

# O problema do ProfMat 2002

*José Paulo Viana*

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat2002 de Viseu consistiu na resolução do problema *Três Lógicos e Oito Discos*:

Encontrei três matemáticos brilhantes, capazes dos melhores raciocínios lógicos.

Mostrei-lhes oito discos: quatro vermelhos e quatro pretos. Depois, coloquei dois discos nas costas de cada um e escondi os dois que sobraram. Cada matemático podia ver os discos dos outros mas, claro, não conseguia ver os seus.

A seguir, fui-lhes perguntando sucessivamente se sabiam que discos tinham nas costas. Cada um, depois de ouvir as respostas anteriores e de pensar um pouco, foi respondendo:

Augusto — Não.

Beatriz — Não.

Carlos — Não.

Augusto — Não.

Beatriz — Sim.

Como é que a Beatriz descobriu e que discos tem ela?

Houve dois métodos que os concorrentes seguiram para resolver o problema.

## 1º. Método de eliminação de hipóteses

Este foi o processo mais utilizado. Começamos por fazer a lista de todas as hipóteses possíveis de distribuição dos discos (Quadro 1).

| Caso | Augusto | Beatriz | Carlos |
|------|---------|---------|--------|
| 1    | V V     | V V     | P P    |
| 2    | V V     | V P     | V P    |
| 3    | V V     | V P     | P P    |
| 4    | V V     | P P     | V V    |
| 5    | V V     | P P     | V P    |
| 6    | V V     | P P     | P P    |
| 7    | P P     | P P     | V V    |
| 8    | P P     | V P     | V P    |
| 9    | P P     | V P     | V V    |
| 10   | P P     | V V     | V V    |
| 11   | P P     | V V     | V P    |
| 12   | P P     | V V     | P P    |
| 13   | V P     | V V     | V P    |
| 14   | V P     | V V     | P P    |
| 15   | V P     | P P     | V V    |
| 16   | V P     | P P     | V P    |
| 17   | V P     | V P     | V V    |
| 18   | V P     | V P     | P P    |
| 19   | V P     | V P     | V P    |

Quadro 1.

A partir das respostas dos matemáticos, vai ser possível ir eliminando as hipóteses.

O Augusto vê quatro discos, dois em cada um dos outros personagens. Se os quatro discos fossem todos da mesma cor (por exemplo, vermelhos), ele saberia a cor dos seus (pretos neste caso). Como ele responde "Não" podemos eliminar os casos 6 e 10.

O mesmo se passa quando a Beatriz diz "Não": Concluímos que não está a ver discos todos da mesma cor. Eliminam-se então os casos 4 e 12.

Também, pela resposta negativa do Carlos, se pode eliminar as hipóteses 1 e 7 (em que ele veria os discos todos iguais).

Mas esta resposta do Carlos ainda nos dá mais indicações. Se estivéssemos no caso 5, em que ele vê VV e PP, ele saberia que não tinha PP (porque o Augusto teria descoberto antes) nem VV (porque a Beatriz teria descoberto antes) e portanto teria respondido "Sim". Logo, eliminamos a hipótese 5.

Um raciocínio idêntico permite eliminar o caso 11.

Passamos à segunda volta de respostas. Volta a ser o Augusto.

No caso 14, ele saberia que não tinha PP (porque a Beatriz teria falado antes) nem VV (porque assim o Carlos teria descoberto antes) e então saberia que tinha um disco de cada cor e responderia "Sim". Como não o fez, é porque não estamos na hipótese 14.

O mesmo raciocínio permite eliminar o caso 15.

Mas, ainda, a partir da segunda resposta negativa do Augusto se podem tirar mais conclusões.

Se estivessemos no caso 13, o Augusto pensaria:

“Se eu tivesse VV, o Carlos teria descoberto logo. Se eu tivesse PP, o Carlos estaria a ver PP e VV e teria também descoberto (ver raciocínio anterior do Carlos). Logo eu tenho VP”.

