Modelação e Aplicações na Análise Numérica*

William P. Fox e Richard D. West

O artigo que se segue apresenta algumas ideias que têm sido desenvolvidas pelos auiores em projectos na área da análise numérica e onde têm sido utilizadas as tecnologias para realizar diferentes abordagens à resolução de problemas.

A modelação e as aplicações têm vindo a tornar-se um tema central de todos os cursos ensinados por estes autores. Com dezoito anos de experiência de uso de projectos em análise numérica, Fox e West começaram a escrever um livro de projectos que pode ser usado em cursos de análise numérica ou integrado em cursos de álgebra do secundário e/ou em cursos baseados no cálculo. Nos últimos dez anos, tanto o computador como a calculadora gráfica mudaram o contexto de aprendizagem dos alunos em muitas áreas, especialmente na análise numérica. A nossa apresentação no ICTCM baseou-se no uso da TI-83 Plus como um "menor denominador comum" da tecnologia. Sentimos que esta era a tecnologia acessível a todos e seria muito útil a professores de tópicos relacionados com a computação numérica.

Enquadramento. Nós trabalhámos conjuntamente no Departamento de Ciências Matemáticas na Academia Militar dos Estados Unidos em West Point, NY, desde 1990 até 1998. Este foi um período de grandes mudanças na matemática em West Point. A ênfase de todos os currículos de matemática mudou das tradicionais técnicas de papel e lápis para uma abordagem de modelação suportada pela tecnologia. Durante este período West dirigiu uma sequência de dois cursos de análise numérica que tinham sido desenvolvidos anteriormente no início dos anos 80, e Fox desenvolveu e escreveu um conjunto de disciplinas sobre modelação para os nossos especialistas matemáticos. Os projectos que apresentámos na nossa sessão têm sido usados em muitos locais durante os últimos vinte anos e continuamos a ver novos usos para estes projectos enquanto ensinamos na Francis Manion University.

O Interface da Calculadora. Com a tecnologia actual há muitas abordagens que podem ser levadas a cabo com vista à representação e compreensão de uma solução numérica de um problema. Geralmente, a representação numérica de uma solução de um problema é uma tabela de valores-solução, os quais podem ser exactos ou aproximados. As quatro abordagens que a tecnologia actual realça são: (1) a abordagem gráfica ou geométrica, (2) a abordagem recursiva ou iterativa, (3) a abordagem de sistema dinâmico discreto (ou sucessão), e (4) a abordagem de programação. A abordagem gráfica ajuda o aluno na compreensão da aproximação. Os modos TRACE e TABLE da calculadora gráfica apresentam o aspecto geral do gráfico e fornecem ao utilizador valores numéricos específicos. A abordagem recursiva e iterativa mostra como uma folha de cálculo trabalha para produzir uma solução numérica. Um gráfico discreto destes valores dá uma ideia mais geral de uma função subjacente. A maioria dos algoritmos em análise numérica podem ser escritos como um sistema dinâmico discreto ou um sistema de equações de diferenças. Nós achamos que esta abordagem discreta da modelação é intuitiva para os alunos e com um trabalho introdutório diminuto é acessível à maioria dos alunos. Finalmente, a abordagem mais tradicional para soluções numéricas é escrever programas para os algoritmos à medida que são desenvolvidos. Este é um aspecto menos acessível da calculadora, mas muito importante para os alunos compreenderem a lógica do computador e adquirirem capacidade de desenvolverem os seus próprios programas. Na nossa sessão, apresentámos todas estas abordagens e encorajámos os professores a escolher a abordagem que melhor se adapta aos objectivos do seu curso.

Análise do erro. Um dos principais objectivos de qualquer curso introdutório de análise numérica é a compreensão da medida do erro. Em termos de cálculo, nós estamos a responder à questão "quão perto é perto?" Habitualmente a primeira oportunidade para enfrentar a análise do erro está em planear um critério de paragem para algum algoritmo simples tal como o método da bissecção. A discussão envolve erro absoluto, erro relativo, e quando é numericamente $f(x)=0$? Eventualmente, a discussão transforma-se numa discussão de dígitos significativos e qual o critério que dará o número de dígitos que desejamos tão eficientemente quanto possível. Consideramos que uma boa definição de dígitos significativos em termos de erro relativo fornecida no início do curso é muito útil. Nós usamos a definição apresentada na 6ª edição de Burden & Faires. Com as muitas abordagens diferentes para o ensino da compreensão de determinados algoritmos, o critério de paragem pode ser executado interactivamente, a partir de uma tabela de valores obtidos, ou de dentro de um programa .

