	00	100	1	00

Tabela 1.

N	P	T	N	P	T
1	1	[1]	6	25	656
2	100	536	7	20	343
3	100	987	8	100	856
4	50	096	9	50	289
5	2	125	10	1	000

Tabela 2.