Mas como o Augusto não falou, é porque não estamos no caso 13.

Por um raciocínio idêntico ao anterior, podemos eliminar a hipótese 16.

Sobram os casos 2, 3, 8, 9, 17, 18 e 19. Mas em todos eles a Beatriz tem um disco de cada cor. Logo, a Beatriz pode dizer que sabe: tem um disco vermelho e outro preto.

## 2º. Método de dedução pura

Aqui, vão-se fazendo raciocínios que permitirão chegar à resposta. Das várias deduções que apareceram, a mais curta e elegante é, sem dúvida, a do Miguel Mata, que assim tem direito ao 1º Prémio (e depois de a lermos até nos parece que o problema é fácil...):

Neste problema, a sequência de respostas negativas é extremamente importante. Sempre que um dos matemáticos responde “Não” por falta de dados, está a prestar informações preciosas aos outros. As três primeiras respostas são negativas porque um deles tem dois discos de cores diferentes. Caso contrário, os quatro discos de dois dos matemáticos seriam iguais e o outro matemático saberia que discos tinha nas costas e teria respondido “Sim”. O Carlos, que tem esta informação antes de

responder, considera que não tem dados para acertar porque vê dois discos de cores diferentes num dos seus colegas.

Resumindo, ao fim das três primeiras respostas sabemos todos que ou a Beatriz ou o Augusto têm dois discos de cores diferentes.

Se a Beatriz tivesse dois discos da mesma cor, o Augusto sabia que tinha um disco de cada cor, mas ele volta a responder negativamente pelo que a Beatriz só pode ter dois discos de cores diferentes.

É a vez de a Beatriz responder...

Além disso, antes de apresentar esta sequência de raciocínios, o Miguel tinha começado por fazer as seguintes considerações:

É interessante verificar que fazendo um pouco de “batota” é possível afirmar à partida que a Beatriz tem dois discos de cores diferentes. Isto porque o problema só tem sentido se tiver solução e esta é a única solução possível. Isto acontece porque quem responde a este problema nunca poderá concluir que a Beatriz tem dois discos pretos ou dois discos vermelhos, visto não ser possível distinguir estas duas situações.

Finalmente, o José Manuel Duarte acrescentou uma segunda resposta: “Descobri uma resposta muito mais sintética e bela, mas a carga da esferográfica acabou-se”.

José Paulo Viana  
Esc. Sec. Vergílio Ferreira

## Lista de participantes

### Individuais:

Alexandra Mateus  
António Amaral  
Augusto Taveira  
Carla Dias  
Elisabete Rodrigues  
Idílio Ruivo  
Jorge Ferreira  
José Manuel Duarte  
Manuel Silva  
Miguel Mata  
Pedro Oliveira  
Ségio Valente

### Em equipa:

Ana Morais, Avelino Sousa e Joana Morais  
Célia Lobo, M<sup>a</sup> José Costa e Edite Alves  
Graça Lopes e Armando Fernandes Iva & Nuno Angelino  
Luís Santos, Manuel Marques e José Luís Pegada  
Mária e António Almeida  
ZéZé (José Carlos Campos e José Fernandes)

## Premiados e Prémios

- 1º. Miguel Mata  
*Calculadora Gráfica Voyage 200, oferta Texas Instruments.*
- 2º. José Carlos Campos e José Fernandes  
*Calculadora Gráfica TI-89, oferta Texas Instruments.*
- 3º. Manuel Silva  
*Calculadora Gráfica TI-83, oferta Texas Instruments.*
- 4º. Luís Santos, Manuel Marques e José Luís Pegada  
*Quatro livros da Coleção “Ciência e Educação”, oferta Porto Editora*
- 5º. Augusto Taveira  
*“O Diabo dos Números”, um livro oferta das Edições ASA*

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 31 de Julho de 2003. Por favor, contactar a sede em Lisboa da APM. Os vencedores do concurso do ano passado e que ainda não receberam os prémios devem também contactar a sede da APM.