Projectos. Como dissemos anteriormente, muitos dos projectos apresentados aqui foram desenvolvidos durante os últimos vinte anos em West Point. Apresentámos estes projectos no contexto das suas disciplinas além da matemática, de modo a serem relevantes para os alunos ou para o seu futuro. Assim, chamámos a estes projectos interdisciplinares. Muitas vezes usamos estes projectos de um modo sumativo, depois da aprendizagem inicial ter lugar, para cimentar a compreensão do aluno. Contudo, temos usado estes projectos de um modo formativo, para realçar a aprendizagem de algo novo. Finalmente, temos utilizado ocasionalmente estes projectos como parte de um curso, onde os alunos fazem a sua própria pesquisa e aprendizagem através da sua realização.

Na sessão não pudemos cobrir todos os tópicos de análise numérica, pelo que escolhemos aqueles que faziam sobressair a TI-83 Plus e a modelação com sistemas dinâmicos discretos. Os tópicos que escolhemos eram soluções de equações de uma variável, soluções de problemas de valor inicial, aproximações, um pouco de álgebra linear, e sistemas de equações de diferenças.

Sistemas dinâmicos discretos. Usando o modelo de palavras *futuro = presente + mudança* mostrámos as muitas vantagens de utilizar equações de diferenças para abordar os problemas. Provavelmente a vantagem mais importante é que estes modelos são intuitivos e facilmente compreendidos pelos alunos em muitos níveis. Dependendo do nível dos alunos ou dos objectivos do curso, podemos usar tanto a notação de função como a notação sequencial. Iterando estas relações recursivas podemos fornecer ideias rápidas e muitas vezes respostas a problemas sem soluções analíticas. Assim, a distinção entre equações lineares e não lineares torna-se transparente e discutível. A extensão a muitas variáveis dependentes também é simples. Uma escolha pedagógica será usar ou não uma abordagem de álgebra linear ou ficar com a abordagem iterativa aos sistemas de equações de diferenças. Em resumo, fácil acesso, abordagens flexíveis para obter a solução, e a oportunidade para aumentar a complexidade, rapidez, faz com que a modelação através de um sistema dinâmico discreto seja uma escolha óbvia para nós.

Procura de raízes

Quando uma máquina tem t anos, ela rende uma média de e^{-t} dólares por ano. Depois de t anos de uso a máquina pode ser vendida como sucata por $1/(t+1)$ dólares. Quantos anos a companhia deve ter a máquina de modo a maximizar o seu rendimento?

$$R(x) = \int_0^T e^{-t}dt + \frac{1}{t+1}$$

Para maximizar o rendimento, tomamos a derivada e pômo-la igual a zero.

$$R'(x) = e^{-t} - (t+1)^{-2} = 0$$

Aqui, temos uma função transcendente que não permite obter uma solução sob uma forma fechada. Vamos experimentar métodos numéricos utilizando a TI-83 Plus.

- Método da Bissecção
- Método de Newton
- Rotinas internas da calculadora, Plot, Calc de zeros (por exemplo)

Problemas de valor inicial

Dado o modelo de equações diferenciais para a disseminação de uma doença contagiosa ou um modelo populacional:

$$\frac{dN}{dt} = .25N(10-N),\ N(0)=2$$

vamos analisar completamente o seu comportamento.

(a) Dado que se trata de uma equação diferencial ordinária autónoma (EDO) esboce uma análise gráfica completa:

1. Desenhe o gráfico dN/dt em função de N. Descubra e assinale todos os pontos estacionários.
2. Determine o valor onde a taxa de variação da doença é mais rápida. Porque é que precisa deste valor?
3. Desenhe o gráfico de N em função de t partindo das seguintes condições iniciais:
   $N(0)=2$, $N(0)=7$, e $N(0)=14$.
4. Descreva a estabilidade de cada ponto estacionário.

(b) Resolva esta EDO usando separação de variáveis (Sugestão: Poderá precisar de uma decomposição em elementos simples). Assegure-se que encontra o valor da constante arbitrária c usando a condição inicial $N(0)=2$.

(c) Usando a solução analítica de (b), desenhe o gráfico de N em função de t.

(d) Compare o seu gráfico actual com a solução gráfica de (a.3).

(e) A partir do gráfico de (c), estime o valor de $N(.5)$ e $N(5)$.

(f) Descubra os valores reais destas duas soluções $N(.5)$ e $N(5)$ usando a solução analítica da parte (b).

(g) Calcule o tempo, t, quando N varia rapidamente usando a condição inicial $N(0)=2$.

(h) Use o Método de Euler com $h=1$, $h=0.5$ e $h=0.1$ para aproximar a solução à EDO para $N(.5)$ e $N(5)$. Descubra o erro relativo ou as diferenças absolutas.

(i) Desenhe o gráfico das aproximações de Euler para $h=0.1$, $h=0.5$ e $h=1.0$ e compare estes gráficos com a análise gráfica de (a) e o gráfico desenhado em (d). Discuta estes gráficos — pode comparar e contrastar estes gráficos.

(j) Repita as questões (h) e (i) usando o método de Runge-Kutta.

Sistemas de EDs (Equações diferenciais ou equações de diferenças). Os dois projectos apresentados de seguida podem ser modelados como sistemas de equações diferenciais ou como sistemas de equações de diferenças (previamente chamadas sistemas dinâmicos discretos). Para a sessão escolhemos modelá-los com equações de diferenças para mostrar as capacidades da calculadora gráfica TI83-Plus.

A poluição nos Grandes Lagos. A maioria da água que entra no Lago Erie vem do Lago Huron, e a maioria da água que entra no lago Ontario vem do lago Erie. Suponha que a poluição dos lagos tinha terminado excepto a poluição provocada pelas fábricas de alumínio no Lago Huron e no Lago Ontario. Quanto tempo levaria para que o nível de poluição em cada lago fosse reduzido em 10% do seu nível actual? Muitas hipóteses são formuladas acerca da mistura, da não entrada de poluentes no Lago Huron, e do significado de terminar a poluição. Então é dito aos alunos que em cada ano a percentagem de água substituída no Lago Huron, Erie e Ontario é aproximadamente de 10%, 35% e 11%, respectivamente. Adicionalmente, as fábricas de alumínio no Lago Huron e no Lago Ontario despejam directamente 35 unidades de poluentes em cada lago em cada ano. Os níveis iniciais de poluentes em Huron, Erie e Ontario são 4500, 2000, 2600, respectivamente.

(a) Escreva um sistema dinâmico discreto usando um sistema de equações de diferenças, que modele este processo.
(b) Itere este sistema para pelo menos 50 anos para conseguir obter uma ideia dos três níveis de poluição à medida que o tempo passa.
(c) Este sistema tem um vector de equilíbrio?
(d) Determine quanto tempo levaria para que cada lago visse reduzido em 10% o seu presente valor.
(e) Descreva o comportamento a longo prazo deste sistema.

Um problema com gosto a peixe. Considerando várias hipóteses, como a taxa de crescimento da truta e da perca em isolamento e factores de como as interacções afectam as populações da truta e da perca num viveiro, será que estas duas espécies podem coexistir no viveiro?

- A taxa de crescimento da truta e da perca em isolamento é de 15% e 10%, respectivamente.
- O decréscimo de trutas devido à competição é .015×nº de trutas×nº de percas.
- O decréscimo de percas devido à competição é .011×nº de trutas×nº de percas.
- As quantidades iniciais de trutas e percas são de 15000 cada.

(a) Modele a população de trutas e percas por meio de um sistema de equações de diferenças.

(b) Desenhe o gráfico da população de trutas em função do tempo e de percas em função do tempo pelo menos durante cinquenta anos ou épocas. Qual a população que se extingue?

(c) Desenhe o gráfico da população de trutas em função da população de percas. Novamente, qual a população que desaparece? Parece que as duas populações se aproximam de um ponto de equilíbrio?

(d) Se existir, determine esse ponto de equilíbrio onde as duas populações poderiam coexistir.

(e) Agora experimente com diferentes populações iniciais e desenhe os respectivos gráficos (trutas em função das percas). Por exemplo, ponha a população inicial de trutas igual a 5000, 8000, 15000 e 20000 para uma população de percas de 5000, 8000, 15000 e 20000. Obteremos dezasseis gráficos. Qual é a tendência geral que observa? Como é que esta tendência ajuda alguém a gerir as trutas e as percas neste viveiro?

Em síntese. Os autores, assim como os seus alunos, gostaram de usar a modelação matemática para adicionar "realismo" à matemática discutida. Os exemplos aqui apresentados são apenas a "ponta do iceberg" de projectos que temos usado em inúmeros cursos de matemática. Os autores têm desenvolvido programas para a TI-83 Plus, folhas de cálculo em EXCEL e programas em MAPLE assim como exemplos para: Procura de Raízes (Método da Bissecção e de Newton), Problemas de Valor Inicial (Métodos de Euler e Runge-Kutta), Aproximações (Splines cúbicos e Diferenças Divididas) e Sistemas Dinâmicos Discretos. Contacte-nos para receber cópias ou informação acerca de qualquer programa ou projecto (e-mail: rwes@fmarion.edu ou wfox@fmarion.edu).

Referências

Burden, R. L. & Faires, J. D. (1997). *Numerical Analysis*, 6th Ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.

Ellis, W., Bauldry, W., Fiedler, J., Giordano, F., Judson, P., Lodi, E., Vitray, R., & West, R. (1999). *Calculus: Mathematics and Modeling, Updated Preliminary Edition*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Fox, W. P., Giordano, F., & Weir, M. (2002). *A first Course in Mathematical Modeling*, 3rd Ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.

William P. Fox e Richard D. West
Francis Marion University
Depart. de Matemática
Florence, Carolina do Sul
Traduzido por Helena Fonseca e
revisto por Jaime Carvalho e Silva

* Sessão apresentada no XIV ICTCM-International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Baltimore, 2001.